

Hipotez Testleri

Amaç: Popülasyon parametresi hakkında ortaya atılan bir iddianın doğru olup olmadığını örneklem verileri kullanarak belirlemektir.

İstatistiksel Hipotez: Popülasyon parametrelerine ilişkin olarak ileri sürülen ve geçerliliği olasılık kanunlarına göre araştırılabilen özel önermelerdir.

* Örneklem istatistiklerinden yararlanarak bir hipotezin geçerli olup olmadığını ortaya koyma işlemine hipotez testi denir.

* Örneklem istatistikleri ile hipotez oluşturulmaz.

Sıfır Hipotezi ve Karşıt Hipotez

Popülasyon hakkında ortaya bir iddia atılır
iki tane hipotez elde edebiliriz.

Daima iddiada
geçer sayılır ← H_0 : Sıfır hipotezi (null hypothesis)

Daima iddiayı
gösterebilir. ← H_1 : Karşıt hipotez (alternative hypothesis)

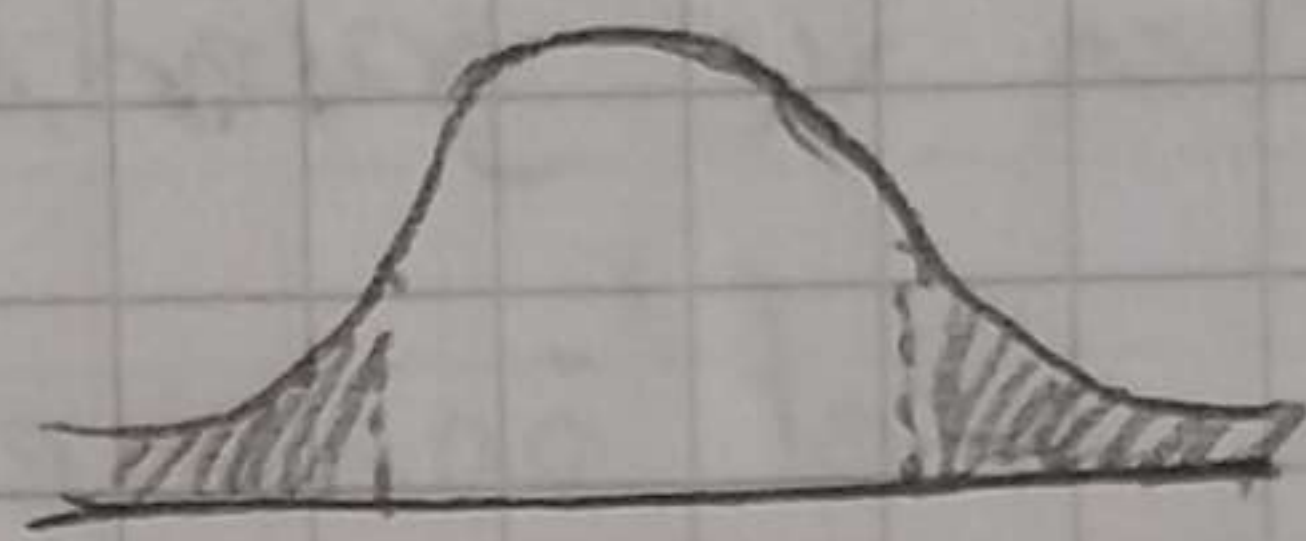
* Hipotez testinde bir hipotezle onun karşıtı (H_0 ve H_1) olan hipotezden hangisinin örneklemden elde edilen sonuçla daha iyi bağdaştığı araştırılmaktadır.

H_0 : Örneklemeden elde edilen değer ile popülasyonun bilinen değeri arasında fark yoktur.

H_1 : Örneklemeden elde edilen değer ile popülasyonun bilinen değeri arasında önemli bir fark vardır.

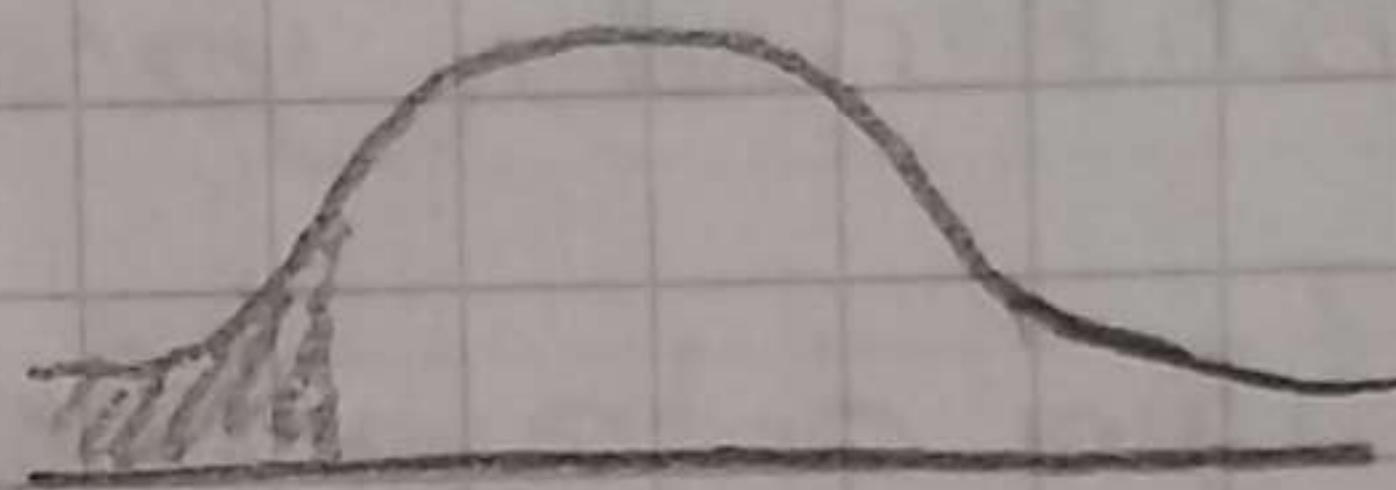
Hipotezlerin kurulumu $\mu, \sigma, \sigma^2, \rho$

1. Çesit: $H_0: \mu = \mu_0$
 $H_1: \mu \neq \mu_0$



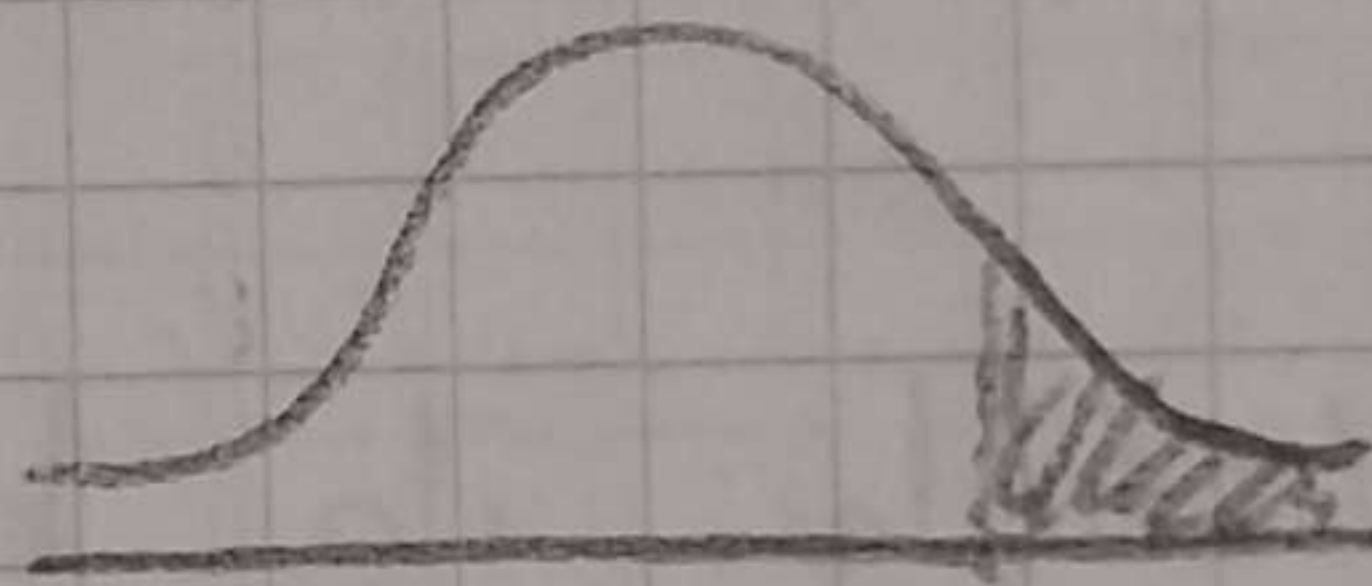
İki taraf
(two tail)

2. Çesit: $H_0: \mu = \mu_0$
 $H_1: \mu < \mu_0$



Tez taraf
(one tail)

3. Çesit: $H_0: \mu = \mu_0$
 $H_1: \mu > \mu_0$



Tez taraf
(one tail)

Anlamlılık Düzeyi (Significance Level) (α)

* Hipotez testinin bütünü gösterir. α = Anlamlılık düzeyi

* α arttıkça hipotezin bütünü düşer. $1 - \alpha$ = Güven düzeyi

* $\alpha \rightarrow$ kritik bölge (critical region) (Ret bölgesi) %95 $\rightarrow \alpha = 0,05$

* Kritik değeri anlamlılık düzeyi ile buluruz.

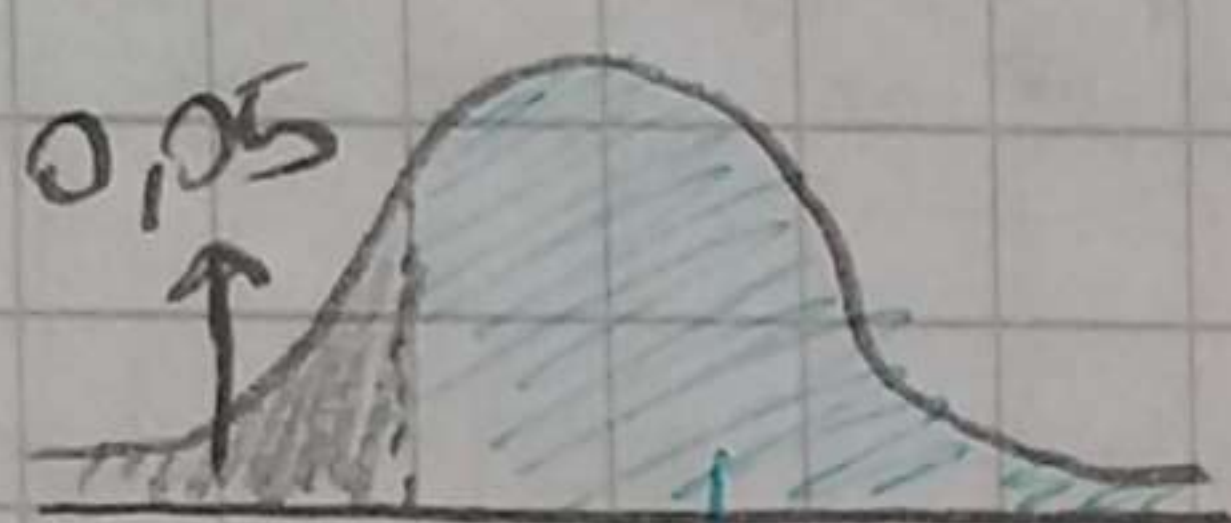
* Bizim bir hipotezde hedefimiz H_0 'i reddetmek.

H_0 'i reddedilmeli; orijinal atılan iddia doğru olsun.

Kritik Bölge, kritik değer ve Test İstatistiği (Critical Region, Critical Value and Test statistic)

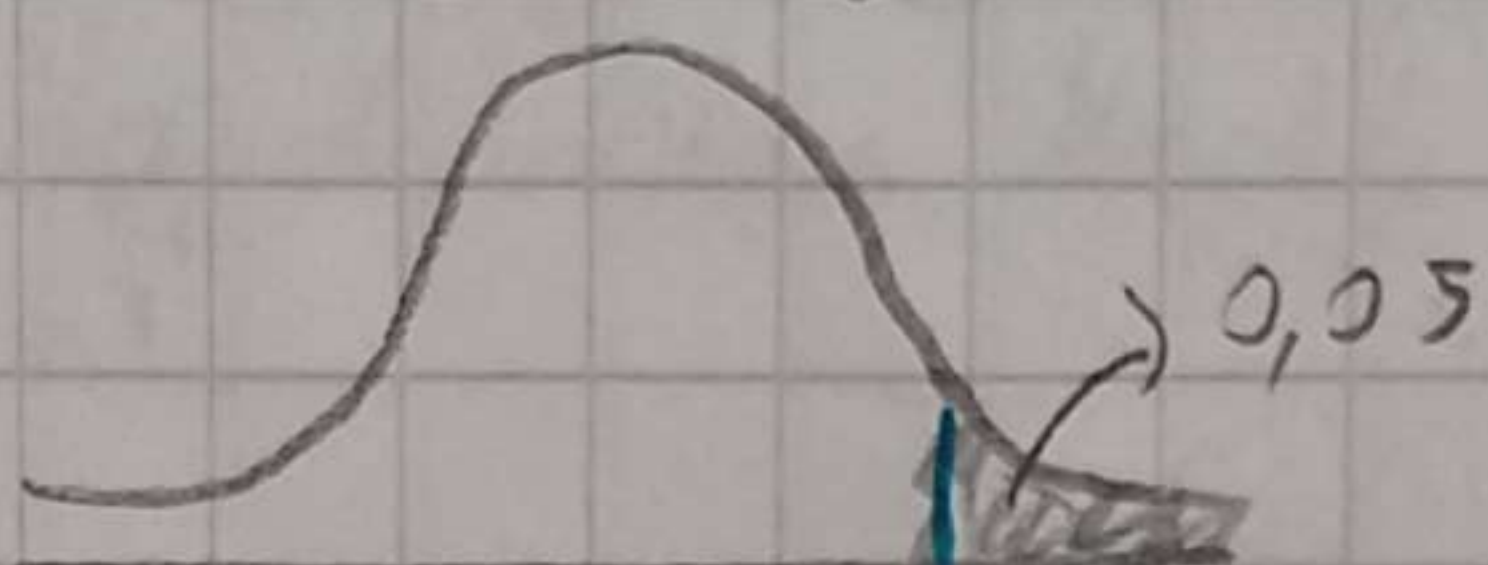
Kritik Bölge (Ret bölgesi): Anlamlılık düzeyinden (α) elde edilir. 3 çeşidi vardır H_0 hipotezin reddedildiği bölgedir.

1. Çeşit: $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu < 10$



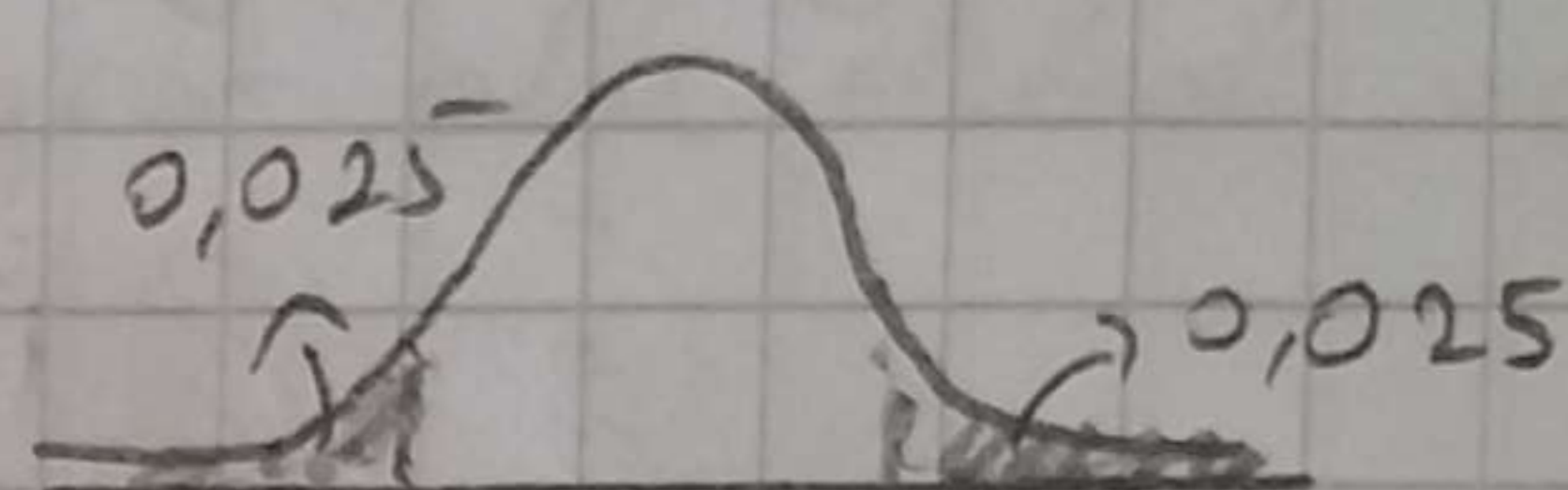
$\rightarrow H_0$ 'ın reddedilmediği bölge.

2. Çeşit: $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu > 10$



Kritik değer

3. Çeşit: $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu \neq 10$



Kritik Değer: Hipotez testinde ret bölgesini, H_0 'ın reddedilmediği bölgeden ayıran değere denir. 4 tane örneklem dağılımı vardır; bunlar: Z , t , χ^2 ve F 'tir. Bunlardan biri ile kritik değer bulunur.

Test istatistiği: Hangi dağılımın kullanılacağı öncelikle

belirlenmelidir. Z , t , χ^2 , F için her birinde belirli birimel vardır.

Pop. Varian Biliniyor

$$Z_{\text{Test}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Pop. Varian Bilinmiyor

$$F_{\text{Test}} = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2}$$

Pop. Varian Biliniyor $n \geq 30$

$$Z_{\text{Test}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Pop. Varian Bilinmiyor $n < 30$

$$t_{\text{Test}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Oran için Hipotez. Z testi

$$Z_{\text{Test}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

1. Ve 2. Tip Hata Kayımları (Type I and II Error)

Hipotez testi sonucunda 4 olası sonuç vardır.

1. Sonuç: H_0 gerçekte doğrudur ve reddedilmemiştir. (kabul edilmiştir)

2. Sonuç: H_0 gerçekte doğrudur ve reddedilmiştir. (kabul edilmiştir)

3. Sonuç: H_0 gerçekte yanlıştır, fakat reddedilmemiştir. (kabul edilmiştir)

4. Sonuç: H_0 gerçekte yanlıştır, reddedilmiştir. (kabul edilmiştir)

		Gerçek Durum	
		H_0 doğru	H_0 yanlış
Test Sonuç	H_0 red	I. Tip Hata α	Doğru karar $1-\beta$
	H_0 kabul	Doğru karar $1-\alpha$	II. Tip Hata β

$$P(\text{1. Tip Hata}) = \alpha = \text{olam düzeyi}$$

$$P(\text{2. Tip Hata}) = \beta$$

Hipotez Testinin Gücü: H_0 hipotezi yanlış iken onun reddedilmesi.
(Power of test)

olasılığı testin gücüdür. $1-\beta$

Yani doğru karar verme olasılığıdır.

$$P(H_0 \text{ Red} / H_0 \text{ Yanlış}) = 1-\beta$$

↳ doğru karar

I. tip hata: H_0 doğru iken reddetmek

II. tip hata: H_0 yanlışken reddetmek.

NOT: 1. tip hata ile 2. tip hata arasında bir değişme bulunmaktadır. Birinin azaltılması diğersini artırır.

Hipotez Testinin Uygulanma Adımları

1. Adım: Hipotezler oluşturulması $H_0: \dots$
 $H_1: \dots$

2. Adım: Anlamlılık düzeyi α belirlenmesi ve hipotezlerin kuruluşuna göre red bölgesi ve kabul bölgesi çizimi yapılmalıdır.

3. Adım: Örneklem dağılımının belirlenmesi, Z, t, χ^2, F

4. Adım: Bu örneklem dağılımından kritik değer elde edilmesi ve red bölgesi belirlenmesi.

5. Adım: Test istatistiği hesaplanması. (Her örneklem dağılımında farklı β md)

6. Adım: Kritik değer ile test istatistiğini karşılaştırarak H_0 red mi edilecek kabul mi edilecek karar ver.

Hipotez Testinde Örneklem Dağılımını Belirleyen Şeyler:

1. Şey: Popülasyon Ortalamasının Hipotez Testi (μ)

→ Popülasyon varyansı biliniyorken (σ^2) \Rightarrow Z tablosu

→ Popülasyon varyansı bilinmiyorken (σ^2) ve $n \geq 30 \Rightarrow$ Z tablosu

→ Popülasyon varyansı bilinmiyorken (σ^2) ve $n < 30 \Rightarrow t$ tablosu

2. Şey: Popülasyon Oranının Hipotez Testi (P) \Rightarrow Z tablosu

3. Şey: Popülasyon varyansının Hipotez Testi (σ^2) $\Rightarrow \chi^2$ tablosu

4. Şey: Eşleştirilmiş Gözlemler için Ortalamanın Farkı (m_d) $\Rightarrow t$ tablosu

5. Gecit: Populasyon Ortalamalarının Farkı için H.T. ($\mu_1 - \mu_2$)

→ Populasyon varyansları bilinirken (σ_1^2, σ_2^2) ⇒ Z tablosu

→ Populasyon varyansları bilinmipken (eşit kabul edilme durumu) ⇒ t tablosu

→ Populasyon varyansları bilinmipken (varyansların eşit olmama durumu) ⇒ t tablosu

6. Gecit: İki populasyonun Oranlarının Farkı için ($p_1 - p_2$) ⇒ Z tablosu

7. Gecit: İki Populasyon Varyansının Oranı için ($\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$) ⇒ F tablosu

P. Value

- Bir hipotez testinde H_0 'ı reddetmemizi sağlayan en küçük anlamlılık düzeyine denir.

Hipotez Testi Sorusu Gözüm yöntemleri

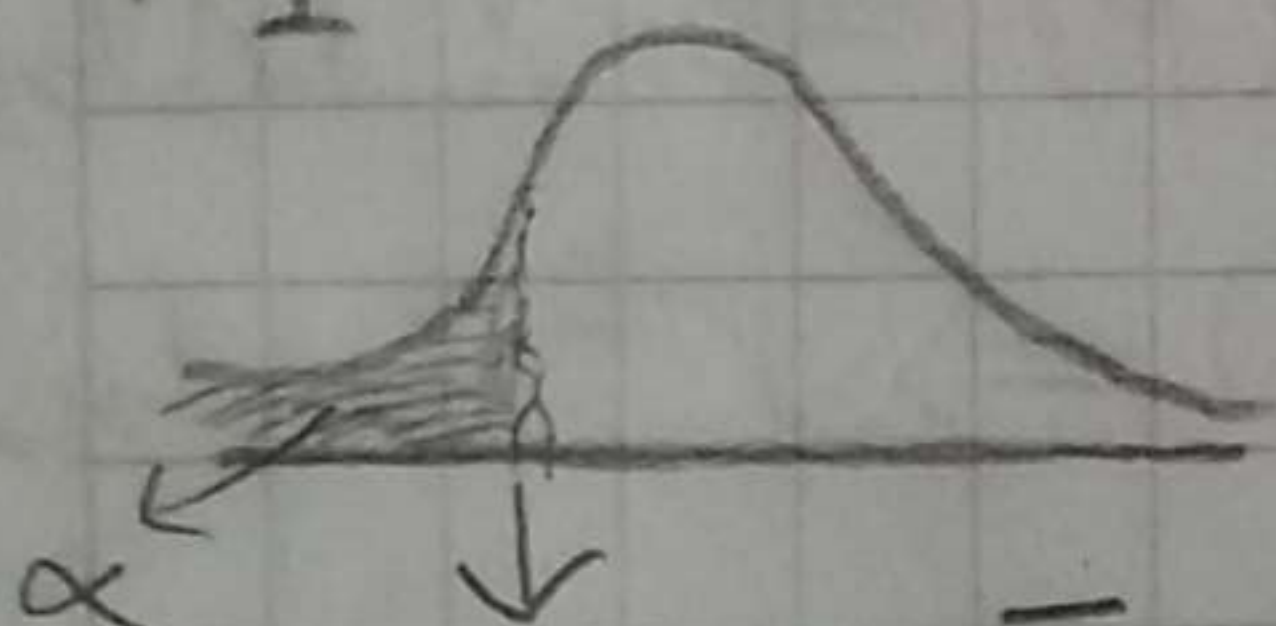
1. Yol → Kritik değer ve test istatistiği hesaplama ve bunları karşılaştırma ile çözüm

2. Yol → P değeri ile anlamlılık düzeyinin (α)'ın karşılaştırılması.

Ortalama için Hipotez Testi Soruları (populasyon varyansı bilinen)

α = anlamlılık düzeyi; soruda verilir ⇒ P value hesaplıyoruz!

1. Gecit:
 $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu < 10$

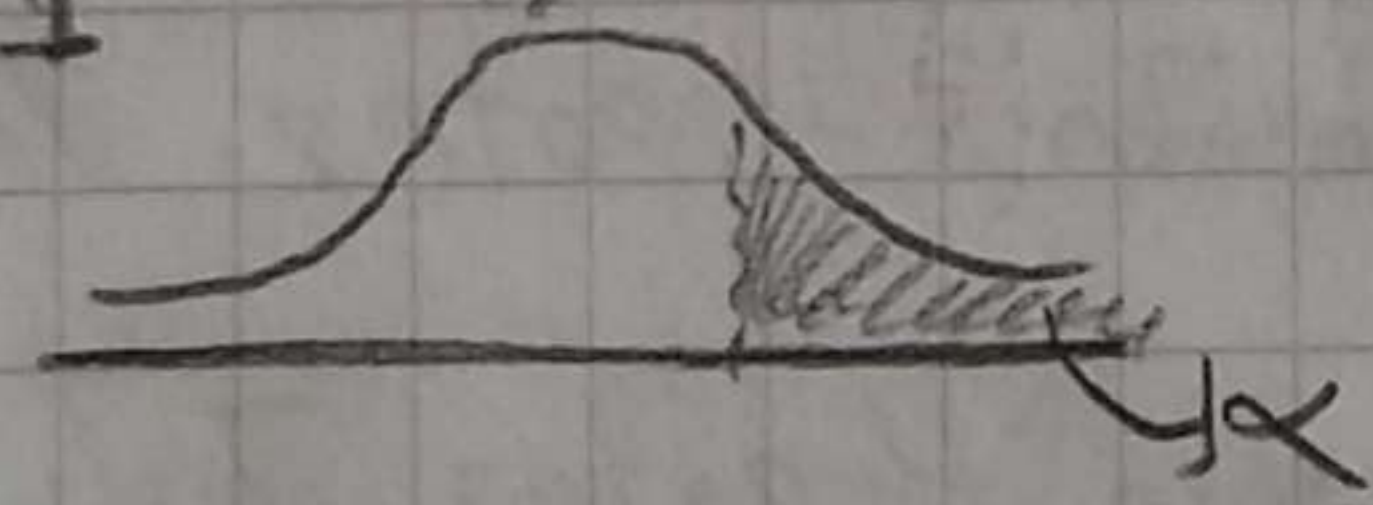


P değeri = $P\left(Z < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

Z tablosu ile hesaplıyoruz!

$P < \alpha$
 H_0 reddedilir (reject H_0)

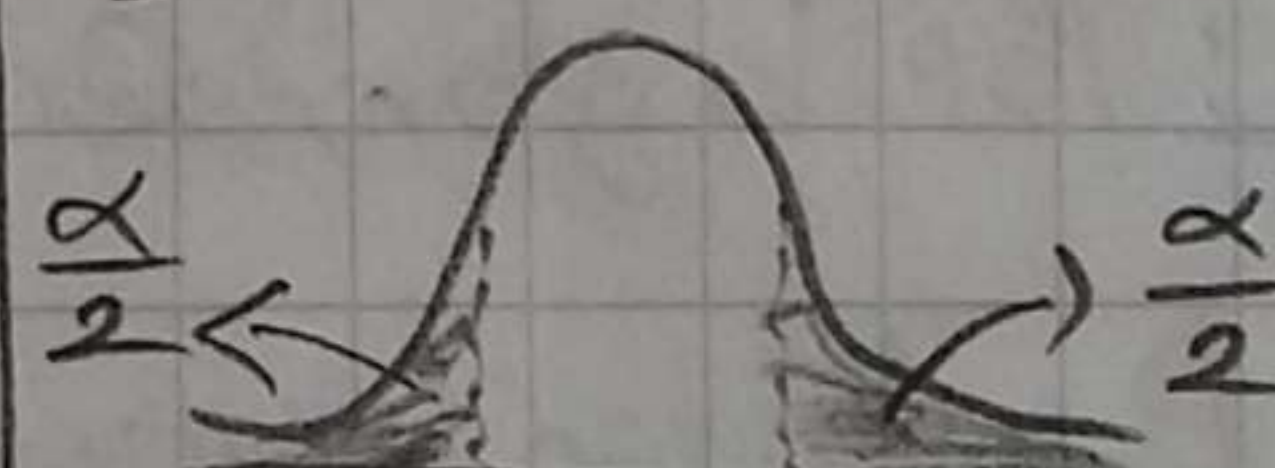
2. Gecit:
 $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu > 10$



P değeri = $P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z\right)$

$P < \alpha$
 H_0 reddedilir

3. Gecit:
 $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu \neq 10$



P value = $2P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z\right)$

P value = $2P\left(Z < -\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

$P < \alpha$
 H_0 reddedilir

$$P = 2 \cdot P \left(Z > \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right) \rightarrow Z \text{ test pozitif ise}$$

$$P = 2 \cdot P \left(Z < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right) \rightarrow Z \text{ test negatif ise}$$

• test istatistikini hesaplandığında Z'nin orden büyük olma olasılığı bize P değerini verecek. (Pozitif için)

• Eğer ki Z test sonucu (-) ise Z'nin orden küçük olma olasılığının iki katı bize P değerini verecek.

P değeri ilk hipotez testi sorusunun çözüm adımları:

1. Adım: Hipotezi yaz

2. Adım: Verileri çıkartıp hangi tabloyu kullanacağını belirler.

3. Adım: Test istatistikini hesapla

4. Adım: P değerini bul \rightarrow P değeri bir olasılıktır, tablodan hesaplanır.

5. Adım: P değeri ile α 'yı karşıla. Karara var.

İki ortalama farkı için Hipotez Testi - Pop. Varyansları biliniyor

$$Z_{\text{test}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Eşleştirilmiş Gözlemler için Hipotez Testi

$$t_{\text{test}} = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

İki oran için Hipotez Testi

$$Z_{\text{test}} = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1 \cdot (1 - \hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2 \cdot (1 - \hat{P}_2)}{n_2}}}$$

NOT: Testin güç $(1 - \beta)$: Bir testin güç gösterde yanlış olan yanlış hipotezini reddedebileceğimize becerisidir.

Diyer bir deyişle toplumdaki (görselde) var olan bir etkiyi testin yakalayabilme becerisidir. Testin gücünün doğal olarak yüksek olması istenir.

Tanımından hareketle bir testin gücünün sadece yanlış hipotezi reddedilmesinde hesaplanabileceği görülmektedir.

NOT: 1. tip hata ile 2. tip hata ters orantılı, α ile doğru orantılıdır.

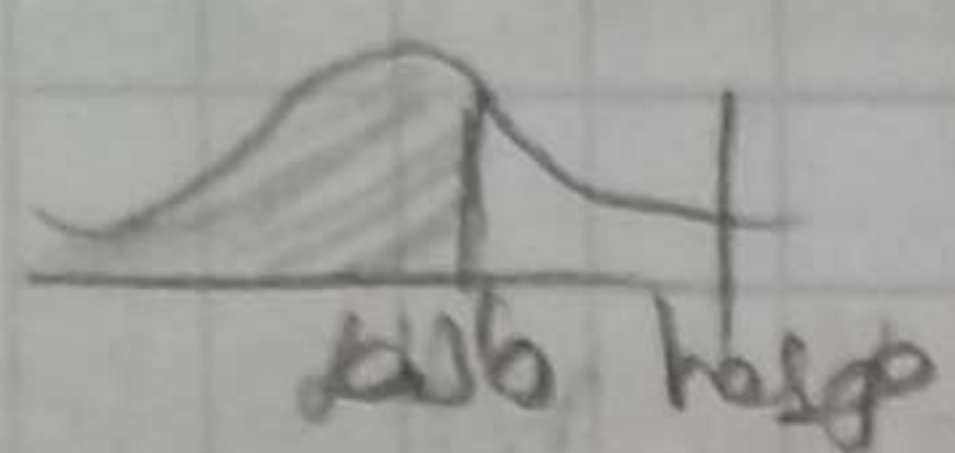
NOT: Testin α 'sını sorarsa testi olduğu şekilde kabul ederiz. Soruda zaten fortını verir.

NOT: β hesabı bir kabile değişir. Dönüşümü: β olasılığı bul. $\text{Power} = 1 - \beta$

- Kaydırımda α 'nın değeri aynı kalır. Alternatif hipotez arasındaki mesafeyi arttırarak β azalır. Böylelikle β , α 'ya yakınsa 1. tip I hataya da bağlıdır.

Ki kare uygunluk testi

* Ki kare hesap değerinin her zaman sıfıra yakın olmasını isteriz. Ki kare hesap > Ki kare tablo ise



H_0 hipotezini reddedebiliriz.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(G_i - B_i)^2}{B_i}$$

* Yalnız bir χ^2 değeri, gözlenen ve beklenen frekanslar arasında zayıf bir uyum anlamına gelir, bu nedenle uygunluk testlerinde şu hipotez testi için değere istiyorsanız kullanılır.

* Binom dağılımı uygunluk testinde her denemede sabit başarı olasılığı olmalı.

* Poisson uygunluk testinde eş zamanlı orıza verilmeli.

λ 'yı bulmak için beklenen değeri $O_i = f_i$ 'lerin toplamına böl.

* Exponential $P(X < a) = \int_0^a \frac{e^{-x/\lambda_0}}{\lambda_0} dx = 1 - e^{-a/\lambda_0}$ $\lambda = \frac{1}{\text{ortalama}}$

Üstelde λ 'yı bulmak için simit orbi not defterini

kullanarak beklenen değeri hesaplar, $O_i = f_i$ 'ye böl.

* Normal dağılımı $\sum f(x)$ (beklenen, tablo), $\sum f(x)^2$ 'ye böl