2. domača naloga

Naloge rešite v programu Matlab. Datoteke, uporabljene pri reševanju, oddajte v ZIP datoteki `ime_priimek_vpisnastevilka_dn2.zip` v spletni učilnici dan pred kvizom.

1. Dana je funkcija $f(x) = e^x$. S pomočjo simetričnih deljenih diferenc

$$f'(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h} - \frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(\xi),$$

$$f''(x_1) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi),$$

   aproksimirajte $f'(0)$ and $f''(0)$. Kakšne približke dobite, če za korak diskretizacije izberete $h = 10^{-j}$, $j = 2, 3, \ldots, 9$? Pri katerem izmed preizkušenih korakov je napaka najmanjša?

2. Izračunajte približek za integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{\sin x}{1 + x^2}\, dx$$

   z uporabo 3/8 pravila sestavljenega iz 10 in 20 osnovnih pravil. Iz izračunanih vrednosti ekstrapolirajte točnejšo vrednost integrala. Primerjajte dobljeno vrednost z rezultatom, ki vam ga vrne vgrajena funkcija `integral`, pri kateri nastavite relativno in absolutno natančnost na 10^{-15}.

3. Dana je diferencialna enačba drugega reda:

$$y'' + (y^2 - 1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

   Naj bo $h = 0.01$. Prevedite enačbo drugega reda na sistem diferencialnih enačb prvega reda.

   (a) Dobljen sistem rešite z implicitno Eulerjevo metodo. Na vsakem koraku je potrebno določiti vrednost y_{n+1} kot rešitev nelinearne enačbe. Rešitev poiščite preko navadne iteracije.

   (b) Za reševanje sistema uporabite trapezno pravilo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right).$$

   Če imamo dober začetni približek, ki ga navadno dobimo z ustrezno eksplicitno metodo, ki ji v tem primeru pravimo *prediktor*, in dovolj majhen korak h, je večinoma dovolj že ena iteracija (trapeznemu pravilu v tem primeru pravimo *korektor*). Za prediktor uporabite eksplicitno Eulerjevo metodo.

Izračunajte rešitev na intervalu $[0, 5]$. Narišite grafa obeh rešitev ter izpišite približke za $y(i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Primerjajte jih z vrednostmi, ki jih vrne Matlabova vgrajena funkcija `ode45`, pri kateri nastavite relativno in absolutno natančnost na 10^{-12}.

4. Sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{-2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}, \\ \ddot{y} &= \frac{-2y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}, \end{aligned}$$

določa trajektorijo $r(t) = (x(t), y(t))$ gibanja telesa v ravnini v odvisnosti od časa t. Naj bo telo ob času $t = 0$ v točki $r(0) = (0, 1)$ in naj velja $\dot{r}(0) = (1, -1)$. Prevedite problem na sistem štirih diferencialnih enačb prvega reda ter ga rešite z Runge–Kutta metodo reda 4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

s korakom $h = 0.01$. Izpišite položaje telesa ob časih $t = i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Primerjajte jih z vrednostmi, ki jih vrne Matlabova vgrajena funkcija `ode45`, pri kateri nastavite relativno in absolutno natančnost na 10^{-12}.