

Visualize Dirichlet Distribution

Dirichlet 分布

用投影法、重心坐标系可视化 Dirichlet 分布



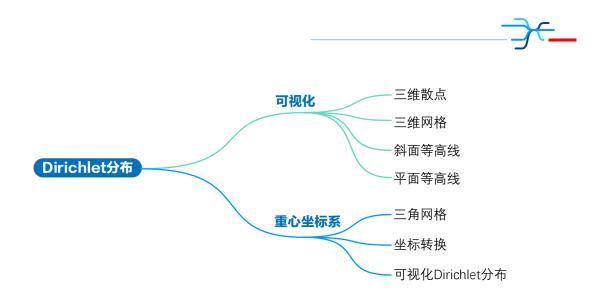
像专业人士一样学习规则,这样你就可以像艺术家一样打破它们。

Learn the rules like a pro, so you can break them like an artist.

—— 毕加索 (Pablo Picasso) | 西班牙艺术家 | 1881 ~ 1973



- ◀ matplotlib.pyplot.plot trisurf() 在三角形网格上绘制平滑的三维曲面图
- matplotlib.pyplot.tricontourf() 在三角形网格上绘制填充的等高线图
- matplotlib.pyplot.triplot() 在三角形网格上绘制线条
- ◀ matplotlib.tri.Triangulation() 生成三角剖分对象
- matplotlib.tri.UniformTriRefiner() 对三角形网格进行均匀细化,生成更密集的三角形网格,以提高绘制的精细度和准确性
- ◀ numpy.column_stack() 将两个矩阵按列合并
- ▼ numpy.linalg.inv() 计算矩阵逆
- ◀ plotly.figure factory.create ternary contour() 重心系等高线
- ◀ scipy.spatial.Delaunay() 生成一个点集的 Delaunay 三角剖分
- ✓ scipy.stats.dirichlet Dirichlet 分布对象



本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466

32.1 什么是 Dirichlet 分布?

鸢尾花书第一册《数学要素》和本册《可视之美》前文中,大家最常见的分布应该是高斯分布。 本章则介绍一种很"美丽"的分布——Dirichlet 分布。

专门开辟一章特别讲解 Dirichlet 分布一方面是因为这个分布的确很美;此外, Dirichlet 分布常常用在贝叶斯统计学、自然语言处理中,重要程度不亚于高斯分布。

简单来说,Dirichlet 分布是一种连续的概率分布,通常用于描述一个多元随机变量的概率分布。它是以德国数学家 Peter Gustav Lejeune Dirichlet 的名字命名的。

实际上,本书前文已经在不同章节聊过 Dirichlet 分布。如图 1 (a) 所示,这个三元 Dirichlet 变量有三个,即 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 。

 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 取值范围都是 **[0, 1]**。非常重要的是, θ_1 、 θ_2 、 θ_3 满足 θ_1 + θ_2 + θ_3 = **1**。如图 1 **(a)** 所示,在三维空间来看, θ_1 + θ_2 + θ_3 = **1** 且考虑给定取值范围**[0, 1]**,形状为图中浅蓝色斜面。

给定三元 Dirichlet 的参数 (α_1 , α_2 , α_3), 我们便可以获得三元 Dirichlet 的概率密度。如图 1 (b) 所示,本书前文用三维散点图展示过 Dirichlet 概率密度。图中每个散点的颜色代表概率密度大小,暖色更大,冷色更小。

还有一个有趣的知识点是,为了方便可视化 Dirichlet 分布,我们可以顺便了解重心坐标系这个概念,这是本书最后要介绍的内容。

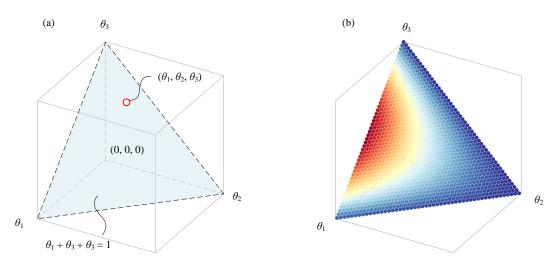


图 1. 用三维展示 Dirichlet 分布

32.2 降维投影到平面

由于 θ_1 + θ_2 + θ_3 = 1 这个约束条件,任意给定两个 θ ,我们就可以确定斜面上一点。

如图 2 所示, θ_1 + θ_2 + θ_3 = 1 代表浅蓝色斜面。当给定 θ_1 和 θ_2 时,我们便可以计算得到 θ_3 。也就是说,我们可以将浅蓝色斜面投影到 $\theta_1\theta_2$ 平面上,(θ_1 , θ_2 , θ_3) 和 (θ_1 , θ_2) ——对应。

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466

显然, 在 $\theta_1\theta_2$ 平面上绘制等高线很容易!

图 9 所示为一组在平面上展示的 Dirichlet 分布。Bk_2_Ch32_01.ipynb 绘制这组图,代码很简单,请大家自行学习。

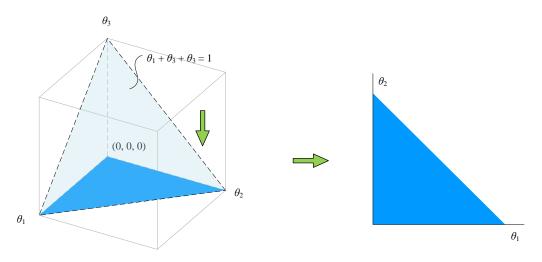


图 2. 浅蓝色平面 θ_1 + θ_2 + θ_3 = 1 投影到 $\theta_1\theta_2$ 平面

32.3 将等高线投影到斜面上

由于 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 和 (θ_1, θ_2) ——对应,我们立刻就想到,我们是否能把图 9 这些平面等高线上投影到 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ 上?

答案是肯定的!

图 2 所示的就是这个意义映射原理。

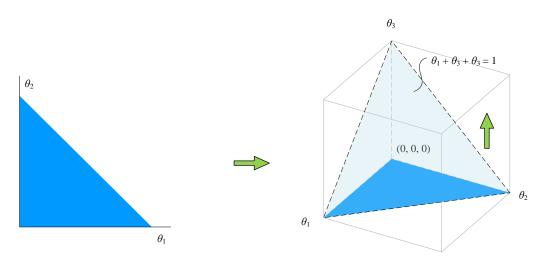


图 3. $\theta_1\theta_2$ 平面反过来投影到浅蓝色平面 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$

如图 10 所示,我们把图 9 中 Dirichlet 概率密度函数等高线投影到斜面上。这里用的的可视化技巧类似于前文在介绍瑞利商时,将瑞利商投影到单位球体"幕布"上几乎完全一致。

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466

Bk_2_Ch32_02.ipynb 绘制图 10, 核心代码已经在本书前文将结果, 也请大家自行学习。

类似地,如图 4 所示,我们可以设计更丰富的可视化方案用不同投影方法展示 Dirichlet 分布。图 11、图 12、图 13 这三组图就是可视化的结果。用到的绘图技巧是 Matplotlib 中三维等高线在不同方向投影,本书在前文介绍过这个技巧,大家可以回顾。

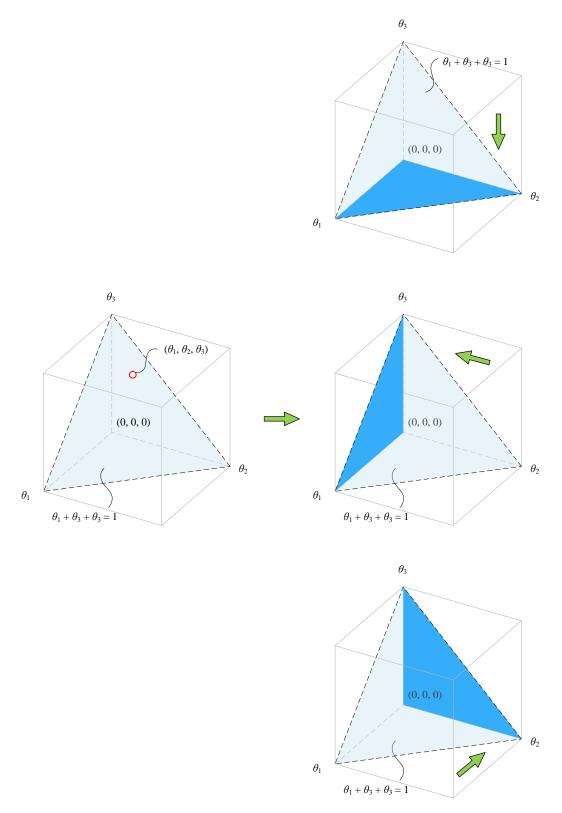


图 4. 投影到三个不同平面上

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466

欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

32.4 重心坐标系

从物理角度来看,**重心坐标系** (barycentric coordinate system) 是一种描述一个几何形 状内部任意点位置的方法。它是以该形状的重心作为原点建立的坐标系。

在平面上的一个三角形中,任何一点都可以表示为三个定点的加权平均值,其中每个定点的权重由 它到该点的距离与该三角形的周长之比确定。这些权重称为该点在三角形的重心坐标。

实际上,用三维直角坐标系解释重心坐标系更方便。图 5 左图所示为三维直角坐标系,为了区分坐标系的横轴、纵轴、竖轴分别记做 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 。这个三维直角坐标系中坐标可以记做 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 。

图 5 左图浅蓝色平面上的每个坐标 (θ_1 , θ_2 , θ_3) 都满足 θ_1 + θ_2 + θ_3 = 1。 θ_1 + θ_2 + θ_3 = 1 这个限制条件,让原本三维的空间降维成二维。即便如此,如图 5 右图所示,三角网格的每一点仍旧对应 (θ_1 , θ_2 , θ_3)。

如图 6 所示, 本章并用两种变量 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 标注位置。

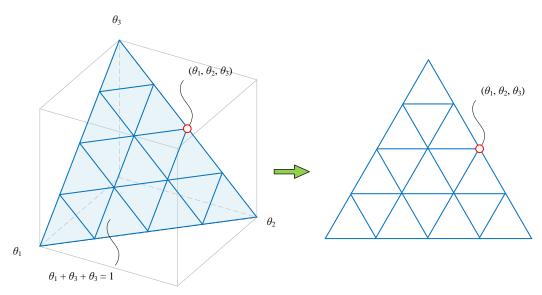


图 5. 从三维直角坐标系到重心坐标系

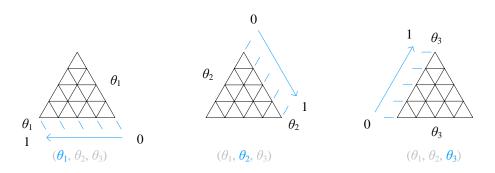


图 6. 重心坐标系的三个变量

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML

本书配套微课视频均发布在B站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466

欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

图 14 从三维直角坐标系视角观察中心坐标系中的 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 。

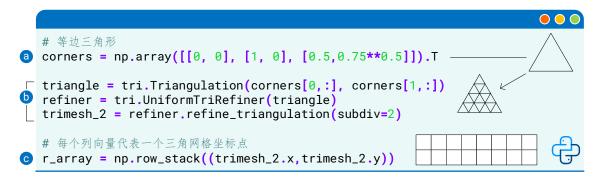
图 15 上下两幅子图比较**等边三角形** (equilateral triangle) 中的两个坐标系坐标关系; 上图给出的是利用三角网格表达平面直角坐标系。下图则是利用相同网格表达重心坐标系坐标。请大家注意区分。

图 16 则展示**等腰直角三角形** (isosceles right triangle) 中两个坐标系坐标关系。图 17 所示为任意形状三角形中两个坐标系的关系。

Bk_2_Ch32_06.ipynb 绘制图 15、图 16、图 17, 下面聊聊其中核心语句。

代码 1 在直角坐标系中生成三角网格坐标点。有了本章前文的基础,大家应该对这几句代码很熟了。

- ② 定义三角形的三个顶点坐标,这个三角形是图 15 中等边三角形。Bk_2_Ch32_06.ipynb 还 给出两个其他三角形的顶点坐标。
 - b 构造三角网格对象,然后细分网格。
 - ◎ 将三角网格坐标点构造成二维数组 (矩阵), 每个列向量代表一个坐标点。



代码 1. 直角坐标系中的三角网格坐标点 | Bk_2_Ch32_06.ipynb

代码 2 可视化直角坐标系中网格坐标。

- a matplotlib.pyplot.triplot(), 简作plt.triplot(), 绘制三角网格。
- ●使用 for 循环在图片上打印三角网格每个点的坐标。

其中, zip()将多个可迭代对象打包, 从而方便 for 循环遍历。

每次迭代,创建 text_idx,其中包含横纵坐标的字符串。format()将坐标值格式化为小数点后两位。

然后利用 matplotlib.pyplot.text(), 简作 plt.text(), 将文本添加到图片中。

 x_idx 是文本标签的 x 坐标。 $y_idx+0.03$ 是为了在 $y_idx+0.03$ 是为 $y_idx+0.03$

text_idx 是要显示的文本字符串。

fontsize=8 设置文本的字体大小为 8 pt。

horizontalalignment='center' 将文本水平居中对齐。

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466 欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

bbox=dict(facecolor='w', alpha=0.5, edgecolor='None') 定义了一个包含文本的矩形框。其中 facecolor='w' 设置矩形框的背景色为白色, alpha=0.5 设置透明度为 0.5, edgecolor='None' 表示矩形框没有边框。

```
fig, ax = plt.subplots(figsize = (5,5))
a plt.triplot(trimesh_2)
   plt.plot(r_array[0,:],
            r_array[1,:],
             .r',
            markersize = 10)
  for x_idx, y_idx in zip(trimesh_2.x, trimesh_2.y):
                                                                        (x,y)
       text_idx = ('(' + format(x_idx, '.2f') +
                       ' + format(y_idx, '.2f') +
       plt.text(x_idx, y_idx+0.03,
                text_idx,
                fontsize = 8
                horizontalalignment = 'center',
                bbox=dict(facecolor='w', alpha=0.5, edgecolor = 'None'))
   ax.set_aspect('equal')
   ax.set_xlim(0,1); ax.set_ylim(0,1)
```

代码 2. 展示直角坐标系中网格坐标 | Bk_2_Ch32_06.ipynb

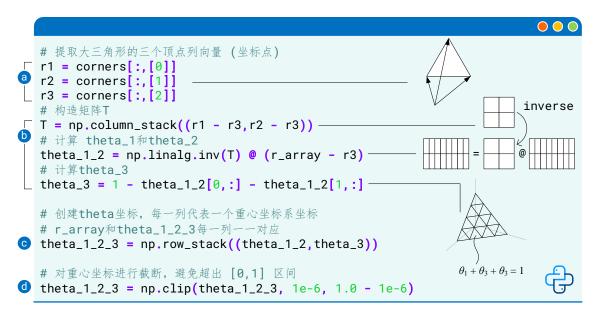
代码 3 展示的是直角坐标系和重心坐标系坐标转换运算。图 7 所示为转换过程用到的具体数学工具,大家可以看到其中最重要的运算是矩阵求逆。Bk_2_Ch32_06.ipynb 列出参考文献,大家可以自行学习。

- 提取大三角形三个顶点坐标,结果为二维数组,相当于列向量。
- b 首先创建矩阵 $T = [r_1 r_3, r_2 r_3]$ 。

然后,通过 $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3)$ 计算 θ_1 、 θ_2 。代码中用到了广播原则。 \mathbf{r}_{-} array 是直角坐标系中有待转换的坐标点。

根据等式 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ 计算 θ_3 。注意, r_array 和 theta_1_2_3 每一列一一对应。也就是说,至此,我们完成了直角坐标系和重心坐标系之间的坐标转换。

- ☑利用 numpy.row_stack()创建一个矩阵,每一列代表一个重心坐标坐标。
- ●利用 numpy.clip()对计算得到的重心坐标进行截断,确保它们在合理的范围内,避免超出[0,1] 区间。1e-6 是一个小的容差值,用于避免由于数值误差导致的坐标超出范围。



代码 3. 直角坐标系和重心坐标系转换 | Bk_2_Ch32_06.ipynb

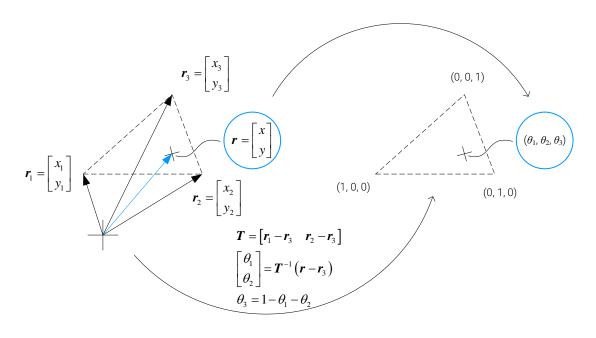


图 7. 平面直角坐标系到重心坐标系转换背后的线性代数工具

? 请大家修改 Bk_2_Ch32_06.ipynb, 修改原始大三角形的三个顶点坐标为 (0,8)、(8,0)、(5,8), 重新绘制重心坐标系网格坐标。

图 18 所示为在重心坐标系中混合红绿蓝三色。Bk_2_Ch32_07.ipynb 绘制图 18, 代码很简单,请大家自行学习。

32.4 重心坐标系展示 Dirichlet 分布

"鸢尾花书"中,重心坐标系常用来可视化 Dirichlet 分布概率密度函数。

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466



❤️《统计至简》一册将专门讲解 Dirichlet 分布及其在贝叶斯推断的应用。

本书前文利用其它可视化方案展示过 Dirichlet 分布。图 19、图 20 向大家展示如何利用重心坐 标系可视化三元 Dirichlet 分布随参数 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 变化。

Bk_2_Ch32_08.ipynb 绘制图 19、图 20. 下面聊聊其中关键语句。

代码 4 所示为自定义函数用来可视化 Dirichlet 分布。

可用 scipy.stats.dirichlet.pdf(), 简作 dirichlet.pdf(), 计算给定重心坐标系网格 上点的 Dirichlet 分布的概率密度函数值。这个函数的输入为网格坐标 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$,分布参数 $(\alpha_1, \theta_2, \theta_3)$ α_2 , α_3)。其中, θ_1 、 θ_2 、 θ_3 非负,且满足 θ_1 + θ_2 + θ_3 =1,正是这个条件使得我们可以用重心坐标系可视 化 Dirichlet 分布 PDF。

其中,xy2bc()为自定义函数,将直角坐标系坐标转化为重心坐标系坐标。这个自定义函数的核心 代码来自代码 3。

⑤利用 matplotlib.pyplot.tricontourf(), 简作 plt.tricontourf(), 绘制基于三角 形网格的等高线填充图。

```
# from scipy.stats import dirichlet
# 定义可视化函数
def plot_Dirichlet_PDF_contour(alpha_array):
     PDF = dirichlet.pdf(xy2bc(trimesh_8), alpha_array)
     fig, ax = plt.subplots(figsize = (5,5))
                                                                           \theta_1 + \theta_3 + \theta_3 = 1
     plt.tricontourf(trimesh_8, PDF,
                        levels = 20.
                        cmap='RdYlBu_r')
    plt.axis('equal')
     plt.xlim(0, 1); plt.ylim(0, 0.75**0.5)
     plt.text(0.8, 0.45, r'$\theta_1$')
    plt.text(0.8, 0.45, r'$\theta_2$')
plt.text(0.15, 0.45, r'$\theta_2$')
plt.text(0.5, -0.1, r'$\theta_3$')
    plt.axis('off'); plt.title(alpha_array)
```

Bk_2_Ch32_08.ipynb 代码 4. 可视化 Dirichlet 分布 |

Plotly 中也有绘制基于三角形网格等高线的函数, 具体图 21 所示。

对应的代码文件为 Bk_2_Ch32_09.ipynb。

利用的函数为 plotly.figure_factory.create_ternary_contour(); 代码相对简单,请 大家自行学习使用这个函数。

如图 8 所示, 在 Bk_2_Ch32_09.ipynb 上, 我们用 Streamlit 制作了一个 App, 用来展示 Dirichlet 分布参数对概率密度函数图像影响。



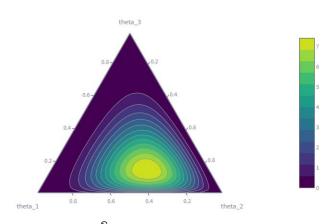
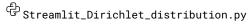
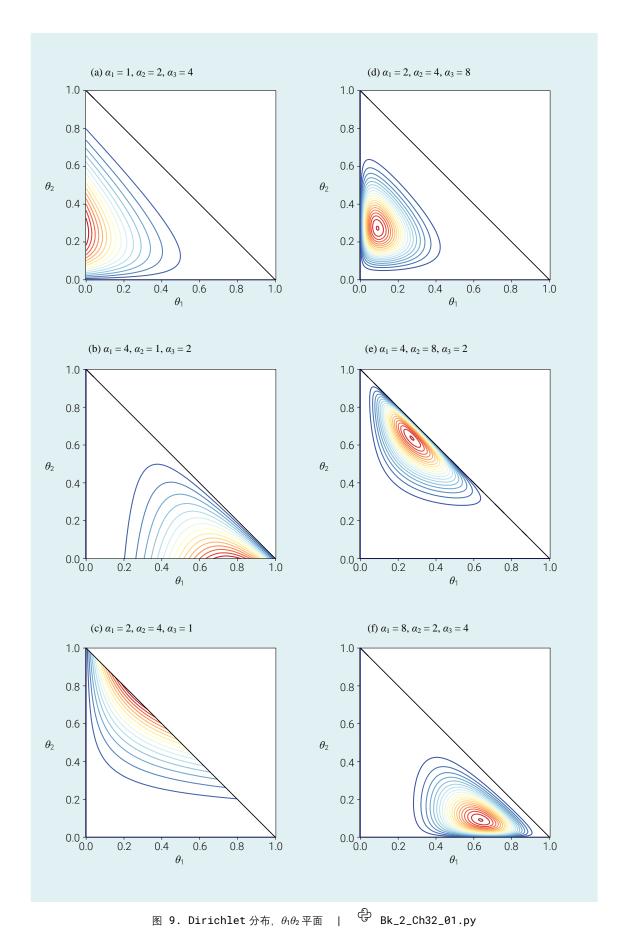


图 8. 展示 Dirichlet 分布的 App, Streamlit 搭建 |

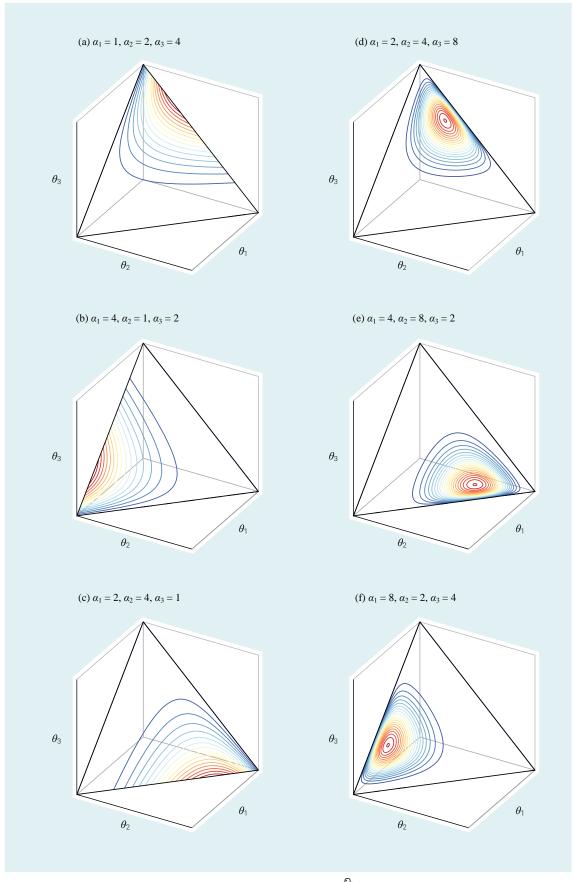




本章设计了几种方案可视化 Dirichlet 分布。稍有挑战性的知识点是如何理解重心坐标系,以及 直角坐标系和重心坐标系坐标的转换。鸢尾花书《统计至简》中贝叶斯统计会用到 Dirichlet 分布, 请大家留意。

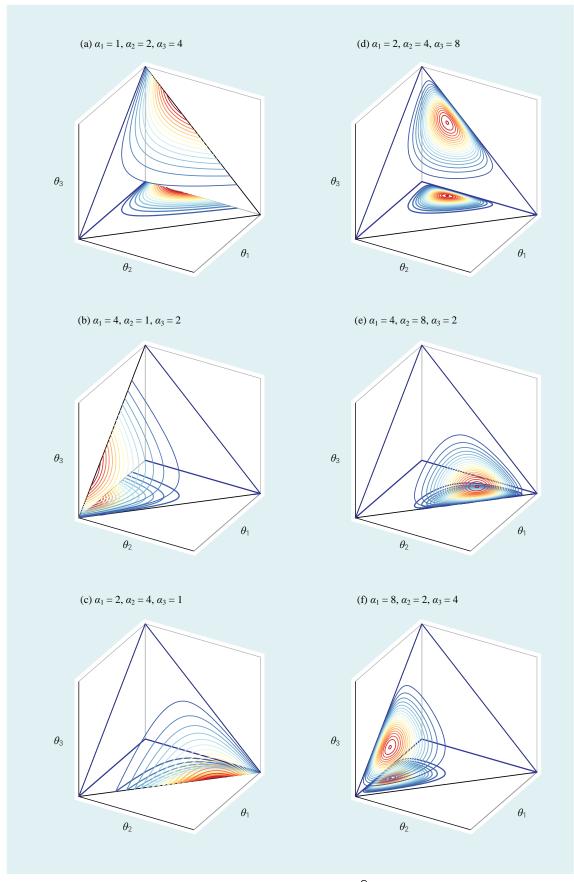


本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML



号 Bk_2_Ch32_02.py 图 10. Dirichlet 分布, 投影到斜面 |

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466



Bk_2_Ch32_03.py 图 11. Dirichlet 分布, 斜面 + $\theta_1\theta_2$ 平面

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 成权归有平人字面版在所有,有勿向用,引用有压切面处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套徽课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466 欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

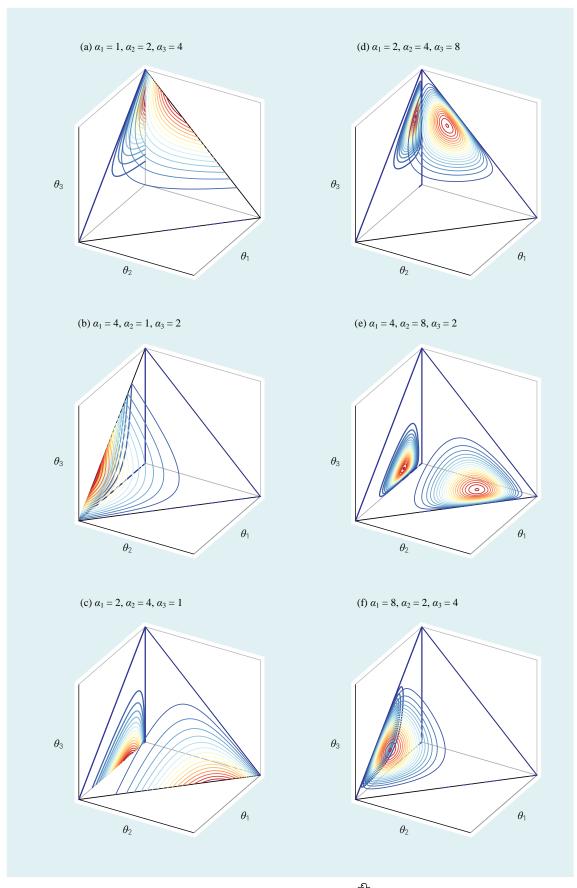
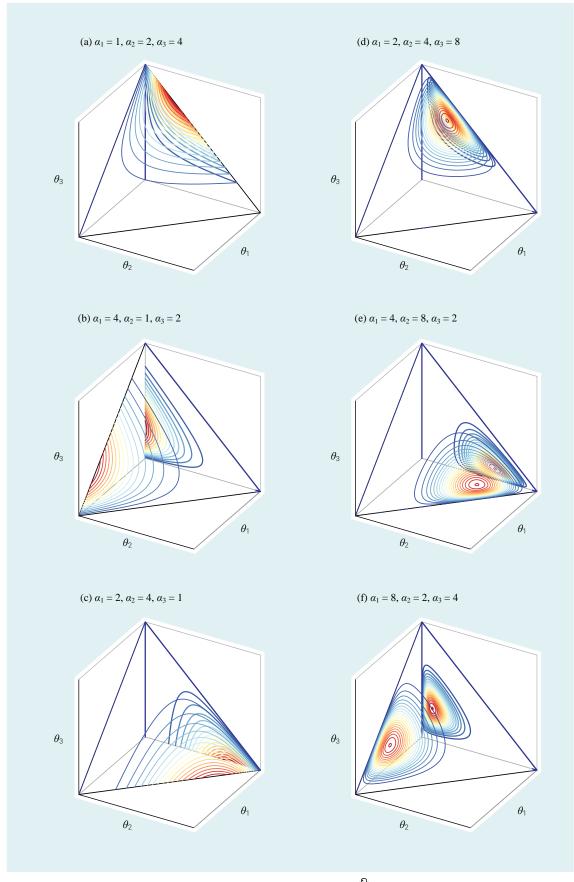


图 12. Dirichlet 分布,斜面 + $\theta_1\theta_3$ 平面 | Bk_2_Ch32_04.py

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466 欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com



Bk_2_Ch32_05.py 图 13. Dirichlet 分布, 斜面 + $\theta_2\theta_3$ 平面

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 成权归有平人字面版在所有,有勿向用,引用有压切面处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套徽课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466 欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

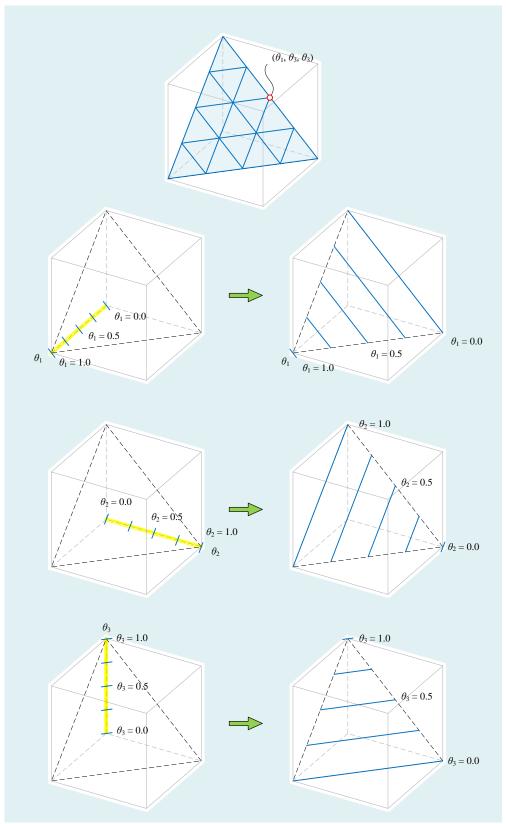


图 14. 三维直角坐标系角度看重心坐标系

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 成队归用于八字面版社所有,唱勿简用,引用谓注明面风。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套徽课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466 欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

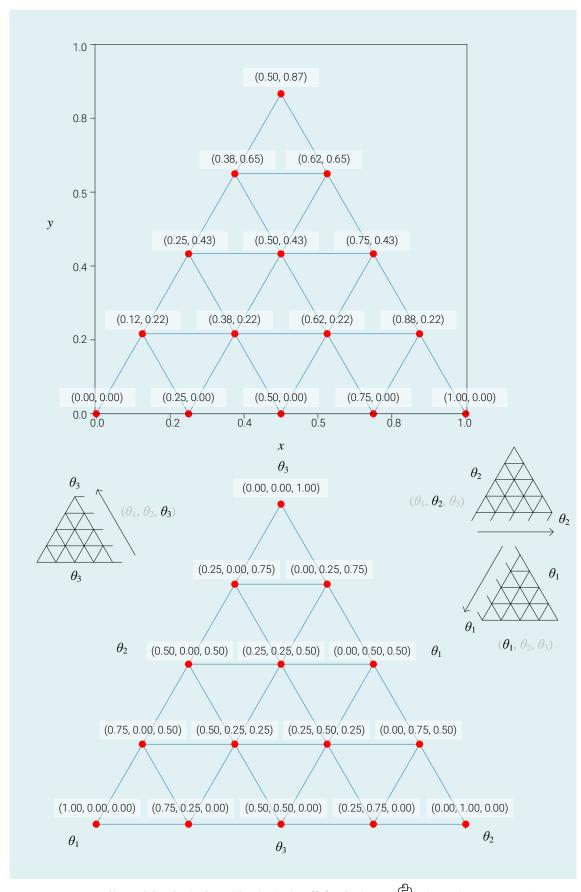
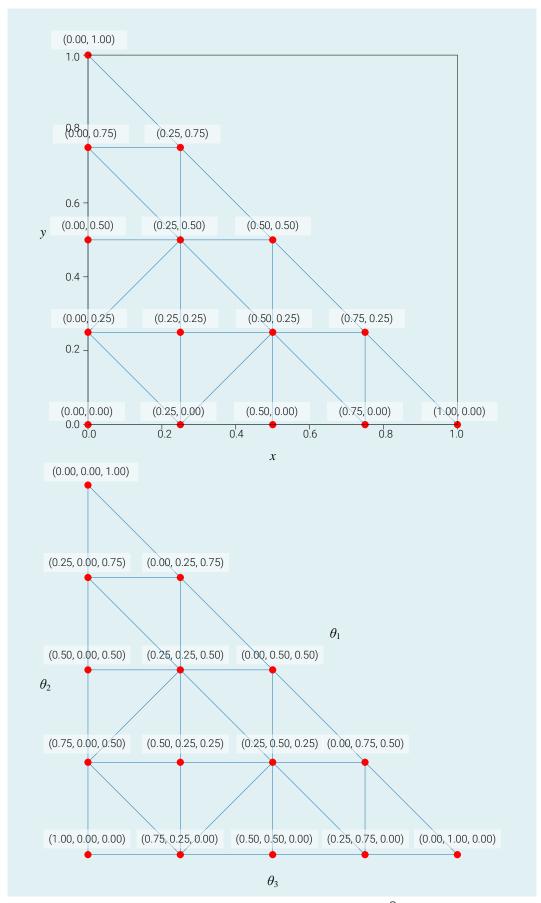


图 15. 比较平面直角坐标系坐标、重心坐标系坐标,等边三角形 | ^(〒) Bk_2_Ch32_06.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466 欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com



Bk_2_Ch32_06.ipynb 图 16. 比较平面直角坐标系坐标、重心坐标系坐标,等腰直角三角形

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。 版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466

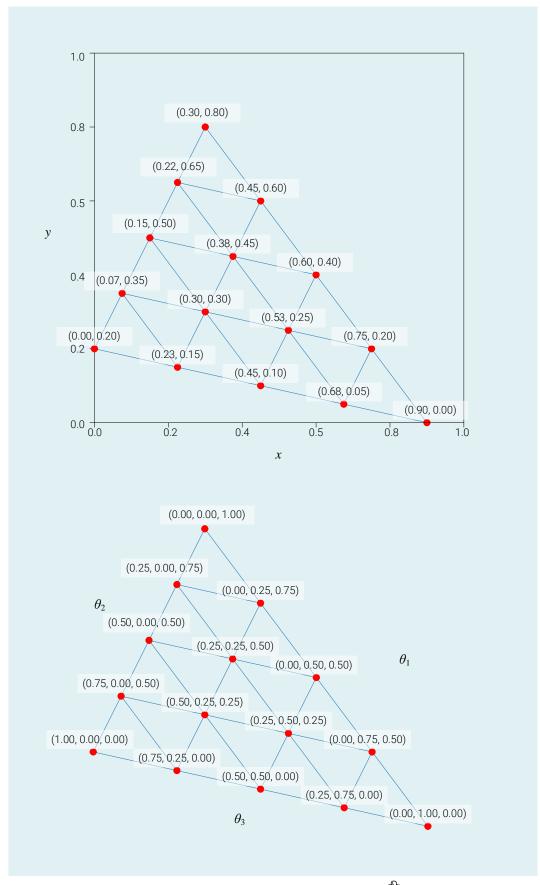


图 17. 比较平面直角坐标系坐标、重心坐标系坐标,任意形状三角形 | 🕏 Bk_2_Ch32_06.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466 欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

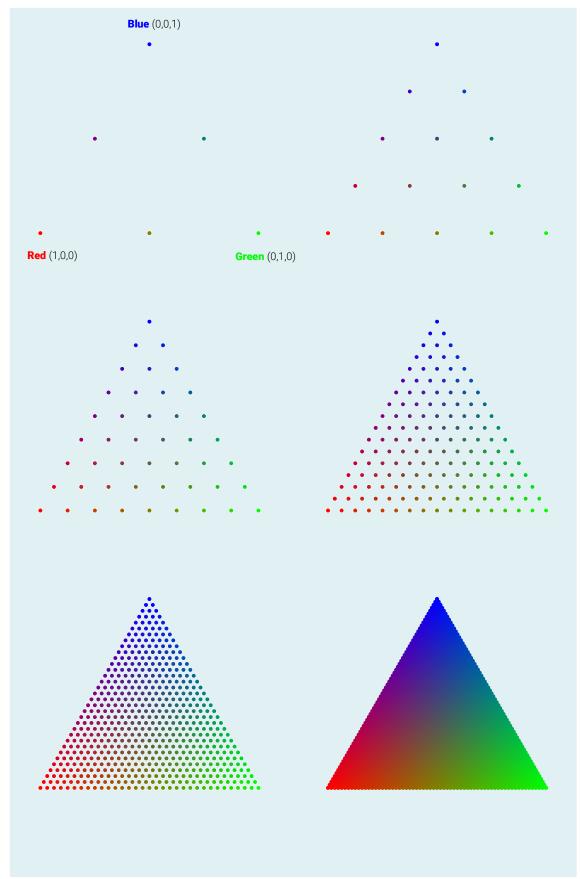


图 18. 重心坐标系中混合红绿蓝 | GBk_2_Ch32_07.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466 欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com

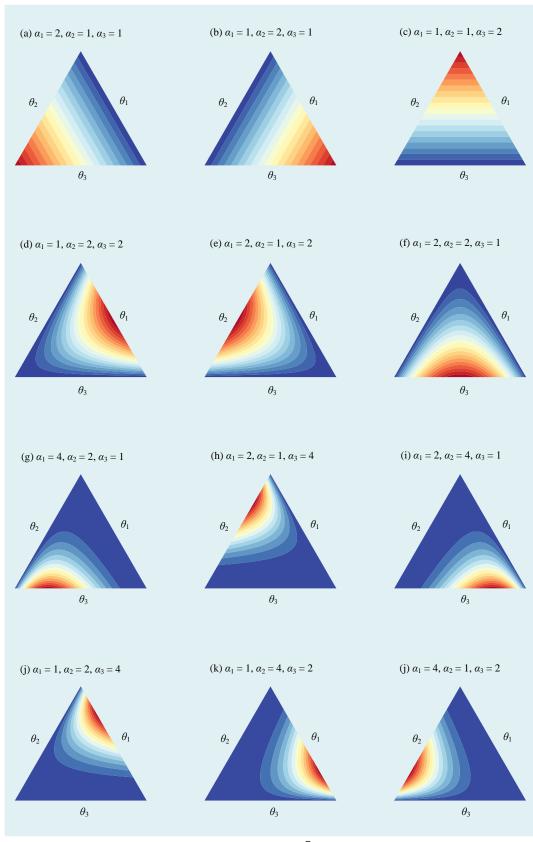
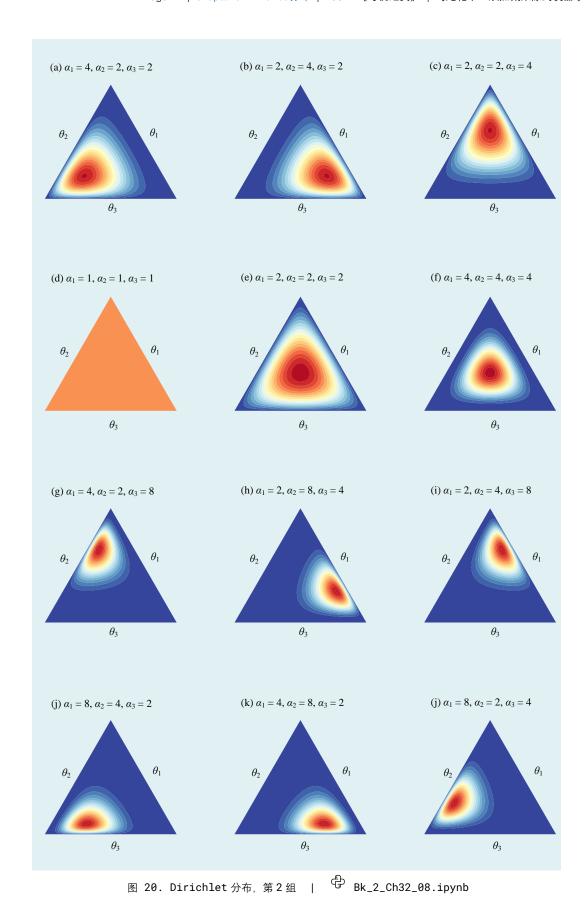


图 19. Dirichlet 分布, 第 1 组 | Bk_2_Ch32_08.ipynb



本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466

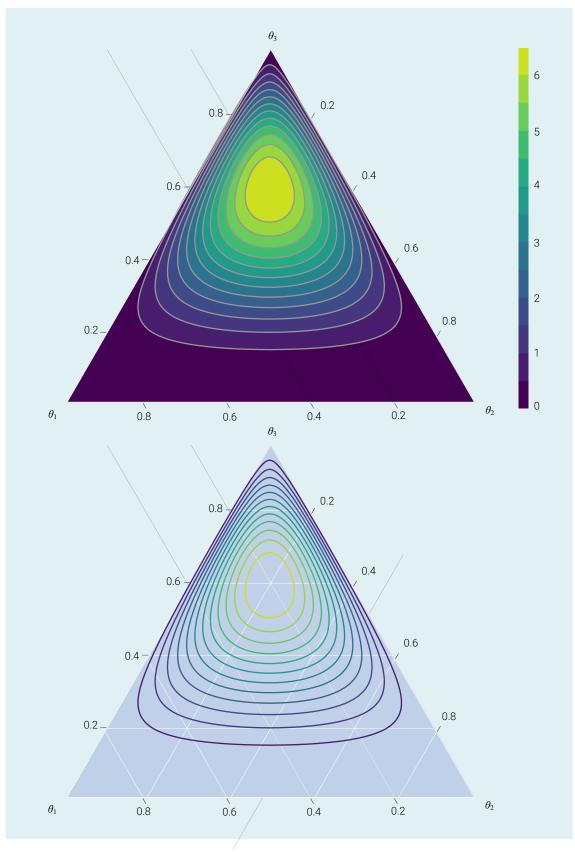


图 21. 用 Plotly 可视化 Dirichlet 分布 | Bk_2_Ch32_09.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿,发布目的为方便读者在移动终端学习,终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。版权归清华大学出版社所有,请勿商用,引用请注明出处。 代码及 PDF 文件下载: https://github.com/Visualize-ML 本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: https://space.bilibili.com/513194466 欢迎大家批评指教,本书专属邮箱: jiang.visualize.ml@gmail.com