# Özdeğer ve Özvektörler

$A.v = \lambda . v$

$\lambda \rightarrow$ Sabit sayı $= \{3, 5, -\frac{1}{4}, \ldots\}$

$A \rightarrow$ nxn bir kare matris

$v \rightarrow$ nx1 sütun matrisidir $[\;]$

$\lambda =$ özdeğer (eigen value)

$V =$ özvektör (eigen vector)

$A.V = \lambda . V \Rightarrow A.V - \lambda . V = 0 \Rightarrow (A - \lambda) . V = 0$

$(A - \lambda I) . V = 0$

$I \rightarrow$ Birim matris $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

* $|A - \lambda I| = 0$ $\lambda$'lar özdeğerdir.
* $(A - \lambda_1 . I) . V = 0$ $V$'ler özvektörler.

<u>Tanım:</u> A, nxn'lik bir kare matris; S, nx1'lik sütun vektörler kümesi; $X \in S$ ve $\lambda$ ise bir skaler büyüklük olsun. $(A - \lambda I_n) X = 0_{n,1}$ homojen lineer denklem sisteminin sıfırdan farklı bir X çözümüne sahip olmasını sağlayan her $\lambda$'ya A matrisinin özdeğeri veya karakteristik değeri denir. Bu durumda, her

$\lambda$'ya karşılık gelen sıfırdan farklı X vektörü ise A matrisinin özvektörü veya karakteristik vektörü adını alır.

**NOT:** A kare matrisinin karakteristik denkleminin kökleri, A kare matrisinin özdeğerleridir.

**NOT:** $n \times n$'lik A kare matrisinin birbirinden farklı en fazla n tane özdeğeri olabilir.

Ö: $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

**1. Adım:** $|A - \lambda I| = 0 \rightarrow$ A'nın köşegenlerinden $\lambda$ çıkar.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

karakteristik polinom

$$\left.\begin{matrix} \lambda & -3 \rightarrow \lambda = 3 \\ \lambda & 2 \rightarrow \lambda = -2 \end{matrix}\right\} \text{özdeğerler}$$

**2. Adım:** Her özdeğer için özvektör bul.

- $\lambda = 3$ için özvektör $\rightarrow \underbrace{(A - 3I)}_{\text{A'nın köşegenlerinden 3 çıkar}} v = 0$ $\quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Satırlar mutlaka birbirinin katı olmalı.

$$\boxed{-x_1 - 4x_2 = 0} \longrightarrow \begin{aligned} x_2 &= a \\ x_1 &= -4a \end{aligned}$$

$$\cancel{-x_1 - 4x_2 = 0}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{a\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}}$$

- $\lambda = -2$ için özvektör

$(A + 2I).V = 0$

köşegene 2 ekle $\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\cancel{4x_1 - 4x_2 = 0}$$

$$\boxed{-x_1 + x_2 = 0} \longrightarrow \begin{aligned} x_2 &= a \\ x_1 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{özvektör}}$$

<u>Cevap:</u>

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ 2x2 matrisi için

<u>özdeğerler:</u> $\lambda_1 = 3$ $\quad \lambda_2 = -2$

<u>özvektörler:</u> $V = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

## Özdeğer ve Özvektörlerin özellikleri:

1) Özdeğerlerin çarpımı A matrisinin determinantını verir.

$$\boxed{\det A = \lambda_1 . \lambda_2 \cdots \lambda_n}$$

2) A ile özvektörün çarpımı = özdeğer ile özvektörün çarpımı

$$\boxed{A . v = \lambda . v}$$

3) Özdeğerlerin toplamı matrisin köşegendeki elemanlarının toplamına eşittir.

Teorem: Köşegen elemanları dışındaki elemanları sıfır olan kare matrislerin özdeğerleri köşegen elemanları içerisinde birbirinden farklı olanların tümüdür.

Ör:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$

$\lambda = 1$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$