Disciplina de Sistemas de Controle 2 (semestre 2020/2)
Professor: Flábio Bardemaker
Aluno: Elvis Fernandes
Data: 26/11/2020

Atividade: Solução do exercício 7 da lista de exercícios sobre transformada Z.

7. Dada a seguinte equação às diferenças:

$$y \cdot (k+1) - 0{,}2 \cdot y(k) = e(k)$$

Onde:

$e(k) = 0$ para $k < 0$

$e(k) = 10$ para $k = 0$

$e(k) = 15$ para $k \geq 1$

$y(0) = 0$

Elabore um programa no matlab que utilize esta equação e permita visualizar graficamente (kmax = 20) os valores de y(k)) e compare com os valores obtidos a partir da expressão exata de y(k).

Compare os valores obtidos com o programa com os da expressão exata.

Sec. 2-6 *z* Transform Method for Solving Difference Equations 53

TABLE 2-3 *z* TRANSFORMS OF $x(k+m)$ AND $x(k-m)$

Discrete function	z Transform
$x(k+4)$	$z^4X(z) - z^4x(0) - z^3x(1) - z^2x(2) - zx(3)$
$x(k+3)$	$z^3X(z) - z^3x(0) - z^2x(1) - zx(2)$
$x(k+2)$	$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$
$x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
$x(k)$	$X(z)$
$x(k-1)$	$z^{-1}X(z)$
$x(k-2)$	$z^{-2}X(z)$
$x(k-3)$	$z^{-3}X(z)$
$x(k-4)$	$z^{-4}X(z)$

Resolução:

1) Tomando a Transformada dos dois lados e usando a linearidade temos:

$$y \cdot (k+1) - 0{,}2 \cdot y(k) = e(k)$$

$$y \cdot (k+1) - 0{,}2 \cdot y(k) = 10 \cdot \delta(k) + 15(u-1)$$

$$y \cdot (k+1) = zY(z) - zy(0) = zY(z) - z \cdot (0) = zY(z)$$

$$y(k) = Y(z)$$

$$e(k) = 10 + \frac{15 \cdot z \cdot z^{-1}}{z-1} = 10 + \frac{15}{z-1} = \frac{10z - 10 + 15}{z-1} = \frac{10z+5}{z-1}$$

$$zY(z) - zy(0) - 0{,}2Y(z) = \frac{10z+5}{z-1}$$

$$Y(z)(z-0{,}2) = \frac{10z+5}{z-1}$$

2) Função de transferência:

$$Y(z) = \frac{10z+5}{(z-0{,}2)(z-1)}$$

3) Método das frações parciais de Y(z)/z - Transformada Z inversa

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{10z+5}{z(z-0{,}2)(z-1)} = \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{10z+5}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}2}\right)$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{z} = \frac{10z+5}{z^3 - 1{,}2z^2 + 0{,}2z}}$$

4) Achando os valores dos coeficientes no matlab:

Código:

```
clc
clear
% Solução da equação recursiva
% solução exata -> y(k)
% y(0)=0;
% Y(z)=( 10z + 5 ) / ( z^2 -1,2z + 0,2 )

% Método da frações parciais de Y(z)/z - Transformada Z inversa
% X(z)/z = ( 10z + 5 ) /( z^3 -1,2z^2 + 0,2z )
num = [10 5];
den = [1 -1.2 0.2 0];
[r,p,k] = residue(num,den)
```

Valores dos coeficientes:

```
r =
   18.7500
  -43.7500
   25.0000

p =

    1.0000
    0.2000
         0
```

5) Calculando o valor dos coeficientes aplicando frações parciais:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{10z+5}{z(z-0{,}2)(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-0{,}2} + \frac{C}{z-1}$$

$A = 0$
$B = 0{,}2$
$C = 1$

$$A = \frac{10z+5}{(z-0{,}2)(z-1)}_{z=0} = \frac{10\cdot 0+5}{(0-0{,}2)(0-1)} = 25$$

$$B = \frac{10z+5}{z(z-1)}_{z=0{,}2} = \frac{10\cdot 0{,}2+5}{0{,}2(0{,}2-1)} = -43{,}75$$

$$C = \frac{10z+5}{z(z-0,2)}_{z=1} = \frac{10 \cdot 0,2 + 5}{1(1-0,2)} = 18,75$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{10z+5}{z(z-0,2)(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-0,2} + \frac{C}{z-1} = \frac{25}{z} + \frac{-43,75}{z-0,2} + \frac{18,75}{z-1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{25 \cdot z}{z} + \frac{-43,75 \cdot z}{z-0,2} + \frac{18,75 \cdot z}{z-1}$$

6) Encontrando a solução exata:

Aplicando a transformada inversa:

$$Z^{-1} = y(k) = 25 - 43,75\frac{z}{z-0,2} + 18,75\frac{z}{z-1}$$

$$Z^{-1} = y(k) = 25z^{-1} - 43,75\frac{1}{1-0,2z^{-1}} + 18,75\frac{1}{1-1}z^{-1}$$

$$Z^{-1} = y(k) = 25\delta(k) - 43,75(0,2)^k + 18,75(1)^k$$

7) Solução exata:

$$\boxed{y(k) = 25\delta(k) - 43,75(0,2)^k + 18,75(1)^k}$$

8) Plotando o gráfico da solução exata:

Código:

```
% x(k) = 25δ(k)-43,75(0,2)^k+18,75(1)^k

k = 0:20;
delta = zeros(1,length(k));
delta(1) = 1;    % para k=0

% solução exata
xe1 = 18.75*1.^k -43.75*0.2.^k;
xe = 25*delta+xe1;
plot(k,xe,'*')
```

9) Plotando o gráfico a partir da equação recursiva:

$$y \cdot (k+1) - 0{,}2 \cdot y(k) = e(k)$$
$$y \cdot (k+1) = e(k) + 0{,}2 \cdot y(k)$$

$$\boxed{yr \cdot (k+1) = u(j) + 0{,}2 \cdot yr(j)}$$

Código:

```
% comportamento de x(k) a partir da equação recursiva
%y(k+1)-0,2y(k)=e(k)
%y(k+1)=e(k)+0,2y(k)
%yr(j+1)=u(j)+0,2*yr(j)

% entrada
u = delta;
% condições iniciais
yr(1) = 0;      % para k=0
yr(2) = 15;
u(1)=10;

for i=2:length(k)
    u(i)=15;
end
for j = 1:length(k)-1
    yr(j+1)=u(j)+0.2*yr(j);
end

figure(1)
plot(k,yr,'o')

hold off
```

10) Encontrando os valores da resposta para valores de k de 0 até 20

Código:

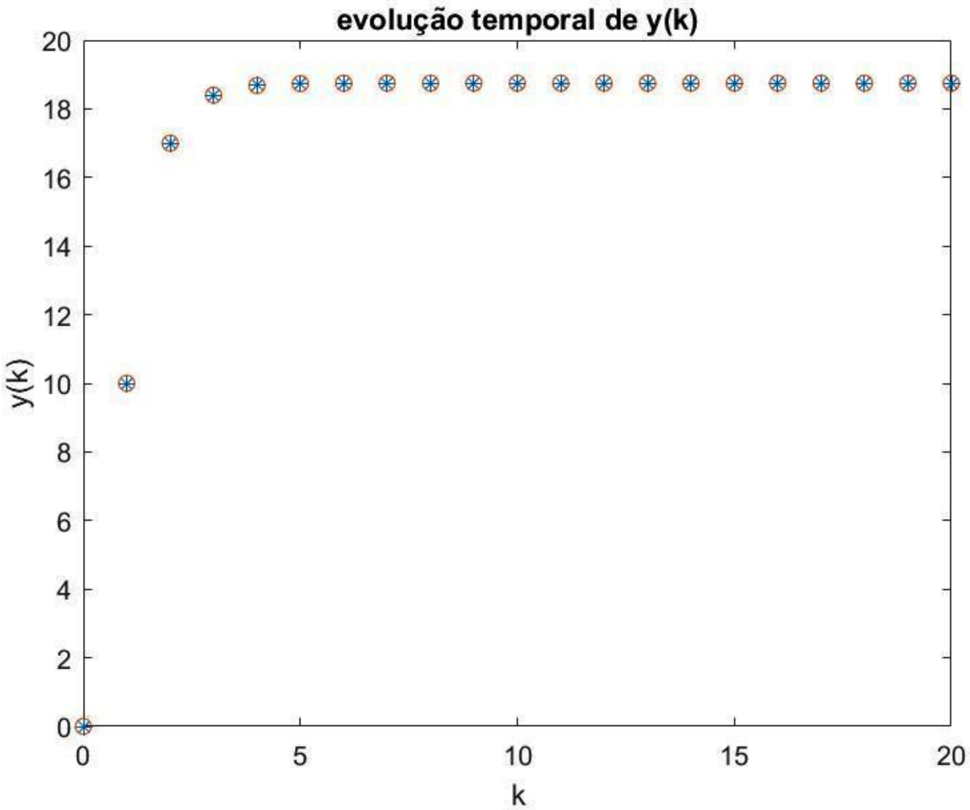
```
u = [1 zeros(1,20)];
x = filter(num, den,u)

x =

  Columns 1 through 11

   10.0000   17.0000   18.4000   18.6800   18.7360   18.7472   18.7494   18.7499   18.7500
18.7500   18.7500

  Columns 12 through 21

   18.7500   18.7500   18.7500   18.7500   18.7500   18.7500   18.7500   18.7500   18.7500
18.7500
```

Tabela 1 - Valores

$y(k)$	Valor
$y(0)$	10.0000
$y(1)$	17.0000
$y(2)$	18.4000
$y(3)$	18.6800
$y(4)$	18.7360
$y(5)$	18.7472
$y(6)$	18.7494
$y(7)$	18.7499
$y(8)$	18.7500
$y(9)$	18.7500
$y(10)$	18.7500
$y(11)$	18.7500
$y(12)$	18.7500
$y(13)$	18.7500
$y(14)$	18.7500
$y(15)$	18.7500
$y(16)$	18.7500
$y(17)$	18.7500
$y(18)$	18.7500
$y(19)$	18.7500

11) Código Final e visualização grafica (kmax = 20) os valores de y(k))

```
clc
clear
% Solução da equação recursiva
% solução exata -> y(k)
% y(0)=0;
% Y(z)=( 10z + 5 ) / ( z^2 -1,2z + 0,2 )

% Método da frações parciais de Y(z)/z - Transformada Z inversa
% X(z)/z = ( 10z + 5 ) /( z^3 -1,2z^2 + 0,2z )
num = [10 5];
den = [1 -1.2 0.2 0];
[r,p,k] = residue(num,den)

% x(k) = 25?(k)-43,75(0,2)^k+18,75(1)^k

k = 0:20;
delta = zeros(1,length(k));
delta(1) = 1;    % para k=0

% solução exata
xe1 = 18.75*1.^k -43.75*0.2.^k;
xe = 25*delta+xe1;
plot(k,xe,'*')

hold on

% comportamento de x(k) a partir da equação recursiva
%y(k+1)-0,2y(k)=e(k)
%y(k+1)=e(k)+0,2y(k)
%yr(j+1)=u(j)+0,2*yr(j)

% entrada
u = delta;
% condições iniciais
yr(1) = 0;       % para k=0
yr(2) = 15;
u(1)=10;

for i=2:length(k)
    u(i)=15;
end
for j = 1:length(k)-1
    yr(j+1)=u(j)+0.2*yr(j);
end

figure(1)
plot(k,yr,'o')
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
title('evolução temporal de y(k)')

hold off

u = [1 zeros(1,20)];
x = filter(num, den,u)
```


evolução temporal de y(k)
y(k)
k
0
5
10
15
20
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20