Processamento Digital de Sinais - ENG420

Transformada Z

Fabrício Simões

IFBA

19 de setembro de 2017

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier - Vantagem

Análise direta do espectro (componentes de freqüência) do sinal discreto.

Transformada de Fourier - Desvantagem

- Não é adequado ao projeto de Filtros e Controladores Digitais;
- Existem muitos sinais e sistemas discretos cuja transformada de Fourier não existe.

Transformada Z

- A Transformada de Fourier para sinais/sistemas discretos é um caso específico da Transformada Z.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(z) = X_d(\omega)|_{z=re^{j\omega}} \text{ para } r = 1$$

- Critério de convergência das Transformadas de Fourier e Z.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||r^{-n}| < \infty$$

A convergência depende também dos valores de r, ou seja do $|z|$.

Região de Convergência - ROC

- Qual o intervalo de valores de r que garante a convergência da Transformada Z ?
- Exemplo: Determinar a Transformada Z e a região de convergência (ROC) do degrau unitário $u[n]$.

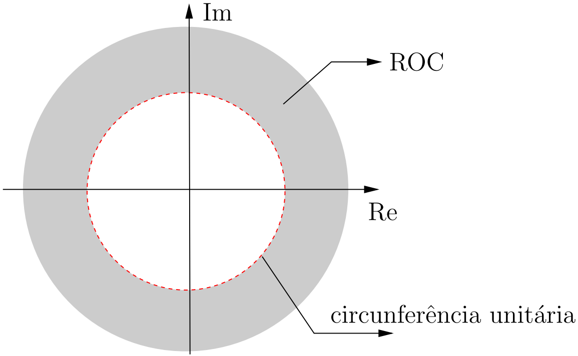
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} \qquad (1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ X(z) &= \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

Região de Convergência

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]||z^{-n}| < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |r^{-n} e^{-j\omega n}| < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n} < \infty$$



Função Racional

$$X(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_M)}{(z - z_{p1})(z - z_{p2})\dots(z - z_{pN})}$$

- z_i, i-ésimo zero de $X(z)$, ou seja, as raízes do polinômio do numerador $N(z)$.
- $z_{p,i}$, i-ésimo pólo de $X(z)$, ou seja, as raízes do polinômio do denominador $D(z)$.

Exercício

- Determine a Transformada Z do sinal $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}$$

- Determine os pólos e zeros.

Região de Convergência - Propriedades

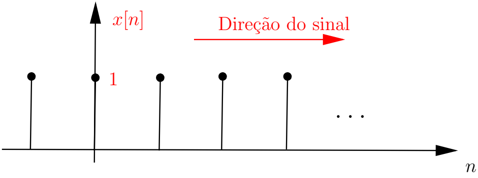
- A região de convergência pode ser um disco ou um anel centrado na origem;
- A região de convergência não contém pólos;
- Se a região de convergência contém a circunferência unitária ($r = 1$) existe a transformada de Fourier.

A região de convergência pode ser definida a partir do comportamento da função (sinal ou sistema). Para isso, as funções são classificadas como :

- Sequência Unilateral a Direita;
- Sequência Unilateral a Esquerda;
- Sequência Bilateral;
- Sequência de Duração Finita.

Sequência Unilateral a Direita

- Sinal de duração ilimitada que progride em direção a valores positivos de *n*



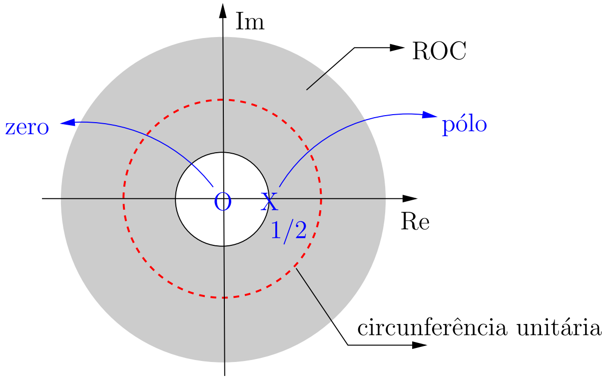
Região de Convergência

A região de convergência (ROC) é composta pela área externa ao pólo de maior valor absoluto.

Exemplo 1

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

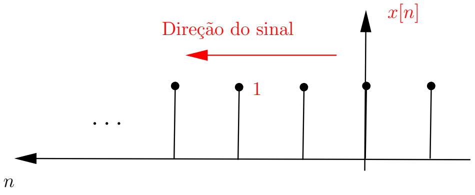
$$X(z) = \frac{z}{z - 1/2}$$



Região de Convergência ROC : $r > 1/2$

Sequência Unilateral a Esquerda

- Sinal de duração ilimitada que progride em direção a valores negativos de *n*.



Região de Convergência

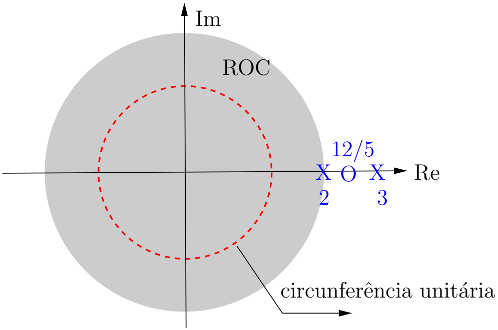
A região de convergência (ROC) é composta pela área interna ao pólo de menor valor absoluto.

Exemplo 2

$$x[n] = (2^n + 3^n)u[-n]$$

$$X(z) = \frac{2 - 5z/6}{(1 - z/2)(1 - z/3)}$$

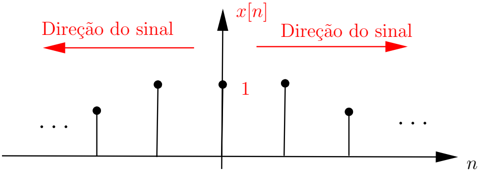
- Pólos: $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$;
- Zeros: $z_1 = 12/5$



Região de Convergência ROC : $r < 2$

Sequência Bilateral

- Sinal de duração ilimitada que progride em direção aos valores negativos e positivos de n.



Região de Convergência

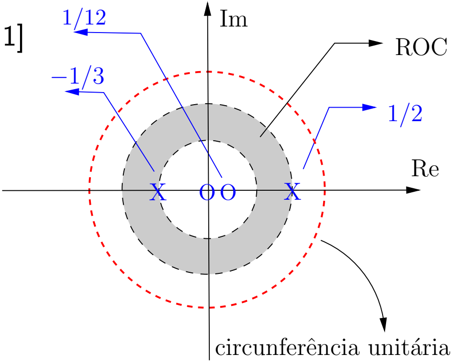
ROC: $p_1 < r < p_2$;
p_1 - pólo de maior absoluto que contribui para $n > 0$;
p_2 - pólo de menor absoluto que contribui para $n < 0$.

Exemplo 3

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{2z(z-1/12)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

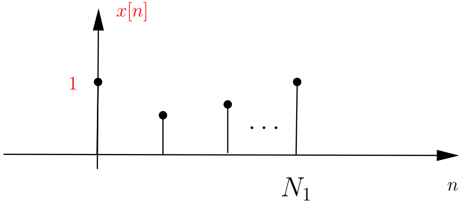
- Pólos: $p_1 = -1/3$ e $p_2 = 1/2$;
- Zeros: $z_1 = 0$ e $z_2 = 1/12$



Região de Convergência ROC : $1/3 < r < 1/2$

Sequência de Duração Finita

- Sinal com duração igual a N_1 amostras.



Região de Convergência

A ROC contém todo plano z, exceto possivelmente em $r = 0$ e/ou $r = \infty$.

Exemplo 3

$$x[n] = \delta[n],$$

ROC contém todos os valores de z, incluindo $r = 0$ e $r = \infty$

Estabilidade

O sistema é estável se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Mesmo critério de convergência da Transformada de Fourier.

Critério de Estabilidade

- Um sistema é estável se a ROC contém a circunferência unitária.
- Um sistema Causal é Estável se todos os pólos estiverem dentro do círculo unitário

Propriedades da Transformada Z

Linearidade

$$\mathcal{Z}[x_1[n]] = X_1(z), ROC : R_1$$

$$\mathcal{Z}[x_2[n]] = X_2(z), ROC : R_2$$

$$\mathcal{Z}[\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]] = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z), ROC : R_1 \cap R_2$$

Deslocamento no Tempo

$$\mathcal{Z}[x[n]] = X(z), ROC : R_x$$

$$\mathcal{Z}[x[n - n_o]] = X(z) z^{-n_o} ROC : R_x$$

A região de convergência ROC do sinal/sistema com deslocamento é igual a R_x, exceto pela inserção ou retirada de $z = 0$ ou $z = \infty$

Propriedades da Transformada Z

Deslocamento no Tempo - Exemplo

$$\mathcal{Z}[\delta[n]] = 1, ROC : \forall z$$

$$\mathcal{Z}[\delta[n - n_o]] = z^{-n_o}, ROC : \forall z, \text{ exceto } z = 0$$

Convolução no Tempo

$$\mathcal{Z}[x_1[n]] = X_1(z), ROC : R_1$$

$$\mathcal{Z}[x_2[n]] = X_2(z), ROC : R_2$$

$$\mathcal{Z}[x_1[n] * x_2[n]] = X_1(z)X_2(z), ROC : R_1 \cap R_2$$

Relação Equação a Diferenças e Transformada Z

Aplicando Transformada Z sobre a Equação a Diferenças

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right] = \mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{Z}\left[y[n-k]\right] = \sum_{m=0}^{M} b_m \mathcal{Z}\left[x[n-m]\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{m=0}^{M} b_m X(z) z^{-m}$$

Função de Transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Transformada Z - Exemplo

Considere a equação de diferenças

$$y[n] + 5y[n-1] = x[n-1] + 4x[n-3],$$

encontre a função de transferência $H(z)$.

Resposta

$$Y(z)(1 + 5z^{-1}) = X(z)(1 + 4z^{-3})$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 4}{z^3 + 5z^2}$$