Genelleştirilmiş İntegral

(Improper Integral)

$\boxed{\int \ln x \, dx = x\ln x - x + c}$

$\boxed{\ln(\infty) = \infty}$

$\boxed{e^{\infty} = \infty}$

$\boxed{e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0}$

$\boxed{\ln 0^+ = -\infty}$

1

2 çeşidi vardır

Sınırlarında sonsuz içeren integraller

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

Sonuç = $+\infty, -\infty$ Iraksak (divergent)

Sonuç = Sayı Yakınsak (convergent)

Sınırlarında tanımsızlığa neden olan sınır içeren integraller

$$\int_1^3 \frac{1}{x-3}\,dx \qquad \int_2^5 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$\int_3^1 \frac{1}{x-2}\,dx$$

Arada bir değer

---

1. Çeşit: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$

Ör: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = ?$

1.Adım: $\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x}\,dx$

2.Adım: $\lim_{t\to+\infty} (\ln x)\Big|_2^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 2) = \infty - \ln 2 = +\infty$

---

2. Çeşit: $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$

Ör: $\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx = ?$

1.Adım: $\lim_{t\to-\infty} \int_t^1 e^x\,dx$

2.Adım: $\lim_{t\to-\infty} (e^x)\Big|_t^1 = \lim_{t\to-\infty} (e - e^t) = e - \underbrace{e^{-\infty}}_{0} = e$

---

3. Çeşit: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

Ör: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = ?$ Trigonometrik ters

Karşılaştırma Testi

Büyükse yakınsak

Küçükse ıraksak

Limit karşılaştırma

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \text{sonuç} > 0, \neq \infty, -\infty$$

b_n neyse a_n de odur.

2

Sınırlarında Tanımsızlık İçeren Genelleştirilmiş İntegraller

> **Önemli olan:** Tanımsızlık yapan yerin yerine t diyerek bunu limite dönüştürmektir.

1. Çeşit: Üst sınır tanımsız yapıyorsa üst sınıra soldan yaklaş.

Ör: $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x-3}\,dx = ?$

1. Adım: $\displaystyle\lim_{t\to 3^-}\int_1^t \frac{1}{x-3}\,dx \Rightarrow$ **2. Adım:** $\displaystyle\lim_{t\to 3^-}\left(\ln|x-3|\right)\Big|_1^t$

$$\lim_{t\to 3^-}\left(\ln|t-3| - \ln 2\right) = \lim_{t\to 3^-} \ln\left|\frac{t-3}{2}\right| = \ln|0^-| = \ln 0^+ = -\infty$$

---

2. Çeşit: Alt sınır tanımsız yapıyorsa alt sınıra sağdan yaklaş.

Ör: $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx = ?$

1. Adım: $\displaystyle\lim_{t\to 1^+}\int_t^3 \frac{1}{x-1}\,dx \Rightarrow$ **2. Adım:** $\displaystyle\lim_{t\to 1^+} \ln|x-1|\Big|_t^3$

$$\lim_{t\to 1^+} \ln 2 - \ln|t-1| \Rightarrow \lim_{t\to 1^+} \ln\left|\frac{2}{t-1}\right| = \ln\left|\frac{2}{0^+}\right| = \ln\infty = \infty$$

---

3. Çeşit: Sınırların arasındaki bir değer tanımsız yapıyorsa

Tanımsız yapan noktadan integrali 2 parçaya ayır.

Ör: $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x-2}\,dx = ?$

1. adım: $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx$

Parçaları → limite dönüştür
üst sınıra soldan
alt sınıra sağdan yaklaş
integral al çöz.
