



ECOLE  
POLYTECHNIQUE  
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

---

# Optical Materials PHYS-Y016

---

*Auteur :*  
Nicolas ENGLEBERT

*Professeur :*  
Jan DANCKAERT

Année 2017 - 2018

# Appel à contribution

## Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Jan DANCKAERT à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer

surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer  $\text{\LaTeX}$ , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

## Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

**Merci !**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Changing the Properties of Light . . . . .	1
1.2	Introduction to Electrodynamics in Continuous Media . . . . .	1
1.2.1	Maxwell's Equations . . . . .	1
1.2.2	Polarisation Charge and Current . . . . .	2
1.2.3	Magnetisation Current . . . . .	3
1.2.4	Maxwell's Equations Revisited . . . . .	3
1.2.5	Constitutive Equations . . . . .	3
1.2.6	Champ de polarisation . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Light Propagation in Linear Isotropic Dielectrics</b>	<b>5</b>
2.1	Constitutive Equation for Linear Isotropic Dielectrics . . . . .	5
2.2	Propagation of Plane Monochromatic Waves . . . . .	6
2.3	Propagation of Light in Absorptive Dielectrics . . . . .	7
2.4	Frequency Dispersion . . . . .	8
2.4.1	Frequency Dependence of $\epsilon$ . . . . .	8
2.4.2	Dispersion Formula for Refractive Index . . . . .	9
2.5	Linear Magnetic Materials . . . . .	10
2.6	Reflection . . . . .	10
2.7	The Electromagnetic Spectrum . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Microscopic Theory of Linear Isotropic Materials</b>	<b>11</b>
3.2	Microscopic Theory for Dielectrics . . . . .	11
3.2.1	Static Electronic Polarisation . . . . .	11
3.2.2	Dynamic Electronic Polarisation . . . . .	12
3.2.3	Quantum Mechanical Theory In-a-Nutshell for Electronic Polarisation . .	12
3.2.4	Ionic Polarisation . . . . .	13
3.2.5	Orientation Polarisation . . . . .	13
3.2.6	The Field of Lorentz and the Local Field . . . . .	13
3.2.7	Clausius-Mosotti Relation . . . . .	14
3.2.8	General Dielectric Behaviour . . . . .	15
3.3	Microscopic Theory for Conductors and Semiconductors . . . . .	15
3.3.1	The 1D Drude Free-Electron Model for Metals . . . . .	15
3.3.2	Cubic Crystals . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Light Propagation in Linear Anisotropic Dielectrics</b>	<b>17</b>
4.1	Anisotropic Materials in Photonics . . . . .	17
4.2	The Susceptibility and Dielectric Tensors . . . . .	17
4.2.1	Constitutive Equations in Anisotropic Media . . . . .	17

4.2.2	Symmetry of the Susceptibility Tensor . . . . .	17
4.3	Plane Monochromatic Waves in Anisotropic Media . . . . .	18
4.3.1	Dispersion Relation . . . . .	18
4.3.2	The Normal Surface . . . . .	19
4.3.3	Fresnel's Equation for the Dispersion Relation of Anisotropic Materials .	21
4.3.4	The Index Ellipsoid . . . . .	22
4.3.5	Properties of the Eigenmodes of Propagation . . . . .	23
4.4	Energy Transport and Group Velocity . . . . .	23
4.4.1	Properties of Poynting's Vector . . . . .	23
4.4.2	Phase Velocity and Group Velocity . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Optical Properties of Linear Anisotropic Media</b>	<b>25</b>
5.1	Optical Classification of Anisotropic Media . . . . .	25
5.2	Light Propagation in Uniaxial Crystals . . . . .	26
5.2.1	Theory of Light Propagation in Uniaxial Crystals . . . . .	26
5.3	Refraction at a boundary . . . . .	27
5.3.1	Double Refraction . . . . .	27
5.4	Optical activity . . . . .	28
5.4.1	Experimental Facts . . . . .	28
5.4.2	Macroscopic Theory of Optical Activity . . . . .	29
5.4.3	An Application : The Polarimeter . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Modification of Optical Properties – Controlling Laser Light</b>	<b>31</b>
6.1	Introduction . . . . .	31
6.2	Electro-Optics . . . . .	31
6.2.1	Microscopic Theory . . . . .	31
6.2.2	Symmetry Properties of Pockels' Tensor . . . . .	32
6.2.3	The Linear Electro-Optic Effect . . . . .	33
6.2.4	Polarisation, Amplitude and Phase Modulation . . . . .	36
6.2.5	Modulation en amplitude . . . . .	37
6.2.6	Modulation en phase . . . . .	38

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Changing the Properties of Light

Un faisceau laser peut être caractérisé par une intensité  $I$ , une puissance  $P$ , un rayon  $w$ , une longueur d'onde  $\lambda$ , une pulsation  $\omega$ , une polarisation et un vecteur de Poynting  $\vec{S}$ . Nous aimerions changer ces propriétés et la seule façon de faire est de la faire interagir avec un matériau.

### 1.2 Introduction to Electrodynamics in Continuous Media

#### 1.2.1 Maxwell's Equations

Le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et le champ magnétique d'induction  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  sont gouvernés par

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_a \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}_a + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.1}$$

où  $\rho_a$  (densité de charge (libre et polarisation) et  $\vec{J}_a$  (courants : libres, polarisés et magnétiques) sont les termes sources. Dans le vide, les choses sont simples ( $\vec{E}, \vec{B}$  continus et pas de termes sources) mais dans un matériau il faut prendre en compte toutes les particules pouvant contribuer au terme source.

On approxime souvent la densité de charge  $\rho_a$  par une combinaison de charges séparées et de dipôles<sup>1</sup>

$$\vec{p} = q\vec{d}\tag{1.2}$$

Par exemple, les atomes, molécules, ... Pour les charge séparées on notera les électrons dans un solide, les ions, ... On note alors

$$\rho_a = \rho + \rho_P\tag{1.3}$$

Le densité de courant totale  $\vec{J}_a$  [ $A/m^2$ ] se note

$$\vec{J}_a = \vec{J} + \vec{J}_P + \vec{J}_M\tag{1.4}$$

---

1. Description utilisée lorsque deux charges égales mais de signe opposé sont considérées comme un ensemble.

où  $\vec{J}$  est le mouvement des charges libres,  $\vec{J}_P$  la variation des dipôles et  $\vec{J}_M$  la densité de courant magnétique. Notons la force de Lorentz agissant sur une charge  $q$  à vitesse  $\vec{v}$

$$f_{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.5)$$

ainsi que la force agissant sur un dipôle électrique  $\vec{P}$  (où  $\vec{B} = \vec{0}$ )

$$f_p = (p \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (1.6)$$

D'autres forces sont renseignées à la page 12.

Une approche (microscopique) pour étudier la propagation de la lumière dans la matière serait de résoudre ces équations couplées aux équations de mouvement de toutes les particules, ce qui n'est pas réaliste. Une autre approche est de voir les choses d'un point de vue macroscopique. Les équations de Maxwell sont valables aux dimensions macroscopique (nm) en considérant la moyenne des champs sur un volume contenant un grand nombre d'atomes, ions, ... Avec l'hypothèse de continuité, on appelle cette approche *electrodynamics of continuous media*.

### 1.2.2 Polarisation Charge and Current

Nous avons vu l'expression d'un dipôle microscopique ( $\vec{p} = q\vec{d}$ ). Pour l'approche macroscopique, il faut considérer la moyenne du moment dipolaire par unité de volume

$$\vec{P}(r) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} \quad (1.7)$$

où  $\vec{P}P$  est défini dans la limite où l'élément de volume  $\Delta V$  autour de  $\vec{r}$  est "petit" macroscopiquement, mais contient un grand nombre de dipôles. Le moment magnétique d'un élément au point  $\vec{r}'$  est donné par

$$P\Delta V' \quad (1.8)$$

Celui-ci contribue au potentiel au point  $\vec{r}$  d'une quantité (vecteurs à mettre)

$$\Delta U(r) = \frac{P(r')\Delta V'(r - r')}{4\pi\epsilon_0|r - r'|^3} \quad (1.9)$$

Le potentiel au point  $\vec{r}$  est alors donné par

$$U(\vec{r}) = \iiint_{V_0} \frac{P(r')(r - r')dV'}{4\pi\epsilon_0|r - r'|^3} \quad (1.10)$$

Sachant que, par propriété  $\nabla'(1/(|r - r'|)) = (r - r')/(|r - r'|^3)$  et à l'aide du vecteur différentiel  $\nabla'(f\vec{P}) : f\nabla' \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \nabla' f$ , on peut ré-écrire le potentiel

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V_0} \frac{(-\nabla' \cdot \vec{P})dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_0} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.11)$$

Par identification avec l'expression du potentiel du à une distribution de charge volumique ou surfacique et comme  $[-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}] = [C/m^3]$  et  $[\vec{P}] = [C/m^2]$ , on peut écrire

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (1.12)$$

Sachant que le courant de polarisation est donné par<sup>2</sup>

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (1.13)$$

---

2. Cf. théorie microscopique des dipôles élémentaires

Compte-tenu de la précédente expression, nous obtenons

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p \quad (1.14)$$

La présence de la divergence se justifie par le fait que les charges sont séparées, le signe par convention.

### 1.2.3 Magnetisation Current

Les courants de magnétisations sont des petites "boucles" magnétiques. Similairement à la sous-section précédente

$$M(\vec{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \frac{\sum_i m_i}{\Delta V}, \quad \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (1.15)$$

### 1.2.4 Maxwell's Equations Revisited

En substituant dans les équations de Maxwell les résultats des deux précédentes sous-sections et en posant  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  et  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.16)$$

### 1.2.5 Constitutive Equations

Pour avoir un système résolvable, il faut trouver une relation entre  $\vec{P}$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{M}$ ,  $\vec{B}$ . Ceci va être faisable avec une approche phénoménologique, en utilisant les équations constitutives.

#### Champ de magnétisation

Dans ce cours, on considérera que  $\vec{M} = \vec{0}$

### 1.2.6 Champ de polarisation

Beaucoup de matériaux contiennent des dipôles ou son polarisé à cause de  $\vec{E}$ . Ces dipôles sont affectés lorsqu'une onde EM traverse le matériau : les particules positives bougent dans la direction du champ et les négatives dans le sens opposé. Il en résulte que  $\vec{P} = f(\vec{E})$ . On peut alors considérer le développement en série suivant

$$\vec{P} = \vec{P}^{(0)} + \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \dots \quad (1.17)$$

où  $\vec{P}^{(0)}$  est la polarisation statique,  $\vec{P}^{(1)}$  est la polarisation linéaire ( $\propto \vec{E}$ ), ...

De façon générale, la polarisation en  $(\vec{r}, t)$  dépend d'autres position et temps que le doublet  $(\vec{r}, t)$ . L'expression du  $n^e$  ordre devient alors

$$P_i^{(n)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} d\vec{r}_1 \dots \iiint_{V_0} d\vec{r}_n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \chi_{ij_1 \dots j_n}^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t, t_1, \dots, t_n) E_{j_1}(\vec{r}_1, t) \dots E_{j_n}(\vec{r}_n, t_n) \quad (1.18)$$

où  $\chi^{(n)}$  est la susceptibilité d'ordre  $n$ , un tenseur de rang  $n + 1$ . Nous faisons ici l'hypothèse que le matériau est homogène (propriétés identique en chaque point de l'espace). En cas de discontinuité, on supposera que la théorie de continuité reste valide à l'interface. On fait également l'hypothèse que le matériau est stationnaire : la même expérience faite aujourd'hui ou demain donnera les mêmes résultats. Il s'agit bien sur d'approximations. Ceci s'exprime mathématiquement par un tenseur de susceptibilité qui ne dépend que des différences entre les coordonnées spatiales et temporelles.

$$P_i^{(n)}(r, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} dr_1 \dots \iiint_{V_0} dr_n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \chi_{ij_1 \dots j_n}^{(n)}(r - r_1, \dots, r - r_n, t, \dots, t - t_n) E_{j_1}(r_1, t_1) \dots E_{j_n}(r_n, t_n) \quad (1.19)$$



## Chapitre 2

# Light Propagation in Linear Isotropic Dielectrics

### 2.1 Constitutive Equation for Linear Isotropic Dielectrics

Précédemment<sup>1</sup>, nous avons introduit une relation constitutive décrivant les propriétés d'un matériau homogène et stationnaire

$$P_i^{(n)}(r, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} dr_1 \dots \iiint_{V_0} dr_n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \chi_{ij_1 \dots j_n}^{(n)}(r - r_1, \dots, r - r_n, t, \dots, t - t_n) E_{j_1}(r_1, t_1) \dots E_{j_n}(r_n, t_n) \quad (2.1)$$

Cette relation compliquée se simplifie avec les deux hypothèses suivantes

1. **Linéaire.** Les champs  $\vec{E}, \vec{B}$  dépendent linéairement des termes sources  $\rho, \vec{P}$  et  $\vec{M}$ . Linéaire signifie également qu'une combinaison de solutions est solution.
2. **Isotropique.** Les relations entre  $\vec{E}, \vec{B}$  et  $\rho, \vec{P}, \vec{M}$  sont indépendantes de la direction d'espace.

La première hypothèse ne laisse place qu'au terme du premier ordre

$$P_i(r, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} dr_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \chi_{ij}^{(1)}(r - r_1, t - t_1) E_j(r_1, t_1) \quad (2.2)$$

La seconde implique que le champ de polarisation doit être parallèle au champ électrique

$$P_i(r, t) = \epsilon_0 \iiint_{V_0} dr_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \chi^{(1)}(r - r_1, t - t_1) E(r_1, t_1) \quad (2.3)$$

Etant une intégrale de convolution, elle se traite facilement dans le domaine des fréquences

$$E(k, \omega) = \iiint E(r, t) e^{-i(\omega t - k \cdot r)} dr dt, \quad E(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint E(k, \omega) e^{i(\omega t - k \cdot r)} dk d\omega \quad (2.4)$$

La relation constitutive dans le domaine des fréquences devient alors

$$P(k, \omega) = \epsilon_0 \chi(k, \omega) E(k, \omega) \quad (2.5)$$

où il est clair qu'une interaction non-locale (non-instantanée) donne lieu à de la dispersion temporelle (spatiale).

---

1. La page précédente quoi

Les hypothèses

- **Causalité.** Susceptibilité nulle  $\forall t < t_1$ . Dans le domaine fréquentiel, elle fournit une relation entre la partie réelle et complexe de la susceptibilité.
- **Instantané.**  $\rho, \vec{P}, \vec{J}, \vec{M}$  ne dépendent que de  $\vec{E}, \vec{B}$  au même instant.
- **Local.**  $\rho, \vec{P}, \vec{J}, \vec{M}$  ne dépendent que de  $\vec{E}, \vec{B}$  au même point.

S'expriment

$$\chi^{(1)}(r - r_1, t - t_1) = \chi \delta(r - r_1, t - t_1) \quad (2.6)$$

Ce qui implique

$$P(r, t) = \epsilon_0 \chi E(r, t) \quad (2.7)$$

Ce qui est une bonne approximation à basse fréquence<sup>2</sup> et pour les matériaux transparents<sup>3</sup>

## 2.2 Propagation of Plane Monochromatic Waves

La relation constitutive linéaire simplifie les équations de Maxwell :  $\vec{D}$  est linéaire en  $\vec{E}$

$$D \equiv \epsilon_0 + P = \epsilon_0(1 + \chi)E = \epsilon E \quad (2.8)$$

où  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$ . On en tire

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{B} = \epsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.9)$$

Ce qui mène à l'équation d'onde bien connue

$$\Delta E - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (2.10)$$

Possédant comme solution  $E(r, t) = E_0 \text{Re} \left( e^{i\omega t - k \cdot r} \right)$ . Par substitution de la solution, on trouve la **relation de dispersion**

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \epsilon \mu \omega^2 \quad (2.11)$$

Qui devient  $k_0 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  dans le vide. On en déduit que la vitesse de la lumière dans le vide est donnée par  $c = \omega/k_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . La relation de dispersion dans un diélectrique est

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \quad (2.12)$$

On définit alors la **vitesse de phase**  $v_\varphi = \omega/k = 1/\sqrt{\epsilon \mu_0}$ . L'**indice de réfraction** est défini comme le rapport entre la vitesse de la lumière sur la vitesse de phase

$$n = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad (2.13)$$

On utilisera souvent la relation suivante, issue des précédentes relations

$$k = \frac{\omega}{c} n \quad (2.14)$$

---

2. La TF d'une fonction réelle est complexe, la dispersion et l'atténuation sont liés.

3. Pas d'atténuation et donc pas de dispersion : interaction instantanée des dipôles.

## 2.3 Propagation of Light in Absorptive Dielectrics

Considérons comme relation constitutive la loi d'Ohm  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ . En faisant l'hypothèse de linéarité, nous avons toujours que  $P = \epsilon \chi E$ . Les équations de Maxwell deviennent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{rôt } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rôt } \vec{B} = \mu_0 \sigma E + (1 + \chi) \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.15)$$

Si l'onde est monochromatique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{rôt } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rôt } \vec{B} = \underbrace{i\omega \mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \chi - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)}_{\epsilon} E \quad (2.16)$$

où  $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$  est la **permittivité complexe**. Par convention, sa partie imaginaire est négative impliquant que  $n$  se situe toujours dans la quatrième quadrant du plan de Gauss

$$n = n' - in'' = \sqrt{\frac{\epsilon' - i\epsilon''}{\epsilon_0}} \quad (2.17)$$

où  $n', n'', \epsilon''$  sont toujours positifs, mais pas  $\epsilon'$ . Pour un matériau sans pertes,  $n'' = \epsilon'' = 0$ . A partir de l'indice de réfraction complexe, on peut directement trouver la permittivité complexe

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon_0} = n'^2 - n''^2, \quad \frac{\epsilon''}{\epsilon_0} = 2n' n'' \quad (2.18)$$

A partir de la permittivité, l'indice de réfraction se trouve via une relation quadratique<sup>4</sup>

$$n' = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \chi} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon_0^2 (1 + \chi)^2}}}, \quad n'' = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \chi} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon_0^2 (1 + \chi)^2}}} \quad (2.19)$$

△ Les propriétés de conduction d'un matériau influence sur la vitesse de phase d'une onde EM : il n'est **pas** possible d'étudier séparément les effets de la propagation et de "sommer" les deux solutions.

La vitesse de phase d'une onde EM dans un milieu conducteur est donnée par

$$v_\varphi = \frac{c}{n'} \quad (2.20)$$

L'effet de  $n''$  est une décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde dans la direction de propagation

$$E = E_0 e^{i(\omega t - n' k_0 \cdot r)} e^{-n'' k_0 \cdot r} \quad (2.21)$$

On définit généralement la constante d'absorption  $\alpha$  pour exprimer l'irradiance

$$I = I_0 e^{-\alpha(\vec{1}_k \cdot \vec{r})} \quad (2.22)$$

où  $\alpha = 2k_0 n'' = 4\pi n'' / \lambda_0$ , le facteur deux venant du module carré.

---

4. Question d'examen

## 2.4 Frequency Dispersion

### 2.4.1 Frequency Dependence of $\epsilon$

Jusqu'ici nous avons négligé la dispersion, mais avec un spectre fréquentiel fini on ne peut pas la négliger : toutes les constantes du matériau vont dépendre de  $\omega$ . Par exemple :

**Pour un diélectrique** susceptibilité fonction de  $\omega$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega)) \quad (2.23)$$

**Pour un conducteur** conductivité fonction de  $\omega$  (notons que celle-ci peut-être complexe (non-considéré ici))

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \epsilon_0\chi(\omega) - i\frac{\sigma(\omega)}{\omega} \quad (2.24)$$

Considérons les équations de Maxwell dans le domaine de Fourier

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\vec{B}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\sigma\vec{E} + i\omega\epsilon\mu_0\vec{E} \quad (2.25)$$

Un certain nombre de dépendances en fréquences peuvent être établies, indépendamment de l'origine physique

#### 1. Processus de relaxation

La permittivité à la forme

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'_\infty + \frac{\epsilon'_s - \epsilon'_\infty}{1 + i\omega\tau} \quad (2.26)$$

où  $\epsilon'_\infty$  est la limite de haute fréquence dans la permittivité ( $\omega \gg 1/\tau$ ),  $\epsilon'_s$  est la limite statique de la permittivité ( $\omega \ll 1/\tau$ ) et  $\tau$  est le temps de relaxation. On peut extraire les parties réelle et imaginaire de cette expression complexe

$$\epsilon' = \epsilon'_\infty + \frac{\epsilon'_s - \epsilon'_\infty}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \epsilon'' = \omega\tau \frac{\epsilon'_s - \epsilon'_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.27)$$

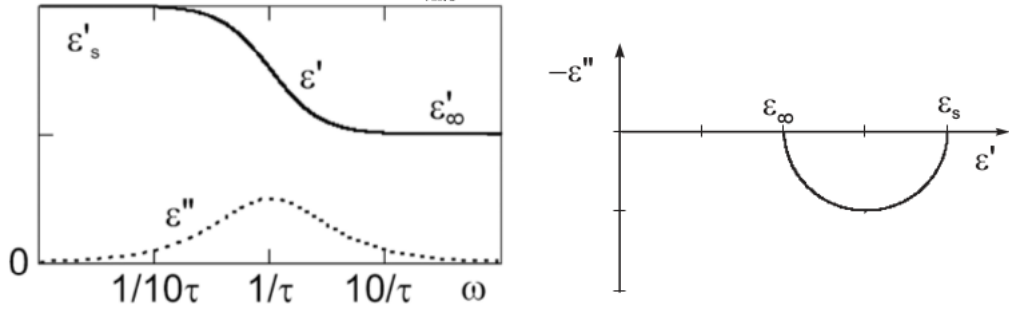


FIGURE 2.1 – Dépendance fréquentielle de  $\epsilon'$  et  $\epsilon''$  pour une relaxation à gauche et représentation Cole-Cole à droite.

La réponse impulsionnelle correspondante à ce phénomène est donnée par

$$\epsilon(t) = \epsilon'_\infty \cdot \delta(t) + (\epsilon'_s - \epsilon'_\infty) \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \quad (2.28)$$

Notons que les relations de Kramers-Kronig ne sont pas vérifiées par la limite à haute-fréquence est non-nulle (mais  $\epsilon - \epsilon'_\infty$  oui).

## 2. Processus de résonance

La dépendance en fréquence de la permittivité à la forme

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'_\infty + (\epsilon'_s - \epsilon'_\infty) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \cdot 2\Delta} \quad (2.29)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de résonance et  $2\Delta$  la largeur de résonance. L'équation (2.42) donne la réponse impulsionnelle.

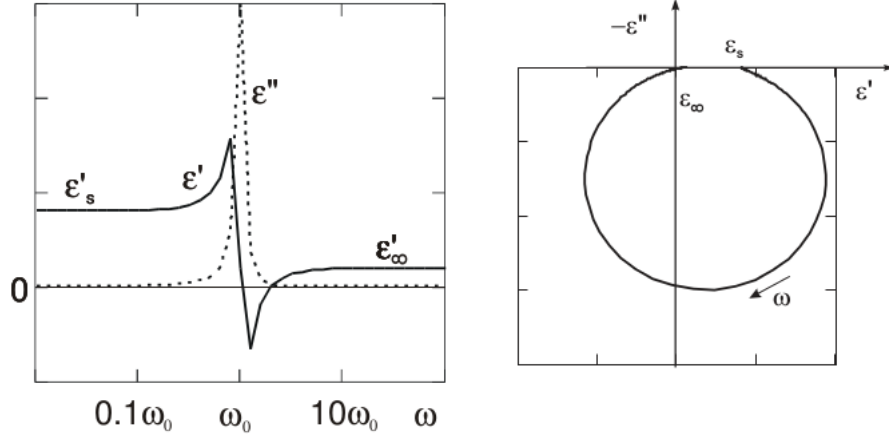


FIGURE 2.2 – Dépendance fréquentielle de  $\epsilon'$  et  $\epsilon''$  pour une résonance à gauche et représentation Cole-Cole à droite.

Proche de la résonance ( $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ ), si la largeur de résonance est bien plus petite que la fréquence de résonance ( $2\Delta \ll \omega_0$ ), on peut faire l'approximation que

$$\epsilon = \epsilon'_\infty + \frac{\omega_0}{2} \frac{\epsilon'_s - \epsilon'_\infty}{\omega_0 - \omega + i\Delta} \quad (2.30)$$

## 3. Dispersion de Sellmeier

L'absorption est souvent négligeable dans les régions loin de la résonance. La permittivité est alors approximativement réelle et la dispersion pour un processus de résonance devient

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'_\infty + (\epsilon'_s - \epsilon'_\infty) \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.31)$$

S'il y a des résonances à haute ou basse fréquence, la dispersion peut être bien approximée par l'équation de Sellmeier

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \sum_j \frac{S_j \omega_j^2}{\omega_j'^2 - \omega^2} \right) \quad (2.32)$$

### 2.4.2 Dispersion Formula for Refractive Index

La dispersion sur l'indice de réfraction est bien approximée par (basée sur l'équation de Sellmeier)

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_j \frac{S_j \omega_j^2}{\omega_j'^2 - \omega^2} \quad (2.33)$$

## 2.5 Linear Magnetic Materials

Le champ de magnétisation est lié au champ magnétique via

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2.34)$$

Par définition, le champ d'induction magnétique est donné par

$$B \equiv \mu_0(H + M) = \mu_0(1 + \chi_m)H = \mu H \quad (2.35)$$

Cependant, pour la quasi-totalité des matériaux optiques  $\chi_m \approx 0$ . On dira alors que  $\mu \approx \mu_0$  et  $B \approx \mu_0 H$ .

## 2.6 Reflection

La réflectance  $R$  est donnée par<sup>5</sup>

$$R = \frac{|n-1|^2}{|n+1|^2} = \frac{(n'-1)^2 + n''^2}{(n'+1)^2 + n''^2} \quad (2.36)$$

## 2.7 The Electromagnetic Spectrum

Le par-cœur c'est mal, mais ça peut (vraiment) aider ici :

- pulsation  $\omega$
- frequency  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
- photon energy  $h\nu = \hbar\omega$
- wavelength in vacuum  $\lambda = \frac{c}{\nu}$
- wave number in vacuum  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$

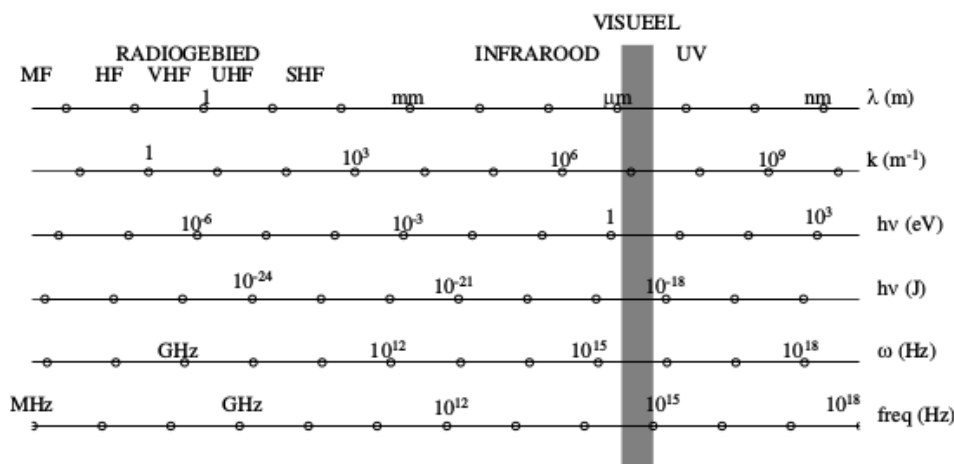


FIGURE 2.3

---

5. Voir TP1

## Chapitre 3

# Microscopic Theory of Linear Isotropic Materials

### 3.2 Microscopic Theory for Dielectrics

Considérons le cas d'un matériau linéaire et isotopique dans le champ de polarisation est donné par  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$  où  $\chi$  est la susceptibilité diélectrique.

#### 3.2.1 Static Electronic Polarisation

Les électrons ont une faible masse  $m_e$  mais une "grande" charge  $e$ . En présence d'un champ électrique  $\vec{E}$ , les électrons subissent une force électrique

$$\vec{F}_E(x) = -e\vec{E} \quad (3.1)$$

Les électrons d'un diélectriques sont toujours associés à des particules positives : ils sont liés à celles-ci par un potentiel électrique qui a un minimum : la position d'équilibre. Ce potentiel est approximativement parabolique

$$U_p(x) = \frac{a}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad F_p(x) = -ax \quad (3.2)$$

Dans un modèle statique, la position ne varie pas avec le temps. Elle peut être trouvée par équilibre des forces  $x = -eE/a$ . On en tire le moment dipolaire et par la même occasion, la polarisation

$$p = -ex = \frac{e^2}{a}E \quad \Rightarrow \quad P = N_e p = \frac{N_e e^2}{a}E \quad (3.3)$$

On en tire  $\chi = \frac{N_e e^2}{a \epsilon_0}$ . En considérant que le potentiel inter-atomique à distance  $d_a$  vaut l'énergie de liaison  $U_b$ , on trouve que  $a = 2U_b/d_a^2$  ce qui mène à

$$\chi = \frac{N_e e^2 d_a^2}{2 \epsilon_0 U_b} \quad (3.4)$$

Le moment dipolaire d'un atome/molécule est relié au champ électrique par la polarisabilité électronique statique ( $\alpha_{e,s}$ , [ $m^3$ ]) :  $p_a = \alpha_{e,s} \cdot \epsilon_0 \cdot E$ . Avec  $Z$  électrons, on trouve

$$\alpha_{e,s} = \frac{Z e^2 d_a^2}{2 \epsilon_0 U_b} \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Dynamic Electronic Polarisation

Il s'agit du modèle de *Drude-Lorentz*. On considère la seconde loi de Newton avec en plus de la force électrique, une force de rappel lié au potentiel et un amortissement proportionnel à la vitesse du nuage d'électron

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -eE - ax - 2m_e\gamma \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E \quad (3.6)$$

où  $\omega_0^2 = a/m_e = 2U_b/(m_e d_a^2)$  est la fréquence de résonance. En régime harmonique  $e^{i\omega t}$  pour  $x$  et  $E$ , on trouve

$$-\omega^2 x + i2\gamma\omega x + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{eE}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega)} \quad (3.7)$$

Pour la polarisabilité électronique d'un atome de  $Z$  électrons, on trouve

$$\alpha_s = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \quad (3.8)$$

Il s'agit d'un phénomène de résonance à la fréquence  $\omega_0$  alors que l'amortissement contribue à la partie imaginaire. Notons que la polarisabilité tend toujours vers zéro à haute fréquence<sup>1</sup> et statique aux basses fréquences<sup>2</sup>

### 3.2.3 Quantum Mechanical Theory In-a-Nutshell for Electronic Polarisation

La mécanique quantique nous apprend que les niveaux d'énergies sont bien définis, avec des différences bien définies : pour se faire absorbé, un photon doit avoir une énergie très précise. Soit  $\omega_{0i}$  correspondant à la différence d'énergie entre l'état excité  $i$  et le fondamental. Chaque transition électronique possible conduit à une ligne d'absorption étroite autour de la fréquence  $\omega_{0i}$ , c'est la signification physique du delta de Dirac ci-dessous (règle d'or de Fermi). Comme on parle d'absorption, cela implique la la règle de Fermi est directement liée à la partie imaginaire de la polarisabilité. Après de longs calculs

$$\text{Im}(\alpha_e) = \sum_i \frac{\pi e^2 |P_{0i}|}{m_e^2 \omega^2 \epsilon_0} \delta(\omega - \omega_{0i}) \quad (3.9)$$

La partie imaginaire est liée à la partie réelle par les relations de Kramers-Kronig. Celles-ci nous disent que dans le cas d'un système causal, elles ne sont pas indépendantes. On trouve alors

$$\text{Re}(\alpha_e) = \sum_i \frac{2e^2 |P_{0i}|}{m_e^2 \omega^2 \epsilon_0} \frac{\omega_{0i}}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} \quad (3.10)$$

Avec la règle d'or de Fermi, on peut facilement calculer la partie imaginaire et avec Kramers-Kronig<sup>3</sup> retrouver la partie réelle. On peut généraliser l'expression dans le cadre de l'amortissement (voir syllabus, (3.21)).

---

1. Les électrons ne savent pas "suivre" le champ.

2. Comme dans la théorie statique.

3. Pas demandé de connaître à l'examen, mais impressionné si on le démontre.



### 3.2.4 Ionic Polarisation

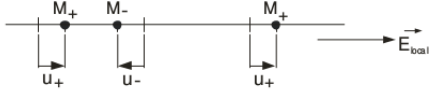


FIGURE 3.1

Lorsqu'un champ oscillant est présent, les ions vont bouger les uns par rapport aux autres. Considérons le schéma ci-contre présentant des ions positifs et négatifs et un champ appliqué selon  $\vec{1}_x$ . En supposant une force proportionnelle à la déviation de la position du centre d'équilibre des deux voisins, on trouve

$$M_- \frac{d^2 u_-}{dt^2} = -2C(u_- - u_+) - qE_{local} \quad (3.11)$$

où  $C$  est le facteur de proportionnalité entre la déviation et la force de rappel et le facteur 2 vient du fait qu'il y a deux voisins. Pour un ion positif, on trouve

$$M_+ \frac{d^2 u_+}{dt^2} = -2C(u_+ - u_-) + qE_{local} \quad (3.12)$$

Un champ local va exciter chaque type d'ion (local, qui est relié au global, nous y reviendrons). Par combinaison linéaire, on trouve

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + 2Cu = qE_{local} \quad (3.13)$$

où  $u = u_+ - u_-$  et où  $M = M_+ M_- / (M_+ + M_-)$  est la masse réduite. Par un couple d'ion, le moment dipolaire vaut  $qu$ , la polarisabilité est alors donnée par

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0(2C - M\omega^2)} \quad (3.14)$$

Ce qui mène à la fréquence de résonance  $\omega_{0,a} = \sqrt{\frac{2C}{M}}$ . La fréquence de résonance sera bien plus basse que celle causée par les électrons (en dessous du visible alors que pour ces-derniers c'était au dessus), tout simplement car  $M \gg m_e$ .

### 3.2.5 Orientation Polarisation

Les molécules peuvent avoir des orientations "locales" aléatoire : en l'absence de champ électrique, la polarisation macroscopique est nulle. Si on applique  $\vec{E}$ , ils vont s'orienter dans la même direction et la polarisabilité serait plus grande. Le processus est cependant assez lent (la molécule doit subir une rotation) et se détruit facilement (par simple augmentation de la température). La physique statistique nous donne une valeur que l'on peut associer à ce phénomène

$$\alpha_{as} = \frac{p^2}{3\epsilon_0 k_B T} \quad (3.15)$$

Ceci concerne les gaz et les liquides.

### 3.2.6 The Field of Lorentz and the Local Field

Nous avons précédemment introduit un champ *local*, mais quel mécanisme peut lier ce-dernier au champ global ? Le champ local peut être différent du global à cause des dipôles. Le champ externe interagit avec ceux-ci et ils génèrent un second champ qui vient modifier le "champ perçu" par ces mêmes dipôles. Nous allons ici suivre l'approche de Lorentz et calculer son champ moyen.

Nous allons calculer ce champ moyen en un point en construisant autour de ce point une sphère de rayon petit par rapport à l'échelle macroscopique, mais grande par rapport à l'échelle microscopique. A l'intérieur, on va remplacer la matière continue par pleins de dipôles élémentaires. Le champ local est la somme de trois contributions

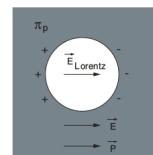


FIGURE 3.2

1. Le champ  $\vec{E}$  externe
2. Les dipôles présents
3. Les charges de surface sur la sphère (venant de la construction même de la sphère) :  $\sigma_p = -P \cos \theta$ . Lorentz a calculé de que valait ce champ, il a trouvé

$$E_{\text{Lorentz}} = \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (3.16)$$

Il s'agit donc du champ généré par les charges de surface.

Dans beaucoup de matériaux (si le cercle est centrée sur le point), la contribution des dipôles sera nulle. On trouve alors

$$E_{\text{local}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (3.17)$$

### 3.2.7 Clausius-Mosotti Relation

Utilisons l'expression juste obtenue pour ré-écrire le moment dipolaire

$$p_i = \alpha_i \epsilon_0 E_{\text{local}} = \alpha_i \epsilon_0 \left( E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \quad (3.18)$$

Cette relation relie le force des dipôles au champ local. On peut en déduire le champ de polarisation

$$P = \sum_i N_i p_i = \sum_i N_i \alpha_i \epsilon_0 \left( E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \quad (3.19)$$

L'équation est maintenant "fermée". On y voit une sorte de récurrence car le champ local dépend du champ de polarisation : il faut connaître le champ de polarisation pour connaître le champ local puis utiliser ce dernier pour trouver le champ de polarisation ! Ce qui est beau, c'est que l'on trouve une nouvelle expression pour la susceptibilité électrique

$$\chi_e = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{\sum_i N_i \alpha_i}{1 - \frac{1}{3} \sum_i N_i \alpha_i} \quad (3.20)$$

Ce qui est important de comprendre c'est que le champ local définit la polarisabilité et qu'en sommant et fermant la relation obtenue on obtient celle-ci. La susceptibilité est donc donnée par la somme des polarisabilités divisée par une correction venant du champ local de Lorentz.

La loi de Clausius-Mosotti permet de réécrire  $E_{\text{local}}$  (basée sur l'expression des cristaux cubiques) pour obtenir la **loi de Clausius-Mosotti**

$$\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} = \frac{1}{3} \sum_i N_i \alpha_i \quad (3.21)$$

Avec cette définition de la susceptibilité, la relation de Lorentz devient

$$E_{\text{Local}} = \left( 1 + \frac{\chi_e}{3} \right) E \quad (3.22)$$

L'important est - encore une fois - de voir d'où le problème vient : on travaille sur des effets macroscopiques mais résultant d'un champ local sommé au champ externe.

### 3.2.8 General Dielectric Behaviour

Reprenons les précédents résultats. La polarisation électronique se situe dans l'UV (une ou plusieurs résonances). La polarisation se situe (une ou plusieurs résonances) dans l'infrarouge et la polarisation d'orientation à une fréquence critique dans les radio.

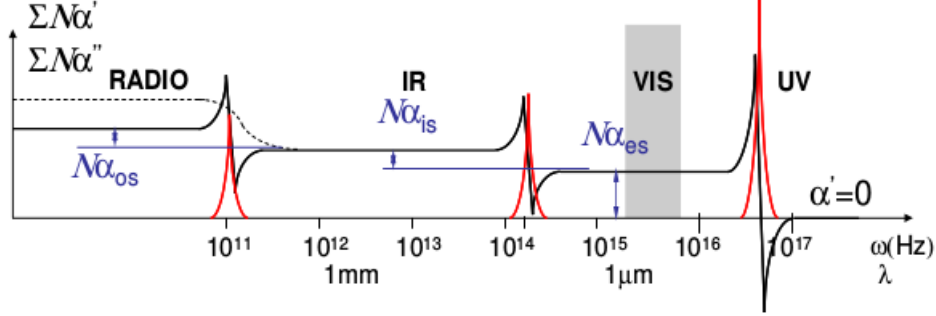


FIGURE 3.3 – Attention, les résonances montent d'abord puis elle descendent, pas l'inverse !

On voit que les différentes résonances ne sont pas dans le visible. Cependant, le nombre de résonances "avant et après" le visible influence la valeur "du visible" : les résonances ont une contribution indirectes. Pour récapituler,  $\alpha$  est la tendance à polariser une charge **unique** (ion, électron, ...) alors que  $\chi$  est la tendance à polariser **tout** le matériau. La loi de Clausius-Mozotti donne la relation entre  $\alpha$  et  $\chi$ .

## 3.3 Microscopic Theory for Conductors and Semiconductors

Dans les diélectriques, la réaction de  $E$  est décrite par  $P$ . Dans un conducteurs, par le courant  $J$  car les électrons sont libres de se mouvoir<sup>4</sup>.

### 3.3.1 The 1D Drude Free-Electron Model for Metals

Soit des ions à positions fixes et des électrons dans la bande de conduction : pas d'interactions entre les deux espèces, mais les électrons accélèrent en présence de  $\vec{E}$ . Parfois, les  $e^-$  collisionnent avec les ions ou les impuretés. La probabilité de collision sur  $dt$  est donnée par  $dt/\tau$ . Les collisions ne sont pas élastiques, mais la vitesse après collision est dictée par la condition d'équilibre thermique. Sans  $\vec{E}$ , la vitesse moyenne des  $e^-$  et donc  $J$  est nul.

Soit  $E(t)$  et un ensemble d' $e^-$  avec une position moyenne  $x$ . Négligeons la variation spatiale. L'impulsion linéaire moyen  $m dx/dt$  au temps  $t + dt$  (où  $dt \ll \tau$ ) est composé de deux contributions

1. La fraction des électrons qui voient leurs impulsions augmentées sous l'influence de la force  $-eE$

$$\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \quad (3.23)$$

2. La fraction  $dt/\tau$  des électrons qui n'obtiennent pas d'impulsion à cause de la collision avec un ion.

L'impulsion moyenne en  $t + dt$  devient alors

$$m \frac{dx}{dt}(t + dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \left(m \frac{dx}{dt}(t) - eE(t)dt\right) \quad (3.24)$$

4. "Le modèle de Drude est **vraiment à connaître**".

Ceci mène à l'équation de mouvement

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m}{\tau} \frac{dx}{dt} - eE \quad (3.25)$$

où l'on reconnaît un terme de *damping* à droite. Notons qu'il y a **également** des électrons liés dans un conducteurs, dans les basses couches. Sachant que  $J = -Ne \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{J}{\tau} + \frac{Ne^2}{m} E \quad (3.26)$$

Ce qui devient, en régime harmonique  $e^{i\omega t}$

$$J(\omega) = \frac{Ne^2\tau}{m(1 + i\omega\tau)} E(\omega) \quad (3.27)$$

Connaissant la loi d'Ohm

$$\sigma(\omega) = \frac{Ne^2\tau}{m(1 + i\omega\tau)} \quad (3.28)$$

Il s'agit de la **complex frequency dependant conductivity**.

Nous avons trouvé au chapitre 2

$$\epsilon = \epsilon_0 \left( 1 + \chi - i \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 \left( 1 + \chi + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i\omega/\tau} \right) \quad (3.29)$$

Ceci est facile à interpréter si l'on remarque que  $1/\tau$  est la fréquence de collision. A basse fréquence, la partie complexe de la constante diélectrique deviant importante (par les relations de KK, cela va avoir une influence sur la partie réelle). Si en plus plus  $\omega \gg 1/\tau$ , le terme d'amortissement peut être négligé et la courant d'électron libre contribue négativement à la constante diélectrique. La susceptibilité équivalente due à la conduction ("plasma" idéal) est

$$\chi_{\text{conduction}} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (3.30)$$

Qui devient  $-1$  à la fréquence plasma  $\omega_p = \sqrt{(Ne^2)/(m\epsilon_0)}$ .

### 3.3.2 Cubic Crystals

Le reste du chapitre n'est pas pour l'examen.

## Chapitre 4

# Light Propagation in Linear Anisotropic Dielectrics

*"C'est mon chapitre préféré, celui que j'ai choisi lorsque j'étais à votre place. Ne ne négligez pas !*

### 4.1 Anisotropic Materials in Photonics

Beaucoup de matériaux ont des propriétés optiques qui dépendent de la direction de la lumière ou de sa polarisation. Notons que dans un polariseur, si les polymères sont étendus en  $y$ , l'onde qui passera sera en  $x$  !

### 4.2 The Susceptibility and Dielectric Tensors

#### 4.2.1 Constitutive Equations in Anisotropic Media

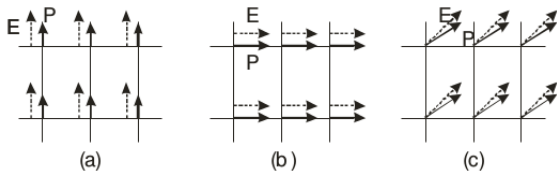


FIGURE 4.1

Lorsque le matériau n'est pas isotrope,  $\vec{P}$  n'est pas toujours parallèle à  $\vec{E}$  : la polarisation va dépendre de la direction du champ électrique. Si dans une direction nous avons  $n_1$  et dans une autre  $n_2$  avec  $n_a < n_b$ , la superposition des deux donnera une polarisation non parallèle au champ appliqué.

La relation linéaire la plus générale entre deux vecteurs est un tenseur du second rang. Dès lors

$$P = \epsilon_0 \bar{\bar{\chi}} E \quad \text{ou} \quad P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j \quad (4.1)$$

où  $\bar{\bar{\chi}}$  est le **tenseur de susceptibilité**. S'il est diagonal avec tout des coefficients identiques, on se retrouve au cas du chapitre 2. Mais si non, la polarisation induite peut dépendre de la direction de  $\vec{E}$ .

#### 4.2.2 Symmetry of the Susceptibility Tensor

Il est simple de montrer analytiquement que le tenseur de susceptibilité est symétrique (sous certaines conditions). Soit le théorème de Poynting

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla \cdot S - E J_p \quad (4.2)$$

où  $U$  est la densité d'énergie EM et  $\vec{S}$  le vecteur de Poynting

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 (|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2), \quad S \equiv \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle \quad (4.3)$$

Comme il n'y a pas de courants libre, de magnétisation, le milieu est transparent et non-dissipant, l'énergie n'est pas convertie en chaleur. L'énergie du champ peut aller dans la matière, mais elle sera "rendue" au final. Il doit donc être possible de noter le troisième terme sous la forme d'une dérivée temporelle ou d'une divergence afin de la faire passer dans le membre de gauche.

Dans la convention d'Einstein

$$E_k J_{p,k} = E_k \frac{\partial P_k}{\partial t} = \frac{1}{2} E_k \epsilon_0 \chi_{kl} \frac{\partial E_l}{\partial t} + \frac{1}{2} E_l \epsilon_0 \chi_{lk} \frac{\partial E_k}{\partial t} \quad (4.4)$$

On peut toujours écrire  $\chi_{kl} = \chi_{kl}^S + \chi_{kl}^A$ . Il nous faudra montrer que  $\chi_{kl}^A$  est nulle. Le terme source devient <sup>1</sup>

$$E_k J_{p,k} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_{kl}^S \frac{\partial (E_k E_l)}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_{kl}^A \left( E_k \frac{\partial E_l}{\partial t} - E_l \frac{\partial E_k}{\partial t} \right) \quad (4.5)$$

Seule la partie symétrique peut s'écrire sous la forme d'une dérivée temporelle, la partie anti-symétrique doit forcément être nulle. Poynting s'écrit alors

$$\frac{\partial U_{total}}{\partial t} = -\nabla S \quad (4.6)$$

où  $U_{total}$  est la densité d'énergie totale

$$U_{total} = \frac{1}{2} D.E + \frac{1}{2} B.H \quad (4.7)$$

Ceci n'est vrai que pour les matériaux non magnétique et non-dispersif.

## 4.3 Plane Monochromatic Waves in Anisotropic Media

### 4.3.1 Dispersion Relation

Nous allons ici analyser si les ondes planes monochromatiques sont toujours solutions des équations de Maxwell et des équations constitutives (soit les équations de l'électrodynamique). Nous avons <sup>2</sup>

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

C'est difficile, mais il existe un système de coordonnées où ce tenseur est diagonal : tout va devenir "simple" <sup>3</sup>. Dans un tel système, le tenseur diélectrique est donné par (semble trivial, mais en réalité profond)

$$\frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

---

1. Voir page 62 pour le détail

2. Détails page 63

3. Résultat attendu : le tenseur  $\epsilon$  doit être symétrique, il doit exister une base où il est diagonal

où  $n_i$  sont les indices de réfraction principaux. L'équation (4.8) devient quelque chose de "pas si moche" :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \left( \vec{1}_x n_1^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \vec{1}_y n_2^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \vec{1}_z n_3^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right) \quad (4.10)$$

On veut trouver une relation de dispersion  $\omega(k)$ . On propose une solution d'onde plane monochromatique de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$  à cette équation différentielle

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (4.11)$$

En substituant cet ansatz, on trouve ( $\text{rot} \rightarrow ik$ )

$$i\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{E}_0) = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \vec{1}_x n_1^2 E_{0x} + \vec{1}_y n_2^2 E_{0y} + \vec{1}_z n_3^2 E_{0z} \right) \quad (4.12)$$

Sachant que  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = -(\vec{A}\vec{B})\vec{C} + (\vec{A}\vec{C})\vec{B}$

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \left( \vec{1}_x n_1^2 E_{0x} + \vec{1}_y n_2^2 E_{0y} + \vec{1}_z n_3^2 E_{0z} \right) \quad (4.13)$$

Il s'agit de la relation de dispersion pour un milieu linéaire non isentropique. En projetant cette équation sur les axes principaux (par exemple sur  $\vec{1}_x$  on a :  $k_x \vec{1}_x (k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) - E_{0x} \vec{1}_x (k_x k_x + k_y k_y + k_z k_z) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{1}_x n_1^2 E_{0x}$ ) on voit que la relation de dispersion est un système linéaire en les trois composantes du champ électrique <sup>4</sup>

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 - k_y^2 k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \frac{\omega^2}{c^2} n_3^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

### 4.3.2 The Normal Surface

Considérons d'abord quelques situations simplifiées. Avant tout, rappelons que la relation de dispersion est la relation qui relie le comportement temporel au comportement spatial.

1. Vecteur d'onde parallèle à  $\vec{1}_x$  :  $k_x = k$ . Le système (4.14) se réduit à

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 E_{0x} = 0 \\ \left( \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k^2 \right) E_{0y} = 0 \\ \left( \frac{\omega^2}{c^2} n_3^2 - k^2 \right) E_{0z} = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

La première équation nous informe que le champ est transverse et les deux dernières les solutions : si l'un des  $E_{0i}$  est non-nuls, la parenthèse doit l'être : on en tire la relations de dispersions tel que les deux autres composantes du champ sont nulles <sup>5</sup>. La première est l'onde plane polarisée selon  $y$  de nombre d'onde  $k_2$

$$E^{(1)} = \vec{1}_y E_0^{(1)} e^{i(\omega t - k_2 x)} \quad \text{où} \quad k_2 = \frac{\omega}{c} n_2 \quad (4.16)$$

4. Savoir le faire avant de venir à l'examen.

5. C'est un système, il faut toujours préciser le triplet !

La seconde est l'onde plane polarisée selon  $z$  de nombre d'onde  $k_3$

$$E^{(2)} = \vec{1}_z E_0^{(2)} e^{i(\omega t - k_3 x)} \quad \text{où} \quad k_3 = \frac{\omega}{c} n_3 \quad (4.17)$$

2. Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est dans le plan  $xy$

$$\vec{1}_k = s_x \vec{1}_x + s_y \vec{1}_y \quad (4.18)$$

Ce qui revient à substituer  $k_z = 0$  dans (4.14). A l'aide de la troisième équation du système, on peut directement dire que  $E_{0x} = E_{0y}$  et

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{1}_z E_0^{(1)} e^{i(\omega t - k_3 \vec{1}_k \cdot \vec{r})} \quad k_3 = \frac{\omega}{c} n_3 \quad (4.19)$$

Il s'agit du mode propre de propagation, polarisé selon l'axe  $z$ , avec un nombre d'onde  $k_3$ . Notons que cette solution ne tient pas compte de l'angle d'incidence. Les autres modes sont solutions de

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 - k_y^2 & k_x k_y \\ k_y k_x & \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.20)$$

Afin que ce soit vrai pour tout  $E_{i0}$ , le déterminant de ce système doit être singulier : cela donnera les relations de dispersions

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 - k_y^2 & k_x k_y \\ k_y k_x & \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k_x^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k_x^2}{k_2^2} + \frac{k_y^2}{k_1^2} = 1 \quad (4.21)$$

Il s'agit d'une ellipse avec comme axes  $k_x$  et  $k_y$  ! Attention à ne pas retenir cette formule sous risque de se tromper : si on se propage selon  $l_x$ , la polarisation doit être selon  $k_2$  (voilà comment le retenir).

3. **Cas général.** Pas le choix, il faut résoudre

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 - k_y^2 k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \frac{\omega^2}{c^2} n_3^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.22)$$

Il s'agit de l'équation de la **surface normale**. En donnant la direction de propagation  $\vec{1}_k$ , il y a en général deux intersections  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  entre cette direction et la surface normale. Celles-ci correspondent aux deux modes propres de propagation avec comme vitesse de phase  $\omega/|\vec{k}|$ . Une fois la solution du vecteur d'onde connue, on peut trouver le mode propre de polarisation correspondant via (4.14)

$$\vec{E}_0 = A_0 \left( \frac{k_x}{k^2 - k_1^2} \vec{1}_x + \frac{k_y}{k^2 - k_2^2} \vec{1}_y + \frac{k_z}{k^2 - k_3^2} \vec{1}_z \right) \quad (4.23)$$

Les trois composantes ayant la même phase, les modes propres sont donc linéairement polarisés. Si on calcule la solution du déterminant numériquement, on aura deux "coquilles"



imbriquées. Essayons de retrouver ce résultat par analogie avec le résultat obtenu en 2., à savoir une ellipse.

Dans le plan  $k_x k_y$  nous allons avoir une ellipse, mais également un cercle si la direction de propagation est selon  $\vec{I}_z$  (ellipse dégénérée<sup>6</sup>). Si on "prolonge" ceci dans le plan  $k_z k_y$ , l'ellipse va devenir un cercle ( $n_x$ , la direction de propagation) et le cercle une ellipse ( $n_z$ ). Enfin, dans  $k_z k_x$  l'ellipse de  $k_z k_y$  devient un cercle et l'autre une ellipse : il y a un croisement. Avec de l'imagination, on retrouve le résultat présenté ci-dessous.

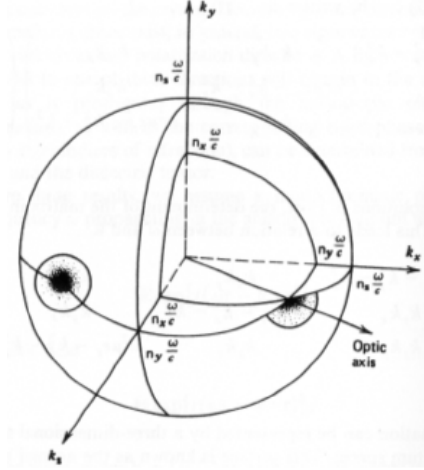


FIGURE 4.2

En général, les deux coquilles ont quatre points communs : ceux-ci définissent les **axes optiques**. En ce point il n'y a qu'une solution : lorsqu'une onde se propage dans cette direction, sa vitesse de phase est indépendante de la polarisation.

#### 4.3.3 Fresnel's Equation for the Dispersion Relation of Anisotropic Materials

Nous venons de voir une première méthode de résolution, un peu lourde. Il en existe une seconde, plus simple, mais jamais utilisée. La méthode se base sur une réécriture de la direction de propagation à l'aide des cosinus directeurs

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} n (s_x \vec{I}_x + s_y \vec{I}_y + s_z \vec{I}_z) \quad (4.24)$$

où  $n$  est la seule inconnue (!), l'indice de réfraction du milieu non-isotropique. On peut montrer ("à essayer à la maison") que l'on trouve

$$Dn^6 + Cn^4 + Bn^2 + A = 0 \quad (4.25)$$

Il s'agit d'une équation biquadratique, dont les solutions sont bien connues. Après quelques manipulations de celles-ci on peut trouver

$$\frac{s_x^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{s_y^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{s_z^2}{n^2 - n_3^2} = \frac{1}{n^2} \quad (4.26)$$

Il s'agit de l'**équation de Fresnel** qui donne la relation entre les cosinus directeur, l'indice  $n$  que nous cherchons et les indices des directions. Malheureusement, on a ici perdu toutes les informations sur la polarisation, heureusement que la troisième méthode est la ("**best method**"). Notons que cette méthode est très instable numériquement.

---

6. Vérifier que c'est bien ça le sens.

#### 4.3.4 The Index Ellipsoid

Il s'agit de la troisième méthode, qui se base sur l'index ellipsoid. La méthode se base sur le champ de déplacement  $\vec{D}$  : celui-ci étant toujours transverse même dans les matériaux anisotropiques car  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ . Nous allons alors utiliser la forme alternative de l'équation constitutive suivante

$$E_i = \frac{1}{\epsilon_0} \eta_{ij} D_j \quad (4.27)$$

où  $\eta_{ij}$  est le tenseur d'imperméabilité adimensionnel. En combinant cette relation avec  $P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j$ , on trouve

$$\eta_{ij} \epsilon_{jk} = \epsilon_0 \delta_{ik} \quad (4.28)$$

La substitution de (4.27) dans l'équation d'onde (4.13) revient à

$$\vec{s} \times (\vec{s} \times \bar{\eta} \cdot \vec{D}) = -\frac{1}{n^2} \vec{D} \quad (4.29)$$

où  $\vec{k} = n\vec{s}(\omega/c)$  avec  $\vec{s}$  le vecteur unitaire dans la direction de propagation. Il s'agit de la relation de dispersion en fonction de  $\vec{D}$ . Le membre de droite ( $\text{rot rot E}$ ) reste le même mais le membre de droite devient simple. En supposant la propagation dans la direction  $\vec{1}_z$ , on trouve en projetant dans le système de coordonnées

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Le champ de déplacement est donc une solution du problème aux valeurs propres de la matrice d'imperméabilité transverse et on va pouvoir comprendre pourquoi on les appelle les modes propres de propagation.

Soit l'équation de l'**index ellipsoid**

$$\eta_{ij} \xi_i \xi_j = 1 \quad (4.31)$$

où  $\xi_i = D_i/(\sqrt{2\epsilon_0 E \cdot D})$  sont les coordonnées d'un espace abstrait. Dans les coordonnées principales du système du tenseur diélectrique, l'index ellipsoid prend la forme

$$\frac{\xi_1^2}{n_1^2} + \frac{\xi_2^2}{n_2^2} + \frac{\xi_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (4.32)$$

Revenons à notre précédent système de coordonnées avec une propagation selon  $\vec{1}_z$ . L'intersection entre l'index ellipsoid et un plan perpendiculaire à la direction de propagation est une ellipse

$$\eta_{11} \xi_1^2 + 2\eta_{12} \xi_1 \xi_2 + \eta_{22} \xi_2^2 = 1 \quad (4.33)$$

Il en vient une procédure pour trouver les modes propres de propagation<sup>7</sup>

1. Trouver la direction de propagation
2. Considérer le plan perpendiculaire à la direction de propagation
3. Trouver l'intersection entre ce plan et l'ellipsoid index : l'intersection est une ellipse.

A partir de cette ellipse résultant de l'intersection, on peut trouver deux choses

1. La direction des deux axes principaux de l'ellipse donne les directions de polarisation de  $\vec{D}$
2. Les longueurs des axes principaux  $d_1$  et  $d_2$  permettent de trouver les indices de réfraction

$$n^{(1)} = \frac{d_1}{2} \quad n^{(2)} = \frac{d_2}{2} \quad (4.34)$$

Cette méthode est purement mathématique.

---

7. Détail page 69.

### 4.3.5 Properties of the Eigenmodes of Propagation

#### Polarisation

Le champ électrique du mode propre est donné par

$$\vec{E} = A_0 \left( \frac{k_x}{k^2 - k_1^2} \vec{1}_x + \frac{k_y}{k^2 - k_2^2} \vec{1}_y + \frac{k_z}{k^2 - k_1^3} \vec{1}_z \right) \quad (4.35)$$

Les phases de chaque composantes étant identiques, les modes propres sont polarisés linéairement.

#### Orthogonal

En générale  $\vec{E}^{(1)}$  et  $\vec{E}^{(2)}$  ne sont pas orthogonaux. Cependant, pour deux vecteurs propres différents d'une matrice symétrique  $\vec{D}^{(1)}$  et  $\vec{D}^{(2)}$  le sont<sup>8</sup>.

#### Transverse

La première équation de Maxwell implique que le champ de déplacement de chaque mode propre est transverse (s'il n'y a pas de charges libres)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s} \cdot \vec{D} = 0 \quad (4.36)$$

## 4.4 Energy Transport and Group Velocity

### 4.4.1 Properties of Poynting's Vector

On peut montrer que le flux de densité est donné par le vecteur de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (4.37)$$

où  $\vec{S}$  n'est en général pas colinéaire avec la direction de propagation. Considérons une onde EM constituée de la superposition de deux modes propres

$$\vec{E} = \alpha \vec{E}^{(1)} + \beta \vec{E}^{(2)} \quad \vec{H} = \alpha \vec{H}^{(1)} + \beta \vec{H}^{(2)} \quad (4.38)$$

Le flux d'énergie est alors donné par

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} \\ &= (\alpha \vec{E}^{(1)} + \beta \vec{E}^{(2)}) \times (\alpha \vec{H}^{(1)} + \beta \vec{H}^{(2)}) \\ &= \alpha^2 \vec{E}^{(1)} \times \vec{H}^{(1)} + \beta^2 \vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{(2)} + \alpha\beta \vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{(1)} + \alpha\beta \vec{E}^{(1)} \times \vec{H}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

On y voit le vecteur de Poynting du premier, du second ainsi qu'une contribution supplémentaire. On peut cependant montrer que celle-ci est nulle.

---

8. Démo en exercice

#### 4.4.2 Phase Velocity and Group Velocity

La surface normal contient toute l'information nécessaire pour trouver la vitesse de phase d'une onde monochromatique. Cependant, l'information (l'enveloppe) voyage à la vitesse de groupe donnée par

$$v_g = \nabla_k \omega(k) \quad (4.40)$$

La surface normale étant constante en  $\omega$  dans l'espace  $\vec{k}$ , le vitesse de groupe est perpendiculaire à celle-ci : elle contient également toutes les informations sur la vitesse de groupe. Dans le vide,  $v_\varphi = v_g = c$ . Dans un milieu anisotrope, on trouve par contre  $v_\varphi = \omega/k$  (et donc  $v_g = d\omega/dk$ ).

Pour trouver la vitesse de phase, on retardera le vecteur qui connecte le centre de la surface normale à sa surface et pour la vitesse de groupe, la direction perpendiculaire avec lui. Il n'y a que dans une géométrie sphérique ou  $v_\varphi = v_g$ . L'énergie évolue bien à la vitesse de groupe

$$\vec{S} = U \vec{v}_g \quad (4.41)$$

Cependant, dans les matériaux non isotropiques, toutes les composantes du pulse peuvent aller dans une direction et le pulse **dans une autre**, car  $v_\varphi \neq v_g$ .

## Chapitre 5

# Optical Properties of Linear Anisotropic Media

### 5.1 Optical Classification of Anisotropic Media

On peut trouver les propriétés de propagation de trois façons différentes : la surface normale, Fresnel et l'ellipsoïde index. On détermine ça via le tenseur diélectrique via les indices principaux de réfraction  $n_1, n_2$  et  $n_3$ . On a également vu que pour les axes principaux, il n'y avait pas de biréfringence. Une classification logique est de procéder par nombre d'axes optiques : deux est le cas le plus général mais il peut y en avoir un ou zéro selon le degré de symétrie, ou encore une infinité (tout est axe optique)<sup>1</sup>.

#### Cristaux bi-axiaux

Le cas le plus général, avec le moins de symétries : deux axes optiques. Par convention on utilise le système de coordonnées tel que  $n_1 < n_2 < n_3$ . Avec cette convention, les deux axes optiques sont situés dans le plan  $xz$ .

#### Cristaux uniaxiaux

Lorsque deux indices principaux sont égaux, il n'y a que un axe optique. Les deux indices égaux sont nommé *indice ordinaire* et l'autre *extra-ordinaire*

$$n_1 = n_2 = n_o \quad ; \quad n_3 = n_e \quad (5.1)$$

On peut alors factoriser la surface normale telle que

$$\left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left( \frac{k^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0 \quad (5.2)$$

La surface normale est donc une sphère et une ellipsoïde de révolution, il n'y a bien qu'un axe optique.

---

1. Voir pages 73-74

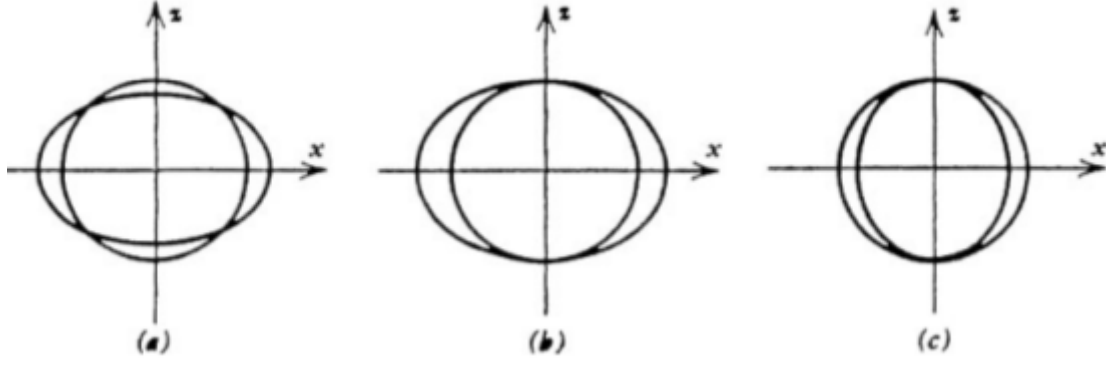


FIGURE 5.1 – Surface normale pour (a) biaxial, (b) uniaxial positif et (c) uniaxial négatif

### Cristal isotropique

Tous les indices sont égaux, la surface normale se dégénère en une sphère.

## 5.2 Light Propagation in Uniaxial Crystals

Un tel cristal est vraiment cher, il n'y a en effet pas besoin de "chercher" l'axe optique ce qui n'est pas le cas pour les cristaux biaxiaux.

### 5.2.1 Theory of Light Propagation in Uniaxial Crystals

Par convention, on définit l'axe  $z$  comme axe de symétrie de sorte à ce que l'index ellipsoïd s'écrive

$$\frac{X^2 + Y^2}{n_o^2} + \frac{Z^2}{n_e^2} = 1 \quad (5.3)$$

Par invariance de rotation autour de  $z$ , on peut choisir le système de coordonnées tel que la direction de propagation soit dans le plan  $yz$ . On définira  $\theta$  comme l'angle entre la direction de propagation et l'axe  $z$ .

### La surface normale

En substituant

$$k_z = \frac{\omega}{c} n \cos \theta, \quad k_x = 0, \quad k_y = \frac{\omega}{c} n \sin \theta \quad (5.4)$$

L'équation (4.14) devient

$$\begin{pmatrix} n_o - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 - n^2 \cos^2 \theta & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & n^2 \sin \theta \cos \theta & n_e^2 - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5.5)$$

Cette expression est identique à la précédente, mais écrite avec des fonctions trigonométriques dans le cas d'un cristal uniaxial. Il est évident que pour chaque direction de propagation, il y a un mode propre d'indice de réfraction  $n_o$  polarisé selon l'axe  $x$ . On trouve le second indice de réfraction (du second mode propre) en résolvant

$$\begin{vmatrix} n_o^2 - n^2 \cos^2 \theta & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & n_e^2 - n^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (5.6)$$

On peut résoudre cette équation pour l'indice de réfraction

$$n^{(2)} = \left( \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

qui donne l'indice de réfraction du second mode propre comme une fonction de  $\theta$ . Il s'agit de la même équation que précédemment, juste notée en  $f(\sin, \cos)$ . Quelques cas particuliers

$\theta = 0$   $n^{(2)} = n_e$ , polarisé linéairement en  $y$

$\theta = \pi/2$   $n^{(2)} = n_o$ , polarisé linéairement en  $z$

$\theta$   $n^{(2)} \in [n_e, n_o]$  ou  $n^{(2)} \in [n_e, n_o]$

Le champ électrique est donné par

$$E^{(2)} = E_0 \left( \frac{\sin^2 \theta}{n^{(2)2} - n_o^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n^{(2)2} - n_e^2} \right) \quad (5.8)$$

Ce qui n'est pas perpendiculaire à la direction de propagation, sauf pour  $\theta = 0, \pi/2$ . Par contre, les deux modes propres sont **orthogonaux**<sup>2</sup> mais **pas transverse**<sup>3</sup>

$$\cos(s, E^{(2)}) \neq 0 \quad (5.9)$$

## The index ellipsoid

On peut en tirer les mêmes conclusions avec l'approche de l'index ellipsoid quia pour équation

$$\frac{X^2 + y^2}{n_o^2} + \frac{Z^2}{n_e^2} = 1 \quad (5.10)$$

Le principe reste mathématique (voir page 79) et permet de trouver

$$\frac{1}{n^{(2)2}} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (5.11)$$

## 5.3 Refraction at a boundary

### 5.3.1 Double Refraction

Soit une onde plane monochromatique avec un vecteur  $\vec{k}$  incident sur la surface d'un cristal non-isotropique : il y a deux modes propres dans celui-ci qui respectent les conditions aux limites et donc deux onde réfractées qui, en général, ont des direction et vitesse de phases différentes. Il s'agit de la **double réfraction** ou **biréfringence**.

Soit  $\vec{k}^{(0)}$ ,  $\vec{k}^{(1)}$  et  $\vec{k}^{(2)}$  le vecteur d'onde de l'onde incidente et des deux ondes réfractés avec des angles  $\theta_0, \theta_1$  et  $\theta_2$  par rapport au vecteur normal de la surface. Cette dernière condition peut s'écrire

$$k^{(0)} \sin \theta_0 = k^{(1)} \sin \theta_1 = k^{(2)} \sin \theta_2 \quad (5.12)$$

Ou encore

$$n^{(0)} \sin \theta_0 = n^{(1)} \sin \theta_1 = n^{(2)} \sin \theta_2 \quad (5.13)$$

---

2. Perpendiculaires l'un à l'autre

3. Perpendiculaire à la direction de propagation

En effet, en utilisant les mêmes arguments que ceux avancés en relation avec la réflexion et la réfraction sur des milieux isotropes, on peut montrer que les vecteurs d'onde des ondes incidentes et réfractées sont tous dans le plan d'incidence et que leurs composantes tangentielles à la frontière sont les mêmes.

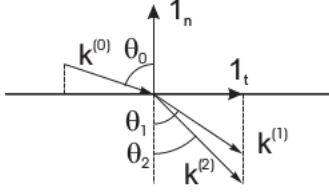


FIGURE 5.2

La dernière équation ressemble à la loi de Snell mais c'est plus compliqué car  $k_1$  et  $k_2$  sont non-constants et dépendent de la direction de  $\vec{k}^{(1)}$  et  $\vec{k}^{(2)}$ . On peut par contre trouver les cosinus directeur à partir de l'équation de Fresnel si l'on connaît les cosinus directeur de l'onde. Pour se faire, considérons le vecteur unitaire normal

$$\vec{1}_n = n_x \vec{1}_x + n_y \vec{1}_y + n_z \vec{1}_z \quad (5.14)$$

Et le vecteur unitaire dans le plan d'incidence tangentiel à la surface

$$\vec{1}_t = t_x \vec{1}_x + t_y \vec{1}_y + t_z \vec{1}_z \quad (5.15)$$

Selon la figure ci-essus, on peut écrire le vecteur d'onde de la première onde réfractée

$$\vec{k}^{(1)} = k^{(0)} \sin \theta_0 \vec{1}_t + \sqrt{k^{(1)2} - k^{(0)2} \sin^2 \theta_0} \vec{1}_n \quad (5.16)$$

On en déduit les cosinus directeurs

$$s_x = \frac{n^{(0)}}{n^{(1)}} t_x \sin \theta_0 + n_x \sqrt{1 - \frac{n^{(0)2}}{n^{(1)2}} \sin^2 \theta_0}, \quad s_y = \frac{n^{(0)}}{n^{(1)}} t_y \sin \theta_0 + n_y \sqrt{1 - \frac{n^{(0)2}}{n^{(1)2}} \sin^2 \theta_0} \quad (5.17)$$

$$s_z = \frac{n^{(0)}}{n^{(1)}} t_z \sin \theta_0 + n_z \sqrt{1 - \frac{n^{(0)2}}{n^{(1)2}} \sin^2 \theta_0} \quad (5.18)$$

En substituant cette équation dans l'équation de Fresnel, on trouve une équation transcendante (voir page 81, équation 5.19). Elle doit être résolue numériquement même si elle ne contient qu'une seule inconnue,  $n^{(1)}$ . Elle aura deux solutions acceptables : les indices de réfractés des ondes réfractées. La direction peut être obtenue à l'aide des cosinus directeur calculée ci-dessus.

## 5.4 Optical activity

### 5.4.1 Experimental Facts

Dans certains milieux, on observe la rotation d'une polarisation linéaire en entrée au cours de la propagation. Il s'agit de l'**activité optique**, représentée ci-contre. Expérimentalement, ce pouvoir de rotation est proportionnel à la longueur du milieu : on définit alors la *puissance de rotation*  $\rho$  d'un milieu comme la rotation par unité de longueur. Si le sens de rotation est horloger (en "regardant" la lumière venir) on parle de *dextro-rotation* (sinon, *lévo-rotation*).

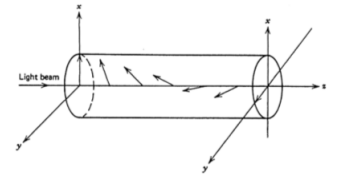


FIGURE 5.3



### 5.4.2 Macroscopic Theory of Optical Activity

Nous avons étudié (chapitre 4) des matériaux caractérisés par l'équation constitutive

$$P = \epsilon_0 \bar{\chi} \cdot E \quad (5.19)$$

ou il existe, pour chaque direction de propagation, deux modes propres qui peuvent se propager. Ils sont polarisés linéairement et leur polarisation reste fixe en pendant qu'ils traversent le matériau. Considérons une superposition de modes propres

$$D = \alpha D_0^{(1)} e^{i(\omega t - n^{(1)} k_0 z)} + \beta D_0^{(2)} e^{i(\omega t - n^{(2)} k_0 z)} \quad (5.20)$$

Le retard de phase entre deux modes est donné par (voir *Toolbox 2*)

$$\Gamma = (n^{(1)} - n^{(2)}) k_0 z \quad (5.21)$$

Il s'agit d'une fonction *smooth*, continue en  $z$ . Ce type de variation ne correspond pas à l'activité optique où la lumière est polarisée linéairement en chaque position ( $\Gamma = 0$  ou  $\pi$ ). En plus, (5.19) n'autorise pas l'existence de l'activité optique.

L'activité optique est liée à la chiralité de la substance, et donc la différence entre la structure originale de la molécule et son image miroir. Les modes propres de tels matériaux ne sont pas linéaires mais polarisés linéairement. Ceci est compatible avec la chiralité du matériel et l'absence d'un miroir plan. Considérons donc la superposition d'un mode de polarisation circulaire gauche et droit

$$D(z=0) = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{1}_x + i\vec{1}_y) e^{i\omega t} + \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{1}_x - i\vec{1}_y) e^{i\omega t} \right] = D_0 e^{i\omega t} \vec{1}_x \quad (5.22)$$

Ces deux modes ont pour indices  $n_r$  et  $n_l$ , et donc des vitesses de propagation différentes (voir *Toolbox 2*). Après propagation sur une distance  $L$ , on trouve

$$D(z=L) = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{1}_x + i\vec{1}_y) e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} n_r L)} + \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{1}_x - i\vec{1}_y) e^{i\omega t} \right] \quad (5.23)$$

En regroupant les termes de même vecteur unitaire

$$D(z=L) = \frac{D_0}{2} e^{i\omega t} \left[ \left( e^{-i\frac{\omega}{c} n_r L} + e^{-i\frac{\omega}{c} n_l L} \right) \vec{1}_x + i \left( e^{-i\frac{\omega}{c} n_r L} - e^{-i\frac{\omega}{c} n_l L} \right) \vec{1}_y \right] \quad (5.24)$$

En posant

$$\Phi = \frac{\omega}{c} \frac{n_l + n_r}{2}, \quad \rho = \frac{\omega}{c} \frac{n_r - n_l}{2} \quad (5.25)$$

On peut réécrire  $D(z=L)$  :

$$D(z=L) = D_0 e^{i(\omega t - \Phi L)} \left( \cos \rho L \vec{1}_x + \sin \rho L \vec{1}_y \right) \quad (5.26)$$

Il s'agit d'une onde polarisée **linéairement** pour toute les longueurs  $L$ , où  $\rho$  est la **puissance de rotation**, liée aux indices de réfraction des modes propres ( $\rho > 0$  : dextro,  $\rho < 0$  : levo).

Il faut maintenant essayer de généraliser les relations constitutives pour qu'un mode propre polarisé circulairement soit possible. Pour se faire, on lui rajoute un terme en plus (c'est nouveau, on n'avait pas ça avant)

$$p = \bar{\alpha} \cdot \epsilon_0 E + \beta \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5.27)$$

où  $\alpha$  est la polarisabilité. Lorsque l'on rencontre cette relation constitutive, on retrouvera bien que la superposition de deux polarisation circulaires "opposées" résulte en une polarisation linéaire en rotation. Le dernier terme va causer l'apparition d'un  $\beta \neq 0$  du à la structure hélicoïdale de la molécule. Le raisonnement est le suivant

1. La molécule est placée dans  $\vec{H}(t)$
2. La variation du flux magnétique à travers la molécule génère un courant induit circulant autour de  $\vec{H}$  (loi de Faraday)
3. Molécule chirale : le courant induit crée une séparation des charges dépendante du temps, dans la direction de la dérivée temporelle de  $\vec{H}$ .
4. Il en résulte un moment dipolaire électrique
5. C'est le nouveau terme de notre expression

En négligeant les interactions entre les moments dipolaires, le champ de polarisation s'obtient facilement à partir de la densité de moment dipolaire

$$P = Np = N \left( \bar{\alpha} \cdot \epsilon_0 E + \beta \frac{\partial H}{\partial t} \right) \quad (5.28)$$

Avec la troisième loi de Maxwell (permettant d'écrire les fluctuations de  $\vec{H}$  comme  $\vec{k} \times \vec{E}$ ) et en supposant un comportement linéaire des propriétés magnétiques, on peut éliminer la dérivée temporelle

$$\vec{P} = n\vec{P} = N\bar{\alpha} \cdot \epsilon \vec{E} + \frac{N\beta}{\mu_0} i\vec{k} \times \vec{E} \quad (5.29)$$

En appliquant la définition du champ de déplacement électrique, on trouve

$$\vec{D} \equiv \epsilon \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{1} N \vec{p} = \epsilon_0 \left( \vec{1} + N\bar{\alpha} \right) \vec{E} + \epsilon_0 \frac{N\beta}{\mu_0} i\vec{k} \times \vec{E} = \bar{\epsilon} \cdot \vec{E} + i\epsilon_0 \vec{G} \times \vec{E} \quad (5.30)$$

où  $\vec{G}$  est un vecteur parallèle à la direction de propagation : c'est le **vecteur de giration** (pseudo-vecteur<sup>4</sup>). Le champ de déplacement est donc constitué de quelque chose proportionnel à  $\vec{E}$  et de quelque chose lié à la rotation de  $\vec{E}$ . L'activité optique est ainsi expliquée.

### 5.4.3 An Application : The Polarimeter

Lire rapidement le texte page 85-86. On utilise un polariseur et un analyseur pour déterminer l'angle de rotation de la polarisation linéaire causé par le milieu à activité optique.

La fin du chapitre est informatif (sur le dichroïsme)

---

4. Voir page 85 pour la ré-écriture du tenseur  $\vec{\epsilon}$  en fonction de  $G$ , basé sur les propriétés des pseudo-vecteurs. C'est alors  $\vec{G}$  qui contient **tous les effets d'activité optique**.

## Chapitre 6

# Modification of Optical Properties – Controlling Laser Light

### 6.1 Introduction

Une bonne question d'examen est *comment changer la polarisation*. On peut parler des matériaux non-isotrope, surface normale, index ellipsoïdal, ... Une autre bonne question d'examen est *Comment modifier une mode*, et ça, c'est l'objectif de ce chapitre. Si on s'intéresse à la modification d'onde, c'est pour y placer des informations.

Nous allons ainsi considérer ici l'effet d'un champ appliqué (magnétique ou électrique) sur la propagation d'ondes électromagnétiques dans les cristaux. Dans certains cristaux, la présence d'un champ appliqué va modifier son index ellipsoïdal et donc ses modes propres.

### 6.2 Electro-Optics

#### 6.2.1 Microscopic Theory

Ce domaine n'existe que depuis une soixantaine d'années car il a fallu attendre l'invention du laser, permettant l'obtention de grande puissance optique. Cette grande puissance permettra l'intervention des ions. On assumera dans ce chapitre que  $\vec{\epsilon}$  est modulé à basse fréquence, bien plus petite que celle de la porteuse, afin de mettre ces ions en mouvement.

La susceptibilité dépend des charges liées et de la force avec lesquelles ces électrons sont liés au noyau. Lorsqu'on applique un champ électrique  $\vec{\epsilon}$ , les charges liées sont redistribuées et le réseau ionique est légèrement déformé : le tenseur d'imperméabilité est modifié et, par conséquent, les dimensions et l'orientation de l'index ellipsoïdal est modifiées. C'est l'effet **électro-optique**. Si  $\vec{\epsilon}$  est petit, on peut développer en série l'imperméabilité

$$\bar{\bar{\eta}}(\epsilon) = \bar{\bar{\eta}}^{(0)} + \bar{\bar{r}} \cdot \epsilon + \bar{\bar{s}} : \epsilon \epsilon \quad (6.1)$$

En notation indiciale

$$\eta_{ij}(\epsilon) = \eta_{ij}^{(0)} + r_{ijk}\epsilon_k + s_{ijkl}\epsilon_k\epsilon_l \quad (6.2)$$

où  $\eta_{ij}^{(0)}$  est le tenseur non perturbé donné par

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_3^2} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

où les constantes  $r_{ijk}$  sont les **coefficients de Pockels**, décrivant les effets électro-optiques linéaires ( $\approx 10^{-12}$  m.V<sup>-1</sup>). Souvent, ces coefficients sont nuls (si le matériau possède une centrosymétrie) et le second terme devient dominant. Les constants  $s_{ijklm}$  sont les **coefficients de Kerr**, décrivant les effets électro-optique quadratiques ( $\approx 10^{-15}$  m<sup>2</sup>.V<sup>-2</sup>).

Comme les effets électro-optiques sont liés au mouvement ionique, les coefficients sont indépendants de la fréquence si le voltage est tel que l'on se situe loin des résonances ioniques. On peut alors considérer les coefficients de Pockels et Kerr comme **statiques**.

### 6.2.2 Symmetry Properties of Pockels' Tensor

#### Kleinmann Convention

Si le milieu est sans pertes et sans activité optique, son tenseur diélectrique est symétrique. Par définition, le tenseur d'imperméabilité doit également l'être dans ces conditions. On en déduit que le tenseur de Pockels est *invariant* pour une permutation de  $i$  et  $j$  : on passe de 27 à 18 composants indépendants ! Pour se simplifier la vie, on va "tabuler" le tenseur d'imperméabilité de l'effet Pockels et Kerr selon la **convention de Kleinmann**

$$\begin{aligned} 1 &= (11) \\ 2 &= (22) \\ 3 &= (33) \\ 4 &= (23) = (32) \\ 5 &= (31) = (13) \\ 6 &= (12) = (21) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Selon cette convention, on peut **représenter** le tenseur de Pockels comme un tableau  $6 \times 3$  mais attention ce n'est **pas** un tenseur (pas question de lui appliquer les propriétés des tenseurs)

$$\begin{pmatrix} r_{11} = r_{111} & r_{12} = r_{112} & r_{13} = r_{113} \\ r_{21} = r_{221} & r_{22} = r_{222} & r_{23} = r_{223} \\ r_{31} = r_{331} & r_{32} = r_{332} & r_{33} = r_{333} \\ r_{41} = r_{231} & r_{42} = r_{232} & r_{43} = r_{233} \\ r_{51} = r_{311} & r_{52} = r_{312} & r_{53} = r_{313} \\ r_{61} = r_{121} & r_{62} = r_{122} & r_{63} = r_{123} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

## Principe de Neumann

On peut encore réduire le nombre de composants indépendants du tenseur de Pockels à l'aide du principe de Neumann :

*Les éléments de symétrie de tout tenseur associé à une propriété matérielle d'un cristal doivent inclure toutes les propriétés de symétrie du groupe de points du cristal.*

Si ce principe est d'application, on en tire que

$$r'_{ijk} = r_{ijk} \quad (6.6)$$

Ce principe démontre la non-présence de l'effet Pockels pour les matériaux centro-symétriques. L'inversion spatiale pour un tenseur du troisième rang s'écrit

$$r'_{ijk} = -r_{ijk} \quad (6.7)$$

Selon le principe de Neumann ( $r'_{ijk} = r_{ijk}$ ), on en tire

$$r_{ijk} = 0 \quad (6.8)$$

### 6.2.3 The Linear Electro-Optic Effect

Soit un cristal couplé lelong de ses axes principaux sur lequel est appliqué un champ électrique. Une onde EM incidente va "voir" l'anisotropy et les effets dus au champ électrique. On s'intéresse ici à ce qui va se passer dans l'onde qui se propage dans le cristal.

Pour trouver les propriétés de propagation d'une onde plane monochromatique, il faut connaître le tenseur d'imperméabilité : on pourra en déduire le système de coordonnées principal et trouver les indices principaux (voir *chapitre 1*). Supposons que le tenseur de Pockels soit non-nul : on peut négliger les effets quadratiques :

$$\eta_{ij}(\epsilon) = \eta_{ij}^{(0)} + r_{ijk}\epsilon_k \quad (6.9)$$

Il y a beaucoup de termes la dedans. En utilisant cette expression, on peut trouver l'index ellipsoid

$$\left(\frac{1}{n_1^2} + r_{1k}\epsilon_{1k}\right) X^2 + \left(\frac{1}{n_2^2} + r_{2k}\epsilon_{2k}\right) Y^2 + \left(\frac{1}{n_3^2} + r_{3k}\epsilon_{3k}\right) Z^2 + 2r_{4k}\epsilon_k YZ + 2r_{5k}\epsilon_k ZX + 2r_{6k}\epsilon_k XY = 1 \quad (6.10)$$

où  $1/n_i^2$  sont les valeurs propres du tenseur d'imperméabilité non-perturbé et  $\epsilon_k$  les composantes du champ électrique appliqué (quand  $\epsilon_k = 0$ , on retrouve l'ellipse non-perturbé). On voit apparaître trois nouveaux termes non-diagonaux : les axes principaux de l'index ellipsoid perturbés ne coïncident pas avec ceux de la non-perturbée : elle a subi une rotation. Par rotation, on peut donc retrouver les nouveaux axes principaux.

EXEMPLE: Considérons l'effet électro-optique dans le KDP. Il s'agit d'un cristal  $\bar{4}2m$  : axe de symétrie incorrect quadruple (rotation de  $\pi/2$  autour de l'axe suivi d'une réflexion sur un plan perpendiculaire à l'axe), conventionnellement considéré comme l'axe  $z$ . On trouve comme tenseur

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

où seuls trois coefficient de Pockels sont non-nuls. L'index ellipsoid devient alors

$$\frac{1}{n_0^2}X^2 + \frac{1}{n_0^2}Y^2 + \frac{1}{n_0^2}Z^2 + 2r_{41}\epsilon_x YZ + 2r_{41}\epsilon_y ZX + 2r_{63}\epsilon_z XY = 1 \quad (6.12)$$

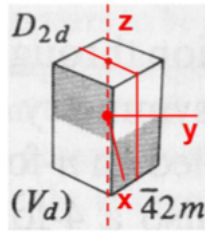


FIGURE 6.1 – Groupe de symétrie pour le KDP

### Effet Pockels longitudinal

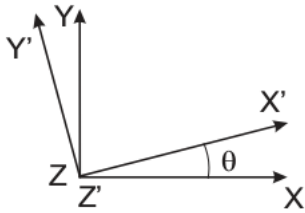
Il s'agit du cas où le champ appliqué est parallèle à l'axe de symétrie du cristal

$$\vec{\epsilon} = \epsilon \vec{1}_z \quad (6.13)$$

L'équation (6.12) devient

$$\frac{X^2 + Y^2}{n_0^2} + \frac{Z^2}{n_e^2} + 2r_{63}\epsilon XY = 1 \quad (6.14)$$

où le dernier terme est *mixte*. Pour étudier les effets, il faut connaître les axes principaux et les nouveaux indices de réfraction. Pour obtenir la forme standard (sans termes mixtes), il faut effectuer une rotation du système autour de l'axe  $z$ .



La transformation et son la transformation inverse associée sont données par

$$\begin{cases} X' = X \cos \theta + Y \sin \theta \\ Y' = -X \sin \theta + Y \cos \theta \\ Z' = Z \end{cases} \quad \begin{cases} X = X' \cos \theta - Y' \sin \theta \\ Y = X' \sin \theta + Y' \cos \theta \\ Z = Z' \end{cases} \quad (6.15)$$

La substitution dans (6.14) donne

$$\left( \frac{1}{n_0^2} + 2r_{63}\epsilon \sin \theta \cos \theta \right) X'^2 + \left( \frac{1}{n_0^2} - 2r_{63}\epsilon \sin \theta \cos \theta \right) Y'^2 + \frac{1}{n_e^2} Z'^2 + 2r_{63}\epsilon (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) X'Y' = 1 \quad (6.16)$$

Le terme mixte disparaît si

$$2r_{63}\epsilon (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan \theta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \pm \frac{\pi}{4} \quad (6.17)$$

Sous l'application d'un champ électrique, l'index ellipsoid est donc **tourné de 45°** par rapport au cas où  $\vec{\epsilon} = \vec{0}$ . On peut obtenir les nouveaux indices de réfraction à partir de (6.16)

$$n'_1 = \left( \frac{1}{n_o^2} + r_{63}\epsilon \right)^{-\frac{1}{2}} \approx n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{63}\epsilon \quad (6.18)$$

$$n'_1 = \left( \frac{1}{n_o^2} - r_{63}\epsilon \right)^{-\frac{1}{2}} \approx n_o + \frac{1}{2}n_o^3 r_{63}\epsilon \quad (6.19)$$

$$n'_3 = n_3 = n_e \quad (6.20)$$

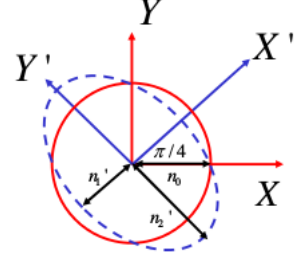


FIGURE 6.3

La variation des deux indices principaux est proportionnelle aux coefficients de Pockels et au cube de l'indice ordinaire non-perturbé.

### Effet Pockels transverse

Considérons cette fois-ci le même cristal KDP (point group  $4\bar{2}m$ ) mais avec un champ électrique appliqué parallèle à l'axe  $y$ . L'équation (6.10) devient maintenant

$$\frac{X^2 + Y^2}{n_o^2} + \frac{Z^2}{n_e^2} + 2r_{41}\epsilon XZ = 1 \quad (6.21)$$

Il n'y a ici qu'un terme *mixte* entre  $X$  et  $Z$  :  $y$  reste un axe principal du système et une rotation autour de cet axe est nécessaire pour retrouver la forme standard de l'index ellipsoid.

$$\begin{cases} X = Z' \sin \theta + X' \cos \theta \\ Y = Y' \\ Z = Z' \cos \theta - X' \sin \theta \end{cases} \quad (6.22)$$

La substitution de (6.22) dans (6.21) donne

$$\begin{aligned} & X'^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} - r_{41}\epsilon \sin 2\theta \right) \\ & + Y'^2 \left( \frac{\sin^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_e^2} - r_{41}\epsilon \sin 2\theta \right) \\ & + Z'^2 \left( \frac{1}{n_o^2} \right) \\ & + Z'X' \left[ \sin 2\theta \left( \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) + 2r_{41}\epsilon (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] = 1 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Pour faire disparaître le terme mixte, il faut que

$$\tan 2\theta = -\frac{2r_{41}\epsilon}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}} \Leftrightarrow \theta \approx -\frac{r_{41}\epsilon}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}} \quad (6.24)$$

où l'approximation est possible, le coefficient de Pockels étant petit devant 1 et le champ électrique appliqué est limité pour éviter le claquage. Après quelques manipulations trigonométriques (sans approximation)

$$X'^2 \left( \frac{1}{n_o^2} - r_{41}\epsilon \tan \theta \right) + Z'^2 \left( \frac{1}{n_o^2} + r_{41}\epsilon \tan \theta \right) + Y'^2 \left( \frac{1}{n_o^2} \right) = 1 \quad (6.25)$$

On peut en déduire les indices de réfraction. Pour le premier

$$n'_1 = \left( \frac{1}{n_o^2} - r_{41}\epsilon \tan \theta \right)^{-\frac{1}{2}} \approx n_o + \frac{1}{2}n_o^3 r_{41}\epsilon \theta \quad (6.26)$$

Comme  $\theta \propto \epsilon \rightarrow n'_i \propto \epsilon^2$  ce qui n'est pas très pratique : on n'utilise pas l'effet Pockels transverse en pratique. De plus, on ne peut utiliser cette approche pour le KDP à cause de cette dépendance en  $\epsilon^2$  : on ne peut pas négliger les effets NL quadratiques.

#### 6.2.4 Polarisation, Amplitude and Phase Modulation

L'effet Pockels longitudinal permet de modifier la polarisation en  $y$ . Il est possible de moduler un signal en appliquant un champ électrique. L'application de celui-ci va faire tourner l'index ellipsoïde de  $45^\circ$ . Le champ incident va être projeté dans les nouveaux axes, de façon équitable. Comme les deux axes sont différents, on va pouvoir induire des retards.

##### Polarisation modulation

Soit un cristal KDP, un champ appliqué parallèle à  $z$  et une onde plane monochromatique polarisée linéairement selon l'axe  $y$  (non-perturbé) se propageant en  $z$ , incident sur le celui-ci<sup>1</sup>

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{1}_y \quad (6.27)$$

Lorsque aucun champ n'est appliqué, cette onde est un mode propre de propagation et il va se propager sans voir sa polarisation modifiée. Avec un champ électrique appliqué ce n'est plus le cas, mais une superposition de deux modes d'indices  $n'_1$  et  $n'_2$  superposés, donné par (6.18) & al.

$$E(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} n'_1 z)} \vec{1}_x + \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} n'_2 z)} \vec{1}_y \quad (6.28)$$

Pour un cristal d'épaisseur  $L$ , le retard de phase est donné par

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left( \omega - \frac{\omega}{c} n'_1 L \right) - \left( \omega - \frac{\omega}{c} n'_2 L \right) \\ &= -\frac{\omega}{c} L \left( n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} \epsilon \right) + \frac{\omega}{c} L \left( n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} \epsilon \right) \\ &= \frac{\omega}{c} n_o^3 r_{63} V = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o^3 r_{63} V \end{aligned} \quad (6.29)$$

Le retard de phase est directement proportionnel à la tension appliquée et donc proportionnel à  $\epsilon$ . Si  $\Gamma = \pi$ , le rayon qui quitte le cristal est toujours polarisé linéairement, mais tourne de  $90^\circ$ . La tension correspondant à ceci est de

$$V_{pi} = \frac{\lambda_0}{2n_o^3 r_{63}} \quad (6.30)$$

Celle-ci permet la modulation. Pour un KDP avec  $\lambda = 632.8\text{nm}$ , elle vaut 8.4 kV.

---

1. Par exemple avec un polariseur juste avant le cristal



### 6.2.5 Modulation en amplitude

On peut utiliser le même dispositif en plaçant à la fin un analyseur placé orthogonalement au polariseur d'entrée

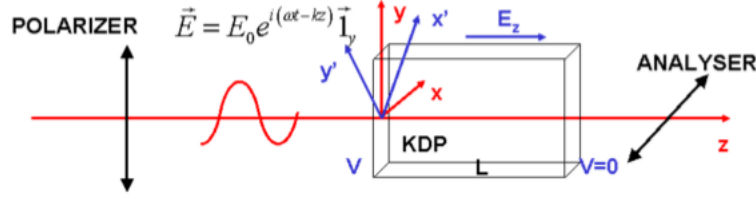


FIGURE 6.4 – Modulation en amplitude

La page 102 reprend le développement de l'onde en sortie, à l'aide des matrices de JONES (champ d'entrée, rotation, propagation dans les axes, rotation inverse). On trouve la même expression de  $\Gamma$  que précédemment et comme champ en sortie

$$E_{out} = E_{in} \sin \frac{\Gamma}{2} \vec{1}_x \quad (6.31)$$

Il est plus pratique de travailler en intensité

$$I_{out} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E_{out}|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{in}^2 \sin^2 \frac{\Gamma}{2} \quad (6.32)$$

La transmission (représentée ci-contre) est donnée par

$$T \equiv \frac{I_{out}}{I_{in}} = \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{V}{V_\pi} \right) \quad (6.33)$$

A cause de la non-linéarité de cette courbe, de nouvelles harmoniques peuvent être créées. Pour limiter celles-ci, on va travailler proche du point d'inflexion en  $\pi/2$  (par l'application d'une tension de biais ou avec une lame  $\lambda/4$ ). Avec cette disposition, la transmission totale est donnée par

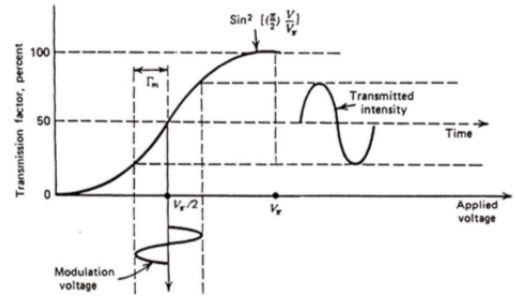


FIGURE 6.5

$$T = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sin \left( \pi \frac{V_m}{V_\pi} \sin \omega_m t \right) \right] \quad (6.34)$$

On peut faire apparaître les nouvelles harmoniques en développant la série de Fourier de (6.34)

$$T = \frac{1}{2} + J_1 \left( \pi \frac{V_m}{V_\pi} \right) \sin \omega_m t + J_3 \left( \pi \frac{V_m}{V_\pi} \right) \sin 3\omega_m t + \dots \quad (6.35)$$

où  $J_i$  sont les fonctions de BESSEL. Il semblerait au vu de la précédente expression que la bande passante soit infinie. L'amplitude des fonctions de BESSEL décroît cependant rapidement avec l'ordre. Si

$$\pi \frac{V_m}{V_\pi} < 1 \quad (6.36)$$

Toutes les harmoniques sont négligeables et le signal de sortie est une réplique linéaire du signal de modulation. Si ce n'est pas le cas, le signal de sortie présentera des distorsions.

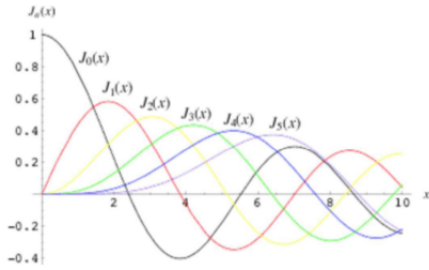


FIGURE 6.6

### 6.2.6 Modulation en phase