Tecnológico de Monterrey

Actividad 2 (Espacio de estados)

José Ángel Ramírez Ramírez - A01735529

9 de septiembre de 2022

1 Robot de 1 link

1.1 Solución

$$J\ddot{q} + k\dot{q} + mgaq = \tau$$

$$y = q$$

Introducimos las variables de estado $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q}$. Entonces, las derivadas de estas variables de estado son:

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_2 \quad \text{y} \quad \dot{x}_2 = \ddot{q}$$

Sustituyendo estas definiciones en la ecuación diferencial del sistema, obtenemos:

$$J\dot{x}_2 + kx_2 + mgax_1 = \tau$$

Despejando $\dot{x}_2$,

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{J}x_2 - \frac{mg}{J}x_1 + \frac{1}{J}\tau$$

Por lo tanto, las ecuaciones de estado del sistema son:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{J}x_2 - \frac{mga}{J}x_1 + \frac{1}{J}\tau$$

Espacio de Estados Matricial

Ahora expresamos las ecuaciones de estado en forma matricial $\dot{x} = Ax + Bu$ y $y = Cx + Du$, donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u = \tau, \quad y = q$$

Las matrices A, B, C y D se derivan de las ecuaciones de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mga}{J} & -\frac{k}{J} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Por lo tanto, el modelo en espacio de estados es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mga}{J} & -\frac{k}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

2 Circuito eléctrico RLC

2.1 Solución

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E$$

$$y = q$$

Introducimos las variables de estado $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q}$. Entonces, las derivadas de estas variables de estado son:

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_2 \quad \text{y} \quad \dot{x}_2 = \ddot{q}$$

Sustituyendo estas definiciones en la ecuación diferencial del sistema, obtenemos:

$$L\dot{x}_2 + Rx_2 + \frac{1}{C}x_1 = E$$

Despejando $\dot{x}_2$,

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}(E - Rx_2 - \frac{1}{C}x_1)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de estado del sistema son:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}E$$

Espacio de Estados Matricial

Ahora expresamos las ecuaciones de estado en forma matricial $\dot{x} = Ax + Bu$ y $y = Cx + Du$, donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u = E, \quad y = q$$

Las matrices A, B, C y D se derivan de las ecuaciones de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Por lo tanto, el modelo en espacio de estados es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

3 Sistema arbitrario

3.1 Solución

$$\tau^2 \ddot{y} + 2\epsilon\tau\dot{y} + y = x$$

$$y = x_1$$

Introducimos las variables de estado $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}$. Entonces, las derivadas de estas variables de estado son:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}$$

Sustituyendo estas definiciones, obtenemos:

$$\tau^2 \dot{x}_2 + 2\epsilon\tau x_2 + x_1 = x$$

Despejando $\dot{x}_2$,

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\tau^2}(x - 2\epsilon\tau x_2 - x_1)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de estado del sistema son:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau^2}x_1 - \frac{2\epsilon\tau}{\tau^2}x_2 + \frac{1}{\tau^2}$$

Espacio de Estados Matricial

Ahora expresamos las ecuaciones de estado en forma matricial $\dot{x} = Ax + Bu$ y $y = Cx + Du$, donde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u = x, \quad y = x_1$$

Las matrices A, B, C y D se derivan de las ecuaciones de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{2\epsilon\tau}{\tau^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau^2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Por lo tanto, el modelo en espacio de estados es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{2\epsilon\tau}{\tau^2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau^2} \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$