

AE2 - Projeto de Filtros Digitais IIR

Jessica de Souza, Leticia Aparecida Coelho

Engenharia de Telecomunicações, Instituto Federal de Santa Catarina

<jessica.souzajds@gmail.com, leticia.ac23@gmail.com>

21 de agosto de 2018

1 Introdução

Os experimentos descritos neste relatório, tem como objetivo aplicar a metodologia de projeto de filtros digitais IIR, que é um importante tópico em Processamento de Sinais Digitais. Este relatório está subdividido em seções equivalentes a cada etapa de projeto de filtros: a primeira etapa é o projeto de um filtro protótipo analógico passa-baixas $H(p)$; a segunda etapa é a transformação em frequência do filtro $H(p)$ para $H(s)$, ainda como passa-baixas; e a terceira etapa é a transformação do filtro analógico $H(s)$ para um filtro digital $H(z)$, utilizando a transformação "Bilinear".

1.1 Especificações do Projeto

Este projeto requiere o desenvolvimento de um total de cinco filtros: um Butterworth, um Chebychev tipo 1 e três Chebychev's tipo 2. Os dois primeiros filtros foram projetados utilizando a teoria e equações encontradas em [1] e os três últimos foram projetados utilizando as funções do MATLAB. Os parâmetros de cada filtro esta descrito na Tabela ?? . Para os filtros onde não há indicação de parâmetros, foram considerados os valores: $f_a = 4$ kHz, $G_p = 0$ dB, $A_p = 1$ dB e $A_s = 40$ dB.

1.2 Teoria de Filtros

Esta seção mostra uma breve introdução aos filtros que são trabalhados nesse projeto. É importante saber o comportamento destes de forma que possamos projetá-los corretamente. Os filtros a seguir mostram o comportamento de filtros não-ideais, ou seja, estes filtros não atenuam 100% da frequência de rejeição. Este tipo de filtro também é chamado de filtro prático e os filtros projetados neste trabalho terão o mesmo comportamento.

Filtro Passa-baixas (LP)

O filtro LP é um filtro simples cujo princípio de funcionamento é permitir a passagem de sinais de baixa frequência. Isso ocorre por causa dos seus componentes: um resistor em série com um indutor ou um resistor em paralelo com um capacitor (conectado direto ao GND). Com o circuito com o capacitor, quando a frequência aumenta, a impedância do capacitor diminui e isso faz com que o sinal saia pelo GND. Já no circuito com o indutor, quando a frequência aumenta a impedância do indutor também aumenta, evitando o sinal passar pela linha.

O filtro LP possui uma frequência de passagem (W_p) e uma de rejeição (W_s). Quando o sinal atinge uma frequência superior a W_s ele é atenuado de acordo com A_s , caso contrário ele é amplificado com um ganho A_p . Este projeto trabalha com $A_p=1$ dB.

Filtro Passa-altas (HP)

O filtro HP funciona de maneira oposta ao filtro LP, pois permite a passagem de altas frequências que sejam maiores do que W_p . O circuito é semelhante ao LP, porém possui algumas diferenças: um capacitor em paralelo com um resistor (conectado direto ao GND) ou um resistor em paralelo com um indutor (conectado direto ao GND). Esta inversão dos componentes fazem com que as frequências que antes passavam no LP fossem rejeitadas no HP.

Filtro Passa-faixas (BP)

O filtro BP permite a passagem de sinais de uma certa faixa de frequências que estejam dentro de W_{p1} e W_{p2} e rejeita as frequências restantes, a partir de W_{s1} e W_{s2} . Ele pode ser obtido a partir da combinação dos circuitos de um filtro LP e de um HP. A Figura 1 mostra a relação entre os filtros LP, HP e BP, com um exemplo de circuito básico e a sua resposta em frequência.

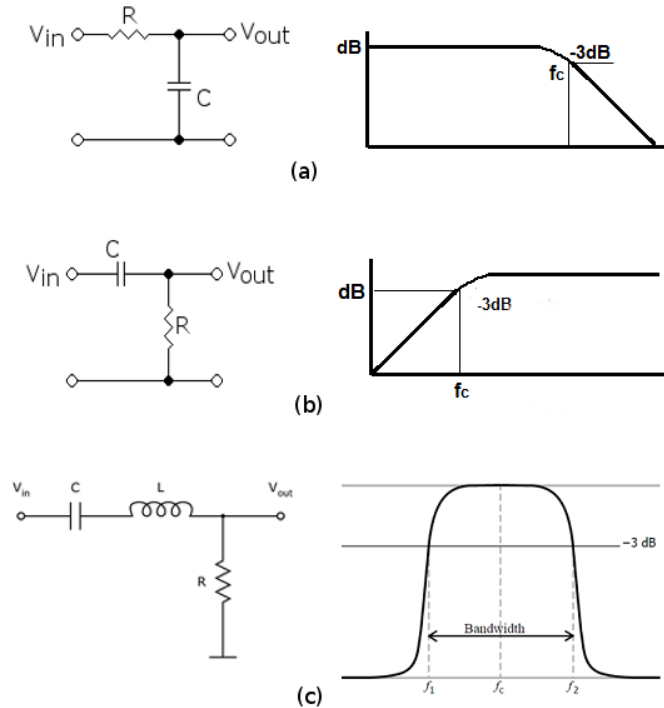


Figura 1 – Relação entre os três filtros. (a) Filtro LP. (b) Filtro HP. (c) Filtro BP.

2 Metodologia

Os filtros projetados estão descritos nas subseções seguintes, e estão na ordem apresentada na Tabela 1. Os filtros 1 e 2 serão projetados utilizando as aproximações especificadas, mas não será utilizada nenhuma função do MATLAB para seus cálculos básicos de $H(p)$. Já os filtros 3, 4 e 5 serão projetados utilizando funções prontas para encontrar $H(p)$. Para todos os filtros, foram necessários realizar cálculos cujas explicações ficarão nesta sessão geral, lembrando que utilizamos como padrão os cálculos encontrados em [1] e [2] e os valores de referência da Tabela ??.

Inicialmente, para realizou-se os cálculos do protótipo $H(p)$, efetuando a transformação da frequência de Hz para rad/s, utilizando a frequência de amostragem f_a para normalização. As equações 2 e 12 mostram o procedimento.

Em seguida, foi realizada a conversão de ω para λ , de forma a obter a frequência normalizada. Esta conversão é necessária devido à distorção que o sinal sofre ao ser realizada a transformação bilinear. As equações 3 e 13 mostram o procedimento. Por fim, as frequências são transformadas em Ω_s e Ω_p . Estas frequências serão utilizadas como base para convertermos os filtros de LP para LP ou HP e BP. As equações 9 e 21 mostram o procedimento.

Uma vez obtidas as frequências normalizadas, é realizado o cálculo do ϵ , necessário para o cálculo da ordem do filtro. A equação 1 mostra como é realizado o cálculo e está nesta sessão pois o ϵ é o mesmo para todos os filtros, devido ao seu valor depender de A_p .

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0.5088 \quad (1)$$

A ordem do filtro é calculada de forma diferente dependendo da aproximação utilizada. As equações 5 e 15 demonstram como é calculada a ordem de acordo com cada aproximação. Além disso, no MATLAB foi realizado um arredondamento para cima, para o caso do cálculo da ordem não ser um número inteiro. Logo após a obtenção da ordem n do filtro, é obtido os pólos, o qual esta equação também varia de acordo com a

aproximação e é demonstrada nas equações 6 e 17. Por fim, é necessário obter a função de transferência $H(p)$, que é a função do protótipo utilizando as frequências normalizadas e pode ser visualizada nas equações 8 e 20.

Ao transformar o filtro de protótipo para analógico usando a conversão $LP \rightarrow LP$, o protótipo é multiplicado pelo valor $H(0)$, que é o último termo dos pólos, assim é realizada a desnormalização dos termos do numerador e denominador. Além disso, é feita uma transformação que pode ser vista nas equações 9 e 21.

Por fim, o filtro $H(s)$ analógico é convertido para digital IIR. Para isso é necessário fazer a transformação bilinear, que é mostrada nas equações 11 e 22. Logo após é realizada a transformada Z de $H(s)$ com s transformado, substituindo os valores de z por $e^{j\omega T}$.

2.1 Filtro Passa-baixas

O primeiro filtro projetado utiliza a aproximação de Butterworth. Iremos iniciar os cálculos para $H(p)$ com o filtro normalizado em 1 (ou seja, $\Omega_p=1$). A seguir, os cálculos realizados para este filtro, utilizando os parâmetros:

$$f_p = 941Hz; \quad f_s = 1075Hz; \quad f_a = 4000Hz; \quad A_p = 1dB; \quad A_s = 25dB$$

Cálculo da frequência em rad/s:

$$\omega_p = \frac{2 * \pi * 941}{4k} = 1,4781rad/s \quad \omega_s = \frac{2 * \pi * 1075}{4k} = 1,6886rad/s \quad (2)$$

Cálculo da frequência no formato de lambda:

$$\lambda_s = 2f_a \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 9002kHz \quad \lambda_p = 2f_a \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 7290.9kHz \quad (3)$$

Cálculo da frequência normalizada em formato de Ω :

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_p} = 1 \quad \Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_p} = 1,2348 \quad (4)$$

Cálculo da ordem do filtro:

$$n \leq \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\log_{10}(\Omega_s)} = 17 \quad (5)$$

Obtenção dos pólos:

$$p_k = \epsilon \left(\frac{-1}{n}\right) * e^{\left[j \frac{(2k+n-1)}{2n} \pi\right]} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

O qual p_k vale:

$$p_k = 1p^{17} + 11.27p^{16} + 63.58p^{15} + \dots + 106.60p^2 + 20.46p + 1.96 \quad (7)$$

Função de transferência em $H(p)$ do protótipo:

$$H(p) = \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{0.5p^{17} + 5.73p^{16} + 32.35p^{15} + \dots + 54.24p^2 + 10.41p + 1} \quad (8)$$

Conversão de $H(p)$ para $H(s)$. O numerador é o último termo de p_k e D_p é o vetor de pólos p_k dividido por 1.96, para deixar o último item da função de transferência em 1:

$$H(s) = H_p\left(\frac{s}{\lambda_p}\right) = H_p\left(\frac{s}{7290.9}\right) \quad (9)$$

Realizando a substituição de s por $j^*\lambda$. A função não é mostrada com a real divisão devido aos seus números pequenos.

$$H\left(\frac{s}{\lambda_p}\right) = \frac{1.96}{0.5\left(\frac{s}{\lambda_p}\right)^{17} + 5.73\left(\frac{s}{\lambda_p}\right)^{16} + 32.35\left(\frac{s}{\lambda_p}\right)^{15} + \dots + 54.24\left(\frac{s}{\lambda_p}\right)^2 + 10.41\left(\frac{s}{\lambda_p}\right) + 1} \quad (10)$$

Função de transferência em $H(z)$. Calculando a transformação bilinear:

$$s = 2 * f_a * \frac{(z - 1)}{(z + 1)} = 8000 * \frac{(e^{j*W T} - 1)}{(e^{j*W T} + 1)} \quad (11)$$

2.2 Filtro Passa-altas

O segundo filtro projetado utiliza a aproximação de Chebyshev I passa altas. Iremos iniciar os cálculos para $H(p)$ com o filtro normalizado em 1 (ou seja, $\Omega_p=1$). A seguir, os cálculos realizados para este filtro, utilizando como base as fórmulas encontradas em [1] e [2].

Vamos relembrar os parâmetros para este segundo filtro:

$$f_p = 1209Hz; \quad f_s = 1075Hz; \quad A_p = 1dB; \quad A_s = 35dB$$

Cálculo da frequência em rad/s:

$$\omega_p = \frac{2 * \pi * 1209}{4k} = 1,8991rad/s \quad \omega_s = \frac{2 * \pi * 1075}{4k} = 1,6886rad/s \quad (12)$$

Cálculo da frequência no formato de lamda:

$$\lambda_s = 2f_a \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 9.002kHz \quad \lambda_p = 2f_a \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 11.176kHz \quad (13)$$

Cálculo da frequência normalizada em formato de Ω :

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_p} = 1 \quad \Omega_s = \frac{\omega_p}{\omega_s} = 1.2414 \quad (14)$$

Cálculo da ordem do filtro:

$$n = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{(10^{0.1A_s} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)}}{\cosh^{-1}(\Omega_s)} = 8 \quad (15)$$

Obtenção dos pólos:

$$\varphi_2 = \frac{1}{n} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = 0.1785\theta = \frac{(2k - 1)\pi}{2n} = 2.9452 \quad (16)$$

$$p_k = -\sinh(\varphi_2) \sin(\theta) + j \cosh(\varphi_2) \cos(\theta)k = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

O qual p_k vale:

$$p_k = 58,04p^8 + 53,39p^7 + 140,65p^6 + \dots + 25,99p^2 + 6,23p + 1 \quad (18)$$

Cálculo de $H(0)$

$$H(0) = \sqrt{\frac{1}{1 + \epsilon^2}} \quad (19)$$

Cálculo do Numerador de $H(p)$

O n merador   determinado pela ordem do filtro. Se possui ordem ímpar $N_p=1$, se   par utiliza-se a equa  es 1 e 19 . Neste caso o filtro tem ordem par - ordem 8 -, assim sendo, utiliza-se a equa    para obter o n merador e utilizado em $H(p)$, que pode ser verificado na Equa    20.

Fun    de transferência em $H(p)$ do protótipo:

$$H(p) = \frac{N_p}{D_p} = \frac{0,89}{58,04p^8 + 53,39p^7 + 140,65p^6 + \dots + 25,99p^2 + 6,23p + 1} \quad (20)$$

Convers    de $H(p)$ para $H(s)$.

$$H(s) = H_p\left(\frac{\lambda_p}{s}\right) = H_p\left(\frac{11.176}{s}\right) \quad (21)$$

Fun    de transferência em $H(z)$. Calculando a transforma    bilinear:

$$s = 2 * f_a * \frac{(z-1)}{(z+1)} = 8000 * \frac{(e^{j\omega T} - 1)}{(e^{j\omega T} + 1)} \quad (22)$$

2.3 Filtro Passa-faixa

Os filtros projetados 3, 4 e 5, são filtros do tipo passa-faixa e utilizam a aproxima    de Chebyshev tipo II. A diferença entre o desenvolvimento deste filtro e os anteriores,   que para este projeto utilizou-se as funções do MATLAB *cheb2ord* e *cheby2*.

Foram obtidos os seguintes valores para este filtro, utilizando como base os cálculos encontrados em [1] e [2] e os parâmetros da Tabela ???. Primeiramente, realizou-se o cálculo da frequência em rad/s e depois a normaliza    da frequência para , o cálculo de Ω_s . A Tabela 1 mostra os resultados da normaliza    para cada filtro.

| C  culos dos filtros BP | | | | | | | | | |
|-------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------|
| Filtro | ω | | | | λ | | | | Ω_s |
| | ω_{p1} | ω_{p2} | ω_{s1} | ω_{s2} | λ_{p1} | λ_{p2} | λ_{s1} | λ_{s2} | |
| 3 | 1.86; | 1.93; | 1.70; | 2.08 | 10.7K; | 11634; | 9190; | 13773 | 5.27 |
| 4 | 2.27; | 2.36; | 2.08; | 2.55 | 17.2K; | 19.6K; | 13.7K; | 26.3K | 5.71 |
| 5 | 0.98; | 1.11; | 1.07; | 1.20 | 4.29K; | 4.99K; | 4.75K; | 5.5K | 2.26 |

Tabela 1 – Parâmetros calculados

Para o cálculo da ordem do filtro e frequências de corte, foi utilizada a fun      cheb2ord. Para a montagem do filtro (obten     dos vetores a e b) para a cria     das funções de transferência foi utilizada a fun      cheby2, cujas not     es são as seguintes:

$$[N, W_n] = \text{cheb2ord}(\Omega_p, \Omega_s, A_p, A_s, 's'); \quad [b, a] = \text{cheby2}(N, A_s, W_n, 's'); \quad (23)$$

Onde:

$$\Omega_p = 1 \quad \Omega_s = |(-ws^2 + wo^2)/(B * ws)| \quad e \quad B = \lambda_{p2} - \lambda_{p1} \quad (24)$$

Considerando o filtro 3, podemos verificar o $H(p)$ obtido com as equações 23. Para os filtros 4 e 5 haver   o alterações pois há diferen    a nos parâmetros.

$$H(p) = \frac{0,11p^2 + 2,07}{p^3 + 2,51p^2 + 3,16p + 2,07} \quad (25)$$

$$p = \frac{(s^2 + \omega_0^2)}{Bs} \quad (26)$$

3 Resultados e Discussão

Os cálculos mostrados na sessão anterior foram inseridos em um algoritmo no MATLAB, de forma a visualizarmos o filtro em seus três estágios: $H(p)$, $H(s)$ e $H(z)$. As figuras das sub-sessões a seguir mostram o resultado do projeto dos 5 filtros. Para facilitar a visualização da especificação com o resultado obtido, foram adicionados tracejados nas frequências de passagem e rejeição e onde suas respectivas atenuações devem passar em um cenário ideal.

3.1 Filtro I - Butterworth

De acordo com a especificação, o filtro LP Butterworth na realização do protótipo, deve possuir um decaimento de 1 dB quando a frequência normalizada for igual a $\Omega_p = 1$ e deve ter um decaimento de 25dB quando a frequência normalizada for $\Omega_s = 1,24$. A Figura 2.a mostra que o filtro protótipo está dentro das especificações apresentadas pela Tabela ?? . A Figura 2.b mostram ganho e fase do filtro $H(p)$.

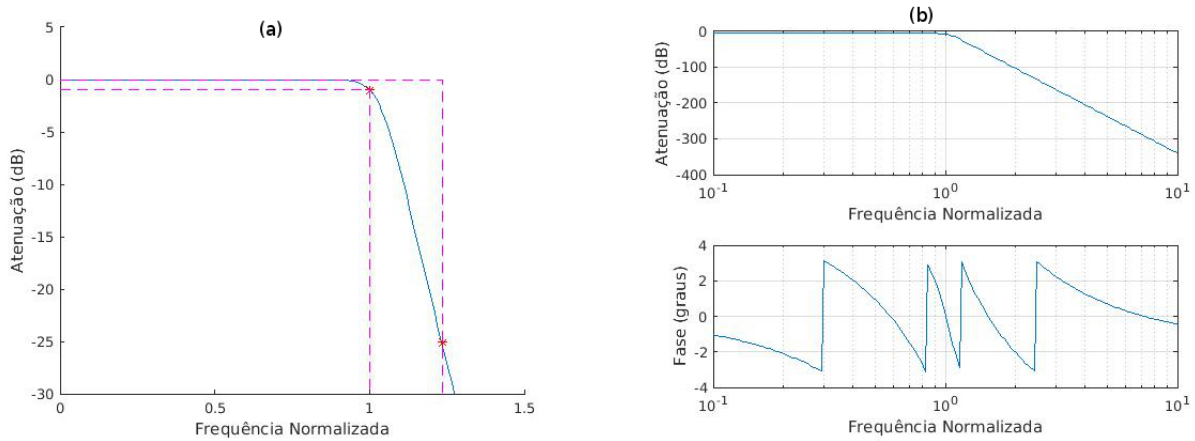


Figura 2 – (a)Magnitude e (b) resposta em frequência do protótipo $H(p)$.

Foi obtido o filtro analógico $H(s)$ através de $H(p)$ desnormalizado, utilizando as frequências em λ , conforme explicado nas equações da seção 2.1. O resultado é mostrado na figura 3.a. Podemos observar que o filtro ainda está dentro das especificações.

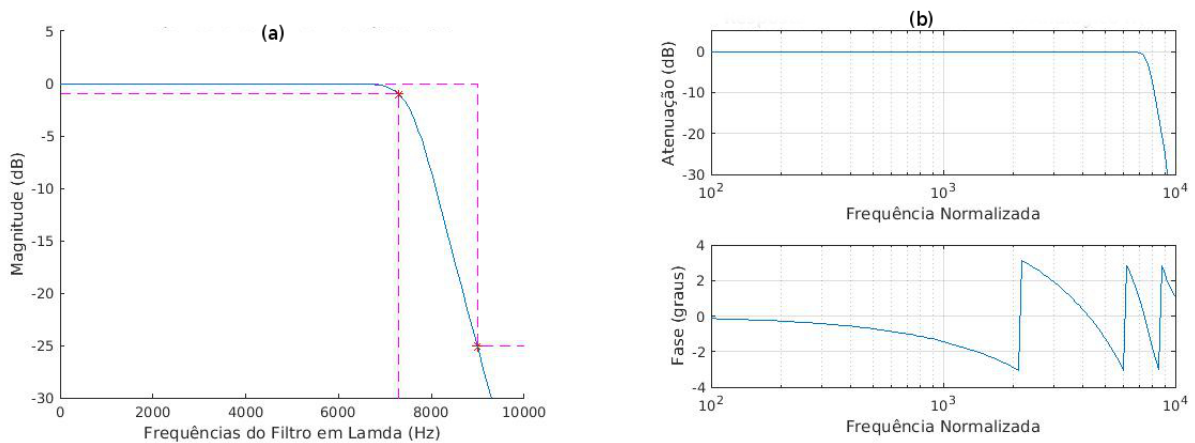


Figura 3 – (a)Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(s)$.

A Figura 4 mostra os zeros e pólos do filtro. Em 4.a e 4.b o sistema está no domínio s, podendo ser visto que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, o que demonstra que o sistema está estável. Em 4.c o sistema está no domínio z. Nele, os pólos se encontram dentro do círculo de raio unitário, também mostrando que sua estabilidade foi mantida.

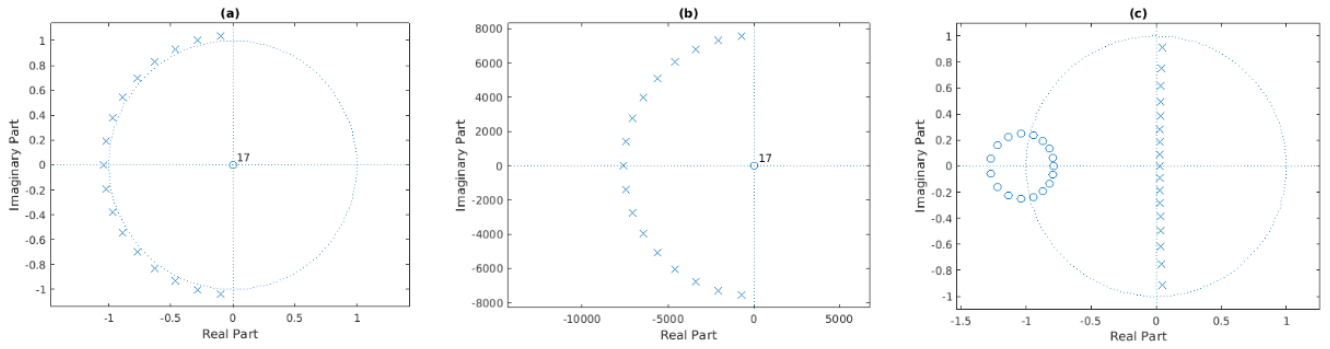


Figura 4 – Pólos e zeros dos filtros: (a)Protótipo $H(p)$, (b)Filtro Analógico $H(s)$ e (c) Filtro Digital $H(z)$

Foi realizada a transformação do filtro analógico $H(s)$ para filtro digital em $H(z)$, para tanto foi necessária realizar a transformação bilinear. O filtro se manteve estável mesmo após a transformação, conforme mostra a Figura 5.

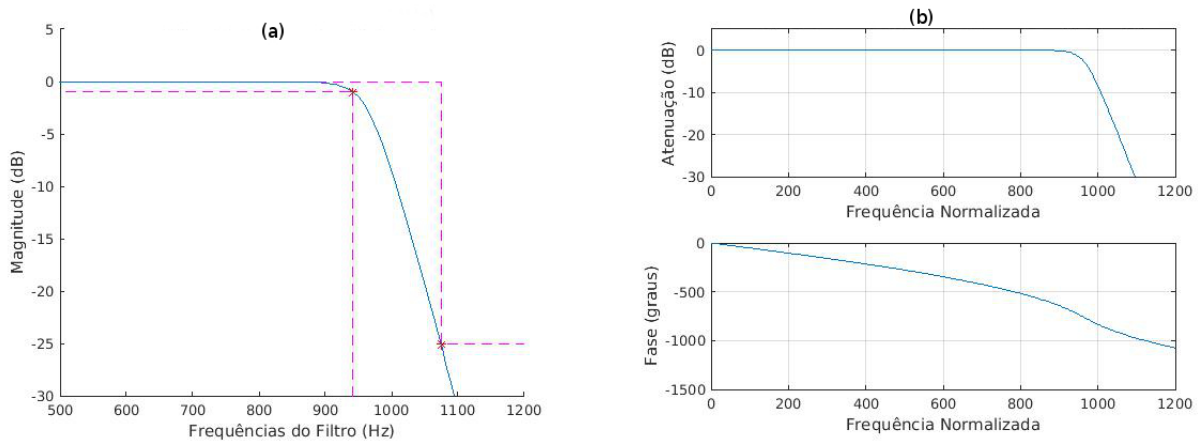


Figura 5 – (a)Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro digital $H(z)$.

No caso da transformação para filtro digital, é necessário fazer a medição do atraso de grupo, que vai medir o tempo de atraso da magnitude do sinal. Foi utilizada a função do MATLAB `grpdelay()` para fazer a verificação deste atraso. Podemos observar na Figura 6 que em $0,5\pi$ há uma perda de 25 amostras por segundo.

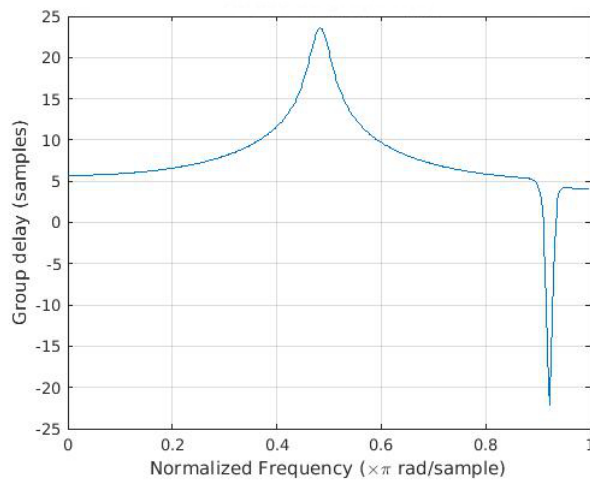


Figura 6 – Atraso de grupo $H(z)$

3.2 Filtro 2 - Chebyshev

O projeto do filtro passa-alta utilizando a aproximação Chebyshev tipo 1, possui a implementação inicial de filtros protótipo $H(p)$ passa-baixa, utilizando-se de parâmetros de substituição para transformar o filtro para passa-altas, passa-faixa ou rejeita-faixa. Os parâmetros de filtro passa-altas foram utilizados para implementar este filtro, sendo que para realizar a conversão $LP \rightarrow HP$ utilizou-se a equação 14 e a substituição $p = \frac{\omega_p}{s}$.

Considerando os dados oferecidos pela especificação na Tabela ??, o filtro HP na realização do protótipo, deve possuir um decaimento de 1 dB quando a frequência normalizada for igual a $\Omega_p = 1$ e deve ter um decaimento de 35dB quando a frequência normalizada for $\Omega_s = 1,24$. A Figura 7 mostra que o filtro protótipo está dentro das especificações.

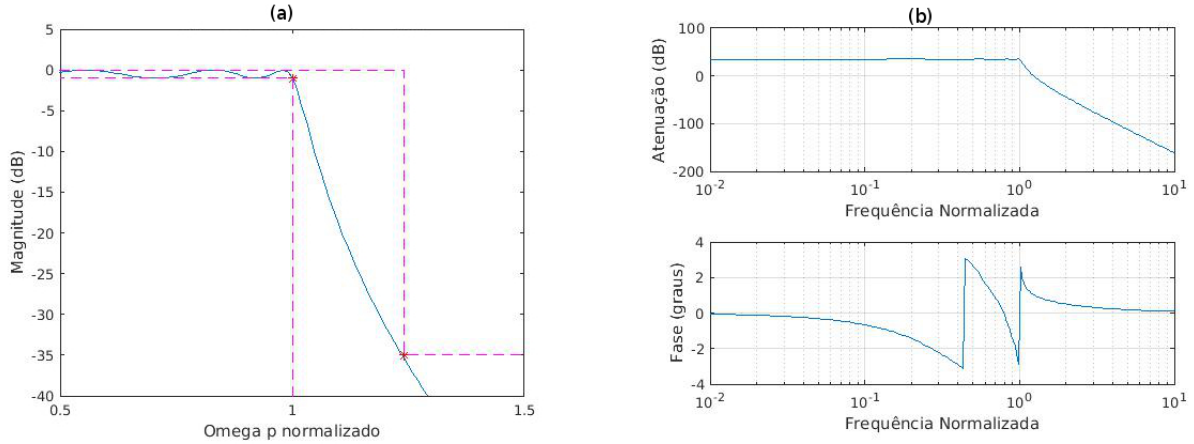


Figura 7 – (a) Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro protótipo $H(p)$.

Podemos também verificar os pólos e zeros, obtidos através da equação 17, na Figura 8. Na Figura 8.a e 8.b o sistema está no domínio s , podendo ser visto que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, demonstrando estabilidade. Na Figura 8.c o sistema está no domínio z . Nele, os pólos se encontram dentro do círculo de raio unitário, também mostrando a característica de estabilidade de z .

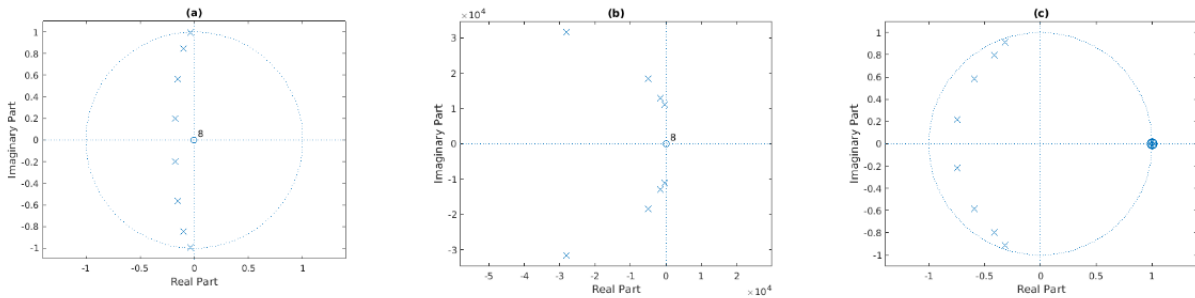


Figura 8 – Pólos e zeros dos filtros: (a) Protótipo $H(p)$, (b) Filtro analógico $H(s)$ e (c) Filtro digital $H(z)$

Realizou-se a transformada do filtro analógico $H(p)$ para $H(s)$, utilizou-se a substituição com valores de $p = \frac{\omega_p}{s}$ que é correspondente a filtro passa-altas, podemos verificar na Figura 9 que o filtro mantém suas especificações.

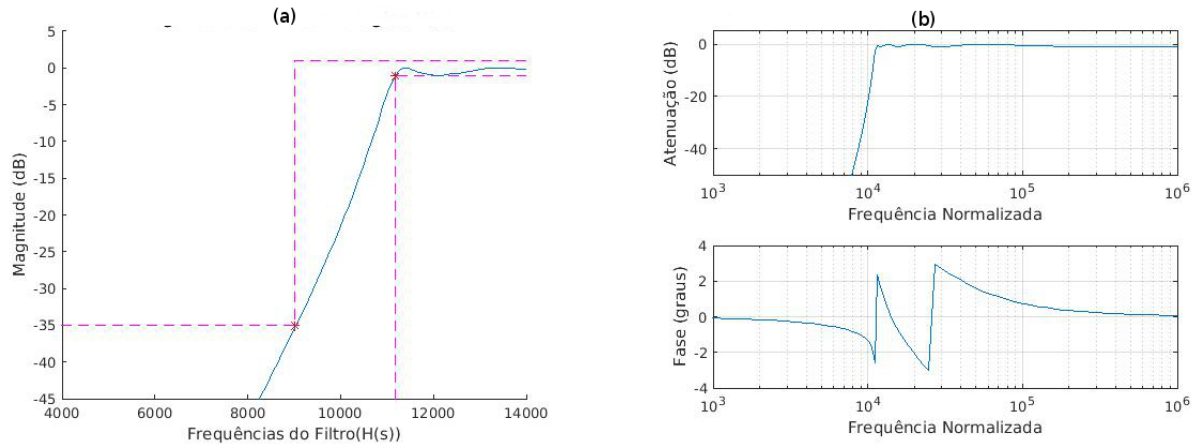


Figura 9 – (a) Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(s)$.

Após esta etapa, a transformação do filtro analógico $H(s)$ para filtro digital em $H(z)$, foi realizada com a transformação bilinear pela Equação 11. O filtro se manteve estável mesmo após a transformação, conforme mostra a Figura 10.

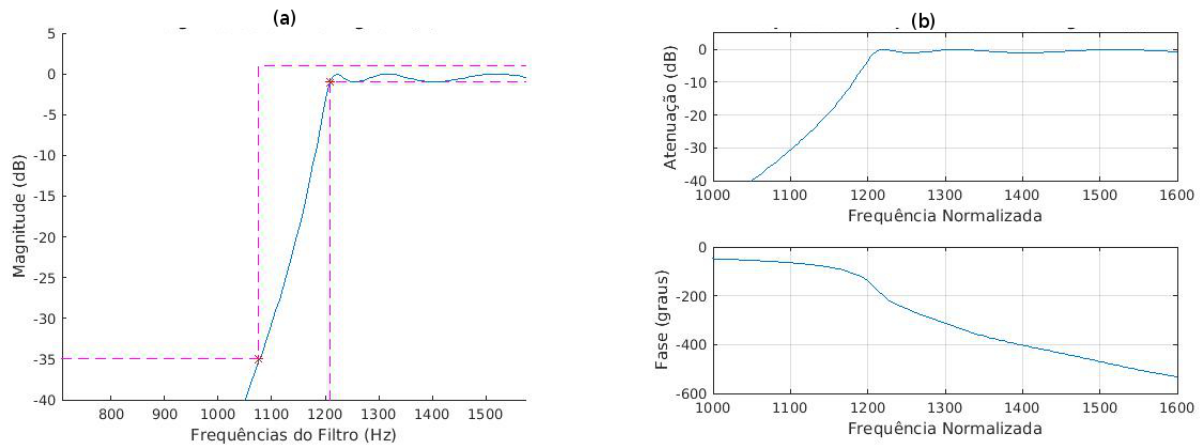


Figura 10 – (a) Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro digital $H(z)$.

Além disso, verificamos também o atraso de grupo do filtro, que indica a medida da atraso médio do filtro em função da frequência do sinal de entrada. Como podemos verificar na Figura 11 que em $0,6\pi$ há uma perca de aproximadamente 35 amostras por segundo.

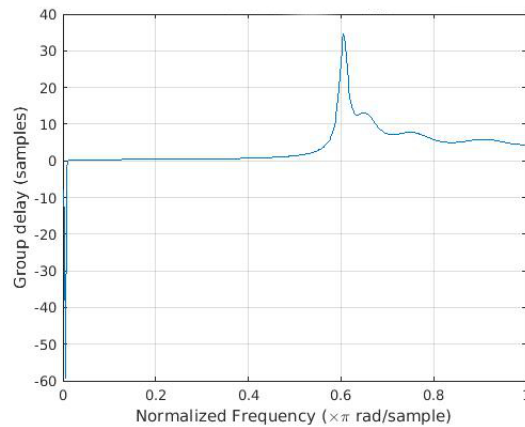


Figura 11 – Atraso de grupo em $H(z)$

3.3 Filtro 3 - ChebyshevII

O projeto do filtro passa-faixa Chebyshev tipo 2 supõe a implementação utilizando as funções do MATLAB. Parâmetros específicos de filtros passa-faixas foram utilizados para implementar este filtro com a Equação 23.

Considerando os dados oferecidos pela especificação na Tabela ??, o filtro BP na realização do protótipo, deve possuir um decaimento de 1 dB quando a frequência normalizada for igual a $\Omega_p=1$ e deve ter um decaimento de 35dB quando a frequência normalizada for $\Omega_s=5.27$. A Figura 12 mostra que o filtro protótipo está dentro das especificações.

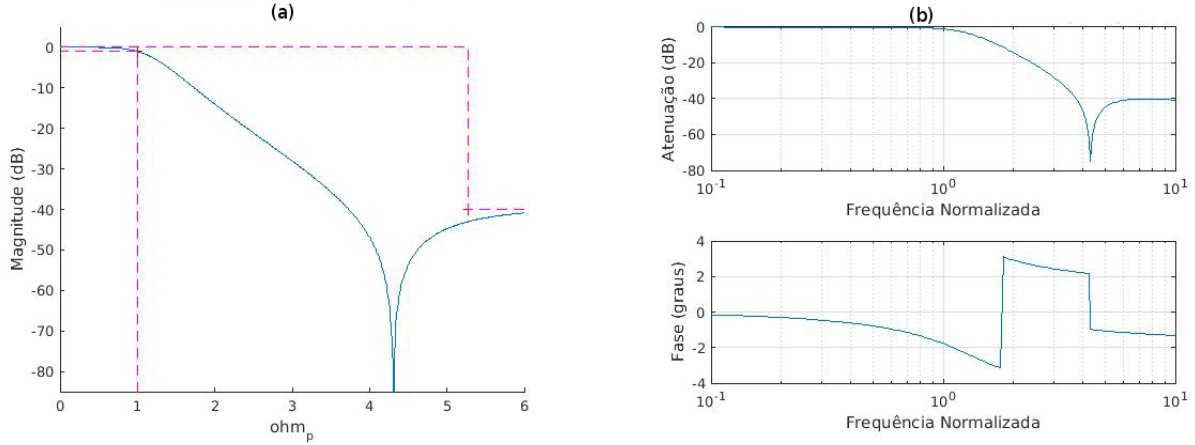


Figura 12 – (a)Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(p)$

Podemos verificar os pólos e zeros, obtidos através da Equação 23, na Figura 13. Na Figura 13.a e 13.b o sistema está no domínio s, podendo ser visto que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, demonstrando estabilidade. Na Figura 13.c o sistema está no domínio z. Nele, os pólos se encontram dentro do círculo de raio unitário, também mostrando a característica de estabilidade de z.

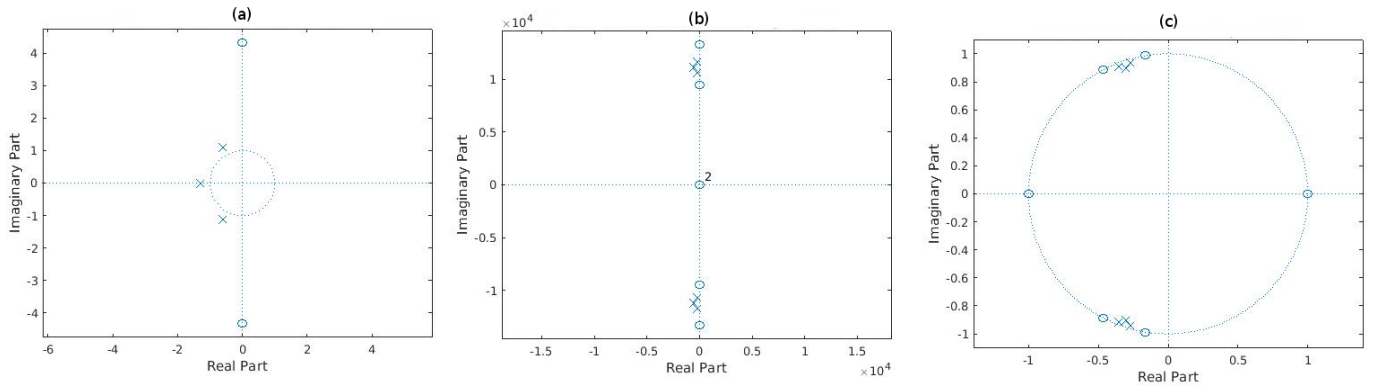


Figura 13 – Pólos e zeros dos filtros: (a)Protótipo $H(p)$, (b)Filtro Analógico $H(s)$ e (c) Filtro Digital $H(z)$

Realizou-se a transformada do filtro analógico $H(p)$ para $H(s)$, utilizou-se a substituição a Equação 2.3 que é correspondente a filtro passa-faixas, podemos verificar na Figura 14 que o filtro mantém suas especificações.

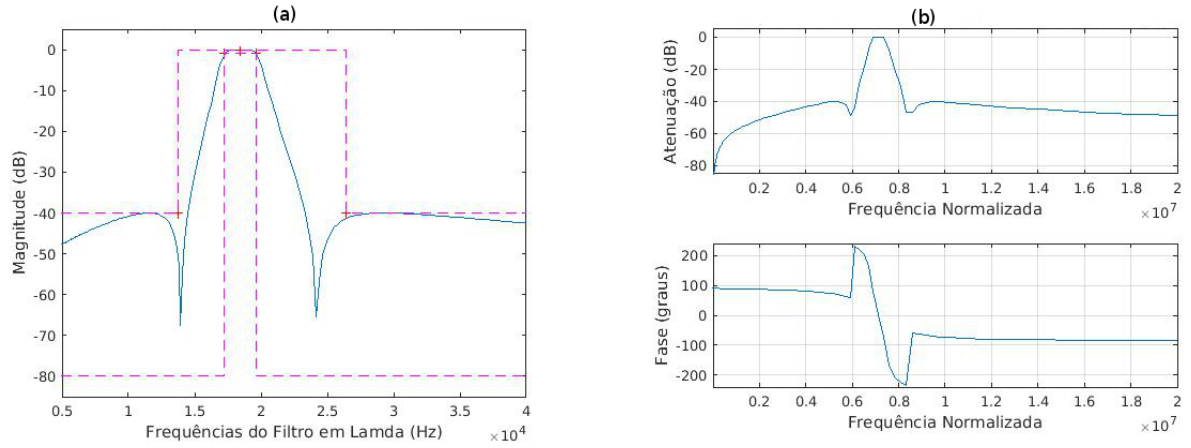


Figura 14 – (a) Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(s)$

Após esta etapa, a transformação do filtro analógico $H(s)$ para filtro digital em $H(z)$, foi realizada com a transformação bilinear pela Equação 11. O filtro se manteve estável mesmo após a transformação, conforme mostra a Figura 15.

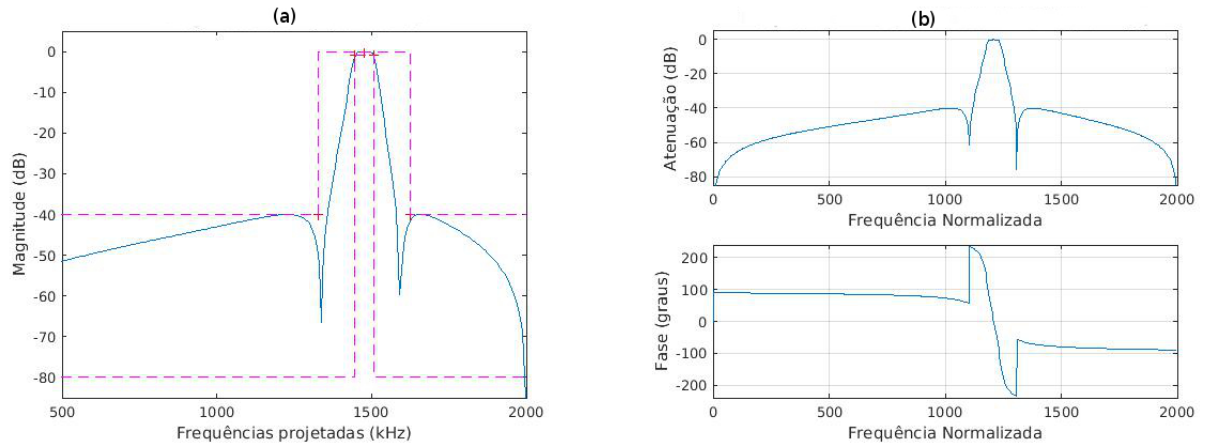


Figura 15 – (a) Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(z)$

3.4 Filtro 4 ChebyshevII

Considerando os dados oferecidos pela especificação na Tabela ??, e as Equações 23, o filtro BP na realização do protótipo, deve possuir um decaimento de 1 dB quando a frequência normalizada for igual a $\Omega_p = 1$ e deve ter um decaimento de 35 dB quando a frequência normalizada for $\Omega_s = 5.27$. A Figura 16 mostra que o filtro protótipo está dentro das especificações.

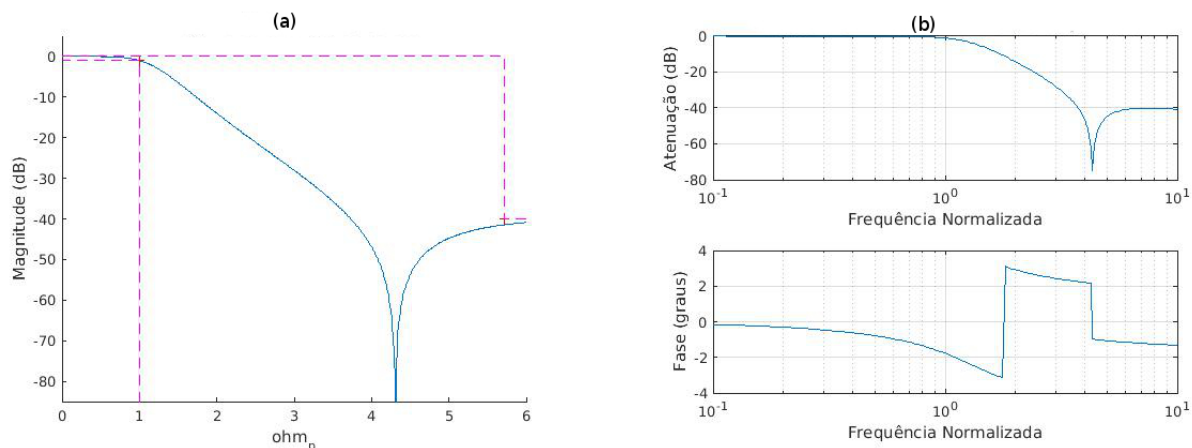


Figura 16 – (a) Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(p)$

Podemos verificar os pólos e zeros, obtidos através da Equação 23, na Figura 17. Na Figura 17.a e 17.b o sistema está no domínio s, podendo ser visto que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, demonstrando estabilidade. Na Figura 17.c o sistema está no domínio z. Nele, os pólos se encontram dentro do círculo de raio unitário, também mostrando a característica de estabilidade de z.

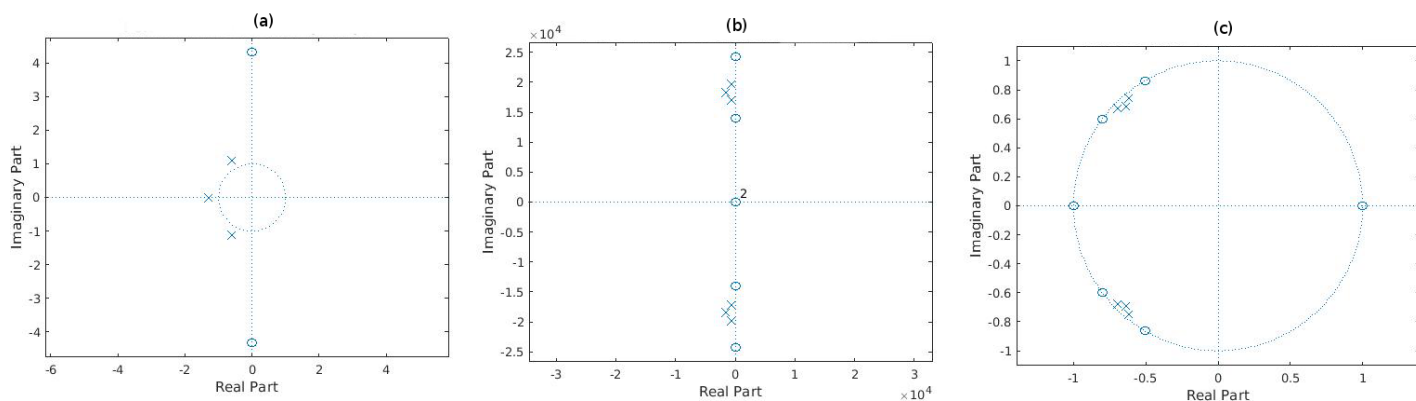


Figura 17 – Pólos e zeros dos filtros: (a) Protótipo $H(p)$, (b) Filtro Analógico $H(s)$ e (c) Filtro Digital $H(z)$

Realizou-se a transformada do filtro analógico $H(p)$ para $H(s)$, utilizou-se a substituição a Equação 2.3 que é correspondente a filtro passa-faixas, podemos verificar na Figura 14 que o filtro mantém suas especificações.

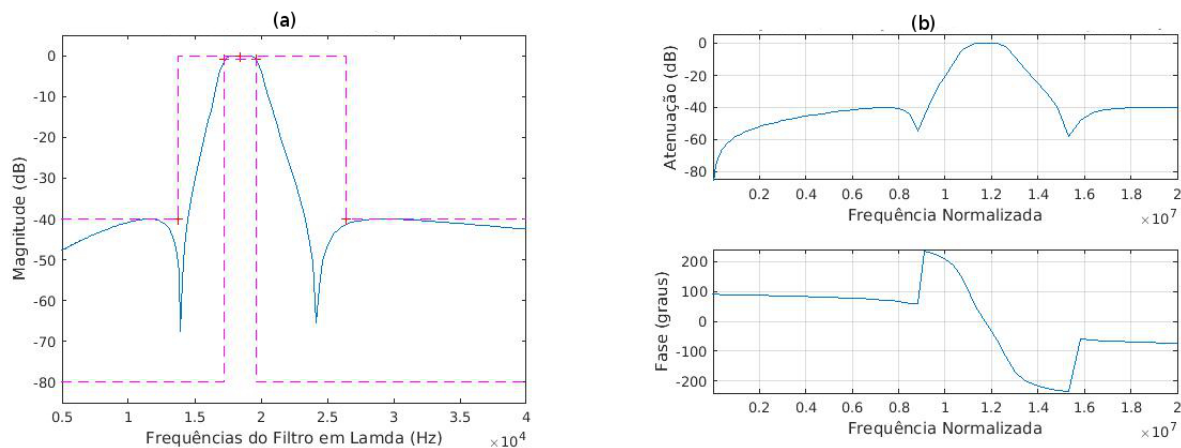


Figura 18 – (a) Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(s)$

Após esta etapa, a transformação do filtro analógico $H(s)$ para filtro digital em $H(z)$, foi realizada com a transformação bilinear pela Equação 11. O filtro se manteve estável mesmo após a transformação, conforme mostra a Figura 19.

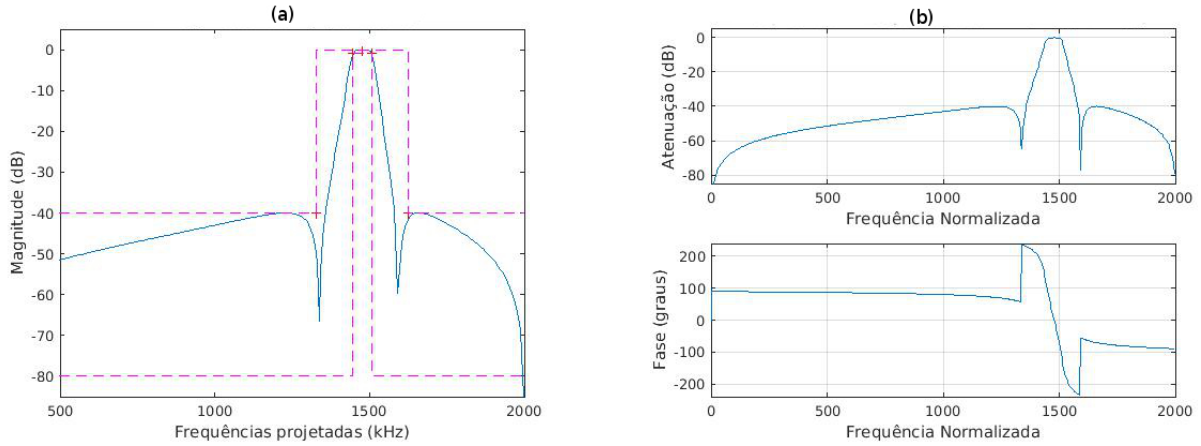


Figura 19 – (a) Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(z)$

3.5 Filtro 5 - ChebyshevII

Considerando os dados oferecidos pela especificação na Tabela ??, e as Equações, o filtro BP na realização do protótipo, deve possuir um decaimento de 1 dB quando a frequência normalizada for igual a $\Omega_p = 1$ e deve ter um decaimento de 35dB quando a frequência normalizada for $\Omega_s = 2.26$. A Figura 20 mostra que o filtro protótipo está dentro das especificações.

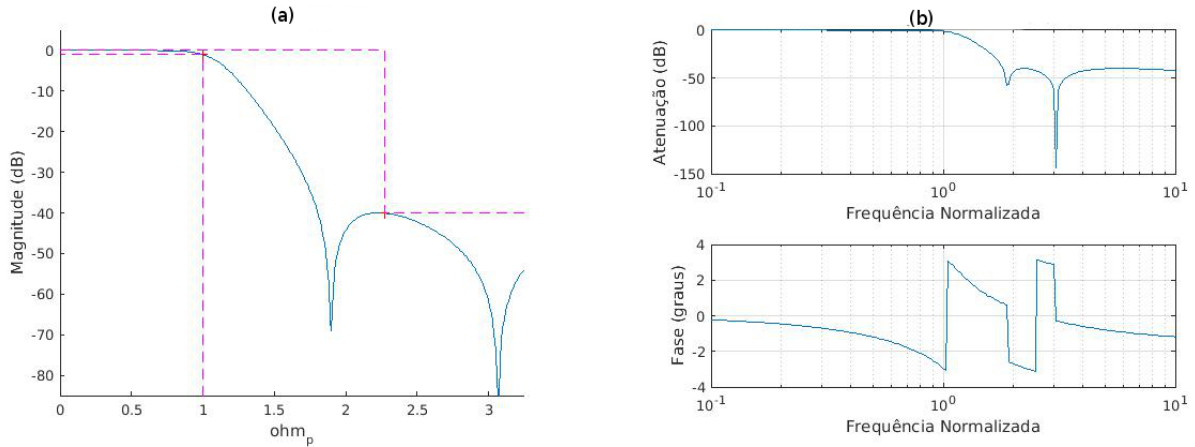


Figura 20 – (a) Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(p)$

Podemos verificar os pólos e zeros, obtidos através da Equação 23, na Figura 21. Na Figura 21.a e 21.b o sistema está no domínio s , podendo ser visto que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, demonstrando estabilidade. Na Figura 21.c o sistema está no domínio z . Nele, os pólos se encontram dentro do círculo de raio unitário, também mostrando a característica de estabilidade de z .

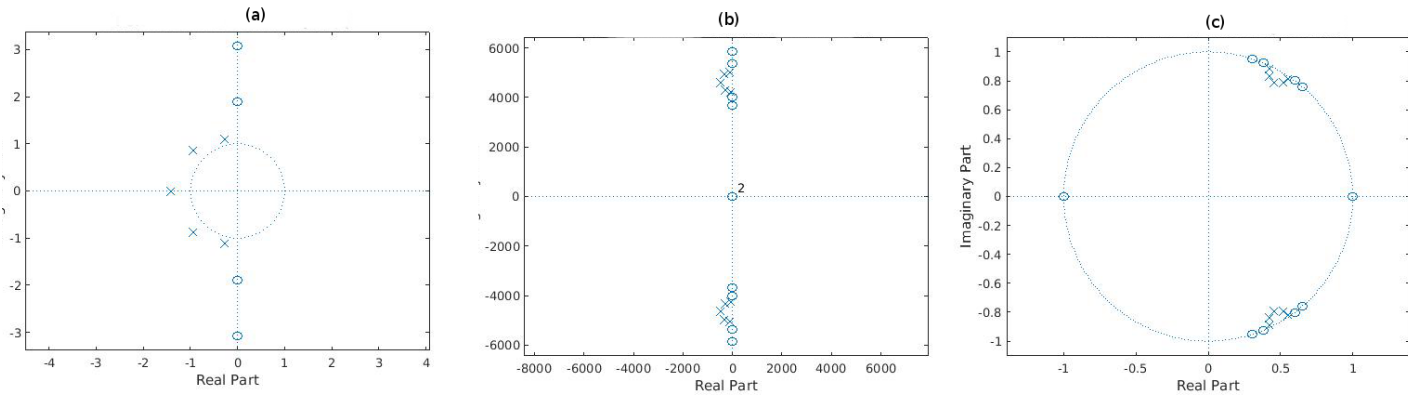


Figura 21 – Pólos e zeros dos filtros: (a)Protótipo $H(p)$, (b)Filtro Analógico $H(s)$ e (c) Filtro Digital $H(z)$

Realizou-se a transformada do filtro analógico $H(p)$ para $H(s)$, utilizou-se a substituição a Equação 2.3 que é correspondente a filtro passa-faixas, podemos verificar na Figura 14 que o filtro mantém suas especificações.

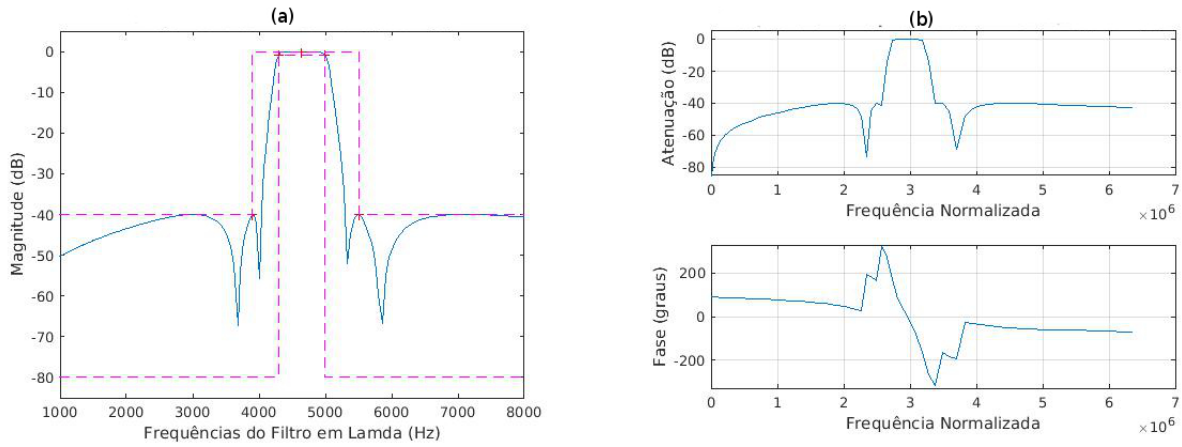


Figura 22 – (a)Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(s)$

Após esta etapa, a transformação do filtro analógico $H(s)$ para filtro digital em $H(z)$, foi realizada com a transformação bilinear pela Equação 11. O filtro se manteve estável mesmo após a transformação, conforme mostra a Figura 23.

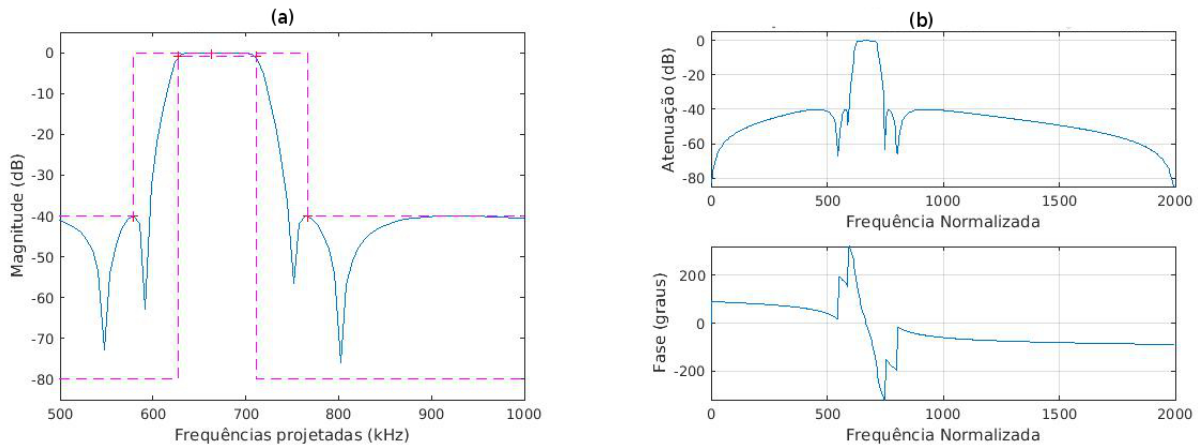


Figura 23 – (a)Magnitude e (b) resposta em frequência do filtro analógico $H(z)$

3.6 Atraso de grupo

Além disso, verificamos também o atraso de grupo dos filtros 3, 4 e 5, que indica a medida da atraso médio do filtro em função da frequência do sinal de entrada. Como podemos verificar na Figura 24.a em $0,3\pi$ há uma perca de aproximadamente 85 amostras por segundo. No filtro 4, na Figura 24.b em $0,6\pi$ há uma perca de aproximadamente 60 amostras por segundo e, por fim, na Figura 24.c em aproximadamente $0,7\pi$ há uma perca de aproximadamente 50 amostras por segundo.

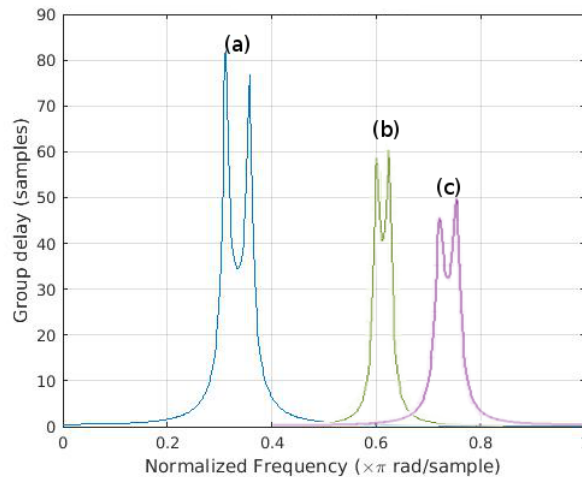


Figura 24 – Atraso de grupo em (a) Filtro 3, (b) Filtro 4 e (c) Filtro 5 - ChebyshevII

4 Conclusão

Os experimentos realizados foram relacionados a Filtros IIR, que são filtros com resposta ao impulso e duração infinita. Devido as característica de duração infinita é possível utilizar a técnica de transformar filtros analógicos em digitais através do mapeamento de valor. Primeiramente foi projetado um protótipo LP, que utiliza frequências normalizadas e converte para um filtro analógico HP, BP ou BS, através do mapeamento de valor complexo apresentados em aula e em [1] e [2]. Dentre as vantagens de utilizar os filtros IIR, está a estabilidade do filtro em relação à filtros FIR, que na maioria das vezes, permanecem nas faixas de frequências e atenuações especificadas. O projeto dos cinco filtros comprovaram esta estabilidade, visto que todos eles atingiram as especificações.

Referências

1. DINIZ, P. S. R., DA SILVA, E. A. B., e LIMA NETTO, S. Processamento Digital de Sinais: Projeto e Análise de Sistemas. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. 976 p. ISBN 978-8582601235.
2. SHENOI, B. A. Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design. 1.ed. New Jersey: John Wiley-Interscience, 2006. 440 p. ISBN 978-0471464822