INSTITUTO FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS SÃO JOSÉ
COORDENADORIA DE ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES
ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

DISTRIBUIÇÕES BINOMIAL E DE PASCAL

No que segue, n representa um número inteiro positivo e p um número real tal que $0 \leq p \leq 1$. Além disso,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

denota o coeficiente binomial.

1. (4,0) Uma **variável aleatória binomial** X com parâmetros n e p, aqui denotada por $\text{Binom}(n, p)$, representa o número de sucessos em n experimentos de Bernoulli independentes (cada qual com parâmetro p). A função massa de probabilidade de X é dada por

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

A partir da definição apresentada para X, pode-se também escrever

$$X = B_1 + \cdots + B_n, \tag{2}$$

onde $B_1, \ldots, B_n$ são variáveis aleatórias independentes, todas distribuídas de acordo com a distribuição de Bernoulli com parâmetro p.

(a) Demonstre a Equação (1).

(b) Determine a média e a variância de X.

Sugestão: Utilize a Equação (2), e não a Equação (1)!

(c) Escreva a função abaixo, que deve implementar uma realização de uma variável aleatória binomial.

```
function rnd = rand_binom(n, p)
## Entradas:
##   n, p: parâmetros da variável aleatória binomial.
## Saídas:
##   rnd: realização da variável aleatória.
...
end
```

(d) Determine a função massa, a média e a variância para $X \sim \text{Binom}(10, 1/10)$ e para $X \sim \text{Binom}(50, 1/4)$. Em seguida, confira suas respostas através de uma simulação de Monte Carlo utilizando a função escrita na Questão (c), tendo como saída:

- Uma figura contendo a função massa de probabilidade teórica, bem como aquela obtida via simulação.
- Os valores teóricos da média e da variância, bem como aqueles obtidos via simulação.

2. (4,0) Uma **variável aleatória de Pascal** X com parâmetros n e p, aqui denotada por Pascal(n, p), representa o número de experimentos de Bernoulli independentes (cada qual com parâmetro p) necessários para alcançar o n-ésimo sucesso. A função massa de probabilidade de X é dada por

$$p_X(x) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n}, \qquad x = n, n+1, \ldots. \tag{3}$$

Pode-se mostrar que

$$X = G_1 + \cdots + G_n, \tag{4}$$

onde $G_1, \ldots, G_n$ são variáveis aleatórias independentes, todas distribuídas de acordo com a distribuição geométrica com parâmetro p.

(a) Demonstre a Equação (3).

(b) Determine a média e a variância de X.

Sugestão: Utilize a Equação (4), e não a Equação (3)!

(c) Escreva a função abaixo, que deve implementar uma realização de uma variável aleatória de Pascal.

```
function rnd = rand_pascal(n, p)
## Entradas:
##   n, p: parâmetros da variável aleatória de Pascal.
## Saídas:
##   rnd: realização da variável aleatória.
...
end
```

(d) Determine a função massa, a média e a variância para $X \sim$ Pascal$(2, 1/2)$ e para $X \sim$ Pascal$(5, 2/5)$. Em seguida, confira suas respostas através de uma simulação de Monte Carlo utilizando a função escrita na Questão (c), tendo como saída:

- Uma figura contendo a função massa de probabilidade teórica, bem como aquela obtida via simulação.
- Os valores teóricos da média e da variância, bem como aqueles obtidos via simulação.

3. (2,0) Considere um enlace de comunicação digital no qual, a cada transmissão de pacote pelo enlace, há uma probabilidade de 90 % de que o pacote seja enviado corretamente. Assuma independência entre as transmissões.

(a) ("FEC") Um arquivo é composto de 16 pacotes. Um codificador adiciona 4 pacotes de redundância aos pacotes originais, de modo que se tenha um total de 20 pacotes. Em seguida, cada um dos 20 pacotes é transmitidos pelo enlace digital. Assuma que o receptor consiga recuperar o arquivo original desde que pelo menos 16 (não importando quais) dos 20 pacotes sejam recebidos.

i. Determine o número médio de pacotes recebidos.

ii. Determine a probabilidade de que o arquivo original seja recuperado.

(b) (“ARQ”) Um arquivo é composto de 16 pacotes. Suponha agora que não haja codificador, mas que exista um enlace de realimentação que permite que o receptor solicite retransmissão de pacotes que tenham sido perdidos. Os pacotes são enviados até que o receptor obtenha todos os 16 pacotes do arquivo.

   i. Determine o número médio de transmissões necessárias para que se recupere o arquivo.

   ii. Determine a probabilidade de que se recupere a informação em no máximo 20 transmissões.

Confira suas resposta através de simulação (use as funções escritas na Questões 1 e 2).