Disciplina de Sistemas de Controle 2 (semestre 2020/2)
Professor: Flábio Bardemaker
Aluno: Elvis Fernandes
Data: 30/11/2020

**Parte 1: Dado o sistema do slide 20 da apresentação 04 - Função de Transferência Amostrada**:

Considere RC = 0,083 e T = 0,1 seg

Com o Matlab ou equivalente:

1) **Obtenha a função de transferência discreta equivalente;**

Resolução 1) :

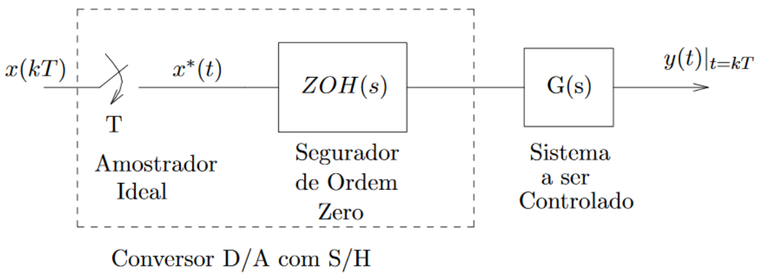



Figura 1 - Sistema amostrado com conversor D/A e S/H

**1.1) Definindo a função auxiliar:**

$$H_{(s)} = ZOH_{(s)}G_{(s)}$$

**1.2) Encontrar a função de transferência discreta $H_{(z)}$ que corresponde à função $H_{(s)}$.**

$$H_{(z)} = Z[H_{(s)}]$$

$$ZOH_{(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$H_{(z)} = Z[ZOH_{(s)}G_{(s)}] = Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s}G_{(s)}\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G_{(s)}}{s}\right]$$

$$e^{-T/RC} = e^{-0,1/0,083} = 0,30$$

$$H_{(z)} = \frac{1 - e^{-T/RC}}{z - e^{-T/RC}} = \frac{1 - 0,30}{z - 0,30} = \frac{0,70}{z - 0,30}$$

**1.3)Obtendo a função de transferência discreta equivalente no matlab**

```
clc
clear all
% Função de Transferência Contínua

Gs=tf((1),[0.083 1]);

% Período de amostragem

T = 0.1;

% Função de Transferência Discreta

Gz=c2d(Gs,T)
```

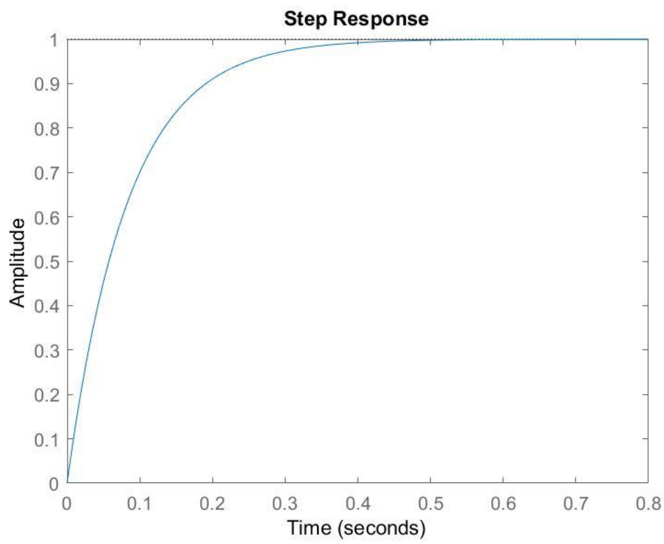
**0.7003**
**----------**
**z - 0.2997**

**Sample time: 0.1 seconds**
**Discrete-time transfer function.**

**2) Verifique a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário com a função step;**

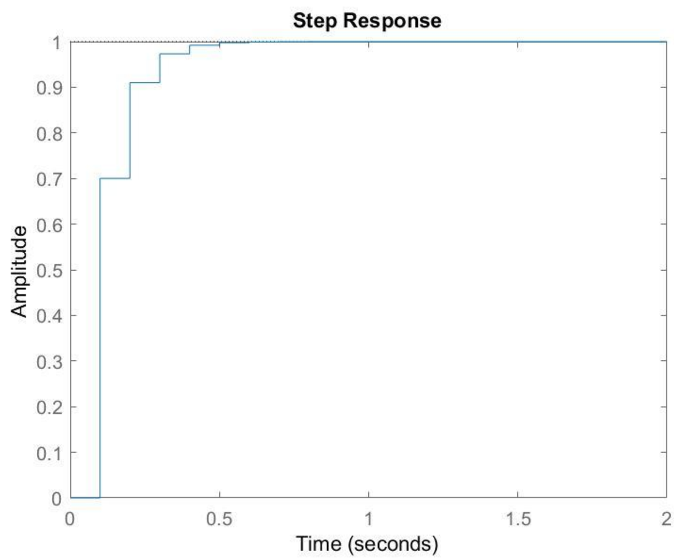
Resolução 2) :

```
step(Gs) %The step response reflects the discretization of the model, showing the response computed every 0.2 seconds.
```




Resolução 2) :

```
step(Gz) %The step response reflects the discretization of the model, showing the response computed every 0.2 seconds.
```



**3) Obtenha a equação recursiva do sistema;**

Resolução 3)

Aplicando a propriedade do deslocamento para um circuito RC:

$$y(kT + T) - ay(kT) = be(kT)$$

$$y(kT + T) = be(kT) + ay(kT)$$

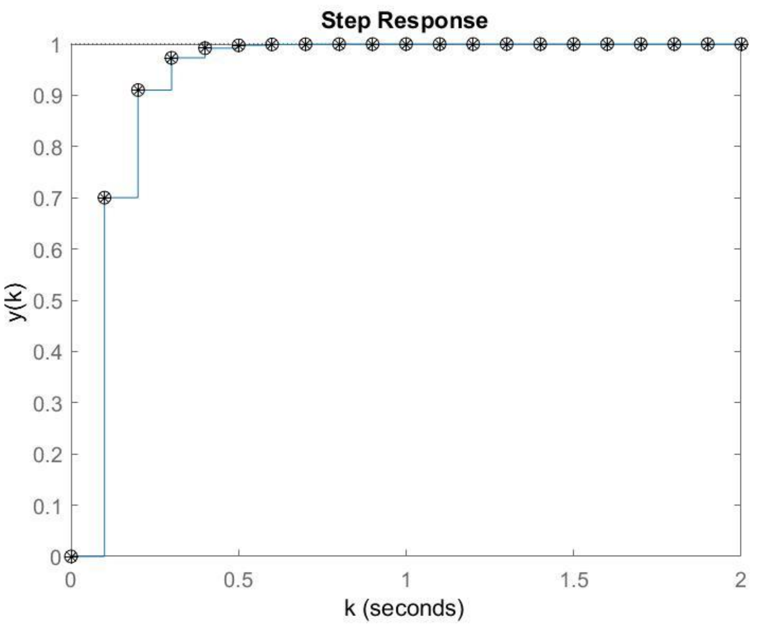
**Equação Recursiva:**

$$y(kT + T) = 0.7003e(kT) + 0.2997y(kT)$$

**4) Verifique a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário utilizando a equação recursiva;**

**Resolução:**

```
% Equação recursiva: y(k+1) = 0.7003e(k) + 0.2997y(k)
yr = zeros(1,length(kT));
for k=1:length(kT)-1
    yr(k+1) = 0.7003 + 0.2997*yk(k);
end

hold on
plot(kT,yr,'ok');
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```



**5) Verifique a resposta do sistema (solução exata) para uma entrada do tipo degrau unitário utilizando a transformada Z inversa da expressão Y(z) = H(z)E(z);**

Função de transferência:

$$Y_z = \frac{0{,}7003z}{(z-1)(z-0{,}2997)}$$

Pelo método das frações parciais:

$$\frac{Y_z}{z} = \frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z-0{,}2997)}$$

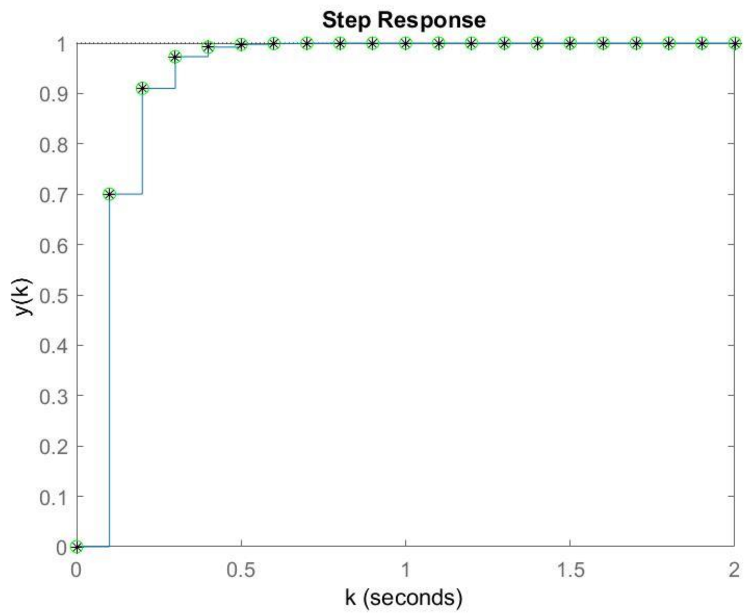
Encontrando a solução exata:

$$Y_z = \frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z-0{,}2997)} = \frac{1}{(1-z^{-1})} - \frac{1}{(1-0{,}2997z^{-1})}$$

Equação exata:

$y(k) = 1 - 0{,}2997^k$ para k=0,1,2,3..

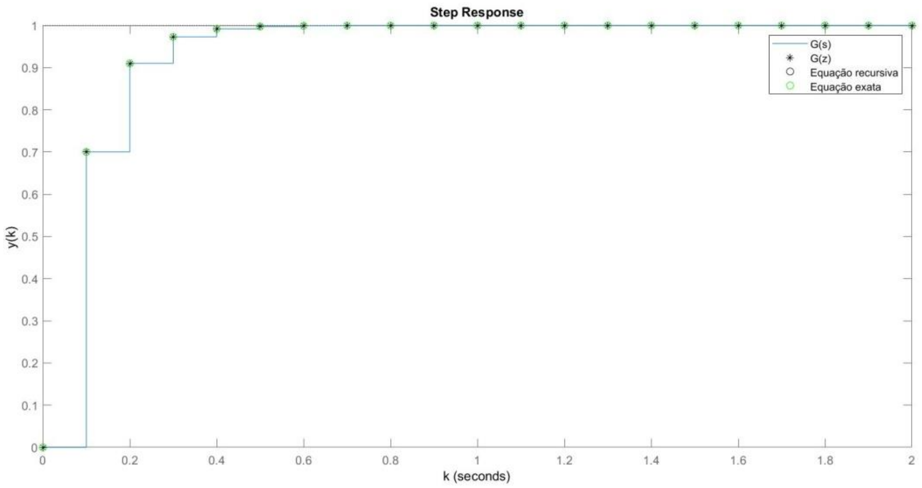
```
%Equação exata:
yex = zeros(1,length(kT));
yex(2:length(kT))= 1 - 0.2997.^(1:(length(kT)-1));
hold on
plot(kT,yex,'og');
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
```




## 6) Comparação

```
clc
clear all
% Função de Transferência Contínua

RC = 0.083;

Gs=tf((1),[RC 1])

% Período de amostragem

T = 0.1;

% Função de Transferência Discreta

Gz=c2d(Gs,T)

figure(1)
step(Gz);

%Resposta ao degrau
[sys,kT]= step(Gz);
hold on
plot(kT,sys,'*k');

b = 1 -exp(-T/RC)
a = exp(-T/RC)

num = [0.7003];
den = [1 -1.2997 0.2997];
[r,p,k] = residue(num,den)

% Equação recursiva: y(k+1) = 0.7003e(k) + 0.2997y(k)
yr = zeros(1,length(kT));
```

```
for k=1:length(kT)-1
    yr(k+1) = 0.7003 + 0.2997*yr(k);
end

hold on
plot(kT,yr,'ok');


%Equação exata:
yex = zeros(1,length(kT));
yex(2:length(kT))= 1 - 0.2997.^(1:(length(kT)-1));
hold on
plot(kT,yex,'og');
xlabel('k')
ylabel('y(k)')
legend('G(s)','G(z)','Equação recursiva', 'Equação exata');
```

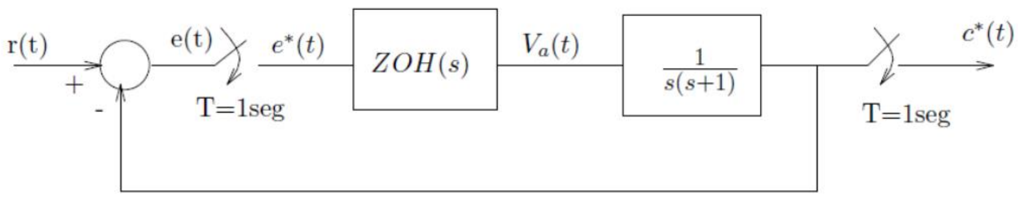


**Parte 2: Dado os sistemas do slide 08 da apresentação 05 – Sistemas Realimentados:**

Com o Matlab ou equivalente:

Exemplo:

*Obtenha a resposta ao degrau unitário $c(kT)$ para o sistema de controle de posição acionado por um Motor DC, como indicado na figura 6.28.*




$V_a(t)$ Tensão de armadura do motor DC
$c(t)$ Posição angular da carga acionada
$r(t)$ Sinal de referência

Figura 6.28: Controle digital de posição angular através de um motor DC

**1) Obtenha a função de transferência discreta equivalente de malha fechada;**

**Resolução:**

**Em malha aberta:**

$$G_{(z)} = Z\left[ZOH_{(S)}G_{(s)}\right] = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{0{,}368z + 0{,}264}{z^2 - 1{,}368z + 0{,}368}$$

1) Função de transferência $\left(G_{(z)}\right)$:

$$\boxed{G_{(z)} = \frac{0{,}368z + 0{,}264}{z^2 - 1{,}368z + 0{,}368}}$$

```
% Funções de Transferência Contínuas

Gs = tf(1,[1 1 0]) %Gs = (1/s(s+1))
T = 1;

% Função de Transferência Discreta

Gz=c2d(Gs,T)
```

```
Gz =

  0.3679 z + 0.2642
 ----------------------
 z^2 - 1.368 z + 0.3679

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

**Em malha fechada:**

$$\boxed{\frac{C_{(z)}}{R_{(z)}} = \frac{0{,}368z + 0{,}264}{z^2 - z + 0{,}6321}}$$

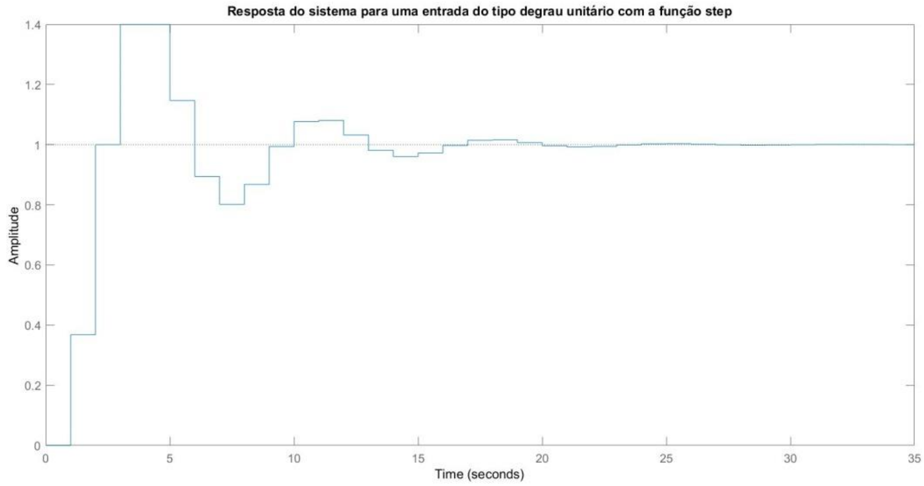
```
clc;
close all;
clear all;

% Funções de Transferência Contínuas
Gs = tf(1,[1 1 0]); % Gs = (1/s(s+1))
Hs=tf(1,[1])       % Hs = 1

% Período de amostragem
T = 1;

% Função de Transferência Discreta em malha aberta
Gz=c2d(Gs,T);
Hz=c2d(Hs,T);
GHz=c2d(Gs*Hs,T);

% Função de Transferência em malha fechada
FTMFa=minreal(Gz/(1+GHz))  % não é possivel usar o comando feedback

% Função de Transferência em malha fechada
FTMFb=feedback(Gz,Hz)  % ou  minreal(Gz/(1+Gz*Hz))
```

```
FTMFa =

 0.3679 z + 0.2642
 -----------------
 z^2 - z + 0.6321

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.


FTMFb =

 0.3679 z + 0.2642
 -----------------
 z^2 - z + 0.6321

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

**2) Verifique a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário com a função step;**

**Resolução:**

```
step(FTMFa);
title('Resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário
com a função step')
```



**3) Obtenha a equação recursiva do sistema em malha fechada;**

**Resolução:**

**Em malha fechada:**

$$\boxed{\frac{C_{(z)}}{R_{(z)}} = \frac{0{,}3679z + 0{,}2642}{z^2 - z + 0{,}6321}}$$

$$C_{(z)}(z^2 - z + 0{,}3621) = R_{(z)}(0{,}3679z + 0{,}2642)$$

$$C_{(z)}z^2 - C_{(z)}z + C_{(z)}0{,}3621 = R_{(z)}0{,}3679z + R_{(z)}0{,}2642$$

$$c(k+2) - c(k+1) + c(k)0{,}3621 = 0{,}3679r(k+1) + r(k)0{,}2642$$

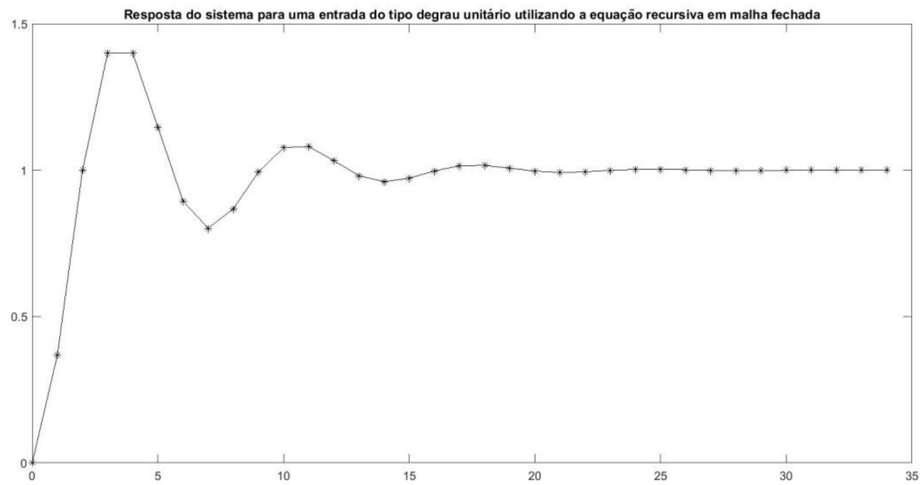
**Equação recursiva:**

$$\boxed{c(k+2) = c(k+1) - c(k)0{,}3621 + 0{,}3679r(k+1) + 0{,}264r(k)}$$

**4) Verifique a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário utilizando a equação recursiva em malha fechada;**

**Resolução:**

```
%Equação recursiva: c(k+2) = c(k+1)-0.6321c(k)+0.3679r(k+1)+0.2642r(k)
ck=zeros(1,length(kT));
%k=-1
ck(2) = 0.3679;
for k=1:length(kT)-2
   ck(k+2)= ck(k+1)-0.6321*ck(k)+0.3679+0.264;
end

hold on
figure(2)
plot(kT,ck,'-*k');
axis([0,35,0,1.5]);
title('Resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário
utilizando a equação recursiva em malha fechada')
```



**5) Obtenha a equação recursiva da função de transferência de ramo direto G(z);**

**Resolução:**

$$\boxed{G_{(z)} = \frac{C_{(z)}}{E_{(z)}} = \frac{0{,}3679z + 0{,}2642}{z^2 - 1{,}368z + 0{,}3679}}$$

$$C_{(z)}(z^2 - 1{,}368z + 0{,}3679) = E_{(z)}(0{,}3679z + 0{,}2642)$$

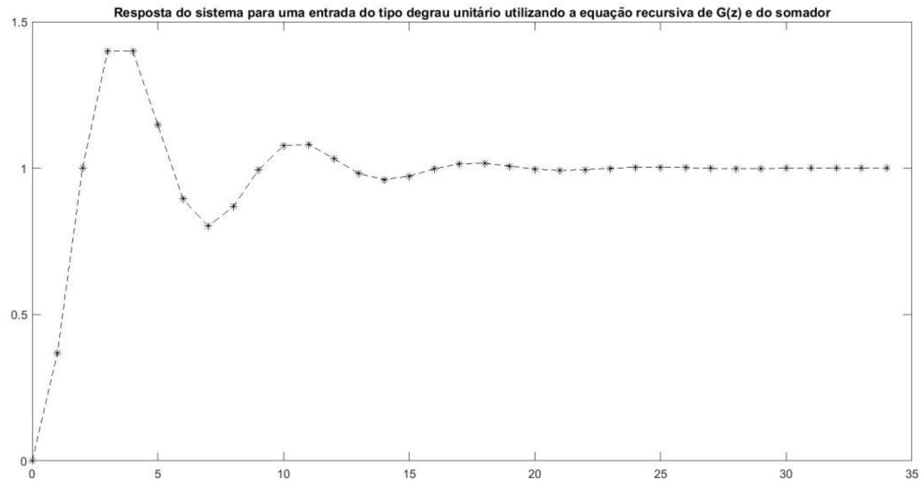
$$C_{(z)}z^2 - C_{(z)}1{,}368z + C_{(z)}0{,}3679 = E_{(z)}0{,}3679z + E_{(z)}0{,}2642$$

$$\boxed{c(k+2) = 1{,}368c(k+1) - 0{,}3679c(k) + 0{,}3679e(k+1+c(k)0{,}2642)}$$

**6) Verifique a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário utilizando a equação recursiva de G(z) e do somador;**

**Resolução:**

```
cex=zeros(1,length(kT));
%k=-1
cex(2) = 0.368;
for k=1:length(kT)-2
   cex(k+2)= 1.368*cex(k+1)-0.368*cex(k)+0.368*(1-cex(k+1))+0.264*(1-
cex(k));
end

hold on
figure(3)
plot(kT,cex,'--*k');
axis([0,35,0,1.5]);
title('Resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário
utilizando a equação recursiva de G(z) e do somador')
```



**7) Compare as respostas**

```
clc;
close all;
clear all;

% Funções de Transferência Contínuas
Gs = tf(1,[1 1 0]); % Gs = (1/s(s+1))
Hs=tf(1,[1])       % Hs = 1

% Período de amostragem
T = 1;

% Função de Transferência Discreta em malha aberta
Gz=c2d(Gs,T);
Hz=c2d(Hs,T);
GHz=c2d(Gs*Hs,T)

% Função de Transferência em malha fechada
FTMFa=minreal(Gz/(1+GHz))  % não é possivel usar o comando feedback

% Função de Transferência em malha fechada
FTMFb=feedback(Gz,Hz)  % ou  minreal(Gz/(1+Gz*Hz))

% Verificando a resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau
% unitário com a função step
figure(1)
step(FTMFa);

%Resposta ao degrau
[sys,kT]= step(FTMFa);
hold on
plot(kT,sys,'ok');
axis([0,35,0,1.5]);
title('Resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário
com a função step')

%Equação recursiva: c(k+2)  = c(k+1)-0.6321c(k)+0.3679r(k+1)+0.2642r(k)
ck=zeros(1,length(kT));
%k=-1
ck(2) = 0.3679;
for k=1:length(kT)-2
   ck(k+2)= ck(k+1)-0.6321*ck(k)+0.3679+0.264;
end

hold on
plot(kT,ck,'*r');
title('Resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau unitário
utilizando a equação recursiva em malha fechada')

cex=zeros(1,length(kT));
%k=-1
cex(2) = 0.3679;
for k=1:length(kT)-2
   cex(k+2)= 1.368*cex(k+1)-0.3679*cex(k)+0.3679*(1-
cex(k+1))+0.2642*(1-cex(k));
end

hold on
plot(kT,cex,'*k');
```

```
axis([0,35,0,1.5]);
xlabel('kT');
ylabel('x(kT)');
title('evolução temporal de c(kT)');
legend('G(s)','G(z)','Equação recursiva', 'Equação recursiva Ramo
Direto');
```