



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

SYNTHÈSE

Physique nucléaire PHYS-H-408

Auteur :
Nicolas ENGLEBERT

Professeur :
Pierre DESCOUVEMENT

Année 2016 - 2017

Appel à contribution

Synthèse Open Source



Ce document est grandement inspiré de l'excellent cours donné par Pierre DESCOUVEMENT à l'EPB (École Polytechnique de Bruxelles), faculté de l'ULB (Université Libre de Bruxelles). Il est écrit par les auteurs susnommés avec l'aide de tous les autres étudiants et votre aide est la bienvenue ! En effet, il y a toujours moyen de l'améliorer surtout que si le cours change, la synthèse doit être changée en conséquence. On peut retrouver le code source à l'adresse suivante

<https://github.com/nenglebert/Syntheses>

Pour contribuer à cette synthèse, il vous suffira de créer un compte sur *Github.com*. De légères modifications (petites coquilles, orthographe, ...) peuvent directement être faites sur le site ! Vous avez vu une petite faute ? Si oui, la corriger de cette façon ne prendra que quelques secondes, une bonne raison de le faire !

Pour de plus longues modifications, il est intéressant de disposer des fichiers : il vous faudra pour cela installer \LaTeX , mais aussi *git*. Si cela pose problème, nous sommes évidemment ouverts à des contributeurs envoyant leur changement par mail ou n'importe quel autre moyen.

Le lien donné ci-dessus contient aussi un README contenant de plus amples informations, vous êtes invités à le lire si vous voulez faire avancer ce projet !

Licence Creative Commons

Le contenu de ce document est sous la licence Creative Commons : *Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*. Celle-ci vous autorise à l'exploiter pleinement, compte- tenu de trois choses :



1. *Attribution* ; si vous utilisez/modifiez ce document vous devez signaler le(s) nom(s) de(s) auteur(s).
2. *Non Commercial* ; interdiction de tirer un profit commercial de l'œuvre sans autorisation de l'auteur
3. *Share alike* ; partage de l'œuvre, avec obligation de rediffuser selon la même licence ou une licence similaire

Si vous voulez en savoir plus sur cette licence :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Merci !

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Historique	1
1.2	Unité, ordre de grandeur	2
1.3	Structure du nucléon	2
1.4	Types de particules (et antiparticules)	3
1.4.1	Les baryons (spin $1/2$)	3
1.4.2	Les mésons (spin 0)	3
1.5	Types de forces	4
2	Systèmes nucléon-nucléon	5
2.1	Formalisme de l'isospin	5
2.1.1	Définition	5
2.1.2	Isospin du noyau	6
2.2	Le deuton	7
2.3	Systèmes de deux nucléons	8
2.4	Interaction nucléon-nucléon	9
3	Propriétés générales des noyaux	11
3.1	Notations	11
3.2	Masses et énergies de liaison	11
3.2.1	Formule de masse : modèle de la goutte liquide	13
3.3	Stabilité du noyau	15
3.3.1	Durée de vie des noyaux	16
3.4	Nombre "magiques"	17
3.5	Densité et rayons nucléaires	17
3.6	Densité et rayons nucléaires	18
3.7	Moments multipolaires	20
3.7.1	Moment quadrupolaire électrique	20
3.7.2	Moment dipolaire magnétique	20
4	Décroissances nucléaires	21
4.1	Généralités	21
4.2	Notion de largeur	22
4.3	Règle d'or de Fermi	23
5	Radioactivité α	25
5.1	Définitions et conservation de l'énergie	25
5.2	Conditions de décroissance α	25
5.3	Durée de vie - effet tunnel	26

5.4	Conservation du moment cinétique	27
6	Radioactivité β	28
6.1	Définitions	28
6.2	Transition β dans les noyaux	28
6.2.1	A. Bilans nucléaires	29
6.2.2	Bilans atomiques	29
6.3	Théorie de Fermi	31
6.3.1	Généralités	31
6.4	Règles de sélection	34
6.4.1	Transition de Fermi	34
6.4.2	Transition de Gamow-Teller	34
6.4.3	Transition interdite	34
6.5	Probabilité de transition intégrée	35
6.6	Capture électronique	36
6.7	Autres processus	37
7	Radioactivité γ	38
7.1	Généralités	38
7.2	Hamiltonien d'interaction nucléons-photon	39
7.3	Probabilité de transition	40
7.3.1	A. Distributions angulaires	40
7.3.2	B. Règles de sélection	41
7.3.3	C. Probabilité de transition totale	41
7.3.4	D. Largeur gamma	41
7.3.5	F. Cas particuliers : transition E_1 dans les noyaux $N = Z$	41
7.3.6	G. Unités Weisskopf	41
7.3.7	F. Exemples	41
7.3.8	I. États isométriques	41
8	Modèles nucléaires	43
8.1	Introduction	43
8.2	Modèle du gaz de Fermi	43
8.3	Modèle rotationnel	45
8.4	Modèle de potentiel	47
9	Le modèle en couches	49
9.1	Introduction	49
9.1.1	A. L'oscillateur harmonique	49
9.1.2	B. Puits infini	51
9.1.3	C. Potentiel de Woods-Saxon	51
9.1.4	D. Potentiel de spin-orbite	51
9.2	Spin et parité de l'état fondamental du noyau	52
9.3	Modèle en couches à plusieurs particules	53
9.4	Extension aux couches supérieures	54

Chapitre 1

Introduction

1.1 Historique

Le premier modèle nucléaire a été proposé par THOMPSON en 1904 : le modèle du *plumb-pudding* qui voit l'atome comme formé d'une charge positive et des électrons¹. C'est en 1911 que RUTHERFORD établit l'existence du noyau. En bombardant une feuille d'or de particules α il a remarqué que peu d'entre elles sont déviées, confirmant la présence d'une charge positive dans un faible volume.

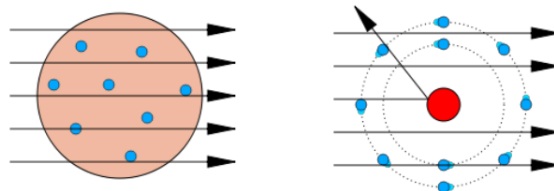


FIGURE 1.1 – A gauche le modèle de THOMPSON et à droite celui de RUTHERFORD.

En 1913, BOHR annonça que les électrons gravitent autour du noyau et c'est de nouveau RUTHERFORD qui en 1919 établit la *réaction de transfert*



Un an plus tard, en 1920, EDDINGTON suggère que cette relation prend place dans les étoiles. La découverte du neutron vient en 1932 par CHADWICK



Celle-ci résulte d'un rayonnement très pénétrant et met en évidence la structure du noyau en protons et neutrons.

Peu d'entre-elles étaient déviées, et pourtant la densité nucléaire est très importante.

1. Découvert eux en 1897.

1.2 Unité, ordre de grandeur

La taille typique d'un noyau est de 10^{-15} m, beaucoup plus petit que l'atome qui a une taille de l'ordre de l'angström ($1\text{\AA} = 10^{-10}$ m), ce qui leur donne des densités bien différentes

Calculons la densité nucléaire. La masse d'un atome s'exprime

$$m_{at} = m_N + m_E \approx m_N \quad (1.3)$$

Connaissant les tailles respectives, on sait que $\rho_N/\rho_A \approx 10^{15}$ et donc

$$\rho_N \approx 10^{15} \text{ g.cm}^{-3}, \quad \rho_A \approx 1 \text{ g.cm}^{-3} \quad (1.4)$$

Notons que la densité nucléaire ρ_N est propre aux étoiles à neutrons.

L'énergie typiquement utilisée est celle d'1 MeV, soit 10^6 eV ou encore $1.602 \cdot 10^{-13}$ J. Les trois relations suivantes permettent de retrouver ces deux unités par simple multiplication

1. Masse : $m \rightarrow mc^2$ (énergie)
2. Temps : $t \rightarrow tc$ (longueur)
3. Impulsion : $p \rightarrow pc$ (énergie)

Certaines valeurs sont toute de même intéressantes à retenir, comme l'énergie de masse de l'électron $m_e c^2 = 0.511$ MeV de même pour sa charge $e^2/4\pi\epsilon_0 = \alpha\hbar c$ où α est la constante de structure fine

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (1.5)$$

Calculons l'ordre de grandeur de l'énergie d'une réaction $p + {}^{12}\text{C}$, dont l'atome possède un rayon $r = 5$ fm. On en tire

$$V = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} = \frac{1.6 * 1.44}{5} \approx 16 \text{ MeV}, \quad V_{cent} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} = 20.9 * \frac{2}{25} \approx 2 \text{ MeV} \quad (1.6)$$

où nous avons considéré $l = 1$.

1.3 Structure du nucléon

Le nucléon est un fermion, son spin vaut donc 1/2. De plus, comme sa densité de charge n'est pas constante, il ne s'agit pas d'une particule élémentaire. Cependant, nous avons que

$$\begin{cases} \int \rho_p(r) dr = 1 \\ \int \rho_n(r) dr = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Il est alors possible de déterminer le rayon de charge du proton

$$\langle r^2 \rangle_p = \int \rho_p(r) r^2 dr \Leftrightarrow \langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.87 \text{ fm} \quad (1.8)$$

Le fait que le neutron ne soit pas une particule élémentaire a poussé à introduire le quark (de spin 1/2) : le quark *up* d'une charge de $2/3e$ et le *down* d'une charge de $-e/3$. Un proton est alors le mélange de quarks *uud* alors que le neutron est *udd*.

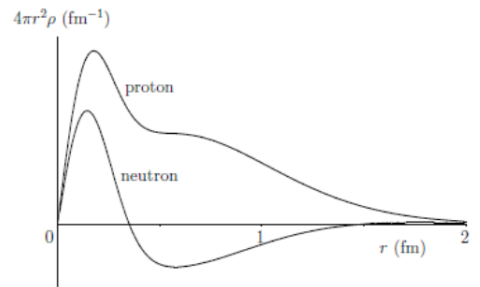


FIGURE 1.2

1.4 Types de particules (et antiparticules)

Il existe deux grand types de particules : les *leptons* et les *hadrons*.

1. Les leptons sont des particules élémentaires de charges $-e$ et de spin $1/2$
 - $e^-, \mu, \tau + \nu$
2. Les hadrons sont composés de quarks (u, d, s, c, b, t)
 - Les *baryons* sont formés de 3 quarks (comme le nucléon)
 - Les *mésos* sont formés d'un quark et d'un antiquark (comme le pion)

1.4.1 Les baryons (spin $1/2$)

Ceux-ci sont formés de trois quarks parmi u, d et s . Le couplage de deux spins $1/2$ impose que S_{12} soit 0 ou 1 (deux possibilités). L'ajout d'un troisième spin $1/2$ augmente le nombre de possibilités à six, il y a donc huit particules possibles.

Le principe d'exclusion de Pauli interdit les combinaisons de quarks uuu, ddd ou sss car si trois particules sont du mêmes types, elles doivent avoir des états différents ce qui n'est pas le cas ici.

Considérons le vecteur cinétique $\vec{j}_1 = (j_{1x}, j_{1y}, j_{1z})$ avec $j_1^2 = j_{1x}^2 + j_{1y}^2 + j_{1z}^2$. L'opérateur moment cinétique est alors défini par son application sur le *ket* $|jm\rangle$: $J_1^2 |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle$.

Il est possible de coupler le moment cinétique $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$

$$\vec{J}^2 |JM\rangle = J(J+1 - |JM\rangle) \quad \text{où } |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad (1.9)$$

Par exemple, pour l'électron de moment cinétique l et de spin $1/2$, nous avons que $|l - 1/2| \leq j \leq l + 1/2$. Tentons de comprendre les possibilités de baryons en considérant le couplage de deux nucléons

$$\left. \begin{array}{l} s_n = 1/2 \\ s_p = 1/2 \end{array} \right\} \rightarrow S_{12} = 0, 1 \quad \text{car} \quad 0 \leq S_{12} \leq 1 \quad \text{et} \quad S_{12} \in \mathbb{Z} \quad (1.10)$$

Effectuons maintenant le couplage du troisième spin $1/2$. Comme $-j \leq m \leq j$, nous avons $2j + 1$ possibilités. Ainsi pour $S_{12} = 0, 1$, $M_S = 0$ pour $S_{12} = 0$ et $M_S = -1, 0, 1$ pour $S_{12} = 1$. L'ajout du troisième spin offre donc six nouvelles possibilités.

1.4.2 Les mésons (spin 0)

Ceux-ci sont formés d'un quark et d'un antiquark parmi u, d et s ce qui offre neuf particules possibles (dont le kaon K et le pion π). Ils ont une durée de vie de l'ordre de 10^{-8} s.

1.5 Types de forces

Il existe quatre types de forces

1. Nucléaire forte, attractive et de courte portée
2. Nucléaire faible, de portée... faible
3. Électromagnétique, de portée infinie
4. Gravitationnelle, de portée infinie. Bien que son amplitude soit très faible, les masses énormes (comme la masse terrestre) compense ceci.

L'hamiltonien d'un noyau s'écrit

$$H = \sum_i T_i + \sum_{ij} V_{ij} \quad (1.11)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique et le second terme l'interaction nucléon-nucléon composée de deux termes : $V_{ij} = V_N + V_C$ où V_N est d'origine nucléaire (pas connue exactement même si on le sait attractif et de courte portée) et V_C l'origine coulombienne (nulle pour un neutron-neutron ou neutron-proton et valant e^2/r pour un proton-proton).

Le problème est que ceci est difficilement résolvable même numériquement (l'interaction nucléaire n'étant pas parfaitement connue), il faudra donc recourir à l'utilisation de modèles.

Chapitre 2

Systèmes nucléon-nucléon

2.1 Formalisme de l'isospin

2.1.1 Définition

Basé sur l'évidence relative que le proton et le neutron sont semblables, HEISENBERG introduit le formalisme de l'**isospin** en 1932. Parmi les ressemblances, on retrouve

- Différence de 0.14% entre les masses : $m_n = 939.57$ MeV et $m_p = 938.27$ MeV
- Symétrie de charge $V_N^{pp} \approx V_N^{nn}$
- Indépendance de la charge $V_N^{pp} \approx V_N^{nn} \approx V_N^{np}$

Nous parlons bien évidemment ici des interaction coulombiennes. L'idée est alors de voir le **nucléon** comme une seule particule avec un isospin $t = 1/2$. Il existe alors deux projections possibles, soit deux états possibles (d'une même particule)(fonction de la charge)

$$m_t = \frac{1}{2} \text{ pour le neutron } = |n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m_t = -\frac{1}{2} \text{ pour le proton } = |p\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

On dénombre ainsi trois opérateurs d'isospin

$$\vec{t} = (t_x, t_y, t_z) \quad (2.2)$$

L'isospin n'est rien autre qu'un nouveau moment cinétique lié à la charge

$$\hat{q} = e \left(\frac{1}{2} - t_z \right) \quad (2.3)$$

Il vérifie donc les relations habituelles des moments cinétiques

$$t_z |n\rangle = \frac{1}{2} |n\rangle, \quad t_z |p\rangle = -\frac{1}{2} |p\rangle, \quad \vec{t}^2 |n\rangle = \frac{3}{4} |n\rangle, \quad \vec{t}^2 |p\rangle = \frac{3}{4} |p\rangle \quad (2.4)$$

On peut également définir des opérateurs éleveurs ($t_+ = t_x + it_y$) et abaisseurs ($t_- = t_x - it_y$) qui seront utiles¹ dans le cadre de la radioactivité β où un neutron est transformé en proton et inversement.

Notons que le concept d'isospin est plus général que le nucléon, on peut en parler dans d'autres types de particules (pion ou l'on associe un isospin t de 1).

1. Avec $t_+ |p\rangle = |n\rangle$ et $t_+ |n\rangle = 0$.

2.1.2 Isospin du noyau

Considérons un noyau de Z protons et N neutrons tel que $Z + N = A$. L'**isospin total** est le couplage des A moments cinétiques

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^A \vec{t}_i \quad (2.5)$$

Soit $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 \rightarrow M = M_1 + M_2$, les projections. On a alors

$$\begin{aligned} \vec{j}_1^2 |j_1 m_1\rangle &= j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1\rangle, & -j_1 \leq m \leq j_1 & \text{ (projection)} \\ \vec{J}^2 |JM\rangle &= J(J + 1) |JM\rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

où

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad \text{et} \quad M = m_1 + m_2 \quad (2.7)$$

Pour l'isospin, nous avons $t_z = 1/2$ (neutron) et $t_z = -1/2$ (proton) et donc

$$T_z = N \frac{1}{2} + Z \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{N - Z}{2} \quad (2.8)$$

Les valeurs propres sont alors données par $T_z = \frac{N - Z}{2}$ et en comme dans la plupart des noyaux $N > Z$ on en tire que

$$\left| \frac{N - Z}{2} \right| \leq T \leq \frac{N + Z}{2} \quad (2.9)$$

Ainsi, dans le fondamental nous avons presque toujours $T = \left| \frac{N - Z}{2} \right|$. Un atome de masse A paire aura alors T entier et A impaire implique T demi-entier.

INTÉRÊT EXPÉRIMENTAL

Les noyaux miroirs sont des noyaux tel que l'on a (Z_1, N_1) et $(Z_2 = Z_1, N_2 = N_1)$, impliquant des spectres très similaires. L'isospin permet de les différencier. Par exemple ^{13}C possède 6 protons et 7 neutrons mais un isospin $T_z = +1/2$ tandis que le ^{13}N possède 7 protons et 6 neutrons et un isospin $T_z = -1/2$.

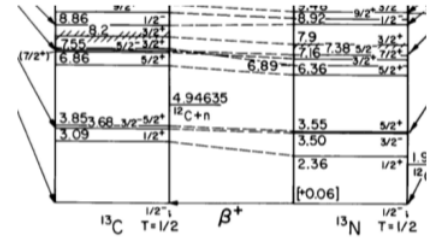


FIGURE 2.1

Hamiltonien du noyau (formalisme de l'isospin)

Dans ce formalisme, l'hamiltonien s'écrit

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} V_N(i, j) + \sum_{i < j} V_C(i, j) \quad (2.10)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique T

$$T_i = \frac{p_i^2}{2m_N} = \frac{-\hbar^2}{2m_N} \Delta_i, \quad (2.11)$$

le second terme est le potentiel nucléaire indépendant de T

$$[V_n, T] = 0 \quad (2.12)$$

et le dernier terme est le potentiel coulombien (commun à tous les électrons), qui peut être écrit de façon tout à fait générale grâce à l'isospin.

$$V_C(i, j) = \frac{e^2}{|r_i - r_j|} \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) \left(\frac{1}{2} - t_{jz} \right), \quad [V_C, T_z] = 0, \quad [V_C, T^2] \neq 0 \quad (2.13)$$

Le premier commutateur implique que T_z est un *bon* nombre quantique mais le second montre que T n'est pas rigoureusement un bon nombre quantique.

Quelques petites remarques

- $[H, J^2] = 0$ implique la quantification des niveaux d'énergie
- $[H, P] = 0$ implique que chaque niveau est soit +1, soit -1
- $[H, T^2] \approx 0$ implique un nombre quantique approximatif et pas d'état strict d'isospin

La première séance d'exercice nous illustre le calcul de T_z . Le principal intérêt de cette notion est dès lors bien de classer les différents niveaux d'énergie ^a

a. Voir slide 22 pour s'en convaincre.

2.2 Le deuton

Le deuton est un système lié formé d'un neutron et d'un proton où $T_z = 0$, soit un isotope lourd de l'hydrogène. Théoriquement J peut alors valoir 0 ou 1 mais de expérimentalement on ne trouve que la valeur non-nulle. Les mesures expérimentales sont les suivantes

$$E_B = 2.224 \text{ MeV}, \quad J = 1^+, \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2.1 \text{ fm}, \quad Q = 0.286 \text{ e.fm}^2 \quad (2.14)$$

où Q est le **moment quadripolaire**. Celui-ci est lié à la déformation du noyau (seulement les protons) et se définit

$$Q_{2\mu} = e \sum_{i=1}^Z r_i^2 Y_2^\mu(\Omega_i) = e \sum_{i=1}^A \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) r_i^2 Y_2^\mu(\Omega_i) \quad (2.15)$$

Il s'agit d'un OTI de rang 2 vis-à-vis de l . Nous y reviendrons plus tard. Intéressons-nous d'abord aux nombres quantiques. Vu les résultats expérimentaux, il faut trouver une combinaison donnant 1^+ .

$$\begin{aligned} S = S_p + S_n &\rightarrow s = 0 \leftrightarrow L = 1 \\ &\rightarrow s = 1 \leftrightarrow L = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

La parité calculée via $(-1)^L$ exclu la valeur $L = 1$, seules les valeurs $L = 0, 2$ sont possibles (et $L = 0$ est dominant). Le deuton correspond alors aux valeurs $S = 1$ et $L = 0, 2$.

En partant de la relation d'incertitude $\Delta p \Delta x = \hbar = 197 \text{ MeV.fm}$, pour $\Delta x \approx 1 \text{ fm}$ on trouve $\Delta p \approx 200 \text{ MeV/c}$. L'énergie cinétique vaut donc

$$T \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m_N} = \frac{4 * 10^4}{2 * 10^3} \approx 20 \text{ MeV} \quad (2.17)$$

Ce qui est l'énergie cinétique par nucléon. Cette énergie étant faible par rapport à l'énergie de masse du nucléon ($m_N c^2$), on utilisera l'équation de NEWTON mais il faut bien garder à l'esprit qu'il faudrait utiliser l'équation de DIRAC dans un régime relativiste. L'énergie vaut donc

$$E = \underbrace{T}_{\approx 20 \text{ MeV}} + \underbrace{V}_{\approx -22 \text{ MeV}} = -2.2 \text{ MeV} \quad (2.18)$$

où le potentiel est attractif. L'état est donc un état lié. Il est possible de calculer via l'expression de la vitesse $v = \Delta p / m_N \approx c/5$ un temps caractéristique pour une distance de 5 fm de 10^{-22} s.

2.3 Systèmes de deux nucléons

La première chose à faire lorsqu'on s'intéresse aux propriétés nucléaires et de regarder les symétries. Sachant que les nucléons sont des fermions, la fonction d'onde totale doit être antisymétrique : $P_{12}\Psi = -\Psi$ où P_{12} est l'opérateur d'échange des coordonnées spatiales, de spin et d'isospin. Il est possible d'utiliser une factorisation de ces trois composantes

$$\Psi_{LST}(\vec{r}) = \Phi_L(\vec{r}) |SM_S\rangle |TM_T\rangle \quad (2.19)$$

On utilisera alors le moment cinétique orbital relatif \vec{L} , le spin total $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ et l'isospin total $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$. Deux cas sont possibles

1. Pour $S = 1$, il s'agit de l'état *triplet* aux fonctions d'ondes symétriques
2. Pour $S = 0$, il s'agit de l'état *singlet* aux fonctions d'ondes antisymétriques

Si on définit P^σ comme l'opérateur d'échange des spins², on a

$$P^\sigma |SM_S\rangle = (-1)^{S+1} |SM_S\rangle \quad (2.20)$$

Le tout est maintenant de trouver une expression analytique de cet opérateur, qui possède les valeurs propres $(-1)^{S+1}$. Pour se faire, considérons le produit scalaire suivant : $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 1/2(\vec{S}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2)$. On en tire

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 |S = 0, M_S = 0\rangle &= \frac{1}{2} \left(0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) |S = 0, M_S = 0\rangle = -\frac{3}{4} |0, 0\rangle \\ \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 |S = 0, M_S\rangle &= \frac{1}{4} |1, M_S\rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

On en tire que (rouge)

$$P^\sigma = \frac{1 + 4\vec{s}_1 \vec{s}_2}{2} = \frac{1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2}{2} \quad (2.22)$$

où $\sigma = 2s$. On a bien un opérateur donnant la phase recherchée. En effet, l'application de P^σ à une fonction $S = 0, 1$ donne une phase lisse. Ce qui a été fait pour le spin peut évidemment se faire pour l'isospin, c'est la même chose

$$P^\tau = \frac{1 + \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2}{2} \quad (2.23)$$

Ceci était pour l'échange de spin (et isospin). Nous avons également l'**opérateur d'échange des coordonnées d'espaces** défini selon

$$P^r \Phi_L(\vec{r}) = \Phi_L(-\vec{r}) = (-1)^L \Phi_L(\vec{r}) \quad (2.24)$$

Pour échanger deux nucléons (espace, spin, isospin), on utilisera alors

$$P_{12} = P^r P^\sigma P^\tau \quad (2.25)$$

2. Il s'agit d'une notation historique où $\sigma = 2S$.

espace	spin	isospin	
+	+	-	L pair, S=1, T=0
+	-	+	L pair, S=0, T=1
-	+	+	L impair, S=1, T=1
-	-	-	L impair, S=0, T=0

TABLE 2.1

Étant des fermions, les nucléons possèdent une fonction d'onde antisymétrique. Il faut que $P_{12}\psi = -\psi$. On en tire le **principe de Pauli généralisé** (rouge) :

$$P_{12} = P^r P^\sigma P^\tau = -1 \quad (2.26)$$

En effet, l'application de P_{12} sur ψ où ψ est caractérisé par quatre nombres quantiques L, S, T donne

$$(-1)^S + 1(-1)^T + 1(-1)^L = -1 \quad (2.27)$$

Et donc

$$(-1)^{L+S+T} = -1 \quad (2.28)$$

Il s'agit d'une **règle de sélection pour le système nucléon-nucléon**.

Ainsi, en parité + (L pair), on dénombre quatre états. Le cas $T = 1, S = 0$ sont des états non liés alors que $T = 0, S = 1$ forme un état lié (deuton). En parité - (L impair), on compte quatre états non liés.

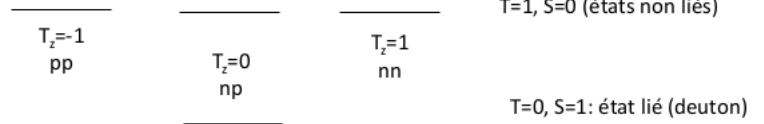


FIGURE 2.2

2.4 Interaction nucléon-nucléon

Aujourd'hui encore, cette interaction n'est pas exactement connue. Ce que l'on sait, c'est qu'elle doit respecter six lois d'invariances

1. Réflexion
2. Translation (dépend de $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$)
3. Rotation
4. Invariance par rapport au temps
5. Indépendance de charge
6. $V(1, 2) = V(2, 1) = V(r_1, r_2; p_1, p_2; s_1, s_2; t_1, t_2)$

De même, le principe de Pauli généralisé doit s'appliquer

$$P_{12}\Psi_{LST}(\vec{r}) = -\Psi_{LST}(\vec{r}) \quad (2.29)$$

où $P_{12} = P^r P^\sigma P^\tau$. On donne une forme générale au potentiel $V(r)$

$$V(r) = w(r) + m(r)P^r + b(r)P^\sigma + h(r)P^\tau \quad (2.30)$$

où l'on part de données expérimentales (B, Q, μ , déphasages, ...) et on ajuste ces fonctions selon les données mesurées. Encore une fois, l'interaction nucléon-nucléon est non-connue, il n'existe que des formes que les gens ont ajustés. Souvent, on utilise des formes soit Gaussiennes, soit de WOODS-SAXON.

Voyons comment faire. Considérons un système n+p ($T_z = 0$) où L est pair. En considérant la forme générale du potentiel (central) $V(r) = w(r) + m(r)P^r + b(r)P^\sigma + h(r)P^\tau$, on trouve comme éléments de matrice

$$\begin{aligned} \langle T=0, S=1 | V | T=0, S=1 \rangle &= w(r) + m(r) + b(r) - h(r) \\ \langle T=1, S=0 | V | T=1, S=0 \rangle &= w(r) + m(r) - b(r) + h(r) \end{aligned} \quad (2.31)$$

On peut déjà remarquer que l'on obtient des potentiels différents pour $S=0$ (singlet) et $S=1$ (triplet).

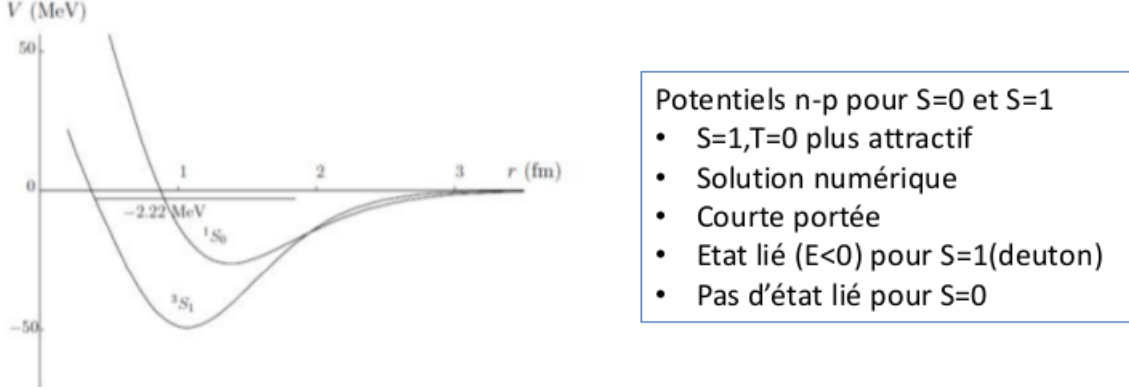


FIGURE 2.3

Pour un système $n+n$ ($T_z = +1$), $p+p$ ($T_z = -1$), L pair ($T = 0 \nabla$)

$$\langle T=1, S=0 | V | T=1, S=0 \rangle = w(r) + m(r) - b(r) + h(r) \quad (2.32)$$

Comme on retrouve le même potentiel pour les trois systèmes $T=1$, il y a invariance de la charge. Dans une interaction centrale, on peut donc dire que $\Delta S = 0$ et $\Delta L = 0$.

Il est possible de prendre en compte des termes additionnels dans l'interaction nucléon-nucléon (couplage spin-orbite, terme tensoriel, ...). On pourrait avoir *par réflexion*

$$(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \rightarrow (-\vec{r}, -\vec{p}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \quad (2.33)$$

Par *renversement du temps*

$$(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) \rightarrow (\vec{r}, -\vec{p}, -\vec{s}_1, -\vec{s}_2) \quad (2.34)$$

On pourrait aussi rajouter des termes "non-centraux" comme le *spin-orbite*

$$V_{LS}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} \quad : \quad \Delta S = 0, \pm 1, \Delta L = 0 \quad (2.35)$$

où encore des termes *tensoriels*

$$V_T(r) \vec{S}_{12} \quad \text{avec} \quad \vec{S}_{12} = [[\vec{s}_1 \otimes \vec{s}_2]^2 \otimes [\vec{r}_1 \otimes \vec{r}_2]^2]^0 \quad (2.36)$$

Ce terme respecte également les propriétés d'invariances énoncées ci-dessus. Il est responsable d'un mélange entre $L=0$ et $M=2$ dans le deuton, mais également du moment quadrupolaire du deuton.

L'interaction nucléon-nucléon n'est pas exacte, mais ajustée. Si on utilise cette expression pour un système à trois corps, on ne trouve pas exactement la valeur expérimentale de l'énergie. C'est parce que, pour des systèmes nucléaires à trois corps, il existe des forces à trois corps :

$$H = T_1 + T_2 + T_3 + V_{12} + V_{13} + V_{23} + V_{123} \quad (2.37)$$

Chapitre 3

Propriétés générales des noyaux

3.1 Notations

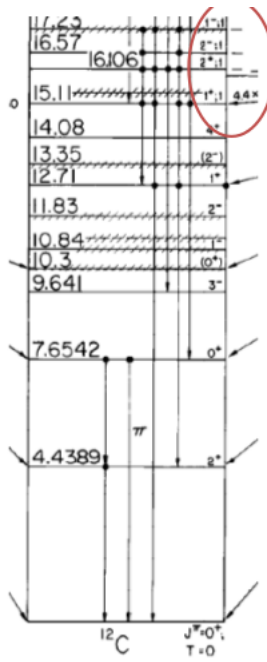


FIGURE 3.1 – Spectre du ^{12}C . Entouré l'état d'isospin $T = 1$ et "tout en bas" l'état fondamental $J = 0^+, T = 0$ (petite composante positive).

On notera un noyau avec Z protons et N neutrons (ou $A = Z + N$)

$${}^A_Z X_N \quad \text{ou} \quad {}^A_Z X \quad \text{ou} \quad {}^A X \quad (3.1)$$

Par exemple, ${}^7_3\text{Li}_4$, $Z = 3$, $N = 4$ est noté en pratique ${}^7\text{Li}$. De même, ${}^{12}_6\text{C}_6$, $Z = 6$, $N = 6$ est noté ${}^{12}\text{C}$. On parlera de bon nombres quantiques **exacts**

- Le spin total J : $[H, J^2] = 0$ (invariance par rotation)
- Projection du spin : $J_z : [H, J_z] = 0$
- Parité π : $[H, P] = 0$ (invariance par réflexion)

Il y a également le bon nombre quantique **approché**, l'isospin T : $[H, T^2] \approx 0$. Nous noterons également les niveaux $E, J^p(T)$.

3.2 Masses et énergies de liaison

Il existe deux types de masses qui sont toutes deux importantes pour déterminer la stabilité des noyaux : la masse atomique et nucléaire. Celles-ci diffèrent par la masse des électrons et des énergies de liaison et leur différence est souvent négligeable.

La **masse atomique** $M(A, Z)$ ou $M({}^A X)$ a pour unité l'unité de masse atomique uma définie par

$$1 \text{ uma} \approx 931.4940 \text{ MeV}/c^2 \quad (3.2)$$

à partir de la masse d'un atome de ^{12}C ($M(^{12}\text{C}) = 12 \text{ uma}$). Pour le proton, le neutron et l'électron :

$$m_p = 1.007\,276\,467 \text{ uma}, \quad m_n = 1.008\,664\,916 \text{ uma}, \quad m_e = 5.485\,799\,09 \times 10^{-4} \text{ uma} \quad (3.3)$$

On utilise souvent (dans les table, car plus facile à mesurer) l'**excès de masse** défini par

$$\Delta(A, Z) = [M(A, Z) - A] \text{ uma} \quad (3.4)$$

Par définition $\Delta(^{12}\text{C}) = 0$.

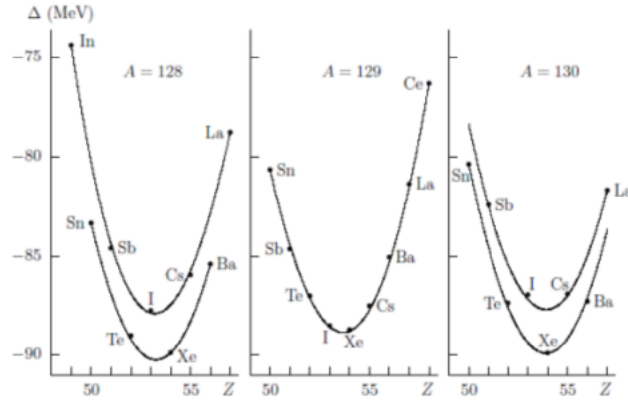


FIGURE 3.2 – Les valeurs sont négatives car la masse du noyau est inférieure à la somme des masses individuelles. Il y a des différences entre les valeurs de A pair et impair. Si A est impair, un des deux doit être pair et l'autre impair. Mais si la somme $A = N + Z$ est paire on peut avoir N, Z soit paire soit impair (noyaux pair-pair ou impair-impair). L'excès de masse constant justifie cette forme parabolique.

Les **masses nucléaires** $m(A, Z)$ ou $m(^A X)$ sont reliée à la masse atomique par

$$m(A, Z) = M(A, Z) - Zm_e + \frac{B_e(Z)}{c^2} \quad (3.5)$$

où $B_e(Z)$ est l'énergie de liaison électronique valant à peu près $15.7 * Z^{7/3}$ eV (négligeable). La masse nucléaire est donc la masse atomique diminuée de "tout ce qui concerne les électrons" (soit leur masse et énergie de liaison).

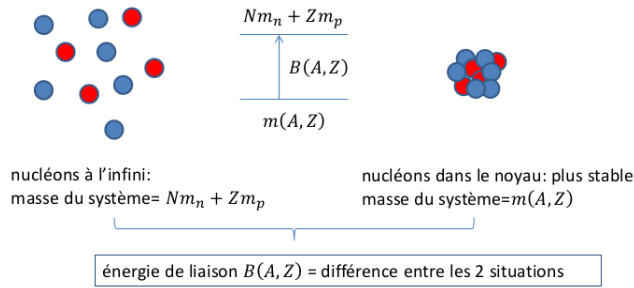


FIGURE 3.3

L'**énergie de liaison nucléaire** est définie

$$\begin{aligned} B(A, Z) &= [Nm_n + Zm_p - m(A, Z)]c^2 \\ &= N\Delta(n) + Z\Delta(p) - \Delta(A, Z) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Cette énergie B est positive pour tous les noyaux connus, c'est-à-dire qu'ils ne se désintègrent pas en N neutrons et Z protons.

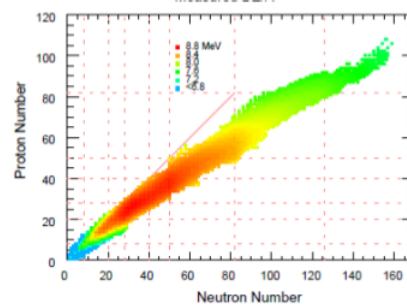
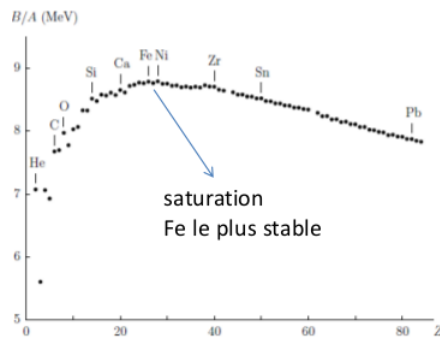


FIGURE 3.4

De façon presque systématique, on peut dire que

$$\frac{B(A, Z)}{A} \approx (8.3 \pm 0.5) \text{ MeV} \quad (3.7)$$

Ceci est illustré sur la figure ci-dessus. A partir de $Z = 20$, 8MeV est vraiment l'énergie moyenne pour l'énergie de masse (s'il y a un chiffre à retenir, c'est lui). A gauche du fer, on gagne de l'énergie de liaison si on ajoute des nucléons : production d'énergie dans les étoiles, il s'agit de la fusion. On ajoute en effet aux éléments légers un proton ou une particule alpha et on gagne en liaison ce qui produit un rayonnement. Le ${}^4\text{He}$ sort de cette tendance, étant très lié : il s'agit de la particule α qui possède une grande énergie de liaison (7.1 MeV) (par contre le deuton est lui très peu stable (1.1 MeV)).

3.2.1 Formule de masse : modèle de la goutte liquide

Le modèle de la goutte liquide est une paramétrisation empirique. Il s'agit de considérer que le noyau est une goutte liquide possédant certaines propriétés. Il s'agit d'un modèle macroscopique qui ne tient pas compte des effets quantiques mais qui permet de pas mal décrire l'énergie de liaison (pour les noyaux stables!).

Selon ce modèle, l'énergie de liaison totale est donnée par

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_A (N-Z)^2}{A} + \delta \quad (3.8)$$

Cette relation permet de donner un ordre de grandeur aux énergies de liaison. Il contient cinq termes

1. Terme de volume : plus il y a de nucléons, plus B grandit. On considère ici que chaque nucléon interagit avec tous les autres.
2. Terme de surface : il s'agit de la première correction. Les nucléons à la surface interagissent moins que ceux à l'intérieur qui ont "plus de voisins". La matière nucléaire est incompressible, le volume d'un noyau est proportionnel au nombre de nucléon A . Ceci signifie que le rayon du noyau est proportionnel à $A^{1/3}$ et donc que $S \propto A^{2/3}$.
3. Terme coulombien incluant chaque paire de protons
4. Terme d'asymétrie, proportionnel à la différence entre les deux (le principe de PAULI favorise en effet $Z = N$).
5. Énergie d'appariement (favorise les paires de nucléons).

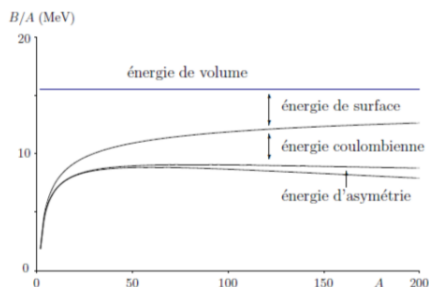


FIGURE 3.5

Tous ces paramètres sont obtenus à partir d'ajustements. Il existe des formules plus compliquées pour des noyaux instables (d'autres effets sont pris en compte). En utilisant l'expression de $B(A, Z)$, on retrouve bien la dépendance en Z^2 à A constant. Parmi les noyaux stables, 166 noyaux sont pair-pair, 55 pair-impair et 4 impair-impair (${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$ et ${}^{14}\text{N}$).

Il est possible de retrouver la parabole de masse à partir de ce modèle (soit la variation de fonction de Z , à A fixe). Petit calcul d'optimisation

$$\left. \begin{aligned} B(A, Z) &= [Nm_n + Zm_p - m(A, Z)]c^2 \\ B(A, Z) &= a_V A - a_S A^{2/3} - \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \frac{a_a (N-Z)^2}{A} + \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dm}{dZ} = 2Z \frac{a_C}{A^{1/3}} - \frac{2(A-2Z)a_a}{A} = 0 \quad (3.9)$$

où nous avons fait les hypothèses que $m_n \approx m_p$ et $2Z-1 \approx 2Z$. On en déduit que

$$Z_{min} \approx \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{a_C}{4a_a}\right) A^{2/3}} \approx \frac{A}{2} \frac{1}{1 + 0.0078 A^{2/3}} \quad (3.10)$$

Le rapport Z_{min}/A diminue quand A augmente (s'écarte de $1/2$) :

$$m(A, Z) \approx m(A, Z_{min}) + c \times (Z - Z_{min})^2 + \dots \quad (3.11)$$

On retrouve bien la forme parabolique.

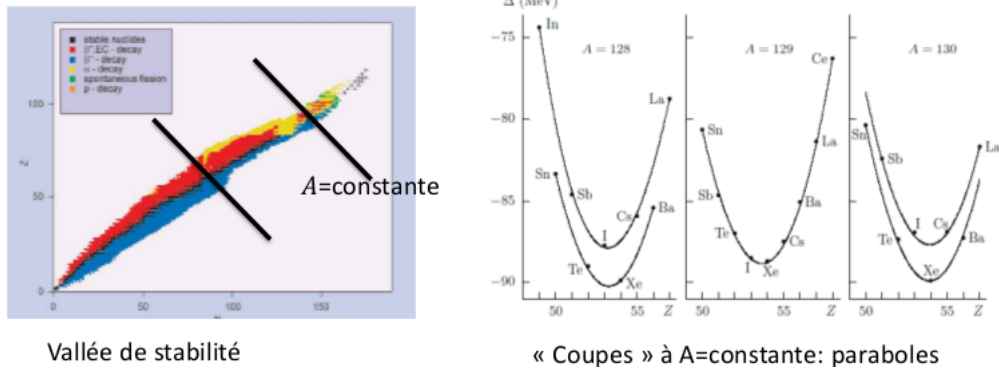


FIGURE 3.6 – À gauche, les points noirs représentent la vallée de la stabilité. En rouge il s'agit des éléments riches en protons et en bleus ceux riches en neutrons. En faisant une coupe en se plaçant sur un des points noir, on obtient les paraboles représentées à droite.

Intéressons-nous aux **énergies de séparation**

- Un neutron

$$S_n = (m(A-1, Z) + m_n - m(A, Z))c^2 = B(A, Z) - B(A-1, Z) \quad (3.12)$$

- Deux neutrons

$$S_n = B(A, Z) - B(A-2, Z) \quad (3.13)$$

- Un proton

$$S_P = B(A, Z) - B(A-1, Z-1) \quad (3.14)$$

Il s'agit de l'énergie qu'il faut fournir au système pour enlever un neutron (proton). Trois cas peuvent se présenter

1. $S > 0$: le noyau est stable en particules
2. $S < 0$: le noyau est instable en particules
3. $S = 0$: le noyau est à la limite de stabilité (*driplines*)

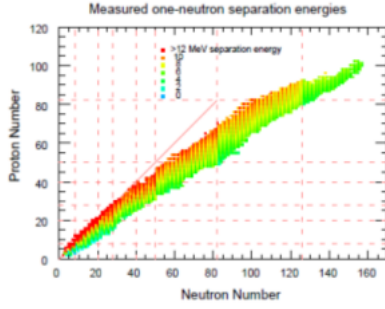


FIGURE 3.7

Lorsque l'on "coupe" un noyau, la masse peut être supérieure ou inférieure. Dans le cas où la masse est plus grande, le noyau initial était plus stable car il possédait une masse plus petite. Dans le cas où la masse coupée est plus petite, le noyau initial est instable et il aura tendance à émettre un neutron. Sur le graphique ci-contre, il s'agit d'un code couleur pour les énergies de séparation d'un neutron. Le *vert* et le *bleu* correspondent à de petites énergies de liaison. Le neutron est donc de moins en moins lié et il faut de moins en moins d'énergie pour l'éliminer et converger vers une situation stable.

3.3 Stabilité du noyau

Il existe principalement deux types d'instabilité : l'instabilité en **particule** et par **émission** β . Dans le premier cas¹, A change et cette instabilité est en générale très courte ($\approx 10^{-21}$ s) alors que dans le second cas² A est constant (mais N, Z changent) et les durées de vie sont variables (10^{-6} s à 10^{15} ans).

La *stabilité en particule* s'obtient s'il n'existe pas de sous-système (2,3,4, ...particules) dont l'énergie totale est plus basse. Considérons un noyau (A, Z) et différents mode de dissociation

$$(A, Z) \rightarrow (A_1, Z_1) + (A_2, Z_2) \quad (3.15)$$

où $A = A_1 + A_2$ et $Z = Z_1 + Z_2$. Le noyau sera stable en particules si

$$\begin{aligned} m(A, Z) &< m(A_1, Z_1) + m(A_2, Z_2) & \forall (A_1, Z_1) \\ B(A, Z) &> B(A_1, Z_1) + B(A_2, Z_2) & \forall (A_1, Z_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Le *slide 43* donne quelques arrangement possible pour la dissociation du ${}^7\text{Li}$. En regardant les différents cas on se rend compte qu'aucune n'est possible : le ${}^7\text{Li}$ est donc stable en particules. On remarque ici que toutes les différences de masses étaient négatives ce qui implique la stabilité (masse initiale plus petite que la masse finale).

Si cette différence est par contre un nombre **positif**, le noyau est instable en particules. C'est le cas pour le ${}^8\text{Be}$

$$m({}^8\text{Be}) - 2 * m({}^4\text{He}) = 0.092 \text{ MeV} \quad (3.17)$$

La masse du ${}^4\text{He}$ est plus petite car le rapport B/A est grand, le noyau est instable et possède une durée de vie de 10^{-16} s. Le noyau ${}^8\text{Be}$ est donc en dehors de la vallée de stabilité. De même, il n'existe pas de noyaux stables pour $A = 5$. Regardons les deux dissociations suivantes

$${}^5\text{He} \rightarrow \alpha + n, \quad {}^5\text{Li} \rightarrow \alpha + p \quad (3.18)$$

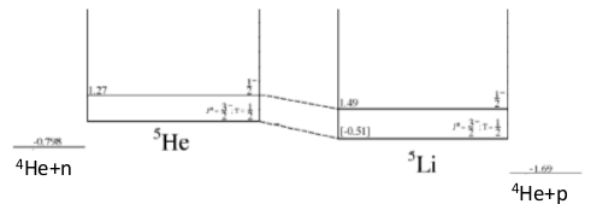


FIGURE 3.8

1. Il s'agit du cas précédemment discuté où le nombre de nucléons changeait.
2. Les atomes à l'extrémité de la vallée de la stabilité sont instable par émission β .

En calculant leurs différences de masses

$$m(^5\text{He}) - m(^4\text{He}) - m(n) = 0.0798 \text{ MeV}, \quad m(^5\text{Li}) - m(^4\text{He}) - m(p) = 1.69 \text{ MeV} \quad (3.19)$$

On voit donc qu'ils ont une masse initial plus grande que les produits de dissociation : ^5He et ^5Li n'existent pas, il se désintègrent quasi directement. Le fondamental apparaît donc comme une résonance (temps de vie de $\approx 10^{-20}\text{s}$).

Il existe d'autres types de décroissance

- Radioactivité α : $m(A, Z) - m(A-4, Z-2) - m_\alpha > 0$ pour $A \gtrsim 150$
- Fission (symétrique) : $M(A, Z) - 2m(A/2, Z/2) > 0$ pour $A \gtrsim 190$
- Radioactivité β : pour A donné, un seul Z est stable
 - β^- (neutron converti en proton et émission d'un électron) : $(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) + e^- + \bar{\nu}$
 - β^+ (proton converti en neutron et émission d'un positron) : $(A, Z) \rightarrow (A, Z-1) + e^+ + \nu$
- Radioactivités *exotiques* : $2p$, ^{14}C , double β , ...

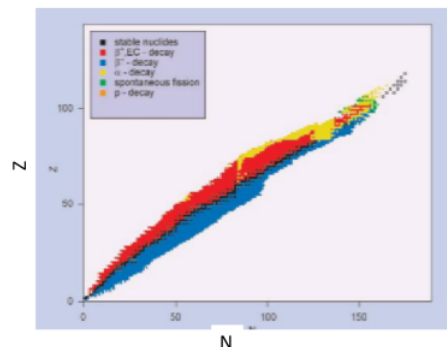


FIGURE 3.9

Sur la figure ci-dessus à droite, en *noir* sont représentés les noyaux stables, en *bleu* ceux qui ont un excès de neutron (et donc désintégration β^-), en *rouge* ceux qui ont un excès de proton (et donc désintégration β^+). Dans la zone des noyaux lourds, on retrouve en *jaune* la désintégration α . Il faut en effet être dans la zone des noyaux lourds pour gagner de l'énergie (ou perdre de la masse, c'est identique) et émettre de α . Les quelques points *verts* représentent la fission.

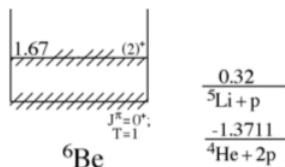


FIGURE 3.10

Regardons deux radioactivités *exotiques*, en commençant par la désintégration $2p$ dans le ^6Be . Celui-ci est stable par rapport à $^5\text{Li}+p$ mais instable par rapport à $^4\text{He} + p + p$: il est donc stable par rapport à la désintégration en un proton, mais instable par rapport à celle à deux protons.

Un autre cas un peu spécial est la radioactivité double β , la décroissance β étant défavorisée

$$^{48}\text{Ca} (Z=20) \rightarrow ^{48}\text{Ti} (Z=22) + 2e^- + 2\bar{\nu} \quad (3.20)$$

Ce phénomène est cependant peu fréquent, la durée de vie du ^{48}Ca étant de 5×10^{19} ans.

3.3.1 Durée de vie des noyaux

Le graphique ci-dessus résume ce que nous venons de voir, en terme de durée de vie. Notons que la droite $N = Z$ n'est vraie que jusqu'à 20 neutrons.

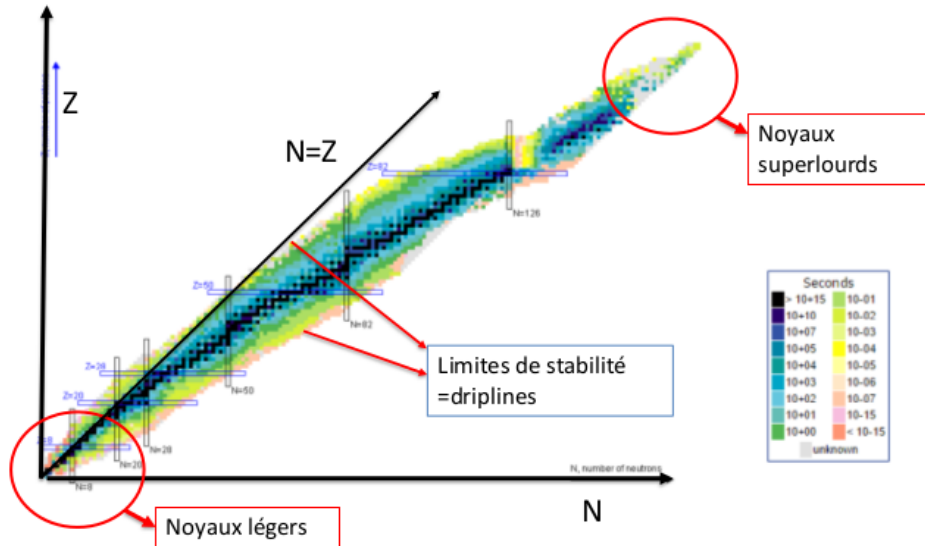


FIGURE 3.11

3.4 Nombre "magiques"

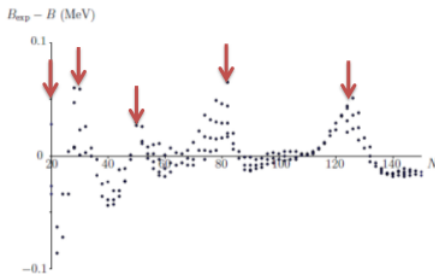


FIGURE 3.12

Nous avons utilisé un modèle macroscopique (modèle de la goutte liquide) pour déterminer l'énergie de liaison. En comparant ces résultats théoriques avec les expérimentaux, il y a des différences importantes pour $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$. On appelle ces nombres les *nombre magiques* qui possèdent des propriétés remarquables au niveau de l'énergie de liaison du rayon et de l'énergie d'excitation. Notons qu'il existe aussi des nombres *doublements magiques* qui, comme les *magiques* doivent être expliqués par des modèles nucléaires (effets quantiques : modèle en couche).

3.5 Densité et rayons nucléaires

Il existe principalement quatre types de noyaux

1. *Exotiques* : situés près de la limite de stabilité ($S_n = 0, S_p = 0$: *drip lines*)
2. *Halo* : Rayon beaucoup plus grand que prédit par la loi en $A^{1/3}$
3. *Transuraniens* : charge $Z > 92$ (Uranium). Ils n'existent pas dans la nature et sont produits en laboratoire (actuellement jusque $Z = 118$).
4. *Superlourds* : hypothétiques, proche de $Z = 126$ le nombre magique suivant).

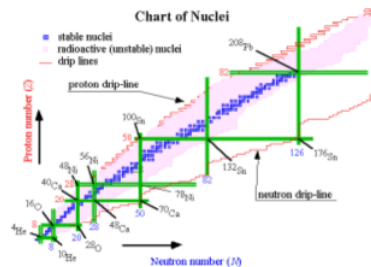


FIGURE 3.13

3.6 Densité et rayons nucléaires

Peu de notes dans cette section³. Il existe deux types de densité ($[L^{-3}]$)

1. Matière (masse)

$$\rho_m(\vec{r}) = \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^A \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.21)$$

2. Charge

$$\rho_c(\vec{r}) = \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^Z \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle = \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^A \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.22)$$

Ces densité vérifient les relations $\int \rho_m(\vec{r}) d\vec{r} = A$ et $\int \rho_c(\vec{r}) d\vec{r} = Z$ mais il s'agit également de fonctions paires $\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r})$. L'application de l'opérateur de parité P donne $P\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)P = \delta(\vec{r} + \vec{r}_i)$.

Il est possible d'exprimer ces densités selon un **développement en multipôles** (rouge)

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\lambda} P_{\lambda}(\cos \theta) \rho_{\lambda}(r) \quad (3.23)$$

où λ est pair et compris entre 0 et $2J$. Si $J = 0$ ou $J = 1/2$, $\rho(\vec{r}) = \rho_0(r)$, les densités sont alors sphériques.

Autre donnée intéressantes, les **rayons carrés** pour ces deux densités. Pour la matière

$$\langle r^2 \rangle_m = \frac{1}{A} \sum_i r_i^2 = \frac{1}{A} \int \rho_m(\vec{r}) r^2 dr \quad (3.24)$$

Celle-ci ne dépend que de ρ_0 . Pour la charge :

$$\langle r^2 \rangle_c = \frac{1}{Z} \sum_i r_i^2 = \frac{1}{Z} \int \rho_m(\vec{r}) r^2 dr \quad (3.25)$$

Si $T = 0$, alors $\langle r^2 \rangle_c = \langle r^2 \rangle_m$.

Il est courant de considérer la distribution de FERMI comme densité $\rho(r)$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad (3.26)$$

où a est la diffusivité (≈ 0.5 fm) et R la portée. Pour une diffusivité nulle ($a = 0$), on trouve $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2$. Le volume est également proportionnel à A . Nous avons en effet (rouge)

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (3.27)$$

où $r_0 \approx 1.24$ fm.

3. NOTES!!

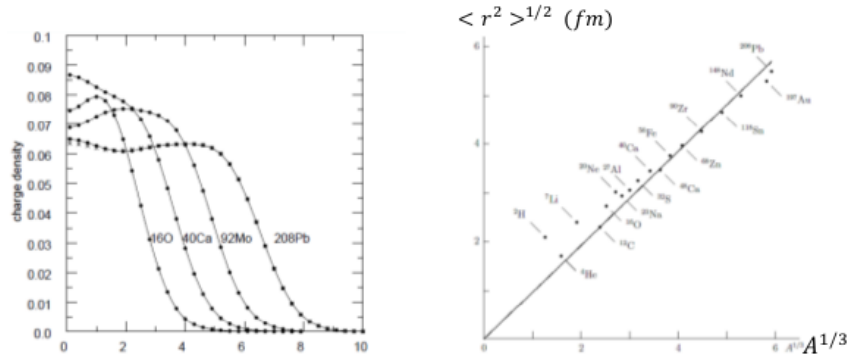


FIGURE 3.14

Ce faisait, la loi en $A^{1/3}$ est généralement bien vérifiée (voir graphique ci-dessus), seuls les noyaux exotiques à *halo* s'éloignent de cette systématique :

- ${}^6\text{He}$: $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2.50 \text{ fm}$, $r_0 A^{1/3} = 2.25 \text{ fm}$.
- ${}^7\text{Li}$: $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2.50 \text{ fm}$, $r_0 A^{1/3} = 2.25 \text{ fm}$.

Attardons-nous quelque peu sur le ${}^{11}\text{Li}$. Considérons les rayons expérimentaux pour différents types de Li et remarquons directement que le ${}^{10}\text{Li}$ n'existe pas, celui-ci se désintègre directement. Entre ${}^9\text{Li}$ et ${}^{11}\text{Li}$, l'écart est très important. Cette grande différence vient du fait que ${}^{11}\text{Li}$ est à la limite de la stabilité : l'énergie de liaison est toute petite et le rayon est donc grand. L'énergie de séparation de deux neutrons est également très petite, car les niveaux sont très proches. Il est possible de comprendre ça en suivant un raisonnement très qualitatif en supposant qu'il n'y a qu'un seul neutron à l'extérieur ? Il existe un potentiel $V(r)$ entre ces deux particules. Selon l'équation de SCHRÖDINGER

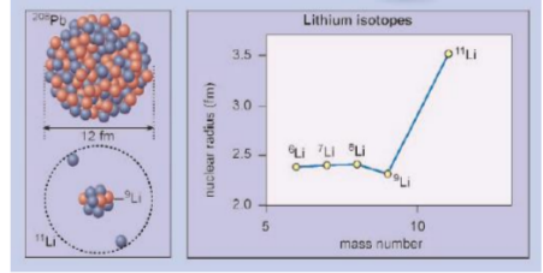


FIGURE 3.15

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\psi'' + V(r)\psi = E\psi \quad (3.28)$$

où $E = -\delta_m$, l'énergie de liaison. On ne connaît pas V , mais il est nul à grande distance. L'énergie étant négative, la solution sera exponentielle. En supprimant l'exponentielle divergente

$$\psi \Rightarrow \exp(-kr) \quad (3.29)$$

Faisons maintenant une grossière approche en supposant que ceci n'est pas valable à grande distance mais partout et calculons-en le rayon carré moyen

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int |\psi|^2 r^2 dr}{\int |\psi|^2 dr} \quad (3.30)$$

En utilisant notre ψ et par changement de variable, on voit que

$$\langle r^2 \rangle \propto 1/k^2 \quad (3.31)$$

Cette simple formule nous dit que quand l'énergie de liaison diminue, le rayon carré moyen (soit la taille du noyau) augmente. Ici le raisonnement tenu est très simple, mais qualitativement tout à fait valable.

3.7 Moments multipolaires

Ces moments sont intimement liés à la déformation du noyau et sont utilisés pour tester les modèles nucléaires⁴

3.7.1 Moment quadrupolaire électrique

Par définition ([e.fm²])

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} e \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^Z r_i^2 Y_2^0(\Omega_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.32)$$

Si $J < 1$, alors par le théorème de WIGNER-ECKART pour un OTI de rang 2, on en déduit que $Q = 0$. Pour l'interprétation, il faut savoir que

$$r^2 P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (2z^2 - x^2 - y^2) \quad (3.33)$$

Trois cas sont donc possibles

$Q > 0$ Noyau allongé (*prolate*)

$Q < 0$ Noyau aplati

$Q = 0$ Noyau sphérique

On peut ré-écrire l'élément de matrice dans le formalisme de l'isospin

$$\left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^Z r_i^2 Y_2^0(\Omega_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle = \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^A \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) r_i^2 Y_2^0(\Omega_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.34)$$

Par les propriétés du moment quadrupolaire, il est possible d'énoncer une définition alternative

$$\left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| \sum_{i=1}^Z r_i^2 Y_2^0(\Omega_i) \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int \rho_{c,2}(r) r^2 dr \quad (3.35)$$

Le moment quadrupolaire est donné par le terme $\lambda = 2$ de la densité de charge.

3.7.2 Moment dipolaire magnétique

Par définition

$$\mu = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left\langle \Psi^{JJ\pi} \left| M_0 \right| \Psi^{JJ\pi} \right\rangle \quad (3.36)$$

où $\vec{M} = \mu_N \sum_i (g_i \vec{l}_i + g_{si} \vec{s}_i)$ avec $\mu_N = \frac{e\hbar}{m_N c}$ le magnéton de BOHR, $g_s(n) = -3.82$, $g_s(p) = 5.58$ les rapports gyromagnétiques et $g_l(i) = \frac{1}{2} - t_{iz} = 0$ pour le neutron et 1 pour le proton. Si $J = 0$ alors $\mu = 0$ (\vec{M} est alors un opérateur de rang 1). Les moments quadrupolaire électrique et dipolaire magnétique sont utilisés pour tester les modèles nucléaires

4. Pas de notes sur cette dernière section, la précédente ok.

Chapitre 4

Décroissances nucléaires

4.1 Généralités

Passons en revue les différents processus de décroissances nucléaires

Radioactivité α Émission d'une particule ${}^4\text{He}$ ($Z = N = 2$). Celle-ci est limitée par la barrière coulombienne. Exemple = ${}^{238}\text{U}$ ($Z = 92$) \rightarrow ${}^{234}\text{Th}$ ($Z = 90$) + α .

Radioactivité β Émission d'un électron ou d'un positron (et d'un neutrino).

Radioactivité γ Résulte de l'interaction électromagnétique

Fission Analogue à la décroissance α (rare à cause de la barrière coulombienne)

Ces différentes décroissances possèdent deux caractéristiques ((très) variable en fonction du processus) : l'énergie de seuil Q (différence d'énergie entre les états initial et final) et la durée de vie.

On décroît la décroissance d'un échantillon de N éléments par le **taux de désintégration par unité de temps** λ ($[\text{s}^{-1}]$). Le nombre de désintégration durant un temps dt est donné par λdt et forcément, le nombre d'éléments qui disparaissent $dN : -\lambda N dt$. Après un calcul d'une complexité absolue, on en tire

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (4.1)$$

où N_0 est le nombre initial d'éléments. On définit le **demi-vie**

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (4.2)$$

Le **temps de vie moyen** s'écrit alors

$$\tau = \frac{\int t N(t) dt}{\int N(t) dt} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx 1.44 \times T_{1/2} \quad (4.3)$$

Il existe trois unités conventionnelles : le Curie (3.7×10^{10} désintégrations/s), le Rutherford (10^6 désintégrations/s) et le Becquerel (1 désintégration/s). Il est possible de généraliser ce que nous venons de voir au cas où il existe plusieurs voies de décroissances. En effet, un même noyau peut avoir plusieurs modes de décroissances avec des probabilités $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. La probabilité totale est donnée par $\lambda_T = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$ et la durée de vie par $\tau_T = \frac{1}{\lambda_T} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots$. On utilise parfois les rapports de branchement, sans dimension : λ_i / λ_T .

Les méthodes de datations étudient le passage d'un élément 1 à un élément 2. A l'instant t_0 : $N_1(t_0)$. A l'instant t_1 : $N_1(t_1) + N_2(t_1) = N_1(t_0)$ où $N_1(t_1) = N_1(t_0) \exp(-\lambda(t_1 - t_0))$. On en déduit

$$\frac{N_1(t_0)}{N_1(t_1)} = 1 + \frac{N_2(t_1)}{N_1(t_1)} = \exp(\lambda(t_1 - t_0)) \quad (4.4)$$

La mesure de N_2 et N_1 à l'instant t_1 permet de déduire t_0 . Actuellement on procède à un comptage précis des quantités par réaction nucléaire. En pratique ceci n'est pas valable pour des longues durées de vies (N_1 peut continuer à être formé) et on mesurera des rapports de nombres d'éléments.

4.2 Notion de largeur

Considérons une onde stationnaire, représentant un système restant indéfiniment dans le même état

$$\Psi(r, t) = \Psi(r) \exp\left(-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right) \Rightarrow |\Psi(r, t)|^2 = |\Psi(r)|^2 \quad (4.5)$$

où la fonction d'onde est donnée par le produit d'une partie spatiale et d'une phase dépendante de l'énergie.

S'il y a une décroissance, le nombre de particule va varier avec le temps. Si cette décroissance se fait avec une constante λ , la dépendance sera la suivante

$$|\Psi(r, t)|^2 = |\Psi(r, 0)|^2 \exp(-\lambda t) \quad (4.6)$$

Dès lors, la partie temporelle de notre fonction d'onde est modifiée

$$\Psi(r, t) = \Psi(r) \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \left(E_0 - \frac{i\lambda\hbar}{2}\right)\right) \quad (4.7)$$

ce qui forme un état non-stationnaire (état **résonant**). Cette modification vient du fait que l'énergie a été modifiée : tout se passe comme si l'énergie était complexe

$$W = E_0 - \frac{i\lambda\hbar}{2} \quad (4.8)$$

où la partie imaginaire reprend la dépendance λ et est donc liée au taux de décroissance. Si ce taux est très petit (cas réel) seul la partie réelle est à prendre en compte mais si λ est très grand, la partie imaginaire est à prendre en compte. En mécanique quantique, on utilise des énergies réelles. On exprime alors la superposition d'ondes stationnaires à énergie réelles

$$\exp\left(-\frac{it}{\hbar} \left(E_0 - \frac{i\lambda\hbar}{2}\right)\right) = \int A(E) \exp\left(-\frac{itE}{\hbar}\right) dE \quad (4.9)$$

Ceci permet de déterminer l'amplitude $A(E)$ par transformée de FOURIER inverse. On obtient alors

$$|A(E)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (4.10)$$

Sachant que la largeur à mi-hauteur vaut $\Gamma = \hbar\lambda = \frac{\hbar}{\tau}$, il est possible de recombinaison les deux pour obtenir une relation d'incertitude ressemblant à celle d'HEISENBERG : $\Gamma\tau = \hbar$. On trouve les états stables pour $\Gamma = 0, \tau = \infty, A(E) \propto \delta(E - E_0)$. Les états instables sont obtenus par superposition d'une infinité d'états stationnaires et ils sont caractérisés par une énergie E_0 et une largeur Γ .

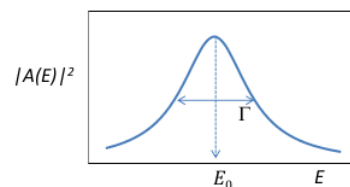


FIGURE 4.1 – Énergie complexe $W = E_0 - i\Gamma/2$. Résonance large : Γ grand, τ petit et inversement pour une étroite

4.3 Règle d'or de Fermi

La règle d'or de FERMİ permet de calculer la probabilité de transition entre un état initial i et un état final f lorsque l'on perturbe le système par un potentiel petit ¹. Supposons $H = H_0 + V$ où V est petit (perturbation) et responsable de la décroissance (stable si $V = 0$). On suppose également que les états propres de H_0 sont connus : $H_0 \Psi_n = E_n \Psi_n$. La fonction d'onde est solution de

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi \quad (4.11)$$

Posons $\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n a_n(t) \Psi_n(\vec{r}) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$. En développant ceci dans la base des états stationnaires, on peut en tirer un système d'équations de SCHRÖDINGER donnant les coefficients a_k (on recherche leurs évolutions dans le temps car ceux-ci donnent les probabilités de transition)

$$\frac{da_k}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n \langle \Psi_k | V | \Psi_n \rangle e^{\frac{i(E_k - E_n)t}{\hbar}} \quad (4.12)$$

Il s'agit d'un système d'équation linéaires qui dépend des énergies et des éléments de matrice du potentiel de perturbation. Si on le connaît, on peut en déduire les fonctions d'ondes et en calculer les éléments de matrice. On va donc procéder par itérations

$$\frac{da_k^{(p+1)}}{dt} \approx -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n^{(p)} \langle \Psi_k | V | \Psi_n \rangle e^{\frac{i(E_k - E_n)t}{\hbar}} \quad (4.13)$$

On utilisera comme ordre 0 ($p = 0$, condition initiale) $a_n^{(0)} = \delta_{ni}$.

Le calcul détaillé donne

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{|a_f|^2}{T} = \frac{1}{T} \frac{|V_{fi}|^2}{(E_f - E_i)^2} 4 \sin^2 \frac{(E_f - E_i)T}{2\hbar} \quad (4.14)$$

Lorsque T est grand, $E_f = E_i$ et on retrouve bien la conservation de l'énergie. Notons que E_i et E_f sont les énergies du système total. Dans une transition γ , E_i est l'état nucléaire initial alors que E_f est l'état nucléaire final et le photon.

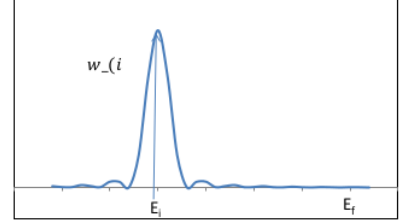


FIGURE 4.2 – On remarque de légères fluctuations

Certains noyaux ont une très grande densité d'états et d'autres une très petite. La probabilité de transition totale s'obtient en sommant sur tous les états finaux possibles. Comme dans un cas général on peut avoir quelque chose de continu, on utilisera le formalisme intégral ($dn = \rho(E_k) dE_k$)

$$w_{i \rightarrow f} = \int |w_{i \rightarrow k}|^2 \rho(E_k) dE_k \quad (4.15)$$

où l'état k est proche de l'état f , $\rho(E_k)$ est la densité d'état à E_k et $\rho(E_k) dE_k$ est le nombre d'états dans l'intervalle dE_k . On en déduit ²

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{4}{T} \int \frac{\sin^2 \frac{(E_k - E_i)T}{2\hbar}}{(E_k - E_i)^2} |V_{ki}|^2 \rho(E_k) dE_k \quad (4.16)$$

1. Le principe est très général et applicable aux transitions β et γ . Tous les calculs ne seront pas détaillés ici (assez long et horrible), mais un "juste milieu" est proposé afin de ne pas juste "plaquer" les formules comme elles viennent

2. Voir cours MÉCANIQUE QUANTIQUE I pour un calcul plus détaillé

Il s'agit du carré de la fonction *sinus cardinal* qui est dominante pour $x = 0$ et définie telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(x) dx = \pi$. Sachant ceci et en supposant que $V_{ki} \approx V_{fi}$ et que $\rho(E_k)$ varie peu autour de E_i , on peut en trouver un résultat final qui est la règle d'or de FERMİ

RÈGLE D'OR DE FERMİ (formule générale)

$$w_{i \rightarrow f} = \lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_i | V | \Psi_f \rangle|^2 \rho(E_i) \quad (4.17)$$

Terminons par un petit commentaire sur les ordres de grandeur et la "hiérarchie" : comme la probabilité de transition est liée à des éléments de matrice impliquant le potentiel, on s'attend à ce qu'elle respecte un certain "ordre". Les largeurs α sont en générales plus grande que les γ qui elles sont plus grandes que mes β . Cette hiérarchie est respectée dans les types de potentiels.

A partir de λ , on en déduit la durée de vie $T = 1/\lambda$ et la largeur $\Gamma = \hbar/T = \hbar\lambda$.

- Radioactivité α : $V = V_{nuc}$ ($V \ll H_0$, règle d'or **pas** valable pour α)
- Radioactivité β : $V = V_{faible}$
- Radioactivité γ : $V = V_{elec}$

En général, comme dit ci-dessus

$$\Gamma_\alpha > \Gamma_\gamma > \Gamma_\beta \quad (4.18)$$

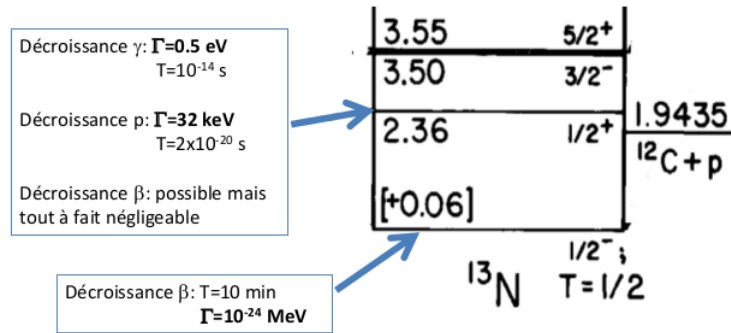


FIGURE 4.3 – Spectre du ^{13}N (13 protons et 6 neutrons). Le premier état excité a une énergie de 2.36 MeV. L'état fondamental a une masse plus petite que $^{12}\text{C} + p$, il s'agit donc d'une voie de désintégration possible.

Chapitre 5

Radioactivité α

5.1 Définitions et conservation de l'énergie

La radioactivité α est définie par la processus suivant

$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + \alpha \quad (5.1)$$

où X est le noyau mère, Y le noyau fille et α est un noyau ${}^4_2\text{He}$ ($Z = N = 2$). Supposons que le noyau X soit au repos et le noyau Y dans son état fondamental. Par conservation de l'énergie

$$T_Y + T_\alpha = Q_\alpha = (m_X - m_Y - m_\alpha)c^2 > 0 \quad (5.2)$$

Pour avoir radioactivité α , il faut donc que $m_X > m_Y + m_\alpha$. On peut en déduire les énergies cinétiques à partir de la conservation de l'impulsion $\vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = \vec{0}$. Nous avons $m_Y T_Y = m_\alpha T_\alpha$ et donc

$$T_\alpha = \left(1 - \frac{4}{A}\right) Q_\alpha, \quad T_Y = \frac{4}{A} Q_\alpha \quad (5.3)$$

Il s'agit d'un processus à deux corps impliquant que les particules α soient monocinétiques. L'énergie de la transition (énergie libérée) est donc essentiellement portée par la particule α . On appelle T_Y l'**énergie de recul** du à l'émission, qui est faible (ce qui est le cas en général) si A est grand.

5.2 Conditions de décroissance α

L'idée est toujours la même (et nous avons déjà énoncé cette condition ci-dessus) : la masse initiale doit être plus grande que la somme des deux masses ($m = Z * m_p + N * m_n - B$). Généralement, on parle d'énergie de liaison et non de masses

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= (m(A, Z) - m(A-4, Z-2) - m(4, 2))c^2 \\ &= B(4, 2) + B(A-4, Z-2) - B(A, Z) > 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Il faut donc que

$$B(4, 2) > A \frac{B(A, Z)}{A} - (A-4) \frac{B(A-4, Z-2)}{A-4} \quad (5.5)$$

En moyenne (la fameuse valeur de 7-8 MeV, il s'agit du rapport B/A moyen).

$$\left(\frac{B(A, Z)}{A}\right)_m < \frac{B(4, 2)}{4} \approx 7 \text{ MeV} \quad (5.6)$$

Ce rapport B/A moyen doit être inférieur à l'énergie de la particule α qui est extrêmement liée. En regardant la courbe B/A , la décroissance α ne peut se produire que pour des noyaux. Si on regarde la courbe, on pourrait même croire que ça n'arrive jamais mais il ne faut pas oublier que cette courbe correspond au cas stable : ça arrive donc en pratique. Pourquoi n'y a-t-il pas d'autres radioactivité (comme en deuton) ? Car la particule α est très liée (B/A pour le deuton est de 1.1 MeV) et peut facilement se faire éjectée.

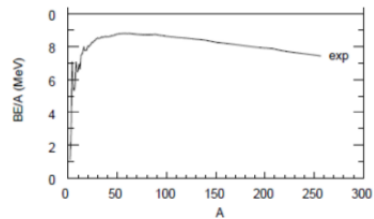


FIGURE 5.1

5.3 Durée de vie - effet tunnel

Il n'est pas possible d'utiliser la règle d'or de FERMI, le potentiel n'étant pas petit. On va supposer une décroissance $X \rightarrow Y + \alpha$ où la formation de la particule α se fait à la surface.

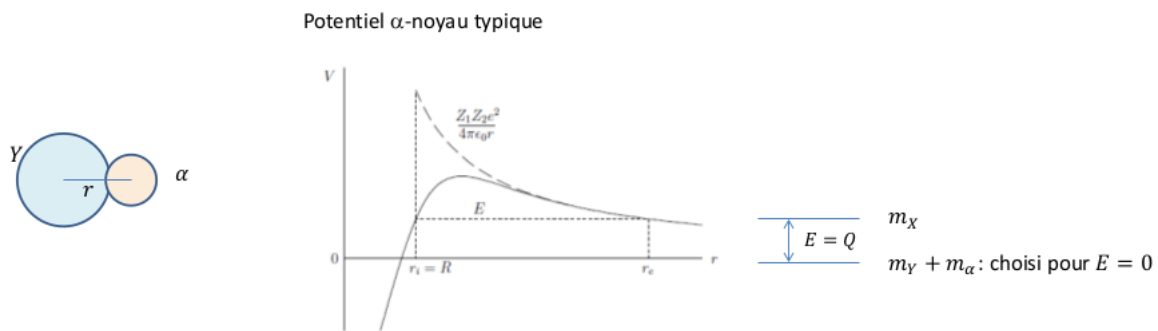


FIGURE 5.2

Le potentiel est attractif à faible distance (nucléaire) et répulsif à longue distance (Coulomb) : il s'agit des deux cas extrêmes qui sont "relié" par la *barrière de potentiel*. Cette barrière de potentiel doit être franchie pour avoir émission d'une particule α mais ceci ne peut se faire que par effet tunnel (impossible donc dans un cas classique). Si le seuil est trop petit, la probabilité peut être suffisamment petite pour que la durée de vie soit énorme : il est nécessaire de calculer le **coefficient de transmission** qui sera proportionnel à la probabilité de désintégration.

Le calcul de ce coefficient se fait grâce à l'approximation WKB : on résout l'approximation $u''(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)u(r) = 0$ en posant $u(r) = \exp(iS(r))$ ($S(r)$ varie lentement) et on en déduit $S'(r)^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(r))$. En remplaçant dans l'équation de SCHRÖDINGER, on en déduit (si $E < V(r)$)

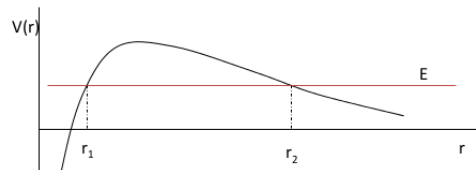


FIGURE 5.3

$$u(r) = \exp \left(- \int_0^r \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)} dr \right) \quad (5.7)$$

Ce qui nous intéresse n'est pas l'amplitude de la fonction d'onde mais le coefficient de transmission T . Celui-ci n'est rien d'autre que la probabilité d'être en r_2 sur la probabilité d'être en r_1

$$T = \left| \frac{u(r_2)}{u(r_1)} \right|^2 = \exp \left(-2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - E)} dr \right) \quad (5.8)$$

En remplaçant l'expression de $V(r)$, il est souvent impossible d'obtenir une solution analytique mais bien numérique (simple calcul d'intégral).

Pour un potentiel purement coulombien ($m = 0$) : $r_1 = R, r_2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$ avec $Z_2 = 2, Z_1 = Z - 2$, on trouve

$$T \approx \exp(-2\pi\eta) \quad (5.9)$$

où $\eta = Z_1 Z_2 \alpha (c/v) : Z_1 Z_2 \alpha \sqrt{(2\mu c^2)/E}$ est le paramètre de SOMMERFELD (où $\alpha = 1/137$). Si l'énergie diminue, η augmente et donc T diminue. Cette propriété se retrouve dans la durée de vie (τ augmente lorsque E diminue : loi de GEIGER-NUTTALL) La durée de vie $\tau \propto 1/T$ vaut alors

$$\log \tau = C_1 + C_2 \frac{Z - 2}{\sqrt{E}} \quad (5.10)$$

où $C_2 = 2\pi\alpha\sqrt{2\mu c^2}$ (il est possible de retrouver C_1 à l'aide de coefficients). Il y a parfois de très grandes variations, essentiellement parce que notre modèle est très approximatif : il ne prend pas en compte la formation de particule α dans le noyau mais le résultat est déjà pas mal.

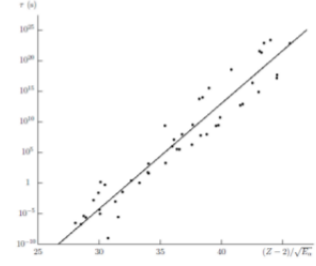


FIGURE 5.4

5.4 Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique est défini $\vec{J}_X = \vec{J}_Y + \vec{J}_\alpha + l$ tandis que la parité $\pi_X = \pi_Y \pi_\alpha (-1)^l$. Pour une particule $\alpha : J_\alpha = 0, \pi_\alpha = +1$. Comme en général $J_X = 0, \pi_X = +1$, il faut que $J_Y = l$.

Lorsque l augmente, une barrière centrifuge apparaît. La probabilité de désintégration diminue et il y a un double effet du moment cinétique (Q_α, l)

$$Q_\alpha = (m_X - m_{Y^*} - m_\alpha)c^2 \quad (5.11)$$

Le coefficient de transmission T_l/T_0 pour $Z = 88, l = 2$ vaut 0.37, $l = 4$ donne 0.037 et $l = 6$ donne 0.001, la tendance est bien vérifiée.

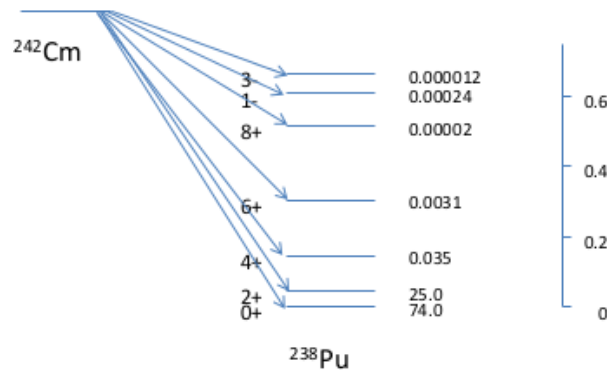


FIGURE 5.5 – Schéma de désintégration vers le fondamental mais avec une série de niveau toujours en dessous du seuil. La transition vers un état excité à deux effets : le zéro des énergies doit être remonté (diminution du seuil, cause une diminution de la probabilité de désintégration) et l'effet centrifuge avec l (une augmentation de l augmente la barrière) : probabilité de désintégration vers d'autres états beaucoup plus petits.

Chapitre 6

Radioactivité β

6.1 Définitions

On s'intéresse ici à ce qui se passe dans le noyau, c'est-à-dire que le nombre de nucléons ne sera pas modifié. La différence de masse $m_{neutron} - m_{proton} = 1.3 \text{ MeV}$ implique que le proton instable mais pas le neutron. La radioactivité β est un processus pù

- Un neutron est converti en proton : $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
- Un proton est converti en neutron : $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$

Il faut qu'il y ai conservation du nombre leptonique ($0=0+1-1$), du moment cinétique et de l'énergie (le spectre des électrons est continu). Or, ceci n'était pas vrai si un neutron se changeait "juste" en proton ou inversement. C'est pour ça que PAULI a émis l'hypothèse de l'existence du *neutrino* en 1931, une particule de spin 1/2 (fermion) et de masse presque nulle interagissant peu avec la matière (si peu que la détection n'a été rendue possible qu'en 1950).

Il y a d'autres processus lié à la radioactivité β : la capture électronique ($p + e^- \rightarrow n + \nu$), la capture positronique ($n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}$) (pas observée) et l'émission de leptons lourds (μ, τ) mais celle-ci ne se déroule pas dans les noyaux (et on n'en parlera pas, cf. le nom du cours).

6.2 Transition β dans les noyaux

Ces transitions ne modifient donc pas le nombre total de nucléons. Elle se manifeste (dans ce cours) sous trois aspect

Transition β^- Un neutron est transformé en proton avec émission (conservation de la charge) d'un électron et d'un anti-neutrino (conservation du nombre leptonique et de l'énergie. Si on émet une particule il faut également une antiparticule). Ceci concerne les isotopes *en-dessous* de la vallée de stabilité qui ont un excès de neutrons.

$${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z+1}^A Y_{N-1} + e^- + \bar{\nu} \quad (6.1)$$

Transition β^+ Concerne les isotopes *au-dessus* de la vallée de stabilité, ceux-ci ayant un excédent de proton. Par β^+ , on revient vers celle-ci (parabole de masse)

$${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z-1}^A Y_{N+1} + e^+ + \nu \quad (6.2)$$

Capture électronique Phénomène allant en parallèle avec β^+ car ils vont souvent ensemble. La différence est que la capture donne un spectre **monoénergétique** (comme α) car il n'y

a que deux particules (s'il y en a trois, la répartition de l'énergie entre deux donne un continuum).

$${}_Z^AX_N + e^- \rightarrow A_{Z-1}Y_{N+1}^* + \nu \quad (6.3)$$

6.2.1 A. Bilans nucléaires

Nous allons regarder le bilan d'énergie qui sera ici plus compliqué car il faut tenir compte de la différence de masse du neutron et du proton, mais également que leur nombre change. Notons que les bilans sont ici nucléaires (le nuage électronique est négligé).

Transition β^-

Partons d'un état d'initiale avec une certaine masse exprimée avec l'énergie de liaison B

$$m(A, Z) = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B(A, Z) \quad (6.4)$$

Il faut tenir compte des énergies cinétiques pour l'état final

$$m(A, Z+1) + m_e c^2 + T_e + T_\nu = (Z+1)m_p c^2 + (N-1)m_n c^2 - B(A, Z+1) + m_e c^2 + T_e + T_\nu \quad (6.5)$$

Par conservation de l'énergie

$$T_e + T_\nu = Q_{\beta^-}^N = B(A, Z+1) - B(A, Z) + \underbrace{(m_n - m_p - m_e)c^2}_{0.782 \text{ MeV}} \quad (6.6)$$

La quantité $Q_{\beta^-}^N$ (seuil) doit être positive afin que la transition soit possible. L'électron et le neutrino se partagent l'énergie de seuil donnant un spectre continu (trois corps).

Transition β^+

En suivant un résultat analogue, on trouve pour le seuil

$$Q_{\beta^+}^N = B(A, Z-1) - B(A, Z) - \underbrace{(m_n - m_p - m_e)c^2}_{1.804 \text{ MeV}} \quad (6.7)$$

La différence vient du fait que neutron et proton n'ont pas exactement la même masse.

6.2.2 Bilans atomiques

Prenons cette fois-ci en compte les électrons.

Transition β^-

Dans l'état initial, l'atome est neutre : Z protons, N neutrons et Z électrons formant un cortège électronique. L'état final est un ion positif : $Z+1$ protons, $N-1$ neutrons et $Z+1$ électrons. Le seuil atomique est donné par

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-}^a &= M(A, Z)c^2 - [M^*(A, Z+1)c^2 + m_e c^2] \\ &\approx M(A, Z)c^2 + M(A, Z+1)c^2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

où nous avons négligé l'énergie d'ionisation de l'électron.

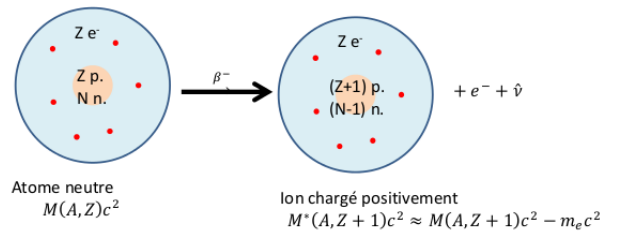


FIGURE 6.1

Comparons les deux seuils (atomique et nucléaire)

$$Q_{\beta^-}^a \approx M(A, Z)c^2 - M(A, Z+1)c^2, \quad Q_{\beta^-}^N = m(A, Z) - m(A, Z+1) - m_e c^2 \quad (6.9)$$

On compare avec le seuil nucléaire $M(A, Z)c^2 = m(A, Z) + Zm_e + B_e$. Dès lors, si les énergies de liaison B_e sont proches dans les états initial et final, nous avons que $Q_{\beta^-}^a \approx Q_{\beta^-}^N$. Ceci n'est pas toujours vrai comme le montre le ^{187}Re (voir slide 78).

Transition β^-

Les signes changent mais l'idée est la même. Dans l'état initial, l'atome est neutre : Z protons, N neutrons et Z électrons formant un cortège électronique. L'état final est un ion négatif : $Z-1$ protons, $N+1$ neutrons et Z électrons. Le seuil atomique est donné par

$$\begin{aligned} Q_{\beta^+}^a &= M(A, Z)c^2 - [M^*(A, Z-1)c^2 + m_e c^2] \\ &\approx M(A, Z)c^2 + M(A, Z-1)c^2 - 2m_e c^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

où nous avons négligé l'énergie d'ionisation de l'électron.

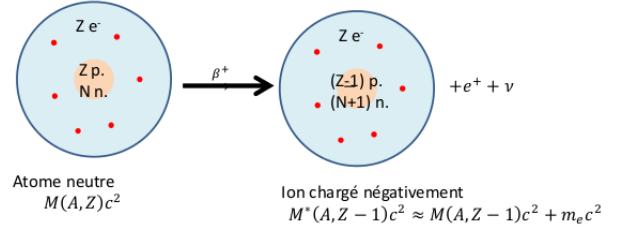


FIGURE 6.2

Capture électronique

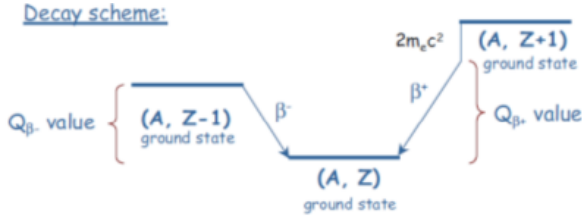
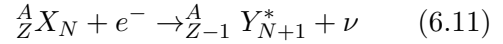


FIGURE 6.3 – Parabole de masse (gauche β^- , droite β^+). Le seuil Q_{β^+} n'est pas simplement la différence de masse mais celle différence soustraite de $2m_e c^2$. Cette compétition ne concerne que β^+ . Le seuil différent implique que certaines transitions ne sont que de type CE.

La capture électronique est un phénomène qui rentre en compétition avec β^+ où un électron du cortège électronique est capturé pour former un noyau dans lequel un proton est transformé en neutron.



où le cortège électronique est excité. Ici les neutrinos sont monoénergétique (ce qui n'est **pas** le cas pour la désintégration β^\pm). Ce phénomène est par contre impossible pour un atome complètement isolé. Si cela va "ensemble" avec β^+ , c'est parce que le

même noyau est produit à partir du même noyau initial. La différence importante, ce sont les seuils (différence de masses avec une petite correction Δ_{el} souvent négligeable) qui diffèrent de $2m_e c^2$. En effet, le bilan final donne

$$Q_{CE} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z-1)c^2 - \Delta_{el} \approx Q_{\beta^+}^a + 2m_e c^2 \quad (6.12)$$

L'électron final fait donc partie du cortège électronique de Δ_{el} est l'énergie d'excitation de l'atome Y (proportionnel à l'énergie de liaison de l'électron capturé). Il y a formation d'un "trou" dans la couche électronique de Y causant une réorganisation du cortège électronique.

Considérons le spectre des électrons. Si on néglige l'énergie de recul (l'énergie cinétique du noyau fille Y), pour β^\pm nous avons

$$Q_\beta = T_e + T_\nu \quad (6.13)$$

L'électron et le neutrino se partagent l'énergie libérée ce qui fait que l'énergie de l'électron varie de façon continue de 0 à Q_β . L'énergie totale libérée vaut donc $E = m_e + Q_\beta$. Pour la capture électronique, le spectre des neutrinos est monoénergétique $Q_{CE} = T_\nu$.

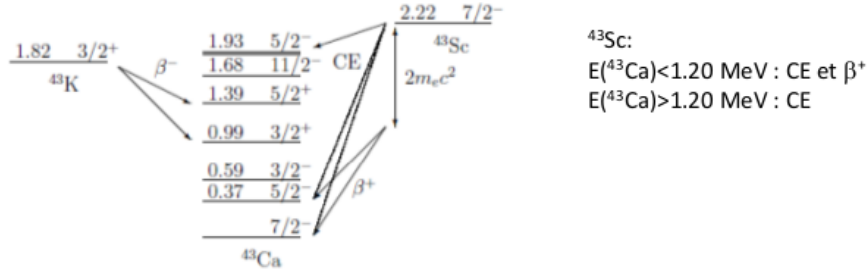


FIGURE 6.4 – Comme pour α , il y a d’autres transitions que vers le fondamental pour autant que les seuils soient respectés. Il y a compétition β^+/CE mais la valeur de $2m_e c^2$ fait que l’on peut avoir du β^+ seulement en dessous de ce seuil et au dessus seulement de la capture électronique

6.3 Théorie de Fermi

6.3.1 Généralités

Cette théorie a été établie (de façon incomplète) en 1934 en se basant sur l’analogie avec l’émission d’un photon. Afin d’être précis, il y a nécessité de faire des calculs relativistes ($m_\nu \approx 0, m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV}$). La règle d’or de FERMI permet d’estimer la probabilité de transition d’un état vers un autre

$$\frac{dW}{dE} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E) \quad (6.14)$$

où $\rho(E) = \frac{dN}{dE_T}$ est la densité de niveaux à l’énergie $E_T = E_e + E_\nu$, $d\rho_\alpha(E) : \frac{(4\pi)^2}{(\hbar c)^2} (Q_\beta - T_e)^2 k_e (T_e + m_e c^2) dT_e$ et V_{fi} est l’élément de matrice de la transition β que nous allons maintenant approfondir.

Élément de matrice de transition V_{fi}

Celui-ci est défini par

$$V_{fi} \equiv \langle \Psi_f^N \Psi_e | G_F O_\beta | \Psi_i^N \Psi_\nu \rangle \quad (6.15)$$

où O_β est un opération de transition sans dimension et G_F la constante de couplage de désintégration β (ou *constante de Fermi*). Elle joue un rôle analogue à e^2 pour l’interaction électromagnétique (dimension $E \times L^3$). Elle est donnée par

$$G_F = m_e c^2 \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 G_\beta \quad (6.16)$$

où $G_\beta = 3.002 \times 10^{-12}$. On retrouve également quatre fonctions d’ondes

- Ψ_i^N , la fonction d’onde initiale nucléaire
- Ψ_f^N , la fonction d’onde finale nucléaire
- Ψ_ν , la fonction d’onde du neutrino (selon la théorie des champ, l’apparition d’une anti-particule entraîne la disparition d’une particule)
- Ψ_e , la fonction d’onde de l’électron

Pour rendre son traitement plus simple, on va la factoriser en une partie nucléaire et une partie leptonique

$$V_{fi} \approx G_F \langle \Psi_f^N | O_\beta^N | \Psi_i^N \rangle \langle \Psi_e | O_\beta^L | \Psi_\nu \rangle \quad (6.17)$$

Pour la partie nucléaire, $M_{fi} = \langle \Psi_f^N | O_\beta^N | \Psi_i^N \rangle$ doit être calculé à partir de modèles nucléaires.

La partie leptonique "provient" de l'intérieur du noyau. Comme le noyau est "petit" par rapport aux longueurs d'onde de l'électron et du neutrino (soit \vec{r} , la coordonnée commune de l'électron et du neutrino), on va pouvoir faire quelques approximations. La première que que le neutrino n'interagit pas

$$\Psi_\nu \approx e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}} \approx 1 \quad (6.18)$$

Un raisonnement similaire peut être tenu pour l'électron, mais celui-ci interagit avec les protons. Il faut donc tenir compte de la fonction d'onde au voisinage de zéro (dépend de la charge du noyau)

$$\Psi_\nu \approx e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \Psi_e(0) \approx \Psi_e(0) \quad (6.19)$$

Évaluons alors l'élément de matrice (via FERMI)

$$|\langle \Psi_e | O_\beta^L | \Psi_\nu \rangle|^2 \propto |\Psi_e(0)|^2 |\Psi_\nu(0)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^6} F(\pm Z, p_e) \quad (6.20)$$

où l'on voit apparaître la fonction de FERMI, qui dépend de l'énergie (par le paramètre de SOMMERFELD, η). Notons la normalisation de l'onde plane

$$\langle e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} | e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (6.21)$$

Fonction de Fermi

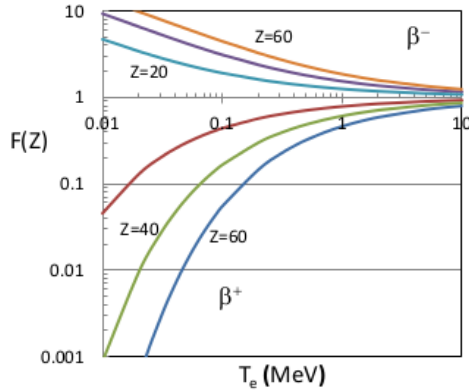


FIGURE 6.5

Approximations:

- non-relativiste
- noyau ponctuel

T grand: $\eta \rightarrow 0, F \rightarrow 1$

T petit: grande différence $\eta > 0$ et $\eta < 0$

- $\eta > 0 : F \rightarrow \exp(-2\pi\eta)$
- $\eta < 0 : F \rightarrow |2\pi\eta|$

Dans un cadre non-relativiste, celle-ci s'écrit

$$F(\pm Z, p_e) : |\Psi_e(0)|^2 = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1} \quad (6.22)$$

Celle-ci est toujours positive et dépend fortement de Z . On y retrouve le *paramètre de Sommerfeld* qui "mesure" les effets coulombiens

$$\eta = \mp \frac{(Z \pm 1)e^2}{\hbar\nu} \quad (6.23)$$

Pour l'émission β^- , $\eta < 0$ et $F > 1$, les électrons et le noyau s'attirent alors que pour l'émission β^+ , $\eta > 0$ et $F < 1$, les positrons et le noyau se repoussent.

Probabilité de transition totale

En regroupant tous les différents termes

$$\frac{dW}{dE} = \frac{dW}{dT_e} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{1}{\hbar(m_e c^2)^4} G_\beta^2 c p_e (Q_\beta - T_e)^2 (T_e + m_e c^2) F(\pm Z, p_e) |M_{fi}|^2 \quad (6.24)$$

Nous avons bien une factorisation entre une partie purement nucléaire (via M_{fi}) et une partie électronique (la fonction de Fermi dépend à la fois des propriétés électronique et du noyau et le reste est purement électronique). Il existe une relation entre T_e et p_e :

$$E_e = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2} = T_e + m_e c^2 \quad (6.25)$$

L'expérimentateur va mesurer dW/dE . Selon β^\pm , FERMI va réduire ou augmenter le spectre ce qui va causer une différence assez forte entre le spectre β^+ et le β^- . En effet β^- est attiré par le noyau fille et β^+ repoussé ($T_e = 0, F$ très petite). Les comportements asymptotiques pour $T_e = 0$ sont

$$\beta^+ : F(\pm Z, p_e) \rightarrow 0, \quad \beta^- : F(\pm Z, p_e) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{T_e}} \quad (6.26)$$

Notons que dW/dE est non nul pour $T_e = 0$. Comme annoncé ci-dessus, le spectre est continu pour des énergies entre 0 et Q_β . La durée de vie peut s'obtenir par intégration sur toutes les énergies cinétiques tandis que la probabilité de transition totale est donnée par l'intégrale sur les énergies : $W = dW/dT_e dT_e$ où M_{fi} n'interviendra pas dans son calcul, étant un terme purement nucléaire.

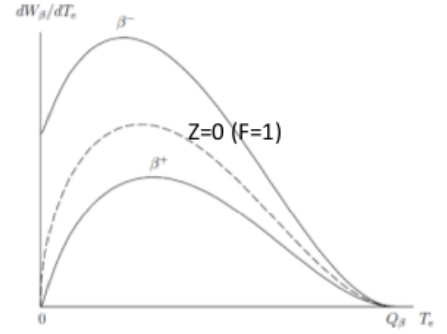


FIGURE 6.6

Élément de matrice nucléaire M_{fi}

Celui-ci est défini par

$$|M_{fi}|^2 = B(F) + \lambda^2 B(GT) \quad (6.27)$$

On y retrouve la probabilité de transition réduite (elle même défini par deux opérateurs définissant les transitions β)

$$B(\sigma) = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \left| \langle \Psi^{J_f \pi_f} | O(\sigma) | \Psi^{J_i \pi_i} \rangle \right|^2 \quad (6.28)$$

où $\Psi^{J_i \pi_i}$ sont les fonctions d'ondes du noyau dans l'état initial/final. On retrouve aussi l'**opérateur de Fermi** $O(F)$ (à admettre)

$$O(F) = \sum_{i=1}^A t_{i,\pm} = T_\pm \quad (6.29)$$

Il s'agit d'un OTI de rang 0 dans l'espace des spin et de rang 1 dans l'espace des isospins. Il ne dépend pas de J mais seulement de l'isospin : il ne change pas par rapport au spin du noyau.

On trouve de même l'**opérateur de Gamow-Teller** $O(GT)$

$$O(GT) = \sum_{i=1}^A \sigma_i t_{i,\pm} \quad (6.30)$$

Qui est un OTI de rang 1 dans l'espace des spin et des isospin.

Les signes \pm ci dessus signifient : + pour la radioactivité β^+ (t_{i+} change un proton en un neutron) et - pour la radioactivité β^- (t_{i-} change un neutron en un proton).

6.4 Règles de sélection

6.4.1 Transition de Fermi

L'opérateur ne dépend pas du spin, il n'y a pas besoin de WIGNER-ECKAERT. Le spin initial doit être le même que le spin final : $J_i = J_f$. Il ne dépend pas non plus de la parité, il doit être invariant par réflexion (pair) : $\pi_i = \pi_f$. Il s'agit par contre d'un OTI de rang 1 dans l'espace des isospin. Regardons l'élément de matrice :

$$\langle T' M_T' | T_{\pm} | T M_T \rangle = \sqrt{(T \mp M_T)(T \pm M_T + 1)} \delta_{TT'} \delta(M_T' M_{T \pm 1}) \quad (6.31)$$

Il faut que les T soient identiques. De plus, l'opérateur T_{\pm} change la projection (augmente ou diminue) mais pas la valeur du moment cinétique (isospin). En résumé

$$J_i = J_f, \quad \pi_i = \pi_f, \quad T_i = T_f \quad (6.32)$$

6.4.2 Transition de Gamow-Teller

Cet opérateur est invariant par réflexion. Il s'agit d'un OTI de rang 1 dans l'espace des spin mais aussi dans celui des isospin. Il faut que

$$|J_i - J_f| \leq 1 \leq J_i + J_f, \quad \pi_i = \pi_f, \quad |T_i - T_f| \leq 1 \leq T_i + T_f \quad (6.33)$$

Afin d'avoir des transition de FERMİ et GAMOW-TELLER, il faut que

$$J_i = J_f \neq 0, \quad \pi_i = \pi_f, \quad T_i = T_f \neq 0 \quad (6.34)$$

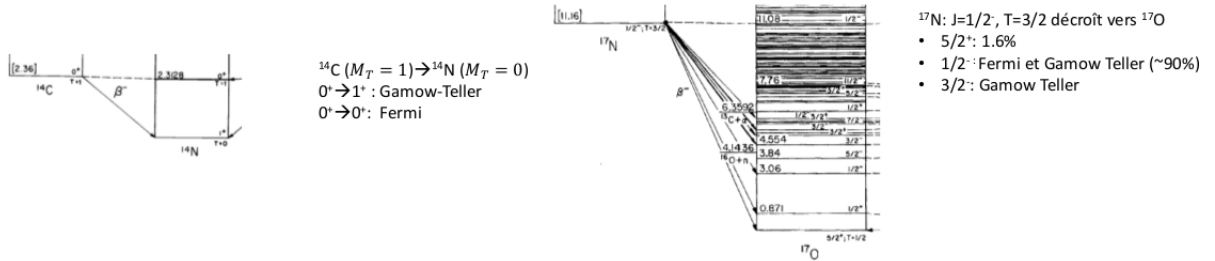


FIGURE 6.7 – A gauche; deux transitions sont autorisée (soit purement l'une, soit purement l'autre). A droite; plus compliqué à cause d'une grande densité de niveau.

6.4.3 Transition interdite

Si les deux conditions ne sont pas satisfaites, il faut reconsidérer les précédentes approximations. Pour se faire, partons de l'onde plane de l'électron

$$e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \approx \underbrace{1}_1 + \underbrace{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}}_2 + \underbrace{\frac{1}{2}(i\vec{k}_e \cdot \vec{r})^2}_3 + \dots \quad (6.35)$$

1. Transition permise
2. Transition une fois interdite : $\pi_i \pi_f = -1, \Delta J = 0, \pm 1, \pm 2$

3. Transition deux fois interdite : $\pi_i \pi_f = +1, \Delta J = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

Si les deux premiers sont interdits, il faut prendre le troisième et ainsi de suite. Chaque terme additionnel est de plus en plus petit mais il faut en tenir compte car les dominants ne contribuent pas. Il existe un cas extrêmement pathologique du $^{115}_{49}\text{In}(9/2^+) \rightarrow ^{115}_{50}\text{Sn}(1/2^+)$ où les quatre premiers termes sont interdits. La probabilité de transition est donc très faible ce qui lui confère une longue durée de vie (4.4×10^{14} ans).

6.5 Probabilité de transition intégrée

L'intégration de

$$\frac{dW}{dE} = \frac{dW}{dT_e} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{1}{\hbar(m_e c^2)^4} G_\beta^2 c p_e (Q_\beta - T_e)^2 (T_e + m_e c^2) F(\pm Z, p_e) |M_{fi}|^2 \quad (6.36)$$

sur toutes les énergies électroniques donne la probabilité de transition intégrée. Celle-ci vaut

$$W = \frac{1}{2\pi^3} \frac{m_e c^2}{\hbar} G_\beta^2 f(Q_\beta, \pm Z) |M_{fi}|^2 \quad (6.37)$$

$$\text{où } f(Q_\beta, \pm Z) = \frac{c}{(m_e c^2)^5} \int_0^{Q_\beta} p_e (Q_\beta - T_e)^2 (T_e + m_e c^2) F(\pm Z, p_e) dT_e.$$

Il s'agit de l'*intégrale de Fermi* (sans dimension). La dépendance en Q_β est forte car le seuil est petit : peu d'énergie pour l'électron et le neutrino. On parle d'*espace de phase*, soit l'ensemble des états dans lequel on peut trouver le neutrino et l'électron. Forcément si Q_β est petit, l'espace des phases est petit et la probabilité de transition est petite (à gauche). Les durées de vie sont donc très variables et il y a une différences entre β^+ et β^- .

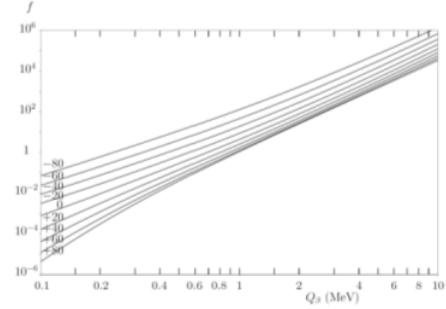


FIGURE 6.8

Sachant que la demi-vie est donnée par $t_{1/2} = \ln 2 / W$, on peut en déduire la valeur de ft

$$ft_{1/2} = \ln 2 \frac{2\pi^3 \hbar}{m_e c^2 G_\beta^2 |M_{fi}|^2} \quad (6.38)$$

Le temps de demi-vie à les dimension d'un temps, il est indépendant de Q_β et ne dépend que de l'élément de matrice nucléaire M_{fi} . Il se peut que $t_{1/2}$ varie de plusieurs ordre de grandeur. Si $\log_{10} ft_{1/2}$ vaut 3-6 la transition est permise, si 6-9 une fois interdite et si elle vaut 22.5 elle est quatre fois interdites.

Etudions le cas particulier d'une **transition entre deux états d'un même multiplet d'isospin**. Les parties spatiales doivent être similaires (M_{fi} maximum, transitions *superpermises*). Considérons le cas très simple d'une transition β^+ où $J_i = 0^+, T_i = 1, M_{T_i} = -1, J_f = 0^+, T_f = 1, M_{T_f} = 0$. Les transition de GAMOW-TELLER sont interdites ($J_i = J_f = 0$), seulement FERMI. L'élément de matrice nucléaire $|M_{fi}|^2 \approx 2$ de sorte que $\log_1 0(ft) \approx 3$ (ordre de 3000s).

Exemple $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}$

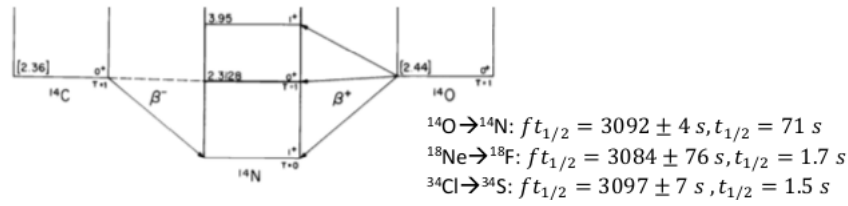


FIGURE 6.9 – Trois cas différent, trois état avec un même multiplet : les valeurs de $ft_{1/2}$ sont comparables. Les durées de vies sont relativement différentes mais ça c'est à cause de la fonction f , différentes dans chacun des cas.

6.6 Capture électronique

La capture électronique est un phénomène qui rentre en compétition avec la radioactivité β^+ car elle produit un noyau dont la charge est diminuée d'une unité

$$^A_Z X_N + e^- \rightarrow ^A_{Z-1} Y_{N+1}^* + \nu \quad (6.39)$$

où Y^* est le noyau fille dans un état excité, causant une réorganisation du cortège électronique. Le seuil de la capture électronique s'obtient - comme toujours - par bilan. Celui-ci vaut (on se souvient de la différence avec β^+ de $2m_e c^2$)

$$Q_{CE} = [M(Z, A) - M(Z - 1, A)]c^2 - B_e \approx Q_{\beta^+} + 2m_e c^2 \quad (6.40)$$

Il y a cependant des différences avec l'émission β^+ (charge Z diminuée de 1) :

- Neutrinos monoénergétiques
- Électron lié ((fait partie du cortège électronique)
- Différence dans les densités d'états)

En effet, les densités d'états changent et il faut en tenir compte

$$\rho = \frac{d\vec{k}}{dE} = k^2 d\Omega \frac{dk}{dE} \quad (6.41)$$

Dans un cas isotrope, on retrouve $\rho(E) = \frac{4\pi E_\nu^2}{(\hbar c)^3}$. Notons aussi la fonction d'onde électronique

$$\Psi_e(0) = \pi^{-1/2} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \quad (6.42)$$

où $n = 1$ (orbite) et $a_0 = \hbar^2 / (m_e e^2)$ est le rayon de BOHR.

On peut en déduire la probabilité de capture électronique

$$W_{CE} = \frac{1}{\pi^2} (\alpha Z)^3 \frac{E_\nu^2}{\hbar m_e c^2} G_\beta^2 |M_{fi}|^2 \quad (6.43)$$

On observe que Q_{CE} est de l'ordre de E_ν , la dépendance en Q_{CE} est donc faible au contraire de la radioactivité β^1 .

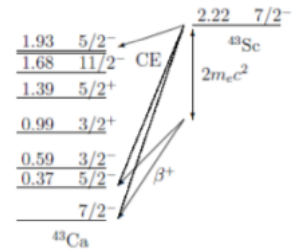


FIGURE 6.10 – Niveau au dessus de $2m_e c^2$, seulement CE. Cas en dessous : compétition.

1. Pas compris, quelqu'un peut expliciter ?

Étant donné qu'il y a deux phénomènes possibles, il faut les comparer. On définit alors le *rapport de branchement* défini comme le rapport entre la probabilité d'avoir β^+ sur la probabilité d'avoir une capture électronique. Ce rapport est assez facile à calculer : les $|M_{fi}|$ se simplifie, on connaît les masses, seuils, ... Deux cas sont possibles :

1. Si $Q_{CE} < 2m_e c^2$

$$\frac{W_{\beta^+}}{W_{CE}} = 0 \quad (6.44)$$

Puisque $Q_{CE} = Q_{\beta^+} + 2m_e c^2$, seule la capture électronique est possible

2. Si $Q_{CE} > 2m_e c^2$

$$\frac{W_{\beta^+}}{W_{CE}} = \frac{f(Q_{\beta^+}, Z)}{2\pi(\alpha Z)^3} \left(\frac{m_e c^2}{Q_{CE}} \right)^2 \quad (6.45)$$

Il y a compétition entre la capture électronique et β^+ sauf si $f(Q_{\beta^+}, Z)$ est petit (et donc Q_{β^+} petit). Souvent ce rapport est grand, β^+ est donc favorisé. Mais il ne faut donc pas oublier le cas où l'intégrale de FERMI est petite causant un seuil petit : un petit seuil favorise la compétition.

6.7 Autres processus

Il en existe principalement deux

1. Capture de neutrinos
2. Radioactivité β double

Intéressons-nous aux deuxième cas à travers deux exemples.

TRANSITION β INTERDITE

La transition β pour le ^{130}Te est interdite (probabilité de 0%) mais pas la transition 2β (probabilité de 100%). Ceci s'explique par le fait que la transition (pour $A = 130$) du Te vers I est interdite (masse plus grande). La seule façon de "redescendre la parabole" est d'aller vers le Xe, ce qui n'est possible que par émission $\beta\beta$ (désintégration β double). Le temps de demi-vie est cependant de 5×10^{23} ans.

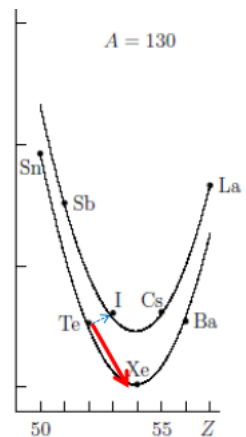
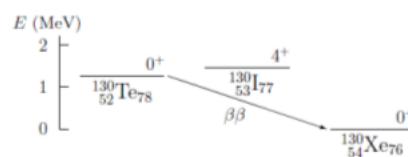


FIGURE 6.11

TRANSITION β DÉFAVORISÉE Soit le ^{48}Ca . La transition β n'est pas totalement absente mais c'est la β double qui fait tout le travail. La durée de vie bien plus grande que l'âge de l'Univers. On l'utilise pour obtenir des éléments superlourd (projectile pour crée ces éléments). Voir *slide 99*, pas la place pour mettre l'image ici *pfpfpfpf*.

Chapitre 7

Radioactivité γ

7.1 Généralités

La **radioactivité** γ résulte de la transition d'un état d'énergie initial E_i vers un état final d'énergie E_f avec émission d'un photon. Souvent, l'état final est le fondamental mais ce n'est pas toujours le cas. Comme les γ sont produit par transition électromagnétique, la théorie de FERMI sera d'application.

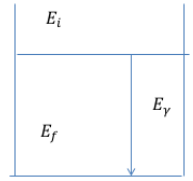


FIGURE 7.1

Une fois n'est pas coutume, partons de la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Initialement, nous avons un noyau d'énergie E_i au repos ($\vec{p}_i = \vec{0}$). Finalement nous avons un noyau d'énergie E_f , d'impulsion \vec{p}_r (impulsion de recul) et un photon d'énergie E_γ d'impulsion \vec{p}_γ . Par conservation de l'énergie

$$E_i = E_f + E_r + E_\gamma \quad (7.1)$$

où E_r est l'énergie de recul. Par conservation de l'impulsion

$$\vec{p}_r = -\vec{p}_\gamma \quad (7.2)$$

En en déduit l'énergie de recul

$$E_r = \frac{\vec{p}_r^2}{2m} = \frac{\vec{p}_\gamma^2}{2m} = \frac{E_\gamma^2}{2m} \quad (7.3)$$

où m est la masse du noyau ($\approx Am_N$). On peut factoriser l'énergie de recul

$$E_r = \frac{E_\gamma^2}{2m} = E_\gamma \frac{E_\gamma}{2m} \ll E_\gamma \quad (7.4)$$

Ceci montre que l'énergie de recul est très petite (car E_γ est de maximum 20 MeV ce qui est fort petit par rapport à mc^2). En pratique, on la négligera : $E_i = E_f + E_\gamma$.

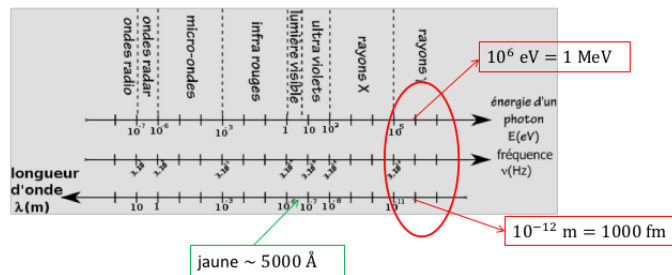


FIGURE 7.2

L'ordre de grandeur en physique nucléaire pour l'énergie d'un photon est de l'ordre du MeV, ce qui correspond aux rayons γ . La longueur d'onde pour $E_\gamma = 1$ MeV est de

$$\lambda_\gamma = \frac{2\pi}{k_\gamma} = \frac{2\pi\hbar c}{E_\gamma} \approx 1200 \text{ fm} \quad (7.5)$$

7.2 Hamiltonien d'interaction nucléons-photon

L'hamiltonien d'interaction photon-noyau s'écrit

$$H_{int} \propto H_e a^\dagger \quad (7.6)$$

où a^\dagger est l'opérateur de création d'un photon et H_e , l'hamiltonien d'émission d'un photon. Celui-ci s'écrit (on espère que le développement ci-dessous ne comportera qu'un nombre limité de termes)

$$H_e(\vec{k}_\gamma) = - \sum_{\lambda\mu\sigma} q^\sigma \alpha_\lambda^\sigma \mathcal{M}_\mu^{\sigma\lambda}(\vec{r}_i) D_{\mu q}^\lambda(\Omega_\gamma) \quad (7.7)$$

Il s'agit d'une factorisation photon-nucléons. On retrouve les termes suivants

- Indice σ . Soit électrique, soit magnétique. On parle d'équations de MAXWELL, les calculs font apparaître ces deux termes.
- La polarisation du photon. Le photon est de spin entier et possède trois projection, $0, \pm 1$ mais la projection 0 est interdite. La projection est la polarisation q .
- L'ordre du multipole λ (varie de 1 à l'infini, mais en pratique $\lambda = 1, 2$)
- L'indice μ est compris entre $-\lambda$ et $+\lambda$
- La fonction de WIGNER $D_{\mu q}^\lambda(\Omega_\gamma)$ où Ω_γ est l'angle d'émission du photon.
- Les opérateurs multipolaires $\mathcal{M}_\mu^{\sigma\lambda}(\vec{r}_i)$ qui dépendent des coordonnées \vec{r}_i est nucléons.
-

$$\alpha_\lambda^E = \frac{(ik_\lambda)^\lambda}{(2\lambda - 1)!!} \sqrt{\frac{4\pi(\lambda + 1)}{2\lambda(2\lambda + 1)}} \quad (7.8)$$

avec $\alpha_\lambda^M = -i\alpha_\lambda^E$.

Intéressons-nous aux **opérateurs multipolaires** $\mathcal{M}_\mu^{\sigma\lambda}$ dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes ($kr \ll 1$). Il en existe deux types : électrique et magnétique.

À retenir : opérateur multipolaire électrique

$$\mathcal{M}_\mu^{E\lambda} e \sum_i \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) r_i^\lambda Y_\lambda^\mu(\Omega_{ri}) \quad (7.9)$$

C'est le plus important, on somme sur tous les nucléons et on voit apparaître un facteur d'isospin car seulement les protons interagissent avec l'interaction électromagnétique (la contribution des neutrons dans cette somme doit être nulle. Le facteur d'isospin vaut +1 pour les protons et zéro pour les neutrons).

Il y a aussi l'opérateur multipolaire magnétique

$$\mathcal{M}_\mu^{M\lambda} = \mu_N \sum_i [\vec{\nabla}(r^\lambda Y_\lambda^\mu(\Omega_r))]_{r=r_i} \cdot \left(\frac{2g_{li}}{\lambda + 1} \vec{L}_i + g_{si} \vec{S}_i \right) \quad (7.10)$$

où $\mu_N = (e\hbar)/(m_N c)$ est le magnéton de BOHR. Un peu plus compliqué. Celui-ci contient des termes venant du champ magnétiques qui sont moins habituels. On somme toujours sur les

nucléons mais on voit apparaître le gradient. C'est un vecteur qu'on prend en produit scalaire avec un autre vecteur qui contient le moment cinétique orbital et le spin intrinsèque pour chaque nucléon. Le terme en \vec{L}_i n'interagit que sur les protons.

$$g_{li} = \frac{1}{2} - t_{iz} \quad (7.11)$$

Pour le spin, c'est plus compliqué : g_{si} contient un terme associé au proton et un au neutron

$$g_{si} = g_p \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) + g_n \left(\frac{1}{2} + t_{iz} \right) \quad (7.12)$$

où $g_p = 5.586$ et $g_n = -3.826$ sont des facteurs gyromagnétiques déterminés expérimentalement¹. Notons que pour $\lambda = 0$, il n'y a pas de transition monopolaire. Une étude de la **parité** est donnée au *slide 106* (je n'ai pas de notes... Si quelqu'un pouvait compléter).

7.3 Probabilité de transition

7.3.1 A. Distributions angulaires

Considérons comme état initial la fonction d'onde du noyau $\Psi^{J_i M_i \pi_i}$ et 0 photon et comme état final la fonction d'onde du noyau $\Psi^{J_f M_f \pi_f}$ et 1 photon. La probabilité de transition est donnée par la règle d'or de FERMI

$$dw_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle 1, \Psi^{J_f M_f \pi_f} | H_{int} | 0, \Psi^{J_i M_i \pi_i} \rangle \right|^2 d\rho(E_i) \quad (7.13)$$

où $d\rho(E_i) = \frac{d\vec{k}_\gamma}{dE} = \frac{k_\gamma^2}{\hbar c} d\Omega_\gamma$ est la densité d'état avec Ω_γ l'angle d'émission du photon.

Considérons l'Hamiltonien d'interaction écrit à l'aide de l'opérateur élévateur

$$H_{int} = H_e a_{kq}^\dagger \quad (7.14)$$

où $H_e(k, \epsilon_{kq}) = -\sum_{\lambda\mu\sigma} (-1)^\lambda q^\sigma a_\lambda^\sigma \mathcal{M}_\mu^{\sigma\lambda} D_{\mu-q}^\lambda(\Omega_\gamma)$.

Pour l'émission d'un photon de nombre d'onde k_γ nous avons

$$\langle 1 | a_{kq}^\dagger | 0 \rangle = \delta(k - k_\gamma) \quad (7.15)$$

En intégrant sur dk ce résultat

$$\int dk \langle 1 | a_{kq}^\dagger | H_e(k\epsilon_{kq}) \rangle = H_e(k_\gamma, \epsilon_{kq}) \quad (7.16)$$

Il est possible de réécrire la distribution angulaire w_{if}

$$\frac{dw_{if}}{d\Omega_\gamma} = \sum_q \left| \sum_{\lambda\mu\lambda} (-1)^\lambda q^\sigma \alpha_\lambda^\sigma \underbrace{\langle \Psi^{J_f M_f \pi_f} | \mathcal{M}_\mu^{\sigma\lambda} | \Psi^{J_i M_i \pi_i} \rangle}_{\text{nucéons}} \underbrace{D_{\mu-q}^\lambda(\Omega_\gamma)}_{\text{photon}} \right|^2 \quad (7.17)$$

Après intégration sur Ω_γ , on trouve

$$w_{J_i M_i \pi_i \rightarrow J_f M_f \pi_f} \approx \sum_{\lambda\mu\sigma} |\alpha_\lambda^\sigma|^2 \left| \langle \Psi^{J_f M_f \pi_f} | \mathcal{M}_\mu^{\sigma\lambda} | \Psi^{J_i M_i \pi_i} \rangle \right|^2 \quad (7.18)$$

Cette somme porte sur les trois multipôles :

1. Pour une particule élémentaire, ce facteur vaut exactement 2.

- $\sigma = E$ (électrique) ou M (magnétique)
- $\lambda =$ ordre du multipôle (de 0 à ∞)
- $\mu =$ projection $-\lambda \leq \mu \leq \lambda$

Heureusement en pratique, seul un petit nombre de terme de cette somme contribue grâce notamment aux règles de sélections mais aussi via le développement en puissance de $k_\gamma R$ ($\ll 1$).

7.3.2 B. Règles de sélection

Pas de notes (tout fait au tableau...) pour cette section et les trois suivantes. En demander !

7.3.3 C. Probabilité de transition totale

7.3.4 D. Largeur gamma

7.3.5 F. Cas particuliers : transition E_1 dans les noyaux $N = Z$

Considérons l'opérateur E_1

$$\mathcal{M}_\mu^{E_1} = e \sum_i \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) r_i Y_1^\mu(\Omega_{ri}) \propto \sum_i \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) \vec{r}_{i\mu} \quad (7.19)$$

Dans la coordonnée \vec{R} , on doit supprimer le centre de masse. En effet, si on prend le premier facteur $1/2$, le centre de masse est défini de sorte à ce que cette somme soit nulle. Il ne reste donc que la contribution du terme en isospin

$$\mathcal{M}_\mu^{E_1} \propto \sum_i \left(\frac{1}{2} - t_{iz} \right) (\vec{r}_{i\mu} - \vec{R}_{c.m.,\mu}) \propto -\sum_i t_{iz} (\vec{r}_{i\mu} - \vec{R}_{c.m.,\mu}) \quad (7.20)$$

Il s'agit d'un OTI de rang 1 dans l'espace des isospin. Pour un noyau où $N = Z$, $T_Z = 0$, $T \approx 0$. Le coefficient de CG peut se calculer via le théorème de WIGNER-ECKART

$$\langle 0010 | 00 \rangle = 0 \quad (7.21)$$

Les transitions E_1 , qui sont en principe dominantes, sont ici interdites. Cependant, comme T n'est pas un bon nombre quantique exact, les largeurs E_1 sont en générales non-nulles.

7.3.6 G. Unités Weisskopf

Il s'agit d'unités souvent utilisées. L'idée n'est pas de faire un calcul savant de la probabilité de transition mais un certain *feeling* pour avoir un ordre de grandeur. En supposant qu'un seul nucléon participe à la transition, elles permettent donc d'estimer très simplement les probabilités de transitions réduites. Les définitions de cette unité sont données *slide 114*.

7.3.7 F. Exemples

Serait fait lorsque les sections B,C,D,F seront faites, pas de sens avant.

7.3.8 I. États isométriques

Les états isométriques sont des états de longue durée de vie. Comme $\tau \propto 1/W$, il faut que W soit petit. Rappelons l'expression de W

$$W(\sigma, \lambda) \propto E_\gamma^{2\lambda+1} \left| \left\langle \Psi^{J_f \pi_f} \left| \mathcal{M}^{\sigma \lambda} \right| \Psi^{J_i \pi_i} \right\rangle \right|^2 \quad (7.22)$$

Pour avoir une longue durée de vie, il faut donc que E_γ soit petit et donc λ grand, impliquant que $J_f - J_i$ soit être important. De façon assez surprenante, il existe parfois des durées de vies plus longue que le fondamental.

Chapitre 8

Modèles nucléaires

8.1 Introduction

L'équation de Schrödinger $H\Psi = E\Psi$ d'un noyau ne peut pas être résolue exactement pour $A > 4$. Le problème est le terme potentiel qui - bien qu'il paraît inoffensif - cache une double somme

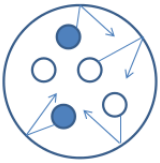
$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i>j=1}^A V_{ij} \quad (8.1)$$

où $T_i = \vec{p}_i^2/(2m_N)$ est l'énergie cinétique du nucléon i et V_{ij} l'interaction entre les nucléons i et j .

En plus de n'être pas résoluble analytiquement, le potentiel nucléon-nucléon V_{ij} n'est pas exactement connu, il existe des forces à 3 corps, 4 corps, ... ainsi que des effets relativistes difficiles à inclure. Pour s'en sortir il convient d'utiliser des modèles respectant les principes physiques et reproduisant certaines propriétés du noyau. Il existe deux classes de modèles

1. Particules indépendantes : chaque nucléon est pris en compte individuellement
2. Collectifs : le noyau est considéré comme un ensemble

8.2 Modèle du gaz de Fermi



Il s'agit d'un modèle à particules indépendantes

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_A) = \phi_1(r_1)\phi_2(r_2) \dots \phi_A(r_A) \quad (8.2)$$

Ce modèle considère que les nucléons sont dans une "boîte", dans laquelle ils n'interagissent pas. Ceci est décrit par un potentiel de *sphère dure* $V_i(r_i)$

FIGURE 8.1

$$V = \sum_{i=1}^A V_i, \quad V_i(r_i) = 0 \text{ si } r \leq a, \quad V_i(r_i) = \infty \text{ si } r > a \quad (8.3)$$

Les fonctions individuelles sont celles de particules dans une boîte cubique de côté a

$$\phi_i(x, y, z) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (8.4)$$

où $k_x a = n_x \pi$, $k_y a = n_y \pi$ et $k_z a = n_z \pi$. Ce modèle permet d'expliquer certains termes de la formule de masse (celui élaboré lors du modèle de la goutte liquide, à savoir le terme de volume et d'asymétrie). L'énergie d'individuelle est alors donnée par

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{a\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (8.5)$$

Ci-contre, une représentation bidimensionnelle des valeurs d'énergies accessibles pour un nucléon. Chaque état peut être occupé par maximum quatre nucléons (spin/isospin). Le nombre d'états entre k et $k + dk$ est donné par

$$dn = 4 \times 4\pi k^2 dk \times \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 \quad (8.6)$$

où π/a est le volume d'une cellule. Dès lors

$$\frac{dn}{dk} = \frac{2}{\pi^2} k^2 V \quad (8.7)$$

où $V = a^3$ est le volume du noyau (supposé cubique). Le nombre total de nucléon A doit donc respecter la relation (l'intégration doit forcément donner le nombre de nucléons)

$$A = \int_0^{k_F} \frac{dn}{dk} dk = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 V \quad (8.8)$$

où $k_F = \left(\frac{3\pi^2 A}{2V}\right)^{1/3} = 1.33 \text{ fm}^{-1}$ est le **nombre d'onde de Fermi**. Comme la densité $\rho = A/V$ est connue, on peut facilement trouver l'énergie individuelle maximale dite l'**énergie de Fermi**

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_N} = \frac{a\hbar^2}{2m_N} \left(\frac{3\pi^2}{2}\rho\right)^{2/3} \approx 37 \text{ MeV} \quad (8.9)$$

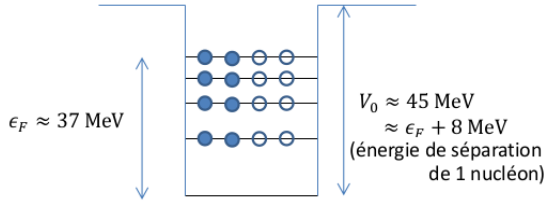


FIGURE 8.3

Les orbitales sont ainsi remplies jusqu'au niveau de FERMÍ et il est alors facile, sachant ça, de calculer l'énergie totale du noyau en effectuant la somme sur tous les nucléons.

$$E = \int_0^{k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_N} dn = \frac{\hbar^2}{2m_N} \frac{2k_F^5}{5\pi^2} V = \frac{3}{5} \epsilon_F A \approx 22.2 A \quad (8.10)$$

On retrouve la forme du terme de volume ($B(Z, A) = a_V A + \dots$). L'énergie est proportionnelle au nombre de nucléons ce qui justifie la forme précédemment utilisée.

On peut également considérer l'asymétrie neutron-proton en considérant des énergies de FERMÍ différentes pour chacune de ces deux espèces¹

$$E_p(Z) = \frac{3}{5} \epsilon_F(p) Z = \frac{\hbar^2}{2m_N} \left(\frac{3\pi^2}{2} \frac{Z}{V}\right)^{2/3} Z \quad (8.11)$$

$$E_n(Z) = \frac{3}{5} \epsilon_F(p) N = \frac{\hbar^2}{2m_N} \left(\frac{3\pi^2}{2} \frac{N}{V}\right)^{2/3} N \quad (8.12)$$

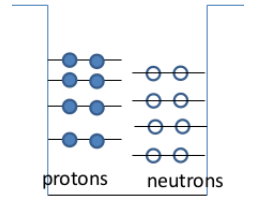


FIGURE 8.4

L'énergie d'asymétrie est obtenue en prenant la différence entre deux énergie : l'une qui serait l'énergie s'il n'y avait pas de différence entre neutrons et protons et l'autre l'énergie spécifique associée aux protons et aux neutrons

$$\Delta E = 2E(A/2) - E(Z) - E(N) = -\frac{1}{3} \epsilon_F \frac{(N - Z)^2}{A} \quad (8.13)$$

1. Si le noyau est asymétrique, l'énergie de liaison diminue.

On retrouve le terme d'asymétrie dans le modèle de la goutte liquide ($B(A, Z) = \dots - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + \dots$).

CONCLUSIONS

Ce modèle permet d'expliquer la forme des termes de volume et d'asymétrie (mais pas l'ajustement des paramètres). Lorsqu'on s'intéresse aux fonctions d'ondes, dans le modèle de particules indépendantes comme c'est le cas ici, on obtient un produit de fonctions d'onde individuelles. Celles-ci décrivant des fermions, il faut que la fonction d'onde soit antisymétrique

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_A) = \mathcal{A} \phi_1(r_1) \phi_2(r_2) \dots \phi_A(r_A) \quad (8.14)$$

où $A = \sum_{p=1}^{A!} \epsilon_p P_p$ est l'opérateur *anti-symétriseur* avec P_p la permutations de A éléments et ϵ_p le signe de la permutation. Il est possible d'écrire cette fonction d'onde sous la forme d'un déterminant de SLATER.

8.3 Modèle rotationnel

Le *modèle rotationnel* est un modèle collectif associé à la déformation du noyau : les noyaux ne sont plus sphériques. Découplons la rotation du noyau de sa structure interne

$$H = H_{rot}(\omega) + H_{int}(\vec{r}_i) + H_{conj} \quad (8.15)$$

où le terme conjugué H_{conj} est négligé, où $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ sont les angles d'EULER et \vec{r}_i les coordonnées internes du noyau. La fonction d'onde est alors factorisée²

$$\Psi = \varphi(\omega) \Phi(\vec{r}_i) \quad (8.16)$$

où $\Phi(\vec{r}_i)$ est la fonction d'onde interne, supposée être identique pour tous les états excités (\rightarrow propriétés similaires). Nous verrons un peu plus tard que les $\varphi(\omega)$ sont en réalité les fonctions de WIGNER.

Avant toute chose, considérons deux systèmes d'axes : les axes intrinsèques au système (attachés au noyau, obtenus par la rotation $\mathcal{R}(\omega)$) et les axes fixes du laboratoire. Sachant que

$$T = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{L^2}{r^2} \right) \quad (8.17)$$

l'hamiltonien de rotation s'écrit

$$H_{rot}(\omega) = \frac{J_1^2}{2\mathcal{J}_1} + \frac{J_2^2}{2\mathcal{J}_2} + \frac{J_3^2}{2\mathcal{J}_3} \quad (8.18)$$

où J_i sont les moments cinétiques par rapport aux axes intrinsèques du noyau et \mathcal{J}_i sont les moments d'inerties suivant les trois axes : ils sont caractéristiques de la déformation³.

Nous savons que \vec{J}^2 est un bon nombre quantique

$$\vec{J}^2 : J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad (8.19)$$

2. Rappelons que les noyaux sont ici non sphériques.

3. Par la suite, on supposera que deux d'entre-eux sont égaux et différent du troisième : ceci met en évidence la déformation du noyau, non sphérique.

où les indices x, y, z correspondent à la situation dans le référentiel du laboratoire.

Les fonctions propre de \vec{J}^2 sont les fonctions de WIGNER, $\mathcal{D}_{MK}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ une généralisation des harmoniques sphériques. Notons

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) &= \hbar^2 J(J+1) \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) \\ J_z \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) &= \hbar M \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) && \text{(projection sur l'axe fixe)} \\ J_3 \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) &= \hbar K \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) && \text{(projection sur l'axe intrinsèque)} \end{aligned} \quad (8.20)$$

Le nombre quantique K est un bon nombre quantique approché : $[H_{int}, J_3] \neq 0$. Ceci va nous permettre de ré-écrire notre fonction d'onde

$$\Psi = \Phi_{int}(\vec{r}_i) \varphi(\omega) \quad \text{où } \varphi(\omega) = \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) \quad (8.21)$$

Comme annoncé, nous allons supposer un système axial (la déformation se fait selon le troisième axe)

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J} \quad (8.22)$$

L'Hamiltonien de rotation devient

$$H_{rot}(\omega) = \frac{J^2}{2\mathcal{J}} + \frac{J_3^2}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_3 - \frac{1}{\mathcal{J}}} \right) \quad (8.23)$$

Cet opérateur a comme fonctions propres les fonctions de WIGNER $H_{rot} \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) = E_{JK} \mathcal{D}_{MK}^J(\omega)$.

À retenir : énergies de rotation

$$E_{JK} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} J(J+1) + E_{0k} \quad (8.24)$$

avec $J \geq |K|$ (inégalités triangulaires).

Les fonctions d'ondes associées sont données par

$$\varphi_{MK}^J(\omega) = \left(\frac{2J+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) \quad (8.25)$$

Celle-ci possède une symétrie de réflexion. Sachant que l'opérateur de réflexion est équivalent à une rotation de 180° , effectuons une telle rotation autour de l'axe principal 2

$$e^{i\pi L_2} \mathcal{D}_{MK}^J(\omega) = (-1)^{J+K} \mathcal{D}_{M-K}^J(\omega) \quad (8.26)$$

Pour la parité, cela équivaut au changement de variable $r \rightarrow -r$. La fonction projetée en parité est

$$\varphi_{MK}^{J\pi}(\omega) = \left(\frac{2J+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} [\mathcal{D}_{MK}^J(\omega) + \pi(-1)^{J+K} \mathcal{D}_{M-K}^J(\omega)] \quad (8.27)$$

Dans le cas particulier où $K = 0$, J ne peut valoir que $0, 2, 4, 6, \dots$ ou $1, 3, 5, 7, \dots$. Lors de la représentation d'un spectre (voir ci-dessous), chaque niveau est de plus en plus éloigné du précédent. Il s'agit d'une conséquence de H_{rot} (à cause du $J(J+1)$). Chaque bande est dite "*bande rotationnelles* : le diagramme E_{JK} est linéaire en $J(J+1)$.

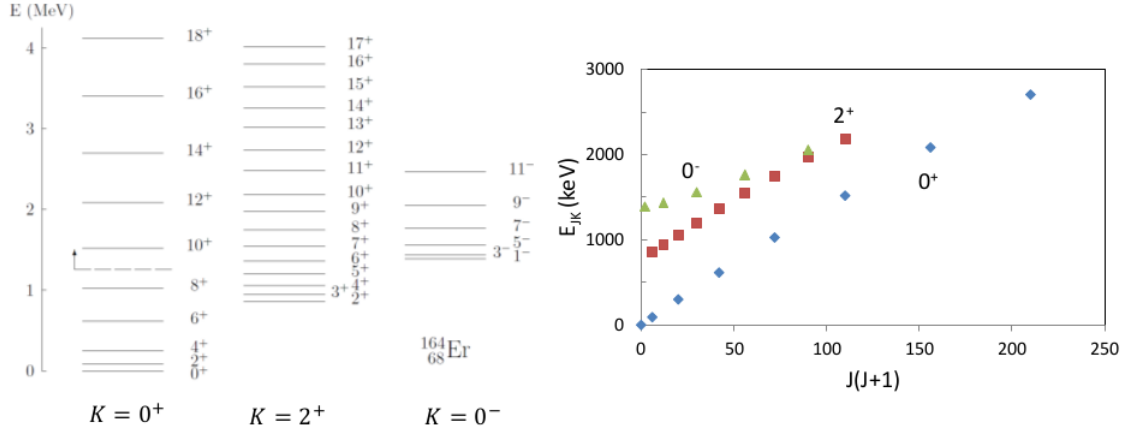


FIGURE 8.5 – $^{164}_{68}\text{Er}$

En bleu, cela représenté $K = 0^+$. La relation n'est pas parfaitement linéaire mais la tendance l'est fortement. On peut contrôler le caractère rotationnel d'une bande grâce à ce phénomène linéaire mais aussi grâce aux probabilités de transitions qui doivent respecter une certaine forme.

8.4 Modèle de potentiel

Dans la radioactivité α , nous avons supposé qu'il existait une particule α proche de la surface du noyau. Celle-ci peut s'en détacher et interagir avec le noyau sous la forme d'un potentiel : il est temps de décrire celui-ci. Ce modèle est applicable aux noyaux légers (essentiellement la structure α). Il est bien adapté aux collisions noyau-noyau et peut être généralisé à trois ou quatre particules.

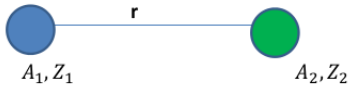


FIGURE 8.6

Supposons que le noyau soit formé de deux amas (*cluster*) de nucléons à grande distance l'un de l'autre et que la structure interne de ces amas soit négligée. L'Hamiltonien du noyau s'écrit

$$H = T_1 + T_2 + V(r_1 - r_2) = T_m - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + V(r) \quad (8.28)$$

où $V(r)$ contient deux termes (un nucléaire et un coulombien) : $V(r) = V_N(r) + V_C(r)$.

A titre d'exemple, voici deux potentiels nucléaires contenant des paramètres ajustables

- Gaussien

$$V_N(r) = V_0 \exp\left(-(r/r_0)^2\right) \quad (8.29)$$

- Woods-Saxon. Il contient un paramètre d'amplitude V_0 , une portée R et une diffusivité a . Il a une forme "de marche" (alors que la gaussienne est plus arrondie : on parle de la partie gauche de la gaussienne, prolongée ensuite par une droite). Pour $a = 0$, il s'agit d'une marche anguleuse : la diffusivité permet d'avoir une pente plus douce (elle vaut souvent $1/2$ fermi).

$$V_N(r) = \frac{V_0}{1 + \exp((r - R)/a)} \quad (8.30)$$

En considérant une fonction d'onde factorisée (un terme radial et un terme angulaire)

$$\Psi^{\ell m}(\vec{r}) = R_{\ell}(r)Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = \frac{u_{\ell}(r)}{r}Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad (8.31)$$

On peut en obtenir l'équation radiale

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u_{\ell} + V(r)u_{\ell} + Eu_{\ell} \quad (8.32)$$

Le comportement asymptotique pour r petit (énergie positive ou négative) est donné par

$$u_{\ell}(r) \rightarrow r^{\ell+1} \quad (8.33)$$

Le comportement asymptotique pour r grand est donné par

$$\begin{aligned} E > 0 & : u_{\ell}(r) \rightarrow A \cos(kr) + B \sin(kr), & \text{avec } k = \sqrt{2\mu E/\hbar} \\ E < 0 & : u_{\ell}(r) \rightarrow C \exp(-Kr), & \text{avec } K = \sqrt{-2\mu E/\hbar} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Ici nous avons deux types de problème selon le signe de l'énergie (la physique diffère). Une énergie positive représente la collision de deux noyaux où E est alors l'énergie du faisceau. La solution est une onde plane. L'énergie négative représente elle des états liés.

Il existe des potentiels simple où la solution analytique est connue (puits carré (deuton), oscillateur harmonique). Pour les deux exemples de potentiels repris ci-dessus, il n'existe pas de solution analytique mais la résolution numérique est, elle, relativement aisée. Nous n'entrons ici pas dans les détails, le but était de donner un aperçu de ce qui était faisable avec ce modèle.

Chapitre 9

Le modèle en couches

9.1 Introduction

Le but de ce modèle est de décrire les propriétés des états fondamentaux (spin, parité, moments dipolaire, quadrupolaires, ...). Il a aussi pour but d'expliquer l'origine des nombres magiques (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126). Ceux-ci ont des propriétés intéressantes

- Nombre de neutrons/protons donnant des propriétés particulières au noyau
- Grande énergie de liaison et énergie d'excitation élevée
- Effets microscopiques (absents des modèles collectifs) et petit rayon

L'Hamiltonien exact s'écrit

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A \underbrace{\sum_{j=1}^A v(r_i - r_j)}_{\approx U_i(r_i)} \quad (9.1)$$

Celui-ci est alors remplacé par

$$H = \sum_{i=1}^A (T_i + U_i(r_i)) + H_{res} \quad (9.2)$$

où H_{res} est un Hamiltonien "résiduel" supposé négligeable. Cet Hamiltonien est à particules indépendantes et chaque nucléon ressent un potentiel moyen généré par les autres nucléons. En négligeant le terme résiduel, nous avons la forme d'un Hamiltonien séparable : le problème à A nucléons a été changé en A problèmes à 1 nucléon

$$H = \sum_{i=1}^A H_i, \quad E = \sum_{i=1}^A E_i, \quad \Psi = \Phi_1 \dots \Phi_A \quad (9.3)$$

Différentes approximations sont possibles pour le potentiel $U(r_i)$. Par exemple, l'interaction de COULOMB étant faible par rapport à l'interaction nucléaire, nous allons négliger COULOMB. Généralement, U_i tend alors vers zéro et tend à être attractif à courte portée (forme typique d'un potentiel nucléaire). Mais un tel potentiel n'ayant pas de solution analytique, il va falloir ruser.

9.1.1 A. L'oscillateur harmonique

Dans le cas d'un oscillateur à une dimension x , nous avons $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. On peut écrire

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \phi(x) = E\phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m\omega^2}{\hbar^2} x^2 \right) \phi(x) = \frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x) \quad (9.4)$$

On peut trouver $b^4 = \hbar^2/(m^2\omega^2)$ (où b est le paramètre d'oscillateur). En posant

$$\phi(x) = \exp\left(-x^2/2b^2\right)\tilde{\phi}(x) \quad (9.5)$$

On peut trouver les énergies et les fonctions propres

$$E_n(x) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \phi_n(x) \propto \exp\left(-x^2/2b^2\right)H_n(x/b) \quad (9.6)$$

où $H_n(x)$ sont les polynômes d'HERMITTE.

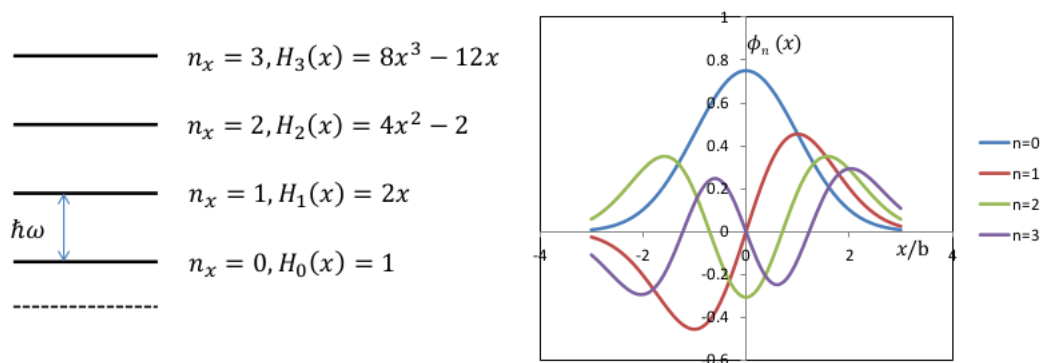


FIGURE 9.1

La chose fantastique est que le passage en trois dimension se fait en sommant les hamiltonien pour chaque dimension. L'énergie est alors donnée par

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) \quad (9.7)$$

Pour $n_x = n_y = n_z = 0$ il n'existe qu'un seul état possible. Par contre, si l'un des vaut 1 nous avons trois états possible. Ceci est la dégénérescence des états, la même énergie est commune à un certain nombre d'états différents.

La dégénérescence (valant toujours 1 dans le cas 1D) est donnée par

$$N_n = \sum_{n_x=0}^n (n - n_x + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (9.8)$$

Les *slides 18 et 19* reprennent ces résultats dans le cas des coordonnées sphériques. On retrouve au final trois fonctions d'ondes aux coordonnées sphériques qui correspondent aux trois trouvées dans les coordonnées cartésiennes.

—	$n = 3, N_n = 10$	—	$N=Z=40$ nucléons
—	$n = 2, N_n = 6$	—	$N=Z=20$: ^{40}Ca
—	$n = 1, N_n = 3$	●●●●●	$N=Z=8$: ^{16}O
—	$n = 0, N_n = 1$	●●	$N=Z=2$: ^4He

n	n_x, n_y, n_z	n_r, ℓ	dégénérescence
0	(0,0,0)	(0,0)=0s	1
1	(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)	(0,1)=0p	3
2	(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2) (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)	(1,0)=1s (0,2)=0d	6=1+5
3	(3,0,0),.....	(1,1)=1p (0,3)=0f	10=3+7

Cette dégénérescence compte le nombre de nucléon que l'on peut mettre par niveau. Sur le niveau 0 on peut en mettre 2, sur le niveau 1 on peut en mettre 6, ... Il y a chaque fois un facteur deux venant du spin. Si l'énergie de liaison est grande, c'est parce qu'une couche est fermée : on retrouve bien 2 le premier nombre magique (qui correspond à une couche pleine).

TABLE 9.1

En effet, si une couche est remplie, rien ne se passera si l'énergie de liaison n'est pas fournie : nombre magique. Par contre, si la couche n'est pas remplie il peut y avoir réorganisation au sein de celle-ci. Ce modèle permet d'expliquer les trois premiers nombres magiques (2,8,20) grâce à cette explication mais plus les suivants (40 est prédit comme nombre magique dans cette théorie mais ça ne colle pas expérimentalement). Il manque donc quelque chose à ce modèle !

9.1.2 B. Puits infini

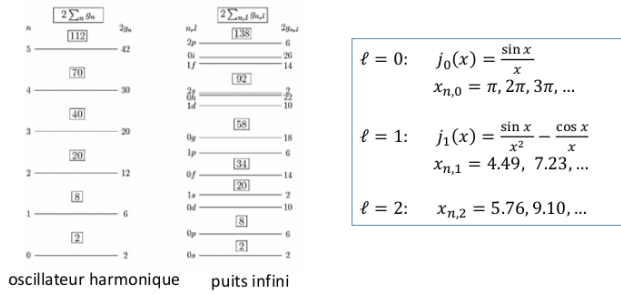
Un autre potentiel que l'on peut considérer est celui du puits infini

$$\begin{cases} U(r) = 0 & \text{pour } r < a \\ U(r) = \infty & \text{pour } r \geq a \end{cases} \quad (9.9)$$

Ce potentiel suit tout de même une certaine logique. Au delà du noyau il n'y a pas de potentiel, tous les nucléons restent à l'intérieur du noyau. En considérant un tel potentiel, on trouve des énergies s'exprimant via les séries de BESSEL.

$$E_{n_r, \ell} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} x_{n_r, \ell}^2 \quad (9.10)$$

où $x_{n_r, \ell}$ est le numéro n_r de la fonction de BESSEL sphérique $j_\ell(x_{n_r, \ell})$.



Il est dès lors nécessaire d'obtenir des fonctions d'ondes à partir du couplage entre l et s . Nous allons avoir des fonctions d'ondes

$$|n_n l j m\rangle = \sum_{m_l m_s} \left\langle l m_l \frac{1}{2} m_s \middle| j m \right\rangle |1/2 m_s\rangle \quad (9.14)$$

Nous allons associer une énergie à chacune de ces fonctions d'ondes. En adoptant une notation efficace, on peut trouver l'énergie de la partie spin-orbite

$$\langle j m | \vec{l} \cdot \vec{s} | j m \rangle \quad (9.15)$$

Sachant que $j^2 = (\vec{l} + \vec{s})^2$, on trouve

$$1/2 \langle j m | \vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2 | j m \rangle \quad (9.16)$$

où $j = l \pm 1/2$.

En explicitant les valeurs propres

$$1/2 \langle j m | j(j+1) - s(s+1) - 3/4 | j m \rangle \quad (9.17)$$

Si $j = l + 1/2 \rightarrow 1/2[-l + 1/2)(l + 3/2) - l(l+1) - 3/3] = l/2$ et si $j = l - 1/2 \rightarrow -1/2(l + 1)$. Le terme spin-orbite cause donc une levée de la dégénérescence en ℓ des niveaux. En effectuant la différence entre les deux

$$E(l + 1/2) - E(l - 1/2) = 1/2(2l + 1) \quad (9.18)$$

On constate que la levée de la dégénérescence va être d'autant plus forte que ℓ est grand. Le résultat est sans appel car les nombres magiques 2,8,20,28,50,82 et 126 sont en accord avec l'expérience (pour une couche fermée ($J = 0$)).

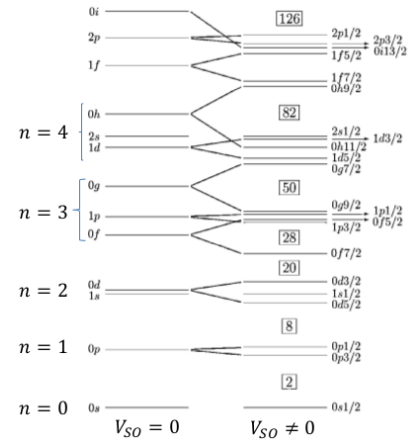


FIGURE 9.3

△ Nous avons adopté la notation $n_r \ell_j$ (exemples : $0s_{1/2}$, $0p_{1/2}$, ...) pour différencier les couches.

9.2 Spin et parité de l'état fondamental du noyau

Dans le noyau, le spin J est défini par le couplage de tous les spins individuels j tandis que la parité π est définie par les produits des parités individuelles $(-1)^\ell$. Nous allons ici utiliser le **modèle en couches extrême** qui considère que les nucléons forment des paires de spin 0.

Noyaux pairs-pairs (N, Z pairs) : spin entier

Dans un tel noyau, le **spin et la parité** sont $J = 0^+$. Le modèle en couches extrême est quasiment toujours vérifié et il permet de justifier la grande énergie d'excitation des noyaux magiques.

Noyaux pairs-impairs (N ou Z impair) : spin demi-entier

Cette fois-ci le spin est donné par le spin du dernier nucléon (c'est souvent le nucléon célibataire qui donne ses propriétés au noyau) : $J = j$. La parité est donnée par $\pi = (-1)^\ell$.

Le noyau ^{17}O est formé du cœur ^{16}O et d'un nucléon qui est sur $0d_{5/2}$. A partir du modèle en couche, on peut prédire en connaissant le schéma des niveaux le spin de l'état fondamental qui est de $J = 5/2^+$.

En effet, considérons le modèle extrême avec $Z = 8, N = 9$. Regardons la divisions des niveaux ¹

N=0 Une seule division

— $0s_{1/2}$: on y place deux nucléons

N=1 Deux divisions

— $0p_{3/2}$: on y place quatre nucléons

— $0p_{1/2}$: on y place deux nucléons

N=1 Trois divisions

— $0d_{5/2}$: on y place un nucléon

— ...

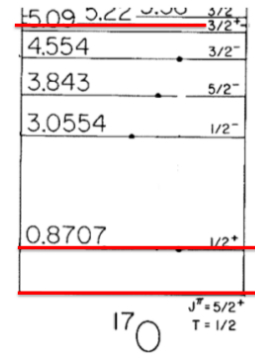


FIGURE 9.4

Le modèle en couche permet ainsi d'expliquer l'état excité (nucléon $0s_{1/2} \rightarrow J = 1/2^+$) mais aussi les états $5/2^+, 1/2^+, 3/2^+$ (en rouge dans le spectre). Pour les autres états, c'est plus compliqué.

Autres exemples

Le *slide 27* donne d'autres exemples. Le ^{39}K ($Z = 19, N = 20$) possède une couche sd complète mais présente un "trou" dans la couche $sd_{5/2}$. En enlevant une particule dans la couche $d_{3/2}$, le dernier nucléon célibataire aura un moment cinétique $J = 3/2^+$, soit le spin de l'état fondamental ²

Noyaux plus lourds

Le modèle en couche permet également d'expliquer les noyaux lourds (voir *slide 28* et *29*).

9.3 Modèle en couches à plusieurs particules

Considérons un "cœur" ainsi que quelques neutrons supplémentaires. Il y a nécessité d'obtenir plusieurs fonctions de bases (via une diagonalisation de l'hamiltonien). En effet, $J = 1$ donne une fonction, $J = 1$ en donne cinq (soit le nombre de projection) et $J = 2$ en donne 9. La somme $1 + 5 + 9 = 15$ est le nombre de fonction d'onde avec lesquelles nous avons travaillé.

Regardons le spectre de ^{18}O pour les neutrons et les protons. Il s'agit d'un cœur de ^{16}O avec deux neutrons dans la couche $0d_{5/2}$. On remarque l'existence de trois états ($0^+, 4^+, 2^+$) d'énergie relativement proche. En pratique on ne retrouve pas la dégénérescence attendue : cela vient du fait que H_{res} a été négligé

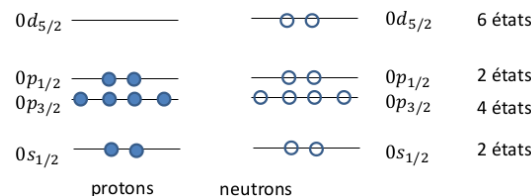


FIGURE 9.5 – Deux neutrons pour six états possibles donne bien $(6 * 5)/2 = 15$ états possibles. Les fonctions d'ondes totales sont obtenues par couplage de deux moments cinétique $5/2$. Elles sont bien antisymétrique ($J = 0, 2, 4$ (on retrouve bien les 15 fonctions $1 + 5 + 9 = 15$)).

1. Revoir

2. Il faudrait plus de notes, je vois pas trop pourquoi ces états la sont justifiés et pas les autres ni même la conclusion retirée ici.

Considérons le ^{18}F . La symétrie que nous avons précédemment imposée n'a plus de raison d'être : il y a six fonctions pour les neutrons et de même pour les protons donnant un total de 36 fonctions ($1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$, le compte est bon!). On aura dans le bas du spectre de ^{18}F six état allant de 0^+ à 5^+ . Chacune de ces fonctions sont des déterminants de SLATER basés sur l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique comme décrit au *slide 31*.

9.4 Extension aux couches supérieures

En considérant les couches $0d_{5/2}, 1s_{1/2}$ et $0d_{3/2}$, il est possible de décrire 12 états et d'avoir alors $C_2^{12} = 66$ fonctions. Ceci permet d'améliorer la description de l'état fondamental tout simplement en décrivant plus d'état.

Plus on augmente l'espace, plus on a de fonctions. Le nombre de fonction monte assez vite (avec N, Z) et on peut arriver au *No core shell model* où on suppose qu'il n'y a pas de cœur rempli si le nombre de fonctions est de l'ordre du milliard !

Fin