Основы Мехатроники и Робототехники

Лекция 2

Описание точки

Точка и вектор – базовые элементы геометрии и физики.

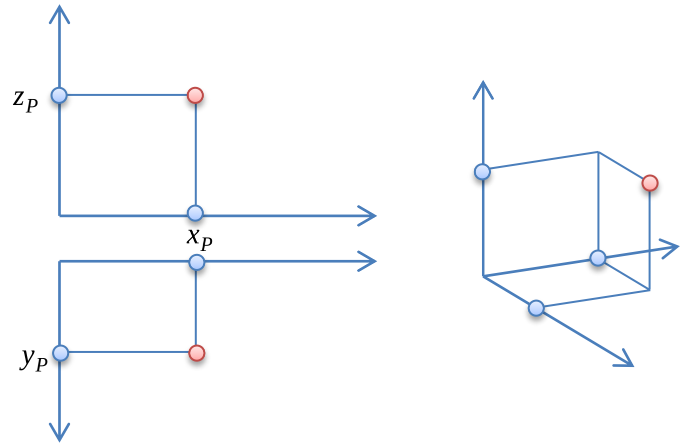
Для описания положения точки в 3х-мерном пространстве необходимо 3 независимых параметра.
В декартовом пространстве эти параметры – проекции точки на оси координат.

Указание на используемую систему координат

$$^{A}P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}$$

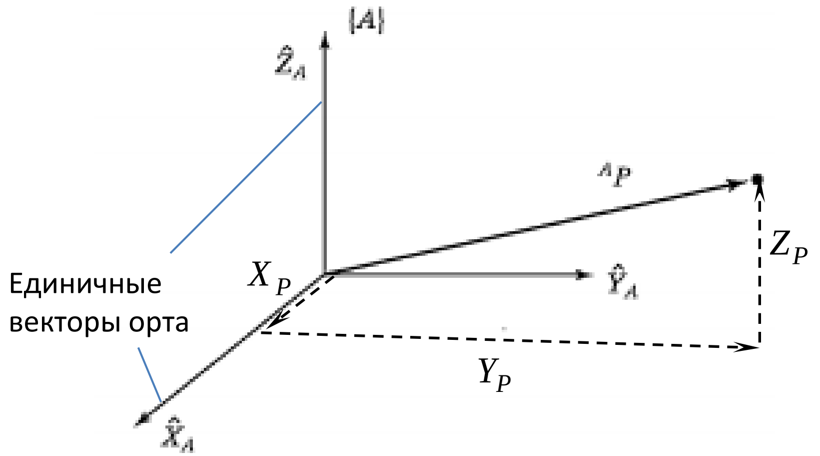
Проекция точки на ось координат X (скалярная величина)

Заглавная буква подразумевает вектор или матрицу



Описание вектора

Вектор в пространстве обычно описывается как сумма векторов-проекции на векторы орта



Вектор сумма

Проекция вектора P на ось координат X (векторная величина)

$$^AP = {}^AX_P + {}^AY_P + {}^AZ_P$$

Вектор-проекция вектора на ось координат равна единичному вектору (орту) умноженному на масштабирующий скаляр

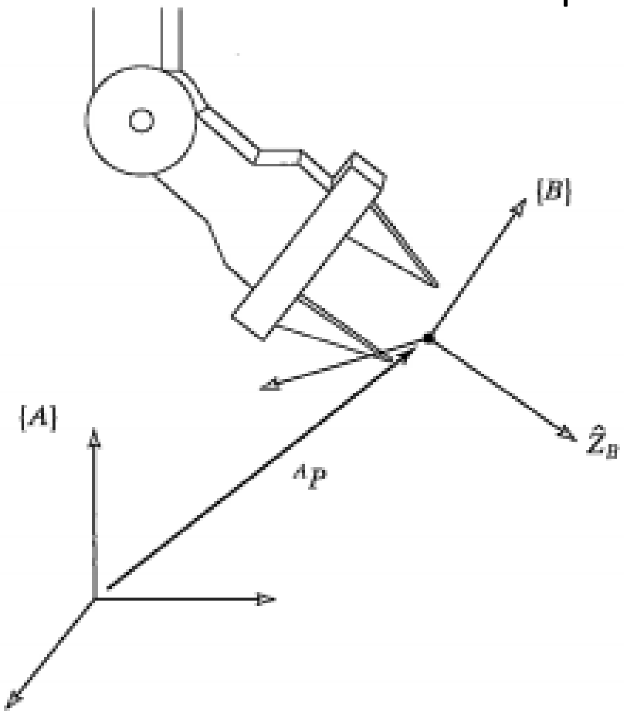
$$^AP = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \overset{^AX_e}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \cdot z_P + \overset{^AY_e}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \cdot y_P + \overset{^AZ_e}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \cdot z_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}$$

Единичные векторы задаются отдельно или очевидны из контекста

Описание системы координат

Система координат является универсальным средством описания твердого тела.

Любая точка твердого дела описывается в СК привязанной к этому телу как вектор-константа.



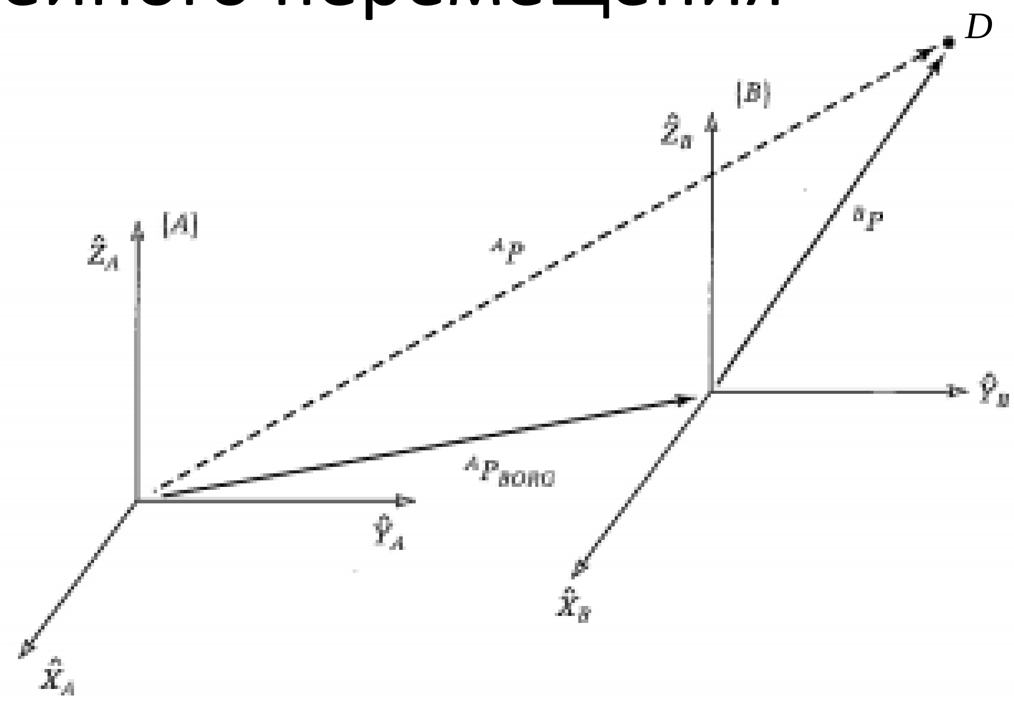
Если тело перемещается достаточно описать изменение привязанной к нему СК.

Если принять за правило, что все СК построены из единичных ортогональных троек векторов, то любую новая СК моно создать **повернув** и **сдвинув** известную СК

Описание линейного перемещения

Пусть есть две системы координат **A** и **B**, орты которых попарно параллельны но начальные точки разнесены.

Эту ситуацию можно рассматривать как перемещение тела вместе с СК на вектор $\mathbf{P_{bo}}$
Либо как перемещение исходного СК на вектор $\mathbf{-P_{bo}}$



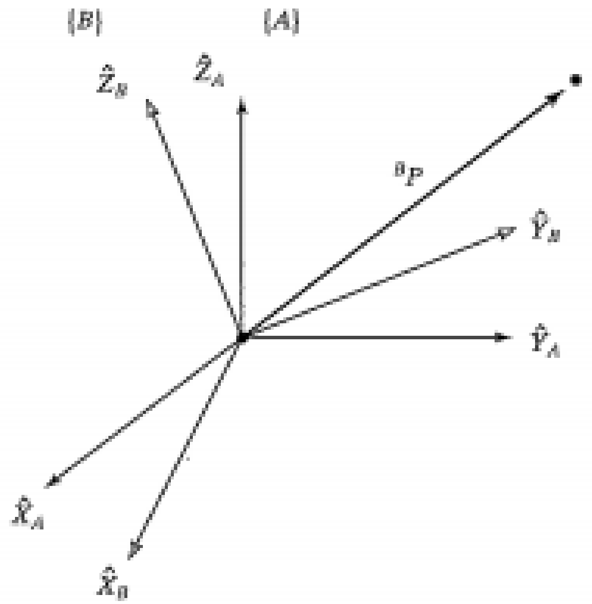
Точка **D** определенная в СК **B** $${}^{B}D = {}^{B}P \qquad {}^{A}P = {}^{B}P$$

Точка **D** определенная в СК **B** с точки зрения СК **A** $${}^{A}D = {}^{A}P_{Bo} + {}^{B}P = {}^{A}P_{Bo} + {}^{B}D$$

Точка **D** определенная в СК **A** с точки зрения СК **B** $${}^{B}D = {}^{A}D - {}^{A}P_{Bo} \quad \Rightarrow \quad {}^{B}P_{Bo} = -{}^{A}P_{Bo}$$

Описание вращения

Пусть есть две СК **A** и **B**, точки начала координат которых совпадают.



Пусть точка **D** определена в **A**.
Чтобы определить **D** в **B** нужно знать орты **A** в **B**

Орт $\mathbf{X_A}$ в СК **B**

$$^BX_A = \begin{bmatrix} \boxed{\bar{X}_A \cdot \bar{X}_B} \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Y}_B \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Z}_B \end{bmatrix}$$

Проекция вектора $\mathbf{X_A}$ на вектор $\mathbf{X_B}$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$|\bar{A}| = |\bar{B}| = 1$$

Аналогично для других векторов

$$^BD = \begin{bmatrix} ^BX_A & ^BY_A & ^BZ_A \end{bmatrix} \cdot {}^A\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_A \cdot \bar{X}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{X}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{X}_B \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Y}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{Y}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{Y}_B \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Z}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{Z}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B \end{bmatrix} \cdot {}^A\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = {}^B\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix}$$

Описание вращения

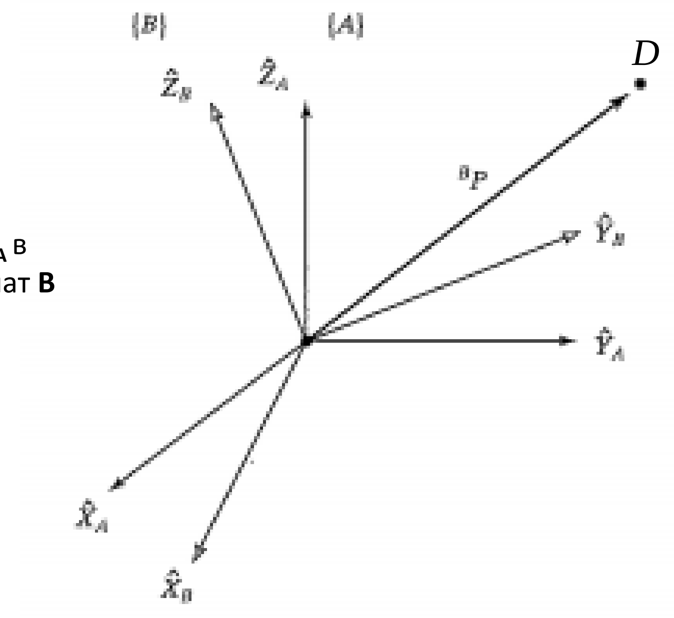
Введем единый оператор поворота

$$^{B}D = {}^{B}_{A}R \cdot {}^{A}D$$

$$^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} ^{B}X_A & ^{B}Y_A & ^{B}Z_A \end{bmatrix}$$

Описание орта $\mathbf{Z_A}$ в системе координат **B**

$$^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} \bar{X}_A \cdot \bar{X}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{X}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{X}_B \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Y}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{Y}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{Y}_B \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Z}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{Z}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B \end{bmatrix}$$



$$^{B}D = \begin{bmatrix} ^{B}X_A & ^{B}Y_A & ^{B}Z_A \end{bmatrix} \cdot {}^{A}\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_A \cdot \bar{X}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{X}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{X}_B \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Y}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{Y}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{Y}_B \\ \bar{X}_A \cdot \bar{Z}_B & \bar{Y}_A \cdot \bar{Z}_B & \bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B \end{bmatrix} \cdot {}^{A}\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование вращения

Если оператор поворота из СК A в СК B имеет вид:

$$
{}_{A}^{B}R = \begin{bmatrix} X_A \cdot X_B & Y_A \cdot X_B & Z_A \cdot X_B \\ X_A \cdot Y_B & Y_A \cdot Y_B & Z_A \cdot Y_B \\ X_A \cdot Z_B & Y_A \cdot Z_B & Z_A \cdot Z_B \end{bmatrix}
$$

То обратный поворот из B в A будет равен:

$$
{}_{B}^{A}R = \begin{bmatrix} X_B \cdot X_A & Y_B \cdot X_A & Z_B \cdot X_A \\ X_B \cdot Y_A & Y_B \cdot Y_A & Z_B \cdot Y_A \\ X_B \cdot Z_A & Y_B \cdot Z_A & Z_B \cdot Z_A \end{bmatrix}
$$

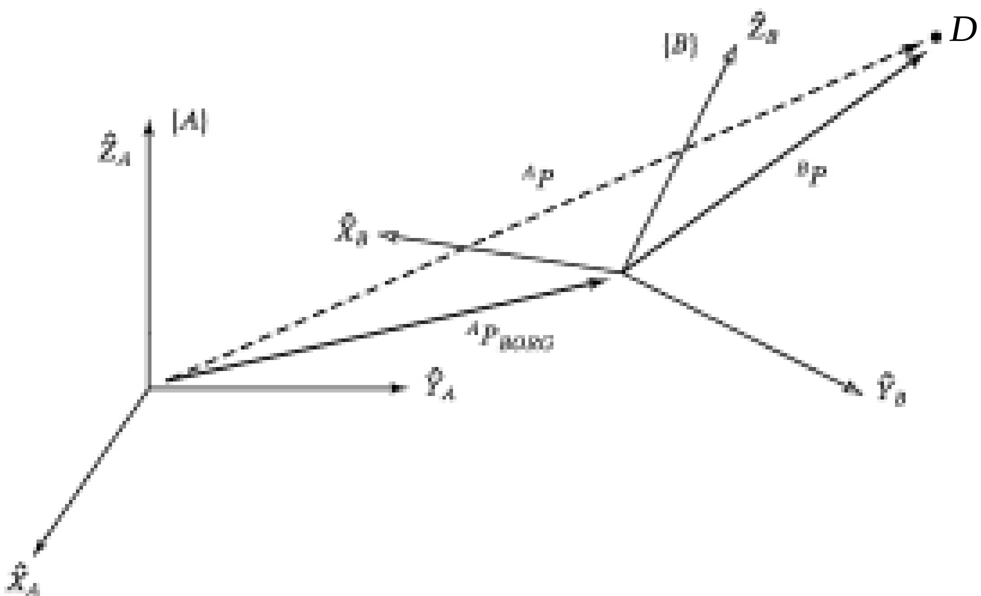
Таким образом, учитывая что все орты – единичные векторы:

$$
{}_{B}^{A}R = {}_{A}^{B}R^{T} = {}_{A}^{B}R^{-1}
$$

$$
{}^{A}D = {}_{B}^{A}R \cdot {}^{B}D
$$

$$
{}^{B}D = {}_{B}^{A}R^{T} \cdot {}^{A}D
$$

Описание преобразования поворот + смешение

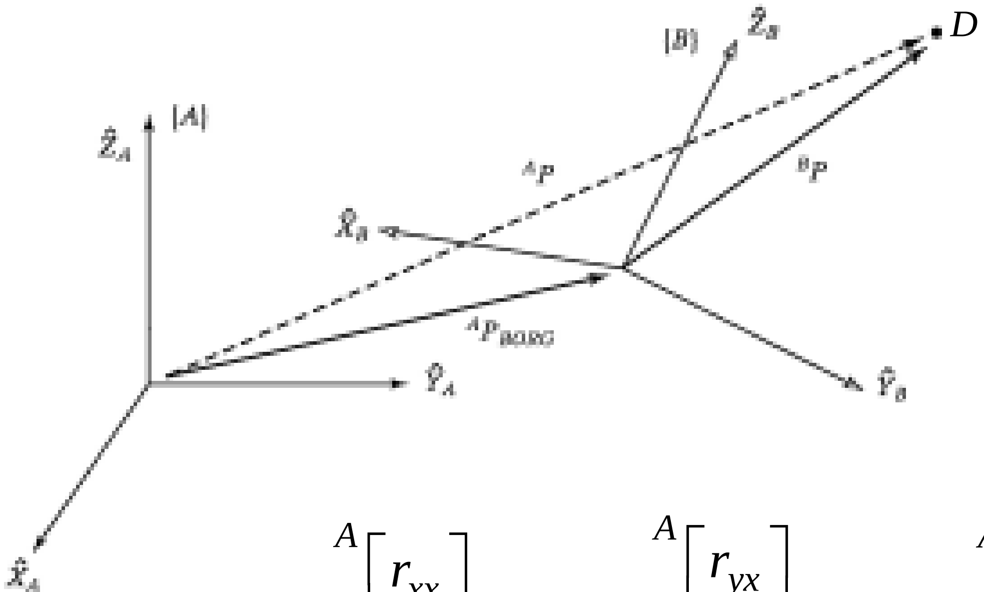


Любое изменение системы координат можно описать как последовательность из поворота и перемещения (порядок важен)

Затем перемещаем повернутую СК

$$ {}^{A}D = \underbrace{{}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}D}_{\text{Сперва выполняем вращение СК вокруг нуля}} + {}^{A}P_{Bo} = \underbrace{{}^{A}\begin{bmatrix} r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix}}_{\text{Проекция вектора }^{B}\mathbf{P}\text{ на ось }\mathbf{X_A}} \cdot {}^{B}x_D + \underbrace{{}^{A}\begin{bmatrix} r_{yx} \\ r_{yy} \\ r_{yz} \end{bmatrix}}_{\text{Проекция вектора }^{B}\mathbf{P}\text{ на ось }\mathbf{Y_A}} \cdot {}^{B}y_D + \underbrace{{}^{A}\begin{bmatrix} r_{zx} \\ r_{zy} \\ r_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{Проекция вектора }^{B}\mathbf{P}\text{ на ось }\mathbf{Z_A}} \cdot {}^{B}z_D + {}^{A}P_{Bo} \cdot 1 $$

Описание преобразования поворот + смешение



Разберем формулу

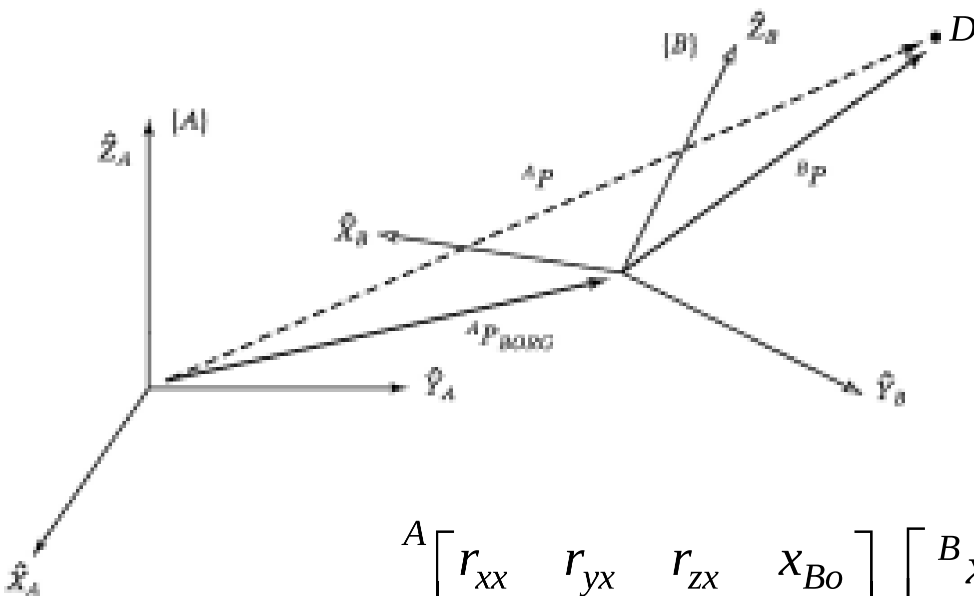
$$^{A}D = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}D + {}^{A}P_{Bo}$$

и соберем ее обратно в матричной форме

$$^{A}D = {}^{A}\begin{bmatrix} r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} \cdot {}^{B}x_D + {}^{A}\begin{bmatrix} r_{yx} \\ r_{yy} \\ r_{yz} \end{bmatrix} \cdot {}^{B}y_D + {}^{A}\begin{bmatrix} r_{zx} \\ r_{zy} \\ r_{zz} \end{bmatrix} \cdot {}^{B}z_D + {}^{A}P_{Bo} \cdot 1 =$$

$$\begin{bmatrix} {}^{A}r_{xx} \cdot {}^{B}x_D + {}^{A}r_{yx} \cdot {}^{B}y_D + {}^{A}r_{zx} \cdot {}^{B}z_D + {}^{A}x_{Bo} \\ {}^{A}r_{xy} \cdot {}^{B}x_D + {}^{A}r_{yy} \cdot {}^{B}y_D + {}^{A}r_{zy} \cdot {}^{B}z_D + {}^{A}y_{Bo} \\ {}^{A}r_{xz} \cdot {}^{B}x_D + {}^{A}r_{yz} \cdot {}^{B}y_D + {}^{A}r_{zz} \cdot {}^{B}z_D + {}^{A}z_{Bo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}r_{xx} & {}^{A}r_{yx} & {}^{A}r_{zx} & {}^{A}x_{Bo} \\ {}^{A}r_{xy} & {}^{A}r_{yy} & {}^{A}r_{zy} & {}^{A}y_{Bo} \\ {}^{A}r_{xz} & {}^{A}r_{yz} & {}^{A}r_{zz} & {}^{A}z_{Bo} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{B}x_D \\ {}^{B}y_D \\ {}^{B}z_D \\ 1 \end{bmatrix}$$

Описание преобразования поворот + смешение



Чтобы выполнить переход из любой СК в любой СК удобно вывести единый оператор преобразования

Оператор поворота

Вектор смещения

$$\begin{bmatrix} {}^{A}D \\ \hline 1 \end{bmatrix} = {}^{A}\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{yx} & r_{zx} & x_{Bo} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{zy} & y_{Bo} \\ r_{xz} & r_{yz} & r_{zz} & z_{Bo} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{B}x_D \\ {}^{B}y_D \\ {}^{B}z_D \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{Bo} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} {}^{B}D \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

Нахождение описания вектора в новой СК одним оператором

$${}^{A}D = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}D$$

Обратная операция

$${}^{B}D = {}^{B}_{A}T \cdot {}^{A}D = {}^{A}_{B}T^{-1} \cdot {}^{A}D$$

Описание системы координат в другой системе координат

Показано, что описание системы координат B определенной в СК A имеет вид:

Проекции векторов орта **B** на орт **A**

Положение начала координат **B** в пространстве **A**

$$
{}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

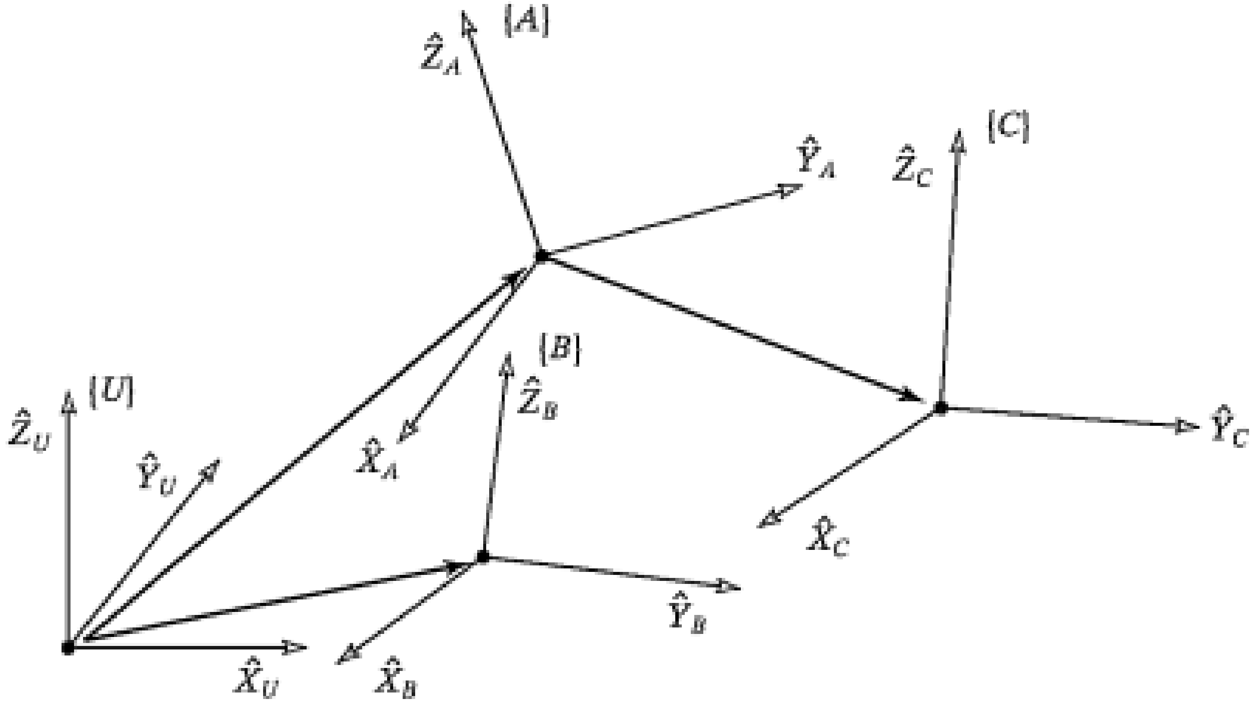
Описание пространства **B** пространстве **A**

или $\quad {}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}X_{B} & {}^{A}Y_{B} & {}^{A}Z_{B} & {}^{A}P_{B} \end{bmatrix}$

Если есть СК C определенная в СК B, то для определения C в A необходимо переопределить векторы орта в новой СК т.е.

$$
{}^{A}T_{C} = \begin{bmatrix} {}^{A}X_{C} \\ {}^{A}Y_{C} \\ {}^{A}Z_{C} \\ {}^{A}P_{C} \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} {}^{A}T_{B} \cdot {}^{B}X_{C} \\ {}^{A}T_{B} \cdot {}^{B}Y_{C} \\ {}^{A}T_{B} \cdot {}^{B}Z_{C} \\ {}^{A}T_{B} \cdot {}^{B}P_{C} \end{bmatrix}^{T} = {}^{A}T_{B} \cdot {}^{B}T_{C}
$$

Последовательность преобразований СК



Пусть известны описания систем координат $^{U}_{A}T,\ ^{U}_{B}T,\ ^{A}_{C}T$

Система C в U будет описана как $^{U}_{C}T = {}^{U}_{A}T \cdot {}^{A}_{C}T$

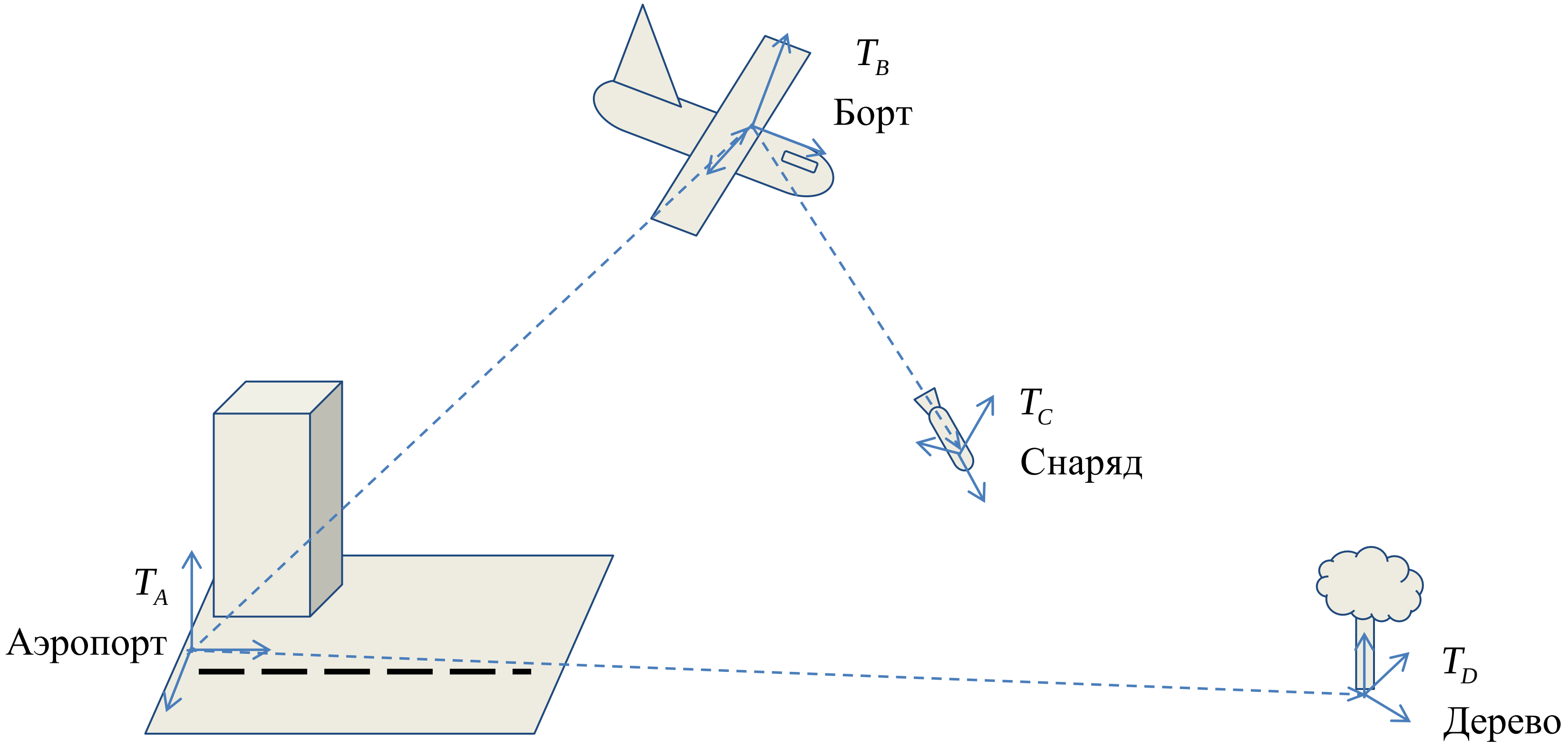
Система C в B будет описана как $^{B}_{C}T = {}^{B}_{U}T \cdot {}^{U}_{A}T \cdot {}^{A}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1} \cdot {}^{U}_{A}T \cdot {}^{A}_{C}T$

Система B в C будет описана как $^{C}_{B}T = {}^{B}_{C}T^{-1} = \left({}^{U}_{B}T^{-1} \cdot {}^{U}_{A}T \cdot {}^{A}_{C}T \right)^{-1} = {}^{A}_{C}T^{-1} \cdot {}^{U}_{A}T^{-1} \cdot {}^{U}_{B}T$

Пример

Диспетчер аэропорта работает в своей системе координат а пилот – в своей. Чтобы общаться они должны понимать представления друг друга.

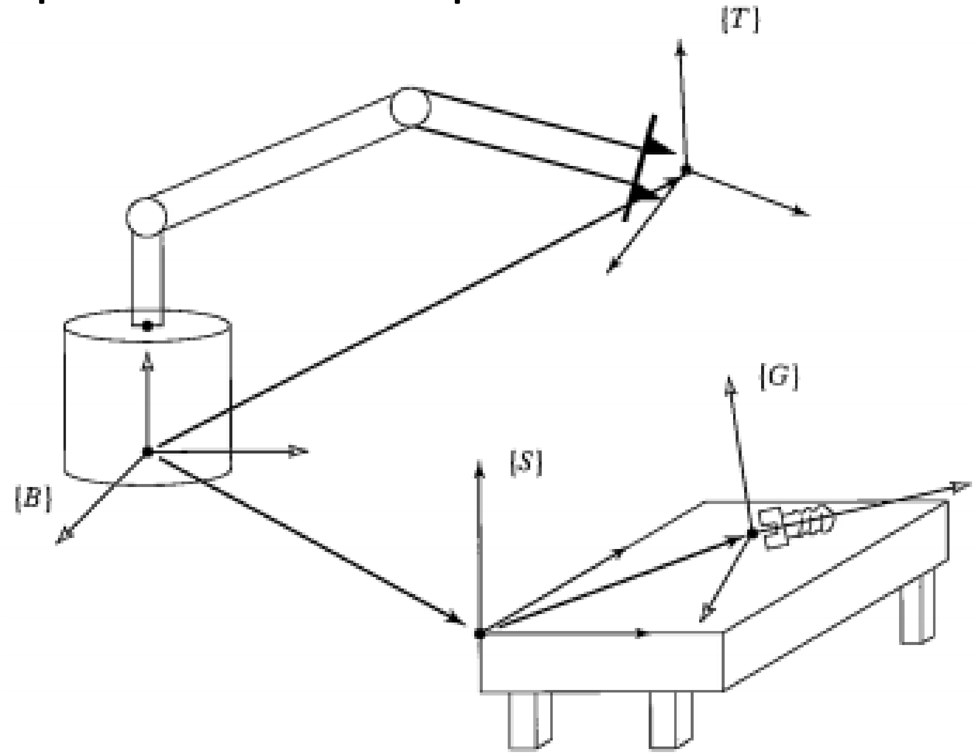
Тоже с парой борт-снаряд. Дерево (ориентиры на местности) легко могут быть представлены в СК карты, известной всем, но неудобной никому.



Системы координат
типичные для промышленной робототехники

B (base) - база робота
T (tool, TCP) - инструмент
S (space) - рабочее пространство
G (gear) - деталь

Также встречаются
world - мир
F (flange) - точка крепления инструмента



Описание базы робота с точки зрения СК инструмента

$$ {}^{T}T_{B} = \left({}^{B}T_{T} \right)^{-1} $$

Описание СК инструмента с точки зрения базы робота

Описание детали в СК базы робота

$$ {}^{B}T_{G} = {}^{B}T_{S} \cdot {}^{S}T_{G} $$

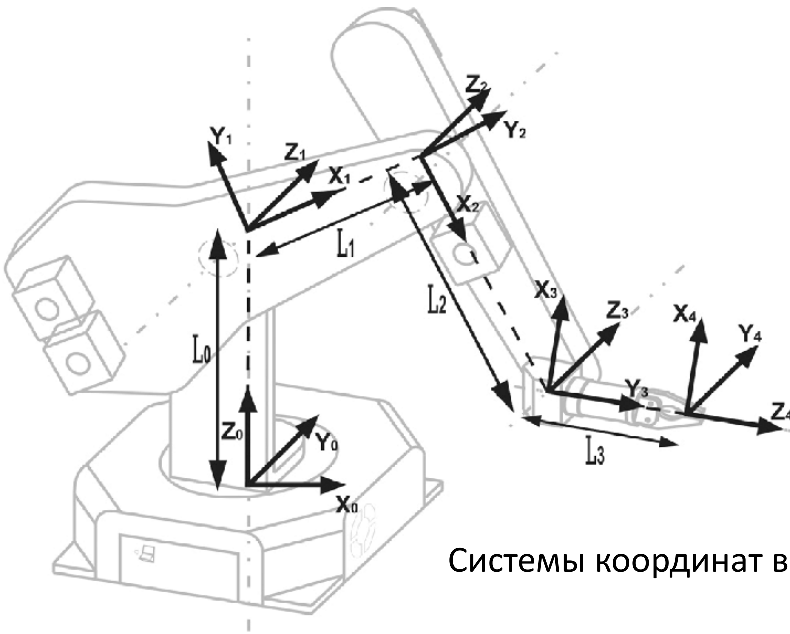
Описание детали в СК стола

Описание стола в СК базы робота

Описание детали с точки зрения инструмента

$$ {}^{T}T_{G} = \left({}^{B}T_{T} \right)^{-1} \cdot {}^{B}T_{S} \cdot {}^{S}T_{G} $$

Как положение механизма связано с положением инструмента?



Концепция:
Робот состоит из жестких элементов – локтей (links), соединенных подвижными суставами (joints).

Привяжем к каждому локтю систему координат и определим ее с пространстве системы координат соседнего локтя, начиная от закрепленного элемента.

Описание СК локтя 1 в СК базы (0) $\quad {}^{0}T_1(\theta_0) \quad$ Положение сустава 0

Системы координат выбираем так, чтобы оператор перехода удобно вычислялся.

Например используем соглашение **Денавита-Хартенберга (ДХ)**

Система координат инструмента будет определятся как произведение операторов перехода между локтями

$$ {}^{0}T_T(\Theta) = {}^{0}T_1(\theta_1) \cdot {}^{1}T_2(\theta_2) \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}T_n(\theta_n) \cdot {}^{n}T_T $$

Вектор положений суставов (поза). Описывает положение инструмента в «пространстве суставов» (joint space)

$$ \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \ldots \\ \theta_n \end{bmatrix} $$

Матричные операция в Matcad

$$X = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix}9\\8\\7\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}10 & 11 & 12\\13 & 14 & 15\\16 & 17 & 18\end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$X \times Y = \begin{bmatrix}-10\\20\\-10\end{bmatrix}$$

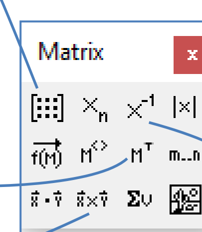
$$A \cdot X = \begin{bmatrix}14\\32\\23\end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix}84 & 90 & 96\\201 & 216 & 231\\174 & 189 & 204\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}-1.78 & 0.89 & -0.11\\1.56 & -0.78 & 0.22\\-0.11 & 0.22 & -0.11\end{bmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix}9\\8\\7\end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 0\end{pmatrix} \quad := \begin{pmatrix}10 & 11 & 12\\13 & 14 & 15\\16 & 17 & 18\end{pmatrix}$$



$$X^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$X \times Y = \begin{pmatrix}-10\\20\\-10\end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix}14\\32\\23\end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix}84 & 90 & 96\\201 & 216 & 231\\174 & 189 & 204\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-1.778 & 0.889 & -0.111\\1.556 & -0.778 & 0.222\\-0.111 & 0.222 & -0.111\end{pmatrix}$$

Матричные операция в Python

```
import numpy as np

X = np.array([1, 2, 3])
Y = np.array([9, 8, 7])
A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6],
              [7, 8, 0]])
B = np.array(([10, 11, 12],
              [13, 14, 15],
              [16, 17, 18]))
```

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>>> X.transpose()
array([1, 2, 3])
```

$$X \times Y = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ -10 \end{bmatrix}$$

```
>>> np.cross(X, Y)
array([-10,  20, -10])
```

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$$

```
>>> np.matmul(A, X)
array([14, 32, 23])
```

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 84 & 90 & 96 \\ 201 & 216 & 231 \\ 174 & 189 & 204 \end{bmatrix}$$

```
>>> np.matmul(A, B)
array([[ 84,  90,  96],
       [201, 216, 231],
       [174, 189, 204]])
```

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.78 & 0.89 & -0.11 \\ 1.56 & -0.78 & 0.22 \\ -0.11 & 0.22 & -0.11 \end{bmatrix}$$

```
>>> np.linalg.inv(A)
array([[-1.77777778,  0.88888889, -0.11111111],
       [ 1.55555556, -0.77777778,  0.22222222],
       [-0.11111111,  0.22222222, -0.11111111]])
```

Матричные операция в Mathlab

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

```
X = [1;2;3];
Y = [9;8;7];

A = [1,2,3; 4,5,6; 7,8,0];
B = [10,11,12;
    13,14,15;
    16,17,18];
```

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

X'

$$X \times Y = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ -10 \end{bmatrix}$$

cross(X,Y)

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$$

A*X

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 84 & 90 & 96 \\ 201 & 216 & 231 \\ 174 & 189 & 204 \end{bmatrix}$$

A*B

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.78 & 0.89 & -0.11 \\ 1.56 & -0.78 & 0.22 \\ -0.11 & 0.22 & -0.11 \end{bmatrix}$$

inv(A)

Матричные операция в Coppeliasim Lua

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

```
X = Vector({1, 2, 3})
Y = Vector({9, 8, 7})
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

```
A = Matrix(3, 3, {1,2,3,4,5,6,7,8,0})
B = Matrix3x3({10,11,12,13,14,15,16,17,18})
```

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
Matrix.print(X:t())
```

$$X \times Y = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ -10 \end{bmatrix}$$

```
Matrix.print(Vector({
    X[2]*Y[3]-X[3]*Y[2],
    X[3]*Y[1]-X[1]*Y[3],
    X[1]*Y[2]-X[2]*Y[1]}))
```

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$$

```
Matrix.print(A*X)
```

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 84 & 90 & 96 \\ 201 & 216 & 231 \\ 174 & 189 & 204 \end{bmatrix}$$

```
Matrix.print(A*B)
```

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.78 & 0.89 & -0.11 \\ 1.56 & -0.78 & 0.22 \\ -0.11 & 0.22 & -0.11 \end{bmatrix}$$

```
Matrix.print(A:inv())
```

выдаст ошибку если A:det() == 0

https://youtu.be/2OTvBz1u4V0

Методы описания ориентации

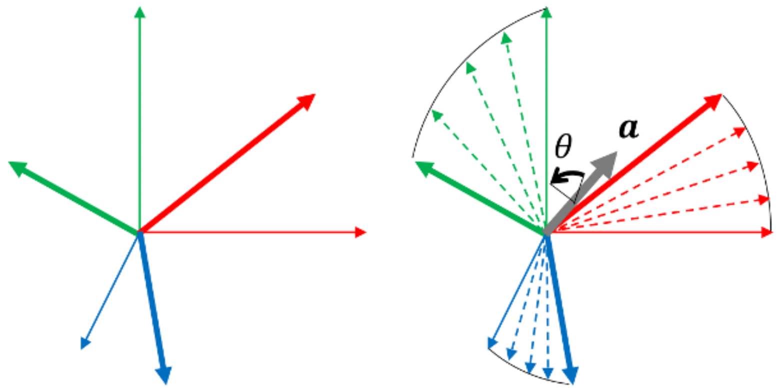
<u>Оператором поворота</u>
(ориентация приравнивается к повороту СК в нужное положение)
Преимущества: устойчивость; простота
Недостаток: 9 чисел для записи; не очевидность

<u>Вектор-угол</u>
Преимущества: простота; интуитивность
Недостаток: сложность математических операций

<u>Фиксированные повороты; углы Эйлера и т.п.</u>
Преимущества: понятность; краткость
Недостатки: сингулярность (складывание рамок)

<u>Кватернионы</u>
Преимущества: математическая однозначность
Недостаток: неинтуитивность

Представление поворота в формате вектор-угол



$$\cos\theta = 0.5\cdot\left(r_{1,1} + r_{2,2} + r_{3,3} - 1\right)$$

$$u_x = \frac{r_{3,2} - r_{2,3}}{\sqrt{\left(r_{3,2} - r_{2,3}\right)^2 + \left(r_{1,3} - r_{3,1}\right)^2 + \left(r_{2,0} - R_{0,2}\right)^2}}$$

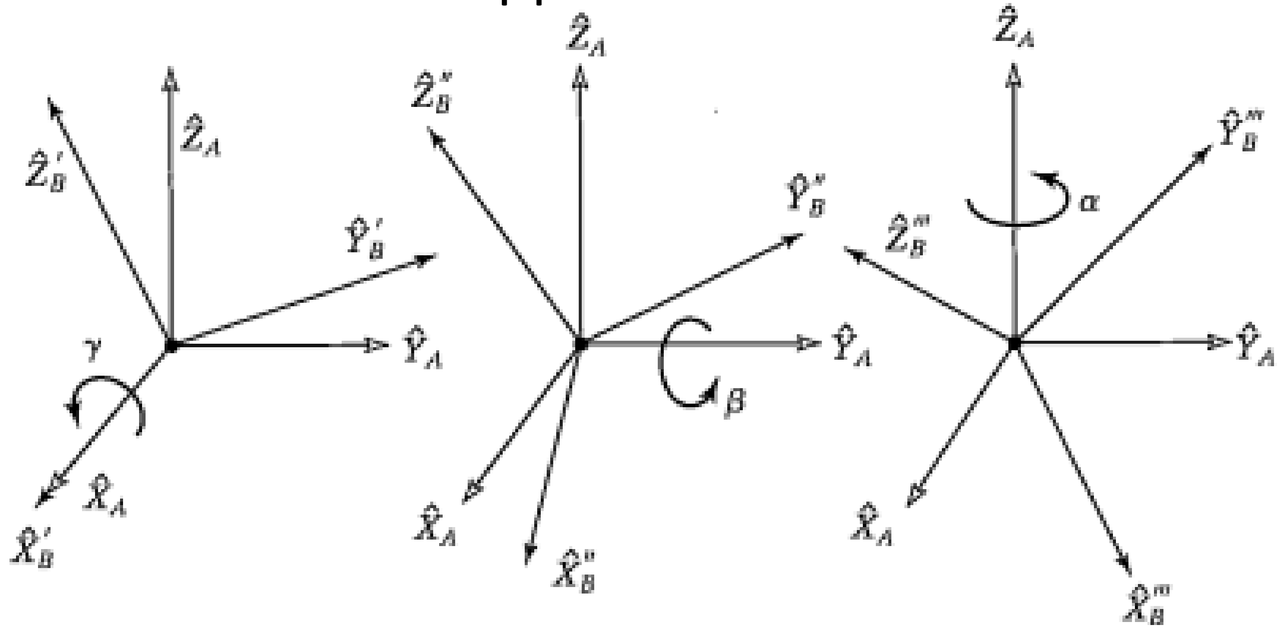
$$R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$u_y = \frac{r_{1,3} - r_{3,1}}{\sqrt{\left(r_{3,2} - r_{2,3}\right)^2 + \left(r_{1,3} - r_{3,1}\right)^2 + \left(r_{2,0} - R_{0,2}\right)^2}}$$

$$u_z = \frac{r_{2,1} - r_{1,2}}{\sqrt{\left(r_{3,2} - R_{2,3}\right)^2 + \left(r_{1,3} - r_{3,1}\right)^2 + \left(r_{2,0} - r_{0,2}\right)^2}}$$

$$R = \begin{vmatrix} \cos\theta + u_x^2\left(1-\cos\theta\right) & u_x u_y\left(1-\cos\theta\right) - u_z\sin\theta & u_x u_z\left(1-\cos\theta\right) + u_y\sin\theta \\ u_x u_y\left(1-\cos\theta\right) + u_z\sin\theta & \cos\theta + u_y^2\left(1-\cos\theta\right) & u_y u_z\left(1-\cos\theta\right) - u_x\sin\theta \\ u_x u_z\left(1-\cos\theta\right) - u_y\sin\theta & u_y u_z\left(1-\cos\theta\right) + u_x\sin\theta & \cos\theta + u_z^2\left(1-\cos\theta\right) \end{vmatrix}$$

Последовательность поворотов относительно неподвижной СК



$$R = R_Z(\alpha)\cdot R_Y(\beta)\cdot R_X(\gamma) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(a) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)-\sin(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma)+\sin(\alpha)\sin(\gamma) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)+\cos(\alpha)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma)-\cos(\alpha)\sin(\gamma) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\beta)\cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

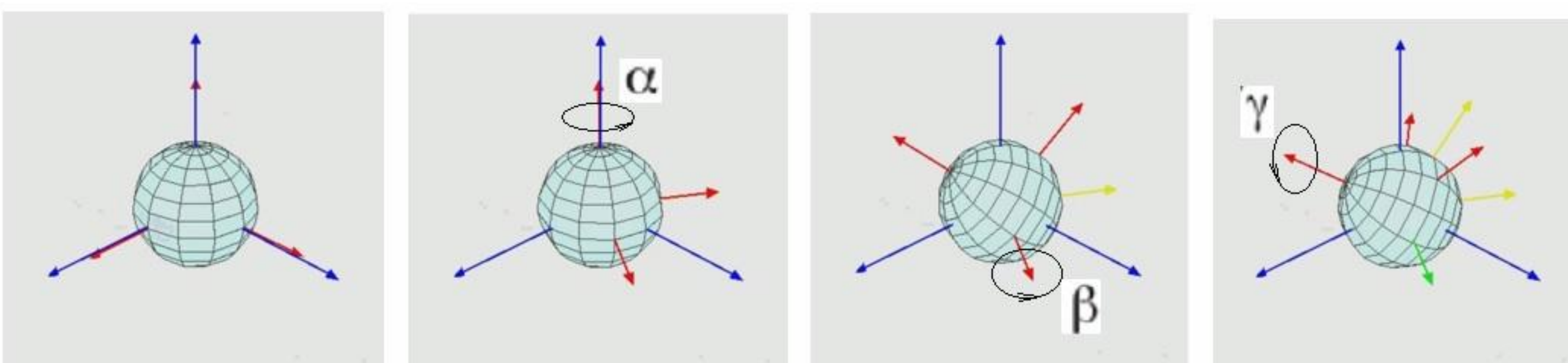
Полная последовательность поворота на углы Эйлера

(Вокруг Z, X и опять Z собственной СК)

$$R = R_Z(\gamma)\cdot R_X(\beta)\cdot R_Z(\alpha) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\gamma)-\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\gamma) & -\cos(\gamma)\sin(\alpha)-\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\beta)\sin(\gamma) \\ \cos(\beta)\cos(\gamma)\sin(\alpha)+\cos(\alpha)\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)-\sin(\alpha)\sin(\gamma) & -\cos(\gamma)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$



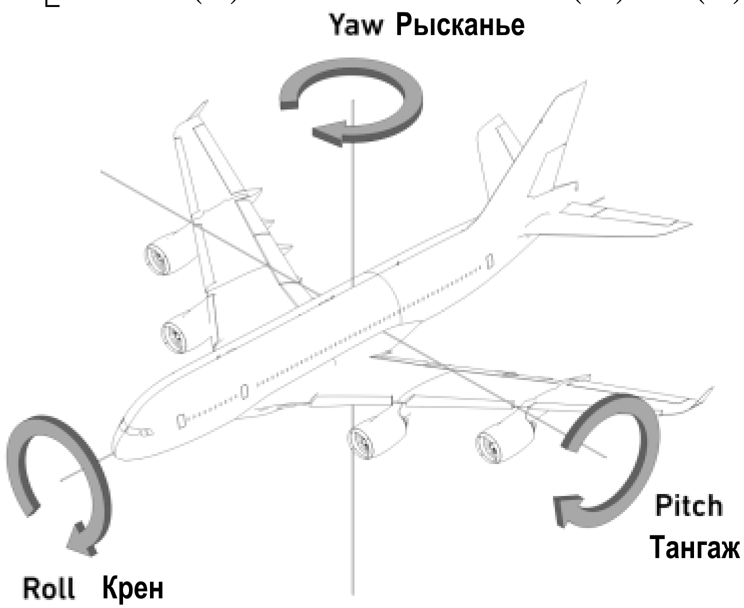
Полная последовательность поворота на углы Тейта-Брауна

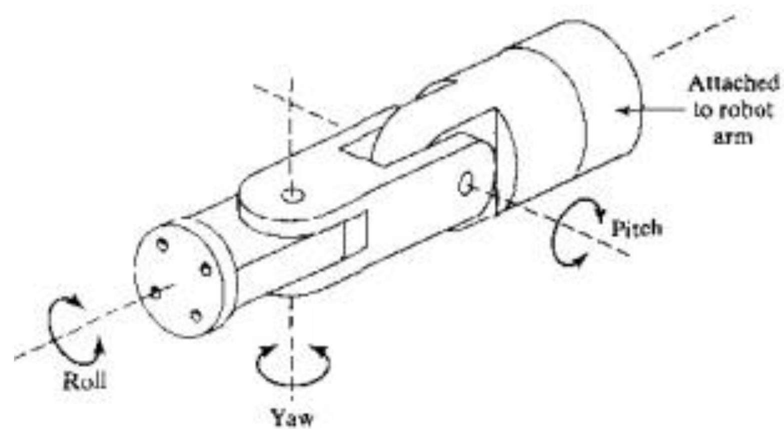
(Повороты вокруг Z, Y и X)

$$R = R_Z(\phi)\cdot R_Y(\theta)\cdot R_X(\psi) =$$

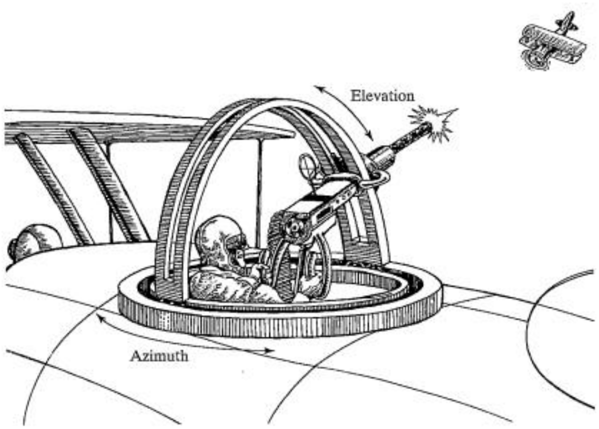
$$= \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi)-\cos(\psi)\sin(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi)+\sin(\psi)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi)+\cos(\psi)\cos(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi)-\sin(\psi)\cos(\phi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$





Проблема складывания рамок



при определенных поворотах невозможность найти производные. Скорость вращения становится бесконечной

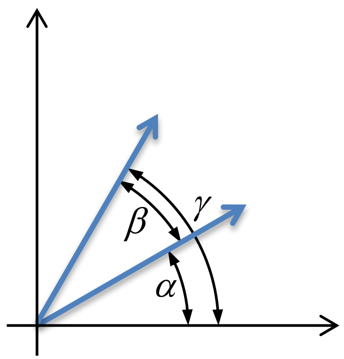
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi)-\cos(\psi)\sin(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi)+\sin(\psi)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi)+\cos(\psi)\cos(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi)-\sin(\psi)\cos(\phi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\cos(\theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sin(\psi)\cos(\phi)-\cos(\psi)\sin(\phi) & \cos(\psi)\cos(\phi)+\sin(\psi)\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\psi)\sin(\phi)+\cos(\psi)\cos(\phi) & \cos(\psi)\sin(\phi)-\sin(\psi)\cos(\phi) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{при } \cos(\theta) = 0$$

Кватернионы

Двумерный случай



$$\gamma = \alpha + \beta$$

Трехмерный случай

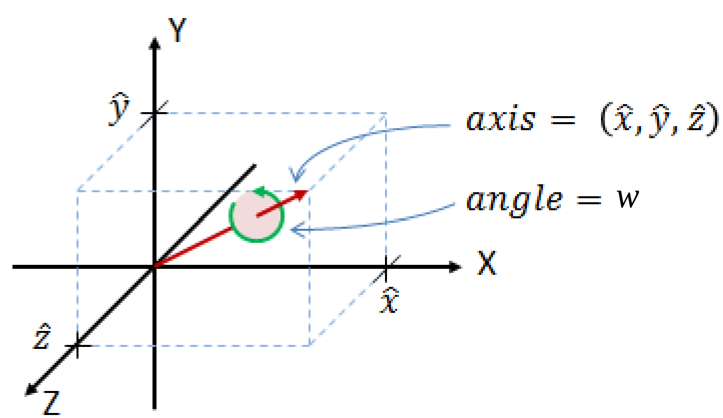
$$Q_{\alpha(\beta,\ \gamma)} = i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z + w$$

$$= \left| \boxed{x \quad y \quad z} \quad \boxed{w} \right| = \left| \bar{v} \quad w \right|$$

Ось поворота (вектор), длина пропорциональна углу поворота

Коэффициент пропорциональный углу поворота

$$Q_{\gamma} = Q_{\alpha} + Q_{\beta} = \left| \left(v_{\alpha} \times v_{\beta} + w_{\alpha} \cdot v_{\beta} + w_{\beta} \cdot v_{\alpha} \right) \quad \left(w_{\alpha} \cdot w_{\beta} - v_{\alpha} \cdot v_{\beta} \right) \right|$$



Кватернионы

Восстановление углов Эйлера из кватерниона

$$\begin{vmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \arctan 2\left(2\cdot\left(w\cdot x + y\cdot z\right), 1-2\cdot\left(x^2+y^2\right)\right) \\ -\frac{\pi}{2} + 2\cdot\arctan 2\left(\sqrt{1+2\cdot\left(w\cdot y - x\cdot z\right)}, \sqrt{1-2\cdot\left(w\cdot y - x\cdot z\right)}\right) \\ \arctan 2\left(2\cdot\left(w\cdot z + x\cdot y\right), 1-2\cdot\left(y^2+z^2\right)\right) \end{vmatrix}$$

Расчет кватерниона из углов Эйлера

$$Q = \begin{vmatrix} \cos(\phi/2)\cdot\cos(\theta/2)\cdot\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\cdot\sin(\theta/2)\cdot\sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2)\cdot\cos(\theta/2)\cdot\cos(\psi/2) - \cos(\phi/2)\cdot\sin(\theta/2)\cdot\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\cdot\sin(\theta/2)\cdot\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\cdot\cos(\theta/2)\cdot\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\cdot\cos(\theta/2)\cdot\sin(\psi/2) - \sin(\phi/2)\cdot\sin(\theta/2)\cdot\cos(\psi/2) \end{vmatrix}$$

Ориентация захвата по матрице поворота

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi)-\cos(\psi)\sin(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi)+\sin(\psi)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & \sin(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi)+\cos(\psi)\cos(\phi) & \cos(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi)-\sin(\psi)\cos(\phi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\psi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

Следовательно:

$$R_{31} = -\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \theta_1 &= -\arcsin(R_{31}) \\ \theta_2 &= \pi + \arcsin(R_{31}) \end{aligned}$$

$$\frac{R_{32}}{R_{33}} = \tan(\psi) \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \arctan 2\left(\frac{R_{32}}{\cos(\theta_1)}, \frac{R_{33}}{\cos(\theta_1)}\right) \\ \psi_2 &= \arctan 2\left(\frac{R_{32}}{\cos(\theta_2)}, \frac{R_{33}}{\cos(\theta_2)}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{R_{21}}{R_{11}} = \tan(\phi) \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \phi_1 &= \arctan 2\left(\frac{R_{21}}{\cos(\theta_1)}, \frac{R_{11}}{\cos(\theta_1)}\right) \\ \phi_2 &= \arctan 2\left(\frac{R_{21}}{\cos(\theta_2)}, \frac{R_{11}}{\cos(\theta_2)}\right) \end{aligned}$$