Ejercicio: Regresión con Descenso de Gradiente

Contexto

Una empresa de tecnología necesita predecir si comprará nuevo equipo de cómputo el próximo mes con base en su histórico.

Si la predicción es incorrecta y no se adquiere el hardware a tiempo, la empresa podría enfrentar interrupciones operativas debido a que sus colaboradores no podrán trabajar.

Se ha recopilado la siguiente información:

Años desde el último cambio de equipo (x)	Compra de PC (y)
1	0
2	0
3	1
4	1

Donde $y = 1$ significa que la empresa compró una nueva computadora, por lo que, $y = 0$ significa que no la compró.

Para ayudar en esta decisión, se necesita elaborar un modelo de regresión logística que estima la probabilidad de que la empresa realice una compra.

Es fundamental que el modelo sea preciso, ya que una mala predicción podría resultar en compras innecesarias (gasto excesivo) o en la falta de equipos cuando realmente se necesitan, afectando la operación del negocio (Reducir los falsos negativos – Más vale prevenir que lamentar!).

Aplicación

Se utilizará regresión logística para modelar la probabilidad de compra en función del tiempo desde la última actualización. Para ello, se implementará dos iteraciones del algoritmo de descenso de gradiente para actualizar los parámetros β_0 y β_1 y una tasa de aprendizaje de 0.10

Datos Iniciales:

- Función sigmoide:

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

- Ecuación del modelo:

$$P(y = 1|x) = p_i = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_i)}}$$

- Calculo el costo para la función sigmoide:

$$J = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}[y_i ln(P_i) + (1 - y_i) ln(1 - P_i)]$$

- Parámetros iniciales: $\beta_0^{(0)} = -2.400, \quad \beta_1^{(0)} = 0.897$
- Tasa de aprendizaje: $\alpha = 0.1$
- Fórmulas de actualización de los parámetros:
  - Para $\boldsymbol{\beta_0}$:

$$\beta_0 \coloneqq \beta_0 - \alpha \cdot \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(P_i - y^{(i)}\right)$$

  - Para $\boldsymbol{\beta_1}$:

$$\beta_1 \coloneqq \beta_1 - \alpha \cdot \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(P_i - y^{(i)}\right)x^{(i)}$$

Pasos a Seguir

1. Calcular la probabilidad de que y sea 1 dadas la(s) características, es decir, P(y=1|x) para cada dato.
2. Calcular la función de costo $J(\beta)$.
3. Actualizar los valores de $\boldsymbol{\beta_0}$ y $\boldsymbol{\beta_1}$ usando la regla del descenso de gradiente.
4. Repetir el proceso.

Realiza la primera iteración del descenso de gradiente y encuentra los nuevos valores de $\boldsymbol{\beta_0}$ y $\boldsymbol{\beta_1}$.

Utilizando los valores actualizados, realiza la segunda iteración y obtén los nuevos $\boldsymbol{\beta_0}$ y $\boldsymbol{\beta_1}$.

Al finalizar las dos iteraciones:

1. Asigna el Umbral de Decisión. Justifica tu respuesta.
2. ¿Cómo se interpretan los valores de β_0 y β_1 en el contexto del problema?
3. ¿Qué significa que β_1 sea positivo en este caso? ¿Cómo afecta esto las probabilidades Pi?
4. Si los datos históricos muestran que los clientes con mayor carga de trabajo tienden a comprar hardware, ¿cómo refleja esto el modelo?

Notas

- Los cálculos deben hacerse con lápiz, papel y calculadora.
- Redondea los valores a tres cifras decimales en cada paso.

Primera Iteración

1. Cálculo de probabilidades *Pi*:

X	Pi
1	
2	
3	
4	

2. Calcular Costo J(Pi)

$$J = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}[y_i ln(P_i) + (1 - y_i) ln(1 - P_i)]$$

3. Gradientes:
   - Gradiente $\boldsymbol{\beta_0}$:
   - Gradiente $\boldsymbol{\beta_1}$:
4. Actualización de parámetros:
   - Nuevo $\boldsymbol{\beta_0}$:
   - Nuevo $\boldsymbol{\beta_1}$:

Segunda Iteración

1. Nuevos parámetros:
   - $\beta_0 =$
   - $\beta_1 =$
2. Cálculo de probabilidades *Pi*:

X	Pi
1	
2	
3	
4	

3. Calcular el Costo:

$$J = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}[y_i ln(P_i) + (1 - y_i) ln(1 - P_i)]$$

4. Gradientes:
   - Gradiente β_0:
   - Gradiente β_1:
5. Actualización de parámetros:
   - Nuevo β_0:
   - Nuevo β_1:

Parámetros finales después de 2 iteraciones:

- $\beta_0 \approx -2.3954$
- $\beta_1 \approx 0.9586$

Umbral por Defecto ($\boldsymbol{\theta}$=0.5):

$$\text{Predicción} = \begin{cases} 0, & \mathrm{P_i} < \theta \\ 1, & \mathrm{P_i} \geq \theta \end{cases}$$

Buscar el umbral que satisfaga el requerimiento del problema, justificar la respuesta