Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\,dx$$

$\alpha \in R$

$\alpha > 0$, α bir reel sayıdır.

Eğer $\alpha \in Z^+ = \{1, 2, 3 \ldots\ldots, +\infty\}$

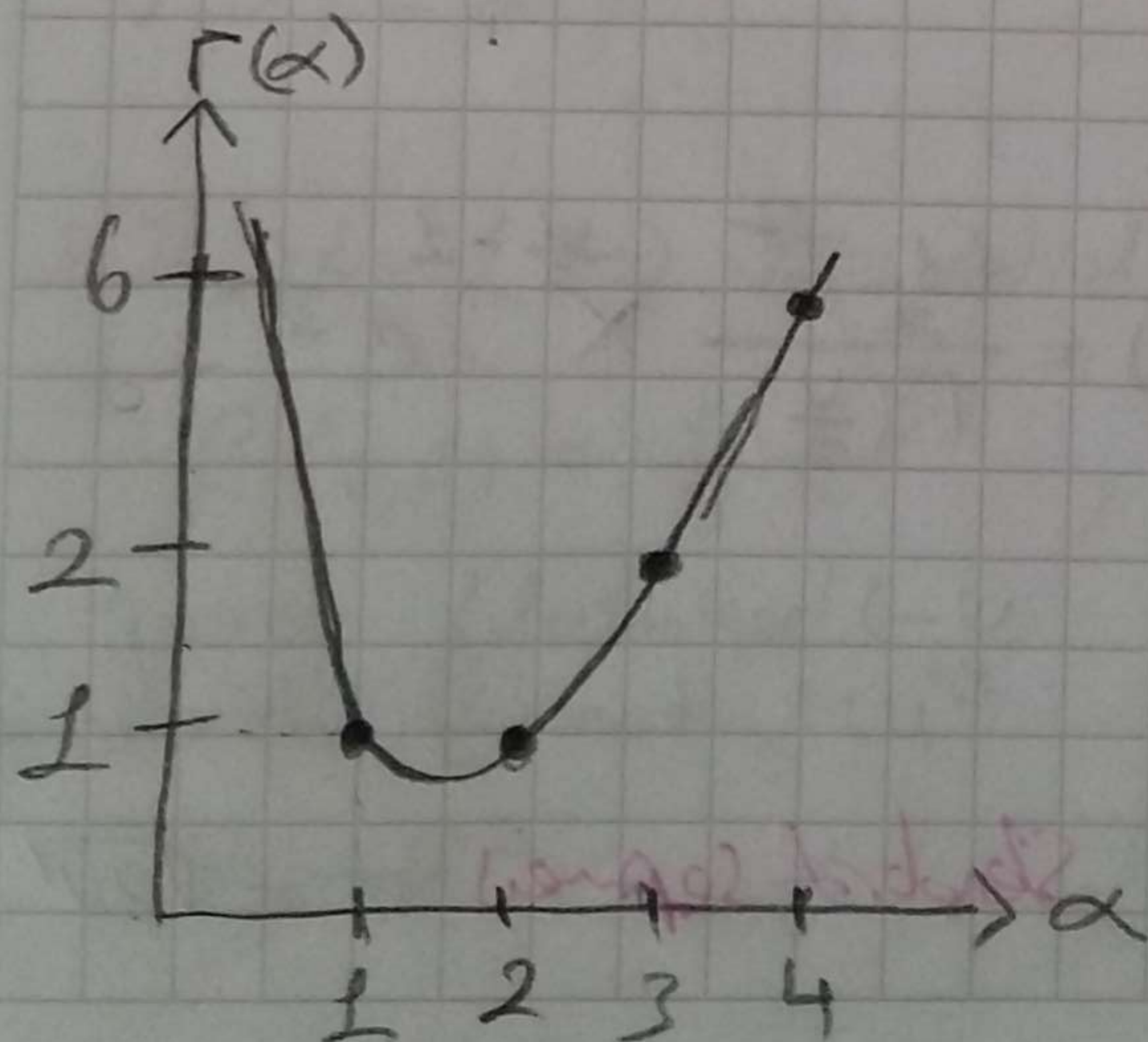$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$$

• Gama fonksiyonunun içine pozitif tam sayı koyduğunda basit şekilde faktöriyelli ifade ile hesaplanabilen.

$$\Gamma(4) = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-x}\,dx = (4-1)! = 3! = 6$$

• Gama fonksiyonunun içine pozitif kesirli bir sayı geldiğinde integral ile hesaplamak zorundayız. integral sonuçsa özdüklü alabaldı bir sayar.

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = \ldots\ldots$$

Gama Fonksiyonunun Grafiği:

$\Gamma(1) = 0! = 1$

$\Gamma(2) = 1! = 1$

$\Gamma(3) = 2! = 2$

$\Gamma(4) = 3! = 6$

Gamma Fonksiyonuna Ait özellikler:

$$\boxed{\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!}$$
$$\Gamma(1) = 0! = 1$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

1) $\displaystyle\boxed{\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda x}\cdot dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}}$, $\lambda > 0$

Ç $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^{5}\cdot e^{-2x}\, dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

$$\alpha = 6 \quad \lambda = 2$$

Çözüm

$$\frac{\Gamma(6)}{2^{6}} = \frac{(6-1)!}{2^{6}} = \frac{5!}{2^{6}} = \frac{120}{64} = \frac{15}{8}//$$

2) $\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha)}$

Ç
$$\Gamma(7) = 6\Gamma(6) = 6\cdot 5\Gamma(5) = 30\,\Gamma(5) \Rightarrow 6! = 30\cdot 4!$$
$$\overset{720}{}\qquad \overset{720}{}$$
$$\to \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$$

3) $\boxed{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$

Ç $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = ?$ **Çözüm**
$$\to 1 + \tfrac{1}{2}$$
$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- Gama dağılımında α yerine 1 yazılırsa üstel dağılım elde edilir.
- ki kare dağılımı: $\alpha = \dfrac{v}{2}$ $\beta = \dfrac{1}{2}$ olan gama dağılımıdır. x^{2} şeklinde gösterilir.

olasılık Yoğunluk Fonksiyonu: $f(x) = \dfrac{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\tfrac{v}{2}\right)} x^{\frac{v}{2}-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

beklenen değer: $\mu = v$

varyans: $\nabla^{2} = 2v$

$v \to$ bağımsızlık derecesi "N°", tam sayı değerler alır.

Standart sapma $\nabla = \sqrt{2v}$

Gama Deram:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \, \Gamma(\alpha)} \quad , \text{ for } x > 0$$

$$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$$

Shape parameter

Scale parameter

$$E(x) = \alpha \cdot \beta$$

$$E(x^2) = (\alpha^2 - \alpha)\beta^2$$

$$V(x) = \alpha \beta^2$$

NOT: $\alpha = 1 \rightarrow$ exponential dist $\beta > 0$

$$f(x, \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \quad , x > 0$$

$$E(x) = \beta$$

$$V(x) = \beta^2$$

NOT 2: $\beta = 2$ ve $\alpha = \frac{r}{2}$ $\longrightarrow$ chi-square dist.

$X \sim \text{Gamma} \left(\alpha = \frac{r}{2}, \beta = 2 \right)$

$X \sim \chi^2(r)$