Análisis del Sistema de Robot Diferencial

J. Angel Ramirez

26 de Abril de 2024

1 Cálculo del Jacobiano A y B

El sistema de ecuaciones diferenciales que describe el robot diferencial es el siguiente:

$$\dot{x} = v\cos(\theta), \quad \dot{y} = v\sin(\theta), \quad \dot{\theta} = \omega$$

donde $\mathbf{x} = [x, y, \theta]^T$ representa las variables de estado y $\mathbf{u} = [v, \omega]^T$ representa las entradas de control.

1.1 Derivadas Parciales

Para construir el Jacobiano, primero necesitamos calcular las derivadas parciales de las ecuaciones de movimiento respecto a las variables de estado x, y y θ, así como respecto a las entradas de control v y ω.

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} = -v\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} = v\cos(\theta)$$
$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \omega} = 1$$

Estas derivadas parciales nos permiten comprender cómo cambian las variables de estado y la orientación angular en función de las entradas de control.

1.2 Construcción del Jacobiano A

El Jacobiano A se construye tomando las derivadas parciales de las ecuaciones de movimiento respecto a las variables de estado x, y y θ, y organizándolas en una matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v\sin(\theta) \\ 0 & 0 & v\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El Jacobiano A nos indica cómo cambian las velocidades de las variables de estado con respecto a sí mismas y a la orientación angular.

1.3 Construcción del Jacobiano B

Para el Jacobiano B, tomamos las derivadas parciales de las ecuaciones de movimiento respecto a las entradas de control v y ω, y las organizamos en una matriz.

Para $\dot{x}$ y $\dot{y}$, las derivadas son cero con respecto a v, mientras que para $\dot{\theta}$, la derivada con respecto a ω es igual a 1.

Para $\dot{x}$ y $\dot{y}$, las derivadas son las componentes $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ de la velocidad lineal, respectivamente.

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El Jacobiano B nos muestra cómo las entradas de control v y ω afectan las velocidades de las variables de estado, permitiendo controlar el movimiento del robot.

1.4 Representación Final en Matriz de Estados

La representación final del sistema en forma matricial es la siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

Sustituyendo las matrices A y B obtenidas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v\sin(\theta) \\ 0 & 0 & v\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

Esta representación matricial nos permite modelar y analizar el comportamiento dinámico del robot diferencial de manera más compacta y conveniente.

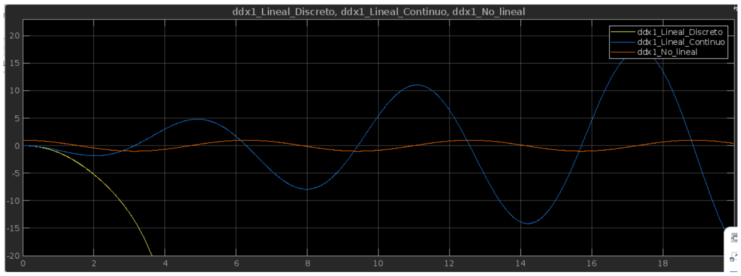

Figure 1: X con V = 1 W = 1

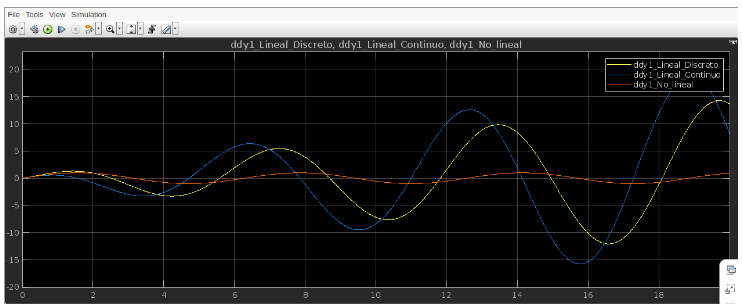

Figure 2: Y con V = 1 W = 1

2 Comparación de modelos en Matlab

1. V = 1 W = 1
2. V = 1 W = 0

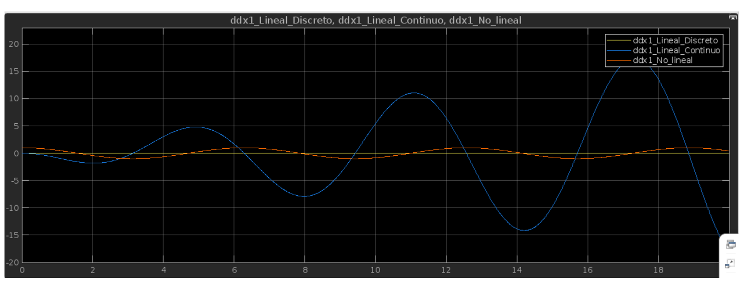

Figure 3: X con V = 1 W = 0

3. V = 0 W = 1
4. V = 1 W = 0
5. V = 1 W = 0

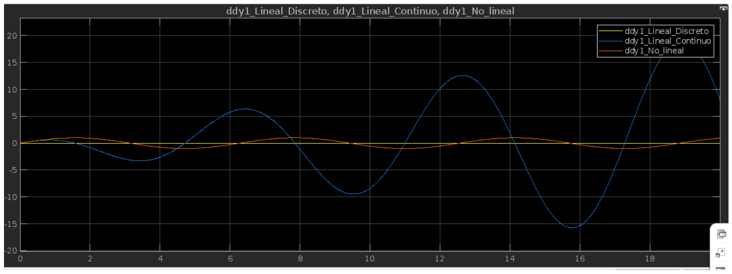

Figure 4: Y con V = 1 W = 0

Figure 5: X con V = 1 W = 0

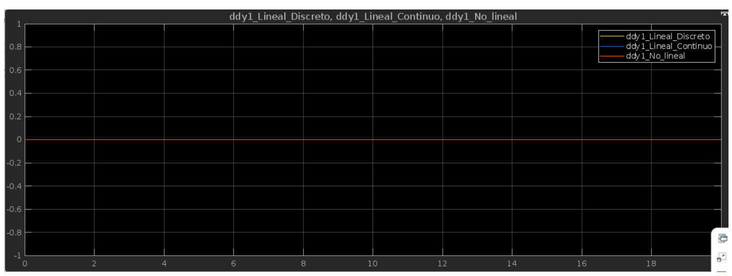

Figure 6: Y con V = 1 W = 0

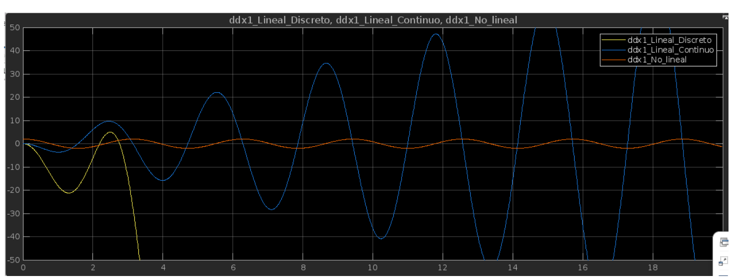

Figure 7: X con V = 2 W = 6

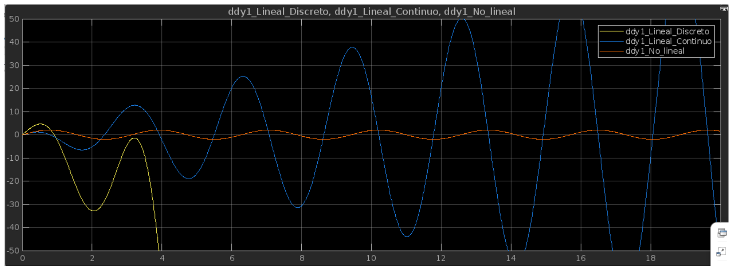

Figure 8: Y con V = 2 W = 6

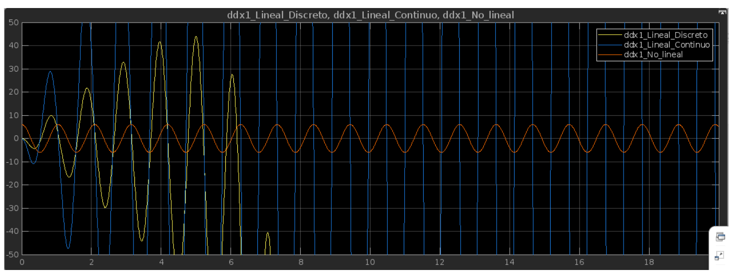

Figure 9: X con V = 6 W = 2

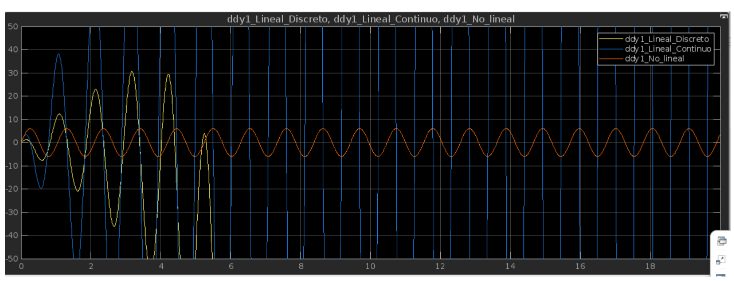

Figure 10: Y con V = 6 W = 2

6. V = 1 W = 0

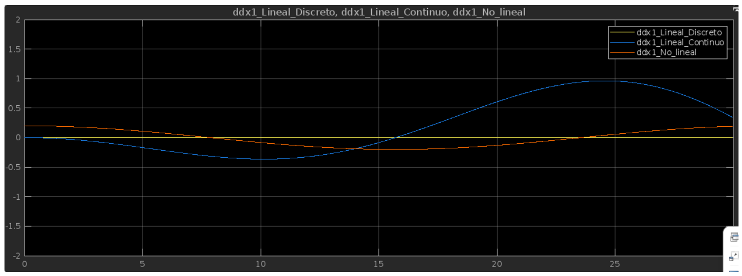

Figure 11: X con V = 0.2 W = 0

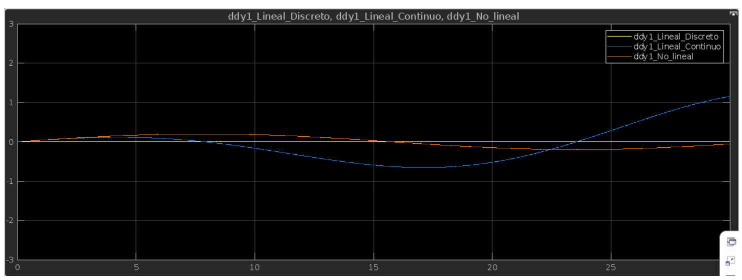

Figure 12: Y con V = 0.2 W = 0

3 Conclusiones

Una vez evaluado el sistema con distintos valores de velocidad tanto lineal como angular, se puede observar que cuando hay valores muy grandes de V y W, los modelos linealizados oscilan bastante. Esto tiene sentido, ya que a velocidades muy grandes el robot se puede desestabilizar. Por otro lado, podemos observar que para valores pequeños de las velocidades, el sistema linealizado discreto si se comporta de manera lineal. Otro caso a destacar es cuando el sistema linealizado discreto cae a menos infinito en y o primero oscila un poco y luego cae a menos infinito en y, esto se debe a que llega a un punto de operacion inestable.