Entretien de suivi de thèse

LIPN - Université Sorbonne Paris Nord

Boris Eng

De la logique linéaire à la géométrie de l'interaction

Correspondance de Curry-Howard. $A \Rightarrow B$ fonction de A vers $B \mapsto$ exécution = élimination des coupures.

De la logique linéaire à la géométrie de l'interaction

Correspondance de Curry-Howard. $A \Rightarrow B$ fonction de A vers B

→ exécution = élimination des coupures.

Logique linéaire (Girard). $A \Rightarrow B = !A \multimap B$ $A, B := X_i \mid X_i^{\perp} \mid A \otimes B \mid A ?? B (MLL).$

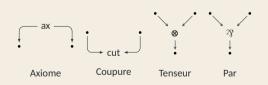
De la logique linéaire à la géométrie de l'interaction

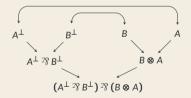
Correspondance de Curry-Howard. $A \Rightarrow B$ fonction de A vers B

→ exécution = élimination des coupures.

Logique linéaire (Girard). $A \Rightarrow B = !A \multimap B$ $A, B := X_i \mid X_i^{\perp} \mid A \otimes B \mid A \nearrow B \text{ (MLL)}.$

$$A,B:=X_i\mid X_i^\perp\mid A\otimes B\mid A^{\mathfrak{B}}B \text{ (MLL)}.$$





De la Géométrie de l'Interaction à la Syntaxe Transcendantale

Géométrie de l'Interaction (Girard). S'abstraire des preuves. Mathématiser les réseaux.

De la Géométrie de l'Interaction à la Syntaxe Transcendantale

Géométrie de l'Interaction (Girard). S'abstraire des preuves. Mathématiser les réseaux. **Syntaxe Transcendantale (Girard).**

• successeur, 4 articles informels;

De la Géométrie de l'Interaction à la Syntaxe Transcendantale

- successeur, 4 articles informels;
- introduction d'un modèle de calcul (proche de la programmation logique);

De la Géométrie de l'Interaction à la Syntaxe Transcendantale

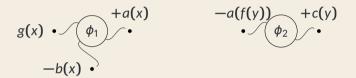
- successeur, 4 articles informels;
- introduction d'un modèle de calcul (proche de la programmation logique);
- logique (linéaire) comme emergente du calcul.

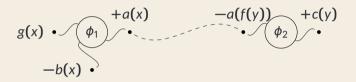
De la Géométrie de l'Interaction à la Syntaxe Transcendantale

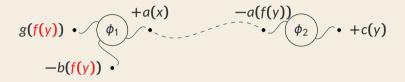
- successeur, 4 articles informels;
- introduction d'un modèle de calcul (proche de la programmation logique);
- logique (linéaire) comme emergente du calcul.
- → Formalisation (pour MLL) avec Thomas Seiller.

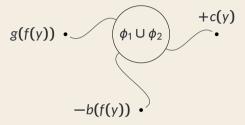
De la Géométrie de l'Interaction à la Syntaxe Transcendantale

- successeur, 4 articles informels;
- introduction d'un modèle de calcul (proche de la programmation logique);
- logique (linéaire) comme emergente du calcul.
- → Formalisation (pour MLL) avec Thomas Seiller.
- \longrightarrow Usage de la GdI pour la complexité en espace du λ -calcul avec *Damiano Mazza*.

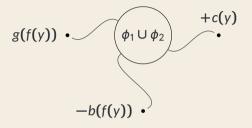






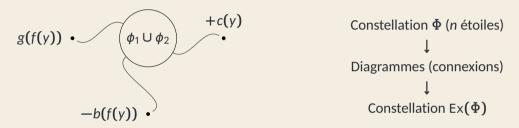


Formalisation naïve des étoiles et constellations



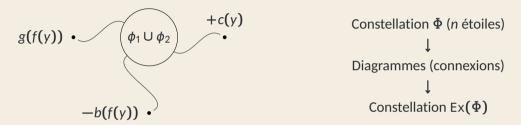
Constellation Φ (n étoiles) \downarrow Diagrammes (connexions) \downarrow Constellation $Ex(\Phi)$

Formalisation naïve des étoiles et constellations



Développement du modèle ←→ Simulation de la logique ←→ Exemples de calcul.

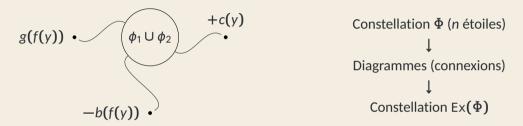
Formalisation naïve des étoiles et constellations



Développement du modèle ←→ Simulation de la logique ←→ Exemples de calcul.

1. Liens (conjecturés) : programmation logique, tuiles de Wang, pavages biologiques.

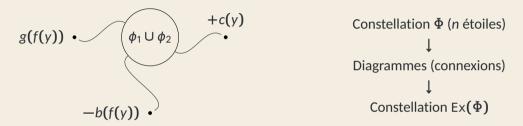
Formalisation naïve des étoiles et constellations



Développement du modèle ←→ Simulation de la logique ←→ Exemples de calcul.

1. Liens (conjecturés) : programmation logique, tuiles de Wang, pavages biologiques. $[g(x), -b(x), +a(x)] + [-a(f(y)), +c(y)] \longrightarrow [g(f(y)), -b(f(y)), +c(y)].$

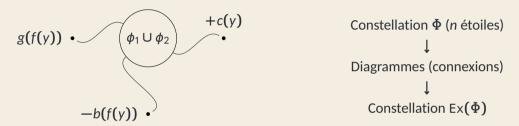
Formalisation naïve des étoiles et constellations



Développement du modèle ←→ Simulation de la logique ←→ Exemples de calcul.

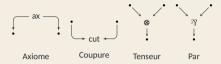
1. Liens (conjecturés) : programmation logique, tuiles de Wang, pavages biologiques. $[g(x), -b(x), +a(x)] + [-a(f(y)), +c(y)] \longrightarrow [g(f(y)), -b(f(y)), +c(y)].$

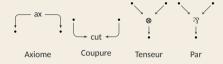
Formalisation naïve des étoiles et constellations



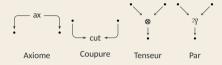
Développement du modèle ←→ Simulation de la logique ←→ Exemples de calcul.

- 1. Liens (conjecturés) : programmation logique, tuiles de Wang, pavages biologiques. $[g(x), -b(x), +a(x)] + [-a(f(y)), +c(y)] \longrightarrow [g(f(y)), -b(f(y)), +c(y)].$
- 2. Vérification de propriétés essentielles (confluence, terminaison, ...).



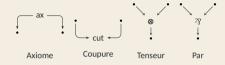


Double nature, preuve = calcul + logique.



Double nature, preuve = calcul + logique.

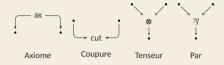
Calcul. Encoder les structures de preuves $\mathcal S$ de MLL (hyperarête = étoile).



Double nature, preuve = calcul + logique.

Calcul. Encoder les structures de preuves $\mathscr S$ de MLL (hyperarête = étoile).

Logique. $\mathscr{S} \sim \Phi_{\mathscr{S}}$. Est-ce que $\Phi_{\mathscr{S}}$ est une vraie preuve?

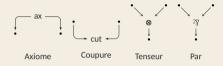


Double nature, preuve = calcul + logique.

Calcul. Encoder les structures de preuves $\mathcal S$ de MLL (hyperarête = étoile).

Logique. $\mathscr{S} \leadsto \Phi_{\mathscr{S}}$. Est-ce que $\Phi_{\mathscr{S}}$ est une vraie preuve?

 $\bullet\,$ Critère de Danos-Regnier : faire passer des tests $\Phi_1,...,\Phi_n.$

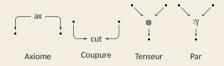


Double nature, preuve = calcul + logique.

Calcul. Encoder les structures de preuves $\mathcal S$ de MLL (hyperarête = étoile).

Logique. $\mathscr{S} \leadsto \Phi_{\mathscr{S}}$. Est-ce que $\Phi_{\mathscr{S}}$ est une vraie preuve?

- Critère de Danos-Regnier : faire passer des tests $\Phi_1,...,\Phi_n$.
- $\operatorname{Ex}(\Phi_{\mathscr{S}} \uplus \Phi_i)$ satisfait une propriété $P \longrightarrow \operatorname{orthogonalité} \Phi_{\mathscr{S}} \perp \Phi_i$.

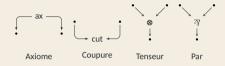


Double nature, preuve = calcul + logique.

Calcul. Encoder les structures de preuves $\mathcal S$ de MLL (hyperarête = étoile).

Logique. $\mathscr{S} \leadsto \Phi_{\mathscr{S}}$. Est-ce que $\Phi_{\mathscr{S}}$ est une vraie preuve?

- Critère de Danos-Regnier : faire passer des tests $\Phi_1,...,\Phi_n$.
- $\operatorname{Ex}(\Phi_{\mathscr{S}} \uplus \Phi_i)$ satisfait une propriété $P \longrightarrow \operatorname{orthogonalité} \Phi_{\mathscr{S}} \perp \Phi_i$.
- Formules par réalisabilité $A = \{\Phi_1, \Phi_2, ...\}, A^{\perp}, A \otimes B, A ? B.$

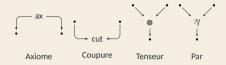


Double nature, preuve = calcul + logique.

Calcul. Encoder les structures de preuves $\mathcal S$ de MLL (hyperarête = étoile).

Logique. $\mathscr{S} \leadsto \Phi_{\mathscr{S}}$. Est-ce que $\Phi_{\mathscr{S}}$ est une vraie preuve?

- Critère de Danos-Regnier : faire passer des tests $\Phi_1,...,\Phi_n$.
- $\operatorname{Ex}(\Phi_{\mathscr{S}} \uplus \Phi_i)$ satisfait une propriété $P \longrightarrow \operatorname{orthogonalité} \Phi_{\mathscr{S}} \perp \Phi_i$.
- Formules par réalisabilité $A = \{\Phi_1, \Phi_2, ...\}, A^{\perp}, A \otimes B, A ? B.$
- Correction et complétude : on simule/capture bien MLL (et MLL+MIX).



Double nature, preuve = calcul + logique.

Calcul. Encoder les structures de preuves $\mathcal S$ de MLL (hyperarête = étoile).

Logique. $\mathscr{S} \leadsto \Phi_{\mathscr{S}}$. Est-ce que $\Phi_{\mathscr{S}}$ est une vraie preuve?

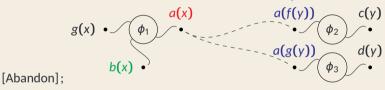
- Critère de Danos-Regnier : faire passer des tests $\Phi_1,...,\Phi_n$.
- $\operatorname{Ex}(\Phi_{\mathscr{S}} \uplus \Phi_i)$ satisfait une propriété $P \longrightarrow \operatorname{orthogonalité} \Phi_{\mathscr{S}} \perp \Phi_i$.
- Formules par réalisabilité $A = \{\Phi_1, \Phi_2, ...\}, A^{\perp}, A \otimes B, A ? B.$
- Correction et complétude : on simule/capture bien MLL (et MLL+MIX).

Soumission d'article (rejetée). "Stellar Resolution : Multiplicatives", CSL 2020 (Été).

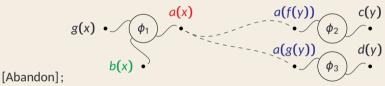
• Notes personnelles :

- Notes personnelles :
 - machines à compteur, automates cellulaires / à pile, machines de Turing;

- Notes personnelles :
 - machines à compteur, automates cellulaires / à pile, machines de Turing;
 - extensions informelles vers MALL: non-déterminisme, connexions interdites

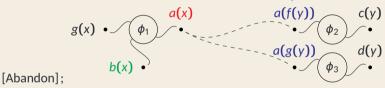


- Notes personnelles :
 - machines à compteur, automates cellulaires / à pile, machines de Turing;
 - extensions informelles vers MALL: non-déterminisme, connexions interdites



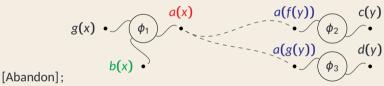
- extensions informelles vers MELL : gérer la duplication/l'effacement en logique ;

- Notes personnelles :
 - machines à compteur, automates cellulaires / à pile, machines de Turing;
 - extensions informelles vers MALL: non-déterminisme, connexions interdites



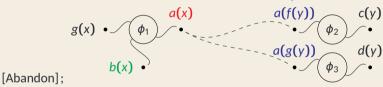
- extensions informelles vers MELL : gérer la duplication/l'effacement en logique ;
- Amélioration/développement des définitions et preuves de l'article CSL2020.

- Notes personnelles :
 - machines à compteur, automates cellulaires / à pile, machines de Turing;
 - extensions informelles vers MALL: non-déterminisme, connexions interdites



- extensions informelles vers MELL: gérer la duplication/l'effacement en logique;
- Amélioration/développement des définitions et preuves de l'article CSL2020.
- Preuve de simulation des "modèles d'assemblage de tuiles abstraites" (bioinformatique).

- Notes personnelles :
 - machines à compteur, automates cellulaires / à pile, machines de Turing;
 - extensions informelles vers MALL: non-déterminisme, connexions interdites

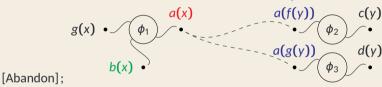


- extensions informelles vers MELL: gérer la duplication/l'effacement en logique;
- Amélioration/développement des définitions et preuves de l'article CSL2020.
- Preuve de simulation des "modèles d'assemblage de tuiles abstraites" (bioinformatique).

Systèmes de types atypiques?

Exploration en largeur et rédaction (début 2ème année)

- Notes personnelles :
 - machines à compteur, automates cellulaires / à pile, machines de Turing;
 - extensions informelles vers MALL: non-déterminisme, connexions interdites



- extensions informelles vers MELL : gérer la duplication/l'effacement en logique ;
- Amélioration/développement des définitions et preuves de l'article CSL2020.
- Preuve de simulation des "modèles d'assemblage de tuiles abstraites" (bioinformatique).

Systèmes de types atypiques?

Soumission d'article (rejetée). LICS 2020 (Fin automne).

Lambda-calcul et complexité en espace

Thèse de Church-Turing. Machines de Turing et Lambda-calcul → même "puissance".

Lambda-calcul et complexité en espace

Thèse de Church-Turing. Machines de Turing et Lambda-calcul \mapsto même "puissance". Thèse d'invariance. Même "efficacité"? Comment mesurer l'espace du λ -calcul?

Lambda-calcul et complexité en espace

Thèse de Church-Turing. Machines de Turing et Lambda-calcul \mapsto même "puissance". Thèse d'invariance. Même "efficacité"? Comment mesurer l'espace du λ -calcul? \mapsto Géométrie de l'interaction = exploration statique de λ -terme (Schöpp).

Lambda-calcul et complexité en espace

Thèse de Church-Turing. Machines de Turing et Lambda-calcul → même "puissance".

Thèse d'invariance. Même "efficacité"? Comment mesurer l'espace du λ -calcul?

- \mapsto Géométrie de l'interaction = exploration statique de λ-terme (Schöpp).
- \mapsto relation entre λ Space et Space(O(f)) (stage Master 1).

Lambda-calcul et complexité en espace

Thèse de Church-Turing. Machines de Turing et Lambda-calcul → même "puissance".

Thèse d'invariance. Même "efficacité"? Comment mesurer l'espace du λ -calcul?

- \rightarrow Géométrie de l'interaction = exploration statique de λ -terme (Schöpp).
- \mapsto relation entre λ Space et Space(O(f)) (stage Master 1).

Durant la thèse:

Lambda-calcul et complexité en espace

Thèse de Church-Turing. Machines de Turing et Lambda-calcul → même "puissance".

Thèse d'invariance. Même "efficacité"? Comment mesurer l'espace du λ -calcul?

- \rightarrow Géométrie de l'interaction = exploration statique de λ -terme (Schöpp).
- \mapsto relation entre λ Space et Space(O(f)) (stage Master 1).

Durant la thèse:

• exportation vers PCF ou le λ -calcul CBPV.

Lambda-calcul et complexité en espace

Thèse de Church-Turing. Machines de Turing et Lambda-calcul → même "puissance".

Thèse d'invariance. Même "efficacité"? Comment mesurer l'espace du λ -calcul?

- \rightarrow Géométrie de l'interaction = exploration statique de λ -terme (Schöpp).
- \mapsto relation entre λ Space et Space(O(f)) (stage Master 1).

Durant la thèse:

- exportation vers PCF ou le λ -calcul CBPV.
- outils catégoriques pour approximation du calcul : proto-(op)fibrations.

Lambda-calcul et complexité en espace

Thèse de Church-Turing. Machines de Turing et Lambda-calcul → même "puissance".

Thèse d'invariance. Même "efficacité"? Comment mesurer l'espace du λ -calcul?

- \rightarrow Géométrie de l'interaction = exploration statique de λ -terme (Schöpp).
- \mapsto relation entre λ Space et Space(O(f)) (stage Master 1).

Durant la thèse:

- exportation vers PCF ou le λ -calcul CBPV.
- outils catégoriques pour approximation du calcul : proto-(op)fibrations.
- "Interacting Seems Unreasonable, in Time and Space" (Accattoli, Dal Lago, Vanoni).

Lambda-calcul et complexité en espace

Thèse de Church-Turing. Machines de Turing et Lambda-calcul → même "puissance".

Thèse d'invariance. Même "efficacité"? Comment mesurer l'espace du λ -calcul?

- \rightarrow Géométrie de l'interaction = exploration statique de λ -terme (Schöpp).
- \mapsto relation entre λ Space et Space(O(f)) (stage Master 1).

Durant la thèse:

- exportation vers PCF ou le λ -calcul CBPV.
- outils catégoriques pour approximation du calcul : proto-(op)fibrations.
- "Interacting Seems Unreasonable, in Time and Space" (Accattoli, Dal Lago, Vanoni).

Résolution stellaire \mapsto MLL \mapsto MELL \mapsto λ -calcul. Pas d'intérêt évident...

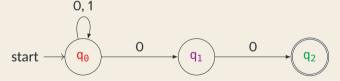
Rédaction d'article. LMCS – Logical Methods in Computer Science.

• Détails de toutes les preuves, preuves de simulations :

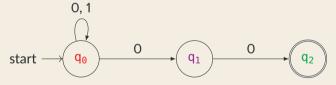
- Détails de toutes les preuves, preuves de simulations :
 - automates, machines de Turing, circuits booléens/arithmétiques;

- Détails de toutes les preuves, preuves de simulations :
 - automates, machines de Turing, circuits booléens/arithmétiques;
 - modèle d'assemblage de tuiles abstraites.

- Détails de toutes les preuves, preuves de simulations :
 - automates, machines de Turing, circuits booléens/arithmétiques;
 - modèle d'assemblage de tuiles abstraites.
- Résolution stellaire : transfert de données local dans un réseau (hypergraphe).

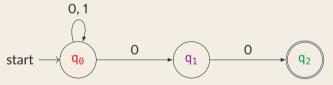


- Détails de toutes les preuves, preuves de simulations :
 - automates, machines de Turing, circuits booléens/arithmétiques;
 - modèle d'assemblage de tuiles abstraites.
- Résolution stellaire : transfert de données local dans un réseau (hypergraphe).



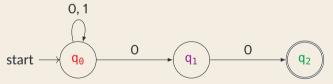
$$[-i(w), +a(w, \mathbf{q}_0)] +$$

- Détails de toutes les preuves, preuves de simulations :
 - automates, machines de Turing, circuits booléens/arithmétiques;
 - modèle d'assemblage de tuiles abstraites.
- Résolution stellaire : transfert de données local dans un réseau (hypergraphe).



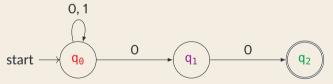
$$[-i(w), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(1 \cdot w, q_0), +a(w, q_0)] +$$

- Détails de toutes les preuves, preuves de simulations :
 - automates, machines de Turing, circuits booléens/arithmétiques;
 - modèle d'assemblage de tuiles abstraites.
- Résolution stellaire : transfert de données local dans un réseau (hypergraphe).



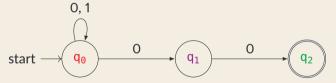
$$[-i(w), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(1 \cdot w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0)$$

- Détails de toutes les preuves, preuves de simulations :
 - automates, machines de Turing, circuits booléens/arithmétiques;
 - modèle d'assemblage de tuiles abstraites.
- Résolution stellaire : transfert de données local dans un réseau (hypergraphe).



$$[-i(w), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(1 \cdot w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_1)] + [-a(0 \cdot w, q_1), +a(w, q_2)] +$$

- Détails de toutes les preuves, preuves de simulations :
 - automates, machines de Turing, circuits booléens/arithmétiques;
 - modèle d'assemblage de tuiles abstraites.
- Résolution stellaire : transfert de données local dans un réseau (hypergraphe).



$$[-i(w), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(1 \cdot w, q_0), +a(w, q_0)] + [-a(0 \cdot w, q_0), +a(w, q_1)] + [-a(0 \cdot w, q_1), +a(w, q_2)] + [-a(\epsilon, q_2), accept]$$

Deux notions de types unifiées :

• types primitifs (programmation f: A, calcul des séquents $\vdash \pi: A, ...$);

- types primitifs (programmation f: A, calcul des séquents $\vdash \pi: A, ...$);
- types par réalisabilité $t \Vdash A$ (description comportementale) avec $A = \{t_1, t_2, ...\}$;

- types primitifs (programmation f: A, calcul des séquents $\vdash \pi: A, ...$);
- types par réalisabilité $t \Vdash A$ (description comportementale) avec $A = \{t_1, t_2, ...\}$;
- reliés par adéquation : si Φ : A alors $\Phi \Vdash A$;

- types primitifs (programmation f: A, calcul des séquents $\vdash \pi: A, ...$);
- types par réalisabilité $t \Vdash A$ (description comportementale) avec $A = \{t_1, t_2, ...\}$;
- reliés par adéquation : si Φ : A alors $\Phi \Vdash A$;
- interprétation en syntaxe transcendantale.

Deux notions de types unifiées :

- types primitifs (programmation f: A, calcul des séquents $\vdash \pi: A, ...$);
- types par réalisabilité $t \Vdash A$ (description comportementale) avec $A = \{t_1, t_2, ...\}$;
- reliés par adéquation : si Φ : A alors $\Phi \Vdash A$;
- interprétation en syntaxe transcendantale.

Extensions possibles

Deux notions de types unifiées :

- types primitifs (programmation f: A, calcul des séquents $\vdash \pi: A, ...$);
- types par réalisabilité $t \Vdash A$ (description comportementale) avec $A = \{t_1, t_2, ...\}$;
- reliés par adéquation : si Φ : A alors $\Phi \Vdash A$;
- interprétation en syntaxe transcendantale.

Extensions possibles

• transposer les résultats à MELL (déjà un peu exploré) $\mapsto \lambda$ -calcul.

Deux notions de types unifiées :

- types primitifs (programmation f: A, calcul des séquents $\vdash \pi: A, ...$);
- types par réalisabilité $t \Vdash A$ (description comportementale) avec $A = \{t_1, t_2, ...\}$;
- reliés par adéquation : si Φ : A alors $\Phi \Vdash A$;
- interprétation en syntaxe transcendantale.

Extensions possibles

- transposer les résultats à MELL (déjà un peu exploré) $\mapsto \lambda$ -calcul.
- étendre à la logique du second ordre → System F.

Deux notions de types unifiées :

- types primitifs (programmation f: A, calcul des séquents $\vdash \pi: A, ...$);
- types par réalisabilité $t \Vdash A$ (description comportementale) avec $A = \{t_1, t_2, ...\}$;
- reliés par adéquation : si Φ : A alors $\Phi \Vdash A$;
- interprétation en syntaxe transcendantale.

Extensions possibles

- transposer les résultats à MELL (déjà un peu exploré) $\mapsto \lambda$ -calcul.
- étendre à la logique du second ordre → System F.
- étendre à la logique du premier ordre → complexité descriptive?

Deux notions de types unifiées :

- types primitifs (programmation f: A, calcul des séquents $\vdash \pi: A, ...$);
- types par réalisabilité $t \Vdash A$ (description comportementale) avec $A = \{t_1, t_2, ...\}$;
- reliés par adéquation : si Φ : A alors $\Phi \Vdash A$;
- interprétation en syntaxe transcendantale.

Extensions possibles

- transposer les résultats à MELL (déjà un peu exploré) $\mapsto \lambda$ -calcul.
- étendre à la logique du second ordre → System F.
- étendre à la logique du premier ordre → complexité descriptive?
- application à l'étude des classes de complexité.

Merci d'avoir écouté ma présentation.