



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Photonic communication systems

ELEC-H507

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Simon-Pierre GORZA

Année 2017 - 2018

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Simon-Pierre GORZA à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer

surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Table des matières

2	Optical waveguides	1
2.1	Geometrical-optics description	1
2.1.1	Step-index (SI) waveguides	1
2.1.2	Graded-index (GI) fibers	4
2.2	Electromagnetic analysis – Fields and modes	5
2.2.1	Step-index planar waveguides	5
2.2.2	Guides à saut d’index cylindriques	14
2.3	Fabrication des fibres optiques	22
2.4	Propriétés linéaires des fibres optiques	23
2.4.1	Atténuation du signal dans les fibres monomodes	23
2.4.2	Dispersion chromatique	24
2.4.3	Biréfringence et dispersion du mode de polarisation	32

Chapitre 2

Optical waveguides

2.1 Geometrical-optics description

2.1.1 Step-index (SI) waveguides

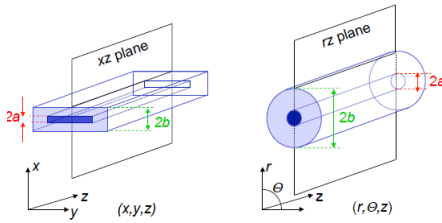


FIGURE 2.1

Effectuons une coupe dans le plan rz de la fibre. En optique géométrique, il faut que la dimension physique dans laquelle la lumière se propage soit plus grand que la longueur d'onde. Autrement dit

$$\lambda \ll a, b \quad (2.1)$$

Ceci est nécessaire afin de pouvoir modéliser la propagation par des rayons. Nous faisons l'hypothèse que le cœur et la gaine sont des diélectriques homogènes¹ où l'on suppose $n_1 > n_2$, les indices de réfractions du cœur et de la gaine. Nous verrons plus tard qu'il s'agit en fait d'une condition nécessaire. Nous ferons aussi l'hypothèse d'un milieu sans pertes et invariant pour une translation selon z (pas de courbures).

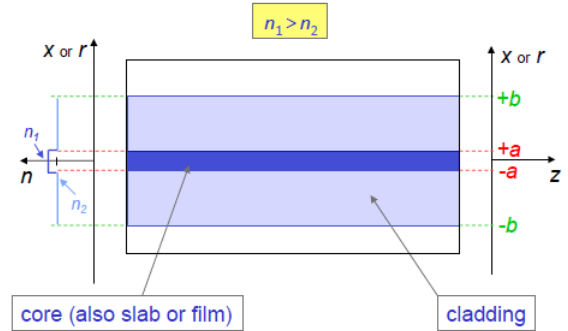


FIGURE 2.2

La loi de Snell-Descartes exprime le changement de direction d'un faisceau lors de la traversée d'une paroi. Chaque milieu a une capacité à "ralentir" la lumière, caractérisé par son indice de réfraction $n \equiv c/v$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.2)$$

Si $n_1 > n_2$, le faisceau réfracté se rapproche plus rapidement du dioptré : le rayon est élevé alors que dans le cas contraire, il est "rabattu". Dans le premier cas, le rayon peut remonter jusqu'à l'horizontale ($\pi/2$). Au dessus de cet angle, il sera totalement réfléchi : c'est le phénomène de

1. Utiliser un conducteur n'a pas de sens : mouvement des charges libres, effets joule, ...

réflexion totale²

Considérons le rayon vert ci-contre. Initialement dans l'air, il rencontre l'interface air-verre (n_1) où il y a des réflexions. Ensuite, il rencontre l'interface cœur-gaine où on observe un phénomène de réflexion partielle et de réfraction. Il est possible d'avoir une **réflexion totale** si le rayon a une incidence assez rasante et si $n_1 > n_2$.

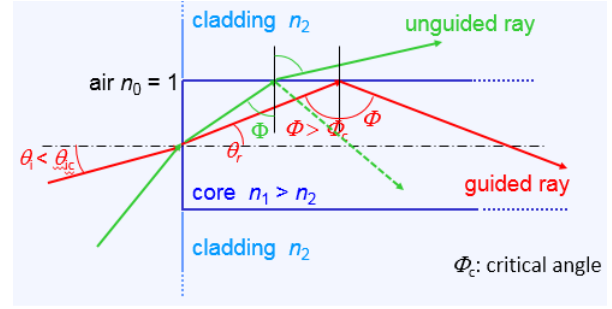


FIGURE 2.3

Regardons le cas particulier d'un angle critique (rouge). En appliquant la loi de S-D, on trouve

$$\left. \begin{aligned} n_0 \sin \theta_i &= n_1 \sin \theta_r \\ n_0 \sin \theta_{ic} &= \sin \theta_{ic} = n_1 \sin \theta_{rc} = n_1 \cos \Phi_c \\ n_1 \sin \Phi_c &= n_2 \sin \frac{\pi}{2} = n_2 \end{aligned} \right\} \cos \Phi_c = \sqrt{1 - \sin^2 \Phi_c} = \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2} \quad (2.3)$$

où la première ligne correspond à l'interface air-cœur et la dernière au cas de réflexion totale. On peut ainsi trouver une expression pour l'angle critique.

Le rayon sera guidé si	$\Phi > \Phi_c$ (2.4)
------------------------	--

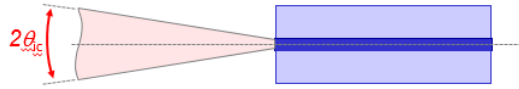


FIGURE 2.4

L'**ouverture numérique** renseigne le "cône d'acceptance" des rayons, afin que ceux-ci soient guidés. Par définition

$$NA \triangleq n_0 \sin \theta_{ic} = n_1 \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (2.5)$$

Souvent on retrouve cette information dans les data-sheet pas pas n_1 et n_2 , car l'AN est plus facile à mesurer. On utilise souvent l'**indice de réfraction normalisé** $\Delta n \triangleq (n_1 - n_2)/n_1$ ainsi que l'indice de réfraction moyen $\bar{n} \triangleq (n_1 + n_2)/2$.

En pratique, on rencontre souvent un guidage dit faible : l'angle d'incidence est très proche de 90° et on dit alors que $n_1 \approx n_2$. Plus l'AN est grande, plus la propagation sera rapide. Un ordre de grandeur usuel pour celle-ci est de 0.2.

Multipath dispersion (or Modal dispersion)

Le problème c'est qu'un rayon qui se propage sur l'axe ne va pas faire le même parcours que celui qui fait des zigzag. La vitesse de groupe est la même, mais il y aura un délai associé à cette différence de chemin entre les deux. Pour calculer ce délai, on s'intéresse à la différence de chemin δl entre les deux rayons (rouge et vert) à l'aide d'un joli triangle rectangle

$$\delta l = L_v - L_r = L_r (1/\sin \Phi_c) - L_r = L_r [(n_1/n_2) - 1] \quad (2.6)$$

2. Pour l'histoire, ceci explique pourquoi un diamant ne brille pas dans l'eau.

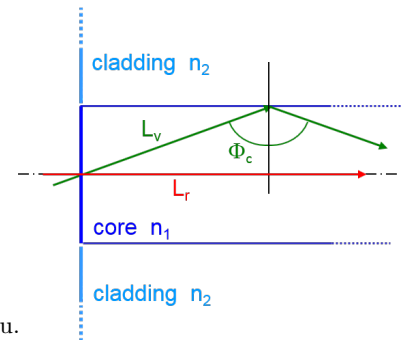


FIGURE 2.5

Il faut ensuite sommer ceci sur la longueur L de la fibre

$$\Delta L = \sum \delta l = L [(n_1/n_2) - 1] \quad (2.7)$$

En supposant que la vitesse de phase (c/n) vaut à peu près la vitesse de groupe, on trouve

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{c/n_1} = \frac{L}{c} n_1 [(n_1 - n_2)/n_2] = \frac{L}{c} n_1 [(n_1 \Delta n)/n_2] \quad (2.8)$$

où encore

$$\Delta t = \frac{L}{c} \Delta n \frac{n_1^2}{n_2} \quad (2.9)$$

Une grande AN ($\propto \sqrt{\Delta n}$) facilite l'injection dans la lumière, mais un grand Δt ($\propto \Delta n$) limite le taux de bit.

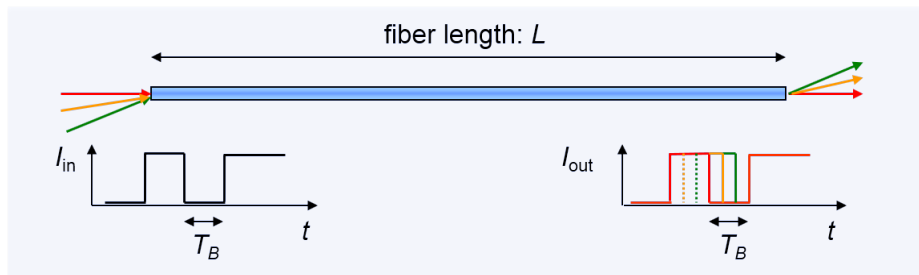


FIGURE 2.6

S'il y a une différence de vitesse de groupe, l'information va avoir tendance à s'étaler dans le temps. Les flancs vont alors s'étaler et il ne sera plus disponible de distinguer 0 et 1. Il faut que cette dispersion temporelle soit inférieure au temps d'un bit : $\Delta t < T_B = 1/B$. Dès lors, $B\Delta t < 1 \Leftrightarrow B \frac{L}{c} n_1 [(n_1 \Delta n)/n_2] < 1$. On en tire (sous l'hypothèse que la taille du cœur est grande par rapport à λ

$$BL < \frac{c}{\Delta n} \frac{n_2}{n_1^2} \quad (2.10)$$

Le produit BL est donc bien un paramètre important pour une fibre. Celui-ci nous informe qu'un signal de 200Mbits/s ne peut être transmis que sur une distance de 100m pour une fibre Si multimode.

2.1.2 Graded-index (GI) fibers

Pour réduire le délai entre les rayons guidés, on peut utiliser des fibres à **gradient** d'indice. L'indice change dans le cœur : élevé au centre (ralentit les rayons) et diminue ensuite (ralentit un peu moins les rayons)³.

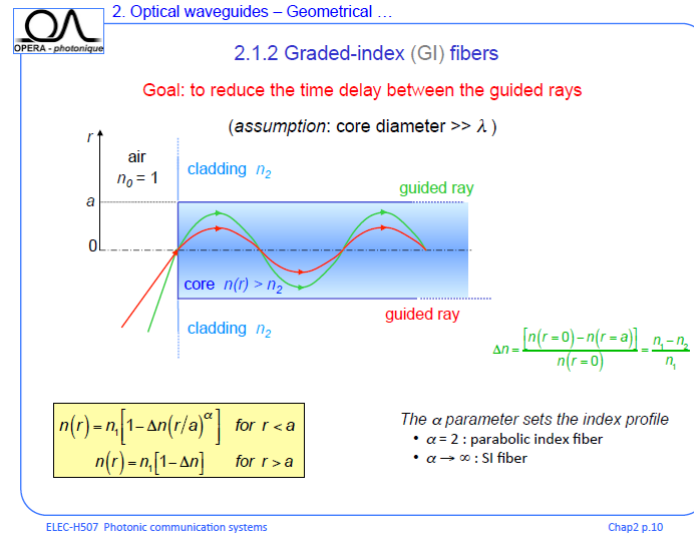


FIGURE 2.7

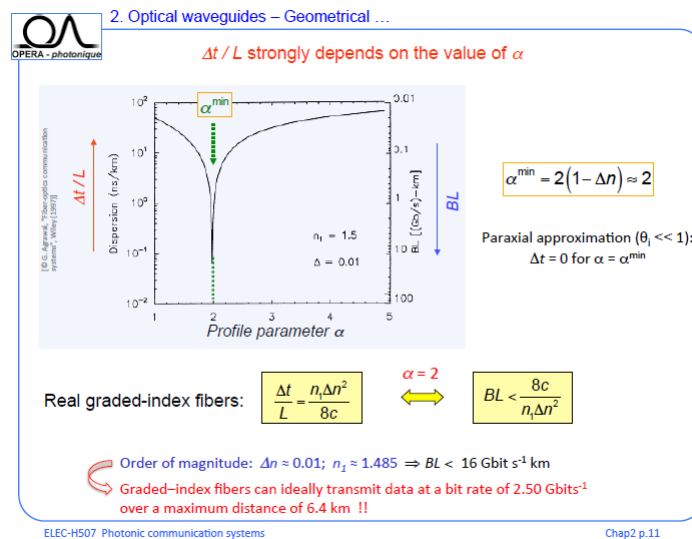


FIGURE 2.8

Limitations of the simple two-dimensional geometrical optics description :

Jusqu'ici nous avons considéré que les rayons se situent uniquement dans des plans xz/rz . Or, certains rayons peuvent être obliques, hélicoïdaux, ... De plus, que se passe-t-il si le cœur a une dimension proche de la longueur d'onde ? Il faut une approche EM !

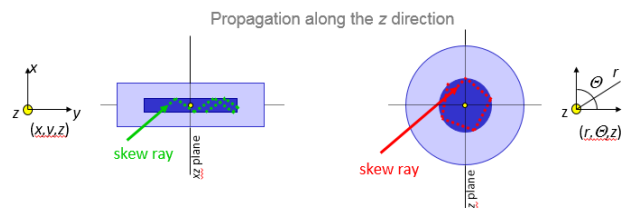


FIGURE 2.9

3. Voir notes slides 10 et 11 pour plus de détails.

2.2 Electromagnetic analysis – Fields and modes

2.2.1 Step-index planar waveguides

Nous allons commencer par le cas d'un guide d'onde plan. L'idée est de résoudre les équations de Maxwell afin de trouver une solution qui satisfait aux conditions limites, continuité, ... soit un problème aux valeurs propres d'un certain opérateur différentiel (le propagateur) agissant sur un champ.

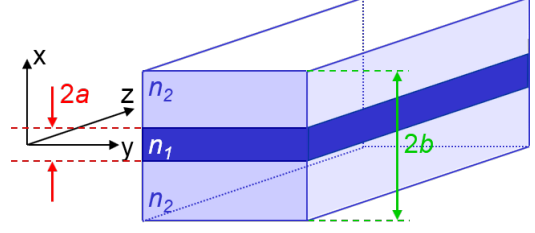


FIGURE 2.10

Nous allons faire plusieurs hypothèses

1. Matériau simple : diélectrique, non magnétique, linéaire, isotropique et sans perte. En gros, juste n_1 et n_2 à prendre en compte.
2. Homogène : toujours n_1 dans le cœur et n_2 dans la gaine
3. Symétrique en x et indépendant en y, z : même matériau pour les deux gaines.
4. La dimension de la gaine ($2b$) est très grande par rapport à celle du cœur ($2a$) : on ne doit pas se préoccuper de l'interface gaine-coating.

Nous n'avons ici fait **aucune** hypothèse sur la taille du cœur, contrairement à l'approche géométrique. Il peut être très petit ou très grand mais en pratique, il vaut typiquement, $2a \leq 50 \mu\text{m}$.

Le point de départ est bien évidemment les équations de Maxwell. Pour un diélectrique non magnétique

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.11)$$

L'interaction entre la champ EM et le diélectrique trouve son origine dans le champ de densité de polarisation \vec{P} qui prend en compte l'indice de réfraction et les pertes. La polarisation doit être non nulle, sans quoi on décrirait le vide.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.12)$$

Le champ de densité de polarisation s'obtient par la convolution entre le champ \vec{E} et la **susceptibilité électrique**

$$\vec{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\mathbf{r}, t - t') : \vec{E}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (2.13)$$

Le système sera ainsi linéaire en \vec{E} et permanent. La susceptibilité est en réalité un tenseur de second rang. Heureusement la fibre ne présente pas de biréfringence (le verre étant amorphe, cette hypothèse est bien vérifiée), elle est même isotrope : la susceptibilité se ramène à un scalaire. Notons que notre système est bien causal. La convolution temporelle se traite plus facilement dans le domaine fréquentiel. De plus, le système étant linéaire, il suffira de sommer sur toutes les fréquences. On définit la transformée de Fourier avec la convention suivante ⁴

$$\vec{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (2.14)$$

4. En optique, on utilise souvent $-i\omega t$ alors qu'en électronique on voit $+j\omega t$. Cela ne change rien, il suffit de changer $j \rightarrow -i$.

Le champ électrique étant réel, on ne considèrera que les $\omega > 0$

$$\vec{E}(t) = \vec{A}(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = \frac{1}{2}\vec{A}(t)[e^{j(\omega_0 t + \varphi(t))} + c.c.] = \frac{1}{2}[E(t) + E^*(t)] \quad (2.15)$$

On utilisera $E(t)$ pour décrire le champ électrique et $\vec{E}(t) = \text{Re}[E(t)]$. On en tire

$$\tilde{P}(r, \omega) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}(r, \omega) \tilde{E}(r, \omega) \quad (2.16)$$

Le terme de l'équation de Maxwell

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

S'écrit alors, dans le domaine fréquentiel

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{E} = (1 + \tilde{\chi}) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E} = \kappa(r, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E} \quad (2.18)$$

où l'on a introduit la **constante diélectrique**

$$\kappa(r, \omega) = 1 + \tilde{\chi}(r, \omega) = (n - j\alpha c/2\omega)^2 \approx n^2 \quad (2.19)$$

L'atténuation étant négligeable, κ sera réel. Le milieu étant homogène dans le cœur et la gaine

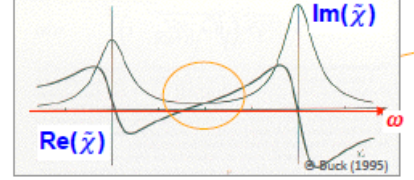


FIGURE 2.11

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \Delta \tilde{\mathbf{E}} = -\Delta \tilde{\mathbf{E}} \quad (2.20)$$

Notons que κ sera différent dans le cœur et dans la gaine. On trouve alors six équations (identiques pour \tilde{H}) équations

EQUATION D'HELMOLTZ

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} + \kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad \Delta \tilde{H} + \kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{H} = 0 \quad (2.21)$$

où $\kappa_{core} \neq \kappa_{cladding}$ où la constante diélectrique dépend de la fréquence et où

$$\kappa_j(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} = n_j^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} = n_j^2(\omega) \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 = n_j^2(\omega) k_0^2 \quad (2.22)$$

avec $j = 1$ pour le cœur et $j = 2$ pour la gaine.

Nous avons donc six équations couplées. Heureusement, seulement deux sont indépendantes : il ne faudra résoudre que ces deux-là

$$\tilde{E}_y = \tilde{E}_y(\tilde{E}_x, \tilde{H}_x) \quad \tilde{H}_y = \tilde{H}_y(\tilde{E}_x, \tilde{H}_x) \quad \tilde{E}_z = \tilde{E}_z(\tilde{E}_x, \tilde{H}_x) \quad \tilde{H}_z = \tilde{H}_z(\tilde{E}_x, \tilde{H}_x) \quad (2.23)$$

Le schéma de résolution sera alors le suivant

1. Tenir compte des symétries de la structure en (x, y, z)
2. Séparer le problème pour chaque milieu homogène (cœur et gaine)
3. Appliquer les CL aux interfaces cœur-gaine pour trouver les modes guidés.
 - Il faut aussi avoir la continuité des composantes tangentielle de \vec{E} et \vec{E} ainsi que les composantes normales de \vec{B} et \vec{D} .

4. Construire la solution générale (équation linéaire)

La solution générale d'un champ EM dans un guide d'onde est la suivante (idem pour \tilde{H})

$$\tilde{E}(x, y, z, \omega) = \sum_m \left[a_m \tilde{E}_m(x, y, z, \omega) + a_{-m} \tilde{E}_{-m}(x, y, z, \omega) \right] + \tilde{E}_{\text{rad}}(x, y, z, \omega) \quad (2.24)$$

où le premier terme sont les modes progressif, la second les régressif et le dernier, le champ radiés (négligeable).

Étape 1 : Symétries

Basé sur les symétries, nous allons chercher par la méthode de séparation des variables une solution de la forme

$$E_x(x, y, z, t) = \tilde{E}_x(x, y, z, \omega) \exp(j\omega t) = E_x(x).Y(y).Z(z).\exp(j\omega t) \quad (2.25)$$

et de même pour H_x . Nous pouvons procéder à une telle résolution par symétrie de translation en y, z et dans le temps. Si nous avons un guide plan rectangulaire entouré d'une gaine optique, nous aurions une seule fonction en z , une en t mais également une en x et y !

Nous avons donc

$$\frac{1}{E_x} \frac{d^2 E_x}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \kappa(\omega, x) + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (2.26)$$

En Y et Z , nous pouvons avoir des solutions exponentielles, sinus, cosinus, sinh et cosh. Il faut comprendre l'invariance en translation en terme de densité de photon. Comme celui-ci contient un module carré, il faut choisir la solution en exponentielles imaginaires. Ceci signifie que les "constantes" que vaut ces termes doit être négative. On en tire pour Y

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\gamma^2 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = e^{-j\gamma y} \quad (2.27)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$. Pour Z

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\beta^2 \quad \Rightarrow \quad Z(z) = e^{-j\beta z} \quad (2.28)$$

où $\beta \in \mathbb{R}$. L'équation à résoudre devient alors

$$\frac{d^2 E_x}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \kappa(\omega, x) - \beta^2 - \gamma^2 \right] E_x = 0 \quad \frac{d^2 H_x}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \kappa(\omega, x) - \beta^2 - \gamma^2 \right] H_x = 0 \quad (2.29)$$

Celles-ci possèdent comme solutions

$$E_x = E_x(x) \exp(j[\omega t - \beta z - \gamma y]) \quad H_x = H_x(x) \exp(j[\omega t - \beta z - \gamma y]) \quad (2.30)$$

où $E_x(x)$ et $H_x(x)$ sont à déterminer. Comme E et H ont un module indépendant de y, z et t , ces solutions sont les **modes du guide d'onde**.

Il existe deux types de solutions pour un guide plan

Mode TE Le champ électrique est hors du plan, quelque soit la réflexion et la polarisation. De même pour le champ magnétique. On parle de *transverse électrique* car l'énergie se propage dans la direction z et non k : la projection de E sur z est nulle.

Mode TM Ici la projection de E sur z est non-nulle. Le champ n'est pas ici perpendiculaire à la direction de propagation. En guidage faible, l'angle est proche de 90° et la composante en z est très petite mais non-nulle.

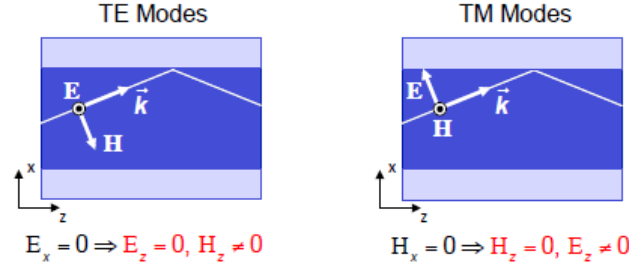


FIGURE 2.12

Nous allons considérer le mode TE⁵ tel que $E_x = 0$. Les équations de Maxwell deviennent (voir Annexes)

$$E_y = -\frac{\beta\omega\mu_0}{\gamma^2 + \beta^2}H_x \quad E_z = -\frac{\gamma\omega\mu_0}{\gamma^2 + \beta^2}H_x \quad H_y = -j\frac{\gamma}{\gamma^2 + \beta^2}\frac{d}{dx}H_x \quad H_z = -j\frac{\beta}{\gamma^2 + \beta^2}\frac{d}{dx}H_x \quad (2.31)$$

Une onde dans un guide infini est équivalente à une onde plane : pas de profil en Y ou Z . On peut alors définir Z comme la direction dans laquelle se propage ce qui signifie que $\gamma = 0$ car aucune phase n'est accumulée dans cette direction. Dès lors, $E_x = E_z = 0$ (TE) et $H_y = 0$

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0}E_y, \quad H_z = \frac{-j}{\beta}\frac{d}{dx}H_x = \frac{j}{\omega\mu_0}\frac{d}{dx}E_y \quad (2.32)$$

où

$$\frac{d^2E_y}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2}\kappa_j(x) - \beta^2 \right] E_y = 0 \quad (2.33)$$

Faisons de même pour $H_x = 0$. Nous avons $H_x = H_z = 0$ (TM) et $E_y = 0$:

$$E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0\kappa}H_y \quad E_z = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0\kappa}\frac{d}{dx}H_y \quad (2.34)$$

où

$$\frac{d^2H_y}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2}\kappa_j(x) - \beta^2 \right] H_y = 0 \quad (2.35)$$

Un champ EM solution des équations de Maxwell dans un guide plan est une ainsi une **combinaison linéaire** des modes TE et TM du guide d'onde.

Étape 2 : Résolution par milieu homogène

Le guide d'onde est symétrique $\kappa(x) = \kappa(-x)$. L'intensité, proportionnelle au module carré $|E|^2$ est aussi symétrique. Les modes doivent alors être pairs ou impairs.

5. Je comprends pas trop pourquoi on fait ça ici.

Intéressons-nous aux modes TE avec $\gamma = 0$

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \kappa_j(x) - \beta^2 \right] E_y = 0 \quad (2.36)$$

et plus particulièrement au cas où E_y est symétrique (fonction paire de x). Il faut trouver une solution symétrique satisfaisant les CL. Dans la gaine ($|x| > a$), nous voulons une atténuation afin d'avoir un maximum d'énergie dans le cœur

$$E_y = A_{\text{sym}} \cos(\sigma a) \cdot \exp[-\xi(x - a)] \quad (2.37)$$

Dans le cœur ($|x| \leq a$) nous pouvons avoir un cos ou un cosh. La seule solution acceptable est cos car elle respecte la continuité de la dérivée première⁶

$$E_y = A_{\text{sym}} \cos(\sigma x) \quad (2.38)$$

La seule solution possible est un cos dans le cœur et une exponentielle décroissante dans la gaine. La continuité de E_y en $x = a$ est alors vérifiée.

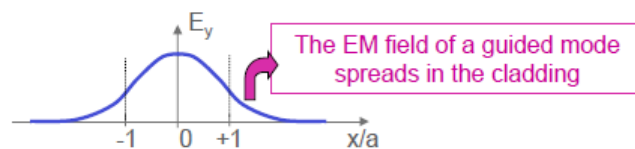


FIGURE 2.13

Dans les précédentes équations, nous avons posé

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \kappa_1 - \beta^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \quad (2.39)$$

et

$$\xi^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \kappa_2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \quad (2.40)$$

Quels sont les signes de σ^2 et ξ^2 ?

- $\sigma^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 > 0$: σ doit être réel pour satisfaire les CL
- $\xi^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 > 0$: ξ est réel. S'il est positif, on a bien une décroissance exponentielle dans la gaine

$$\text{Mode guidé} \quad \Leftrightarrow \quad \beta > n_2 k_0 \quad (2.41)$$

- $\xi^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 < 0$: ξ est imaginaire : oscillation dans la gaine

$$\text{Mode faible} \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 > n_2^2 k_0^2 \quad (2.42)$$

Compte-tenu des conclusions ci-dessus, nous aurons un mode guidé que si

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div>MODE GUIDÉ SI</div> <div> $n_1 k_0 > \beta > n_2 k_0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 > n_2$ </div> <div>(2.43)</div> </div>
--

Il s'agit bien ici d'un résultat, et non quelque chose que nous avons imposé comme c'était le cas dans l'optique géométrique.

6. H_z doit être continue et elle dépend de la dérivée de E_y par rapport à x .

Étape 3 : Condition de continuité à l'interface cœur-gaine

Comme l'indique le nom de la sous-sous-section, il faut garantir la continuité de H_z en $x = \pm a$, impliquant la continuité de la dérivée de E_y en ce point. On trouve alors une branche de cosinus comme solution dans le cœur ($|x| \leq a$)

$$H_z = \frac{j}{\omega \mu_0} \frac{d}{dx} E_y \quad \Rightarrow \quad H_z = -\frac{j\sigma}{\omega \mu_0} A_{\text{sym}} \sin(\sigma x) \quad (2.44)$$

Et dans la gaine ($|x| > a$, déjà particularisé au point a)

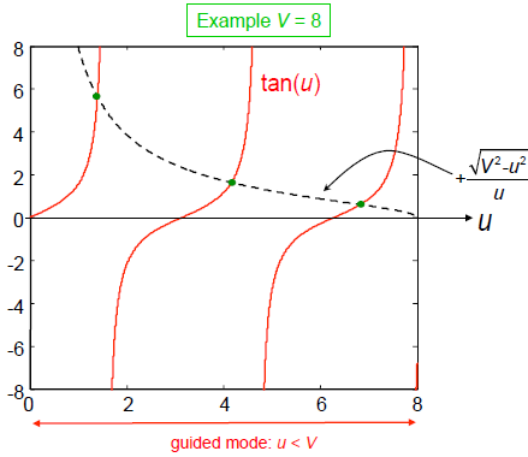
$$H_z = \pm \frac{-j\xi}{\omega \mu_0} A_{\text{sym}} \cos(\sigma a) \cdot \exp[-\xi(x - a)] \quad (2.45)$$

On en tire

$$\pm \frac{j\sigma}{\omega \mu_0} A_{\text{sym}} \sin(\sigma a) = \pm \frac{j\xi}{\omega \mu_0} A_{\text{sym}} \cos(\sigma a) \quad (2.46)$$

D'où

$$\tan(\sigma a) = \frac{\xi \cdot a}{\sigma \cdot a} \quad (2.47)$$



Cette relation doit être vérifiée pour garantir la continuité. Toutes les solutions en termes de σ vont être les solutions correspondant à un mode guidé. En posant les fonctions adimensionnelles $u \triangleq \sigma \cdot a = a \cdot (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}$ et $V^2 \triangleq a^2(\xi^2 + \sigma^2) = a^2 k_0^2(n_1^2 - n_2^2)$, on peut définir la **fréquence normalisée du guide d'onde**

$$V = a k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (2.48)$$

où $V^2 - u^2 = V^2 - a^2 \sigma^2 = a^2 \xi^2 > 0$ pour avoir un mode guidé ($\xi^2 > 0$ et $\xi > 0$). Physiquement, seule la valeur positive de ξ convient sans quoi il y aurait une croissance infinie dans la gaine

FIGURE 2.14 – 3 solutions TE symétriques ($V = 8$)

$$\tan(u) = + \frac{\sqrt{V^2 - u^2}}{u} \quad (2.49)$$

Connaissant ω et l'index, il n'y a dès lors qu'un nombre **limité** de valeurs de σ (et donc de β) satisfaisant à cette équation. Chaque β **identifie** un **mode guidé particulier**.

Le même raisonnement peut être fait en partant d'un champ E_y antisymétrique. On trouve alors

$$\tan(u) = - \frac{u}{\sqrt{V^2 - u^2}} \quad (2.50)$$

Ce qui est semblable à la précédente relation avec un signe négatif et une inversion numérateur/dénominateur⁷. Pour $V = 8$, il existe également trois solutions TE, mais cette fois-ci antisymétriques. Comme la fonction rouge est tangente, il y aura toujours au moins un mode guidé. La fibre deviendra multimode dès la première asymptote de cette fonction, à savoir en $u = \pi/2$.

7. Voir slides 29-30 pour plus de détails.

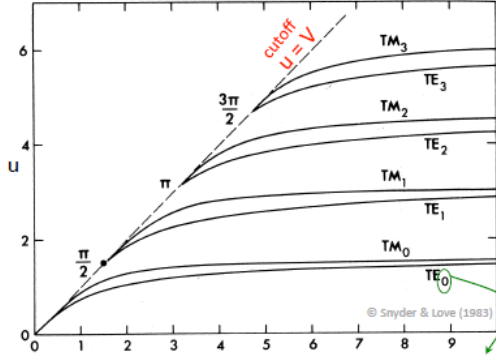


FIGURE 2.15

On peut faire le même calcul pour les modes TM avec $\gamma = 0 (E_x = E_z = H_y = 0)$. En évaluant la continuité, on retombe sur une équation aux valeurs propres pour les modes TM . Les conclusions sont semblables : il y a toujours au moins un mode TM et la valeur de la fréquence normalisée à partir de laquelle on en voit d'autres est également $\pi/2$.

Le nombre de modes guidés augmente donc avec l'augmentation de la fréquence normalisée V . Dès lors, le guide est **monomode** si

$$V < \frac{\pi}{2} \quad (2.51)$$

Les observateurs diront qu'il y a deux modes guidés en dessous de cette valeur (léger écart entre TE et TM). C'est vrai, mais on parle toujours de monomode : l'un ou l'autre sera excité en fonction de la polarisation. Ce léger écart signifie que le β est différent pour les deux modes : le guide plan est *biréfringent*.

Discussions

1. Interprétation de β .

Choisissons z comme direction de propagation et $\gamma = 0$

$$E_y = E_y \exp[j(\omega t - \beta z - \gamma y)] = E_y \exp[j(\omega t - \beta z)] \quad (2.52)$$

Le mode oscille à ω et accumule une phase dans la direction z donnée par β (m^{-1}). Il s'agit de la **constante de propagation** du mode. La variation de β par rapport à la fréquence ω , $\beta(\omega)$ est la **relation de dispersion du mode**.

Cette constante de propagation est bornée

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 < \beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_{eff} < \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 \quad (2.53)$$

où apparaît l'indice effectif du mode, qui se rapporte à une mode tout comme β : c'est l'indice de réfraction "vu" par le mode. Si un mode est fort dans la gaine, son indice effectif sera proche de n_2 et inversement. En terme de vitesse de phase, le mode se propage à une vitesse entre celle dans le cœur et celle dans la gaine

$$\frac{c}{n_1} < \frac{\omega}{\beta} < \frac{c}{n_2} \quad (2.54)$$

La constante de propagation, via β/ω , est alors fortement reliée à l'extension modale sur le cœur et la gaine.

Intéressons-nous au profil transverse d'un mode *près de la coupure*, par exemple en $V = 1$. Plus on se rapproche de la coupure ($u = V$), plus ξ est petit et plus l'extension du mode dans la gaine optique est importante (le profil modal étant proportionnel à $e^{-\xi}$, l'extension dans la gaine augmente drastiquement). Ici, nous sommes entre la coupure du mode 1 et 2. Par le calcul simple $h_{\text{eff}}/(2a) = (1 + \frac{1}{\xi \cdot a}) = 2.47$, on voit que le mode est deux fois plus étendu dans la gaine que dans le cœur !

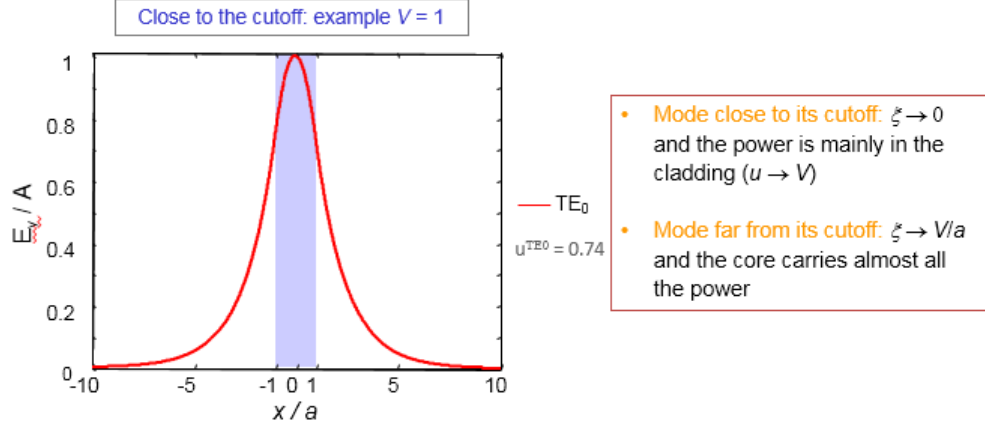


FIGURE 2.17

Nous sommes donc bien loin des considérations de l'optique géométrique.

4. *Interprétation du profil modal dans le cœur comme une superposition d'ondes planes*

Soit un mode TE symétrique d'ordre N

$$E_y^N = A_{\text{sym}} \cos(u^N \cdot x/a) \cdot e^{j(\omega t - \beta^N z)} \quad (2.58)$$

Écrivons-le cosinus comme deux exponentielles

$$E_y^N = \frac{1}{2} A_{\text{sym}} [e^{j(\omega t - \beta^N z + u^N \cdot x/a)} + e^{j(\omega t - \beta^N z - u^N \cdot x/a)}] \quad (2.59)$$

On y voit deux ondes planes

$$e^{j(\omega t - \beta^N z - u^N \cdot x/a)} = e^{j(\omega t - k^N \cdot r)} \quad (2.60)$$

où $k_x^N = u^N/a$, $k_y^N = 0$ et $k_z^N = \beta^N$. Calculons alors le module du nombre d'onde

$$k^2 = (u^N/a)^2 + (\beta^N)^2 = k_0^2 n_1^2 = k_1^2 \quad (2.61)$$

Celui-ci vaut k_1^2 , soit exactement le nombre d'onde dans un milieu d'indice n_1 : il s'agit d'une onde plane qui se propage. La constante de propagation β n'est que la projection de \vec{k}_1 sur la direction de propagation.

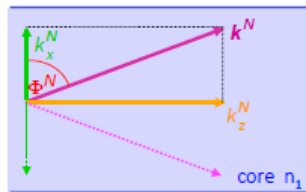


FIGURE 2.18

Le profil est le résultat des interférences entre deux ondes planes de vecteur d'onde $(\pm k_x^N, 0, \beta^N)$. On peut associer un "rayon" à une onde plane (direction orthogonale au front d'onde, soit la direction de k^N) et retrouver la conclusion de l'optique géométrique

$$\cos(\Phi^N) = \frac{u^N}{k_1 \cdot a} < \frac{V}{k_1 \cdot a} = \frac{a \cdot k_0}{a \cdot k_0 \cdot n_1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{1 - n_2^2/n_1^2} = \cos(\Phi_c) \Rightarrow \phi^N > \phi_c \quad (2.62)$$

5. *Ordre de grandeur. Cf. slide 38*

6. *Guide plan non symétrique*

Considérons n_3 comme étant de l'air : peu d'onde évanescente de ce côté, mais beaucoup de l'autre : le mode est poussé du côté du saut d'indice le plus faible.

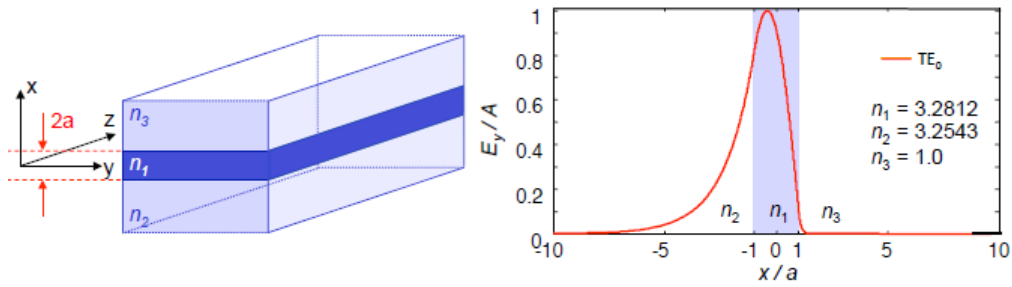


FIGURE 2.19

Les solutions trouvées sont cependant du même type.

7. *Saut d'indice homogène dans un guide rectangulaire. Pas de calcul analytique possible, cf. slide 40.*

2.2.2 Guides à saut d'index cylindriques

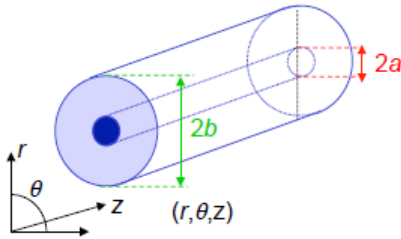


FIGURE 2.20

L'idée est la même, seule la géométrie va un petit peu compliquer les calculs ! La différence principale est que la structure a maintenant deux dimensions transverses : la propagation sera caractérisée par deux paramètres. Faisons comme hypothèses

- Milieu diélectrique, non-magnétique, linéaire, isotropique et sans pertes
- Milieu homogène (guide à saut d'indice, pas à gradient)
- Gaine d'extension infinie ($2b \gg 2a$)

Encore une fois, il n'y a **pas** d'hypothèse sur la taille du cœur.

Nous avons dans le cœur ($r \leq a$)

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} + \kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \kappa(\omega) = n_1^2(\omega) \quad (2.63)$$

Et dans la gaine ($r \geq a$)

$$\Delta \tilde{\mathbf{H}} + \kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{H}} = 0, \quad \kappa(\omega) = n_2^2(\omega) \quad (2.64)$$

Nous allons procéder à une résolution en considérant $E_z \neq 0$ et/ou $H_z \neq 0$ (voir *Annexe 1*).

Étape 1 : Propriété de symétrie, résolution par la méthode de séparation des variables

La solution est une onde se propageant dans la direction z où β - la constante de propagation - joue le même rôle que précédemment.

$$\begin{aligned} E_z &= \tilde{E}_z(x, y) \exp(j[\omega t - \beta z]) & H_z &= \tilde{H}_z(x, y) \exp(j[\omega t - \beta z]) \\ &\Downarrow & &\Downarrow \\ \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial y^2} + [\kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2] \tilde{E}_z &= 0 & \frac{\partial^2 \tilde{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{H}_z}{\partial y^2} + [\kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2] \tilde{H}_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Vu la symétrie du problèmes, nous allons le traiter en symétrie cylindrique

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.66)$$

Dès lors, on trouve $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$. Nos champs s'écrivent

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_x \cos(\theta) + \tilde{E}_y \sin(\theta), \quad \tilde{E}_\theta = -\tilde{E}_x \sin(\theta) + \tilde{E}_y \cos(\theta) \quad (2.67)$$

En utilisant les nouvelles composantes de \vec{E} et le Laplacien en coordonnées cylindriques, on trouve

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial \theta^2} + [\kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2] \tilde{E}_z = 0 \quad (2.68)$$

Et de même pour H_z . Actuellement, β n'est pas connue. Nous allons chercher les solutions physiquement acceptables et chercher à ce qu'elles satisfont les CL. Ceci fixera les valeurs de β acceptable : elles formeront un ensemble discret, une valeur par mode.

Le problème à résoudre est donc

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial \theta^2} + [\kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2] \tilde{E}_z &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{H}_z}{\partial \theta^2} + [\kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2] \tilde{H}_z &= 0 \\ \tilde{E}_r &= -\frac{j}{\kappa\omega^2/c^2 - \beta^2} \left(\beta \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} + \mu_0 \omega \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \theta} \right) \\ \tilde{E}_\theta &= -\frac{j}{\kappa\omega^2/c^2 - \beta^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial \theta} - \mu_0 \omega \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} \right) \\ \tilde{H}_\theta &= -\frac{j}{\kappa\omega^2/c^2 - \beta^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \theta} + \omega \varepsilon(\omega) \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} \right) \\ \tilde{H}_r &= -\frac{j}{\kappa\omega^2/c^2 - \beta^2} \left(\beta \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} - \omega \varepsilon(\omega) \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right. \quad (2.69)$$

Auquel il faut joindre $\kappa(\omega)$ du cœur et de la gaine ainsi que les conditions de continuité en $r = a$ de aux limites périodiques de 2π en θ . On peut déjà souligner que E_r dépend de la dérivée de E_z par rapport à r et de H_z par rapport à θ : les dérivées sont "mélangées" (cela aura de l'importance pour les CL).

Nous allons séparer la dépendance des solutions en r et θ : $\tilde{E}_z = R_z(r) \Theta_z(\theta)$, ce qui se justifie par la symétrie de rotation de la structure. On en tire

$$\frac{\partial^2 \Theta_z}{\partial \theta^2} + N^2 \Theta_z = 0, \quad \frac{\partial^2 R_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_z}{\partial r} + [\kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 - \frac{N^2}{r^2}] R_z = 0 \quad (2.70)$$

où N^2 est positif pour avoir un terme oscillant, mais également la périodicité (celui-ci va définir la période du terme oscillant). Les fonction Θ_z et R_z sont pour le moment inconnues.

Étape 2 : Résolution du problème dans le cœur et la gaine optique

La solution de l'équation azimutale (dépendance angulaire du champ) en Θ_z est une fonction harmonique à cause de la périodicité de 2π de la structure

$$\frac{\partial^2 \Theta_z}{\partial \theta^2} + N^2 \Theta_z = 0 \quad (2.71)$$

Dès lors, N est forcément entier : c'est le nombre angulaire du mode

$$\Theta_z(\theta) = \begin{cases} \cos(N\theta) \\ \sin(N\theta) \end{cases} \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.72)$$

La seconde équation différentielle (partie radiale)

$$\frac{\partial^2 R_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_z}{\partial r} + [\kappa(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 - \frac{N^2}{r^2}] \cdot R_z = 0 \quad (2.73)$$

Peut s'écrire

- Si $\kappa\omega^2/c^2 - \beta^2 > 0$

$$x^2 \frac{d^2 G_N}{dx^2} + x \frac{dG_N}{dx} + (x^2 - N^2) G_N = 0 \quad (2.74)$$

Si N est entier, la dépendance radiale est une *fonction de Bessel*

- Si $\kappa\omega^2/c^2 - \beta^2 > 0$

$$x^2 \frac{d^2 G_N}{dx^2} + x \frac{dG_N}{dx} - (x^2 + N^2) G_N = 0 \quad (2.75)$$

Si N est entier, la dépendance radiale est une *fonction de Bessel modifiée*

Notons que les deux conditions énoncées ici sont semblables à celle trouvée pour le guide plan.

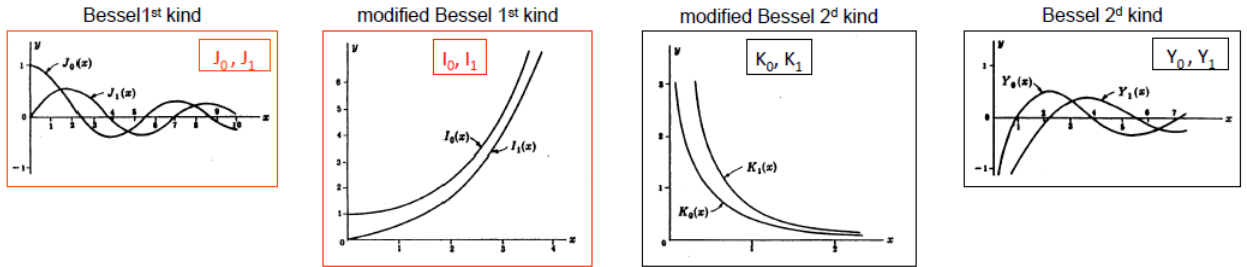


FIGURE 2.21 – La deuxième espèce diverge en 0. Dans le cœur, J_k est acceptable mais pas I_k à cause de la divergence. I_k est également acceptable. Dans la gaine, J_k n'est pas acceptable car la décroissance de l'amplitude est trop faible, mais K_k est bon. Lesquelles prendre ? Nous avons vu que les dérivées étaient "mélangées". Comme I_k donnerait un point anguleux, cette solution n'est pas acceptable. Nous avons finalement J_k dans le cœur et K_k dans la gaine.

Pour N fixé, un mode guidé est défini par

$$\begin{cases} R_z(r) = A \vec{J}_N(\sigma r) & \text{cœur } (x < a) \\ R_z(r) = C \vec{K}_N(\xi r) & \text{gaine } (x \geq a) \end{cases} \quad (2.76)$$

Il s'agit de la **seule** solution possible (champ évanescent dans la gaine, pas de singularité, champs continus en $x = a$).

Pour avoir une solution dans le cœur, il faut que $\sigma^2 > 0 \Rightarrow n_1 k_0 > \beta$. Pour que K_n soit solution dans la gaine optique, il faut que $\xi^2 > 0 \Rightarrow \beta > n_2 k_0$. Le mode ne sera guidé que si

$$\frac{2\pi}{\lambda} n_2 < \beta < \frac{2\pi}{\lambda} n_1 \quad (2.77)$$

Soit encore $n_2 < n_1$.

Comme pour les guides d'ondes plan, la vitesse de phase ω/β dépend de l'extension sur le cœur et la gaine. Les solutions sont données aux *slides* 47 et 48.

Classification des modes du nombre azimutal N

1. Si $N = 0$, il n'y a pas de dépendance angulaire. La situation est celle d'un guide plan et on retrouve les modes TE et TM formés par les rayons méridionaux.
2. Si $N \neq 0$, on ne retrouve pas de modes TE ou TM à causes des rayons obliques mais des **modes hybrides** EH_{Nq} et HE_{Nq} . En fixant N , on trouvera alors q solutions : se complique à cause des deux indices.

Étape 3 : Condition de continuité à l'interface cœur-gaine

Il faut donc trouver pour un nombre azimutal N donné, les q solutions (nombre radial) possibles (s'il y en a). Le système est donné au *slide* 50, mais "seulement" quatre équations sont indépendantes. Le système possède une solution non triviale ssi le déterminant du système est nul. A l'aide d'une insomnie, de l'hypothèse du **guidage faible** et de l'annexe 3, on trouve

$$\frac{\vec{J}_{m-1}(u)}{\vec{J}_m(u)} = -w \frac{\vec{K}_{m-1}(w)}{\vec{K}_m(w)} \quad (2.78)$$

où

$$m = \begin{cases} 1 & \text{pour les modes } TE_{0q} \text{ et } TM_{0q} & (N = 0) \\ N + 1 & \text{pour les modes } EH_{Nq} & (N \geq 1) \\ N - 1 & \text{pour les modes } HE_{Nq} & (N \geq 1) \end{cases}$$

Certains modes vont être caractérisés par le même u , et donc le même β : ils sont dit *dégénérés* comme ils vont se propager avec la même constante de propagation. On va alors les regrouper en remplaçant N par m . Par exemple

m=0 correspond aux modes TE_{0q} et TM_{0q}

m=0 correspond au cas $N = 1$: seule possibilité est le mode HE_{1q}

m=1 correspond aux modes TE et TM **mais aussi** au cas $N = 2$: HE_{2q} à la même constante de propagation que TE_{0q} et TM_{0q} .

On va alors écrire les combinaisons linéaires des modes dégénérés pour écrire les modes dits **linearly polarized**, soit LP_{mq} . Dès lors, **pour chaque m pour un V fixé**, les q solutions u_{mq} de l'équation ci-dessus (et du β_{mq} correspondant) donnent les q modes LP_{mq} guidés.

Considérons $V = 2$ et $m = 0, 1$. Dans ce cas, la fibre est monomode mais elle deviendra multimode dès le passage de l'asymptote pour $V = 2.405$, soit le premier zéro de la fonction de

Bessel : le mode LP_{11} sera alors guidé. Rappelons que $V^2 = u^2 + w^2$: la condition de coupure $u = V$ implique que $w = 0$.

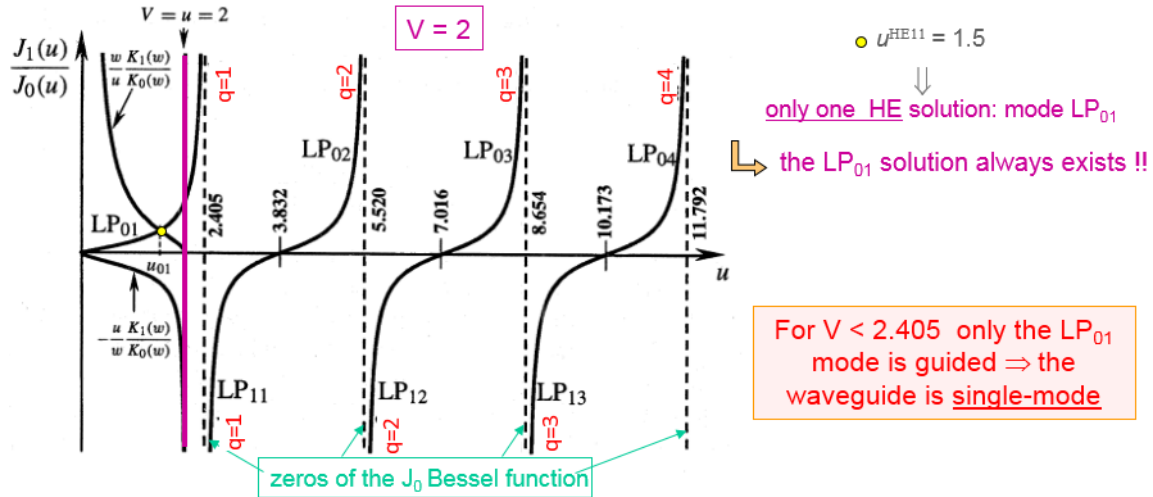


FIGURE 2.22

Considérons un second exemple où $V = 8$

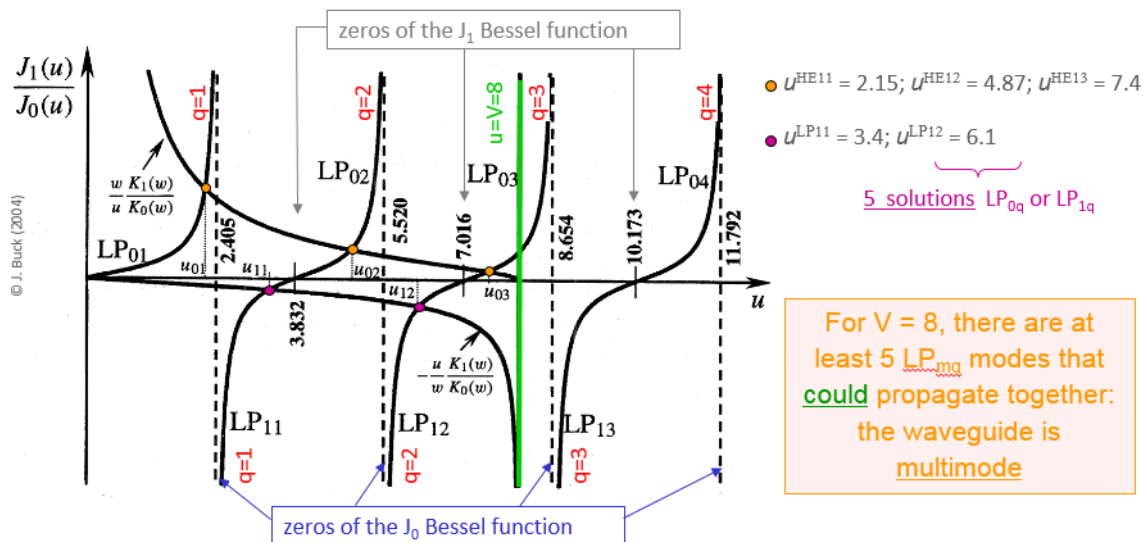


FIGURE 2.23

Dans ce cas, cinq modes LP_{mq} peuvent être guidés en même temps : le guide d'onde est multi-mode. Le tableau suivant résume la situation en nous informant de ce qui existe en fonction de la valeur de V

V_c	Bessel function	m	Zero count (q)	LP_{mq} mode designation	degenerate components (Section 3.6)
0	J_{-1}	0	1	LP_{01}	HE_{11}
2.405	J_0	1	1	LP_{11}	$TE_{01}, TM_{01}, HE_{21}$
3.832	J_1	2	1	LP_{21}	EH_{11}, HE_{31}
3.832	J_{-1}	0	2	LP_{02}	HE_{12}
5.136	J_2	3	1	LP_{31}	EH_{21}, HE_{41}
5.520	J_0	1	2	LP_{12}	$TE_{02}, TM_{02}, HE_{22}$
6.380	J_3	4	1	LP_{41}	EH_{31}, HE_{51}
7.016	J_1	2	2	LP_{22}	EH_{12}, HE_{32}
7.016	J_{-1}	0	3	LP_{03}	HE_{13}
7.588	J_4	5	1	LP_{51}	EH_{41}, HE_{61}
8.417	J_2	3	2	LP_{32}	EH_{22}, HE_{42}
8.654	J_0	1	3	LP_{13}	$TE_{03}, TM_{03}, HE_{23}$

© J. Buck (2004)

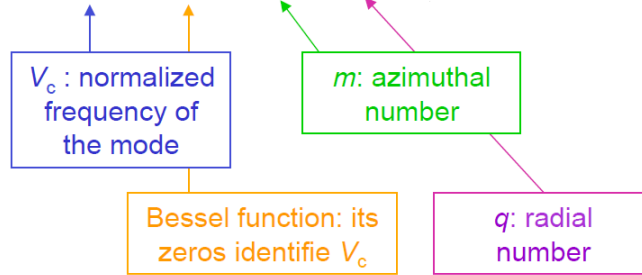


Tableau 2.1

Propriétés des modes LP_{mq}

1. *Distribution de l'intensité transverse $I(x, y)$.*

Dans le cas d'une fibre monomode, le seul mode guidé sera le $LP_{01} = HE_{11}$. D'autres exemples sont donnés aux *slides 55* et *56*.

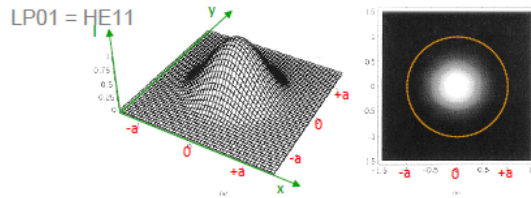


FIGURE 2.24

Soit le champ électrique du mode fondamental $LP_{01} = HE_{11}$ polarisé selon la direction x ($E_y = 0$). Son amplitude $|E_x| \propto J_0$ (cœur) et $|E_x| \propto K_0$ (gaine) est bien approximée par une **distribution gaussienne** de paramètre w_0

$$E_x(r, z) = \exp\left[-\frac{r^2}{w_0^2}\right] \cdot \exp[-j\beta z] \Rightarrow \frac{P_{core}}{P_{total}} = 1 - \exp\left[-\frac{2a^2}{w_0^2}\right] \quad (2.79)$$

Ceci est vrai pour autant que l'on ne se situe pas trop près de la coupure du mode ($V = 0$ pour le fondamental)

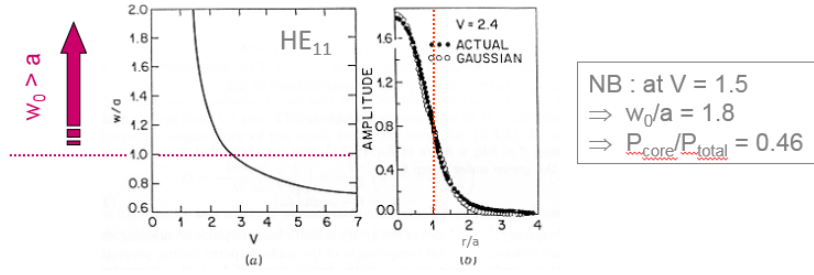


FIGURE 2.25 – Bon accord entre le fit gaussien et le mode analytique

On va alors définir le **Mode Field Diameter (MFD)** $= 2w_0$ comme un paramètre du mode fondamental.

Malgré la symétrie cylindrique, il est plus simple de représenter les polarisations linéaires dans un repère cartésien

$$E_x = E_r \cos(\theta) - E_\theta \sin(\theta) = 0, \quad E_y = E_r \sin(\theta) + E_\theta \cos(\theta) = A(-j\beta \frac{a}{u}) \vec{J}_0(\frac{u.r}{a}). \exp(j[\omega t - \beta z]) \quad (2.80)$$

Le mode LP_{01} est ainsi polarisé linéairement (a)

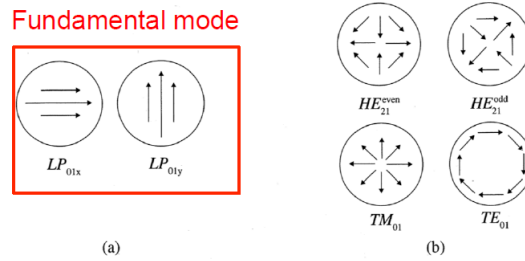


FIGURE 2.26

En (b), il faudra considérer la combinaison linéaire entre ces quatre modes-là pour former le mode LP_{11} . Il existe différentes combili et donc différents résultats possibles qui sont illustrés au *slide 58*.

2. Confinement de l'intensité.

Le graphique ci-dessous montre la répartition de la puissance entre le cœur et la gaine optique à l'aide de ψ

$$\psi = \frac{P_{cladding}}{P_{cladding} + P_{core}} = \left(\frac{u^2}{V^2} \right) \left(1 - \frac{\vec{K}_m^2(w)}{\vec{K}_{m-1}(w) \cdot \vec{K}_{m+1}(w)} \right) \quad (2.81)$$

pù $0 < \psi < 1$.

4. *Mais aussi...*

Une fibre est monomode si seulement le mode fondamental est guidé

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.405 \quad (2.83)$$

où $\lambda > \lambda_{cutoff}$, $\sqrt{\dots} \approx 5\mu\text{m}$ $\Delta n \approx 3 \times 10^{-3}$. Un paramètre important est le **Mode Field Diameter (MFD)** : lors de la soudure de fibres, il faut que les MFD soient proches sinon pleins de pertes vont être introduites. Plus le MFD est petit, plus l'intensité est localement importante. En pratique, on utilise un MFD un peu plus grand que la valeur "idéale" pour éviter d'injecter trop de puissance et avoir trop d'effets non linéaires.

2.3 Fabrication des fibres optiques

Voir *slides 69 à 75* ainsi que la vidéo sur l'UV.

2.4 Propriétés linéaires des fibres optiques

2.4.1 Atténuation du signal dans les fibres monomodes

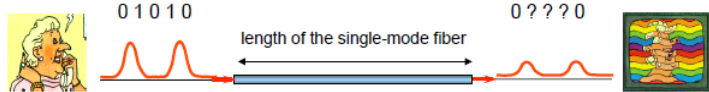


FIGURE 2.29

Quand un signal se propage dans une fibre, plusieurs éléments vont jouer en la défaveur de celui-ci. La fibre n'est pas parfaite et possède des **pertes**. Le problème est

qu'un détecteur possède une sensibilité limitée : une puissance minimale doit l'atteindre, ce qui va limiter la distance de propagation.

Les pertes par propagation sont caractérisées par le **coefficient d'atténuation** α , liée à la partie imaginaire de la susceptibilité $\chi(\omega)$ (alors que la partie réelle donne plutôt l'indice de réfraction).

Étudions la propagation d'un *pulse* dans une fibre optique. Que ce soit dans le domaine temporel ou spectral, on observe une diminution de l'amplitude de celui-ci, mais pas un élargissement. Cette diminution est exprimée via la loi de Beer-Lambert

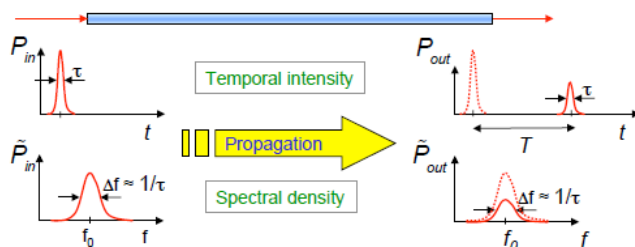


FIGURE 2.30

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\alpha_m P \quad \Rightarrow \quad P(L) = P(0) \exp(-\alpha_m L) \quad (2.84)$$

où α_m est le coefficient d'atténuation ($[m^{-1}]$), $P(z = L)$ la puissance de sortie et $P(z = 0)$ la puissance d'entrée. On en tire

$$\alpha[\text{dB/km}] \equiv -\frac{10}{1 \text{ km}} \log_{10} \left(\frac{P(z = 1 \text{ km})}{P(z = 0)} \right) \quad (2.85)$$

Si l'on souhaite l'atténuation en amplitude, on utilisera la relation

$$\alpha[\text{dB/km}] \times 1 \text{ km} = 10 \log_{10}(e) \times \alpha_m \times 1 \text{ km} = 4.343 \times \alpha_m \times 1 \text{ km} \quad (2.86)$$

Il existe trois sources d'atténuation dans une fibre (cf. figure ci-dessous)

1. Absorption matérielle

Lorsque la lumière se propage dans la matière, il va y avoir de l'absorption causant une excitation des modes de vibration et rotation. On retrouve ces absorptions dans l'infrarouge, en mauve sur le graphique.

Lors de la fabrication des fibres, il peut se glisser autre chose que de la silice : elle peut être polluée par de ions OH^- qui viennent de l'eau (air, vapeur, ...). Cela va introduire des pics d'absorption.

2. Diffusion de Rayleigh

Inévitable car en présence d'un matériau amorphe. Les fluctuations de densité vont créer de la diffusion. On remarque que Rayleigh (rouge pointillé) est non-négligeable par rapport à l'absorption de la fibre en elle-même¹⁰.

10. Pour info, $\alpha_R \approx 0.16 \text{ dB/km}$ à $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$.

3. Radiations dues aux imperfection dans le guide.

La fibre peut présenter des courbures. Si celles-ci sont trop importantes, l'angle d'incidence est trop petit et on va radier de l'énergie : la réflexion est partielle. Plus le rayon de courbure est petit, plus on est couplé à de l'énergie radiée. Cela dépend fortement de la fibre et la longueur d'onde.

On retrouve aussi les pertes dues à une pression sur la fibre, créant des micro-courbures qui ont tendance à faire radier l'énergie. Les connecteurs et le *splicing* de fibre introduisent également des pertes.

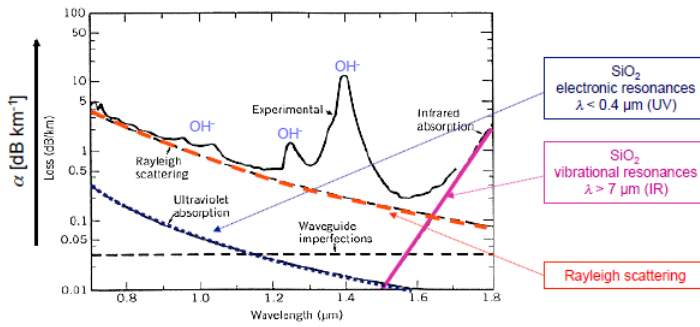


FIGURE 2.31

De façon générale, on voit un minimum d'atténuation $\lambda \approx 1550$ nm et c'est la raison de l'utilisation de cette longueur d'onde en télécommunication. Historiquement on travaillait à 1300 nm (entre les deux pics d' OH^-) car la dispersion chromatique était plus faible ce qui permettait la propagation sur une plus longue distance.

L'atténuation totale est donnée par

$$\text{Atténuation (dB)} = \sum_i \alpha_i L_i + \alpha_s x + \alpha_c y + \alpha_b \quad (2.87)$$

où α_b est négligeable (pertes par pression).

2.4.2 Dispersion chromatique

Dans le cas d'une fibre mono-mode ($V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.405$), le dispersion inter-modale n'est pas problématique (logique, seul LP_{01} se propage). Cependant, un pulse lors de sa propagation peut subir le **dispersion de vitesse de groupe**¹¹.

Celle-ci vient

1. Le spectre à largeur finie du signal (modulation et source)
2. L'indice de réfraction n de la silice varie en fonction de la fréquence (c'est d'ailleurs ce qui permet à un prise en silice de décomposer la lumière). C'est la **dispersion matérielle**.
3. La constante de propagation β dépend de la longueur d'onde (changer λ change V et changer V augmente l'étalement spectral : β change). On parle ici de **dispersion du guide**.

11. Ou "dispersion intra-modale", "dispersion de fibre", "dispersion chromatique".

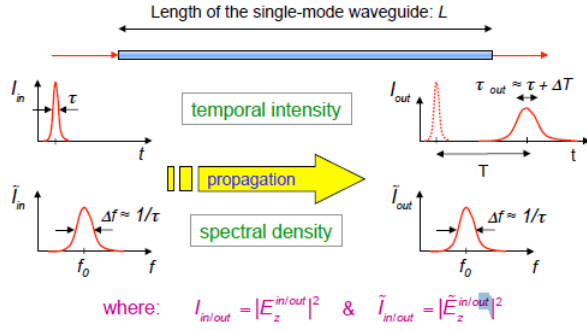


FIGURE 2.32

Dans le domaine temporel, la dispersion chromatique cause une diminution de l'amplitude du pulse ainsi qu'un étalement du spectre. Par contre, pas de changement notable dans l'intensité spectrale : on verra plus tard que la phase spectrale, elle, se modifie. Rappelons l'expression de la vitesse de groupe

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c}{n_g} \Rightarrow T = \frac{L}{v_g} \quad (2.88)$$

où n_g est l'indice de groupe et T le temps de vol du pulse. C'est parce que la vitesse de groupe n'est **pas la même pour toutes les fréquences du spectre du pulse** que sa largeur augmente lorsqu'il se propage dans la fibre.

Calculons l'étalement temporel ΔT du pulse (lié donc à la différence de vitesse de propagation). Soit $\Delta\omega$, le spectre lié à l'information qui transite. La variation du temps de vol est donné par la variation de fréquence $dT/d\omega\Delta\omega$. On trouve alors un coefficient qui dépend de la dérivée seconde

$$\Delta T = \frac{dT}{d\omega} \Delta\omega = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta\omega = L \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Delta\omega = L\beta_2 \Delta\omega \quad (2.89)$$

On peut écrire une équation semblable, mais avec $\Delta\lambda$, lié aux longueurs d'ondes de l'information qui transite

$$\Delta T = \frac{dT}{d\lambda} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta\lambda = LD\Delta\lambda = LD \frac{-\lambda^2}{2\pi c} \Delta\omega \quad (2.90)$$

On en tire un lien entre D et β_2 (Δ signe différent, important car les effets sont différents!)

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (2.91)$$

où D est la paramètre *GVD* et β_2 le paramètre de dispersion ($\text{ps} \cdot \text{nm}^{-1} \cdot \text{km}^{-1}$). Physiquement, le paramètre important est β_2 mais dans les calculs de type ingénieur où il faut avoir rapidement des ordres de grandeur on utilisera plutôt D . En résumé

$\beta_2 = \frac{d^2\beta}{d\omega^2}, \quad D = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (2.92)$
--

On peut estimer la limitation du produit BL par la dispersion chromatique. Si l'écart temporel reste inférieur au temps d'un bit, l'information peut être retrouvée. En définissant le temps bit T_B comme l'inverse du débit binaire, on trouve que

$$BL < \frac{1}{|D| \Delta\lambda} \quad (2.93)$$

où $\Delta\lambda$ est le contenu spectral, ici de la **source laser** et non de la modulation ! D'où l'importance de travailler avec un laser suffisamment cohérent. En résumé, trois contribution

1. **Dispersion matérielle** : $n = n(\omega) \rightarrow D_M$
2. **Dispersion de profil** : $\Delta = \Delta(\omega)$ (le saut d'indice peut varier en fonction de la longueur d'onde). En pratique, négligeable

3. Dispersion du guide : $\beta = \beta(\omega) \rightarrow D_W$

$$D = D_M + D_W \quad (2.94)$$

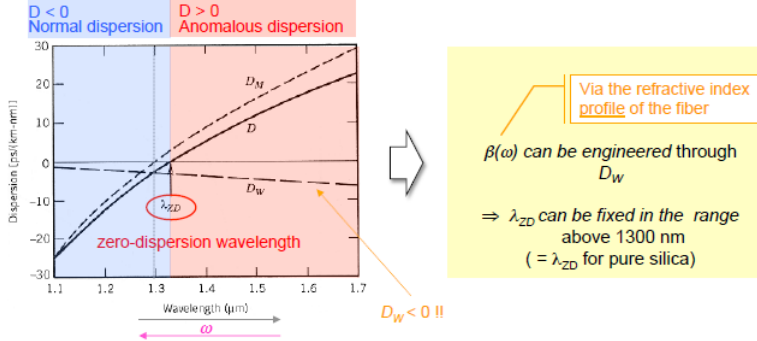


FIGURE 2.33

le zéro de dispersion à 1.5 micron afin d'avoir le minimum de pertes et de dispersion. Cependant, travailler à λ_{ZD} n'est pas toujours bien (effets non-linéaires). On travaille alors un peu plus loin : fibres à dispersion décalée mais non nulle NZDSF (Non-Zero Dispersion-Shifted Fiber).

Essayons d'établir l'équation de propagation d'un pulse. Nous allons faire l'approximation de l'enveloppe lentement variable (SVEA) signifiant que $\Delta\omega \ll \omega_0$ où ω_0 est la fréquence de la porteuse. On fera aussi les hypothèses

1. Le mode LP_{01} est polarisé linéairement selon la direction x
2. Guidage faible $\Delta n \ll 1 \Rightarrow |E_z| \ll |E_x|$ (champ quasi transverse)
3. Le profil modal est identique pour toutes les composantes spectrales du signal
4. Milieu sans pertes et linéaire

Décrivons notre problème en fonction du champ \vec{E} . Pour une onde monochromatique

$$E_x(x, y, z, t) = F(\rho) \cdot \Theta(\theta) \cdot B(z, t) \quad (2.95)$$

où $B(z, t) = \tilde{b} \cdot \exp(j[\omega_0 t - \beta_0 z])$ avec la porteuse et β_0 , la constante de propagation à ω_0 . Pour les ondes polychromatiques comme les pulses, on notera

$$E_x(x, y, z, t) = F(\rho) \cdot \Theta(\theta) \underbrace{\int \tilde{b}(\omega) \cdot \exp(j[\omega t - \beta(\omega) z]) \cdot d\omega}_{B(z, t)} \quad (2.96)$$

où $|\tilde{b}(\omega)|^2 \propto$ la densité spectrale.

Effectuons l'approximation de l'enveloppe lentement variable (SVE) $A(z, t)$

$$B(z, t) = A(z, t) \cdot \exp(j[\omega_0 t - \beta_0 z]) \quad (2.97)$$

où la largeur spectrale de \tilde{A} est $\ll \omega_0$. Effectuons la transformée de Fourier par rapport à ω

$$\tilde{B}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) \cdot \exp(j[\omega_0 t - \beta_0 z]) \exp(-j\omega t) dt = \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \cdot \exp(-j\beta_0 z) \quad (2.98)$$

On peut voir ci-contre que la dispersion du guide est toujours négative. La dispersion totale (D) sera un peu "shiftée" vers le bas. Le zéro de dispersion ne va pas se situer au zéro de la silice mais un peu au delà. Comme on peut jouer sur $\beta(\omega)$ via D_W , on va pouvoir fixer λ_{ZD} . On parlera alors de fibre DSF (Dispersion-Shifted Fiber) : on amène

Prenons la TF de cette expression par rapport à β

$$\tilde{B}(\beta, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{B}(z, \omega) \exp(+j\beta z) dz = \tilde{A}(\beta - \beta_0, \omega - \omega_0) \quad (2.99)$$

Développons la constante de propagation $\beta(\omega)$ jusqu'à l'ordre 3 autour de la fréquence de la porteuse ω_0

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.100)$$

où $\beta_m = \left(\frac{d^m}{d\omega^m} \beta \right) \Big|_{\omega=\omega_0}$. Multiplions ce développement par la résultat de notre précédente TF

$$(\beta - \beta_0)\tilde{A}(\beta - \beta_0, \omega - \omega_0) - \left[\beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 \right] \tilde{A} = 0 \quad (2.101)$$

Par changement de variable $\beta' = \beta - \beta_0$ et $\omega' = \omega - \omega_0$

$$\beta' \tilde{A}(\beta', \omega') - (\beta_1 \omega' + \frac{1}{2}\beta_2 \omega'^2 + \frac{1}{6}\beta_3 \omega'^3) \tilde{A} = 0 \quad (2.102)$$

En effectuant la transformée de Fourier inverse en β'

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}(z, \omega') = -j(\beta_1 \omega' + \frac{1}{2}\beta_2 \omega'^2 + \frac{1}{6}\beta_3 \omega'^3) \tilde{A} \quad (2.103)$$

Au second ordre, la propagation dans un milieu linéaire dispersif cause seulement une évolution quadratique de la phase du champ : la **phase spectrale** est **quadratique**. La densité spectrale $|\tilde{B}|^2$ reste elle bien constante (sans pertes, linéaire).

Pour retrouver la propagation dans le domaine temporel, il faut effectuer la transformée de Fourier inverse en ω' . L'**évolution de l'enveloppe lentement variable** A est donnée par

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - j \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = 0 \quad (2.104)$$

En nous mettant dans le référentiel temporel du pulse ($t' = t - \beta_1 z$, $z' = z$)

$$\frac{\partial A}{\partial z'} - j \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t'^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t'^3} = 0 \quad (2.105)$$

où le second terme est la **Group Velocity Dispersion** (GVD).

Les slides 93 et 94 donnent des exemples de dispersion. Essayons d'interpréter ces résultats. A cause de la dispersion chromatique, l'expression de la vitesse de groupe devient

$$v_g(\omega) = \frac{1}{[d\beta/d\omega]_{\omega_0} + \beta_2(\omega - \omega_0)} \quad (2.106)$$

On voit apparaître un $+\beta_2$: les fréquences décalées vers le bleu (fréquences élevées) vont se propager plus vite.

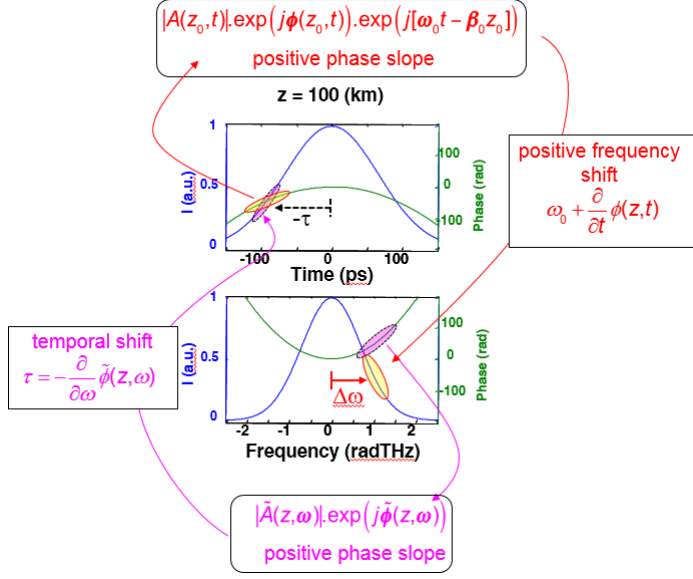


FIGURE 2.34

Considérons la représentation spectrale. La pente de la phase du groupe de fréquence maue est positive : il en résulte un shift temporel donné par

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\phi}(z, \omega) \quad (2.107)$$

Ici la pente est positive, le délai introduit est donc négatif : ces fréquences se propagent plus rapidement. Les fréquences à droite du spectre sont alors à gauche (voir en mauve sur le graphe du dessus) dans la représentation temporelle car, se propageant plus vite, elles arrivent "avant".

Faisons le même exercice pour la phase temporelle, en rouge. Ce groupe de fréquence à une pente positive. Si on développe $\phi_0(t)$ en fonction du temps, on trouve un shift de fréquence positif donné par

$$\omega_0 + \frac{\partial}{\partial t} \phi(z, t) \quad (2.108)$$

Cette pente de phase positive traduit le fait qu'à cet endroit-là, la fréquence est supérieure à celle de la porteuse : elle se situe sur la droite dans le graphique fréquentiel. Toutes les informations sont présentes dans chaque domaine, mais l'interprétation est plus rapide lorsque les deux sont fournis.

Pour un faisceau Gaussien avec seulement le terme GVD, une solution exacte existe. Nous avons vu que dans ce cas, la phase que l'on acquiert pendant la propagation est quadratique : notons la directement comme telle (il s'agit donc d'un spectre gaussien)

$$\tilde{A}(0, \omega) = A_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{W_0} \right)^2 - j b \omega^2 \right] \quad (2.109)$$

où b est un paramètre impliquant une courbure de phase positive s'il est négatif et où $W_0 = HW_{1/e}$ (intensité). Un paramètre utile est la largeur à mi-hauteur

$$\Delta \omega_{FWHM}^I = 2(\ln 2)^{1/2} W_0 \approx 1.665 W_0 \quad (2.110)$$

L'intérêt est que la TF d'une gaussienne avec une phase quadratique est une gaussienne avec une phase quadratique. En calculant la TF^{-1}

$$A(0, t) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{W_0}{\sqrt{1 + j2bW_0^2}} \exp \left[-\frac{t^2 W_0^2}{2[1 + j2bW_0^2]} \right] \quad (2.111)$$

où la phase est bien quadratique. La largeur du pulse est donnée par

$$\Delta t_{FW1/e}^I = \frac{2}{W_0} \sqrt{1 + 4b^2 W_0^4} \quad (2.112)$$

Celle-ci est minimale pour une phase plate, soit $b = 0$. On dit alors que l'on se situe à la limite de Fourier

$$A(0, t) = \frac{A_0}{T_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{t^2}{2T_0^2} \right] \quad (2.113)$$

où $T_0 = 1/W_0$.

Intéressons-nous au cas où nous ne sommes pas à la limite de Fourier¹² ($b \neq 0$)

$$A(0, t) \propto \exp \left[-\frac{t^2}{2T_{in}^2} (1 - jC) \right] \quad \text{où} \quad \begin{cases} C &= 2bW_0^2 \\ T_{in} &= \frac{1}{W_0} \sqrt{1 + 4b^2W_0^4} \end{cases} \quad (2.114)$$

Le produit donne

$$T_{in}W_0 = \sqrt{1 + C^2} \quad (2.115)$$

Nous avons vu quelques lignes plus haute que la phase temporelle (évoluant linéairement) est un shift en fréquence. On trouve ici

$$\delta\omega(t) = +\frac{\partial\phi}{\partial t} = +\frac{C}{T_{in}^2}t \quad (2.116)$$

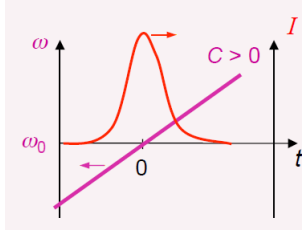


FIGURE 2.35

La fréquence instantanée $\delta\omega$ à l'instant t (contenu spectral à cet instant dans une fenêtre temporelle) évolue avec le temps. Si l'on "écoute" une impulsion passer on commencera dans le grave et la fréquence montera jusqu'à l'aiguë. Ici comme nous parlons spectralement, on commencera dans le rouge puis de plus en plus bleu. On appelle ça le **chirp** (prononcer "tcheurp", comme le "tchip tchip des oiseaux (variation du son continue).

Un pulse est dit *chirped* ($C \neq 0$) si sa fréquence instantanée change avec le temps.

Lorsque $b \neq 0$, la phase temporelle est quadratique et décrite par le chirp C : un $C > 0$ signifie une augmentation linéaire de la fréquence instantanée. Pour $C = 0$, on se situe à la limite de Fourier. Si la phase est quadratique, un $\delta\omega$ commence négatif, il augmente, passe au centre par la fréquence de la porteuse et puis continue à augmenter. Ici, le temps "négatif" signifie "arriver avant".

Étudions la **propagation** ($z \neq 0$). L'impulsion va acquérir une phase spectrale quadratique (la phase change, mais **reste** quadratique)

$$\tilde{A}(z, \omega) = \tilde{A}(0, \omega) \exp \left(-j \left[\frac{\beta_2}{2} \omega^2 + \frac{\beta_3}{6} \omega^3 \right] z \right) \quad (2.117)$$

Le pulse pour $z \neq 0$ ($\beta_3 = 0$) est caractérisé par

$$b(z_1) = b_{z=0} + \frac{1}{2} \beta_2 z_1 \quad \text{ou} \quad C(z_1) = C_{z=0} + \beta_2 z_1 W_0^2 \quad (2.118)$$

Voyons comment le chirp change la durée de l'impulsion en évaluant le rapport

$$\frac{T_1}{T_{in}} = \left[\frac{1 + 4b^2W_0^4}{1 + 4b_{z=0}^2W_0^4} \right]^{1/2} = \left[\frac{1 + C_{z=z_1}^2}{1 + C_{z=0}^2} \right]^{1/2} \quad (2.119)$$

12. Il n'est pas possible d'avoir un pulse aussi court pour la même amplitude spectrale

où $T_1 = HW$ $1/e$ est l'intensité au point $z = z_1$ et où $T_{in} = HW$ $1/e$ est l'intensité au point $z = 0$. La largeur du pulse change lorsqu'il se propage! ΔC et b ne sont pas toujours des fonctions croissantes avec la position car dépend du signe de β_1 et z_1 .



FIGURE 2.36

Calculons l'évolution du pulse dans la configuration ci-contre. Initialement, nous avons un pulse à la limite de Fourier (phase plate, $C = 0$). Après propagation dans la *SMF*, l'impulsion est plus large. Pour une *DCF*, le *slide 95* nous apprend que la phase temporelle doit être une parabole. Il va falloir "redresser" la phase avec la *DCF* en prenant un β_2 de signe opposé à la *SMF* : C va se mettre à diminuer (en valeur absolue) et tendre progressivement vers zéro, en espérant revenir à l'impulsion du début. Ceci est "semblable" avec la convergence d'un faisceau gaussien à travers une lentille.

Sur le montage (cf. schéma ci-contre), nous voyons avant et après la fibre des tronçons de fibre à compensation de dispersion (DCF) (en deux parties pour limiter les effets non-linéaires). Calculons la longueur de *DCF* nécessaire pour contrecarrer la dispersion dans la fibre *TeraLight*.

Les données sont les suivantes

- $L^{SMF} = 100\text{km}$
- $D^{SMF} = 8 \text{ ps}/(\text{nm.km})$
- $D^{DCF} = -50 \text{ ps}/(\text{nm.km})$

On cherche donc L^{DCF} . Sachant que $b(z_1) = b_{z=0} + \frac{1}{2}\beta_2 z_1$, on trouve

$$b(z = 0) = 0, \quad b(z = L^{SMF}) = \frac{1}{2}\beta_2^{SMF} \cdot L^{SMF} \quad (2.120)$$

$$b(z = L^{SMF} + L^{DCF}) = \frac{1}{2}\beta_2^{SMF} \cdot L^{SMF} + \frac{1}{2}\beta_2^{DCF} \cdot L^{DCF} \quad (2.121)$$

Pour ne pas avoir d'étalement, il faut que $b(z = L^{SMF} + L^{DCF}) = 0$. La condition pour ne pas en avoir est donnée par

$$\sum_j \beta_2^j L_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_j L_j D_j = 0 \quad (2.122)$$

Il faut donc que $D^{DCF} = \left| \frac{D^{SMF}}{D^{DCF}} \right| L^{SMF} = 800/50 = 16 \text{ km}$.

Ordre de dispersion supérieur

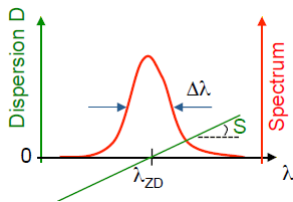


FIGURE 2.38

On se rappelle que nous avons pour une fibre $B < \frac{1}{|D|L\Delta\lambda}$ et pour plusieurs $B < \frac{1}{\left| \sum_j L_j D_j \right| \Delta\lambda}$. Dès lors, si $D = 0$ ou $\sum_j D_j L_j = 0$, B pourrait être arbitrairement grand? Non, BL reste limité par les effets dispersifs d'ordre supérieur. Ces effets sont caractérisés par la **pente de dispersion S**

Pente de dispersion S

$$S = \frac{dD}{d\lambda} = \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2} \right)^2 \beta_3 + \frac{4\pi c}{\lambda^3} \beta_2 \quad (2.123)$$

En première approximation, lorsque $D = 0$ il faut le remplacer par $S\Delta\lambda$ de sorte à écrire

$$BL < \frac{1}{|S| \Delta\lambda^2} \quad (2.124)$$

où on voit apparaître un carré ! Au troisième ordre (β_3), la fonction est de type cubique : les pentes sont identique à gauche et à droite. Cela signifie que toutes les fréquences vont être décalées vers le même côté : tout se décale. On observe également des oscillations. En effet, certaines fréquences sont peu décalées et il en résulte un phénomène de battements.

Dans les systèmes de multiplexage en longueur d'onde, la pente de dispersion est importante. En effet, avec les DSF on peut seulement compenser la dispersion pour une seule longueur d'onde

$$D(\lambda) = S_0(\lambda - \lambda_{ZD}) \quad (2.125)$$

Comme pour la plupart des fibres $S > 0$, on ne peut compenser la dispersion que pour un seul channel. On peut travailler avec des fibres où S est faible (fibre à pente réduite) ou des fibres où $S < 0$ (fibre à inversion de dispersion).

Limitation du bit rate

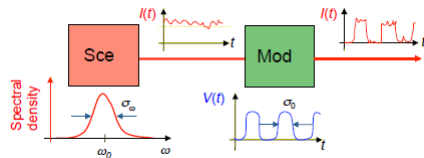


FIGURE 2.39

Les effets dispersifs (vitesse de propagation différente en fonction de la longueur d'onde) causent un élargissement de la taille du pulse qui peut limiter le *bit rate*. La largeur spectrale à deux origines

1. La largeur spectrale finie de la source (σ_w)
2. La forme temporelle (modulation) et la durée (σ_0)

Nous allons considérer la propagation d'un pulse gaussien de longueur temporelle σ_0 avec un spectre gaussien de longueur σ_w pour **la source**. Rappelons que

$$\sigma_t \equiv \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2} \quad (2.126)$$

où $\langle t^m \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t^m |A(t)|^2 dt / \left(\int_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 dt \right)$. On en tire

$$\frac{\sigma_t^2}{\sigma_0^2} = \left(1 + \frac{C\beta_2 L}{2\sigma_0^2} \right)^2 + (1 + V_\omega^2) \left(\frac{\beta_2 L}{2\sigma_0^2} \right)^2 + \frac{1}{2} (1 + C^2 + V_\omega^2)^2 \left(\frac{\beta_3 L}{4\sigma_0^3} \right)^2 \quad (2.127)$$

où $V_\omega \equiv 2\sigma_\omega\sigma_0$ et C est pré-chirp du pulse.

On peut calculer le *bit rate* maximum en considérant que la largeur temporelle du pulse doit être inférieure à 1/4 du *bit slot*¹³

$$\sigma_t < T_B/4 = \frac{1}{4B} \quad (2.128)$$

Les *slides 105* et *106* donnent des exemples de calcul pour le produit BL (**à lire**).

13. Le pulse gaussien a alors 90% de son énergie dans le bit slot

2.4.3 Biréfringence et dispersion du mode de polarisation

La dispersion augmente les interférences inter-symbole, limitant le produit BL . Il y a plusieurs mécanismes de dispersion

Dispersion modale chaque mode se propage à sa propre vitesse de groupe

Dispersion chromatique chaque fréquence se propage à sa propre vitesse de groupe

Dispersion de mode de polarisation chaque état de polarisation principal se propage à sa propre vitesse de groupe

Les effets de polarisation dans les fibres n'affectent pas que l'**état de polarisation de sortie** mais il diminue aussi les **performances** du système de transmission (limitation du débit, la polarisation dans une fibre étant aléatoire).

Polarisation dans une fibre monomode

Considérons une fibre monomode où seul LP_{01} se propage. Sous l'approximation du guidage faible, on trouve (dans le cœur), nous avons pour LP_{01} ($N = 1, q = 1$) :

$$\begin{cases} E_z = AJ_1\left(\frac{u.r}{a}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot \exp(j[\omega t - \beta z]) \\ E_r = A(-j\beta \frac{a}{u}) J_0\left(\frac{u.r}{a}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot \exp(j[\omega t - \beta z]) \\ E_\theta = A(-j\beta \frac{u}{a}) J_0\left(\frac{u.r}{a}\right) \cdot \cos(\theta) \cdot \exp(j[\omega t - \beta z]) \end{cases} \quad (2.129)$$

Dans un milieu massif, le champ électrique est orthogonal à la direction de propagation. Ce n'est pas tout à fait le cas dans une fibre optique où la composante z est non-nulle

$$|E_r| \approx |E_\theta| \approx \beta \frac{a}{u} |E_z| \quad (2.130)$$

Cependant, comme

$$\beta \frac{a}{u} = \frac{\beta \cdot a}{\sigma \cdot a} = \frac{\beta}{\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{k_0^2 n_1^2 / \beta^2 - 1}} \gg 1 \quad (2.131)$$

On peut dire que

$$E_r^2 + E_\theta^2 \gg E_z^2 \quad (2.132)$$

Pour les fibres à guidage faible, on a donc $\vec{E} \perp \vec{H}$ et $|E_z|/|\vec{E}| \ll 1$ soit presque des ondes *TEM*. Les **états de polarisation** (SOP) du mode LP_{01} dans une fibre peut être décrit par un formalisme basé sur les **ondes planes dans le vide**. Nous allons faire un rappel sur la polarisation des ondes EM.

État de polarisation (SOP) d'une onde EM

Les interactions lumière-matière se font via l'interaction de \vec{E} . Les **états de polarisation** correspondent à la trajectoire temporelle de la pointe du vecteur \vec{E} (pour une position donnée)

$$\vec{E} = E_x \vec{1}_x + E_y \vec{1}_y \quad (2.133)$$

où $E_x = E_{x0} \cos(\omega t + \varphi_x)$ et $E_y = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi_y)$ avec E_{x0} et E_{y0} les amplitudes de champ et φ_x, φ_y les phases des champs. En éliminant t et en posant $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$:

$$\left[\frac{E_x}{E_{x0}}\right]^2 + \left[\frac{E_y}{E_{y0}}\right]^2 - 2 \frac{E_x}{E_{x0}} \frac{E_y}{E_{y0}} \cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi) \quad (2.134)$$

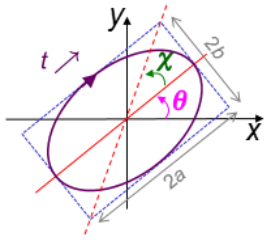


FIGURE 2.40

En toute généralité, l'état de polarisation d'une onde monochromatique polarisée est une **ellipse** dans le plan orthogonal à la propagation. La forme de la trajectoire (et donc le SOP) est caractérisée par **deux** paramètres θ (l'angle azimutal) et χ (définissant l'ellipticité) en plus de la direction

$$e \equiv \tan(\chi) = \pm \frac{b}{a} \quad (2.135)$$

où \pm = droite/gauche. Deux exemples sont donnés au *slide 110*.

Propagation d'onde et évolution du SOP

La différence de phase $\Delta\varphi$ peut évoluer avec la distance de propagation. Selon le milieu, le SOP initial peut être **maintenu** ou **modifié** de façon déterministe ou aléatoire (fibre optique, difficile à prédire). Il existe quatre évolution de SOP

1. Milieu isotope

La propagation est la même pour tous les états de polarisation : $\Delta\varphi_{prop} = 0$, le SOP est maintenu.

2. Milieu linéaire biréfringent

Dans un tel milieu, il existe **deux direction perpendiculaires** dans lesquels deux états de **polarisation linéaire** qui se propagent resteront inchangés. Ce sont les axes (principaux) du milieu. Ici nous avons

$$E_x = E_{x0} \exp(j[\omega t - \beta_x z + \varphi_{x0}]), \quad E_y = E_{y0} \exp(j[\omega t - \beta_y z + \varphi_{y0}]) \quad (2.136)$$

avec les constantes de propagations le long des axes x et y (axes principaux). Dans ce cas-ci, $\Delta\varphi_{prop} = -(\beta_y - \beta_x)z$: la différence de phase change linéairement avec z . Le fait de faire une boucle dans le fibre optique introduit de la biréfringence.

3. Milieu à activité optique

Un SOP linéaire subit une rotation. Un SOP circulaire, rien ne change. Cette propriété vient du déphasage entre les polarisations circulaires gauche et droite.

4. Matériau aléatoirement biréfringent

Le SOP de sortie n'est pas prévisible, c'est aléatoire : observé dans les fibres optiques standard !

Représentation mathématique d'un état de polarisation (SOP)

Il existe deux formalisme différent pour représenter un SOP : JONES (sur $E_x, E_y, \varphi_x, \varphi_y$) et STOKES (θ, χ).

FORMALISME DE JONES

Le SOP est représenté par un vecteur de Jones V (représentation en phaseur)

$$V \equiv \begin{pmatrix} E_{x0} \exp(j\varphi_x) \\ E_{y0} \exp(j\varphi_y) \end{pmatrix} \quad (2.137)$$

où $\|V\|^2 = E_{x0}^2 + E_{y0}^2$. On normalise habituellement V et $E_{x0}, E_{y0}, \Delta\varphi$ (le SOP) peuvent être déduit de V . Les deux états de polarisation V_1, V_2 sont orthogonaux

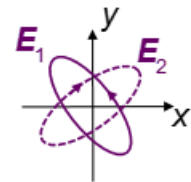


FIGURE 2.41

$$V_1^\dagger V_2 = V_2^\dagger V_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 - \theta_2 = \pi/2 \text{ \& \; } \chi_1 = -\chi_2 \quad (2.138)$$

Des exemples de vecteur de Jones sont donnés au *slide 114*.

Dans un milieu linéaire, la polarisation de sortie dépend linéairement de celle en entrée

$$V_{OUT} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_J \cdot V_{IN} \quad (2.139)$$

où J est la **matrice de Jones** (la matrice de transfert entre le SOP d'entrée et de sortie) qui est généralement complexe. Par conservation de l'énergie

$$J^\dagger J = J J^\dagger = 1 \quad (2.140)$$

Le formalisme traite aisément la propagation à travers un système optique constitué de différents milieux

$$V_{OUT} = J_n \dots J_3 J_2 J_1 V_{IN} \quad (2.141)$$



FIGURE 2.42

La matrice de Jones possède **deux vecteurs propres orthogonaux**

$$B_{OUT} = J \cdot B_{IN} = \lambda B_{IN} \quad (2.142)$$

Ces modes propres (B_{in}) voient leur polarisation inchangée par propagation entre l'entrée et à la sortie (mais pas "entre" les deux). Dans un matériau biréfringent linéaire, les vecteurs propres sont les axes de polarisation. Le *slide 116* donne des exemples de matrices de Jones.