Kesikli Ortak Olasılık Dağılımında Koşullu Olasılık Hesabı

$$E(u(X)/Y=y) = \sum_{x} u(x)\,P(x\backslash y)$$

$$P(X\backslash Y=y) = \frac{\overbrace{P(X=x, Y=y)}^{\text{ortak olasılık dağılımı}}}{\underbrace{P(Y=y)}_{\text{Y'nin marjinali}}}$$

Ö/

Y \ X	2	3	4
5	0,12	0,42	0,06
6	0,08	0,28	0,04

A) $P(X=2 / Y=6) = ?$

B) $P(Y=5 / X=4) = ?$

C) $P(Y=6 / X\leq 3) = ?$

1. Adım: Marjinalleri bul

Y	5	6
P(Y)	0.6	0,4

,

X	2	3	4
P(X)	0,2	0,7	0,1

2. Adım: Formülde yerine koy

$$\text{Formül} = \frac{\overbrace{P(X=x, Y=y)}^{\text{X ile Y'nin aynı anda gerçekleşmesinin olasılığı tablodan bulunur}}}{\underbrace{P(Y=y)}_{\text{marjinal olasılık}}}$$

A) $\dfrac{P(X=2, Y=6)}{P(Y=6)} = \dfrac{0,08}{0.4} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$

B) $\dfrac{P(Y=5, X=4)}{P(X=4)} = \dfrac{0.06}{0.1} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$

C) $\dfrac{P(Y=6, X=2) + P(Y=6, X=3)}{P(X\leq 3)} = \dfrac{0,08+0,28}{\underbrace{0,7+0,2}_{\text{marjinal hesabı}}}$

$= \boxed{\dfrac{2}{5}}$

Sürekli Ortak Olasılık Dağılımında Koşullu Olasılık Hesaplama

$$P(X \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y), & \text{for } 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Find the conditional mean and the conditional variance X given $Y=\frac{1}{2}$

Adım 1: Marjinal olasılıkları bul

X marjinal $\rightarrow g(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy = \boxed{\frac{2}{3}(x+1)}$

y marjinal $\rightarrow h(y) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx = \boxed{\frac{1}{3}(4y+1)}$ Fonksiyonu marjinale böl

Adım 2: Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu hesapla

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{2}{3}(x+2y)}{\frac{1}{3}(1+4y)} = \boxed{\frac{2x+4y}{1+4y}}$$

Adım 3: $Y=\frac{1}{2}$ yerine koy fonksiyonu hesapla $y=\frac{1}{2}$ koy

$$f(x \mid \tfrac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1), & \text{for } 0<x<1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Adım 4: Varyansı hesapla

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \Rightarrow E(X \mid \tfrac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{2}{3}x\cdot(x+1)\,dx = \boxed{\frac{5}{9}}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \Rightarrow E(X^2 \mid \tfrac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2(x+1)\,dx = \boxed{\frac{7}{18}}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \Rightarrow Var(X \mid \tfrac{1}{2}) = \frac{7}{8} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \boxed{\frac{13}{162}}$$