

Processamento Digital de Sinais

Notas de Aula

Transformada Z

Ricardo Tokio Higuti

Departamento de Engenharia Elétrica - FEIS - Unesp

Observação: Estas notas de aula estão baseadas no livro: "Discrete-Time Signal Processing", A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, Prentice Hall, 1989/1999.

Transformada Z - TZ

- É uma generalização da Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)
- Útil para representação e análise de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT)

Definição: Seja uma sequência $x[n]$. Sua TZ é definida por:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

E tem-se o par transformado:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

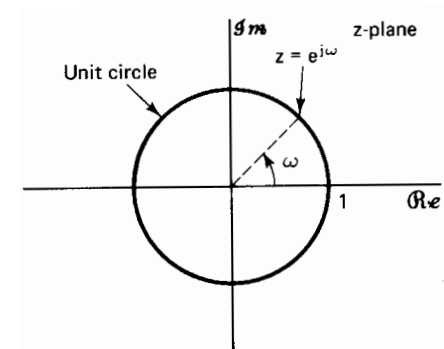
z é uma variável complexa, normalmente representada em coordenadas polares:

$$z = re^{j\omega}$$

E se $r = 1$, $z = e^{j\omega}$, e:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

Ou seja, (em determinados casos, como se verá adiante) a DTFT de $x[n]$ pode ser obtida a partir da TZ calculada em $z = e^{j\omega}$, que define uma circunferência de raio unitário (CRU) no plano z complexo.



Convergência da TZ

Num caso mais geral, a variável z pode assumir um valor complexo qualquer: $z = re^{j\omega}$. Sua TZ fica:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

Ou seja, tem-se a DTFT da sequência $x[n]$ multiplicada pela sequência exponencial r^{-n} . Pode-se notar que a DTFT dessa nova sequência pode convergir ou não, dependendo da sequência $x[n]$, do valor de r e do intervalo de n considerado. A partir disso define-se a região de convergência da TZ.

Região de Convergência (RC)

Como viu-se anteriormente, para ter-se convergência absoluta da DTFT de uma sequência, esta deve obedecer a:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

Num caso mais geral, a TZ deve convergir, logo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z^{-n}| < \infty$$

Assim, se para um determinado valor de $z = z_1$ a somatória acima converge, então z_1 faz parte da região de convergência da TZ de $x[n]$. O conjunto de valores de z para os quais a TZ converge é chamada de Região de Convergência (RC).

Região de Convergência da TZ

- Se $z = re^{j\omega_0}$ faz parte da RC, então qualquer valor z que tenha magnitude r também fará parte da RC, definindo regiões concêntricas no plano complexo z .
- Se $|z| = 1$ fizer parte da RC, então tem-se que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

ou seja, a DTFT da sequência converge.

- Por outro lado, se $|z| = 1$ não fizer parte da RC, então a DTFT não converge de forma absoluta, o que não significa que a DTFT não exista.

Observações:

- A TZ é uma série de Laurent: é uma função analítica dentro da RC, ou seja, a TZ e todas as suas derivadas são funções contínuas da variável z .
- Não é estritamente correto dizer que a DTFT é a TZ calculada sobre a CRU, pois isso não é válido para todas as sequências
- A TZ é útil quando pode ser expressa em forma fechada, como uma relação de polinômios em z :

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

podendo-se relacionar com os chamados pólos e zeros de $X(z)$.

Exemplo 1

sequência unilateral à direita ou sequência causal: $x[n] = 0$ para $n < 0$.

$$x[n] = a^n u[n]$$

Solução:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Para convergência, é necessário que:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty,$$

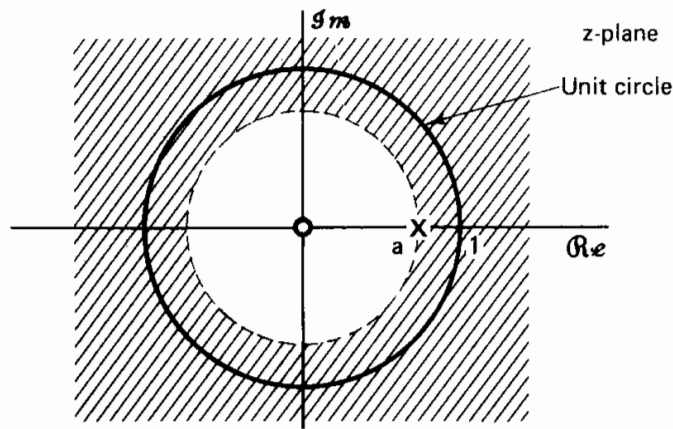
o que é alcançado quando:

$$|az^{-1}| < 1, \quad \text{ou} \quad |z| > |a|$$

ou seja, a RC é $|z| > |a|$, e a TZ é:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

E há um pólo em $z = a$ e um zero em $z = 0$.



Exemplo 2

sequência unilateral à esquerda ou sequência não-causal: $x[n] = 0$ para $n > 0$.

$$x[n] = -a^n u[-n - 1]$$

Solução:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n - 1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = - \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n \end{aligned}$$

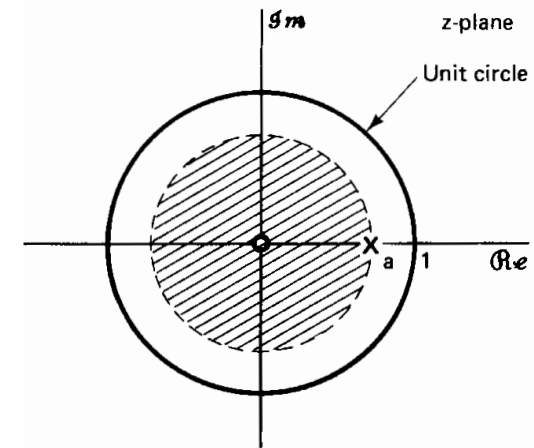
Para convergência, é necessário que:

$$|a^{-1}z| < 1, \quad \text{ou} \quad |z| < |a|$$

ou seja, a RC é $|z| < |a|$, e a TZ é:

$$X(z) = \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|$$

Nota-se que o resultado é o mesmo do caso anterior, mas com uma RC diferente.



\Rightarrow Uma determinada sequência é unicamente determinada por sua transformada z **E** sua região de convergência.

Exemplo 3

Soma de duas seqüências unilaterais à direita

$$x[n] = (1/2)^n u[n] + (-1/3)^n u[n]$$

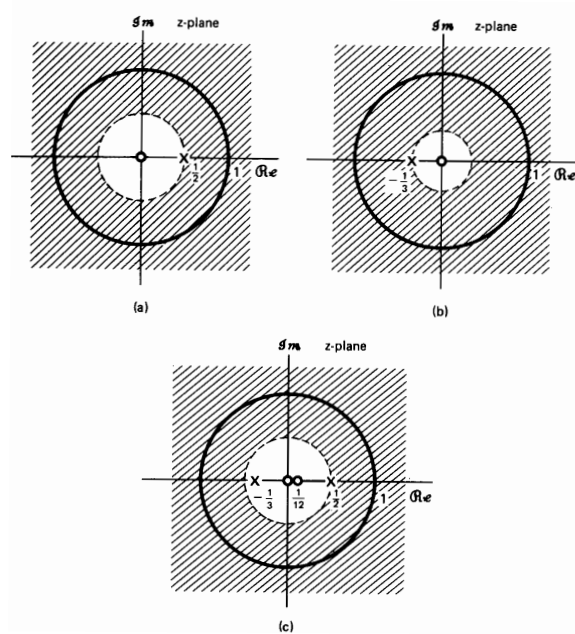
Cada seqüência tem uma TZ e uma RC:

$$(1/2)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}}, \quad |z| > 1/2$$

$$(-1/3)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - (-1/3)z^{-1}}, \quad |z| > 1/3$$

Como a TZ é uma operação linear, a TZ da soma das duas seqüências é a soma das TZ. No caso, as RC devem valer para ambas as transformadas:

$$X(z) = \frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}} + \frac{1}{1 - (-1/3)z^{-1}}, \quad |z| > 1/2$$



Exemplo 4

Seqüência bilateral: pelo menos uma amostra diferente de zero para $n < 0$ e pelo menos uma amostra diferente de zero para $n > 0$.

$$x[n] = (-1/3)^n u[n] - (1/2)^n u[-n - 1]$$

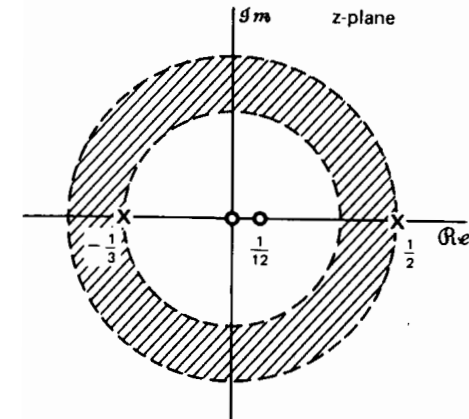
Cada seqüência tem uma TZ e uma RC:

$$(-1/3)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - (-1/3)z^{-1}}, \quad |z| > 1/3$$

$$-(1/2)^n u[-n - 1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}}, \quad |z| < 1/2$$

A RC é a intersecção das duas regiões, formando um anel no plano z :

$$X(z) = \frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}} + \frac{1}{1 - (-1/3)z^{-1}}, \quad 1/3 < |z| < 1/2$$



Exemplo 5

sequência de duração finita:

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n = 0..N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

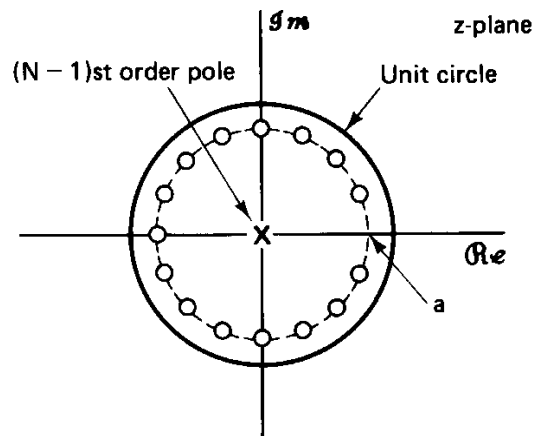
Neste caso:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n \\ &= \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \end{aligned}$$

A RC neste caso deve ser tal que $\sum_{n=0}^{N-1} |az^{-1}|^n < \infty$, ou $a < \infty$ e $z \neq 0$.

Pólos: $z = 0$, de ordem $N - 1$

Zeros: $z_k = ae^{j(2\pi k/N)}$, $k = 1..N - 1$



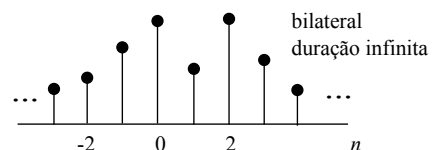
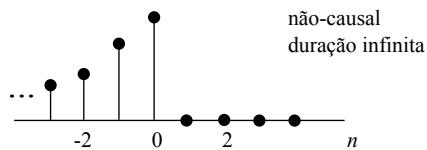
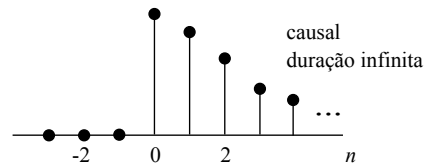
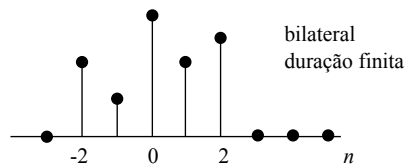
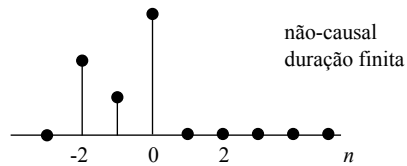
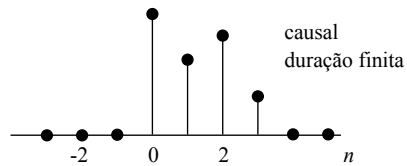
Propriedades da RC

Por meio dos exemplos, pode-se tirar algumas conclusões a respeito da RC:

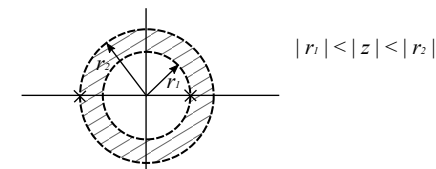
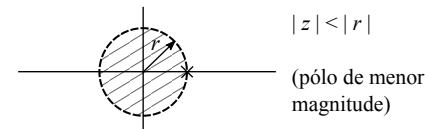
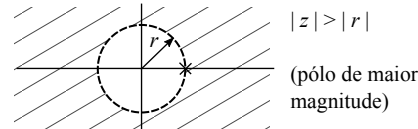
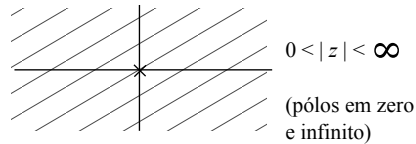
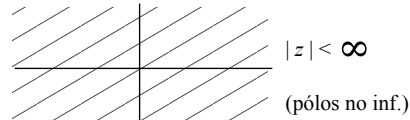
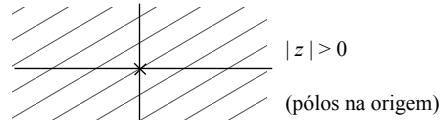
1. No caso geral, a RC é um disco no plano z , centrado na origem.
2. A DTFT de $x[n]$ converge de forma absoluta se e somente se a CRU fizer parte da RC.
3. A RC não pode conter pólos.
4. Se $x[n]$ é de duração finita, a RC é todo o plano z , exceto $z = 0$ e/ou $z = \infty$.
5. Se $x[n]$ é uma sequência causal, a RC é externa ao pólo de maior magnitude.
6. Se $x[n]$ é uma sequência não-causal, a RC é interna ao pólo de menor magnitude.
7. Se $x[n]$ é uma sequência bilateral, a RC é um anel, delimitado por pólos.
8. A RC deve ser uma região conexa.

Região de Convergência

Sequência



Região de Convergência



TZ Inversa

1. Por inspeção, usando tabelas

2. Expansão em série de potências

A partir da definição da TZ:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

3. Expansão em frações parciais

Quando a TZ for escrita em termos de uma fração de polinômios em z^{-1} , pode-se fazer a expansão em frações parciais:

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

na qual c_k 's são os zeros e d_k 's são os pólos de $X(z)$.

- **Caso 1:** $M < N$ e todos os pólos de primeira ordem.

Neste caso, pode-se escrever:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

com

$$A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z) \Big|_{z^{-1}=d_k^{-1}}$$

TZ Inversa

- **Caso 2:** $M \geq N$ e todos os pólos de primeira ordem.

Neste caso, deve-se primeiro fazer uma divisão polinomial, de forma que:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \frac{R(z)}{Q(z)}$$

e a ordem de $R(z)$ é menor que N recaindo-se no Caso 1. A expansão completa fica:

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

com

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) \left. \frac{R(z)}{Q(z)} \right|_{z^{-1}=d_k^{-1}}$$

TZ Inversa

- **Caso 3:** $M \geq N$ e um pólo em $z = d_i$ com multiplicidade s .

Neste caso, pode-se escrever:

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

na qual

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} [(1 - d_i w)^s X(w^{-1})] \right\}_{w=d_i^{-1}}$$

TZ Inversa - Exercícios

- Determinar a sequência $x[n]$ cuja TZ é dada por:

1. $X(z) = 4z^{-5} + z^{-7}, \quad |z| > 0$

2. $X(z) = z^2 + 1 - z^{-4}, \quad 0 < |z| < \infty$

3. $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}, \quad |z| > 2$

4. $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$

5. $X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}, \quad |z| > 1$

6. $X(z) = \frac{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} - 2z^{-2}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$

7. $X(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. $X(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$

- Calcule a TZ de $x[n] = a^{-n}u[-n]$
- Calcule a TZ de $x[n] = (a^n u[n]) * u[n]$

TZ Inversa - Exemplo

Determinar a sequência $x[n]$ cuja TZ é dada por:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1$$

Como $M = N = 2$, deve-se fazer a divisão polinomial:

$$X(z) = B_0 + \frac{D(z)}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} = 2 + \frac{5z^{-1} - 1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Fazendo a expansão em frações parciais:

$$X(z) = 2 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}}$$

em que

$$A_1 = \left. \frac{5z^{-1} - 1}{1 - z^{-1}} \right|_{z=1/2} = \frac{9}{-1} = -9$$

$$A_2 = \left. \frac{5z^{-1} - 1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right|_{z=1} = \frac{4}{1/2} = 8$$

Logo,

$$X(z) = 2 + \frac{-9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

Como:

$$2\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 2$$

$$(1/2)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}}, \quad |z| > 1/2$$

$$u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

Fica-se com:

$$x[n] = 2\delta[n] - 9(1/2)^n u[n] + 8u[n]$$

TZ Inversa - Definição

Seja a TZ de uma sequência $x[n]$, e sua RC:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}, \quad R_x$$

Multiplicando ambos os lados por z^{n-1} e integrando por um contorno fechado C no plano z , dentro da RC e englobando-se a origem, fica-se com:

$$\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{n-1-k}dz$$

Como a série converge dentro da RC, pode-se trocar a ordem de integração com a somatória, ficando-se com:

$$\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \oint_C z^{n-1-k}dz$$

Usando o teorema de integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1-k}dz = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

em que C é um contorno que engloba a origem. Fica-se então com:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

Caso a RC contenha o CRU, então pode-se escolher o caminho $z = e^{j\omega}$, e:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

TZ Inversa

A integral de linha é mais facilmente calculada usando o teorema de resíduos de Cauchy:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

$$= \Sigma[\text{Resíduos de } X(z)z^{n-1} \text{ calculados nos pólos no interior de } C]$$

Se $X(z)z^{n-1}$ é uma função racional de z :

$$X(z)z^{n-1} = \frac{\Psi(z)}{(z - d_0)^s}$$

em que $X(z)z^{n-1}$ tem s pólos em $z = d_0$ e $\Psi(z)$ não tem nenhum pólo em $z = d_0$. O resíduo de $X(z)z^{n-1}$ em $z = d_0$ é dado por:

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1} \text{ em } z = d_0] = \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{d^{s-1}\Psi(z)}{dz^{s-1}} \right]_{z=d_0}$$

Em particular, se o pólo é de primeira ordem ($s = 1$),

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1} \text{ em } z = d_0] = \Psi(d_0)$$

Alguns Pares de Transformadas

$x[n]$	$X(z)$	R_x
$\delta[n]$	1	Todo z
$\delta[n - n_0]$	z^{-n_0}	Todo z exceto $z = 0$ ou ∞
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Propriedades da TZ

Propriedade	Sequência	TZ	RC
Linearidade	$ax[n] + by[n]$	$aX(z) + bY(z)$	$\subset R_x \cap R_y$
Atraso no tempo	$x[n - n_d]$	$z^{-n_d} X(z)$	R_x , exceto $z = 0$ ou $\pm\infty$
Escalonamento em z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Diferenciação em z	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x , exceto $z = 0$ ou $\pm\infty$
Teor. valor inicial	$x[n] = 0, \quad n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	
Convolução no tempo	$y[n] = x[n] * h[n]$	$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$	$R_y \subset R_x \cap R_h$
Modulação	$v[n] = x[n] \cdot w[n]$	$V(z) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(v)H(z/v)dv$	$R_v \subset R_x R_h$
Correlação cruzada	$r_{12}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n - m]$	$R_{12}(z) = X(z) \cdot Y(z^{-1})$	$\subset R_x \cap R_y$
Teor. Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}dv$		

Exemplos

Calcule a TZ da sequência $x[n] = (\cos \omega_0 n) \cdot u[n]$

Dicas:

1. Escrever $\cos \omega_0 n$ usando a identidade de Euler
2. Usar propriedade de escalonamento em z
3. Usar propriedade de linearidade

Resolução:

1.

$$x[n] = \frac{e^{j\omega_0 n}}{2} u[n] + \frac{e^{-j\omega_0 n}}{2} u[n]$$

2.

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \text{RC: } |z| > 1$$

$$e^{j\omega_0 n} u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}, \quad \text{RC: } |z| > 1$$

$$e^{-j\omega_0 n} u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad \text{RC: } |z| > 1$$

3.

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} \\ &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad \text{RC: } |z| > 1 \end{aligned}$$

Exemplos

Calcule a TZ inversa de $X(z) = \log(1 + az^{-1})$, com RC $|z| > |a|$.

Calculando-se a derivada de $X(z)$, fica-se com:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

Reescrevendo-se da forma:

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = az^{-1} \left[\frac{1}{1 - (-a)z^{-1}} \right] = az^{-1} X_1(z), \quad |z| > |a|$$

A TZ inversa de $X_1(z)$ é:

$$x_1[n] = (-a)^n u[n]$$

Usando-se agora a propriedade de atraso no tempo, juntamente com a propriedade de diferenciação em z, fica-se com:

$$nx[n] = ax_1[n-1] = a(-1)^{n-1} u[n-1]$$

Logo:

$$x[n] = (-1)^{n-1} \frac{a^n}{n} u[n-1]$$

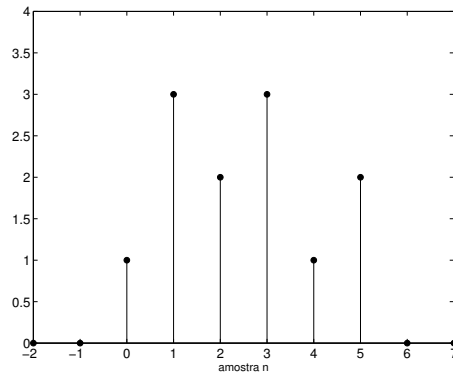
Exemplos

Calcule a convolução entre as sequências:

$$x_1[n] = \{1, 2, -1, 2\}, \quad \text{para } 0 \leq n \leq 3$$

$$x_2[n] = u[n] - u[n-3]$$

Fazendo-se a convolução linear entre as sequências, fica-se com o resultado:



Utilizando-se agora a propriedade da convolução, tem-se que a TZ é a multiplicação entre as transformadas:

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_3(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

As TZ das sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são:

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} - z^{-2} + 2z^{-3}, \quad |z| \neq 0$$

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}, \quad |z| \neq 0$$

Fazendo-se a multiplicação, fica-se com:

$$X_3(z) = 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 1z^{-4} + 2z^{-5}, \quad |z| \neq 0$$

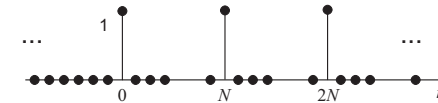
Portanto:

$$x_3[n] = \{1, 3, 2, 3, 1, 2\}, \quad \text{para } 0 \leq n \leq 5$$

Exemplos

Calcule a TZ de um trem de pulsos periódico e causal:

$$p_N[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - kN]$$

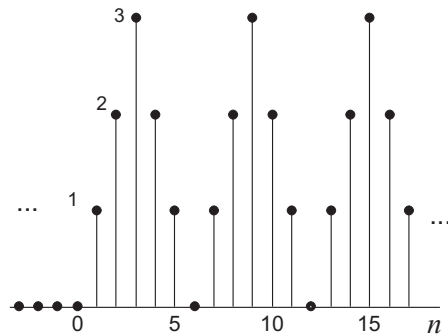


Solução:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-nN} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-N}}, \quad \text{RC: } |z| > 1 \end{aligned}$$

Exemplos

Calcule a TZ do seguinte sinal periódico e causal:



O sinal pode ser escrito como a convolução entre um sinal de duração finita, igual a um período do sinal periódico, com o pulso $p_N[n]$ do exemplo anterior:

$$x[n] = x_1[n] * p_N[n]$$

em que:

$$x_1[n] = \{0, 1, 2, 3, 2, 1\}, \quad \text{para } 0 \leq n \leq 5$$

$$\text{e } X_1(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}, \text{ com RC: } z \neq 0$$

A TZ de $x[n]$ é igual à multiplicação entre as TZs (com $N = 6$ no trem de impulsos):

$$\begin{aligned} X(z) &= X_1(z) \cdot P_N(z) \\ &= \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}}{1 - z^{-6}} \end{aligned}$$

Como a RC de $X_1(z)$ é $z \neq 0$ e a RC de $P_6(z)$ é $|z| > 1$, a RC de $X(z)$ é $|z| > 1$.

Exemplos

Uma operação utilizada no aumento da taxa de amostragem de sinais é a inserção de zeros entre amostras do sinal. Seja $x[n]$ um sinal que se deseja aumentar a taxa de amostragem. A partir deste sinal, o chamado interpolador com fator L introduz $(L - 1)$ zeros entre amostras de $x[n]$, produzindo o sinal $y[n]$:

$$y[n] = \begin{cases} x\left(\frac{n}{L}\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a TZ de $y[n]$ em função de $X(z)$.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-nL} \\ &= X(z^L) \end{aligned}$$

Se $X(z)$ tem RC: $|a| < |z| < |b|$, então $Y(z)$ irá convergir para

$$|a| < |z|^L < |b|$$

ou

$$|a|^{1/L} < |z| < |b|^{1/L}$$

Exemplos

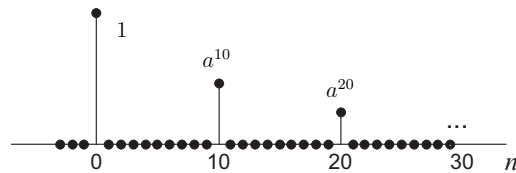
Calcule a TZ inversa de:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - a^{10}z^{-10}}, \quad \text{RC: } |z| > |a|$$

Fazendo-se a divisão polinomial e utilizando potências negativas de z , pois a sequência é causal, chega-se facilmente a:

$$Y(z) = 1 + a^{10}z^{-10} + a^{20}z^{-20} + \dots$$

da qual pode tirar a sequência $y[n]$.



Resolvendo-se por outro método: chamando-se

$$X(z) = \frac{1}{1 - a^{10}z^{-1}}, \quad \text{RC: } |z| > |a|^{10}$$

Nota-se que

$$Y(z) = X(z^{10})$$

Pelo resultado do exercício anterior:

$$y[n] = \begin{cases} x\left(\frac{n}{10}\right) & \text{para } n = 0, \pm 10, \pm 20, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como

$$x[n] = a^{10n}u[n]$$

chega-se ao resultado desejado.

$$y[n] = \begin{cases} a^n & \text{para } n = 0, \pm 10, \pm 20, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplos

Transformada z utilizando a integral de linha: calcule a TZ inversa, por meio da integral de linha.

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

Usando a definição, a sequência $x[n]$ é:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1 - az^{-1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - a} dz \end{aligned}$$

em que C é um círculo de raio maior que $|a|$.

Para $n \geq 0$, há apenas um pólo em $z = a$ no interior de C , e portanto os resíduos de $X(z)z^{n-1}$ calculados em $z = a$ são iguais a a^n :

$$x[n] = a^n, \quad \text{para } n \geq 0$$

Para $n < 0$, há outros pólos na origem, além do pólo em $z = a$. Para $n = -1$:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Res } \left[\frac{1}{z(z-a)} \text{ em } z = a \right] &= \left[\frac{1}{z} \right]_{z=a} = a^{-1} \\ \bullet \text{ Res } \left[\frac{1}{z(z-a)} \text{ em } z = 0 \right] &= \left[\frac{1}{z-a} \right]_{z=0} = -a^{-1} \end{aligned}$$

Logo, $x[-1] = 0$. Para $n = -2$:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Res } \left[\frac{1}{z^2(z-a)} \text{ em } z = a \right] &= a^{-2} \\ \bullet \text{ Res } \left[\frac{1}{z^2(z-a)} \text{ em } z = 0 \right] &= \left[\frac{d[(z-a)^{-1}]}{dz} \right]_{z=0} = \left[\frac{-1}{(z-a)^2} \right]_{z=0} = -a^{-2} \end{aligned}$$

E $x[-2] = 0$, e assim por diante, resultando que $x[n] = 0$ para $n < 0$.

Portanto:

$$x[n] = a^n u[n]$$