1

Olasılık: "Belirsizliğin mantığı" Bir olayın olabilirliği

Deney (Experiment): Olanaklı sonuçlardan birisiyle sonuçlanan bir süreç.

Örnek Uzay (Sample Space): Bir deneyin olanaklı tüm sonuçlarının kümesidir.

Örnek nokta: Örnek uzaydaki her bir eleman.

Deneysel Olasılık (Experimental Probability): Bir gözleme dayalı olarak tahmin edilen olasılıktır.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{A olayının gerçekleşme sayısı}}{\text{Prosedürün tekrar edilme sayısı}}}$$

Ör/ Bir oyuncunun serbest atışta başarılı olma olasılığı. 10 atış gözledik 4'ü başarılı $P(A) = \frac{4}{10} = \%40$

Teorik Olasılık (Theoretical Probability): Bir olayın gerçekleşme ihtimalinin teorik olarak, gözlem olmadan hesaplandığı olasılık çeşididir. * Geçerli olabilmesi için tüm örnek noktaların gerçekleşme ihtimalinin eşit olması gerekir.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{A olay kümesinin eleman sayısı}}{\text{örnek uzayın eleman sayısı}}}$$

Ör/ Desteden kupa seçme.

Olayların Bileşimi (composition of events): A ve B iki olay olsun. A veya B veya her ikisi birden gerçekleşmesi durumunu $A \cup B$ ile ifade edeceğiz.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

* A ve B ayrık olay ise $|A \cap B| = 0$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Olayların kesişimi (intersection of events): A ve B'nin birlikte gerçekleştiği durumu $A \cap B$ ile gösteri. ($\cap$ ⇒ ve)

Çarpım kuralı (multiplication rule): Bir deney için m tane olası sonuç varsa, bir başka bağımsız deney için n tane olası sonuç varsa, ikisinin birlikte düşünülmesi mn tane olası sonuç doğurur. Bağımsız deney olmalı, birbirini etkilemeyen.

Kesişim hesaplanması:

A ve B olayları bağımsız ise $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A ve B olayları bağımsız değil ise $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Koşullu Olasılık (Conditional Probability): P(A|B) olarak gösterilir ve B olayının gerçekleşmiş olması koşuluyla A olayının gerçekleşme ihtimalini ifade eder.

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Bağımsızlık → $\boxed{P(A|B) = P(A)}$

Bağımsızlık (Independence): A ve B olayları, eğer birisinin gerçekleştiğini bilmek bir diğerinin gerçekleşme olasılığını hiçbir şekilde etkilemiyorsa bağımsızdır denir.

Uyarı: Bağımsız olaylar, ayrık demek değildir.

Bayes Teoremi: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Rastgele Değişkenler Ve Olasılık Dağılımları

Rastgele Değişken: Değeri bir deney sonucuyla belirlenen, izini sürdüğümüz, takip ettiğimiz değişkendir. Örnek uzaydan reel sayılar kümesine tanımlı bir fonksiyondur.

Kesikli Rastgele Değişken (discrete random variable): Alacağı değerler sonlu veya sayılabilir ise.

Sürekli Rastgele Değişken (Continuous random varaible): Sayılamayan miktarlar → zaman, yükseklik, ağırlık vs.

Olasılık Dağılımı: Bir rastgele değişkenin alabileceği değerlerin, karşılık gelen olasılık değerleri ile birlikte belirtilmesidir.

$$\underbrace{P(y)}_{\text{O. fonksiyonu}} = P(\underbrace{Y}_{\text{Y Rastgele D.}}=y)$$

Kesikli bir rastgele değişkenin beklenen değeri (ortalama) (expected value):

$$\mu = E(Y) = \sum_{y \in R} \underbrace{P(y)}_{\text{olasılık f.}} y \rightarrow \text{y rastgele değişkeninin aldığı değer.}$$

- Rastgele değişkenimiz olan Y'nin alabileceği değerlerin ortalamasıdır.
- Bir deney çok fazla sayıda tekrarlandığında uzun vadede beklenebilecek ortalama y değerini anlatır.
- Mesela Y değeri bir oyundan kazanılan para miktarı ise E(y) uzun vadede ortalama bir oyundan elde ettiğimiz kazançtır.

Kesikli Olasılık Dağılımları

Binom Dağılımı:

$$\boxed{P(y) = \binom{n}{y} \cdot p^y \cdot q^{n-y}}$$

$0 \leq y \leq n$

$q = 1 - p$

- n tane özdeş deneme
- Her bir deneme için iki sonuç (başarı - başarısızlık)
- Tek bir deneme için başarı - başarısızlık olasılıkları hep aynı
- Denemeler birbirinden bağımsız.

n = denemelerin sayısı
p = bir denemedeki başarı olasılığı
q = bir denemedeki başarısızlık olasılığı
y = rastgele değişkenin aldığı değer

Poisson Dağılımı: ortalama verilirse

- Sürekli bir zaman aralığında, bir alanda ya da hacimde bir olayın/başarının sayılması söz konusu.
- Verilmiş bir zaman aralığında, bir alanda ya da hacimde başarıların sayısı Y rastgele değişkeni ile gösterilsin.
- Bu Y rastgele değişkeni aşağıdaki koşulları sağlıyorsa Poisson rastgele değişkeni olarak isimlendirilir.
- İki ayrık birim zamanda, alanda ya da hacimde elde edilebilecek başarıların sayısı birbirinden bağımsız olmalıdır.
- Bir birim zaman, alan ya da hacimdeki başarı olasılığı tüm birimler için aynı olmalıdır.

Ör/ 1 saat içerisinde bir call center a gelen telefonların sayısı,
Bir şehirde trafiğin yoğun olduğu bir kavşakta meydana gelen aylık otomobil kazalarının sayısı
Her bir hektarlık arazideki tarla farelerinin sayısı

$$\boxed{P(y) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^y}{y!}}$$

λ = ortalama
$0 < y \leq \infty$

Bernoulli Dağılımı: Sadece 2 tane sonuç varsa başarı - başarısızlık

$$\boxed{f(x) = P(X=x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x}}$$

$1 - p = q$
$0 < p < 1$
$x = 0, 1$

Binom ilk defa meydana geliyorsa Geometrik Dağılım

$$f(x) = p \cdot (1-p)^{x-1}$$

hiper $\rightarrow \dfrac{\binom{r}{x}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

Negatif Binom Dağılımı

X başarının n. denemede gerçekleşme olasılığını hesaplamada kullanılır.

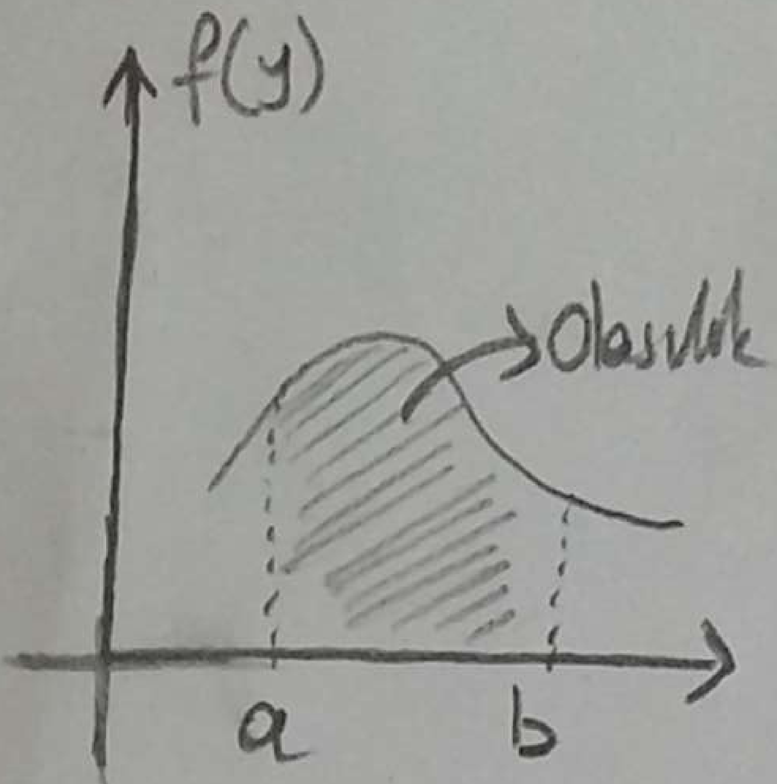
Büyük ilerle Geri le } Binom $Z = \dfrac{X - n.p}{\sqrt{n.p.q}}$ $\longrightarrow$ Poisson $Z = \dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

Emniyet Değeri

1- sistemin çalışmama olasılığı

Sürekli Dağılımlar — Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Dağılım Fonksiyonu

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu: $f(y)$

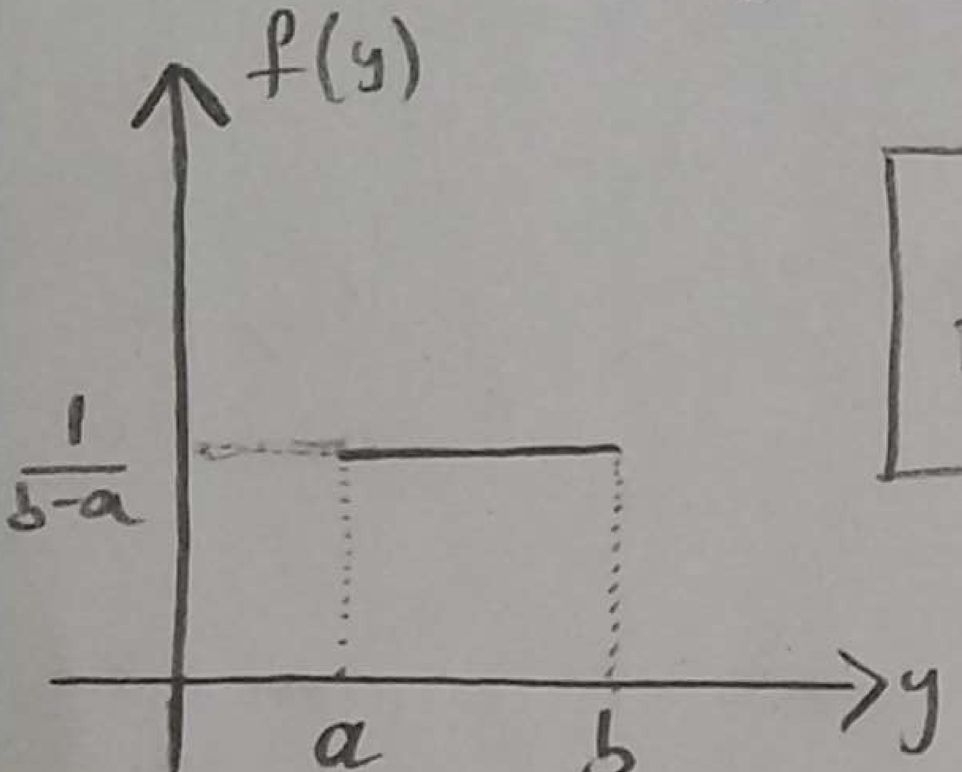


sürekli Rastgele D.

$$P(a \leq y \leq b) = \int_a^b f(y)\,dy$$

- $f(y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$

Uniform — Düzgün Dağılım:



$$\boxed{f(y) = \frac{1}{b-a}}$$

} Düzgün dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonu

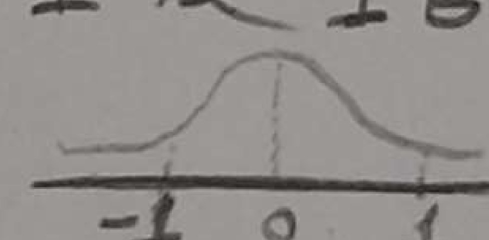
Normal (Gaussian) Dağılım: Ortalama ve standart sapma verilirse

∝ Standart Normal Dağılım: → Beklenen Değer $= \mu = 0$ St sapma $= \sigma = 1$

$Z \sim N(0,1)$ Önemi: Z standart normal değişkenine göre olasılıkları tablolar yardımıyla hesaplayabiliyoruz.

∝ Standart Normal Dağılımın standart olmayan normal dağılımla ilişkisi:

$$Z = \frac{y-\mu}{\sigma} \rightarrow$$ (Y değişkeni μ'den kaç σ uzakta?) $z=1$ ise 1σ uzakta demektir.



∝ Standart olmayan normal dağılım için olasılık hesaplarken.

- Y için aralığı, Z için aralığa çevir.

$$P(a \leq y \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

- Z tablolarını kullanarak olasılıkları hesapla.