DISTRIBUIÇÕES BINOMIAL E DE PASCAL

Jessica da S. Hahn, Leticia A. Coelho *

11 de novembro de 2016

*Alunas do curso de Engenharia de Telecomunicações - IFSC

1 Questão

Uma variável aleatória binomial X com parâmetros n e p, aqui denotada por Binom(n, p), representa o número de sucessos em n experimentos de Bernoulli independentes (cada qual com parâmetro p). A função massa de probabilidade de X é dada por

$$px(x) \quad = \quad \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad\qquad x = 0, 1, ..., n \tag{1}$$

A partir da definição apresentada para X , pode-se também escrever $X = B1+\cdots+Bn$, onde B1,...,Bn são variáveis aleatórias independentes, todas distribuídas de acordo com a distribuição de Bernoulli com parâmetro p.

a) Demonstração da equação.

O '0' representa fracasso com probabilidade (1-p) e '1' representa sucesso com probabilidade p.

- n=1 e x=0

$$px(0) \quad = "0" \quad = \quad (1-p) \tag{2}$$

- n=1 e x=1

$$px(1) \quad = "1" = \tag{3}$$

- n=1 e x=2

$$px(2) \quad = \quad 0 \tag{4}$$

- n=2 e x=0

$$px(0) \quad = \quad "00" \quad = (1-p)(1-p) \quad = (1-p)^2 \tag{5}$$

- n= 2 e x = 1

$$px(1) \quad = \quad "01" \qquad ou \quad "10" = \quad (1-p)p \quad + \quad p(1-p) \quad = \quad 2p(1-p) \tag{6}$$

- n=2 e x=2

$$px(2) \quad = \quad "11" \quad = \quad p^2 \tag{7}$$

- n=2 e x=3

$$px(3) = \quad 0 \tag{8}$$

- n = 3 e x = 0

$$px(0) \quad = \quad "000" \quad = \quad (1-p)^3 \tag{9}$$

- n = 3 e x = 1

$$px(1) \quad = \quad "100"ou"010"ou"001" \quad = (1-p)^2p \quad +(1-p)^2p+(1-p)^2p \quad = 3(1-p)^2p \tag{10}$$

- n = 3 e x = 2

$$px(2) \quad = \text{"011"}ou\text{"110"}ou\text{"101"} = (1-p)p^2 + (1-p)p^2 + (1-p)p^2 = 3(1-p)p^2 \tag{11}$$

- n = 3 e x = 3

$$px(3) \quad = \quad \text{"111"} \quad = \quad p^3 \tag{12}$$

- n = 3 e x = 4

$$px(4) \quad = \quad 0 \tag{13}$$

Como podemos ver pelo comportamento dos experimentos realizados acima demostramos a seguinte equação:

$$p^x(1-p)^{n-x} \tag{14}$$

Agora para comprovar o coeficiente binominal que representa o número que acompanha as equações (5), (9) e (10):

$$\binom{n}{k} \tag{15}$$

- n = 1 e k = 0

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{1!}{0!(1-0)!} \quad = \quad 1 \tag{16}$$

- n = 1 e k = 1

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{1!}{1!(1 \quad - \quad 1)!} \quad = \quad 1 \tag{17}$$

- n = 1 e k =2

$$\binom{n}{k} \quad = 0 \tag{18}$$

- n = 2 e k = 0

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{2!}{0!(2 \quad - \quad 0)!} \quad = \quad 1 \tag{19}$$

- n = 2 e k = 1

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{2!}{1!(2 \quad - \quad 1)!} \quad = \quad 2 \tag{20}$$

- n = 2 e k = 2

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{2!}{2!(2 \quad - \quad 0)!} \quad = \quad 1 \tag{21}$$

- n = 2 e k = 3

$$\binom{n}{k} \quad = 0 \tag{22}$$

- n = 3 e k = 0

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \frac{3!}{0!(3 \quad - \quad 0)!} \quad = \quad 1 \tag{23}$$

- n = 3 e k=1

$$\binom{n}{k} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3 \tag{24}$$

- n = 3 e k = 2

$$\binom{n}{k} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3 \tag{25}$$

- n = 3 e k =3

$$\binom{n}{k} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1 \tag{26}$$

- n = 3 e k = 4

$$\binom{n}{k} = 0 \tag{27}$$

Observando os resultados obtidos no coeficiente binomial e os resultados anteriores conseguimos provar e equação binomial.

b)Média e variância da distribuição de Bernoulli

$$E[X] = \sum xfx(x) = 1p + 0(1-p) = p \tag{28}$$

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \tag{29}$$

$$E[X^2] = \sum x^2 fx(x) = 1^2 p + 0^2(1-p) = p \tag{30}$$

$$var[X] = p - p^2 = p(1-p) \tag{31}$$

Média e variância da distribuição binomial

Como X = B1 + B2 + ... Bn , logo:

$$E[X] = p + p + ... + pn = np \tag{32}$$

$$var[X] = p(1-p) + p(1-p) + p(1-p) + ... + pn(1-pn) = n[p(1-p)] \tag{33}$$

c) Simulação no Octave

```
function rnd = rand_binom(n,p)
    sum(rand(1,n)<p);
endfunction
```

d) px(x), EX[x] e variância - Fazer

- Função px(x) calculada
- Função EX(x) calculada
- Variância calculada
- Função px(x) simulada
- Função EX(x) simulada
- Variância simulada

2 Questão 2

Uma variável aleatória de Pascal X com parâmetros n e p, aqui denotada por Pascal(n, p), representa o número de experimentos de Bernoulli independentes (cada qual com parâmetro p) necessários para alcançar o n-ésimo sucesso. A função massa de probabilidade de X é dada por

$$px(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} x & - & 1 \\ n & - & 1 \end{pmatrix} p^n (1-p)^{x-n} \quad , \quad x = \quad n, \quad n+1, ... \tag{34}$$

Pode-se mostrar que

$$X \quad = \quad G1 \quad + \quad ... \quad + \quad Gn \tag{35}$$

onde G1, . . . , Gn são variáveis aleatórias independentes, todas distribuídas de acordo com a distribuição geométrica com parâmetro p.

a) Demonstração da equação

Sabe-se que a distribuição de Pascal assim como a distribuição binomial advêm da distribuição de Bernoulli, assim a demonstração da equação foi realizada por meio de amostragem.

Considerando apenas um sucesso. $(x-1)p(1-p)^2$

- n=1 e x=1

$$px(1) \quad = \quad '1' \quad = \quad p \tag{36}$$

- n=2 e x=1

$$px(1) \quad = \quad "01" \quad = \quad p(p-1) \tag{37}$$

- n=3 e x=1

$$px(1) \quad = \quad "100" \quad ou \quad "010" \quad = \quad p(1-p)^2 \tag{38}$$

- n=4 e x=1

$$"1000" \quad ou \quad "0100" \quad ou \quad "0010" \quad = \quad p(1-p)^2 \tag{39}$$

Considerando dois sucessos. $(x-1)p(1-p)^2$

- n=2 e x=2

$$px(2) \quad = \quad "11" \quad = \quad p^2 \tag{40}$$

- n=3 e x=2

$$px(2) \quad = \quad \text{"110"} \quad ou \quad \text{"101"} \quad = \quad p^2\,(1-p) \tag{41}$$

- n=4 e x=2

$$px(2) = \text{"1001"}ou\text{"1010"}ou\text{"1100"}ou\text{"0110"}ou\text{"0101"} = p^2(1-p)^2 \tag{42}$$

Considerando três sucessos. $(x-1)p(1-p)^3$

- n=3 e x=3

$$px(3) \quad = \quad \text{"111"} \quad = \quad p^3$$

(43)

- n=4 e x=3

$$px(3) \quad = \quad \text{"1110"} \quad ou \quad \text{"1101"} \quad ou \quad \text{"1011"} \quad = \quad p^3\,(1-p) \tag{44}$$

- n=5 e x=3

$$px(3) = \quad \text{"11100"} \quad ou \quad \text{"11001"} \quad ou \quad \text{"10011"} \quad ou \quad \text{"10110"} \quad = \quad p^3(1-p)^2 \tag{45}$$

Através das amostras realizadas conseguimos mostrar a equação que representa a distribuição de Pascal.

b) Média e variância da distribuição geométrica

$$EX[X] = \sum_{x \;=\; 1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p \quad = \quad p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \tag{46}$$

$$EX[X] \quad = \quad \frac{p}{(1-p)}\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^x \quad = \quad \frac{p}{(1-p)}\frac{(1-p)}{p^2} \quad = \quad \frac{1}{p} \tag{47}$$

$$var[X] = \quad E[X^2] \quad - \quad (E[X])^2 \tag{48}$$

$$EX[X^2] \quad = \quad \sum_{x \;=\; 1}^{\infty} x^2(1-p)^{x-1}p \quad = \quad p\sum_{x=1}^{\infty} x^2(1-p)^{x-1} \tag{49}$$

$$EX[X^2] \quad = \quad \frac{p}{(1-p)}\sum_{x=1}^{\infty} x^2(1-p)^x \quad = \quad \frac{p}{(1-p)}\frac{(1-p)(1+1-p)}{(1)-(1-p)^3} \tag{50}$$

$$p\frac{(2-p)}{p^3} = \frac{(2-p)}{p^2} \tag{51}$$

$$var[X] \quad = \quad \frac{(2-p)}{p^2} \quad - \quad \frac{1}{p^2} \quad = \quad \frac{(1-p)}{p^2} \tag{52}$$

c) Octave - Perguntar