

Mathematical Statistics

bivariate case \rightarrow iki deęişkenli durum
involve \rightarrow ięerme
Permit \rightarrow izin vermek

1) Multivariate Distributions: (çok değişkenli dağılımlar)

İstatistikteki en ilginç problemlerin tümü aynı anda birden fazla ölçme, ölçümler arasındaki ilişkilere ve aralarındaki karşılaştırmalara bakmayı iğerir.

1.1) Discrete Bivariate Distributions: (kesikli iki değişkenli dağılımlar)

X ve Y , aynı S örneklem uzayında tanımlanan iki rastgele değişken olsun, yani aynı deneye veya olaya ilişkin olarak tanımlanan iki değişken söz konusu.

Bu durumda, bu iki değişkenin birbirleriyle etkileşimlerini veya birbirlerini nasıl etkileyebileceklerini değerlendirmek anlamlı olabilir.

X ve Y 'nin bivariate (iki değişkenli) olasılık fonksiyonu ise $P(x, y)$ şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon $X=x$ ve $Y=y$ olma olasılığını ifade eder. Bu X ve Y 'nin ortak olasılık dağılımını belirtir.

$$P(x, y) = P(X=x \text{ and } Y=y)$$

\rightarrow Ortak olasılık
kütlesi fonksiyonu

* Çok değişkenli dağılım, birden fazla rasal değişkenin birliktelik dağılımını ifade eder.

• Ortak olasılık kitle fonksiyonu $P(x, y)$, X ve Y 'nin bir çift değer alması için olasılığı verir. Örneğin; $P(2, 3) = P(X=2 \text{ and } Y=3)$ demektir.

Ortak olasılık kitle fonksiyonu şu koşulları sağlamalıdır:

1. $P(x, y) \geq 0$ her (x, y) çifti için.

2. $\sum_x \sum_y P(x, y) = 1$ tüm (x, y) çiftleri için $P(x, y)$ toplamı 1 olmalıdır. Bu discrete bivariate distribution'ın normalleştirilmiş olması gerektirdiği anlamına gelir.

Bu şartlar sağlandığı takdirde, $P(x, y)$ fonksiyonu X ve Y 'nin ortak olasılık dağılımını ifade eder ve iki rastgele değişkenin birlikte nasıl davrandığını modellemek için kullanılabilir.

Tanım: X ve Y kesikli r.v. ile,

$$F(x, y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} P(s, t) \quad \text{for } -\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty$$

is called the joint distribution function, or the joint cumulative distribution, of X and Y .

Bu ifade X ve Y 'nin belirli bir değere kadar veya eşit olma olasılığını verir. Örneğin $F(2, 3) = P(X \leq 2; Y \leq 3)$, X ve Y 'nin 2'den küçük veya eşit ve 3'ten küçük veya eşit olmasının olasılığıdır. Joint cdf özellikleri şöyledir:

- $F(x, y) \geq 0$, • $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$, • $F(x, \infty) = F_X(x)$
- $F(\infty, \infty) = 1$ • $F(y, \infty) = F_Y(y)$

Discrete Joint Probability Distributions (kesikli ortak olasılık dağılımları)

ör 1.

$Y \backslash X$	0	1	2
3	c	$2c$	$3c$
4	$4c$	$5c$	$6c$

a) c kaçtır?

b) $P(X=2, Y=4) = ?$

c) $P(X \leq 1, Y=3) = ?$

d) $P(X+Y \leq 4) = ?$

Çözüm:

$$a) c + 2c + 3c + 4c + 5c + 6c = 1$$

$$21c = 1 \rightarrow \boxed{c = \frac{1}{21}}$$

$$b) P(X=2, Y=4) = 6c = \boxed{\frac{6}{21}}$$

$$c) P(X \leq 1, Y=3) = P(X=0, Y=3) + P(X=1, Y=3) \\ = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} = \boxed{\frac{3}{21}}$$

$$d) P(X+Y \leq 4) = P(X=0, Y=4) + P(X=1, Y=3) + P(X=0, Y=3) \\ = \frac{4}{21} + \frac{2}{21} + \frac{1}{21} = \boxed{\frac{7}{21}}$$

$$\begin{aligned} * P(X, Y) &= P(X=x \text{ and } Y=y) \\ &= P(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) \\ &= P(\{X=x\}) \cdot P(\{Y=y\}) \\ &= P_X(x) \cdot P_Y(y) \end{aligned}$$

82.

Bir torbada, 2 mavı, 3 yeşil ve 4 kırmızı top vardır.

B torbadan 2 top çekiliyor X = kırmızı top gelme sayısı, Y = yeşil top gelme sayısı. X ve Y rastgele değişkenlerine ait kesikli ortalık olasılık dağılımını bulunuz.

kırmızı $X = \{0, 1, 2\}$ yeşil $Y = \{0, 1, 2\}$ $\left(\begin{smallmatrix} 2M \\ 3Y \\ 4K \end{smallmatrix}\right)$ 9 Top

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{2}{72}$	$\frac{16}{72}$	$\frac{12}{72}$
1	$\frac{12}{72}$	$\frac{24}{72}$	0
2	$\frac{6}{72}$	0	0

$$P(X=0, Y=0) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{2}{72}}$$

$$P(X=1, Y=0) = KM \text{ veya } MK$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \boxed{\frac{16}{72}}$$

$$P(X=2, Y=0) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \boxed{\frac{12}{72}}$$

$$P(X=0, Y=1) = MY \text{ veya } YM$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \boxed{\frac{12}{72}}$$

$$P(X=1, Y=1) = KY \text{ veya } YK$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} = \boxed{\frac{24}{72}}$$

$$P(X=2, Y=1) = \boxed{0} \rightarrow \text{Görselleştirilmesi için 3 top çekiliyor}$$

$$P(X=0, Y=2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \boxed{\frac{6}{72}}$$

$$P(X=1, Y=2) = 0$$

$$P(X=2, Y=2) = 0$$