1. domača naloga

Naloge rešite v programu Matlab. Datoteke, uporabljene pri reševanju, oddajte v ZIP datoteki `ime_priimek_vpisnastevilka_dn1.zip` v spletni učilnici dan pred kvizom.

1. Dana je simetrična tridiagonalna matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Naj bo $n = 100$. Z uporabo inverzne iteracije pri začetnem vektorju $(1, 0, \ldots, 0)$ izračunajte približke za lastne vrednosti matrike A na natančnost 10^{-10}, ki se po absolutni vrednosti najmanj razlikujejo od 0, 1, 3, 4. Primerjajte jih z rezultati, ki jih vrne vgrajena funkcija `eig`.

2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

   Vzemite matriko X, ki jo dobite z ukazi

   ```
   rand('state',0); X=rand(5);
   ```

   in naj bo $B = XAX^{-1}$.

   (a) Koliko korakov potrebuje osnovna QR iteracija brez premikov in brez redukcije na zgornjo Hessenbergovo matriko za začetno matriko B, da so vse absolutne vrednosti poddiagonalnih elementov pod 10^{-8}?

   (b) Matriko B reducirajte na zgornjo Hessenbergovo matriko H. Koliko korakov potrebuje QR iteracija z enojnim pomikom za začetno matriko H, da so vse absolutne vrednosti poddiagonalnih elementov pod 10^{-8}?

   (c) Tako kot v točki (b), le da namesto enojnih uporabite dvojne pomike.

3. Izračunajte vrednosti funkcije $f(x) = \cos^2(2 + 2x)$ v točkah $x_i = \frac{i}{5}$ za $i = 0, 1, \ldots, 5$. Izračunajte deljene diference, ki določajo Newtonov interpolacijski polinom p za funkcijo f na točkah x_i. Napišite funkcijo za računanje vrednosti interpolacijskega polinoma s pomočjo posplošenega Hornerjevega algoritma. Izračunajte vrednosti v točkah $x = 0.25$ in $x = 0.95$ in ju primerjajte z vrednostmi $f(x)$ v obeh točkah. Izračunajte napako$\|f - p\|_{\infty,\mathbf{x}}$ za $\mathbf{x} = (i/100)_{i=0}^{100}$.

4. Dana je funkcija $f(x) = \exp(-x + \sin(10x))$ in zaporedje stičnih točk $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Hermitov kubični zlepek S,

$$S\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad S|_{[x_i, x_{i+1}]} = P_i \in \mathbb{P}_3, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

je določen s pogoji

$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= f(x_i), \quad P_i'(x_i) = f'(x_i), \\ P_i(x_{i+1}) &= f(x_{i+1}), \quad P_i'(x_{i+1}) = f'(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Razdelite interval $[0,1]$ na 6 ekvidistantnih delov, izračunajte deljene diference, ki določajo kubični polinom P_i za vse $i = 0, 1, \ldots, n-1$ in določite vrednosti $S\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$. Narišite graf funkcije f in interpolacijskega zlepka S.