Tayf Bilimine Giriş Proje Ödevi 1: Planck Yasası

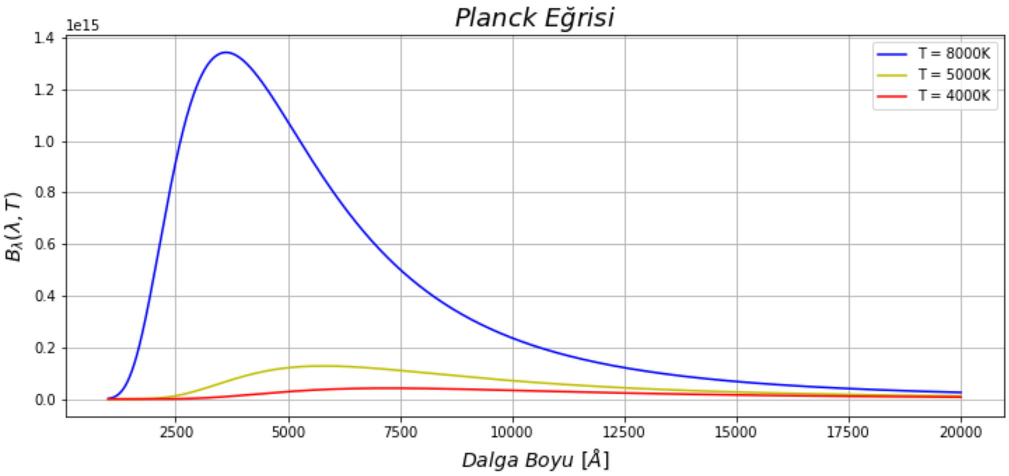
Enes Selam Kaçan
03.04.2021

1.Her bir eğrinin altında kalan toplam alanı hesaplayabilir misiniz? Bu alanların değerlerinin T ile orantılı olduğunu göstermek için yeni bir grafik oluşturun. Alan değerini A ile gösterelim. Stefan Boltzman eşitliğini logaritmik olarak ele alırsak (log A α 4 log T) olacaktır. Buna göre, logaritmik değerler kullanarak T ve A grafiğini elde edin.

Sıcaklığı 0 K' nin üzerinde olan her cisim elektromanyetik ışıma yapar. Max Planck 1900 yılında yaptığı çalışma da bu ışımayı:

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \left(\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}\right)$$

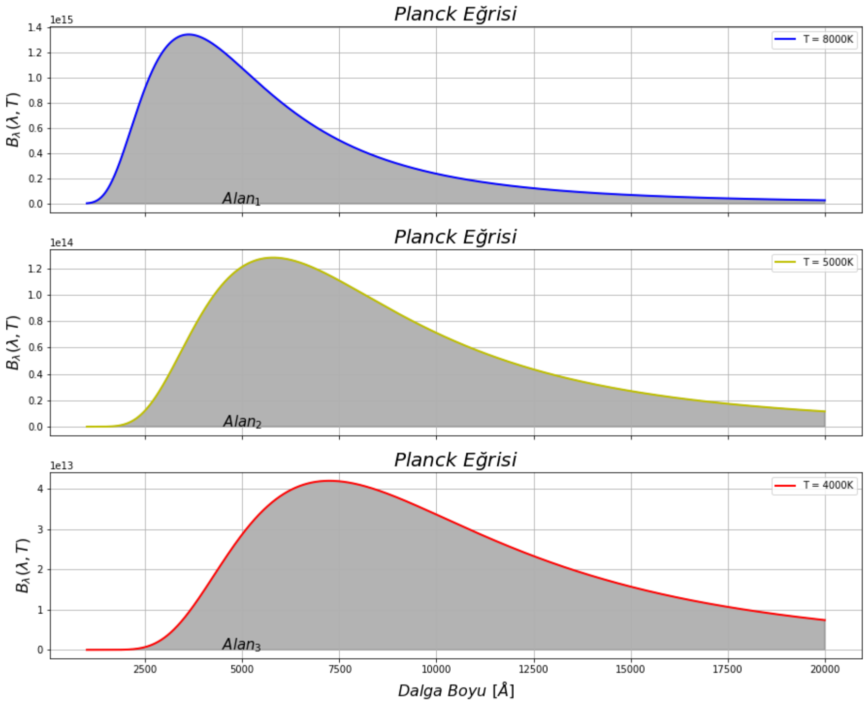
şeklinde tanımlar. Bu denklemde h; Planck sabiti, λ; dalga boyu, t; sıcaklık ve k; Boltzman sabitidir ve bu denklem Planck yasası olarak anılır. Planck yasasını, sabit sıcaklıkta ve bir dalga boyu aralığında hesaplarsanız elde edeceğiniz grafik; kara cismin yaydığı ışınımın elektromanyetik tayfını verir.



Şekil 1: 8000K, 5000K ve 4000K sıcaklılara sahip farklı kara cisimlerin elektromanyetik tayfı.

Planck eğrisinin altında kalan alan nümerik olarak hesaplamak mümkündür. Eğrinin altın belirli dalga boyu aralıkları ile dikdörtgeneler oluşturulur ve dikdörtgenin alanı hesaplanır. Bu alanların toplamı eğrinin altında kalan alanı yaklaşık olarak verir. Dalga boyu aralığı ne kadar küçük alınırsa alının gerçek değerine o kadar yaklaşılır. (Ben dalga boyu aralığını 1 Angstrom olarak aldım ve Planck değerlerinin her ikisinden birini seçerek bir dikdörtgen alanlarını hesapladım)

$$A = \sum_{i=0}^{n/2} B_{2i} \cdot \lambda$$



Şekil 2: 8000K, 5000K ve 4000K için Planck eğrilerinin altında kalan alanlar.

- $T_1 = 8000K$ için $A_1 = 3.6 \times 10^{-18} cm^2$
- $T_2 = 5000K$ için $A_2 = 5.15 \times 10^{-17} cm^2$
- $T_3 = 4000K$ için $A_3 = 1.97 \times 10^{-17} cm^2$

Stefan Boltzman eşitliğini logaritmik olarak alırsak alan ve sıcaklık denkliğini verecektir:

$$F = \sigma T^4$$

$$\log(F) = \log(\sigma)\, 4\log(T)$$

$$\log(A) = \log(\sigma)\, 4\log(T)$$

800K, 5000K ve 4000K için çizdiğimiz Planck eğrilerinin altında kalan alanlar ile Planck sabitini hesaplamak mümkündür:

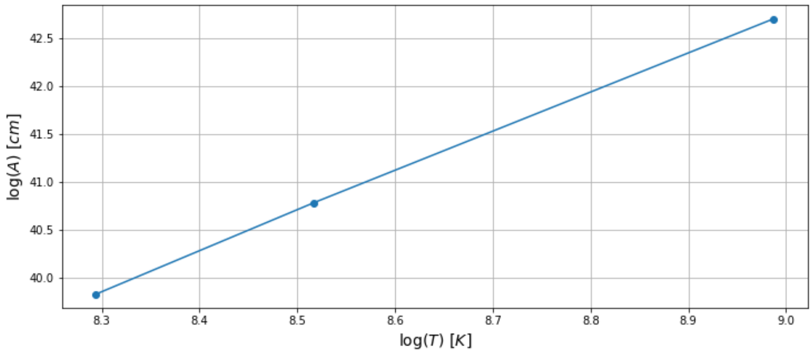
$$\sigma = 10^{\frac{\log(A)}{4*\log(T)}}$$

- $T_1 = 8000K$ için $\sigma_1 = 15.8\, erg\, cm^{-2} K^{-4}$
- $T_2 = 5000K$ için $\sigma_2 = 15.7\, erg\, cm^{-2} K^{-4}$
- $T_3 = 4000K$ için $\sigma_3 = 15.4\, erg\, cm^{-2} K^{-4}$

Bulduğumuz σ değeri sabittir ve gerçek değeri, $5.67 \times 10^{-10} erg\, cm^{-2} K^{-4}$ tür. Bizim Bulduğumuz değerlerle arasında gerçekten büyük bir fark var.

(Ben yapılacak işlemi tamamen yanlış anlamışım gibi geliyor. Ne yapacağımı bilemedim)

Logaritmik sıcaklık ve alan değerlerini kullanarak elde ettiğimiz grafik;

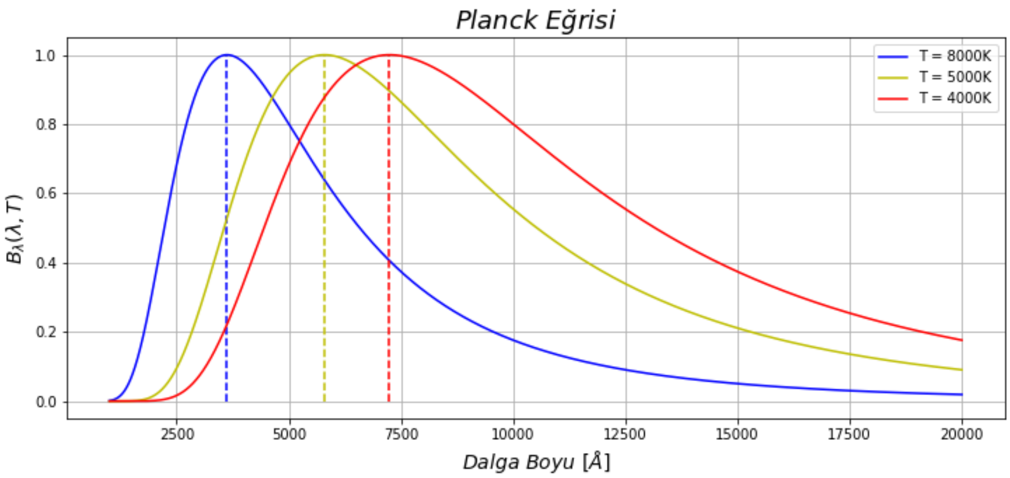


Şekil 3: 8000K, 5000K ve 4000K için logaritmik sıcaklık- alan grafiği.

Logaritmik sıcaklık-alan grafiğinin lineer olması bu değerler arasında üstel bir ilişki olduğunu kanıtlar.

2- Wien yasasını elinizdeki verilerden elde edebilirsiniz. Her bir grafikte λmaksimum değerini bulun. Bu değerleri x ekseninde T olan bir grafiğe aktarın. Grafiğin eğimini bulabilir misiniz? Elde ettiğiniz sonucu Wien Yasası ile kıyaslayın. Daha iyi sonuçlar elde etmek için grafiklerinizdeki λ adım aralığını arttırmanız gerekebilir.

Wien kayma yasası, cismin sıcaklığı arttıkça ışıma enerjilerinin maksimum olduğu dalga boyunun kısalacağını söyler. Eğrilerin normolize edilmiş halinde bu kaymayı daha iyi görmek mümkündür,



Şeki4: 800K 5000K ve 4000K için normolize edilmiş Planck eğrilerinin

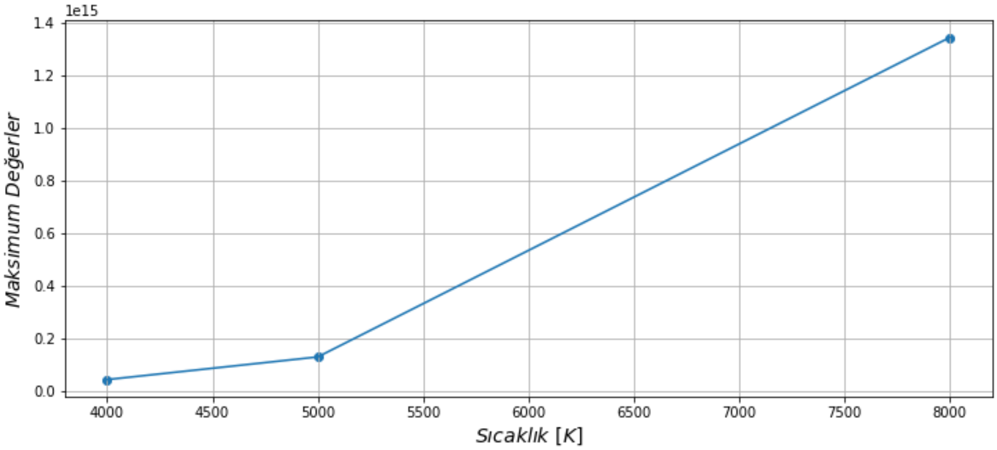
Cismin sıcaklığı ile maksimum enerjide yaydığı ışınım arasındaki bağıntı,

$$\lambda_m = \frac{2.8983}{T}$$

şeklinde verilir. Oluşturduğumuz Planck eğrilerinde bu denklem ile test edersek

- $T_1 = 8000K$ için $\lambda_1 T_1 = 28976000$
- $T_2 = 5000K$ için $\lambda_2 T_2 = 28986000$
- $T_3 = 4000K$ için $\lambda_3 T_3 = 28976000$

Cgs biriminde çalıştığımız için ondalık değerde bir farklılık var onun haricindeki farklılıklar çok ufak. Eğer dalga boyu aralığını düşürürsek daha doğru sonuca ulaşabilir.



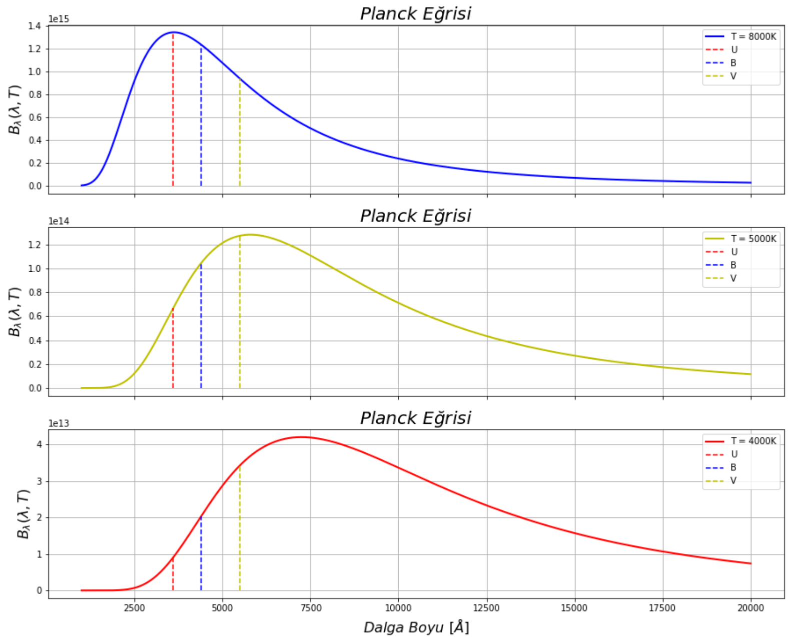
Şekil 5:

Wien yasasına göre bu grafiğin lineer olması gerekiyor. 5000K ne ait maksimum değeri lineerliği bozduğu gözleniyor. Lineer bir çizginin eğriliği,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

denklemiyle hesaplanabilir.

3- Fotometrik ölçümler için yaygın olarak kullanılan filtre sistemini dikkate alarak, U bandının λ= 3500 A, B bandının λ = 4500A ve V bandının λ = 5500 A değerlerine karşılık geldiğini varsayalım. Grafiğini çizdiğiniz yıldızların U-B ve B-V renklerini hesaplayabilir misiniz? Bu sonuçları yıldızlar için verilen B-V renk ve sıcaklık değerleri ile kıyaslayabilir misiniz? Bu konudaki yorumlarınızı yazın.



Şekil 6: 8000K, 5000K ve 4000K için Planck eğrilerinin UBV renkleri.

Sıcaklık	U (3600 Angstrom)	B (4400 Angstrom)	V (5500 Angstrom)
8000 K	1.3×10^{15}	1.2×10^{15}	9.3×10^{14}
5000 K	6.6×10^{13}	1×10^{14}	1.2×10^{14}
4000 K	9×10^{12}	2×10^{13}	3.4×10^{13}

Herhangi bir yıldızın morötesi kadiri ile mavi kadiri arasındaki fark; $U - B = m_U - m_B$, mavi kadiri ile görsel kadiri arasındaki fark ise; $B - V = m_B - m_V$' dir. Pogson formülüyle akıları bilinen cisimlerin görünür parlaklıkları arasındaki fark,

$$m_1 - m_2 = 2.5log10\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

$B_\lambda = I_\lambda$ olduğundan,

$$U - B = 2.5log10\left(\frac{B_{B_\lambda}}{U_{B_\lambda}}\right)$$

$$B - V = 2.5log10\left(\frac{V_{B_\lambda}}{B_{B_\lambda}}\right)$$

denklemleriyle hesaplanabilir. 8000K, 5000k ve 4000K sıcaklıklarındaki yıldızların B-V renkleri,

Sıcaklık	B-V
8000K	-0.3
5000K	0.2
4000K	0.56

şeklindedir. $B - V < 0$ ise o cismin mavi bölgede daha fazla erkeye sahiptir . $B - V > 0$ ı ise o cismin kırmızı bölgede daha fazla erkeye sahiptir. Tablodan anlayacağımız gibi Yıldızların sıcaklıkları arttıkça mavi bölgede daha fazla erkeye sahip olmaya başlıyor. Buradan çıkardığımız sonuç Wien kayma yasasını doğrular nitelikte.

4- Kara cisim dağılımının yıldızların enerji dağılımını açıklamada yeterli olduğunu düşünüyor musunuz? Varsa farklar nelerdir?

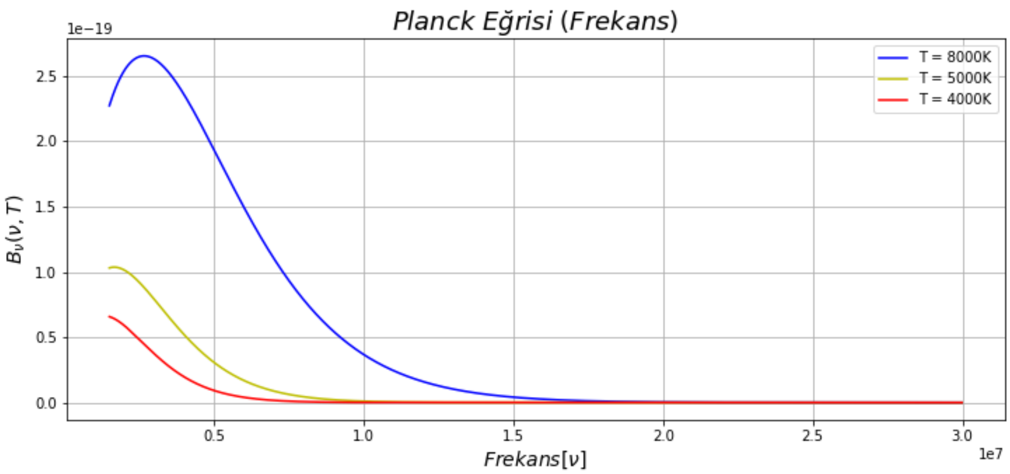
Kara cisim, üzerine düşen bütün ışığı soğuran ve sadece sıcaklığı ile ışıma yapan hayali bir cisimdir. Yıldızlar, üzerine düşen bütün ışığı soğuramaz. Buna örnek olarak çift yıldızlar verilebilir. Çift yıldızlarda gözlediğimiz ışınımın bir kısmı diğer yıldızdan gelen ışığın yansımasıdır. Fakat bu yansıma çok küçüktür. Yıldızlar hayali kara cismimize en yakın cisimlerdir, yansıma ile yaptıkları ışınım çok az olduğundan, yıldızları kara cisim olarak varsayabiliriz. Kara cisim varsayım ile hesapladığımız sıcaklığa "etkin sıcaklık" denir. Bu varsayımın, yıldızların parametrelerini kesin olarak belirlenmesinde yeterli olacağını düşünmüyorum. Fakat bütün yıldızlarda bu varsayımı yaptığımız için hata oranlarımız değişmez ve yıldızlar arsında kıyaslama yapmamıza engel olamaz.

5- (BONUS) Denklem 1'de verilen B_λ ifadesini, frekansa göre yani B_ν şeklinde bulabilir misiniz? Bunun için basit bir donuşum yeterli olmayacaktır.

$$B_\nu(\nu,T) = \frac{2h\nu^2}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Dalga boyundan frekansa geçiş için,

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$



Şekil 7: Frekansa göre Planck Eğrisi

Şekilde görüldüğü gibi cismin sıcaklığı arttıkça ışıma enerjilerinin maksimum olduğu frekans artıyor. Dalga boyunda ise bunun tam tersini görmüştük. Bu farkın nedeni, frekansın dalga boyu ile ters orantılı olmasıdır. (bknz. Son denklem)

(Not: Dalga boyu aralığını direk frekansa çevirdiğimden eğim tam olarak çıkmadı.)