第二章 线性规划与单纯形法

- 线性规划问题及数学模型
- 图解法
- 单纯形法原理
- 单纯形法计算步骤
- 单纯形法进一步讨论
- 线性规划建模应用举例

❑线性规划问题及数学模型

❑线性规划问题的提出——生产计划

例2-1 某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ,Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时和原料A、B的消耗量如表

- 该工厂每生产一件产品Ⅰ可获利2元，
- 每生产一件产品Ⅱ可获利3元
- 问应如何安排生产计划能使该厂获利最多？

	I	II	
设备 原材料A 原材料B	1 4 0	2 0 4	8台时 16kg 12kg
利润	2	3	

➢ 建立数学模型

1. 设产品Ⅰ, Ⅱ产量分别为x_1, x_2, 称决策变量, 每生产一件产品可分别获取利润为$2x_1$和$3x_2$元
2. 可获取的总利润用z表示, 它是变量x_1, x_2的函数, 称为目标函数
3. x_1, x_2的取值受到设备台时和原材料的限制, 用于描述限制条件的数学表达式称为约束条件
4. 此例的数学模型可表示为:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

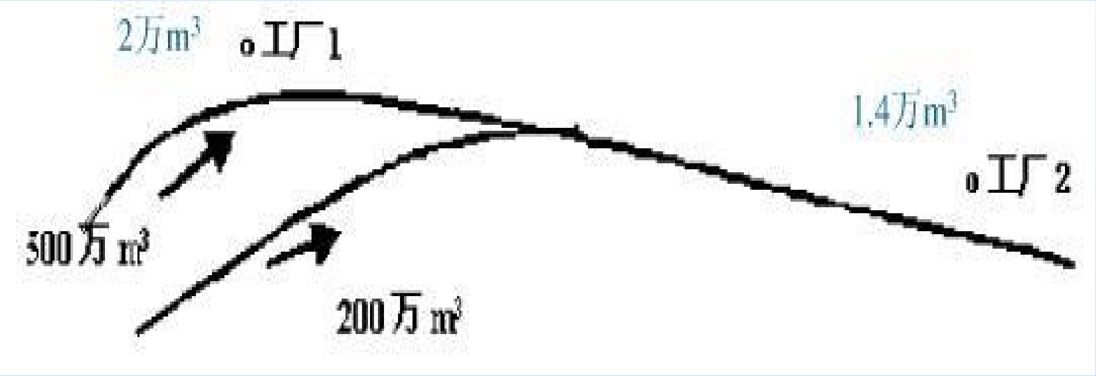
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

	I	II	
设备 原材料A 原材料B	1 4 0	2 0 4	8台时 16kg 12kg
利润	2	3	

❑ 线性规划问题的提出——费用最少

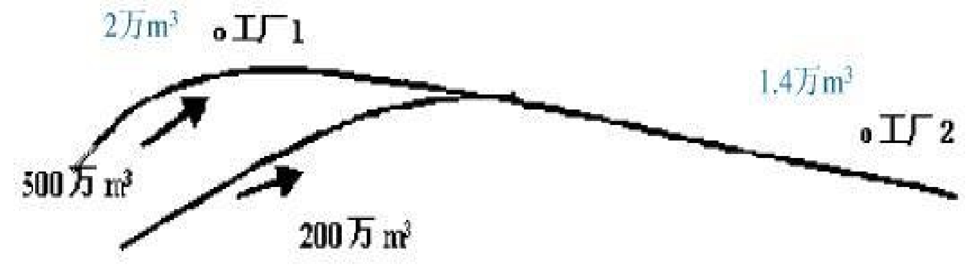
例2-2 靠近某河流有两个化工厂(见图)，流经第一个工厂的河流流量500万立方米/天；在两工厂之间有一支流、流量为200万立方米/天。第一个工厂每天排放工业污水2万立方米；第二个工厂每天排放工业污水1.4万立方米 。从第一个工厂排出的污水流到第二个工厂之前，有20%可自然净化。根据环保要求，河流中工业污水的含量不应大于0.2%，若这两个工厂都各自处理一部分污水，第一个工厂的处理成本是1000元/万立方米，第二个工厂的处理成本是800元/万立方米。

试问在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少污水，才能使总的污水处理费用为最小?



决策变量

解：令 x, y 分别是第一和第二个化工厂每天处理的污水量，则



例2-2 建立数学模型

令 x, y 分别是第一和第二个化工厂每天处理的污水量

（1）第一到第二个工厂之间河流中污水含量≤0.2%

$$(2-x)/500 \leq 0.2\%$$

（2）流经第二个工厂后河流中的污水含量≤0.2%

$$[0.8(2-x)+(1.4-y)]/(500+200) \leq 0.2\%$$

（3）每个厂的污水处理量不超过污水排放量

$$x \leq 2, \quad y \leq 1.4$$

（4）目标：处理污水的总费用z=1000x+800y最小。

故线性规划模型：

$$\min z = 1000x + 800y$$

$$s.t.\begin{cases} 2-x \leq 0.2\% * 500 \\ [0.8(2-x)+(1.4-y)] \leq 0.2\% * 700 \\ x \leq 2 \\ y \leq 1.4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

约束条件

❑ 什么是线性规划问题?

- Programming规划问题
  - 生产和经营管理中经常提出如何合理安排，使人力、物力等各种资源得到充分利用，获得最大的效益，这就是规划问题。
  - Linear Programming线性规划：约束条件参数关系是线性的
- LP线性规划问题分类
  - 当任务或目标确定后，如何统筹兼顾，合理安排，用最少的资源 （如资金、设备、原标材料、人工、时间等）去完成确定的任务或目标——Min
  - 在一定的资源条件限制下，如何组织安排生产获得最好的经济效益（如产品量最多 、利润最大） —— Max
- LP线性规划问题特点——用数学语言描述
  - 决策变量（一组多个），用以表示问题的一个解决方案
  - 约束条件：一组决策变量的线性不等式（或等式）， 问题限制
  - 目标函数：决策变量的线性函数，根据实际求最大或最小

❑ LP概念和模型的一般形式

➢LP定义：对于求取一组变量x_j(j=1, 2, ···, n)，使之既满足线性约束条件，又使具有线性的目标函数取得极值的一类最优化问题。

目标函数 max（或min） $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$

约束条件
$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0\,(\le 0, \text{自 由}) \end{cases}$$

$x_j\,(j = 1,2,\cdots,n)$ **称为决策变量**

$c_j\,(j = 1,2,\cdots,n)$ **称为价值系数或目标函数系数**

$b_i\,(i = 1,2,\cdots,m)$ **称为资源常数或约束右端常数**

$a_{ij} \ge 0(i = 1,..,m;\ j = 1,..,n)$ **称为技术系数或约束系数**

❑ LP模型的标准形式

标准型的主要特征：

① 目标最大；

② 约束等式；

③ 变量非负；

④ 右端非负。

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

LP模型一般和标准形式是等价的，即他们之间是可互相转化！

❑ LP线性规划标准化

把一般的LP化成标准型的过程称为线性规划问题的标准化

一般方法步骤：

✓目标函数标准化

min Z 等价于 max(-Z)

✓化约束为等式，加松弛变量、减剩余变量

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \le b_i \xrightarrow{\text{加上变量}y_i \ge 0} a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n+y_i=b_i$$

$$a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n \ge b_j \xrightarrow{\text{减去变量}y_j \ge 0} a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n-y_j=b_j$$

✓变量非负化，若X_j（无符号约束），另构造两个非负变量做变换

$$x_j', x_j'' \ge 0 \xrightarrow{\text{令}} x_j = x_j' - x_j'' \text{代入原}LP$$

✓右端非负，系数取反

❑LP线性规划标准化

➢标准化举例 例2-1续

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

其标准形式

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

经济含义：给定一个生产方案（X_1，X_2），
松弛变量X_3, X_4, X_5---分别表示在这种生产方案下相应各资源的剩余量。

- **LP线性规划标准化**

$$\min Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

- 标准化举例 例3

$$s.t.\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

令$Z' = \text{-}Z$，$x_1' = \text{-}x_1$，$x_3 = x_3' \text{-} x_3''$，其中$x_3' \ge 0$，$x_3'' \ge 0$

$$\max Z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1' - x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 9 \\ 3x_1' + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 4 \\ 4x_1' + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

❑ LP模型标准型的矩阵和向量表示

➢矩阵表示

$$\max z = c' x$$

$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中 $c' = (c_1, c_2, \ldots c_n), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

（价值系数向量） （决策变量向量） （约束系数矩阵） （资源常数矩阵）

➢列向量形式

令P_1，P_2，…，P_n分别为系数矩阵A的列向量，

$$\max z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

$$s.t.\begin{cases} P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n = b \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

$\xleftrightarrow{\text{或}}$

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

➢行向量形式

令a_1，a_2，…，a_m分别为系数矩阵A的行向量，

$$\max z = c' x$$

$$s.t.\begin{cases} a_i x = b_i \quad i = 1, 2, \ldots m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

❑图解法

❑什么是图解法?

- 图解法就是用几何作图的方法分析并求出LP最优解的过程。
- 一般适用于模型中只有两个决策变量，只需建立平面直角坐标系。
- 求解的思路是：
  1. 建立平面直角坐标系，标出坐标原点、坐标轴的指向和单位长度。
  2. 对约束条件加以图解，找出可行域，即满足约束条件的解的集合。
  3. 画出目标函数等值线。
  4. 结合目标函数的要求，从可行域中找出最优解。

❑ 图解法举例

➢例2-1 用图解法求最优生产计划

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

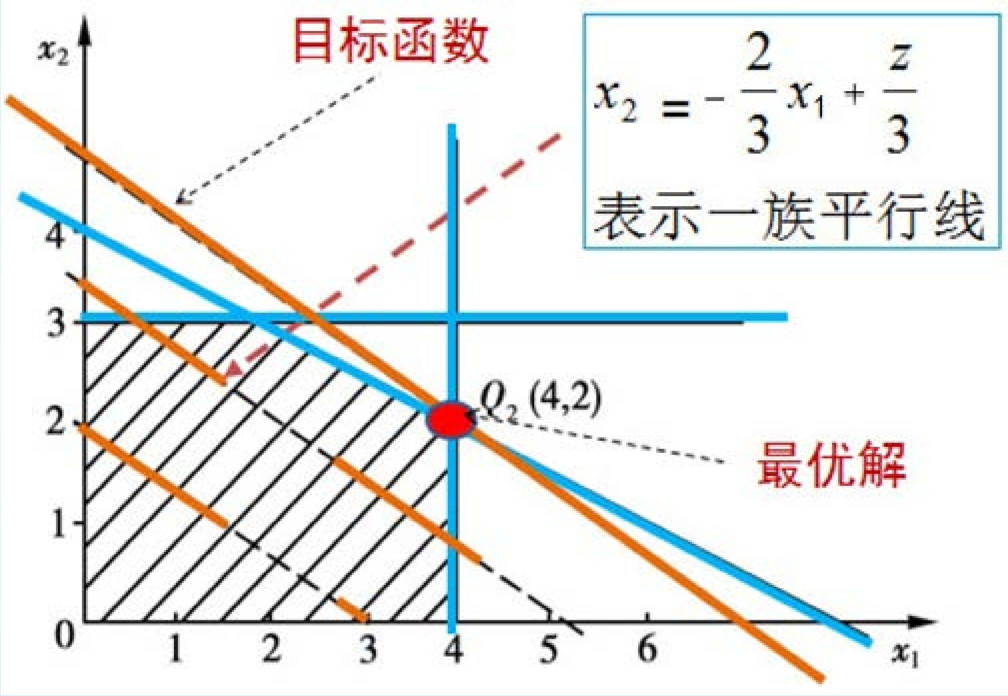


图 斜线阴影区域为LP的可行域（可行解集合）

目标函数线L(红线)： $h = 2x_1 + 3x_2$

原点0到L的距离： $d = \frac{|0+0-h|}{\sqrt{4+9}} = \frac{h}{\sqrt{13}}$,

距离最远，h最大

即目标函数值与原点0到L的距离d成正比，故将直线L向远离原点0的方向平行移动，直至要脱离可行解域为止（图红色交点）。可见，该线性规划存在唯一最优解（4, 2）

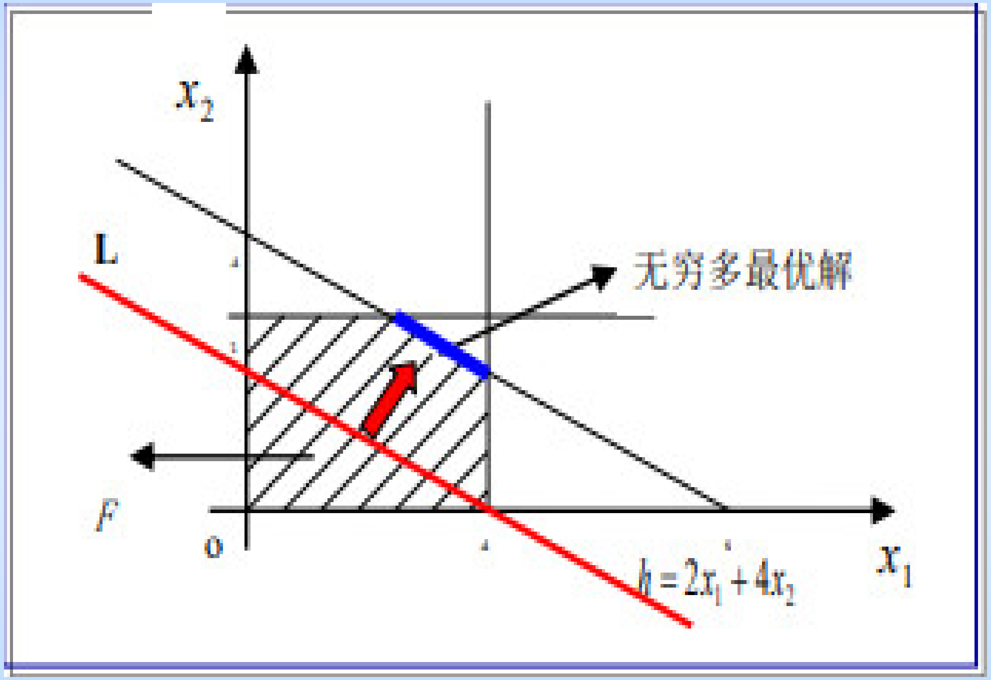
❑ 图解法举例（续）

➢例2-1 用图解法求最优生产计划

若将上图中目标函数变为

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



由图分析可知，该线性规划蓝色线段上的点都是最优解，存在无穷多最优解。

❑ 图解法举例(续)

例 $\max z = 2x_1 + x_2$

$$s.t.\begin{cases} 5x_2 <= 15 \\ 6x_1 + 2x_2 <= 24 \\ x_1 + x_2 <= 5 \\ x_1, x_2 >= 0 \end{cases}$$

划出坐标系，约束条件5个，

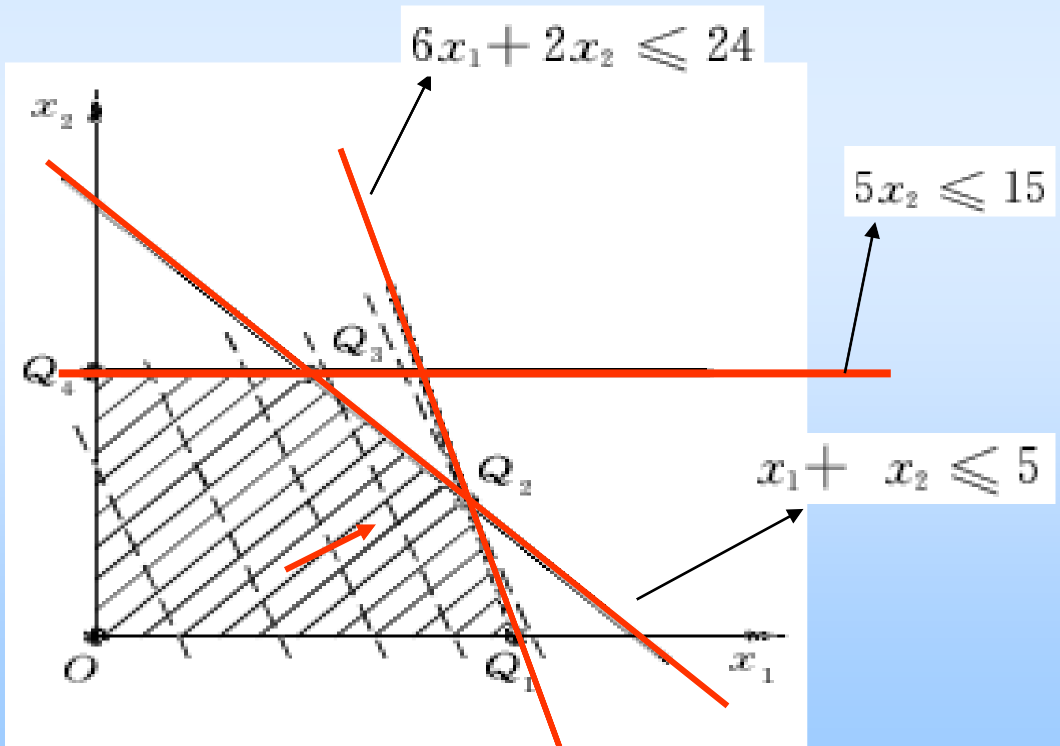
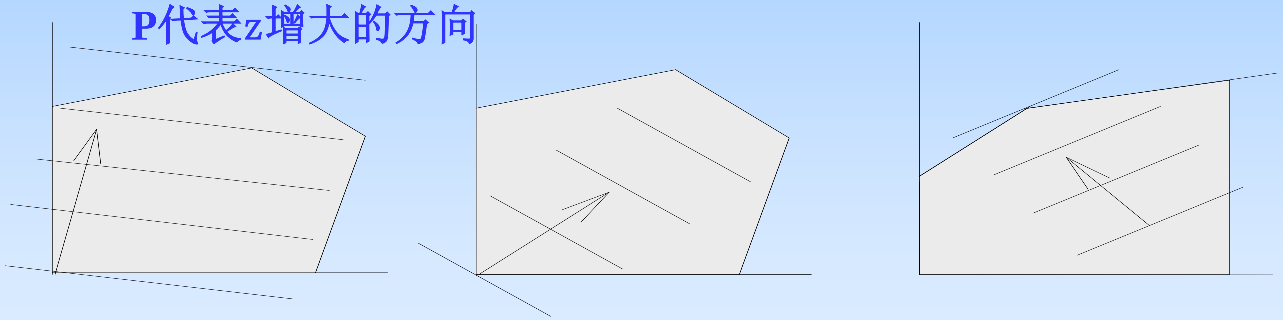


图 1-4

5条直线围起来的多边形区域 OQ1Q2Q3Q4为问题可行域

❑ 图解法举例(续)

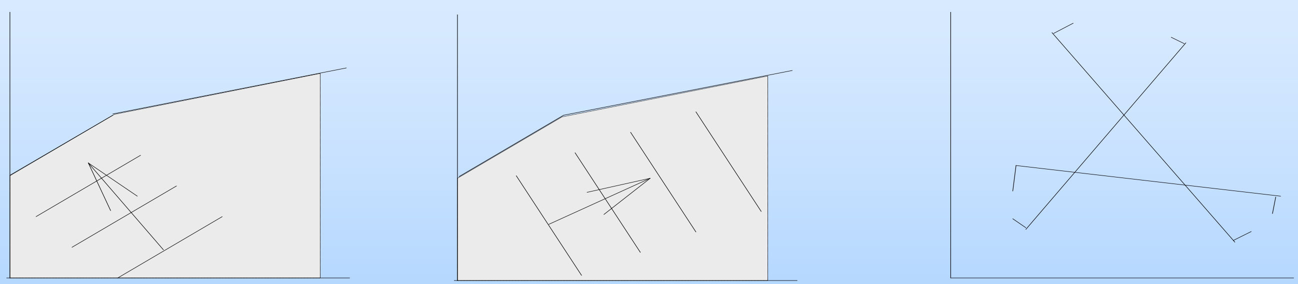


$$z = 2x_1 + x_2$$

(a)可行域有界 唯一最优解

(b)可行域有界 多个最优解

(c)可行域无界 唯一最优解



(d)可行域无界 多个最优解

(e)可行域无界 目标函数无界 无最优解

(f)可行域为空集 无可行解

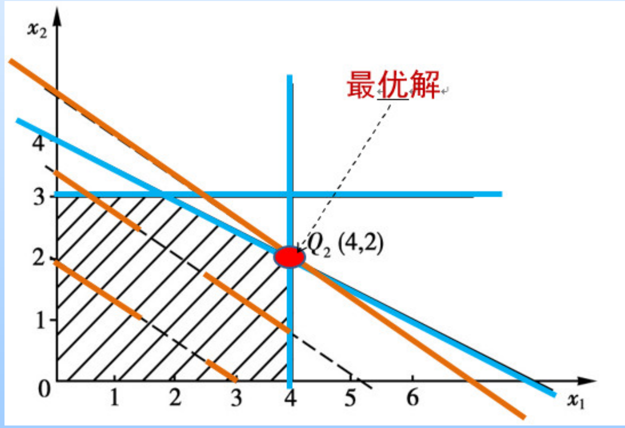
❑ 图解法总结

➢LP解的情况，总会出现为下述四种情况之一：

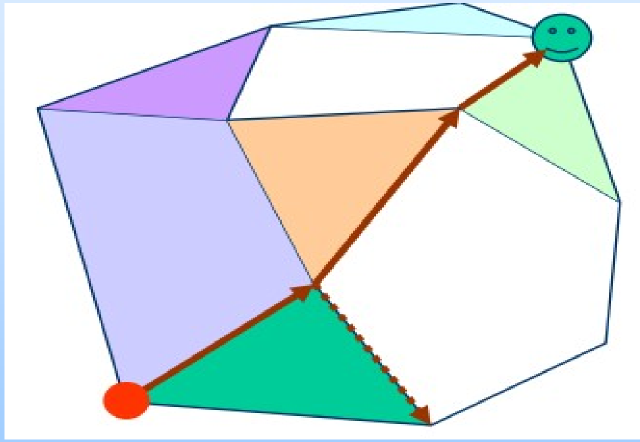
1. 存在唯一最优解
2. 存在无穷多最优解
3. 存在可行解，但无最优解
4. 不存在可行解

➢LP可行解域及最优解的几何特征：

1. 可行解域F是（超）多面体且一定是凸集
2. 若最优解存在，则一定可以在多面体的顶点取到。



二维决策变量



多维

❑ 图解法作业习题

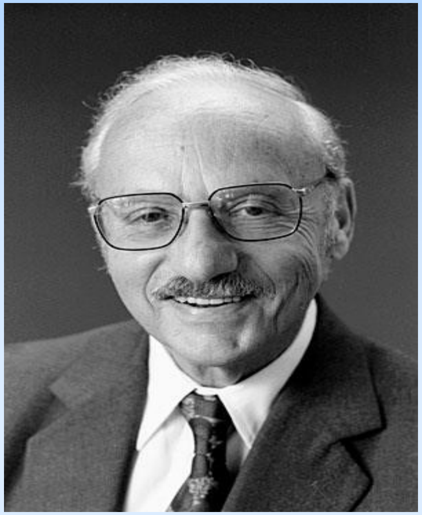
课后习题2.1（1）和（2）

更复杂的线性规划如何求解？

❑单纯形法原理

❑线性规划求解的里程碑——单纯形法

- ✓ 丹齐格Dantzig（1914-2005）：1941-1946年在美国五角大楼工作，常常被空军要求去解实际的计划问题：分配人力、经费、飞机和其他资源。以往做法是靠经验。
- ✓ 丹齐格给这些问题建立了线性规划LP（Linear Programming）模型，并在1947年提出了著名的单纯形法（Simplex Method）。



- *丹齐格的线性规划对偶理论和冯诺依曼的博弈论极小极大理论是一回事。*

Dantzig receiving the National Medal of Science from President Ford in 1975.

❑线性规划求解的里程碑——单纯形法

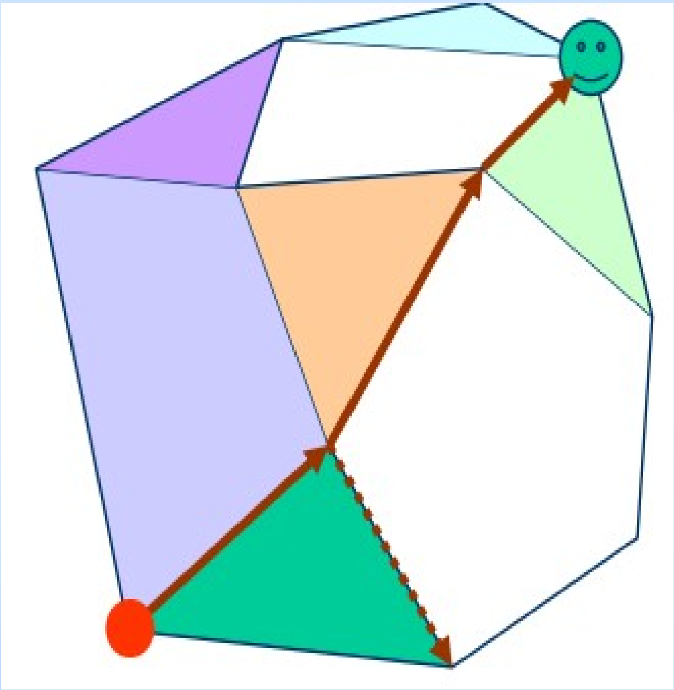
单纯形法的思想

第一步：找到一个可行解（极点）；

第二步：计算该点的判据函数；

第三步：若无法改进，退出；

第四步：否则选择一条棱，找到另一可行解（极点）；回到第二步。



迭代算法

基本认识：LP最优解一定可以在凸集极点上达到

❑ 线性规划问题解的概念

➢线性规划问题

标准型 $\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$　　　$\max Z = CX$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,..,m)\\ x_j \ge 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\quad 或\quad s.t.\begin{cases}AX=b\\ X\ge 0\end{cases}$$

可行解：变量满足所有约束条件的一组值

可行解集：所有可行解构成的集合　$D=\{x\,|Ax=b,\ x\ge 0\}$

可行域：可行解集构成n维空间的区域

最优解：使得目标函数达到最优的可行解X^*

最优值：最优解对应的目标函数值Z^*

LP目的：求最优解和最优值

求解方法：单纯形法

❑ 线性规划问题的解的概念（续）

➢基可行解(bfs)的定义

给定标准形式（LP）： $\max c'x$ $s.t.\begin{cases} Ax=b \\ x\geq 0 \end{cases}$ ，A为m*n矩阵且假定：秩rank(A)=m

在矩阵A中取m个线性无关列 $P_{j_1},P_{j_2},\ldots,P_{j_m}$， 记它们构成的矩阵为： $B=\left(P_{j_1},P_{j_2},\ldots,P_{j_m}\right)$

$P_{j_1},P_{j_2},\ldots,P_{j_m}$ 称为（LP）的一个基，B为相应的基阵；构成B的列为相应基列或基向量
与基向量P_j相对应的变量X_j称为基变量，否则称为非基变量

$$B=\left(P_{j_1},P_{j_2},\ldots,P_{j_m}\right)$$

基向量

$$X_B=\{x_j(j=1,2,\cdots,m)\}$$

基变量

非基变量：其余变量

❑ 线性规划问题的解的概念（续）

➢基本可行解(bfs-basic feasible solution)的定义

A的其他列称为相应的非基列或非基向量，并将所有非基列构成的矩阵记为N
将基列B和非基列N分别排列，系数矩阵可写成$A=(B, N)$，相应地，变量写成 $X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$

$$Ax=b \xleftrightarrow{\text{化为}} (B,N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=b \xleftrightarrow{\text{矩阵分块乘法化为}} Bx_B+Nx_N=b$$

令非基变量$X_N=0$ 得$BX_B=b$和唯一解$X_B=B^{-1}b$，结合$X_N=0$，称

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$ 为关于基B的基本解(基解)

若$x_B=B^{-1}b\ge 0$ 称上述解是关于基B的基可行解（basic feasible solution, bfs）

- 基可行解bfs的个数有限，不超过C_n^m
- 由$X_B\geqslant 0$ $X_N=0$ 可知基可行解0分量的个数不少于（n-m），或者说其非0分量的个数不超过m

思考：bfs 有什么用?

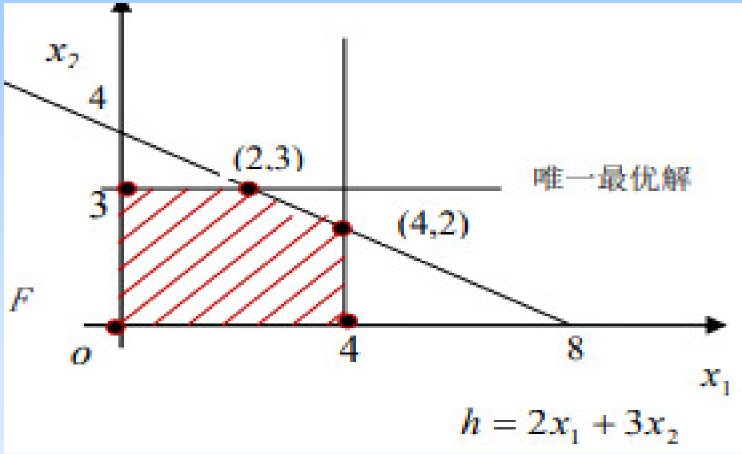
❑ 线性规划问题的解的概念（续）

➢例2-1 的基可行解(bfs)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

其标准形式(*)

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 & = 16 \\ \qquad 4x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$



(*)约束恒等变换得形式

令$x_1 = x_2 = 0$

得$x_3 = 8, x_4 = 16, x_5 = 12$ → 点O

令$x_2 = x_4 = 0$

得$x_1 = 4, x_3 = 4, x_5 = 12$ → 点（4,0）

$$s.t.\begin{cases} \quad 2x_2 + x_3 - \frac{1}{4}x_4 & = 4 \\ x_1 \qquad\qquad + \frac{1}{4}x_4 & = 4 \\ \quad 4x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 12 \end{cases}$$

令$x_4 = x_5 = 0$

得$x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = \text{-}2$ → 点（4,3）

$$s.t.\begin{cases} \qquad x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5 & = -2 \\ x_1 \qquad + \frac{1}{4}x_4 & = 4 \\ \quad x_2 \qquad + \frac{1}{4}x_5 & = 3 \end{cases}$$

会发现：这种方程组的基可行解对应凸集顶点！

- 凸集及其顶点
  - 凸集的概念

凸集——设K是n维欧氏空间的一个点集，若任意两点$X^{(1)}\in K$，$X^{(2)}\in K$的连线上的一切点：

$$\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in K$$

$(0<\alpha<1)$，则称K为凸集。

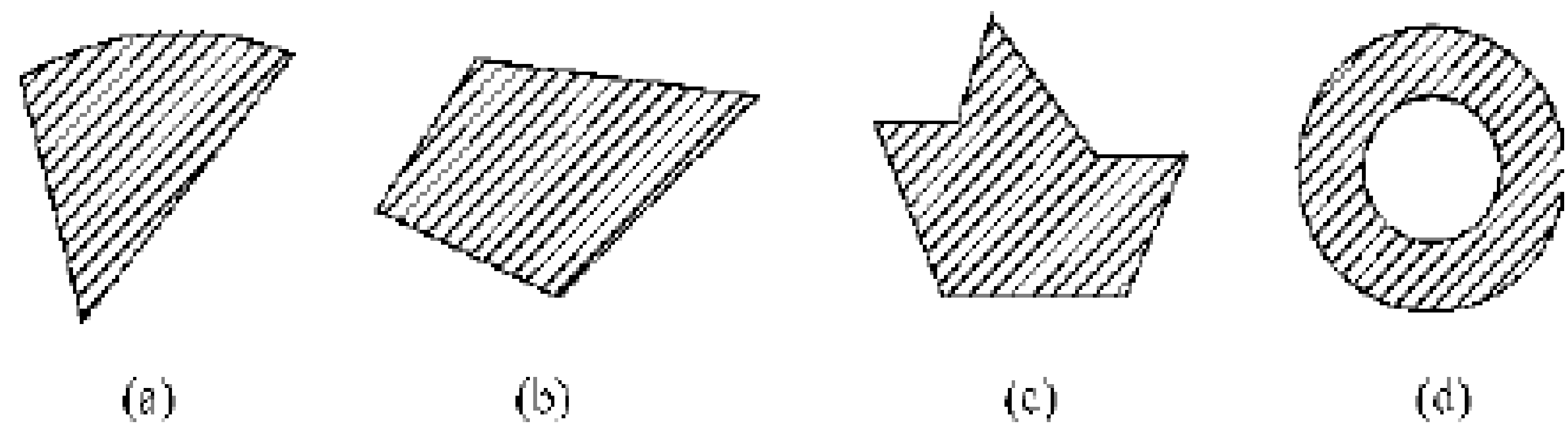


图 1-8

凸集几何意义：由两点连线，线上所有点都在集合区域内。

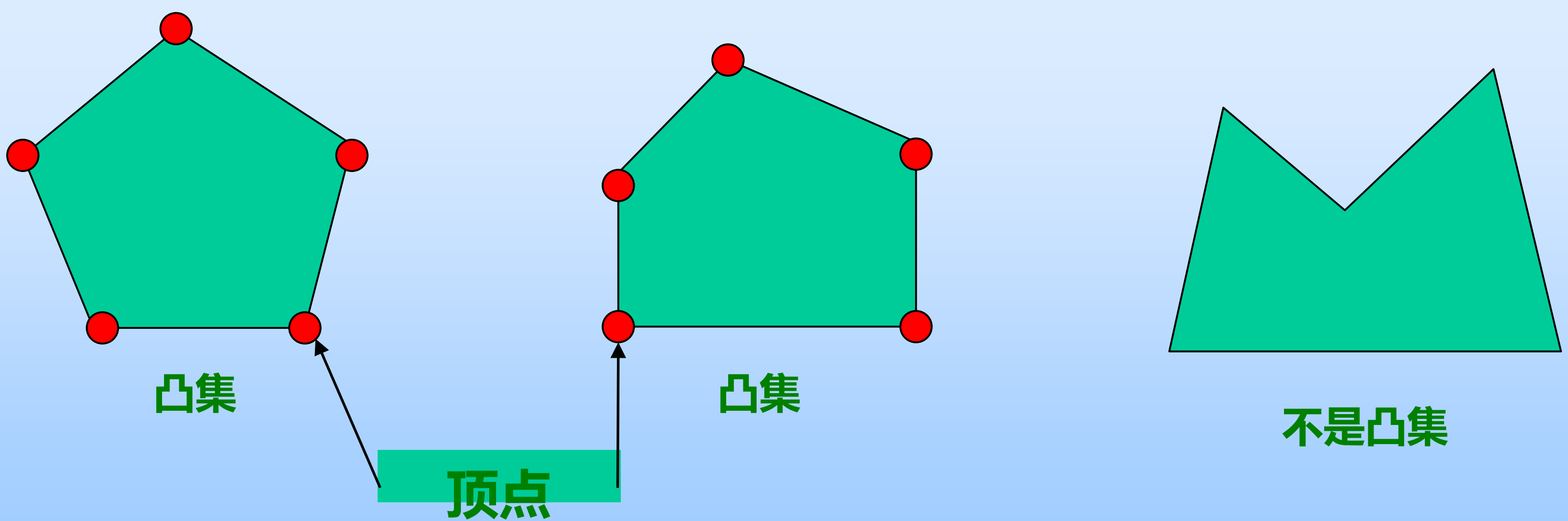
❑ 凸集及其顶点

➢凸集顶点的概念

设K是凸集，X∈K；若K中不存在两个不同的点$X^{(1)} \in K$，$X^{(2)} \in K$ 使

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)} \qquad (0<\alpha<1)$$

则称X为K的一个顶点（也称为极点或角点）。



- 基本定理(基可行解与凸集顶点之间关系)
  - 定理1：若线性规划LP问题存在可行解，则该问题的可行解集（即可行域）是凸集。
  - 定理2：线性规划LP问题的基可行解x对应线性规划问题可行域(凸集)的顶点。
  - 定理3：若线性规划LP问题有最优解，一定存在一个基可行解（可行域顶点）是最优解。
  - 结论1：最优的可行解X*是可行域F的一个顶点当且仅当是（LP）的一个bfs。
  - 结论2：线性规划（LP）最优解必能在某个bfs上取到（若存在）。几何上，若（LP）存在最优解，则必在可行域的顶点上达到。

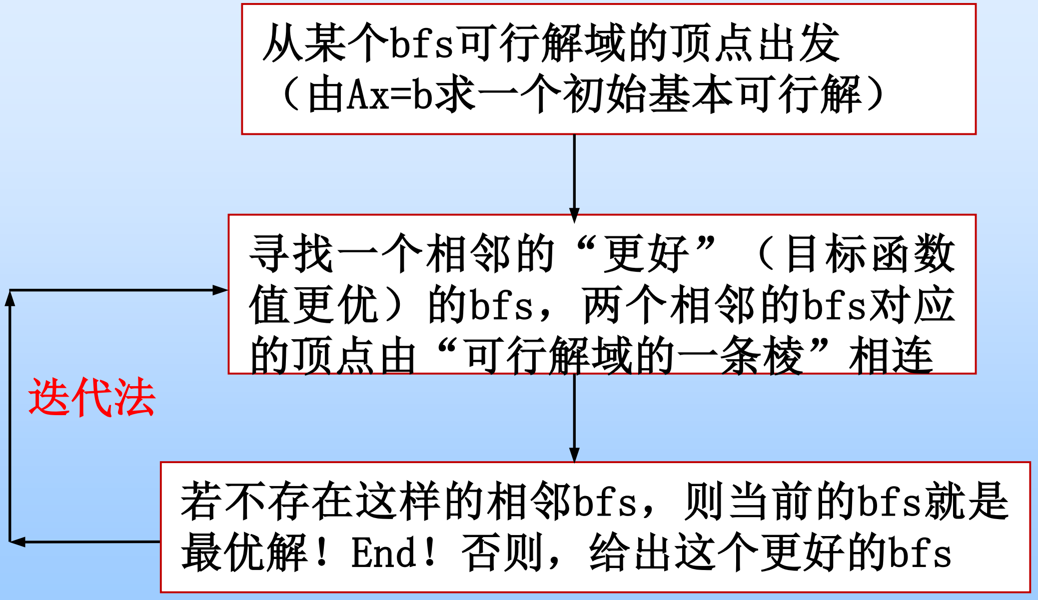
若顶点数目有限可采用“枚举法”找所有bfs，然后比较，必然能找到最优解。但当n,m较大时，这种办法是行不通的——新思路单纯形法。

❑ “单纯形法”求解思路

➢线性方程组 $Ax = b$

■一般线性规划问题：如果线性方程组的变量数n大于方程个数m，有不定的解, 可从线性方程组中找出一个个的单纯形，每个单纯形可求得一组解，然后再判断是否使目标函数值是否增大，决定下一步选择的单纯形。

■这个算法过程就是迭代，直到目标函数取得最大值（最优解）为止。



bfs是否存在？如何得到？

bfs如何改善？

如何判断bfs最优？

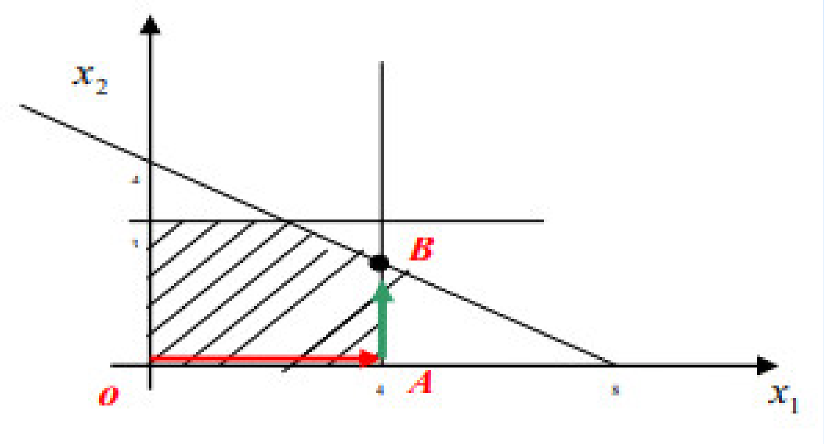
ops是否唯一？

❑ 单纯形方法引例——用单纯形法思想求解LP问题

引例2.1

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Step(1)
初始bfs

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

$(P_3P_4P_5)=I$，x_3,x_4,x_5是基变量；x_1,x_2非基变量，用非基变量表示基变量和目标函数。

基可行解 → 约束右端（0,0,8,16,12），即 O（0,0）

目标函数值 → 目标函数中的常数项

含义： 不生产任何产品，工时和材料都剩余，利润为 $Z^{(0)}=0$

初始基本可行解是否最优解 ?是否可以生产某种产品使目标提高?

❑ 单纯形方法引例（续）

目标函数：$\max z = 2x_1 + 3x_2$

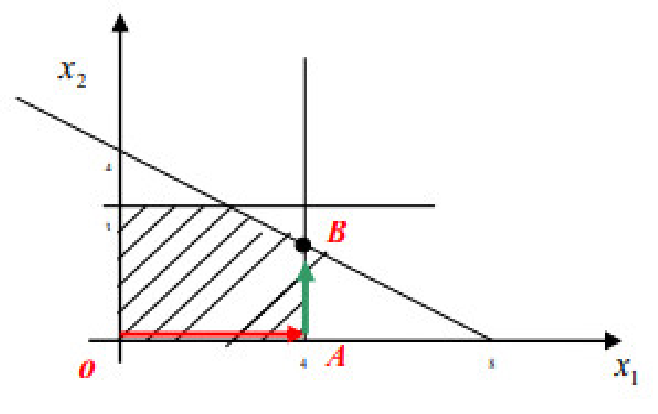
- ✓ 考虑当x_1（或x_2）增加一个单位时，会使目标增加2（或3）单位
- ✓ 若将x_1变为非零基变量——引入变量，最多增加多少？（满足约束）
- ✓ 策略是保持其他非基变量不变，考察x_1增加对其他基变量的影响：

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \end{cases} \xrightarrow{\text{所有变量要求非负}} x_1 \le 4$$

令$x_1 = 4$，得新解：$x_1=4$, $x_2=0$, $x_3=4$, $x_4=0$, $x_5=12$，即$A(4,0)$

x_1入基，x_4出基；$(P_3 P_1 P_5)$构成新基

通过方程的恒等变换（高斯消去法）化为用非基变量表示基变量和目标函数，转step（2）



❑ 单纯形方法引例（续）

Step(2) $z=8+3x_2-(1/2)x_4$

$$s.t.\begin{cases} 2x_2+x_3-(1/4)x_4 & =4 \\ x_1 \quad +(1/4)x_4 & =4 \\ 4x_2 \quad +x_5 & =12 \end{cases}$$

$(P_3P_1P_5)=I$，x_3，x_1，x_5 是基变量；x_4，x_2 是非基变量，

用非基变量表示基变量和目标函数。

基可行解 ➡ 约束右端(4,0,4,0,12)，即 A(4,0)

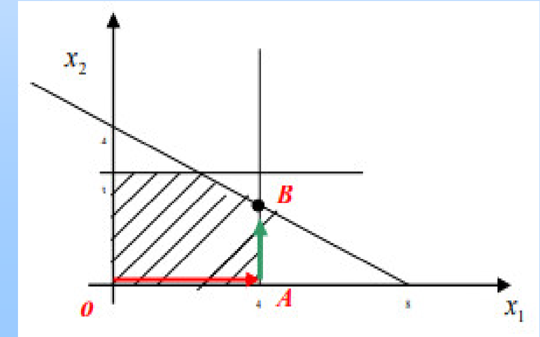
目标函数值 ➡ 目标函数中的常数项

- ✓ 目标函数中非基变量X2系数>0，让X2增加，可使目标值增加；
- ✓ 策略保持其他非基变量不变，考察X2增加对其他变量的影响：

$$\begin{cases} 2x_2+x_3=4 \\ 4x_2+x_5=12 \end{cases} \xrightarrow{\text{所有变量要求非负}} x_2\le 2$$

让$x_2=2$，得新解：$x_1=4$，$x_2=2$，$x_3=0$，$x_4=0$，$x_5=4$，即B$(4,2)$

x_2入基，x_3出基；$(P_2P_1P_5)$构成新基



通过方程的恒等变换（高斯消去法）化为用非基变量表示基变量和目标函数，转step（3）

❑ 单纯形方法引例（续）

Step(3) $z = 14 - (3/2)x_3 - (1/8)x_4$

$$s.t.\begin{cases} x_2 + (1/2)x_3 - (1/8)x_4 = 2 \\ x_1 + (1/4)x_4 = 4 \\ -2x_3 + (1/2)x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

关于基B的**典式**

$(P_1P_2P_5) = I$，x_2, x_1, x_5 是基变量；x_4, x_3 非基变量，

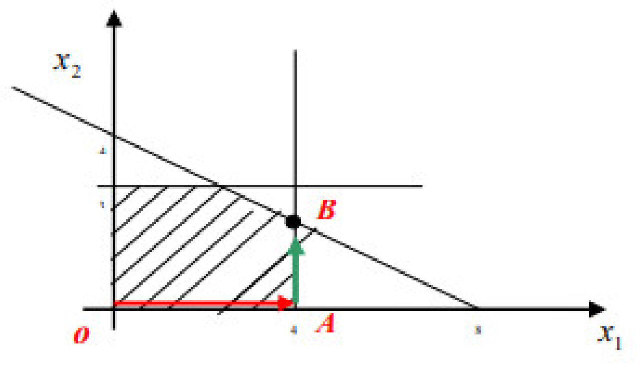
用非基变量表示基变量和目标函数。

基可行解 ⟶ 约束右端(4,2,0,0,4)，即 B(4,2)

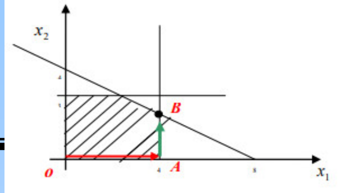
目标函数值 ⟶ 目标函数中的常数项

- ✓ 典式形式下，目标函数中非基变量X3、 X4系数(称为检验数)<0
- ✓ 非基变量的增加，只能使目标函数更小，所以当前基可行解bfs是最优解！
- ✓ 单纯形法是从一个bfs转换到某个相邻的bfs的过程，即从一个bfs的典式转换到相邻bfs的典式，目标函数z不断增大，直到检验数<0

为了简化写法，可把上述运算用表格形式给出
——单纯形表



单纯形法原理



❑ 单纯形方法引例——单纯形表

入基变量（入基列）　旋转元　出基变量（出基行）

Step(1)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$-z + 2x_1 + 3x_2 = 0$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

Step(2)

x_1入基，x_4出基，得到新bfs

$$-z + 3x_2 - (1/2)x_4 = -8$$
$$s.t.\begin{cases} 2x_2 + x_3 - (1/4)x_4 = 4 \\ x_1 + (1/4)x_4 = 4 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

Step(3)

x_2入基，x_3出基，得到新bfs

$$-z - (3/2)x_2 - (1/8)x_4 = -14$$
$$s.t.\begin{cases} x_2 + (1/2)x_3 - (1/8)x_4 = 2 \\ x_1 + (1/4)x_4 = 4 \\ -2x_3 + (1/2)x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

X_B	b	−Z	x1	x2	x3	x4	x5	θ
x3	8	0	1	2	1	0	0	8
x4	16	0	4	0	0	1	0	4
x5	12	0	0	4	0	0	1	–
−Z	0	1	2	3	0	0	0	
x3	4	0	0	2	1	−1/4	0	2
x1	4	0	1	0	0	1/4	0	–
x5	12	0	0	4	0	0	1	3
−Z	−8	1	0	3	0	−1/2	0	
x2	2	0	0	1	1/2	−1/8	0	
x1	4	0	1	0	0	1/4	0	
x5	4	0	0	0	−2	1/2	1	
−Z	−14	1	0	0	−3/2	−1/8	0	

典式表示成
单纯性表

目标函数行（检验数行）

❑ 线性规划的典式

给定 $$\max z = cx$$

$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \left(A\text{为}m\times n\text{矩阵且}rank(A)=m,\text{即}A\text{行满秩}\right)$$

典式定义：不妨设基B={P_1, ⋯, P_m}为（LP）的一个(线性无关)可行基，经过方程组的恒等变换可得到关于基B的典式：

$$(*)\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + \beta_{1m+1}x_{m+1} + \beta_{1m+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{1k}x_k + \cdots + \beta_{1n}x_n = \alpha_1 \\ \quad x_2 \quad\quad + \beta_{2m+1}x_{m+1} + \beta_{2m+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{2k}x_k + \cdots + \beta_{2n}x_n = \alpha_2 \\ \quad\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \quad\quad\quad x_m + \beta_{mm+1}x_{m+1} + \beta_{mm+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{mk}x_k + \cdots + \beta_{mn}x_n = \alpha_m \\ \text{目标函数 } z = z_0 + \lambda_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \lambda_n x_n \end{cases}$$

注1 给定某个基B后，相应典式与原来LP是等价的，即约束方程组是同解的

$$(*)\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +\beta_{1m+1}x_{m+1}+\beta_{1m+2}x_{m+2}+\cdots+\beta_{1k}x_k+\cdots+\beta_{1n}x_n=\alpha_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad +\beta_{2m+1}x_{m+1}+\beta_{2m+2}x_{m+2}+\cdots+\beta_{2k}x_k+\cdots+\beta_{2n}x_n=\alpha_2 \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad x_m+\beta_{mm+1}x_{m+1}+\beta_{mm+2}x_{m+2}+\cdots+\beta_{mk}x_k+\cdots+\beta_{mn}x_n=\alpha_m \\ \text{目标函数 } z=z_0+\lambda_{m+1}x_{m+1}+\cdots+\lambda_n x_n \end{cases}$$

❑ 线性规划的典式

注2 关于基B的典式可用矩阵描述

典式约束：$Ax=b \xleftrightarrow{\text{化为}} (B,N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=b \xleftrightarrow{\text{化为}} Bx_B+Nx_N=b$

$\xleftrightarrow{\text{左乘}B^{-1}\text{(方程组行的恒等变换)得到关于B的典式}} Ix_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$

目标函数：$Z=c'x=(c_B,c_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=c_Bx_B+c_Nx_N=c_B\left(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N\right)+c_Nx_N$

$$=c_BB^{-1}b+\left(c_N-c_BB^{-1}N\right)x_N==z_0+\lambda_{m+1}x_{m+1}+\cdots+\lambda_n x_n$$

单纯形法原理

$$(*)\begin{cases} x_1 \quad + \beta_{1m+1}x_{m+1} + \beta_{1m+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{1k}x_k + \cdots + \beta_{1n}x_n = \alpha_1 \\ x_2 \quad + \beta_{2m+1}x_{m+1} + \beta_{2m+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{2k}x_k + \cdots + \beta_{2n}x_n = \alpha_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_m + \beta_{mm+1}x_{m+1} + \beta_{mm+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{mk}x_k + \cdots + \beta_{mn}x_n = \alpha_m \\ \text{目标函数 } z = z_0 + \lambda_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \lambda_n x_n \end{cases}$$

❑ 线性规划的典式

注3 经恒等变换后，原系数矩阵A中前m个变量的系数列向量$P_1, \cdots, P_m$变换为典式（*）中单位矩阵I的各列；而A中非基变量x_k的系数列向量P_k经过恒等变换后变换为典式（*）中对应的列$(\beta_{1k}, \beta_{2k}, \cdots, \beta_{mk})^T$，$k=m+1,\ldots,n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \boxed{a_{1m+1}} & \cdots & \boxed{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{左乘 } B^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{1m+1} & \cdots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_{2m+1} & \cdots & \beta_{2n} \\ & & \cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_{mm+1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

P_{m+1} $\quad P_n$ $\qquad B^{-1}P_{m+1}$ $\quad B^{-1}P_n$

因为$P_1, \cdots, P_m$是基B的线性无关列，故非基变量 系数列P_k 可由它们线性表出：

$$P_k = \beta_{1k}P_1 + \beta_{2k}P_2 + \cdots + \beta_{mk}P_m \Longleftrightarrow (\beta_{1k}, \beta_{2k}, \cdots \beta_{mk})^T = \beta_{1K}(1,0,\cdots 0)^T + \beta_{2K}(0,1,\cdots 0)^T + \cdots + \beta_{mk}(0,0,\cdots 1)^T$$

$B^{-1}P_k \qquad B^{-1}P_1 \qquad B^{-1}P_2 \qquad B^{-1}P_m$

❑ 单纯形方法--典式作业

补充作业：$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad C = (2,3,3,0,0)$$

$$X_B = \{p4, p5\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

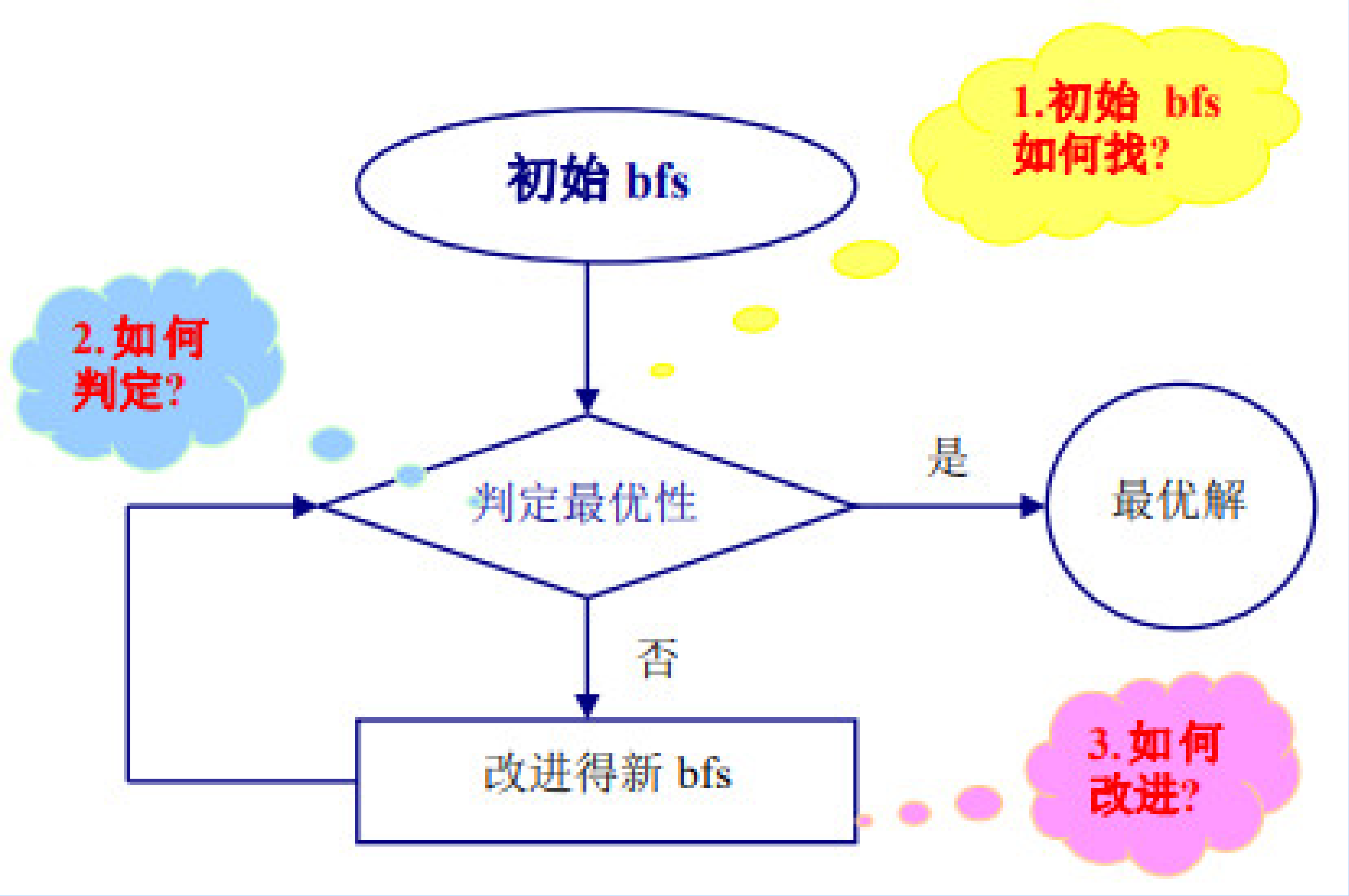
初始基可行解bfs（0，0，0，3，9），要求写出后续典式，单纯形求解

作业习题：2.2（1）、2.3（1）

❑单纯形法计算步骤

❑ 单纯形方法基本流程

➢解决三个基本问题：



$$
(*)\begin{cases}
x_1 \quad + \beta_{1m+1}x_{m+1} + \beta_{1m+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{1k}x_k + \cdots + \beta_{1n}x_n = \alpha_1 \\
\quad x_2 \quad + \beta_{2m+1}x_{m+1} + \beta_{2m+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{2k}x_k + \cdots + \beta_{2n}x_n = \alpha_2 \\
\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\qquad x_m + \beta_{mm+1}x_{m+1} + \beta_{mm+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{mk}x_k + \cdots + \beta_{mn}x_n = \alpha_m \\
\text{目标函数 } z = z_0 + \lambda_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \lambda_n x_n
\end{cases}
$$

❑ 单纯形算法基础

不失一般性，以下均针对LP可行基B={P_1, ···, P_m}，并在已知其典式情况下进行讨论：

1. 给定基可行解bfs是最优解的判定

在基$B=\{P_1,,\ldots,P_m\}$的典式（*）中：若存在某非基变量$x_k(k\in\{m+1,\ \cdots n\})$的系数 $\lambda_k>0$，则直观地可知，非基变量x_k的增加使目标函数增加，因此有以下结论：

定理1. 在可行基$B=\{P_1,,\ldots,P_m\}$的典式（*）中，若目标函数中非基变量系数满足$\lambda_k<0$ (k=m+1,···n)，则关于基B可行解必是最优解。（证明略···）

注：典式（*）中，系数λ_k (k=m+1,···n)用来判断bfs的最优性，称为检验数。

判定
最优性

$$(*)\begin{cases} x_1 \quad + \beta_{1m+1}x_{m+1} + \beta_{1m+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{1k}x_k + \cdots + \beta_{1n}x_n = \alpha_1 \\ x_2 \quad + \beta_{2m+1}x_{m+1} + \beta_{2m+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{2k}x_k + \cdots + \beta_{2n}x_n = \alpha_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_m + \beta_{mm+1}x_{m+1} + \beta_{mm+2}x_{m+2} + \cdots + \beta_{mk}x_k + \cdots + \beta_{mn}x_n = \alpha_m \\ \text{目标函数 } z = z_0 + \lambda_{m+1}x_{m+1} + \cdots + \lambda_n x_n \end{cases}$$

❑ 单纯形算法基础

2. 一个bfs到另一个bfs的旋转变换(改进)，已知可行基$B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$

思考：对检验数>0的非基变量X_k，在其他非基变量不变（=0）的前提下，X_k最大可取多少？

$$\text{典式的约束条件：}\begin{cases} x_1 + \beta_{1k}x_k = \alpha_1 \\ x_2 + \beta_{2k}x_k = \alpha_2 \\ \cdots\cdots \\ x_m + \beta_{mk}x_k = \alpha_m \end{cases}$$

令$x_k=\theta>0 \rightarrow$ 要求所有基变量保持非负：$x_i = \alpha_i - \beta_{ik}\theta \geq 0 \ \forall i = 1,2,\cdots m$

$\rightarrow \theta$的范围：

$$\begin{cases} \text{若}\beta_{ik} \leq 0\text{：}\theta\text{任意增加都可保证}x_i \geq 0\text{；} \\ \text{若}\beta_{ik} > 0\text{：}\theta\text{须满足}\alpha_i - \beta_{ik}\theta \geq 0\text{，即}\theta \leq \alpha_i / \beta_{ik} \end{cases}$$

由此可知x_k增加的范围是：$\theta \leq \min\left\{\dfrac{\alpha_i}{\beta_{ik}} : \beta_{ik} > 0\right\}$

❑ 单纯形算法基础

定理2. 设对应于基 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$基bfs为x_B, 找个入基变量

$$x_k\left(k\in\{m+1,\cdots n\}\right)\text{是非基变量且}\lambda_k>0$$

(1) $B^{'}=B\cup\{P_k\}\setminus\{P_l\}$是一个新的基，$x_l$对应的$\{P_l\}$出基变量

(2) 关于新基的bfs $x_i^*=\begin{cases}\theta_0 & i=k\\ \alpha_i-\beta_{ik}\theta_0 & i=1,2,\cdots m\\ 0 & i=m+1,\cdots n, i\neq k\end{cases}$

且若确定θ_0时有多于一行同时达到最小值，则新bfs x_i^*是退化的

(3) 新bfs x_i^*的目标函数值为$z(x)=z_0+\lambda_k\theta_0$ ，单调不减(若基变量>0，z增大)

改进方法
入基出基
旋转变换

❑ 单纯形算法基础

注1：上述从一个bfs变到另一个bfs的方式称为旋转变换， x_k, p_k称为入基变量和入基列， x_l, p_l称为出基变量和出基列，单纯形中p_k 和p_l 相交元素为旋转元。

注2：给定（LP）的一个bfs，若其0分量的个数恰好为n-m个（或其非0分量的个数恰为m个），则称为非退化的bfs；若其0分量的个数多于n-m（即此时存在某个基变量的取值为0），称为退化的bfs。

注3：若现行bfs x非退化，在单纯形迭代时必有 θ_0>0

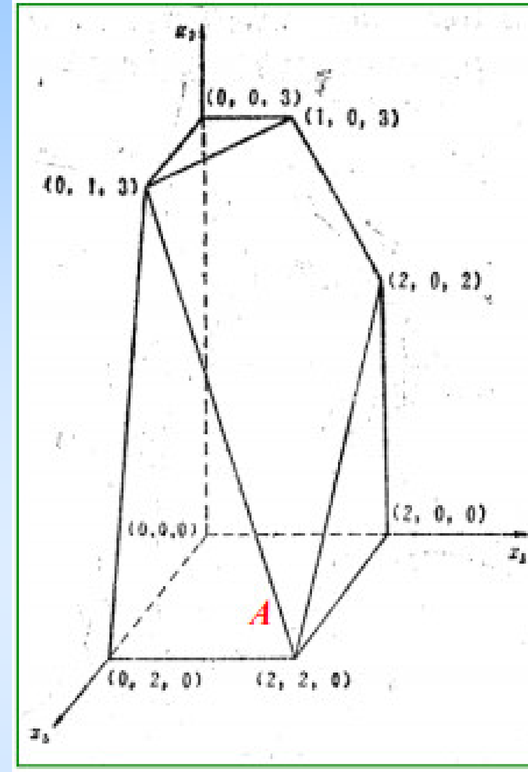
注4：若非基变量x_k满足$\lambda_k > 0$，且它在典式中系数列各分量均有$\beta_{ik} \leq 0$，此时取M>0并令$x_k = M > 0, x_i = \alpha_i - \beta_{ik}M$(基变量)，其目标函数值 =$z_0 + \lambda_k M \to \infty$。显然，无论M多大，总能保证上述解为可行解，而目标值无上界。

定理3. 设对应于基 $B = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$基bfs为x, 其目标函数值为$z_0$, 若在典式的目标函数中，非基变量$x_k$的系数 $\lambda_k > 0$，且x_k在典式中系数列P_k各分量均满足$\beta_{ik} \leq 0 (i \in \{1,2,\cdots m\})$，则（LP）无最优解（目标函数无上界）。

❑ 单纯形算法基础

例(退化) $\max z = 2x_2$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 \le 2 \\ x_3 \le 3 \\ 3x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_3 + x_6 = 3 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ x_1, x_2, \cdots, x_7 \ge 0 \end{cases}$$



取基$B_1 = (P_4, P_5, P_6, P_7)$,有基解$x_1 = (0,0,0,4,2,3,6) \ge 0$,则$x_1$是该问题的一个非退化bfs

取基$B_2 = (P_2, P_5, P_6, P_7)$,有基解$x_2 = (0,4,0,0,2,3,-6)$,则$x_2 \ge 0$不成立，故$x_2$不是bfs

取基$B_3 = (P_1, P_2, P_4, P_6)$,有基解$x_3 = (2,2,0,0,0,3,0) \ge 0$,则$x_3$是该问题的一个退化bfs

取基$B_4 = (P_1, P_2, P_3, P_6)$,有基解$x_4 = (2,2,0,0,0,3,0) \ge 0$,则$x_4$是该问题的一个退化bfs

(图中：x_1对应原点，x_3对应点A，x_4也对应点A)

❑ 单纯形表与旋转变换—方程组恒等变形

- ✓ 由分析可知：判定一个bfs是否是最优解，或不是最优解时如何改进得到更好的bfs，都可通过bfs的典式进行。bfs的典式之间的转换（即旋转变换）就是约束方程组的恒等变换。而单纯形表是典式的一种简单表示。
- ✓ 对应于基 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_{\mathrm{m}})$，目标函数$-z_0=-z+\lambda_{m+1}x_{m+1}+\cdots+\lambda_n x_n$
- ✓ 即将-z看成独立的基变量，它总在基中（省略-z所在列），放入典式单纯形表

		-z	X1	X2	…	Xm	Xm+1	…	Xk	…	Xn
…		…	…		…		…		…		…
X_1	α_1	0	1	0		0	β_{1m+1}		β_{1k}		β_{1n}
…		…	…		…		…		…		…
X_l	α_l	0	0	0	1	0	β_{lm+1}		β_{lk}		β_{ln}
X_m	α_m		0	0	0	1	β_{mm+1}		β_{mk}		β_{mn}
-z	-Z0	-1	0	0	0	0	λ_{m+1}		λ_k		λ_n

-z看成基对应的列，但在旋转变换中不变，因此不再写这一列

单纯形法计算步骤

入基变量（入基列）

出基变量（出基行）

目标函数行（检验数）

旋转元

		X1	X2	…	Xm	Xm+1	…	Xk	…	Xn	θ
…		…		…		…		…		…	…
X_1	α_1	1	0		0	β_{1m+1}		β_{1k}		β_{1n}	…
…		…		…		…		…		…	
X_l	α_l	0	0	1	0	β_{lm+1}		β_{lk}		β_{ln}	$\frac{\alpha_l}{\beta_{lk}}$
X_m	α_m	0	0	0	1	β_{mm+1}		β_{mk}		β_{mn}	…
−z	−Z0	0	0	0	0	λ_{m+1}		λ_k		λ_n	

入基和出基变量的选取：

(1) 当$\lambda_k > 0$时，x_k为入基变量

(2) 当$\theta_0 = \min\left\{\frac{\alpha_i}{\beta_{ik}} : \beta_{ik} > 0\right\} \overset{令}{=\!=} \frac{\alpha_l}{\beta_{lk}}$，即最小值在基变量$x_l$ 行取到，x_l 行成为出基行

新基典式可由恒等变换：

(1) x_l行同除以旋转元β_{lk}，将旋转元化为1，并第1列中将基变量x_l 换成x_k

(2) 利用旋转元将x_k列其他各行系数均化为零， 即

$$\begin{cases} 第i行：第i行减去第\ l\ 行\ \times \beta_{ik} / \beta_{lk} \\ 目标函数：目标函数行减去第\ l\ 行\ \times \lambda_k / \beta_{lk} \end{cases}$$

❑ 单纯形算法基础

例 $\max z = -4x_1 + 8x_3 \rightarrow$ -z用非基变量表示 $-8+12x_3-4x_4$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \geq 2 \\ \quad x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{标准型} s.t.\begin{cases} x_1 \quad + x_3 - x_4 \quad = 2 \\ \quad x_2 + 2x_3 \quad - x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

基

		X1	X2	X3	X4	X5
X1	2	1	0	1	−1	0
X2	5	0	1	2	0	−1
−Z	8	0	0	12	−4	0
X3	2	1	0	1	−1	0
X2	1	−2	1	0	2	−1
−Z	−16	−12	0	0	8	0
X3	5/2	0	1/2	1	0	−1/2
X4	1/2	−1	1/2	0	1	−1/2
−Z	−20	−4	−4	0	0	4

第一个bfs表需要满足：
- 基变量对应列构成单位阵
- 目标函数行基变量系数=0

旋转元

没有最优解

❑ 单纯形算法总结

- **定理1-3**提供了单纯形法的理论基础和计算过程，但遗留了两个问题：
    - ✓ 初始的bfs基可行解如何寻找？
    - ✓ 退化情况下，能保证单纯形法不进入循环（是否能在有限步内得到最优解）吗？——
- 作业习题：

    2.4 （1）和（2）

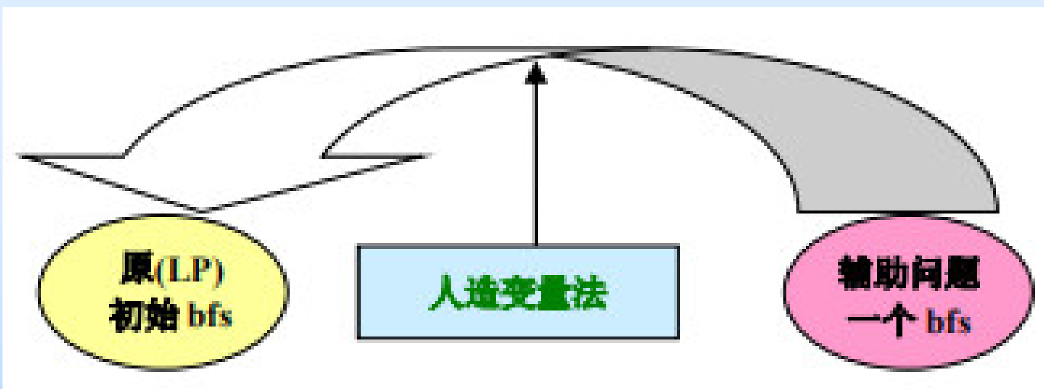
1. 人工变量法
2. Bland法则

❑单纯形法的进一步讨论

❑ 初始bfs的求法

➢ 问题：线性规划化为标准形时，若约束条件构成的系数矩阵中不存在单位矩阵，如何构造初始可行基？

➢ 即若线性规划问题（LP）无明显的bfs，如何寻找初始bfs呢？思路：



✓ 构造一个辅助问题（LP’）：

a)（LP’）有一个明显的bfs

b)（LP’）最优解能导出原问题的一个bfs。

❑ 初始bfs的求法——增加人工变量

由原（LP）的约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

增加m个非负“人造变量”，其系数构成单位阵， $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geq 0$

做出一个“显然的bfs”：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

但当这些“人造变量”值不为0时，相应的解并非原（LP）的解：

只有当这些“人造变量”都=0时，相应的解才是原（LP）的解。

为此目的，就要将“人造变量” $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ 踢出基

❑ 初始bfs的求法——新目标函数

✓ 故考虑构造新的目标函数：“人造变量”的系数尽可能小（<0）,使得目标达到最大时，“人造变量” $x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$必取0（非基变量）

✓ 构造新的目标函数两种方法：

$$a)\max H=-x_{n+1}-x_{n+2}-\cdots-x_{n+m}\text{——两阶段法}$$

$$b)\max H'=cx-Mx_{n+1}-Mx_{n+2}\cdots-Mx_{n+m}\text{——大}M\text{法}$$

$$(M>0\text{为充分大的正数})$$

原问题变成
辅助线性规划问题（LP’）：

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\ x_1,x_2,\cdots x_n,x_{n+1},\cdots x_{n+m}\geq 0\end{cases}$$

两阶段法：maxH要等于零

✓ 利用“人造变量法”求原（LP）的一个初始bfs---第一阶段；

✓ 利用得到的初始bfs，求解原（LP）的最优解---第二阶段。

❑ 两阶段法

$$\max H = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$$

易见（LP'）初始bfs为：

$$\begin{cases} x_1 = \cdots = x_n = 0 \\ x_{n+1} = b_1 \\ x_{n+2} = b_2 \\ \quad \cdots \\ x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

，目标函数值为H=-b$_1$-b$_2$-···-b$_m$

- ✓ **情况1：**（LP'）最优目标函数值<0，则原（LP）无可行解。因为：若（LP）有可行解，则该可行解加上$x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=x_{n+m}=0$必为（LP'）的可行解，其目标函数值为0，与（LP'）的最优目标函数值<0矛盾。
- ✓ **情况2：**在（LP'）最优bfs解中，所有人造变量$x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$都是非基变量。此时在此最优bfs解单纯形表中去掉相应的列，便得到原（LP）的一个初始bfs，可进一步用单纯形法求解了，故称为"两阶段法"。
- ✓ **情况3：**在（LP'）最优bfs解中，目标函数值$\max H = 0$，但还至少存在一个人造变量仍为基变量，但这些仍在基中的人造变量的取值都是0，即是退化情况。

❑ 两阶段法举例

例：用两阶段法求解线性规划问题

$$\max z = -3x_1 - 2x_2 - x_4$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_3 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

初始基变量

$$\max H = -x_5 - x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 5x_3 + x_6 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

人造变量

解：第一阶段：因为第三个约束中x_4可作为一个明显的基变量，故只需在第一和第二个约束中分别增加“人造变量”x_5和x_6，并构造相应的目标函数H，辅助问题（LP’）

目标函数还没有用非基变量表示，故需通过恒等变换将H行中X5，X6系数化为0：H行—第一行—第二行

❑ 两阶段法举例

第一阶段：

$$\max H = -x_5 - x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 3 \\ 2x_1 \qquad + 5x_3 \qquad + x_6 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

	b	X1	X2	X3	X4	X5	X6	θ
X5	3	1	1	1	0	1	0	
X6	15	2	0	5	0	0	1	
X4	11	2	4	1	1	0	0	
−H	0	0	0	0	0	−1	−1	
X5	3	1	1	1	0	1	0	3
X6	15	2	0	5	0	0	1	3
X4	11	2	4	1	1	0	0	11
−H	18	3	1	6	0	0	0	
X3	3	1	1	1	0	1	0	3
X6	0	−3	−5	0	0	−5	1	0
X4	8	1	3	0	1	−1	0	8
−H	0	−3	−5	0	0	−6	0	
X3	3	0	−2/3	1	0	~~−2/3~~	~~1/3~~	
X1	0	1	5/3	0	0	~~5/3~~	~~−1~~	
X4	8	0	4/3	0	1	~~−8/3~~	~~1/3~~	
−H	0	0	0	0	0	~~−1~~	~~−1~~	

强行“旋转变换”将人造变量X6换出

此时人造变量为非基变量，可直接去掉，得到原问题的bfs

❑ 两阶段法举例

第二阶段：

原问题 $\max z = -3x_1 - 2x_2 - x_4$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_3 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

	b	X1	X2	X3	X4	θ
X3	3	0	−2/3	1	0	−
X1	0	1	5/3	0	0	0
X4	8	0	4/3	0	1	2/3
−Z	8	0	13/3	0	0	
X3	3	2/5	0	1	0	
X2	0	3/5	1	0	0	
X4	8	−4/5	0	0	1	
−Z	8	−13/5	0	0	0	

检验数均小于等于0，得到最优解！

通过第一阶段得到的bfs，将原问题目标函数为

$$\max z = -3x_1 - 2x_2 - x_4$$

原问题目标函数化为用非基变量x2表示：

$$z = -3x_1 - 2x_2 - x_4$$

$$= -3\left(-\frac{5}{3}x_2\right) - 2x_2 - \left(8 - \frac{4}{3}x_2\right) = -8 + \frac{13}{3}x_2$$

❑ 大M法举例

人造变量

例：用大M法求解线性规划问题

$$\max z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

标准化

$$\max H' = 3x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$s.t\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

解：因为第一个约束中松弛变量x_4可作为一个明显的基变量，故只需在第二和第三个约束中分别增加“人造变量”x_6和x_7，并构造相应的目标函数H’，辅助问题（LP’）x_6和x_7出基后（等于0），剩下就是原问题的解。

单纯形法进一步讨论

Cj		3	−1	−1	0	0	−M	−M	θ
XB	b	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	
X4	11	1	−2	1	1	0	0	0	11
X6	3	−4	1	2	0	−1	1	0	3/2
X7	1	−2	0	1	0	0	0	1	1
-H'	4M	3−6M	M−1	3M−1	0	−M	0	0	
X4	10	3	−2	0	1	0	0	−1	−
X6	1	0	1	0	0	−1	1	−2	1
X3	1	−2	0	1	0	0	0	1	−
-H'	M+1	1	M−1	0	0	−M	0	1−3M	
X4	12	3	0	0	1	−2	2	−5	4
X2	1	0	1	0	0	−1	1	−2	−
X3	1	−2	0	1	0	0	0	1	−
-H'	2	1	0	0	0	−1	1−M	−1−M	
X1	4	1	0	0	1/3	−2/3	−	−	
X2	1	0	1	0	0	−1	−	−	−
X3	9	0	0	1	2/3	−4/3	−	−	−
-H'	−2	0	0	0	−1/3	−1/3	−	−	

❑线性规划建模应用举例

建立线性规划模型的假设条件：

(1) **比例性假设：Proportionality assumption** 每个活动对于目标函数值的贡献是与活动量 x_j 成比例的，在目标函数中通过 $c_j x_j$ 表示；

每个活动对于约束的作用也是与活动量 x_j 成比例的，在目标函数中通过 $a_{ij} x_j$ 表示

(2) **可加性假设：Additivity assumption**

每个函数 都是各自活动的单独贡献的总和。(目标函数和每个约束条件左边函数)

建立线性规划模型的假设条件：

(3) **可分割性假设：Divisibility assumption**

决策变量的取值可取满足约束条件的**任意值**，　即可以用小数方式表示活动量或级别。

(4) **确定性假设：Certainty assumption**

被赋予线性规划模型的每个**参数值**都被假设为已知常量。

参数*小的*不确定性（扰动）——灵敏度分析

参数不确定性因素*太大* ——参数作为随机变量

例1：合理利用线材问题：

现要做100套钢架，每套需用长为2.9m，2.1m 和1.5m的元钢各一根。已知原料长7.4m，问应如何下料，使用的原材料最省?

解：所有合理的下料方式列举如下：

按照余料长短对各种下料方案的变量编号。

长度(m) \ 下料根数	方 案							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5	1	0	1	3	0	2	3	4
合计长	7.3	7.1	6.5	7.4	6.3	7.2	6.6	6
余料长	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4
变量编号	x_2	x_4	x_6	x_1	x_7	x_3	x_5	x_8

决策变量：8种方式使用的原料(7.4m)根数；
约束：各种元钢数量 ≥ 100

问题归结为如下线性规划：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \text{ 或}$$

$$\min z = 0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5 + 0.9x_6 + 1.1x_7 + 1.4x_8$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 \geq 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 \geq 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 + 4x_8 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{cases}$$

变量取整数

若仅选取余料长小于0.9m的套裁下料方案：

下料根数 / 长度(m)	方案				
	I	II	III	IV	V
2.9	1	2	0	1	0
2.1	0	0	2	2	1
1.5	3	1	2	0	3
合计长	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
余料长	0	0.1	0.2	0.3	0.8
变量编号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

设按Ⅰ方案下料的原材料（7.4m）根数为x_1，Ⅱ方案为x_2，Ⅲ方案为x_3，Ⅳ方案为x_4，Ⅴ方案为x_5。

问题归结为如下线性规划：

$$\min z = 0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

变量取整数

- **最优下料方案：**

  I方案:30根； II方案:10根；IV方案:50根

  共需90根原材料可以制造100套钢架。

- **其他最优方案：**

  II方案:40根；III方案:30根；IV方案:20根

  共需90根原材料可以制造100套钢架。

问题：求解线性规划的最优解是分数解时，
如何能得到整数最优解呢？

例2. 连续投资问题

现有资金10万，考虑5年内下列项目投资，已知：

- 项目A：从第1年到第4年每年年初需要投资， 并于次年末回收本利115%；
- 项目B：第3年初需要投资，第5年末能回收本利125%， 但规定最大投资额不超过4万元；
- 项目C，第2年初需要投资，第5年末能回收本利140%，但规定最大投资额不超过3万元；
- 项目D，5年内每年初可购买公债，于当年末归还，并加利息6%。

问每年如何投资，使第5年末拥有资金本利总额最大?

解： (1) 确定决策变量, 以x_{iA}, x_{iB}, x_{iC}, x_{iD} (i=1,2,…， 5)分别表示第 i 年初给项目A,B,C,D的投资额

项目	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}	/
B	/	/	x_{3B}	/	/
C	/	x_{2C}	/	/	/
D	x_{1D}	x_{2D}	x_{3D}	x_{4D}	x_{5D}

(2) 每年投资额=手中拥有的全部资金额

理由：项目D 每年均可投资、且当年末即回收本息.

第1年初：100000元，故

$$x_{1A}+x_{1D}=100000$$

第2年初：第1年项目A的投资要到第2年末才回收。

故第2年初资金=项目D在第1年回收的本息

$x_{1D}(1+6\%)$。故 $x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=1.06x_{1D}$

第3年初：从项目A第1年投资、项目D第2年投资中回收的本利总和：$x_{1A}(1+15\%)$及$x_{2D}(1+6\%)$。 故第3年投资：

$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=1.15x_{1A}+1.06x_{2D}$$

第4年初：类似以上分析，可得

$$x_{4A}+x_{4D}=1.15x_{2A}+1.06x_{3D}$$

第5年初：$x_{5D}=1.15x_{3A}+1.06x_{4D}$

此外，对项目B、C的投资有限额的规定：

$x_{3B} \le 40000$

$x_{2C} \le 30000$

(3) 目标函数：要求在第5年末拥有最多资金额。 与第5年末资金有关的变量是： x_{4A}, x_{3B}, x_{2C}, x_{5D} 故目标函数为：

$$\max z = 1.15x_{4A} + 1.25x_{2B} + 1.4x_{2C} + 1.06x_{5D}$$

$$s.t.\begin{cases} x_{1A} + x_{1D} = 100000 \\ x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} - 1.06x_{1D} = 0 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} - 1.15x_{1A} - 1.06x_{2D} = 0 \\ x_{4A} + x_{4D} - 1.15x_{2A} - 1.06x_{3D} = 0 \\ x_{5D} - 1.15x_{3A} - 1.06x_{4D} = 0 \\ x_{3B} \le 40000 \\ x_{2C} \le 30000 \\ x_{iA}, x_{iB}, x_{iC}, x_{iD} \ge 0, i = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

例3. 人力资源分配的问题

某公交线路每天各时间段内所需司机和乘务员数如下：

班次	时间	所需人数
1	06：00—— 10：00	60
2	10：00—— 14：00	70
3	14：00—— 18：00	60
4	18：00—— 22：00	50
5	22：00—— 02：00	20
6	02：00—— 06：00	30

司机和乘务员可连续工作八小时，问如何安排，既能满足工作需要，又配备最少司机和乘务人员?

解：设 x_i 表示第 i 班次时开始上班的人员数。

开工时段 \ 结束时段		1	2	3	4	5	6
		6;00-10:00	10:00-14:00	14:00-18:00	18:00-22:00	22:00-2:00	2:00-6:00
1	6:00-10:00	x_1	x_1				
2	10:00-14:00		x_2	x_2			
3	14:00-18:00			x_3	x_3		
4	18:00-22:00				x_4	x_4	
5	22:00-2:00					x_5	x_5
6	2:00-6:00	x_6					x_6
每段需要的总数		60	70	60	50	20	30

线性规划模型

开工时段 \ 结束时段		1 6;00-10:00	2 10:00-14:00	3 14:00-18:00	4 18:00-22:00	5 22:00-2:00	6 2:00-6:00
1	6:00-10:00	x_1	x_1				
2	10:00-14:00		x_2	x_2			
3	14:00-18:00			x_3	x_3		
4	18:00-22:00				x_4	x_4	
5	22:00-2:00					x_5	x_5
6	2:00-6:00	x_6					x_6
每段需要的总数		60	70	60	50	20	30

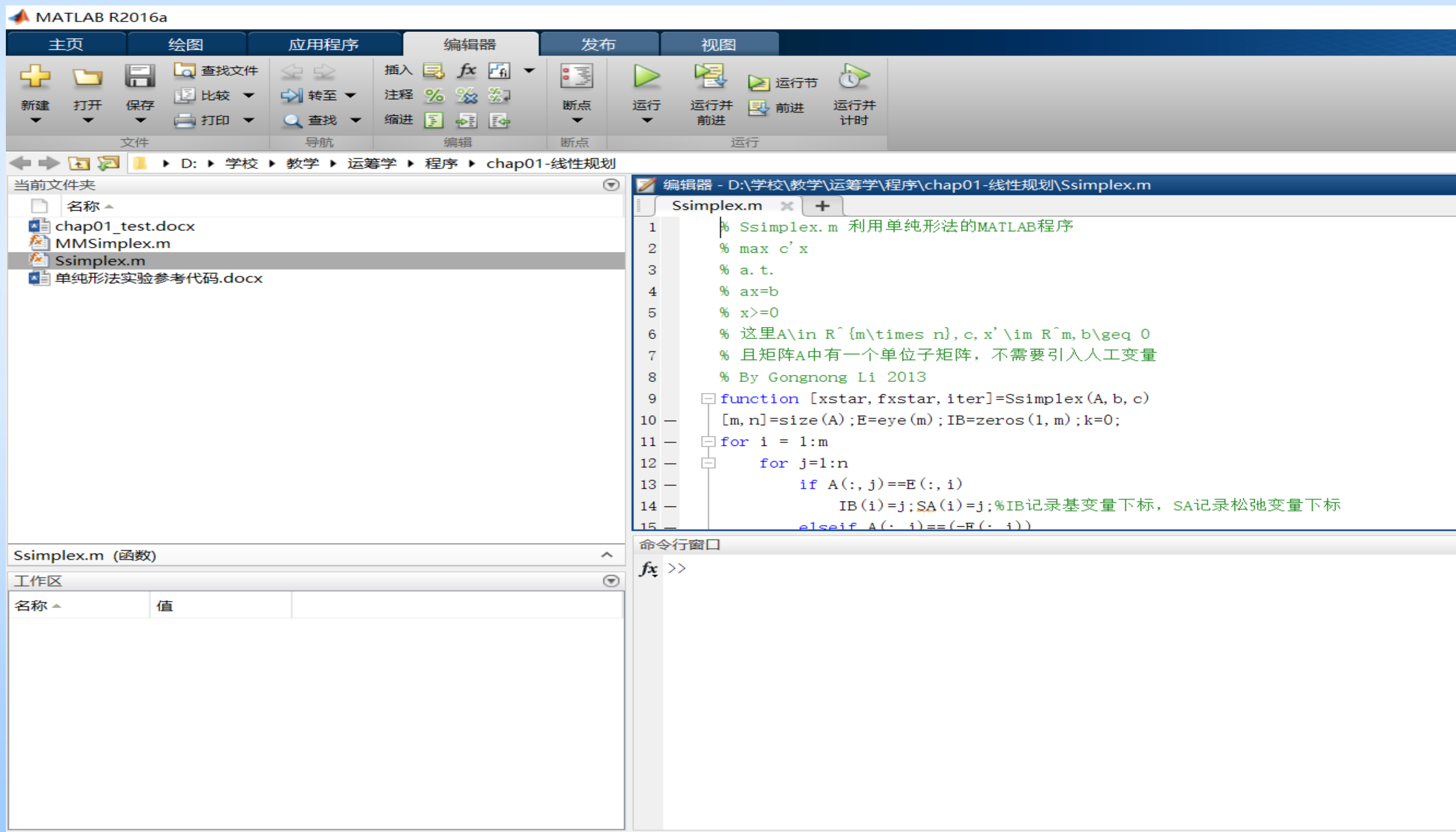
$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_6 \geq 60 \\ x_1 + x_2 \geq 70 \\ x_2 + x_3 \geq 60 \\ x_3 + x_4 \geq 50 \\ x_4 + x_5 \geq 20 \\ x_5 + x_6 \geq 30 \\ x_j \geq 0 \text{且取整} \quad j = 1, 2, \cdots, 6 \end{cases}$$

❑LP单纯形法的程序实现

单纯形法的程序实现

- Matlab编程实现
  - 利用Matlab函数
  - 自编程序.m文件



❑ Matlab求解LP问题

➢LP问题的数学描述

$$\max z = c' x$$
$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中 $c' = (c_1, c_2, \ldots c_n), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

➢Matlab函数求解LP问题的标准形式

$$\min z = f^T x$$
$$s.t.\begin{cases} A \bullet x \leq b \\ A_{eq} \bullet x = b_{eq} \\ lb \leq x \leq ub \end{cases}$$

区别：

✓ 极小化目标函数

✓ LP有不等式约束m1个，等式约束m2个，

✓ f, x, lb和ub均为n维列向量，b为m1维列向量，beq为m2维列向量，A为m1 X n维矩阵，Aeq为 m2 X n维矩阵

❑ Matlab求解LP问题

➢自带函数命令详解

$$x = linprog(f, A, b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min z = f^T x \\ s.t. A \bullet x \le b \end{cases}$$

➢LP求解带入参数

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f = [-1; -1]$$

$$A = [1 \quad -2; 1 \quad 2]$$

$$b = [4; 8]$$

$$lb = [0; 0]$$

$$ub = [Inf; Inf]$$

$$[x, fval] = linprog(f, A, b, [], [], lb, ub)$$

无此项约束，矩阵为空

❑作业习题

第2章习题（P55）：

2.1（用图解法求解LP），(1)和(2)选一；

2.2 LP化标准型，列初始单纯形表(1)

2.3 找LP的初始基可行解，(1)和(2)选一（选做）；

2.4 用单纯形法求解LP 2.1，(1)和(2)选一；

2.6 用单纯形法中的大M和两阶段法求解，(1)和(2)选一；

2.9 LP建模

❑LP单纯形法补充解释和总结

❑ 单纯形方法引例（续） 补充作业

引例 $\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \geq 0 \end{cases}$$

初始基本可行解$X^{(0)}$=（0，0，0，3，9）
当x_2作为引入（入基）变量（x_1 x_3不变），为使新解$X^{(1)}$仍为基可行解，必须使

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 > 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 9 - 4x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1\text{-}1)$$

且使x_4或x_5中有一个等于零——退出变量

❑ 单纯形法一般步骤

1.初始基本可行解的确定（观察法）；

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_jp_j\le b\\ x_j\ge 0 \qquad j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

加入松弛变量

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{j=n+1}^{n+m}0x_j$$

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\ x_1,x_2,\cdots,x_{n+m}\ge 0\end{cases}$$

❑ 单纯形法一般步骤

1.初始基本可行解的确定（观察法）；

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{j=n+1}^{n+m}0x_j$$

$$s.t.\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_{n+m}\ge 0\end{cases}$$

基 $B=(p_{n+1},p_{n+2},\cdots,p_{n+m})=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

初始可行基*B*即可取该单位矩阵

基本可行解 $X=(0,0,\cdots,0,b_1,b_2,\cdots,b_m)$

令$x_1=x_2=\ldots=x_n=0$，可得$x_{n+i}=b_i$ ($i=1,2,\ldots,m$)

❑ 单纯形法一般步骤

2.从约束中解出基变量;

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} 0 x_j$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

基变量与非基变量关系式

❑ 单纯形法一般步骤

3.代入目标函数消去基变量，得到非基变量x_j的检验数σ_j；

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}x_{n+i}$$

$$x_{n+i}=b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i+\sum_{j=1}^{n}c_jx_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{n+i}a_{ij}x_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i+\sum_{j=1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}a_{ij})x_j$$

❑ 单纯形法一般步骤

3.代入目标消去基变量，得到非基变量x_j的检验数σ_j；

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i+\sum_{j=1}^{n}c_jx_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{n+i}a_{ij}x_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i+\sum_{j=1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}a_{ij})x_j$$

令 $Z_0=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i$　　$z_j=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}a_{ij}$

$$\Longrightarrow Z=Z_0+\sum_{j=1}^{n}(c_j-z_j)x_j$$

检验数（目标函数中非基变量系数）

设 $\sigma_j=c_j-z_j$ $\Longrightarrow$ $Z=Z_0+\sum_{j=1}^{n}\sigma_jx_j$

❑ 单纯形法一般步骤

4.判断最优;

最优性判别定理：若 $X^{(0)}=(0,0,\cdots,0,b_1',b_2',\cdots,b_m')$

是对应于基B的基本可行解，σ_j是用非基变量表示的目标函数的表达式中非基变量x_j的检验数，若对于一 切非基变量的 $j=n+1,\ldots,n+m$，均有$\sigma_j\le 0$，则当前基本可行解$X^{(0)}$为最优解。

对于任意可行解X，　$$Z=Z_0+\sum_{j=1}^{n}\sigma_j x_j \le Z_0$$

对于基本可行解X⁰，　$$Z=Z_0$$

特例：若又存在某个非基变量的检验数$\sigma_j=0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

❑ 单纯形法一般步骤

5.没有有限最优解的判断；

无最优解判别定理：若 $X^{(0)} = (0, 0, \cdots, 0, b_1', b_2', \cdots, b_m')$ **是对应于B的基本可行解，有一个非基变量x_k的检验数$\sigma_k>0$, 且对$i=1,2,\ldots,m$ 均有$a_{ik}\le 0$, 则问题没有有限最优解（无界解或称无最优解）。** **证明略**

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}' x_j \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_{n+i} = b_i - a_{ik}' x_k \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$Z = Z_0 + \sigma_k x_k \longrightarrow \infty$$

非基变量x_k随便取值>0，物理意义任意生产某产品，利润无穷大

❑ 单纯形法一般步骤

6.改进目标

若初始基可行解X(0)不是最优解及不能判别无界时，需要找一个新的基可行解，从原可行解基中换一个列向量(保证线性独立)，得到一个新的可行基，称为基变换。为了换基，先要确定换入非基变量，再确定换出基变量，让它们相应的系数列向量进行对换，就得到一个新的基可行解。

若$\sigma_k>0$，则选x_k进基（σ_k含义：计算增加单位x_k所创增的净经济价值）；用最小比值法确定x_k的最大值θ，使基变量x_l取0值，其它基变量非负；

$$x_{n+i}=b_i'-a_{ik}'x_k\geq 0\qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_k=\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\middle|a_{ik}>0\right\}=\frac{b_l}{a_{lk}}=\theta$$

即x_l出基，目标改善σ_k，$x_k=\theta$，换基过程

若θ不存在, 则$Z\to\infty$，没有有限最优解。