

Sistemas Lineares

Prof. Alexandre Trofino

Departamento de Automação e Sistemas
Centro Tecnológico

Universidade Federal de Santa Catarina
cep 88040-900 , Florianópolis-SC

email: trofino@lcmi.ufsc.br
Internet: <http://www.das.ufsc.br/~trofino>

Esta apostila bem como as experiências de laboratório no site www.das.ufsc.br/labsil são de responsabilidade do professor Alexandre Trofino. Este material pode ser livremente utilizado para fins didáticos, respeitando-se os direitos autorais. Fica proibido o uso para fins comerciais. Todos os resultados de cálculos e simulações foram obtidos com o pacote scilab que é distribuído gratuitamente no site <http://www-rocq.inria.fr/scilab> .

Conteúdo

1	Introdução Geral	15
1.1	Termos usuais em controle	15
1.2	Sistemas de Malha Aberta	15
1.3	Sistemas de Malha Fechada	16
1.4	Sinais de Tempo Contínuo e Discreto	17
1.5	Definição de Sistemas Lineares	18
2	Transformada de Laplace	19
2.1	Introdução e Noções de Funções Complexas	19
2.2	Definição e Região de Convergência	22
2.3	Propriedades	24
2.3.1	Operação Linear	24
2.3.2	Função Transladada em Atraso	25
2.3.3	Funções Porta-deslocada e Impulso	25
2.3.4	Multiplicação de $f(t)$ por $e^{-\alpha t}$	27
2.3.5	Mudança na Escala de Tempo	28
2.3.6	Teorema da Diferenciação Real	28
2.3.7	Teorema do Valor Final	30
2.3.8	Teorema do Valor Inicial	30
2.3.9	Teorema da Integração Real	31
2.3.10	Teorema da Diferenciação Complexa	31

2.3.11	Integral de Convolução	32
2.4	Transformada Inversa	35
2.4.1	Frações parciais para pólos distintos	35
2.4.2	Frações Parciais para pólos repetidos	37
2.4.3	Frações Parciais para casos especiais	39
2.5	Sinais com energia limitada	39
2.6	Resolução de Equações Diferenciais	40
2.7	Respostas de Estado Zero e Entrada Zero	42
2.8	Função de Transferência e Estabilidade	46
2.9	Diagrama de Blocos	48
2.10	Sistemas Realimentados	50
2.10.1	Estabilidade de Conexões	52
2.10.2	Sistemas Realimentados em presença de distúrbios	53
2.11	Problemas complementares	54
3	Resposta ao Degrau	55
3.1	Introdução	55
3.2	Análise de Sistemas de Primeira Ordem	57
3.3	Análise de Sistemas de Segunda Ordem	59
3.3.1	Caso sem amortecimento ($\xi = 0$)	60
3.3.2	Caso Subamortecido ($0 < \xi < 1$)	60
3.3.3	Caso Superamortecido ($\xi \geq 1$)	61
3.3.4	Caso instável ($\xi < 0$)	61
3.4	Índices de desempenho	62
3.5	Servomecanismo para controle de posição	65
3.6	Problemas complementares	73
4	Resposta em frequência	77

4.1	Resposta Senoidal em Regime Permanente	77
4.2	Gráficos Logarítmicos	84
4.3	Construção do Diagrama de Bode	84
4.4	Sistemas de Fase Mínima e Não-Mínima	93
4.5	Gráficos de Nyquist (ou polares)	97
4.6	Problemas Complementares	99
5	Sinais e a Transformada de Fourier	101
5.1	Conexões entre Fourier e Laplace	102
5.2	Energia de sinais	102
5.3	Cálculo de algumas transformadas	104
5.3.1	Sinal Exponencial Unilateral ($t \geq 0$)	104
5.3.2	Sinal Porta	104
5.3.3	Sinal Impulso:	106
5.3.4	Funções Constante, Sinal e Degrau	106
5.3.5	Sinais Senoidais	108
5.3.6	Exponencial Eterna $e^{j\omega_0 t}$	108
5.3.7	Funções Periódicas	109
5.4	Propriedades da transformada	112
5.4.1	Linearidade	112
5.4.2	Simetria	112
5.4.3	Escalonamento	112
5.4.4	Deslocamento em Frequência e Modulação	113
5.4.5	Deslocamento no Tempo	114
5.4.6	Diferenciação e Integração no Tempo	115
5.4.7	Diferenciação em Frequência	116
5.4.8	Convolução	116

5.4.9	Amostragem	118
5.5	Problemas complementares	123
6	Sistemas Discretos e Amostrados	125
6.1	Introdução	125
6.1.1	Conversão A/D	125
6.1.2	Conversão D/A e Sample-and-Hold	126
6.2	Sinais e Sistemas de Tempo Discreto	131
6.3	Transformada Z	134
6.3.1	Definição e exemplos	135
6.3.2	Relação com a transformada de Laplace	137
6.4	Propriedades da Transformada Z	138
6.4.1	Linearidade	138
6.4.2	Teorema do Valor Inicial	142
6.4.3	Teorema do Valor Final	142
6.4.4	Obtenção de $F(z)$ a partir de $F(s)$	143
6.4.5	Convolução Discreta	144
6.5	Transformada Z Inversa	145
6.5.1	Método da divisão polinomial	146
6.5.2	Método das frações parciais de $X(z)/z$	147
6.6	Solução de Equações recursivas	147
6.7	Função de Transferência Discreta e Estabilidade	151
6.7.1	Respostas de Estado Zero e Entrada Zero	151
6.7.2	Resposta ao Pulso e Estabilidade	153
6.8	Sistemas Amostrados	154
6.9	Sistemas Realimentados	162
6.10	Escolha do Período de Amostragem	165

6.11 Resposta em Frequência	166
6.12 Problemas Complementares	168

Lista de Figuras

1.1	Sistema de malha aberta	16
1.2	Sistema de controle de malha fechada	16
1.3	Sistema realimentado de controle por computador	16
1.4	Servomotor para posicionamento de uma antena	17
1.5	Variável de tempo contínuo (sinal analógico)	17
1.6	Variável de tempo discreto (sequência)	18
2.1	Circuito RLC série	19
2.2	Transformada direta e inversa de Laplace	20
2.3	Representação gráfica de uma função complexa	20
2.4	Relação entre $f(t)$ e sua transformada de Laplace	22
2.5	Função deslocada em atraso	25
2.6	Função Porta de área unitária	26
2.7	Derivada de funções descontínuas	27
2.8	Função dente de serra e sua derivada	33
2.9	Função onda quadrada	33
2.10	Relação entre $f(t)$ e sua transformada $F(s)$	35
2.11	Diagrama de simulação analógica	42
2.12	Respostas $x(t)$ do diagrama de simulação analógica	43
2.13	Respostas de Estado Zero e Entrada Zero	44
2.14	Circuito RLC série	45

2.15	Diagrama entrada/saída de um circuito	49
2.16	Diagrama de blocos simplificado	49
2.17	Diagrama de blocos detalhado	50
2.18	Sistema realimentado	50
2.19	Sistema realimentado simplificado	51
2.20	Diagrama de blocos de um circuito RLC-série	51
2.21	Conexão de dois sistemas em paralelo	52
2.22	Conexão de dois sistemas em realimentação	52
2.23	Sistema realimentado perturbado	53
2.24	Diagrama para referência nula	53
2.25	Diagrama para distúrbio nulo	54
2.26	Sistema para controle de posição	54
3.1	Curvas típicas da resposta ao degrau	56
3.2	Diagrama de bloco entrada/saída	56
3.3	Circuito RC	57
3.4	Sistema de primeira ordem padrão	57
3.5	Resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem padrão	58
3.6	Sistema de segunda ordem padrão	59
3.7	Índices de desempenho para resposta ao degrau	62
3.8	Resposta ao degrau do sistema	64
3.9	Diagrama funcional do sistema de posicionamento	65
3.10	Diagrama de blocos do comparador e potenciômetro	66
3.11	Diagrama de blocos com adição do amplificador	66
3.12	Motor DC controlado pela armadura (rotor)	67
3.13	Diagrama de blocos com adição do motor DC	67
3.14	Diagrama de blocos com adição da engrenagem	68

3.15	Sistema mecânico da plataforma e antena	68
3.16	Diagrama completo do sistema de posicionamento	68
3.17	Diagrama simplificado de posicionamento da antena	69
3.18	Diagrama de posicionamento na forma padrão	70
3.19	Resposta ao degrau do sistema de controle	71
3.20	Diagrama funcional para realimentação de velocidade	72
3.21	Sistema de controle com realimentação de velocidade	72
3.22	Resposta ao degrau do sistema de controle	73
3.23	Sistema com realimentação de velocidade e posição	74
3.24	Sistema de controle de velocidade	74
3.25	Resposta ao degrau unitário	75
4.1	Resposta temporal para $\text{sen}(\omega t)$ com $\omega = \{0, 2; 2; 20; 100\}$ rd/s	78
4.2	Resposta de regime ao seno	80
4.3	Resposta de regime ao cosseno	80
4.4	Circuito RC	81
4.5	Resposta em frequência (Bode) do circuito RC	82
4.6	Circuito RLC	82
4.7	Resposta em frequência (Bode) do circuito RLC	83
4.8	Resposta em frequência (Nyquist) do circuito RLC	85
4.9	Resposta em frequência (Black) do circuito RLC	85
4.10	Resposta em frequência com $G(s)$ instável	87
4.11	Diagrama de Bode dos termos 2 e $\frac{1}{s}$	88
4.12	Diagrama de Bode do termo $\frac{1}{4s+1}$	89
4.13	Diagrama de Bode de $G(s) = \frac{2}{s(4s+1)}$	89
4.14	Diagrama de Bode dos termos s e $\frac{1}{s}$	90
4.15	Diagrama de Bode do termo $\frac{1}{Ts+1}$ e assíntotas	91

4.16	Diagrama de Bode do termo $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ e assíntotas	92
4.17	Diagrama de Bode do termo $G_1(s) = \frac{0.01(0.1s+1)}{s}$ e assíntotas	94
4.18	Diagrama de Bode do termo $G_2(s) = G_1(s)\frac{1}{s+1}$ e assíntotas	94
4.19	Diagrama de Bode do termo $G(s) = G_2(s)\frac{1}{10^{-4}s^2+10^{-2}s+1}$ e assíntotas . . .	95
4.20	Circuito de fase não mínima ($r_2 > r_1$)	95
4.21	Caso (a): Sistema de fase não mínima ($r_2 > r_1$)	96
4.22	Caso (b): Sistema de fase mínima ($r_2 < r_1$)	97
4.23	Diagrama de Nyquist de $G_1(2\pi f)$, $G_2(2\pi f)$, $G_3(2\pi f)$, $G_4(2\pi f)$	98
4.24	Diagrama de Nyquist de $H_1(2\pi f)$, $H_2(2\pi f)$, $H_3(2\pi f)$, $H_4(2\pi f)$	99
4.25	Diagrama de Bode de um sistema linear invariante	100
4.26	Resposta em frequência de um sistema linear invariante	100
5.1	Operador Transformada de Fourier e seu inverso	101
5.2	Sinal Porta de largura τ	105
5.3	Função $Sa(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$	105
5.4	Função Sinal	107
5.5	Função onda quadrada de período 2π	110
5.6	Aproximação de sinais pela série trigonométrica de Fourier.	111
5.7	Trem de impulsos e sua transformada	111
5.8	Transformada de Fourier do sinal porta de largura unitária $G_1(t)$	113
5.9	Transformada de Fourier do sinal $\cos(100t)G_1(t)$	114
5.10	Demodulação de um sinal	114
5.11	Sinal linear por trechos	115
5.12	Derivada do sinal linear por trechos	115
5.13	Derivada segunda do sinal linear por trechos	116
5.14	Filtro de primeira ordem com $F(s) = \frac{1}{s+1}$	117
5.15	Transmissão e recuperação de sinais	119

5.16	Espectro do sinal antes e após amostragem: Caso $\omega_a > 2\bar{\omega}$	120
5.17	Filtro ideal para recuperação do sinal: Caso $\omega_a > 2\bar{\omega}$	120
5.18	Espectro do sinal antes e após amostragem: Caso $\omega_a < 2\bar{\omega}$	121
5.19	Espectro do sinal $f(t) = \cos(100\pi t) + \sin(10\pi t)$	122
5.20	Sistema de amostragem e recuperação de sinais	123
5.21	Espectro dos sinais $x(t)$, $r(t)$	123
5.22	Espectro do sinal amostrado	124
5.23	Sistema com modulação e discretização	124
6.1	Representação de um sinal de tensão analógico não negativo em código binário de 4 bits	127
6.2	Esquema simplificado de um circuito sample-and-hold e seu diagrama de blocos	127
6.3	(a) Diagrama de blocos de um conversor A/D com sample-and-hold e (b) funcionamento do sistema	128
6.4	(a) Conversor D/A com S/H e (b) Sinais de entrada e saída	129
6.5	Amostrador ideal: produto por um trem de impulsos	129
6.6	Segurador de ordem zero: a saída é constante por trechos	130
6.7	Sample-and-Hold visto como um amostrador ideal em cascata com um segurador de ordem zero	130
6.8	Circuito RC: resposta livre	131
6.9	Valor da corrente no capacitor nos instantes $t = kT$	131
6.10	Circuito RC com entrada constante por trechos	132
6.11	Representação de um sistema discreto	133
6.12	Sistema controlado por computador	134
6.13	Região de convergência das transformadas do degrau unitário	136
6.14	Relação biunívoca entre a sequência $x(kT)$ e sua transformada Z	136
6.15	Relação entre localização pólos e evolução temporal	139
6.16	Relação entre localização pólos e evolução temporal	140

6.17	Relação entre localização pólos e evolução temporal	141
6.18	Obtenção de $F(z)$ a partir de $F(s)$	143
6.19	Sequências convergentes e a localização dos pólos no plano z	149
6.20	Sistema discreto genérico	151
6.21	Sistema amostrado e seu discreto equivalente	155
6.22	Resumo dos resultados de conversão de Laplace para Z	157
6.23	Sistema amostrado com conversor D/A e S/H	158
6.24	Circuito com entrada constante por trechos	159
6.25	(a) Dois sistemas amostrados em cascata; (b) Dois sistemas contínuos em cascata	160
6.26	Sistema de controle digital e seu modelo discreto	163
6.27	Sistema de controle digital com medidor analógico (a) e digital (b)	164
6.28	Controle digital de posição angular através de um motor DC	165
6.29	Sistema discreto estável	167
6.30	Resposta frequencial de um sistema discreto	168
6.31	Circuito RLC com entrada constante por trechos	169
6.32	Sistema de controle de velocidade	169
6.33	Caracterização entrada/saída dos sistemas	170
6.34	Entrada: tensão $x(t)$; saída: tensão $v(t)$; $R=1\ \Omega$, $C=1\ F$	170
6.35	Sistema de controle	170

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Termos usuais em controle

Planta Equipamento (ou parte dele) destinado à realizar uma dada operação. (Objeto físico a ser controlado: caldeira, motor, reator químico, ...).

Processo Fenômenos (naturais ou criados artificialmente) que evoluem progressivamente segundo dinâmicas que lhe são próprias. (Fenômeno a ser controlado: processos químicos, econômicos, biológicos,...).

Sistema Equipamento ou fenômeno físico.

Distúrbio Sinal indesejado (interno ou externo).

Controle Realimentado Operação que visa corrigir (automaticamente ou manualmente) certas variáveis (grandezas físicas) de um sistema. Diminui o efeito de fenômenos indesejáveis.

Servomecanismo É um sistema de controle realimentado para controle automático de posição, velocidade ou aceleração. Muito frequente na indústria.

Sistemas Reguladores Automáticos Sistema de controle cujo principal objetivo é manter constante algumas variáveis do mesmo. (Controle de nível constante, posição constante, velocidade, aceleração, ...). Exemplos: robos, elevadores, estufas,...

1.2 Sistemas de Malha Aberta

Sistemas onde a variável a ser controlada (saída) não interfere na ação de controle (variável de entrada) são conhecidos como Sistemas de malha aberta.

A saída é sensível à fenômenos indesejáveis sobre o processo (perturbações, variações nos parâmetros,...). Possui pouca performance na prática quando existem perturbações. No entanto possui custo menor em geral.

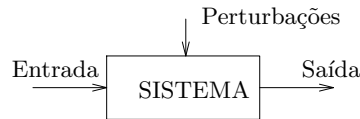


Figura 1.1: Sistema de malha aberta

1.3 Sistemas de Malha Fechada

Sistemas onde a variável de controle (Entrada) depende (Direta ou indiretamente) da variável a ser controlada (Saída) recebem o nome de sistemas de malha fechada. Nesse caso possíveis distorções na variável controlada provocadas por distúrbios no sistema são automaticamente (on line) corrigidas.

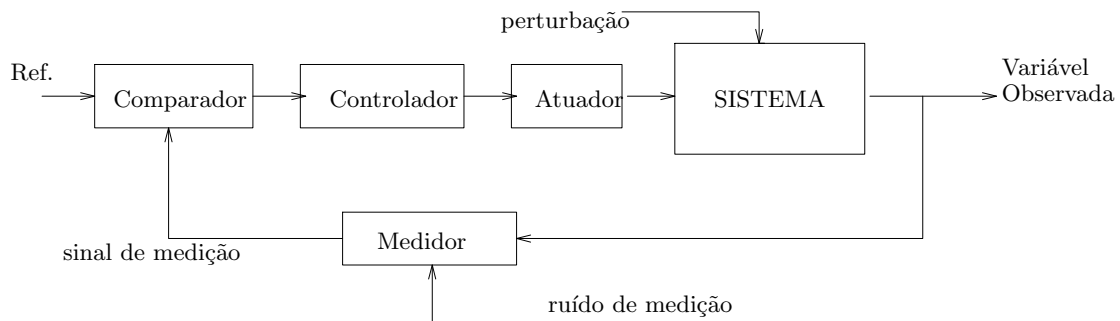


Figura 1.2: Sistema de controle de malha fechada

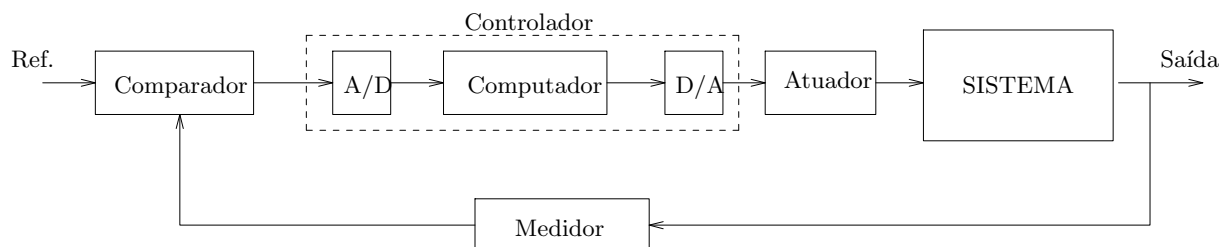


Figura 1.3: Sistema realimentado de controle por computador

Exemplo 1.1 Considere o servomecanismo para controle de posição da antena indicado na Figura 1.4. Comparando com o diagrama da figura 1.2 podemos identificar os seguintes elementos:

Sistema: Antena + plataforma + engrenagens

Perturbações: Grandezas externas que atuam de forma indesejada no sistema. Por exemplo, ventos que provocam torques de perturbação na posição da antena.

Variável observada: Posição angular da antena

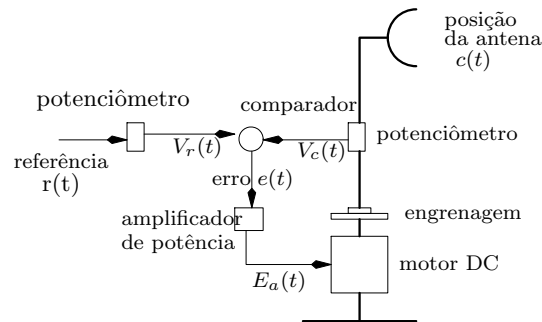


Figura 1.4: Servomotor para posicionamento de uma antena

Variável medida: *Sinal de medição gerado pelo potenciômetro. Note que a variável medida pode ser diferente da variável observada quando existem ruídos de medição.*

Medidor: *Potenciômetro*

Referência: *Valor desejado da grandeza observada*

Comparador: *somador de tensões*

Controlador: *Nesse exemplo o controlador é um elemento unitário entre o comparador e o amplificador. Em geral, o controlador é um filtro que manipula o sinal de erro antes do amplificador de potência. Em sistemas mais complexos o controlador pode ser um algoritmo implementado num computador.*

Atuador: *Amplificador de Potência + motor*

1.4 Sinais de Tempo Contínuo e Discreto

TEMPO CONTÍNUO: t é uma variável contínua. Nesse caso um sinal $f(t)$ será um sinal analógico, isto é, um sinal de tempo contínuo.

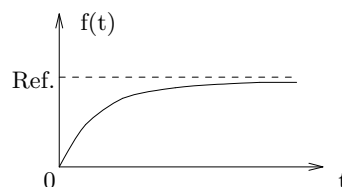


Figura 1.5: Variável de tempo contínuo (sinal analógico)

TEMPO DISCRETO: t é uma variável discreta que assume valores apenas em instantes discretos do tempo. Por exemplo, $t = kT$ onde k é uma variável $k = 0, 1, 2, \dots$ e T é uma constante. Nesse caso um sinal $f(kT)$ será uma sequência, isto é, um sinal de tempo discreto.

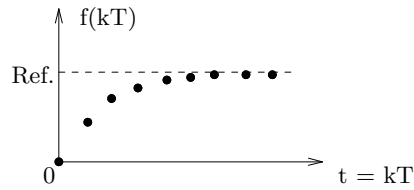


Figura 1.6: Variável de tempo discreto (sequência)

1.5 Definição de Sistemas Lineares

SISTEMAS LINEARES: São fenômenos ou dispositivos cujo comportamento dinâmico pode ser descrito por equações diferenciais (ou recursivas) lineares.

SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO: São sistemas lineares descritos por equações diferenciais (ou recursivas) com coeficientes constantes.

Capítulo 2

Transformada de Laplace

2.1 Introdução e Noções de Funções Complexas

O comportamento da maioria dos sistemas físicos pode ser representado através de equações diferenciais. Neste curso vamos nos restringir à sistemas que podem ser representados por equações diferenciais ordinárias, lineares, à parâmetros invariantes no tempo.

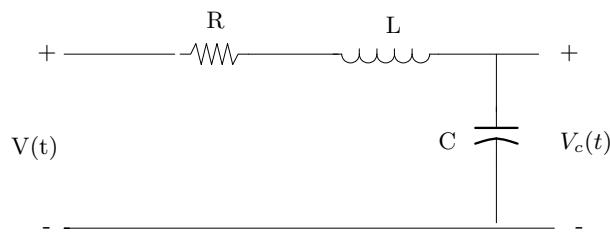


Figura 2.1: Circuito RLC série

Exemplo 2.1 *Condidere o circuito da figura 2.1. A relação de causa-efeito da tensão $v(t)$ (Entrada) sobre a tensão $v_C(t)$ (Saída) no capacitor é um sistema descrito pela equação diferencial seguinte:*

$$v(t) = RC\dot{v}_C(t) + LC\ddot{v}_C(t) + v_C(t), \quad \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t)$$

- *Equação diferencial ordinária linear*
- *Parâmetros invariantes no tempo*

Sistemas mais complicados são muitas vezes modelados por equações diferenciais não lineares e muito frequentemente os parâmetros variam com o tempo. No entanto, o comportamento desses sistemas pode ser aproximado por equações diferenciais lineares invariantes no tempo, nas vizinhanças de um ponto de operação. As técnicas para a

obtenção desses modelos lineares invariantes no tempo consistem em expandir os termos não lineares pela Série de Taylor e aproximá-los pela parte linear da série. Por exemplo, para a função $y(t) = \text{sen}(t)$ obteríamos uma aproximação linear nas vizinhanças da origem que é dada por $y_{lin}(t) = t$ e é fácil de verificar que a função $y(t) = \text{sen}(t)$ se comporta aproximadamente como $y_{lin}(t) = t$ para pequenos valores da variável t .

A Transformada de Laplace é uma técnica extremamente útil na solução de equações diferenciais lineares invariantes no tempo. É através da Transformada de Laplace que se obtém a noção de “Função de Transferência” de um sistema.

A Transformada de Laplace transforma uma função da variável tempo, digamos $f(t)$, numa outra função $F(s)$ onde $s = \sigma + j\omega$ é uma variável complexa. Em determinadas condições, as funções $f(t)$ e sua transformada $F(s)$ estão relacionadas de forma bi-unívoca:

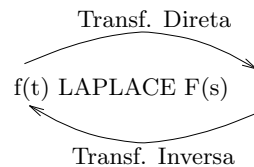


Figura 2.2: Transformada direta e inversa de Laplace

PROPRIEDADES DE FUNÇÕES COMPLEXAS:

Neste curso vamos nos restringir, com poucas exceções, às funções complexas racionais.

Definição 2.1 (Função Racional) Uma função $G(s)$ da variável complexa $s = \sigma + j\omega$ é racional se $G(s)$ pode ser expressa como a divisão de dois polinômios da variável complexa s .

A figura abaixo ilustra uma função complexa $G(s)$ em termos de suas coordenadas retangular e polar. onde $|G(s)| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ e $\angle G(s) = \tan^{-1} G_y / G_x$.

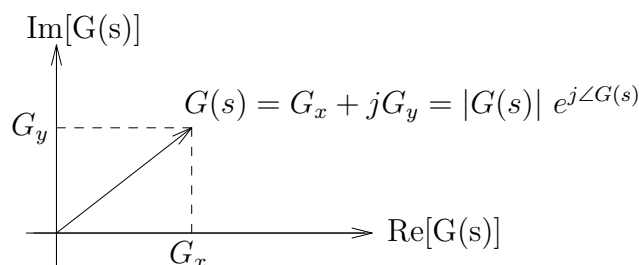


Figura 2.3: Representação gráfica de uma função complexa

- **Complexo conjugado:** A conjugação complexa é uma operação que consiste em trocar o sinal da parte imaginária, se o número estiver representado nas coordenadas retangulares, ou de forma equivalente, trocar o sinal da fase, se o número estiver representado

nas coordenadas polares. Representaremos o complexo conjugado do número complexo $G(s)$, indicado na figura 2.3, por $\overline{G(s)} = G_x - jG_y = |G(s)|e^{-j\angle G(s)}$.

Duas propriedades importantes da conjugação complexa são indicadas a seguir. Se A, B são dois números complexos então $\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$ e $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Definição 2.2 (Pólos e Zeros) *Seja $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ onde $N(s)$ e $D(s)$ são dois polinômios com coeficientes reais. Define-se pólos e zeros de $G(s)$ como sendo os valores de s tais que:*

- Zeros de $G(s)$: s tal que $N(s) = 0$
- Pólos de $G(s)$: s tal que $D(s) = 0$

Exemplo 2.2 *A transformada de Laplace da função $g(t) = -0,5 + 1,5e^{2t}$, $t \geq 0$ é a função complexa $G(s) = \frac{s+1}{s(s-2)}$ que possui os seguintes pólos e zeros:*

- Zeros de $G(s)$: $s = -1$
- Pólos de $G(s)$: $s = 0, s = 2$

Note que cada pólo da função $G(s)$ está associado à uma exponencial da função $g(t)$. Na realidade os pólos são os expoentes das exponenciais.

- O número complexo:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

possui módulo unitário e fase θ , como indicado a seguir.

$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$\angle e^{j\theta} = \tan^{-1} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \theta$$

Definição 2.3 (Função Analítica) *Uma função $G(s)$ é analítica numa região se $G(s)$ e todas as suas derivadas existem nessa região.*

Exemplo 2.3 *A função $G(s) = \frac{1}{s+1}$ é analítica fora do ponto $s = -1$ (Pólo de $G(s)$).*

As operações de derivada e integral envolvendo funções complexas analíticas se fazem de maneira habitual, isto é, as regras usuais de derivada e integral se aplicam diretamente.

2.2 Definição e Região de Convergência

Para uma função $f(t)$ com $t \geq 0$, define-se Transformada de Laplace de $f(t)$ como sendo a função complexa $F(s)$ obtida através da integral:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

onde $s = \sigma + j\omega$ é a variável complexa introduzida pela transformada. Sob certas condições (que veremos a seguir) podemos também definir a Transformada Inversa de Laplace da seguinte forma:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2.2)$$

onde $t \geq 0$ e c é um número real associado à região do plano $s = \sigma + j\omega$ onde a função $F(s)$ está definida. Esta região é chamada região de convergência da Transformada de Laplace. Dentro dessa região as funções $f(t)$ para $t \geq 0$ e $F(s)$ estão ligadas de maneira biunívoca, como ilustra a figura a seguir.

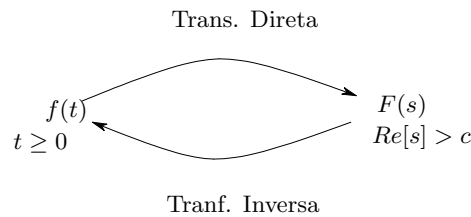


Figura 2.4: Relação entre $f(t)$ e sua transformada de Laplace

Exemplo 2.4 Seja $f(t) = e^{2t}$, para $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{2t} e^{-st} dt = \frac{-1}{s-2} e^{-(s-2)t} \Big|_{0^-}^{\infty} \\ &= \frac{-1}{s-2} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-2)t} - \lim_{t \rightarrow 0^-} e^{-(s-2)t} \right] = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-2} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-2)t} \end{aligned}$$

Note que $s = \sigma + j\omega$ e

$$|e^{-j\omega t}| = |\cos\omega t + j\sin\omega t| = 1.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-2)t} = \begin{cases} \pm\infty & \text{para } \operatorname{Re}[s] = \sigma < 2 \\ \text{indefinido} & \text{para } \operatorname{Re}[s] = \sigma = 2 \\ 0 & \text{para } \operatorname{Re}[s] = \sigma > 2. \end{cases}$$

Logo, a Transformada de Laplace da função e^{2t} , $t \geq 0$ só está definida na região do plano complexo definida por $\text{Re}[s] > 2$ e nessa região obtemos:

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$$

A região do plano complexo onde a Integral de Laplace está definida e é finita recebe o nome de região de convergência da Transformada de Laplace. Mostra-se que ao escolhermos um contorno para a integral:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

de tal forma que $c > 2$ (contorno dentro da região de convergência) então o resultado da integral acima é e^{2t} para $t \geq 0$.

Existem funções, como por exemplo e^{t^2} , $t \geq 0$, para as quais a Transformada de Laplace não existe, isto é, não existe região de convergência da Integral de Laplace. No entanto, todos os sinais de interesse prático são transformáveis por Laplace.

A região de convergência da Transformada de Laplace é um formalismo matemático que normalmente é omitido no cálculo da transformada. No entanto é importante lembrar que qualquer que seja a região de convergência, as funções $f(t)$ para $t \geq 0$ e $F(s)$ para $\text{Re}[s] > c$ estão relacionados de maneira biunívoca. Os casos em que $f(t) \neq 0$ para $t < 0$ são de interesse marginal no cálculo da Transformada de Laplace e não serão considerados nesse curso. Uma vez obtida a transformada de Laplace $F(s)$ podemos deduzir sua região de convergência. Ela é dada pela região do plano complexo à direita do pólo mais à direita da função $F(s)$.

Exemplo 2.5 (Exponencial real) $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

Exemplo 2.6 (Degrau Unitário) Função Degrau Unitário $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty 1 e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

(Região de Convergência $\text{Re}[s] > 0$)

Exemplo 2.7 (Rampa) Função Rampa $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ At, & t \geq 0, A \text{ constante} \end{cases}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = A \int_0^\infty t e^{-st} dt = At \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{Ae^{-st}}{-s} dt = \frac{A}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{A}{s^2}.$$

($\int u dv = uv - \int v du$)

Exemplo 2.8 (Senóide) Função Senoidal $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{sen}(\omega_0 t), & t \geq 0, \omega_0 \text{ cte} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty \text{sen}(\omega_0 t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

RESUMO

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$: Pólo simples na origem. Função Constante no tempo.

$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$: Pólo duplo na origem. Função cresce linearmente no tempo.

$e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$: Pólo em $s = -\alpha$. Cresce exponencialmente no tempo se pólo for positivo ($\alpha < 0$). Decresce exponencialmente no tempo se pólo for negativo ($\alpha > 0$). Valor constante no tempo se o pólo for na origem.

$\text{sen}(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$: Pólos complexos conjugados sobre o eixo imaginário ($s = \pm j\omega_0$). Função oscila no tempo sem amortecimento.

2.3 Propriedades

A Transformada de Laplace possui várias propriedades que, em geral, simplificam o cálculo da transformada se comparado com a aplicação direta da definição (2.1). Todas as propriedades apresentadas nessa seção estão provadas em [1]. Por conveniência repetiremos algumas das provas a título de exercício.

2.3.1 Operação Linear

Sejam $f_1(t)$ e $f_2(t)$ duas funções e α_1 e α_2 duas constantes. Então:

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Prova: Utilizando a definição (2.1) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] &= \int_0^\infty (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) e^{-st} dt \\ &= \alpha_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + \alpha_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\ &= \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \quad \square \end{aligned}$$

2.3.2 Função Transladada em Atraso

Seja $f(t)$ uma função, $u(t)$ o degrau unitário e α uma constante. Então:

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)u(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} \mathcal{L}[f(t)]$$

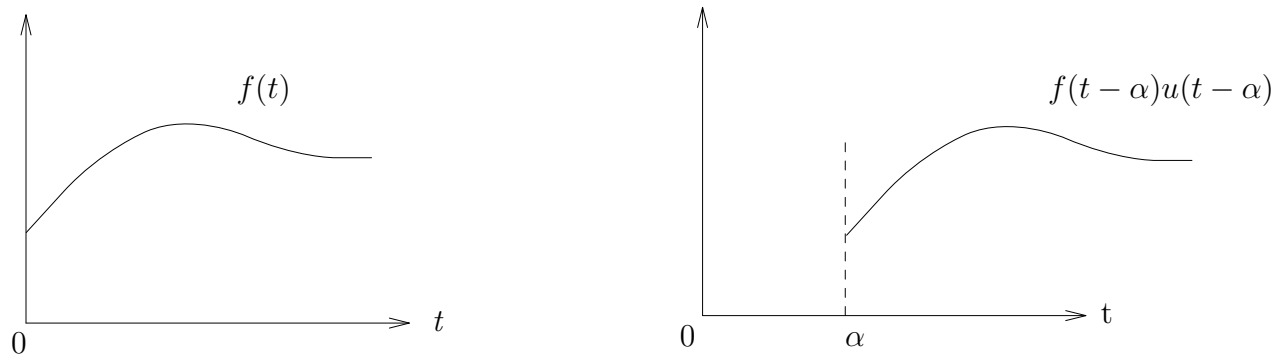


Figura 2.5: Função deslocada em atraso

Prova: Aplicando a definição temos:

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)u(t - \alpha)] = \int_0^{\infty} f(t - \alpha)u(t - \alpha)e^{-st} dt$$

Definindo $\tau = t - \alpha$ podemos rescrever a integral acima como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - \alpha)u(t - \alpha)] &= \int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau \\ &= e^{-s\alpha} \int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ \text{como } f(\tau)u(\tau) &= 0 \text{ para } -\alpha \leq \tau < 0 \text{ temos:} \\ &= e^{-s\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-s\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-s\alpha} \mathcal{L}[f(t)] \quad \square \end{aligned}$$

2.3.3 Funções Porta-deslocada e Impulso

As funções Porta-deslocada e Impulso possuem propriedades importantes no contexto da Transformada de Laplace .

Função Porta-deslocada: Usaremos a notação $f_p(t)$ para representar a função porta-deslocada de área unitária.

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_0}, & 0 < t < t_0 \\ 0, & 0 > t > t_0 \end{cases} \quad \text{sendo } t_0 \text{ uma constante}$$

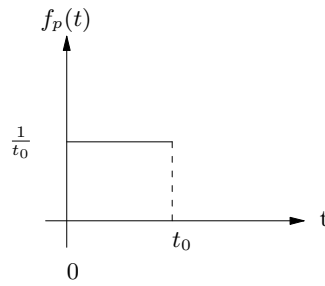


Figura 2.6: Função Porta de área unitária

Note que $f_p(t) = \frac{1}{t_0}u(t) - \frac{1}{t_0}u(t - t_0)$.

Utilizando as propriedades de Linearidade e Translação obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f_p(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{t_0}u(t) - \frac{1}{t_0}u(t - t_0)\right] \\
 &= \frac{1}{t_0}\mathcal{L}[u(t)] - \frac{1}{t_0}\mathcal{L}[u(t - t_0)] \\
 &= \frac{1}{t_0} \frac{1}{s} - \frac{1}{t_0} \frac{e^{-t_0 s}}{s} \\
 &= \frac{1}{t_0 s} (1 - e^{-t_0 s}) \quad \square
 \end{aligned}$$

Função Impulso: A Função Impulso Unitário que ocorre no instante $t = t_0$ é representada por $\delta(t - t_0)$ e satisfaz as seguintes condições:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & \forall t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

A Função Impulso é uma abstração matemática e não existe na prática. Porém, variações bruscas de energia podem ser aproximadas pela função impulso. Além disso, o conceito da função impulso é bastante útil na diferenciação de funções descontínuas, como veremos na sequência.

Para calcular a transformada da função impulso devemos notar que o impulso na origem é o caso limite da função porta quando $t_0 \rightarrow 0$, isto é:

$$\delta(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} [u(t) - u(t - t_0)]$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta(t)] &= \mathcal{L}\left[\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0}(u(t) - u(t - t_0))\right] \\
 &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \mathcal{L}\left[\frac{1}{t_0}(u(t) - u(t - t_0))\right] \\
 &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0 s}(1 - e^{-t_0 s}) \\
 &= \frac{\frac{d}{dt_0}(1 - e^{-t_0 s})}{\frac{d}{dt_0}(t_0 s)} \\
 &= 1 \quad \square
 \end{aligned}$$

A Transformada do Impulso é uma função constante numericamente igual a área do impulso (Energia Instantânea). O exemplo a seguir mostra como podemos utilizar a função impulso para representar a derivada de funções descontínuas.

Exemplo 2.9 *Seja a função $f(t) = A$ para $0 < t < t_0$ (t_0 dado) e nula fora desse intervalo. A derivada dessa função está definida em todos os pontos exceto em $t = 0$ e $t = t_0$. Nesses pontos existem descontinuidades. A variação da função no entorno de uma descontinuidade pode ser representada por um impulso de área igual ao tamanho da descontinuidade. A derivada de $f(t)$ está indicada na figura 2.7.*

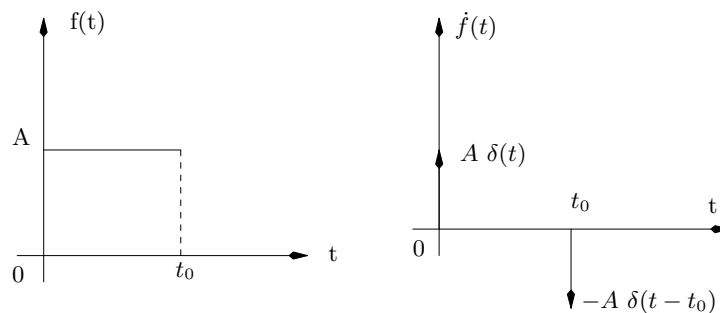


Figura 2.7: Derivada de funções descontínuas

2.3.4 Multiplicação de $f(t)$ por $e^{-\alpha t}$

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ então:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} e^{-st} dt = F(s + \alpha)$$

Exemplo 2.10 *Já vimos que:*

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t) u(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = F(s)$$

Logo:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t)] = \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} = F(s + \alpha)$$

Note que os pólos de $F(s + \alpha)$ são $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$, onde $\text{Re}[p\acute{o}lo] = -\alpha$ define o decaimento exponencial do sinal $f(t)$ e $\text{Im}[p\acute{o}lo] = \pm\omega_0$ define a frequência de oscilação do sinal $f(t)$.

2.3.5 Mudança na Escala de Tempo

Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ então:

$$\mathcal{L}[f(t/\alpha)] = \alpha F(\alpha s)$$

Este resultado é útil quando se deseja analisar sinais numa escala de tempo diferente daquela em que ele ocorre na prática. Pode ser o caso por exemplo de sinais muito lentos ou muito rápidos.

Exemplo 2.11 Dado que $\mathcal{L}[e^{-t}u(t)] = \frac{1}{s+1}$ tem-se que $\mathcal{L}[e^{-0,2t}u(t)] = \frac{5}{5s+1}$.

2.3.6 Teorema da Diferenciação Real

De agora em diante usaremos as seguintes notações para representar derivada temporal de uma função $f(t)$:

$$\frac{df(t)}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \partial f(t) \quad \text{ou de forma equivalente} \quad \frac{df(t)}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{f}(t) \quad (2.3)$$

A notação que emprega o operador $\partial \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}$ é útil no caso de derivadas de ordem ≥ 3 como a derivada de ordem 5: $\partial^5 f(t)$. Já a notação $\dot{f}(t)$ e $\ddot{f}(t)$ são comuns em livros de controle para expressar derivadas de ordem 1 e 2.

Com a notação acima temos o seguinte resultado:

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$$

onde $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ e $f(0) = f(t)|_{t=0}$.

Problema 2.1 Prove que $\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$. Dica: use a integral por partes $\int_0^\infty u dv = uv|_0^\infty - \int_0^\infty v du$.

Quando uma função possui descontinuidade na origem, a sua derivada temporal irá possuir um impulso na origem. Nesses casos precisamos tomar cuidado com o limite inferior da transformada da derivada. Vamos então definir:

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}_-[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Note que se $f(t)$ envolve um impulso na origem então $\mathcal{L}_+[f(t)] \neq \mathcal{L}_-[f(t)]$. Quando $f(t)$ não possui impulso na origem teremos $\mathcal{L}_+[f(t)] = \mathcal{L}_-[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]$.

Para o caso em que $\dot{f}(t)$ possui impulso na origem ($f(t)$ possui descontinuidade na origem) ficamos com:

$$\mathcal{L}_+[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^+)$$

$$\mathcal{L}_-[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

Note que na definição \mathcal{L}_+ o tempo começa em $t = 0^+$ e portanto o impulso na origem fica fora do intervalo considerado, o que não nos interessa. Assim apenas a definição \mathcal{L}_- , por começar a contagem dos tempos em $t = 0^-$, nos será útil para tratar impulsos na origem.

Exemplo 2.12 Seja $f(t) = e^{-\alpha t}$, para $t \geq 0$. Calcule $\mathcal{L}[\dot{f}(t)]$.

Solução:

$$\dot{f}(t) = \delta(t) - \alpha e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = 1 - \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{s}{s + \alpha}$$

Pelo teorema da diferenciação real obtemos o mesmo resultado acima:

$$\mathcal{L}_-[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^-) = \frac{s}{s + \alpha} - 0 = \frac{s}{s + \alpha}$$

Para uma derivada de ordem n temos:

$$\mathcal{L}[\partial^n f(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\partial f(t)|_{t=0} - \dots - s\partial^{n-2}f(t)|_{t=0} - \partial^{n-1}f(t)|_{t=0}$$

OBSERVAÇÕES:

- Se a distinção entre \mathcal{L}_+ e \mathcal{L}_- for necessária basta substituir $t = 0$ por $t = 0^+$ ou $t = 0^-$ respectivamente.
- Para que $\mathcal{L}[\partial^n f(t)]$ exista é preciso que todas as derivadas de $f(t)$ de ordem inferior à n existam e sejam transformáveis por Laplace.
- Quando todas as condições iniciais forem nulas então:

$$\mathcal{L}[\partial^n f(t)] = s^n F(s)$$

Exemplo 2.13 Sabendo que $\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$ podemos obter:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)u(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} u(t)\right] \\ &= \frac{1}{\omega_0} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} (\sin(\omega_0 t)u(t))\right] \\ &= \frac{1}{\omega_0} (sF(s) - f(0)) \\ &= \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{s \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} - 0\right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\end{aligned}$$

2.3.7 Teorema do Valor Final

Quando uma função $f(t)$ tende a um valor constante em regime estacionário, isto é quando $t \rightarrow \infty$, este valor constante pode ser diretamente obtido através do limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

onde $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. Note que quando $f(t)$ tende a um valor constante em regime então $\dot{f}(t)$ tende a zero em regime. Como toda função que tende a zero em regime deve possuir transformada com todos os pólos no semi-plano esquerdo concluímos que todos os pólos de $\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s)$ devem estar no semi-plano esquerdo para que o limite acima possa ter algum sentido. Caso contrário, se algum pólo de $sF(s)$ tem parte real nula ou positiva a função $f(t)$ não tende a um valor constante em regime e portanto a igualdade acima não mais se verifica.

Exemplo 2.14 Qual é o valor de regime (se ele existe) da função $f(t)$ cuja transformada é $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$?

Solução: Como os pólos de $sF(s)$ não possuem parte real nula nem positiva (os pólos são $s = -1$) então $f(t)$ tende a um valor constante em regime. E esse valor é dado por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 1$$

Para conferir o resultado note que $\mathcal{L}[(1 - e^{-t})u(t)] = \frac{1}{s(s+1)}$.

Problema 2.2 Calcule o valor de regime da função no tempo cuja transformada é $F(s) = \frac{1}{(s-2)}$. Diga se o teorema do valor final pode ser aplicado e qual é a função no tempo.

2.3.8 Teorema do Valor Inicial

Usando este teorema somos capazes de achar o valor de $f(t)$ em $t = 0^+$ conhecendo apenas a transformada de $f(t)$. Se $f(t)$ e $\dot{f}(t)$ são ambas transformáveis por Laplace e se

$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ existir então:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Quando $f(t)$ não possui descontinuidade na origem $f(0^+) = f(0)$.

Problema 2.3 Encontre o valor inicial de $\dot{f}(t)$ dado que $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$.

2.3.9 Teorema da Integração Real

Se a função que resulta da integral $\int f(t)dt$ é transformável por Laplace então sua transformada é dada por:

$$\mathcal{L} \left[\int f(t)dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int f(t)dt|_{t=0}}{s} \quad (2.4)$$

OBSERVAÇÕES:

- Se o valor inicial da integral for zero então:

$$\mathcal{L} \left[\int f(t)dt \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Assim, integrar no domínio do tempo é dividir por s no domínio da frequência. Lembre que derivar no tempo é multiplicar por s na frequência.

- Quando a integral for definida note que:

$$\int_0^t f(t)dt = \int f(t)dt - \int f(t)dt|_{t=0}.$$

Sendo $\int f(t)dt|_{t=0}$ uma constante temos com (2.4) que:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t)dt \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Se $f(t)$ possui impulso na origem então deve-se especificar que a integral começa em $t = 0^-$.

2.3.10 Teorema da Diferenciação Complexa

Se $f(t)$ é transformável por Laplace, então, exceto nos pólos de $F(s)$ vale a seguinte relação:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s).$$

No caso geral:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n = 1, 2, \dots$$

2.3.11 Integral de Convolução

Sejam $f_1(t)$ e $f_2(t)$ duas funções nulas para $t < 0$. A Convolução dessas duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ será representada pela notação $f_1(t) * f_2(t)$ e é definida pela integral:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

Propriedades:

- $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
- $f_1(t) * (f_2(t) + f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$
- $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] \mathcal{L}[f_2(t)]$

A última propriedade é muito importante e mostra que fazer a convolução no tempo é fazer o produto das transformadas na frequência.

Prova:

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^\infty \left(\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

como $f_1(t - \tau) = 0$ para $\tau > t$ podemos estender o limite de integração de t para infinito. Como t e τ são variáveis independentes podemos trocar a ordem de integração.

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(t - \tau) e^{-s(t-\tau)} dt f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Note que a integral interna é simplesmente a transformada de $f_1(t)$ com a mudança de variável $\xi = t - \tau$:

$$\int_0^\infty f_1(t - \tau) e^{-s(t-\tau)} dt = \int_{-\tau}^\infty f_1(\xi) e^{-s\xi} d\xi = \int_0^\infty f_1(\xi) e^{-s\xi} d\xi = \mathcal{L}[f_1(t)]$$

Note ainda que $\mathcal{L}[f_1(t)]$ é uma função complexa da variável s e não depende de τ . Logo obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_0^\infty \mathcal{L}[f_1(t)] f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \mathcal{L}[f_1(t)] \int_0^\infty f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \mathcal{L}[f_1(t)] \mathcal{L}[f_2(t)] \quad \square \end{aligned}$$

Veremos mais adiante que o comportamento de todo sistema linear invariante no tempo pode ser representado por uma integral de convolução, ou equivalentemente, pelo produto de duas transformadas.

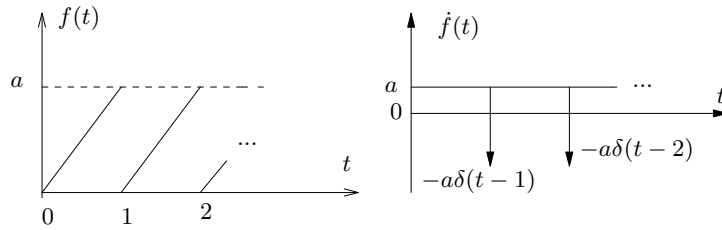


Figura 2.8: Função dente de serra e sua derivada

Exemplo 2.15 Calcule a transformada de Laplace da função $f(t)$ da figura 2.8.

Solução: Como a derivada de $f(t)$ é uma função mais simples que $f(t)$, veja figura 2.8, iremos calcular a transformada da derivada e utilizar a relação $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$. Tem-se então:

$$\begin{aligned} f'(t) &= au(t) - \sum_{n=1}^{\infty} a\delta(t-n) \\ \mathcal{L}[f'(t)] &= sF(s) - f(0) = a\mathcal{L}[u(t)] - a \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}[\delta(t-n)] \\ \Rightarrow sF(s) &= a\frac{1}{s} - a \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns} \mathcal{L}[\delta(t)] \\ \Rightarrow F(s) &= \frac{a}{s^2} - a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s} \end{aligned}$$

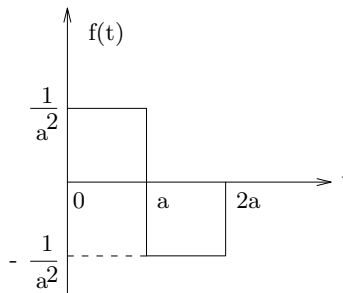


Figura 2.9: Função onda quadrada

Exemplo 2.16 Calcule a transformada de Laplace da função $f(t)$ da figura 2.9.

Solução: Como a função é uma soma de degraus deslocados, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{a^2}u(t) - \frac{2}{a^2}u(t-a) + \frac{1}{a^2}u(t-2a) \\ \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{a^2}\mathcal{L}[u(t)] - \frac{2}{a^2}\mathcal{L}[u(t-a)] + \frac{1}{a^2}\mathcal{L}[u(t-2a)] \\ &= \frac{1}{a^2}\frac{1}{s} - \frac{2}{a^2}e^{-as}\frac{1}{s} + \frac{1}{a^2}e^{-2as}\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{a^2s}(1 - 2e^{-as} + e^{-2as}) \end{aligned}$$

Exemplo 2.17 Calcule a transformada de Laplace da função $x(t)$ que resolve a seguinte equação diferencial $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$, onde $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$ e $x(0) = k_1$, $\dot{x}(0) = k_2$.

Solução: Seja $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Tomando a transformada dos dois lados da equação temos:

$$\mathcal{L}[a\ddot{x} + b\dot{x} + cx] = \mathcal{L}[0] = 0$$

$$a\mathcal{L}[\ddot{x}] + b\mathcal{L}[\dot{x}] + c\mathcal{L}[x] = 0$$

$$\mathcal{L}[x] = X(s)$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$a[s^2X(s) - sk_1 - k_2] + b[sX(s) - k_1] + cX(s) = 0$$

$$X(s)(as^2 + bs + c) = ak_1s + bk_1 + ak_2$$

$$X(s) = \frac{ak_1s + bk_1 + ak_2}{as^2 + bs + c}$$

Exemplo 2.18 Calcule a transformada de Laplace do sinal $f(t) = \text{sen}(\omega_0 t + \theta)u(t)$, onde θ e ω_0 são constantes.

Solução: Existem várias formas de se resolver o problema. A seguir apresenta-se uma forma que explora as propriedades de funções senoidais e da função impulso.

$$f(t) = \text{sen}(\omega_0 t + \theta)u(t)$$

$$\dot{f}(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)\omega_0 u(t) + \text{sen}(\omega_0 t + \theta)\delta(t)$$

$$= \cos(\omega_0 t + \theta)\omega_0 u(t) + \text{sen}(\theta)\delta(t)$$

$$\ddot{f}(t) = -\text{sen}(\omega_0 t + \theta)\omega_0^2 u(t) + \cos(\omega_0 t + \theta)\omega_0 \delta(t) + \dot{\delta}(t)\text{sen}(\theta)$$

$$= -\text{sen}(\omega_0 t + \theta)\omega_0^2 u(t) + \cos(\theta)\omega_0 \delta(t) + \dot{\delta}(t)\text{sen}(\theta)$$

Além disso sabemos que

$$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-) = s^2F(s)$$

e das duas expressões acima tiramos o seguinte resultado

$$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2F(s)$$

$$= \mathcal{L}[-\text{sen}(\omega_0 t + \theta)\omega_0^2 u(t) + \cos(\theta)\omega_0 \delta(t) + \dot{\delta}(t)\text{sen}(\theta)]$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{s \text{sen}(\theta) + \omega_0 \cos(\theta)}{s^2 + \omega_0^2}$$

Problema 2.4 Refazer o exemplo 2.18 utilizando a relação trigonométrica $\text{sen}(\omega t + \theta) = \text{sen}(\omega t)\cos(\theta) + \cos(\omega t)\text{sen}(\theta)$

2.4 Transformada Inversa

Já foi mencionado anteriormente que a transformada de Laplace e sua respectiva função no tempo estão relacionadas de forma biunívoca, como ilustra a figura 2.10. A transformada inversa de Laplace nos permite encontrar a função no tempo a partir do conhecimento da sua Transformada de Laplace .

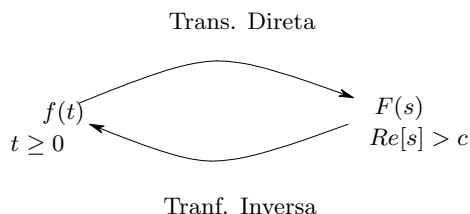


Figura 2.10: Relação entre $f(t)$ e sua transformada $F(s)$

Existem tabelas que são bastante úteis na obtenção da transformada inversa. No entanto essas tabelas são limitadas e no caso mais geral a maneira mais simples de se calcular a transformada inversa é utilizar o método de expansão por frações parciais pois os fatores que resultam da expansão são bem mais simples de serem convertidos ao domínio do tempo. Este método possui variações para pólos distintos, pólos múltiplos, pólos complexos e vamos supor que a função a ser expandida por frações parciais é racional.

2.4.1 Frações parciais para pólos distintos

Seja $F(s)$ uma transformada na forma fatorada, isto é:

$$F(s) = \frac{k(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}, \quad n > m$$

onde $-z_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$), são os zeros e $-p_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) são os pólos da função $F(s)$. A restrição $n > m$ pode ser feita sem perda de generalidade como veremos num exemplo a seguir.

Quando todos os pólos são distintos temos:

$$F(s) = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n} \quad (2.5)$$

onde a_i são constantes conhecidas como resíduos dos pólos p_i , respectivamente, e são calculados da seguinte forma:

$$a_i = (s + p_i)F(s)|_{s=-p_i} \quad (2.6)$$

Isto pode ser facilmente verificado. Veja no caso do resíduo do pólo $s = -p_1$. Multiplicando (2.5) por $s + p_1$ temos:

$$(s + p_1)F(s) = a_1 + \frac{a_2}{s + p_2}(s + p_1) + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}(s + p_1)$$

Logo para $s = -p_1$ encontramos (2.6) com $i = 1$. O procedimento é idêntico para os demais pólos.

O interesse da expansão por frações parciais é que cada termo da expansão (2.5) pode ser facilmente transformado para o domínio do tempo com a relação $\mathcal{L}[a_i e^{-p_i t} u(t)] = \frac{a_i}{s+p_i}$, logo:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_1}{s+p_1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_2}{s+p_2}\right] + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_n}{s+p_n}\right] \\ &= a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Note que a expansão por frações parciais (2.5) é válida para pólos reais e complexos não repetidos. Para pólos reais os resíduos (2.6) são reais e para pólos complexos os resíduos são complexos.

Exemplo 2.19 (Pólos Reais) Calcule a função no tempo cuja transformada é

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Solução: Com (2.5) e (2.6) se obtém:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2} \\ a_1 &= F(s)(s+1)|_{s=-1} = 2 \\ a_2 &= F(s)(s+2)|_{s=-2} = -1 \end{aligned}$$

Assim,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Exemplo 2.20 (Não Causal) Calcule a transformada inversa da função

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

Solução: Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador devemos dividir um pelo outro até que o resto da divisão seja uma função com grau do numerador menor que o grau do denominador, como indicado a seguir.

$$\begin{aligned} G(s) &= s+2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ &= s+2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[s] + \mathcal{L}^{-1}[2] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right] \\ &= \frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0^- \end{aligned}$$

Exemplo 2.21 (Pólos Complexos) Calcule a transformada inversa da função

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

Solução: Note que os pólos são complexos pois $s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + j2)(s + 1 - j2)$. Nesses casos a função temporal sempre envolve o produto de uma exponencial e um seno ou cosseno como indicado a seguir:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \sin \omega_0 t] = \frac{\omega_0}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cos \omega_0 t] = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

Nas transformadas acima α é a parte real dos pólos e ω_0 é a parte imaginária dos pólos. Verifique que os pólos são $\alpha \pm j\omega_0$. Para o exemplo em questão temos $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2$ e com algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$F(s) = \frac{2s + 12}{(s + 1)^2 + 2^2} = A \frac{\omega_0}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2} + B \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

Logo $2s + 12 = A\omega_0 + B(s - \alpha)$. Como $\omega_0 = 2$ e $\alpha = -1$ temos por igualdade polinomial $B = 2$ e $A = 5$ o que resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] \\ &= 5e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Problema 2.5 Refaça o exemplo 2.21 utilizando o método de expansão por frações parciais indicado em (2.5). Obtenha a mesma expressão para $f(t)$.

2.4.2 Frações Parciais para pólos repetidos

Os métodos da seção anterior são válidos para pólos distintos. Nesta seção estudaremos o caso de pólos repetidos baseado num exemplo que pode ser facilmente generalizado.

Exemplo 2.22 Calcule a transformada inversa da função

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

Solução: Como o pólo tem multiplicidade três a expansão por frações parciais envolve três termos:

$$F(s) = \frac{b_3}{(s + 1)^3} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_1}{(s + 1)}$$

onde os coeficientes b_i , ($i = 1, 2, 3$), são os resíduos a serem determinados.

Para determiná-los multiplique os dois lados por $(s + 1)^3$ para obter:

$$(s + 1)^3 F(s) = b_3 + b_2(s + 1) + b_1(s + 1)^2$$

Com a igualdade polinomial acima utilize um dos dois métodos abaixo:

Método 1 Derivadas sucessivas de $(s + 1)^3 F(s)$

$$\Rightarrow b_3 = (s + 1)^3 F(s)|_{s=-1}$$

$$\frac{d}{ds}[(s + 1)^3 F(s)] = b_2 + 2b_1(s + 1)$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{d}{ds}[(s + 1)^3 F(s)]_{s=-1}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}[(s + 1)^3 F(s)] = 2b_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2}[(s + 1)^3 F(s)]_{s=-1}$$

Método 2 Atribuindo-se valores para s na igualdade

$$s = 0 \Rightarrow 3 = b_3 + b_2 + b_1$$

$$s = -1 \Rightarrow 2 = b_3$$

$$s = 1 \Rightarrow 6 = b_3 + 2b_2 + 4b_1$$

Os dois métodos acima levam aos mesmos valores dos resíduos: $b_3 = 2$, $b_2 = 0$, $b_1 = 1$ e portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0}{(s + 1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 1}\right] \\ &= t^2 e^{-t} + 0 + e^{-t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

2.4.3 Frações Parciais para casos especiais

Quando a transformada envolve pólos distintos e repetidos ou pólos reais e complexos podemos combinar os resultados das seções anteriores como ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 2.23 (Pólos distintos e repetidos) Calcule a transformada inversa da função

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^2(s + 2)}$$

Solução: A função possui um pólo $s = -2$ com multiplicidade um e um pólo $s = -1$ com multiplicidade dois. Nesse caso a expansão se faz como nas seções anteriores, isto é, o pólo com multiplicidade dois terá dois resíduos e o pólo com multiplicidade um terá um resíduo.

$$F(s) = \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_1}{(s + 1)} + \frac{b_0}{(s + 2)}$$

onde os coeficientes b_i , ($i = 0, 1, 2$), são os resíduos a serem determinados pelos métodos da seção anterior.

Exemplo 2.24 (Pólos reais e complexos) Calcule a transformada inversa da função

$$F(s) = \frac{2s + 12}{(s^2 + 2s + 5)(s + 1)}$$

Solução: A função possui dois pólos complexos e um real. Para utilizarmos os resultados das seções anteriores devemos primeiro separar os pólos complexos dos reais da seguinte forma:

$$F(s) = \frac{b_1s + b_0}{(s^2 + 2s + 5)} + \frac{b_2}{(s + 1)}$$

onde b_2 é determinado com (2.6) e b_0, b_1 são determinados por igualdade polinomial atribuindo-se valores para s . Com os valores de b_0, b_1, b_2 podemos utilizar os exemplos 2.21 e 2.19 para encontrar a função no domínio do tempo.

2.5 Sinais com energia limitada

Vamos definir energia de um sinal $f(t)$ como sendo:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt \quad (2.7)$$

Esta definição de energia é uma generalização do conceito de energia dissipada em resistores. Por exemplo, se $f(t)$ representa a tensão ou corrente num resistor unitário, a energia dissipada no resistor é dada pela integral acima. Os sinais que possuem energia limitada ($E < \infty$) são portanto de grande interesse prático.

Veremos a seguir que um sinal cuja transformada de Laplace é uma função racional que possui todos os pólos no semi-plano esquerdo estrito, isto é, pólos com parte real estritamente negativa, é um sinal de energia limitada. Para esses sinais a integral acima existe e é finita. Seja o seguinte sinal:

$$x(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-2t} + \alpha_3 e^{-t} + k_1 e^{-t} \sin \omega_0 t + k_2 e^{-t} \cos \omega_0 t, \quad t \geq 0$$

A transformada de $x(t)$ é:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+2} + \frac{\alpha_3}{s+1} + \frac{k_1 \omega_0}{(s+1)^2 + \omega_0^2} + \frac{k_2(s+1)}{(s+1)^2 + \omega_0^2}$$

Note que todos os pólos possuem parte real negativa, exceto o pólo na origem. Assim, os pólos reais de $X(s)$ tornam-se expoentes de funções exponenciais decrescentes no tempo. Os pólos complexos estão associados à sinais que causam oscilações amortecidas. O amortecimento dessas oscilações é definido pela parte real dos pólos ($Re[\text{pólos}] = -1$ no caso) e a frequência de oscilação é definida pela parte imaginária do pólo ($Im[\text{pólo}] = \omega_0$). O efeito temporal dos pólos com parte real negativa diminui exponencialmente e desaparece completamente em regime permanente, isto é, quando $t \rightarrow \infty$.

Um sinal $x(t)$ cuja transformada seja analítica no semi-plano direito ¹ mas tenha um pólo simples na origem vai ter um nível DC igual ao resíduo desse pólo (α_1 no caso acima). O valor do sinal $x(t)$ acima em regime permanente ($t \rightarrow \infty$) é constante e igual à α . Note que nesse caso o sinal não tem energia limitada pois a integral acima vai divergir dado que o sinal não converge para zero em regime.

Assim, um sinal qualquer $x(t)$ vai ter um valor zero em regime (converge para zero quando $t \rightarrow \infty$) apenas quando todos os pólos da transformada possuem parte real negativa. Se a transformada possui um pólo na origem (e os demais no semi-plano esquerdo estrito) o sinal será constante com um nível DC não nulo em regime. Em qualquer outra situação o sinal é divergente, isto é, não terá um valor de regime finito. A energia do sinal será limitada apenas no primeiro caso, isto é, quando o sinal converge para zero quando $t \rightarrow \infty$.

2.6 Resolução de Equações Diferenciais

Através das leis da física podemos obter um modelo de comportamento para todos os sistemas. Para sistemas dinâmicos esse modelo é uma equação diferencial. Este é o caso por exemplo de motores, circuitos, turbinas e todos os outros dispositivos estudados na engenharia. Saber como o sistema se comporta para dadas condições iniciais e uma dada excitação é equivalente a saber resolver a equação diferencial.

A Transformada de Laplace pode ser utilizada para resolver equações diferenciais lineares invariantes no tempo. Para isso basta transformar por Laplace cada um dos

¹Lembre-se que uma função é analítica numa dada região quando ela não possui pólos nessa região

termos da equação dif. obtendo assim a transformada da função que resolve a equação. Em seguida, utiliza-se a transformada inversa para encontrar a solução no domínio do tempo.

Exemplo 2.25 Resolva a seguinte equação diferencial $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = g(t)$, onde $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$ são constantes dadas e $g(t) = 0$.

Solução: Note que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x] &= X(s) \\ \mathcal{L}[\dot{x}] &= sX(s) - x(0) \\ \mathcal{L}[\ddot{x}] &= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\end{aligned}$$

Tomando-se a transformada dos dois lados da equação se obtém:

$$\begin{aligned}[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 2[sX(s) - x(0)] + 5X(s) &= 0 \\ \Rightarrow X(s) &= \frac{s+2}{s^2+2s+5}x(0) + \frac{1}{s^2+2s+5}\dot{x}(0)\end{aligned}$$

De forma similar ao exemplo 2.21 temos:

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+5}x(0) + \frac{1}{s^2+2s+5}x(0) + \frac{1}{s^2+2s+5}\dot{x}(0)$$

e conseqüentemente

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = [e^{-t}\cos(2t) + 0.5e^{-t}\sin(2t)]x(0) + 0.5e^{-t}\sin(2t)\dot{x}(0)$$

que é a solução da eq. diferencial.

Exemplo 2.26 Um determinado sistema é regido pela seguinte equação diferencial $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = g(t)$, onde as condições iniciais são nulas, isto é, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Encontre a resposta desse sistema quando o mesmo é excitado por um degrau de amplitude 3, isto é, $g(t) = 3u(t)$.

Solução: Note que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[3u(t)] &= \frac{3}{s} \\ \mathcal{L}[x] &= X(s) \\ \mathcal{L}[\dot{x}] &= sX(s) - x(0) = sX(s) \\ \mathcal{L}[\ddot{x}] &= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s)\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}s^2X(s) + 2sX(s) + 5X(s) &= \frac{3}{s} \\ X(s) &= \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{5s} - \frac{3}{5} \frac{s+2}{s^2+2s+5}\end{aligned}$$

Note que $s^2 + 2s + 5 = (s - \sigma)^2 + \omega^2$ onde σ, ω são as partes real e imaginária dos pólos (raízes de $s^2 + 2s + 5$). Para o caso em questão temos $\sigma = -1$, $\omega = 2$ e portanto:

$$X(s) = \frac{3}{5s} - \frac{3}{5} \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{5s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{5} \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}\right] \\ &= \frac{3}{5} - \frac{3}{10}e^{-t}\sin 2t - \frac{3}{5}e^{-t}\cos 2t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

A figura 2.11 ilustra o diagrama de simulação analógica da equação diferencial $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = g(t)$. A figura 2.12 mostra a resposta $x(t)$ da equação para quatro situações: (a) $g(t) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 0$; (b) $g(t) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 1$; (c) $g(t) = 3u(t)$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$; (d) $g(t) = 3u(t)$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(0) = 1$

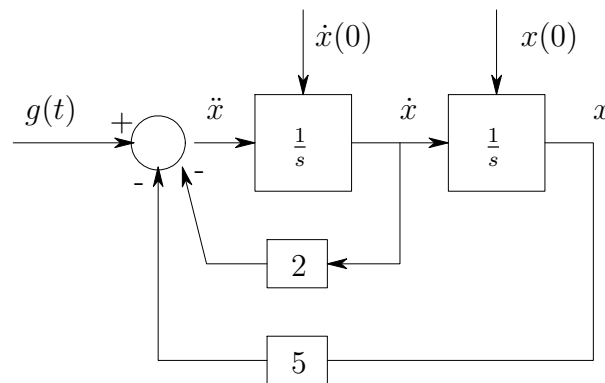


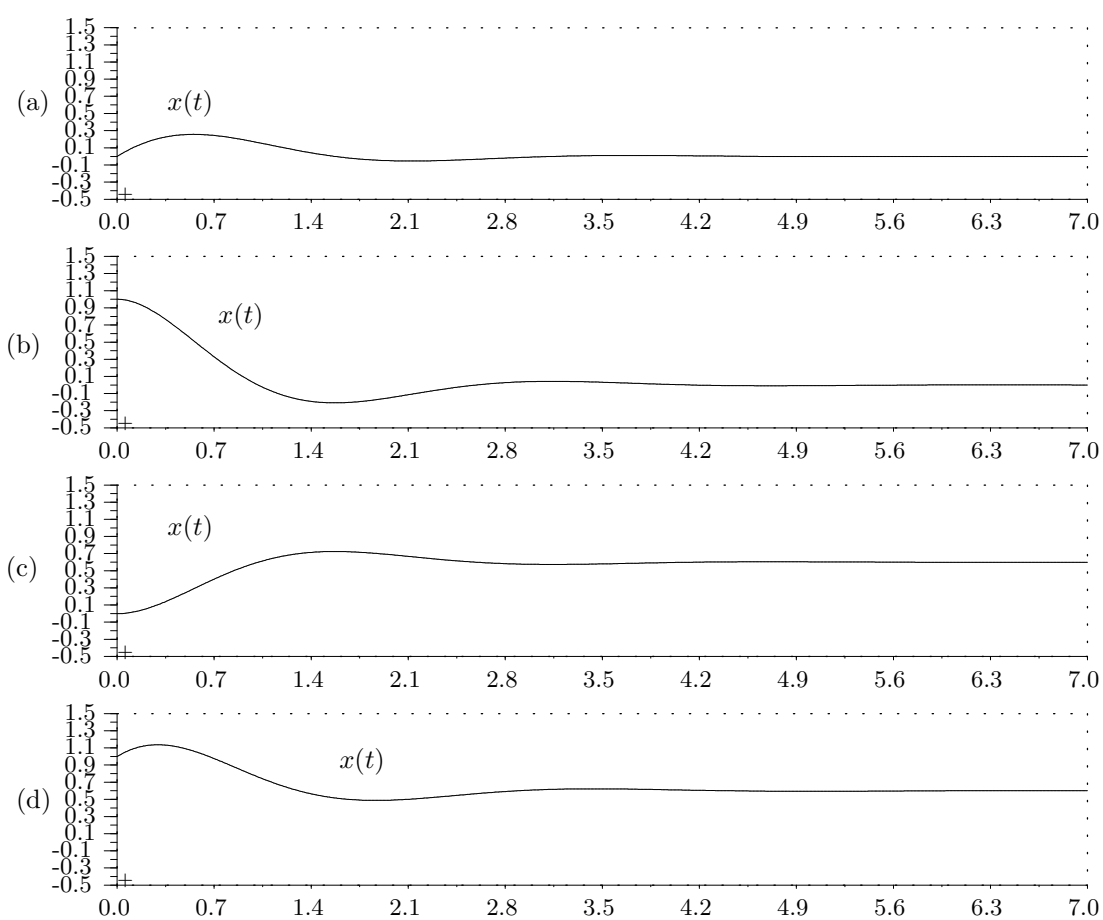
Figura 2.11: Diagrama de simulação analógica

2.7 Respostas de Estado Zero e Entrada Zero

A resposta de todo sistema linear invariante no tempo pode ser decomposta em duas parcelas: uma que depende do sistema e do sinal de entrada e outra que depende do sistema e das condições iniciais. A primeira parcela chamaremos de *Resposta de Estado Zero* já que esta parcela indica como um sistema, inicialmente em repouso (condições iniciais nulas), responde a um dado sinal de entrada. A segunda parcela chamaremos de *Resposta de Entrada Zero* pois ela indica como um sistema se comporta quando é deixado para responder livremente às suas condições iniciais (sem excitação externa).

As respostas de Estado Zero e Entrada Zero de um sistema descrito por (2.11) podem ser determinadas através da Transformada de Laplace.

Exemplo 2.27 Encontre as respostas de Estado Zero e Entrada Zero do circuito RLC série da figura 2.14.

Figura 2.12: Respostas $x(t)$ do diagrama de simulação analógica

Solução: Do exemplo 2.28 temos que o comportamento dinâmico entrada/saída do circuito é dado por (2.12). Tomando a transformada dos dois lados da equação temos:

$$\mathcal{L}[a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y] = \mathcal{L}[b_0x] \quad (2.8)$$

Pela linearidade temos:

$$a_2\mathcal{L}[\ddot{y}] + a_1\mathcal{L}[\dot{y}] + a_0\mathcal{L}[y] = b_0\mathcal{L}[x]$$

Sendo $Y(s) = \mathcal{L}[y]$ e $X(s) = \mathcal{L}[x]$, pela propriedade de derivação no tempo:

$$\begin{aligned} a_2[s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + a_1[sY(s) - y(0)] + a_0Y(s) &= b_0X(s) \\ \Rightarrow (a_2s^2 + a_1s + a_0)Y(s) &= b_0X(s) + (a_2s + a_1)y(0) + a_2\dot{y}(0) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}X(s) + \frac{a_2s + a_1}{a_2s^2 + a_1s + a_0}y(0) + \frac{a_2}{a_2s^2 + a_1s + a_0}\dot{y}(0) \\ Y(s) &= F(s)X(s) + F_0(s)y(0) + F_1(s)\dot{y}(0) \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde

$$F(s) = \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad F_0(s) = \frac{a_2s + a_1}{a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad F_1(s) = \frac{a_2}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

Considerando $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, $f_0(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_0(s)]$ e $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]$ podemos então reescrever a expressão acima com o auxílio da anti-transformada na forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)X(s)] + y(0)\mathcal{L}^{-1}[F_0(s)] + \dot{y}(0)\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] \\ &= f(t) * x(t) + y(0)f_0(t) + \dot{y}(0)f_1(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

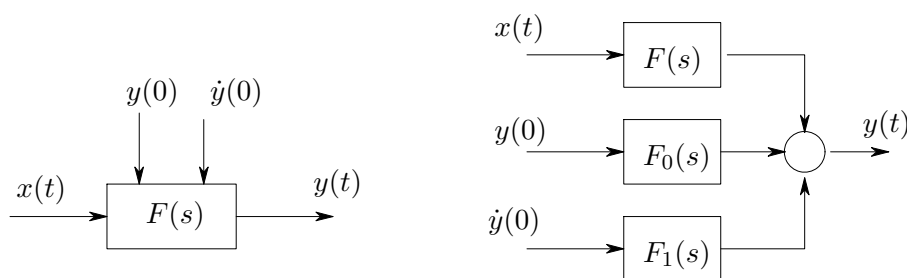


Figura 2.13: Respostas de Estado Zero e Entrada Zero

Note que $f(t)$, $f_0(t)$ e $f_1(t)$ dependem apenas dos parâmetros físicos e da estrutura entrada/saída do sistema. Não dependem nem da entrada $x(t)$ nem da saída $y(t)$ nem das condições iniciais do sistema.

*A resposta de Estado Zero do circuito é a parcela de (2.10) que depende da entrada: $Y_{esz}(s) = F(s)X(s)$ no domínio da frequência ou de forma equivalente $y_{esz}(t) = f(t) * x(t)$ no domínio do tempo.*

A resposta de Entrada Zero é a parcela de (2.10) que depende das condições iniciais: $Y_{enz}(s) = F_0(s)y(0) + F_1(s)\dot{y}(0)$ no domínio da frequência ou de forma equivalente $y(0)f_0(t) + \dot{y}(0)f_1(t)$ no domínio do tempo.

Podemos agora generalizar os resultados acima para sistemas de ordem mais elevada. Considere um sistema descrito pela seguinte equação diferencial:

$$a_n \partial^n y(t) + \cdots + a_1 \partial y(t) + a_0 y(t) = b_m \partial^m x(t) + \cdots + b_1 \partial x(t) + b_0 x(t) \quad (2.11)$$

$$\partial^n y(t)|_{t=0} = c_n, \dots, \partial y(t)|_{t=0} = c_1, y(t)|_{t=0} = c_0$$

onde $\partial \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}$ é o operador derivada temporal, a_i ($i = 0, \dots, n$) e b_i ($i = 0, \dots, m$) são coeficientes constantes que dependem dos parâmetros físicos do sistema, c_i ($i = 0, \dots, n$) são constantes que definem as condições iniciais do sistema, $x(t)$ é o sinal de entrada e $y(t)$ é o sinal de saída.

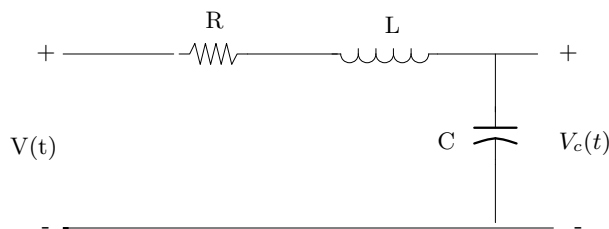


Figura 2.14: Circuito RLC série

Exemplo 2.28 Considere o circuito RLC série descrito na figura 2.14. A entrada do sistema é a tensão $V(t)$ e a saída é a tensão no capacitor $V_c(t)$. Em termos da notação acima temos $x(t) = V(t)$ e $y(t) = V_c(t)$ e o comportamento dinâmico entrada/saída é regido pela seguinte equação diferencial:

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 x \quad (2.12)$$

com $a_0 = 1$, $a_1 = RC$, $a_2 = LC$ e $b_0 = 1$. As condições iniciais são a tensão no capacitor no instante inicial $x(0) = V_c(0)$ e a derivada da tensão no instante inicial $\dot{x}(0) = \dot{V}_c(0)$.

Se ao invés do sistema de segunda ordem do exemplo acima, considerarmos um sistema de ordem genérica como em (2.11) obteríamos:

$$y(t) = f(t) * x(t) + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t) c_i \quad (2.13)$$

onde $c_i = \frac{d^i y(t)}{dt^i} \big|_{t=0}$ são as condições iniciais.

Da expressão acima podemos extrair informações muito importantes:

1. A saída de um sistema depende dos seus parâmetros físicos e da sua estrutura entrada/saída. Isto é representado em (2.13) pelas funções $f(t), f_0(t), \dots, f_{n-1}(t)$.

2. A saída de um sistema depende da entrada $x(t)$ que lhe é aplicada. Esta dependência é dada pela convolução $f(t) * x(t)$ que recebe o nome de *resposta de estado zero* do sistema. Esta é a resposta do sistema quando as condições iniciais são nulas.

$$y_{esz}(t) = f(t) * x(t) \quad , \quad Y_{esz}(s) = F(s)X(s) \quad (2.14)$$

3. A saída de um sistema depende das condições iniciais do mesmo. Este fato pode ser verificado em (2.13) pela presença das constantes c_i que são as condições iniciais. Esta parcela da resposta recebe o nome de *resposta de entrada zero* do sistema. Esta é a resposta do sistema quando a entrada é nula.

$$y_{enz}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t)c_i \quad , \quad Y_{enz}(s) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(s)c_i \quad (2.15)$$

4. A resposta de Entrada Zero é linear em relação ao conjunto de condições iniciais e a resposta de estado zero é linear em relação à entrada.

Problema 2.6 Considere o circuito RLC série da figura 2.14. Calcule as respostas de Entrada Zero e de Estado Zero supondo $R = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, condições iniciais $V_c(0) = 1V$, $\dot{V}_c(0) = 1V/\text{seg}$ e sinal de entrada degrau unitário.

Problema 2.7 A resposta de um sistema linear invariante ao degrau unitário e dadas condições iniciais é $y_1(t) = 2 - 2e^{-2t} + e^{-3t}$, $t \geq 0$. Para um degrau de amplitude 3 e o dobro das condições iniciais anteriores a resposta é $y_2(t) = 6 - 10e^{-2t} + 6e^{-3t}$. Pede-se:

- A resposta de Estado Zero para um degrau unitário.
- A resposta de Estado Zero ao impulso.
- A resposta de Entrada Zero associada à $y_1(t)$.
- As condições iniciais associadas à resposta $y_1(t)$.

2.8 Função de Transferência e Estabilidade

Veremos a seguir que a resposta de Estado Zero de um sistema está associada à duas noções muito importantes: função de transferência e estabilidade.

Definição 2.4 (Função de Transferência) Função de transferência é uma função complexa que representa a relação saída/entrada do sistema para condições iniciais nulas.

Pela definição acima nota-se que a noção de função de transferência está relacionada com a resposta de Estado Zero do sistema. A relação complexa saída/entrada de um sistema com condições iniciais nulas pode ser obtida diretamente da resposta de Estado

Zero (2.14): $Y(s)/X(s) = F(s)$. Assim, um sistema que possua a resposta de Estado Zero (2.14) terá $F(s)$ como função de transferência. Quando se conhece a função de transferência $F(s)$ de um sistema e a transformada do sinal de entrada $X(s)$ se conhece também a resposta de Estado Zero do mesmo que é dada por (2.14). É importante notar que a função de transferência depende apenas dos parâmetros físicos do sistema e da estrutura entrada/saída do mesmo. Veja o exemplo 2.27. A entrada e as condições iniciais não afetam a função de transferência.

Quando as condições iniciais são nulas resposta total do sistema é a própria resposta de Estado Zero do mesmo, como pode ser visto nas equações (2.9) e (2.10).

$$\text{Domínio do Tempo: } y(t) = y_{esz}(t) = f(t) * x(t)$$

$$\text{Domínio da Frequência: } Y(s) = Y_{esz}(s) = F(s)X(s)$$

A função $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ recebe o nome de Resposta Impulsional pois $f(t)$ é a resposta do sistema quando as condições iniciais são nulas e a entrada $x(t)$ é um impulso no instante $t = 0$ ($X(s) = 1$).

Definição 2.5 (Sistemas Causais ou Não-Antecipativos) *Um sistema dinâmico é dito ser Causal ou Não-Antecipativo se sua Resposta Impulsional é nula para $t < 0$.*

Pela definição acima nota-se que a resposta $y(t)$ de um sistema causal excitado com um sinal $x(t)$, apresenta a seguinte propriedade: o valor de $y(t)|_{t=t_f}$ só depende da entrada $x(t)$ e da resposta impulsional $f(t)$ para valores de tempo $t \leq t_f$. Em outras palavras, a dinâmica de um sistema causal em qualquer instante de tempo $t = t_f$ depende (não depende) da entrada e da resposta impulsional para valores de tempo menores (maiores) que t_f . Essa propriedade é mostrada a seguir.

$$y(t) = f(t) * x(t) = \int_0^\infty f(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

para $t = t_f$ temos $f(t_f - \tau) = 0$ para $\tau > t_f$. Logo $f(t_f - \tau)x(\tau) = 0$ para $\tau > t_f$ e portanto:

$$y(t_f) = \int_0^{t_f} f(t_f - \tau)x(\tau)f\tau$$

só depende de $f(t)$ e $x(t)$ para $t < t_f$.

Outra noção muito importante é a de estabilidade de sistemas.

Definição 2.6 (Estabilidade de Sistemas) *Um sistema é dito ser estável se todos os pólos da sua função de transferência estão localizados no semi-plano esquerdo estrito, isto é, $\text{Re}[\text{pólos}] < 0$. Caso contrário o sistema é dito ser instável.*

Pela definição acima nota-se que a estabilidade é uma propriedade intrínseca do sistema. Ela só depende da sua função de transferência e portanto dos seus parâmetros físicos e da estrutura entrada/saída.

Exemplo 2.29 *Mostre que num sistema estável, a resposta de Estado Zero será um sinal de energia finita para todo sinal de entrada de energia finita.*

Solução: A resposta de Estado Zero de um sistema é dada por (2.14). Se o sistema é estável então todos os pólos de $F(s)$ possuem parte real estritamente negativa. Além disso, se o sinal de entrada possui energia finita, sua transformada possui todos os pólos também com parte real estritamente negativa (veja seção 2.5). Como a transformada do sinal de saída $Y(s)$ é dada por $Y(s) = F(s)X(s)$ podemos verificar que todos os pólos de $Y(s)$ também estão no semi-plano esquerdo estrito. Portanto o sinal de saída possui energia limitada sempre que o sistema for estável e o sinal de entrada possuir energia limitada.

Problema 2.8 *Para o circuito RLC série do problema 2.6 pede-se:*

a) *Verifique se o sistema é estável.*

b) *Calcule a resposta impulsional.*

c) *No exemplo 2.29 analisa-se a energia da resposta de Estado Zero. Verifique que no circuito em questão, sinais de entrada de energia limitada produzem respostas totais com energia limitada também. Isto é, a resposta de Entrada Zero do circuito também possui energia limitada.*

2.9 Diagrama de Blocos

O diagrama de blocos é utilizado para representar esquematicamente como funciona o sistema. Cada elemento do sistema é representado por um bloco que contém sua Função de Transferência. Esses blocos são então interligados o que permite representar a interdependência desses elementos. Os diagramas são normalmente utilizados para representar a resposta de Estado Zero. Quando se deseja a resposta de Entrada Zero também, as condições iniciais devem ser fornecidas. Quando elas não são fornecidas assume-se serem nulas.

Um diagrama de blocos pode ser visto como uma forma esquemática de representar variáveis se relacionam num conjunto de equações. Veja o que seria um diagrama de blocos para um caso já bastante conhecido que é o circuito *RLC série*.

Exemplo 2.30 *Represente as interdependências das variáveis $x(t)$, $I(t)$, $y(t)$ no circuito da figura 2.15 através de um diagrama de blocos.*

Solução: O primeiro passo para a obtenção do diagrama é a obtenção das equações que regem o comportamento do sistema. Nessas equações as variáveis de interesse devem aparecer explicitamente. As demais variáveis devem ser eliminadas. Isto se consegue escrevendo-as em função das variáveis de interesse. Veja como proceder no caso do circuito em questão.

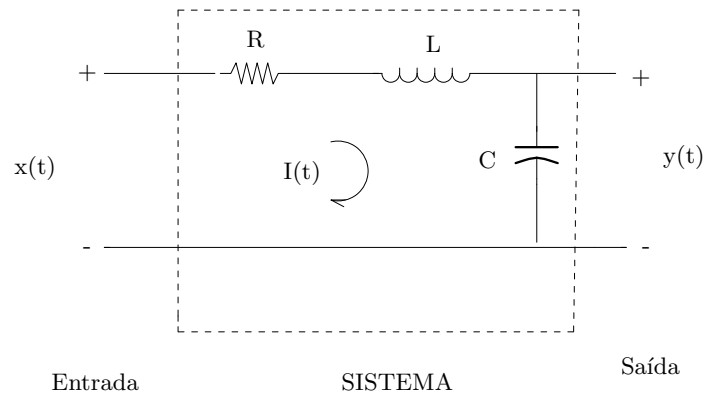


Figura 2.15: Diagrama entrada/saída de um circuito

Inicialmente vamos obter um diagrama onde apenas os sinais de entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ são de interesse, isto é a corrente não aparece nas equações. Obtendo as equações do circuito e eliminando a corrente ficamos com equação diferencial em $x(t)$ e $y(t)$.

$$\begin{cases} x(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{C}I(t) \end{cases} \Rightarrow RC\dot{y} + LC\ddot{y} + y = x$$

Sendo $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ temos para condições iniciais nulas:

$$RCsY(s) + LCs^2Y(s) + Y(s) = X(s)$$

Logo:

$$Y(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}X(s) \quad (2.16)$$

Portanto:

$$F(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

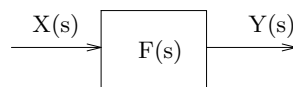


Figura 2.16: Diagrama de blocos simplificado

A função $F(s)$ é a transferência da tensão de entrada $X(s)$ para a tensão de saída $Y(s)$ e para condições iniciais nulas temos que a resposta do circuito para qualquer sinal de entrada $x(t)$ é dada por $y(t) = x(t) * f(t)$ onde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ é a resposta impulsional do circuito.

Note que no diagrama de blocos acima foram eliminadas as informações sobre todas as outras variáveis do circuito (corrente, etc). A Função de Transferência dá informação apenas sobre a relação de causa-efeito entre as variáveis de entrada e de saída.

É possível, no entanto, explicitar a dependência de outras variáveis no diagrama de blocos através de simples manipulação de equações. Por exemplo, para fazer aparecer a variável corrente no diagrama de blocos do circuito temos:

$$\begin{cases} X(s) = RI(s) + LsI(s) + Y(s) \\ CsY(s) = I(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) - Y(s) = (R + Ls)I(s) \rightarrow I(s) = \frac{1}{R+Ls}(X(s) - Y(s)) \\ Y(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \end{cases}$$

Agora essas equações podem ser transformadas em diagramas como mostra a figura 2.17.

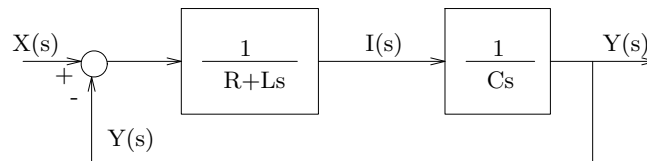


Figura 2.17: Diagrama de blocos detalhado

Note que os diagramas das figuras 2.16 e 2.17 são equivalentes e os sinais $X(s)$, $Y(s)$ são os mesmos nas duas configurações. Para se verificar isto basta manipular as equações como anteriormente, eliminando-se assim a variável corrente.

2.10 Sistemas Realimentados

A presença de uma malha fechada num diagrama de blocos caracteriza o que se chama de sistema realimentado. De uma maneira geral um sistema realimentado pode ser caracterizado pelo diagrama da figura 2.18 onde

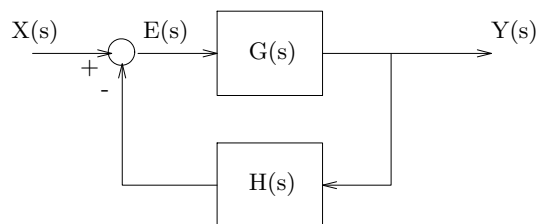


Figura 2.18: Sistema realimentado

$X(s)$ é a transformada do sinal de entrada.

$Y(s)$ é a transformada do sinal de saída.

$G(s)$ função de transferência do sistema a ser controlado, incluindo acionadores, mediadores e controladores (Filtros para fins de controle).

$H(s)$ função de transferência de realimentação que inclui transdutores e eventuais controladores adicionais.

A Função de Transferência entre $X(s)$ e $Y(s)$ no diagrama acima é conhecida como F.T. de malha fechada e pode ser obtida através das equações iniciadas no diagrama.

$$\begin{cases} E(s) = X(s) - H(s)Y(s) \\ Y(s) = G(s)E(s) \end{cases}$$

Para se obter a função de transferência entre $X(s)$ e $Y(s)$ deve-se eliminar todas as variáveis intermediárias, $E(s)$ no caso acima. Com isso temos a seguinte relação:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} X(s) \quad (2.17)$$

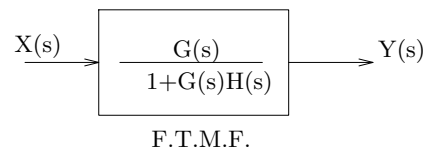


Figura 2.19: Sistema realimentado simplificado

que pode ser representada num diagrama simplificado como indicado na figura 2.19. Note que os diagramas das figuras 2.18 e 2.19 são equivalentes. Eles expressam a mesma relação entrada/saída, isto é, se a entrada é a mesma nos dois diagramas a saída também o é.

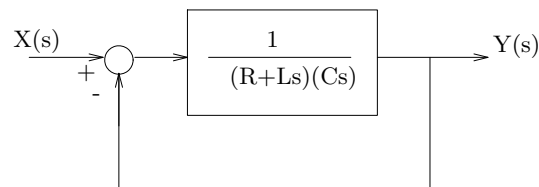


Figura 2.20: Diagrama de blocos de um circuito RLC-série

Exemplo 2.31 Vimos que a F.T. entre $X(s)$ e $Y(s)$ no circuito da figura 2.16 é $F(s) = 1/(LCs^2 + RCs + 1)$. Vimos também que ao fazer aparecer a corrente no diagrama de blocos do circuito, o diagrama resultante (Figura 2.17) fica na forma de um sistema realimentado do tipo da Figura 2.18. Para encontrar os valores de $G(s)$ e $H(s)$ vamos simplificar o diagrama da figura 2.17 como indicado na figura 2.20 de onde podemos mais facilmente obter por comparação:

$$G(s) = \frac{1}{(R + Ls)Cs} \quad e \quad H(s) = 1$$

Agora podemos facilmente verificar que ao utilizarmos a equação (2.17) com os valores de $G(s)$, $H(s)$ acima obtemos a função de transferência do circuito indicada em (2.16).

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

2.10.1 Estabilidade de Conexões

Vimos que um sistema é estável se todos os pólos da sua função de transferência possuem parte real negativa. Veremos a seguir que a conexão de dois sistemas estáveis pode resultar num sistema instável, dependendo de como ela é feita. Logo a conexão de sistemas deve ser feita com cuidado.

Sejam $G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$ e $G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$ duas F.T. estáveis, isto é, as raízes de $D_1(s)$ e $D_2(s)$ possuem parte real negativa.

O que poderíamos dizer das conexões abaixo?

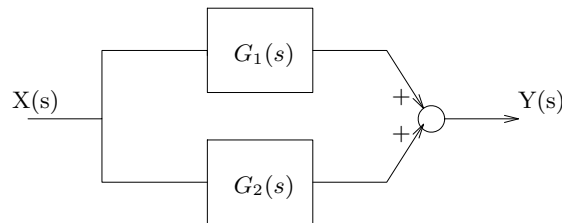


Figura 2.21: Conexão de dois sistemas em paralelo

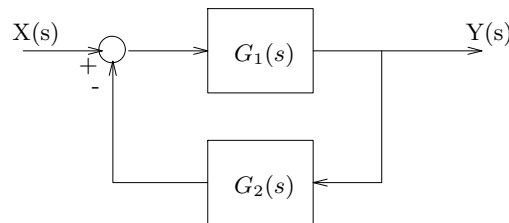


Figura 2.22: Conexão de dois sistemas em realimentação

A função de transferência de $X(s)$ para $Y(s)$ na conexão da Figura 2.21 é dada por:

$$\begin{aligned} Y(s) &= (G_1(s) + G_2(s))X(s) \\ &= \left(\frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)} \right) X(s) \end{aligned}$$

Como as raízes de $D_1(s)$ e de $D_2(s)$ possuem parte real negativa então as raízes de $D_1(s)D_2(s)$ possuem as mesmas características. Logo a função de transferência de $X(s)$ para $Y(s)$ na conexão da Figura 2.21 é estável.

Já no caso da conexão da Figura 2.22 temos:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} X(s) \\ &= \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)} X(s) \end{aligned}$$

Agora as raízes do polinômio $D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)$ podem ter parte real positiva mesmo se as raízes de $D_1(s)$ e $D_2(s)$ possuem parte real negativa. Esse é o caso, por exemplo, se $N_1(s) = 2$, $N_2(s) = -1$ e $D_1(s) = D_2(s) = s + 1$.

2.10.2 Sistemas Realimentados em presença de distúrbios

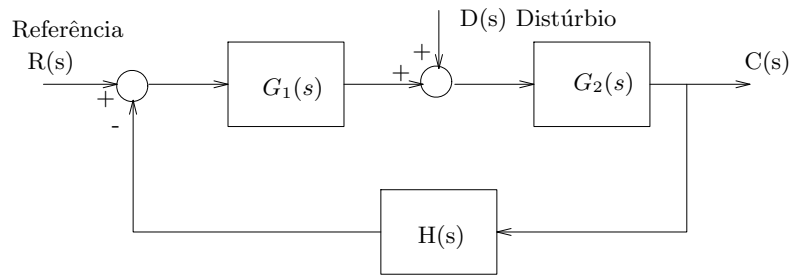


Figura 2.23: Sistema realimentado perturbado

No esquema acima, a saída $C(s)$ é afetada tanto pela referência $R(s)$ quanto pela perturbação $D(s)$. Quando as duas entradas $R(s)$ e $D(s)$ são independentes entre si então o efeito dessas entradas sobre a saída $C(s)$ pode ser obtido de maneira também independente através do princípio da superposição dos efeitos (Linearidade).

$$C_{total}(s) = C_R(s) + C_D(s) \rightarrow \begin{cases} C_R(s) = C(s) & \text{para } D(s) = 0 \\ C_D(s) = C(s) & \text{para } R(s) = 0 \end{cases}$$

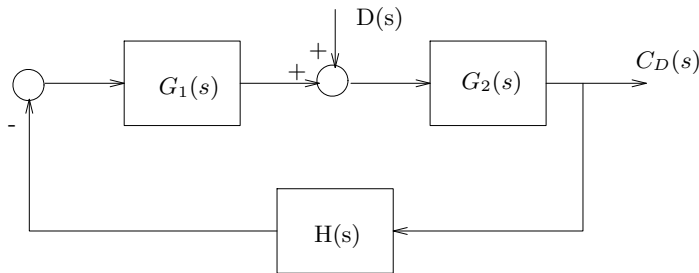


Figura 2.24: Diagrama para referência nula

Quando $R(s) = 0$ obtém-se o diagrama da figura 2.24, e utilizando (2.17) temos:

$$C_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H(s)G_1(s)} D(s)$$

Quando $D(s) = 0$ tem-se o diagrama da figura 2.25 e novamente com (2.17) temos:

$$C_R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$

Logo:

$$C_{total}(s) = C_D(s) + C_R(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H(s)G_1(s)} D(s) + \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$

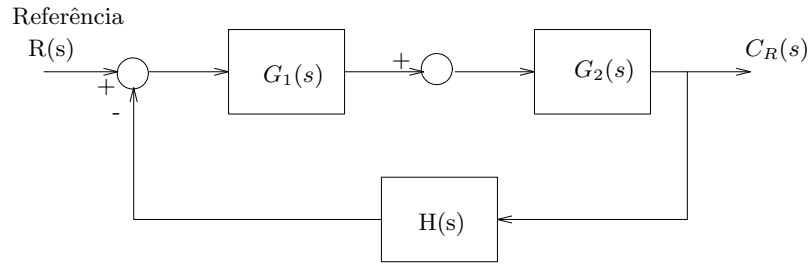


Figura 2.25: Diagrama para distúrbio nulo

Sistemas realimentados, quando bem projetados, são menos sensíveis à perturbações que sistemas sem realimentação (Malha Aberta). Isto se consegue projetando-se controladores (filtros de controle) que forçam a parcela $C_R(s)$ devido ao sinal de referência ser dominante em relação à parcela $C_D(s)$ devido ao distúrbio.

2.11 Problemas complementares

Problema 2.9 Calcule a transformada de Laplace das funções:

a) $f(t) = \exp(-10t) \quad , t \geq 0$

b) $f(t) = \cos(10t + \pi/3) \quad , t \geq 0$

Problema 2.10 O comportamento de um determinado sistema é regido pela equação diferencial $\dot{x} + 2x = f$. Calcule a resposta desse sistema quando o mesmo é excitado com um degrau unitário e condições iniciais $x(0) = 1$. Identifique a função de transferência, a resposta de Entrada Zero e a resposta de Estado Zero e verifique se o sistema é estável.

Problema 2.11 Sabendo que a resposta impulsional do sistema da figura 2.26(a) é $w(t) = 2\exp(-t) \quad , t \geq 0$ verifique se o sistema realimentado da figura 2.26(b) é estável. Justifique sua resposta.

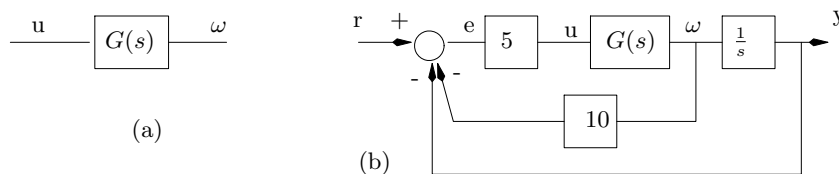


Figura 2.26: Sistema para controle de posição

Capítulo 3

Resposta ao Degrau

3.1 Introdução

Um grande número de problemas de controle consiste em se manter constante a variável de saída. Veja por exemplo o problema de controle de posicionamento de uma antena indicado na figura 1.4. A entrada do sistema, que representa o valor desejado da variável controlada (saída) é neste caso um degrau com amplitude igual ao valor desejado para a saída. Quando se quer mudar a posição da antena de uma posição inicial, digamos *posição zero*, para uma nova posição, digamos *posição um*, o sinal de entrada deve ser um degrau unitário. Ao se aplicar um degrau na entrada desse sistema de controle, a posição da antena vai evoluir da *posição zero* para a *posição um* segundo uma curva que depende de como o sistema de controle foi projetado. Curvas típicas dessa evolução podem ser encontradas na figura 3.1. Normalmente deseja-se um transitório rápido, com poucas oscilações e que a variável controlada, posição da antena no caso, vá para o valor desejado sem erro significativo de posição em regime, isto é, erro de regime desprezível. Para atender todos esses requisitos de performance, quando isso é possível, o engenheiro deve saber projetar adequadamente os filtros de controle do sistema. O primeiro passo, no entanto, é saber especificar matematicamente os índices de performance desejados para a resposta. Veja na figura 3.1 que a resposta (a) é mais oscilatória que as demais. A resposta (c) atinge o valor de regime mais rápido que as demais e todas as três possuem erro de regime nulo (valor final da resposta é exatamente o valor desejado).

Neste capítulo estudaremos alguns índices de performance da resposta ao degrau que nos permitirá quantificar matematicamente o tamanho das oscilações da resposta, a rapidez da resposta e o erro de regime cometido.

Outros sinais de entrada como impulso e função rampa ($x(t) = t$) também são de interesse. No entanto, para condições iniciais nulas, a resposta de um sistema (linear invariante) ao impulso, degrau, e rampa estão ligadas entre si. Para ilustrar este fato, seja $F(s)$ a F.T. de um sistema linear invariante indicado na figura 3.2.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

- Resposta Impulsional: $X(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = F(s) \Rightarrow y(t) = f(t)$

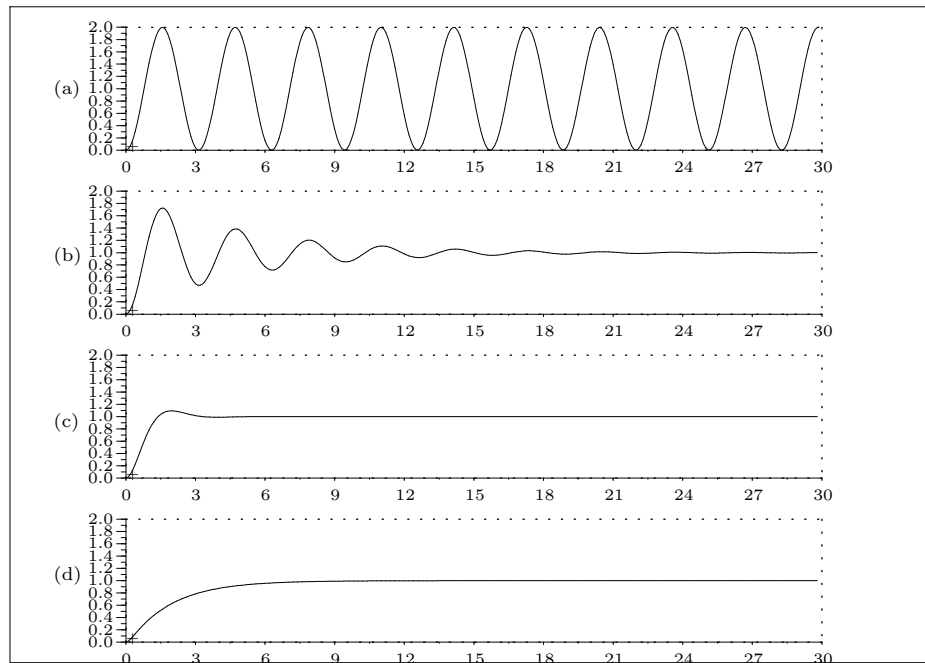


Figura 3.1: Curvas típicas da resposta ao degrau

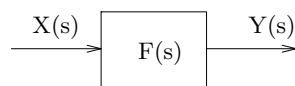


Figura 3.2: Diagrama de bloco entrada/saída

- Resposta ao Degrau: $X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}F(s) \Rightarrow y(t) = \int_0^t f(t)dt$
- Resposta à Rampa: $X(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow y(t) = \int_0^t \int_0^t f(t)dt dt$

Note que, para condições iniciais nulas, a resposta ao impulso e a resposta à rampa são respectivamente a derivada e a integral da resposta ao degrau. Por esse motivo vamos nos concentrar na resposta ao degrau de agora em diante.

3.2 Análise de Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas cuja função de transferência possui apenas um pólo são conhecidos como sistemas de primeira ordem.

Exemplo 3.1 *Verifique que o circuito da figura 3.3 é um sistema de primeira ordem.*

Solução: Para mostrar que o sistema é de primeira ordem precisamos encontrar a função de transferência do mesmo e para isso se supõe que o circuito possui condições iniciais nulas. As equações que regem o comportamento desse sistema são indicadas abaixo.

$$\begin{cases} -x + RI + y = 0 \\ I = C\dot{y} \end{cases}, \text{ condição inicial nula } (y(0) = 0)$$

Aplicando Laplace temos:

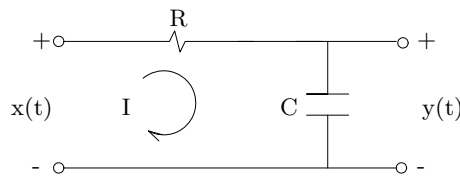


Figura 3.3: Circuito RC

$$-x + RC\dot{y} + y = 0 \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

onde $T = RC$. Como a função de transferência possui apenas um pólo o sistema é

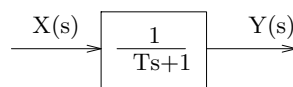


Figura 3.4: Sistema de primeira ordem padrão

realmente de primeira ordem.

Exemplo 3.2 Podemos expressar a velocidade (ω) do eixo de um motor DC em função da tensão de entrada (V) através de uma equação diferencial do tipo $J\dot{\omega} + f\omega = bV$ onde b, J, f são constantes físicas do motor. Mostre que esse sistema é de ordem 1.

Solução: Devemos mostrar que a função de transferência possui apenas um pólo. Tomando a transformada de Laplace encontramos $\omega = \frac{b}{Js+f}V$ que mostra o resultado desejado.

A resposta ao degrau de um sistema cuja função de transferência é do tipo $F(s) = \frac{1}{Ts+1}$ é obtida da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1}X(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s}$$

com condições iniciais nulas e $\mathcal{L}[X(s)] = \frac{1}{s}$.

Expandindo por frações parciais e anti-transformando temos:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} \Rightarrow y(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$

A resposta indicada acima possui propriedades interessantes:

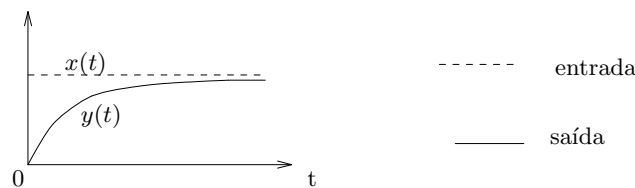


Figura 3.5: Resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem padrão

1) $\frac{dy}{dt}|_{t=0} = \frac{1}{T}$

2) Para $t = T \Rightarrow y(T) = 1 - e^{-1} = 0,632$, isto é, decorridos T segundos a resposta atinge 63,2% do seu valor final de regime permanente.

$$t = 2T \Rightarrow y(2T) = 1 - e^{-2} = 0,865$$

$$t = 3T \Rightarrow y(3T) = 1 - e^{-3} = 0,950$$

$$t = 4T \Rightarrow y(4T) = 1 - e^{-4} = 0,982$$

$$t = 5T \Rightarrow y(5T) = 1 - e^{-5} = 0,993$$

As duas propriedades acima podem ser utilizadas para se encontrar o valor da constante de tempo T quando a resposta ao degrau for obtida experimentalmente. Certifique-se no experimento de que as condições iniciais são realmente nulas e que a função de transferência é do tipo $\frac{1}{Ts+1}$.

3.3 Análise de Sistemas de Segunda Ordem

Sistemas de segunda ordem são aqueles cuja função de transferência possui dois pólos. Nesta seção vamos estudar um tipo especial de sistemas de segundo ordem conhecido na literatura de controle como sistema de segunda ordem padrão:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.1)$$

onde ξ e ω_n recebem o nome de *taxa de amortecimento* e *frequência natural* do sistema respectivamente. Os valores desses parâmetros dependem dos parâmetros físicos do sistema estudado, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.3 Encontre os valores ξ e ω_n da forma padrão para o sistema de segunda ordem da figura 3.6.

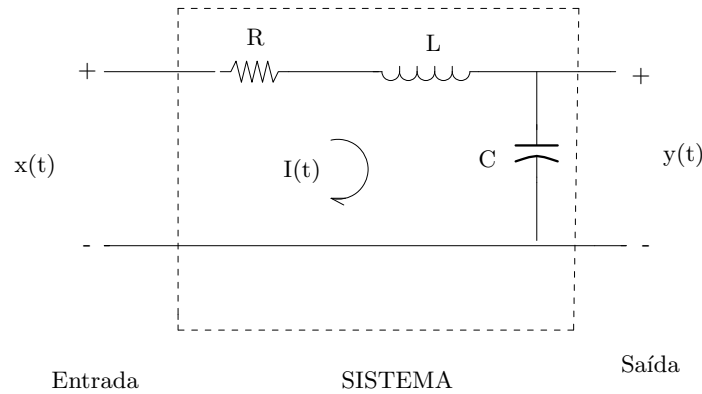


Figura 3.6: Sistema de segunda ordem padrão

Solução: O primeiro passo para se resolver o problema é obter a função de transferência do sistema, o que já foi determinado no exemplo 2.30, e é indicada a seguir.

$$X(s) = (RCs + LCs^2 + 1)Y(s) \rightarrow Y(s) = F(s)X(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Por comparação com (3.1) temos:

$$F(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Logo:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC} \quad ; \quad 2\xi\omega_n = \frac{R}{L} \Rightarrow \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Note que a taxa de amortecimento ξ depende linearmente da resistência do circuito e esta é responsável pela dissipação de energia. Já a frequência natural ω_n depende dos

valores da capacitância e indutância que são os elementos responsáveis pelas oscilações da resposta. Num sistema sem amortecimento, isto é $R = 0$ e portanto $\xi = 0$, a resposta oscila com a frequência natural do sistema. Este é o caso da resposta da figura 3.1(a). Mas quando existe amortecimento duas situações podem ocorrer: **i)** o amortecimento é pequeno causando resposta oscilatória e nesse caso a frequência de oscilação é menor que a frequência natural do sistema. Essa situação está indicada na figura 3.1(b) e (c); **ii)** o amortecimento é grande e nesse caso a resposta não é mais oscilatória, como ilustra a figura 3.1(d). Na literatura o caso com pouco amortecimento é conhecido como subamortecido e o caso com muito amortecimento recebe o nome de superamortecido.

3.3.1 Caso sem amortecimento ($\xi = 0$)

Se a resistência do circuito é nula, o circuito é um oscilador ideal e não existe dissipação de energia. Isso indica que a resposta ao degrau do sistema é oscilatória não amortecida. Sistemas que não dissipam energia possuem coeficiente de amortecimento ξ nulo. Veja o que acontece no exemplo 3.3.

A resposta ao degrau ($X(s) = 1/s$) quando $\xi = 0$ é :

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)s}$$

e pela transformada inversa encontramos

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

que corresponde à curva da figura 3.1(a) para $\omega_n = 2$.

Note que nesse caso ($\xi = 0$) os pólos da função de transferência estão sobre o eixo imaginário o que confirma o fato de que o amortecimento da resposta é definido pela parte real dos pólos. Como a parte real é nula nesse caso, o amortecimento também o é. Note ainda que o valor da parte imaginária dos pólos define a frequência com que a resposta oscila.

3.3.2 Caso Subamortecido ($0 < \xi < 1$)

Quando $0 < \xi < 1$ os pólos da função de transferência indicada em (3.1) são complexos e do lado esquerdo do eixo imaginário. Isto pode ser verificado da seguinte forma. Os pólos são dados pela equação:

$$p_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

que podemos escrever como:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$$

onde $\sigma = -\xi\omega_n$ é a parte real dos pólos e $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ é a parte imaginária, também chamada de *frequência natural amortecida*. A frequência natural do sistema ω_n é o módulo dos pólos $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$.

A resposta ao degrau unitário é dada por $Y(s) = F(s)R(s)$ com $R(s) = 1/s$. Logo:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

com o auxílio da tabela de anti-transformada temos:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - \frac{e^{\sigma t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen}(\omega_d t + \phi), \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \quad (3.2)$$

Na figura 3.1(b) se encontra a resposta $y(t)$ para $\xi = 0,1$ e $\omega_n = 2$ e no caso 3.1(c) para $\xi = 0,6$ e $\omega_n = 2$.

Problema 3.1 Calcule o valor de regime permanente da resposta ao degrau de um sistema na forma padrão (3.1). Qual é a diferença entre os valores da entrada e da saída em regime permanente? Dica: Utilize o teorema do valor final.

3.3.3 Caso Superamortecido ($\xi \geq 1$)

Se $\xi \geq 1$ os pólos da função de transferência (3.1) são reais e os dois negativos. A saída para uma entrada degrau unitário é:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + s_1)(s + s_2)s}$$

com $s_{1,2} = (\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$. Com o uso de tabelas de transformadas obtém-se:

$$y(t) = 1 + \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Esta resposta pode ser vista na figura 3.1(d) para $\xi = 2$ e $\omega_n = 2$. Para o caso particular de $\xi = 1$ a expressão $y(t)$ acima precisa ser modificada e pode ser encontrada em [1]. Note que se $\xi \gg 1$ então, para o mesmo valor de ω_n , temos $|s_1| \gg |s_2|$ e portanto o efeito do pólo s_1 sobre a resposta desaparece bem mais rápido que o efeito do pólo s_2 que está mais próximo do eixo imaginário. Sendo assim para valores de $\xi \gg 1$ o sistema se torna extremamente lento. Um sistema de primeira ordem com um pólo s_2 teria uma resposta muito parecida.

3.3.4 Caso instável ($\xi < 0$)

Para valores negativos de ξ um dos pólos da função de transferência (3.1) é positivo e portanto a saída diverge exponencialmente (instabilidade).

Note que no caso do circuito do exemplo 3.3 a taxa de amortecimento será sempre positiva (ou nula quando $R = 0$) devido à dissipação de energia no resistor.

Problema 3.2 Mostre que quando $\xi < 0$ um dos pólos de $F(s)$ em (3.1) será sempre positivo e devido à isso a resposta ao impulso cresce exponencialmente com uma taxa que depende do pólo positivo.

3.4 Índices de desempenho

Nesta seção estudaremos formas de classificar quão boas são as respostas da figura 3.1. Como a resposta transitória à um degrau normalmente apresenta oscilações antes de atingir o regime permanente, torna-se imperativo a criação de índices de desempenho que permitam quantificar tamanho de oscilações, tempo de duração do transitório, etc. São comuns os seguintes índices:

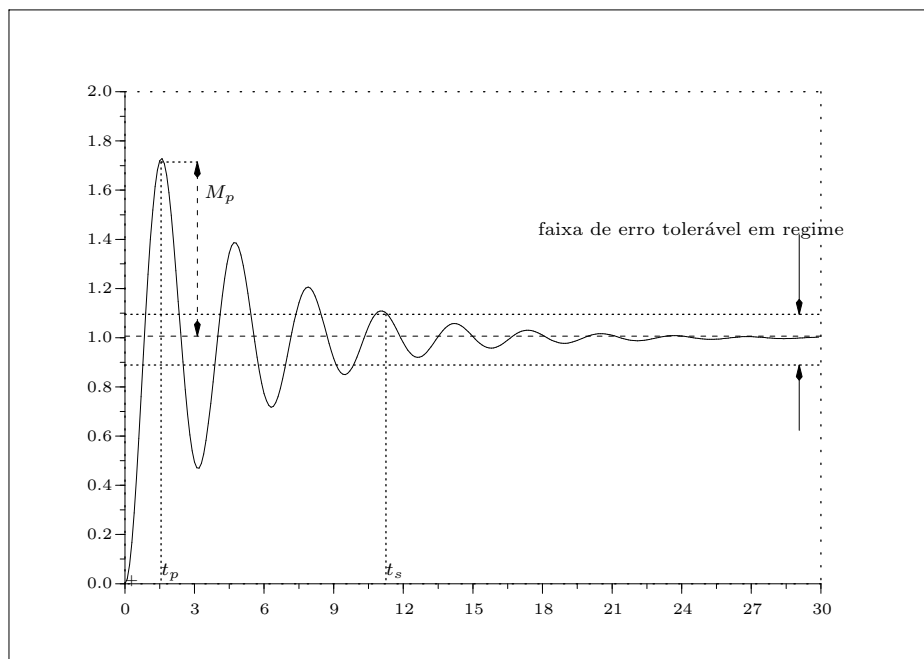


Figura 3.7: Índices de desempenho para resposta ao degrau

t_p (**instante de pico**) É o tempo necessário para a resposta atingir o seu valor máximo.

M_p (**sobressinal máximo**) É o valor relativo da diferença entre o valor máximo da saída (ao longo do tempo) e o valor da saída em regime.

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

t_s (**tempo de acomodação**) Tempo necessário para confinar a resposta numa faixa em torno do seu valor de regime. Esta faixa caracteriza a tolerância de erro, que tipicamente vale 2 ou 5% do valor de regime).

A figura 3.7 ilustra os índices de desempenho descritos acima. Existem outros índices de performance que não foram indicados acima e podem ser encontrados em qualquer livro de controle de sistemas, por exemplo [1].

Em geral não é possível se determinar expressões analíticas para os índices de desempenho da resposta ao degrau indicados acima. No entanto, para sistemas de segunda

ordem do tipo (3.1) subamortecidos ($1 > \xi > 0$) isto é possível e essas expressões são obtidas a seguir.

Instante de Pico (t_p): O instante de pico pode ser caracterizado como sendo o primeiro instante de tempo (exceto a origem) para o qual a derivada temporal da resposta é nula. Tomando a derivada temporal da resposta $y(t)$ em (3.2) e igualando à zero encontramos:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.3)$$

Sobressinal Máximo (M_p): Note que num sistema do tipo (3.1) o valor de regime da resposta ao degrau unitário é um. Como $y(\infty) = 1$ vamos utilizar (3.2) para obter:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} = y(t_p) - 1 = e^{\frac{\sigma}{\omega_d} \pi} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \quad (3.4)$$

Note que M_p depende somente de ξ e quando $\xi \geq 1$ não existe oscilação e M_p não tem mais sentido.

Tempo de Acomodação (t_s): Diferentemente do Sobressinal e do instante de pico, não existe uma expressão analítica exata para o tempo de acomodação t_s . Existem ábacos que permitem a determinação exata de t_s . Veja por exemplo [1]. A seguir apresentamos duas possibilidades para se obter uma aproximação de t_s .

A resposta ao degrau do sistema (3.1) é:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{\sigma t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \quad , \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

Impondo que a amplitude do seno esteja dentro da faixa de tolerância que caracteriza o tempo de acomodação temos uma condição suficiente para garantir que o tempo de acomodação foi atingido com a dada tolerância. Note que o valor de regime da resposta é $y(\infty) = 1$ e a amplitude do seno tende à zero quando $t \rightarrow \infty$. Seja δ a tolerância de erro que define o tempo de acomodação. Impondo que a amplitude do seno esteja dentro dessa tolerância temos:

$$\left| \frac{y(t_s) - y(\infty)}{y(\infty)} \right| = \left| \frac{e^{\sigma t_s}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen}(\omega_d t_s + \phi) \right| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{\ln(\delta \sqrt{1 - \xi^2})}{\sigma} \quad (3.5)$$

onde $\sigma = -\xi \omega_n$ é a parte real dos pólos.

Uma outra aproximação muito comum para t_s pode ser obtida por analogia com sistemas de primeira ordem. Num sistema de primeira ordem o valor de regime da resposta é atingido após 4 constantes de tempo com 2% de erro e após 3 constantes de tempo com 5% de erro. Para um sistema de segunda ordem podemos aproximar t_s definindo como constante de tempo $T = -1/\sigma$ e assim temos:

$$t_s = 4T \text{ para 2\% de erro ; } t_s = 3T \text{ para 5\% de erro} \quad (3.6)$$

Exemplo 3.4 *Obtenha os índices de desempenho da resposta ao degrau unitário para o seguinte sistema:*

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

Solução: O primeiro passo é obter os valores da frequência natural e da taxa de amortecimento do sistema. Comparando o sistema acima com (3.1) temos:

$$25 = \omega_n^2 \rightarrow \omega_n = 5 \text{ é a frequência natural.}$$

$$6 = 2\xi\omega_n \rightarrow \xi = 6/10 = 0,6 \text{ é a taxa de amortecimento.}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 4 \text{ é a parte imaginária dos pólos.}$$

$$\sigma = -\xi\omega_n = -3 \text{ é a parte real dos pólos.}$$

Agora podemos calcular os índices e verificá-los na figura 3.8.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0,785 \text{seg é o instante de pico.}$$

$$M_p = e^{\pi\sigma/\omega_d} = 0,095, \quad M_p(\%) = 9,5\% \text{ é o sobressinal.}$$

$$t_s(2\%) = \frac{\ln(0,02\sqrt{1-\xi^2})}{-3} = 1,38 \text{seg é o tempo de acomodação com 2\% de erro.}$$

$$t_s(5\%) = \frac{\ln(0,05\sqrt{1-\xi^2})}{-3} = 1,07 \text{seg é o tempo de acomodação com 5\% de erro.}$$

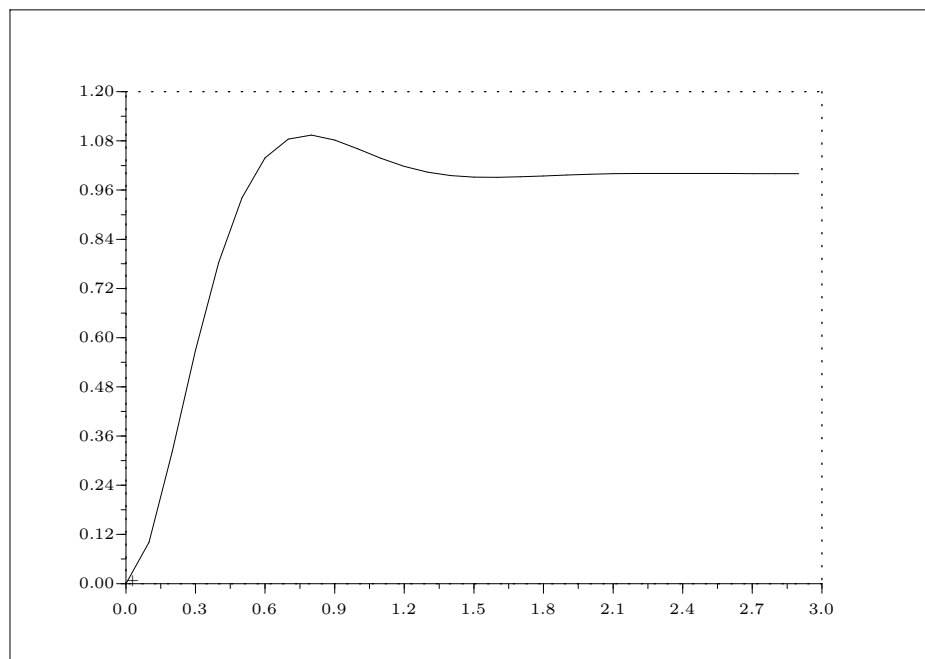


Figura 3.8: Resposta ao degrau do sistema

3.5 Servomecanismo para controle de posição

A seguir estudaremos um problema muito comum na indústria que consiste em se controlar a posição de um determinado objeto através de um motor DC. Um esquema simplificado desse tipo de sistema de controle, conhecido como servomotor ou servomecanismo para controle de posição, é indicado na figura 1.4.

Os elementos desse sistema de controle são: 1 comparador de tensão, 2 potenciômetros idênticos, um amplificador de potência, uma antena com haste móvel e base, 1 sistema de engrenagens para redução de velocidade, 1 motor DC. O diagrama da figura 3.9 ilustra o funcionamento do sistema.

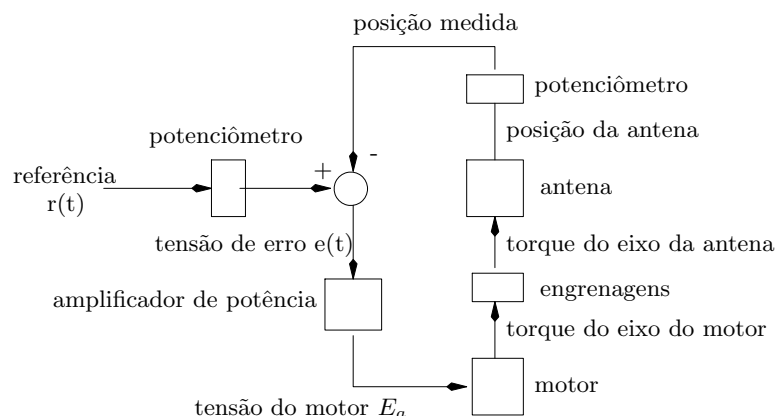


Figura 3.9: Diagrama funcional do sistema de posicionamento

Para construir o diagrama de blocos a partir do diagrama funcional da figura 3.9 precisamos obter a função de transferência de cada dispositivo do sistema. Isso é o que faremos a seguir.

Comparador: Esse dispositivo é um somador de tensões que tem como entrada duas tensões: $V_c(t)$ que vem do potenciômetro de medição da posição da antena e $V_r(t)$ que vem do potenciômetro de referência. A saída do comparador é então um sinal de erro entre o valor desejado e o valor obtido da posição da antena: $e(t) = V_r(t) - V_c(t)$.

Potenciômetro: Esse dispositivo transforma deslocamento angular em uma tensão que lhe é proporcional. A constante de proporção, que definiremos por k_0 , é o ganho do potenciômetro. Assim, se denotarmos por $c(t)$ a posição da antena e $r(t)$ o valor desejado para ela podemos construir o diagrama de blocos da figura 3.10.

Amplificador de potência: Esse dispositivo tem como função suprir com energia o sistema de controle. Note que o sinal de entrada do amplificador $e(t)$ é um sinal de erro oriundo de medidores e portanto não possui energia suficiente para acionar o motor. Vamos considerar que o amplificador é ideal e possui um ganho de tensão k_1 . Assim o sinal de saída do amplificador $E_a(t)$ é dado por $E_a(t) = k_1 e(t)$. Incorporando o amplificador no diagrama de blocos 3.10 obtemos um novo diagrama indicado na figura 3.11.

Motor DC: A função do motor DC é acionar a antena para que ela esteja sempre

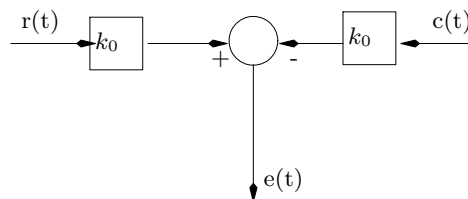


Figura 3.10: Diagrama de blocos do comparador e potenciômetro

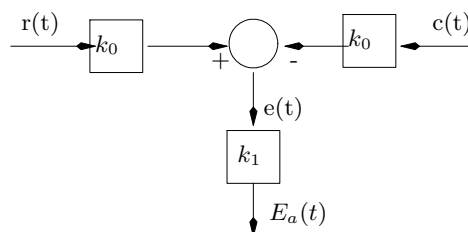


Figura 3.11: Diagrama de blocos com adição do amplificador

apontada para a direção desejada. São comuns as palavras acionador e servomotor para designar a função do motor nesse tipo de sistema de controle.

O servomotor pode ser operado de dois modos. Num modo a corrente de campo (estator) é mantida constante e uma tensão ajustável é aplicada à armadura (rotor) e no outro modo se faz o contrário. Esses modos de operação possuem características diferentes e apenas o primeiro será considerado aqui.

Quando a corrente de campo é constante, o fluxo produzido pela bobina de campo também é constante e nesse caso o conjugado (T_m) desenvolvido pelo motor é proporcional à corrente de armadura (I_a)

$$T_m = k_2 I_a \quad (3.7)$$

onde k_2 é uma constante que depende do meio magnético e do valor da corrente de campo.

Com a rotação da armadura do motor no campo magnético constante produzido pela bobina de campo, aparece uma tensão induzida na bobina de armadura (V_{fcm}) que é proporcional à velocidade do motor (ω_m).

$$V_{fcm} = k_3 \omega_m \quad (3.8)$$

onde k_3 é uma constante que depende do meio magnético e da corrente de campo. A tensão induzida V_{fcm} possui a polaridade contrária da tensão aplicada na armadura, pois ela surge como uma oposição ao movimento do rotor. Por esse motivo essa tensão recebe o nome de *força contra-eletromotriz*. O controle da velocidade do motor é obtido por meio de uma tensão aplicada à armadura (E_a). A polaridade da tensão aplicada determina o sentido do torque obtido (T_m) e este determina o movimento do rotor. A figura 3.12 mostra o diagrama de funcionamento de um motor dc controlado pela armadura. Nessa figura R_a e L_a indicam a resistência e indutância de armadura respectivamente e I_a é a corrente que circula no circuito de armadura devido a aplicação da tensão E_a . A equação de tensões para o circuito de armadura é:

$$L_a \dot{I}_a + R_a I_a + V_{fcm} = E_a \quad (3.9)$$

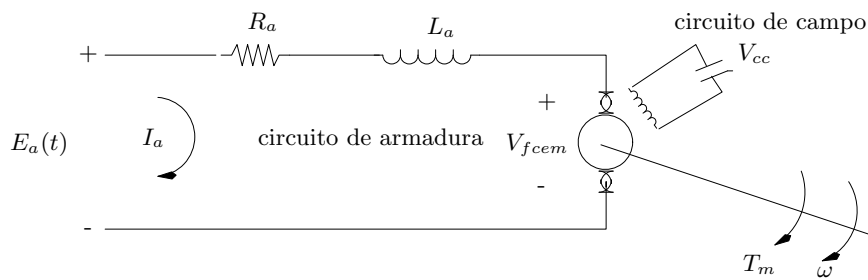


Figura 3.12: Motor DC controlado pela armadura (rotor)

e com as expressões (3.7) e (3.8) temos:

$$\frac{L_a}{k_2} \dot{T}_m + \frac{R_a}{k_2} T_m + k_3 \omega_m = E_a \quad (3.10)$$

Podemos agora incluir o motor no diagrama de blocos da figura 3.11 para obter o diagrama da figura 3.13.

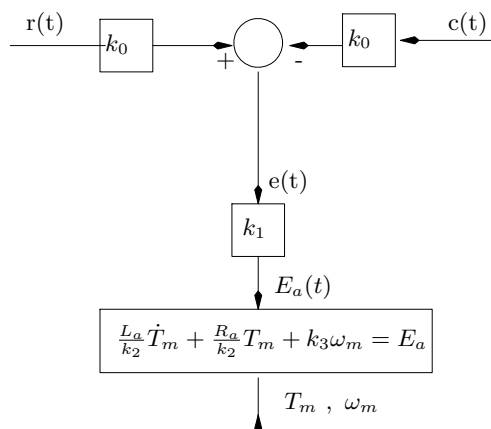


Figura 3.13: Diagrama de blocos com adição do motor DC

Engrenagens: O sistema de engrenagens tem como função adequar a velocidade de rotação do eixo da antena ao eixo do rotor. Um sistema de engrenagens possui função análoga do transformador em sistemas elétricos. Nos dois casos, a potência do primário deve ser igual à do secundário: no caso do transformador a potência é o produto da tensão pela corrente $V_1 I_1 = V_2 I_2$ e no caso da engrenagem a potência é o produto do torque pela velocidade $T_1 \omega_1 = T_2 \omega_2$. A relação entre as grandezas do primário e secundário é definida pela constante de relação entre o número de espiras do primário e secundário do transformador e entre o número de sulcos das engrenagens primária e secundária. Definiremos a constante de relação das engrenagens pela letra n , isto é, $\omega_2 = \omega_1 n$ e portanto $T_2 = T_1/n$. Incorporando a engrenagem no diagrama de blocos anterior obtemos o diagrama da figura 3.14.

Plataforma da antena: A plataforma e a antena formam um sistema mecânico que possui momento de inércia (J_c) e um coeficiente de atrito viscoso (b_c) nos mancais da plataforma. A figura 3.15 ilustra as grandezas presentes no movimento rotacional da antena. Fazendo a somatória dos torques no eixo da antena temos:

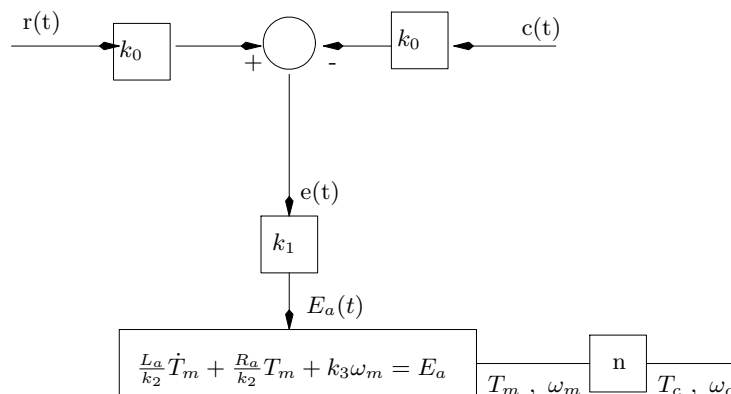


Figura 3.14: Diagrama de blocos com adição da engrenagem

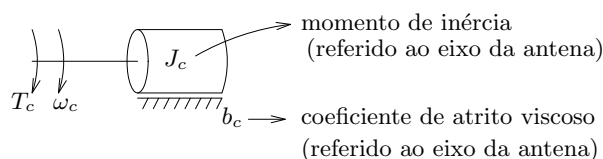


Figura 3.15: Sistema mecânico da plataforma e antena

$$\sum \text{Torques} = 0 \Rightarrow T_c = J_c \dot{\omega}_c + b_c \omega_c \quad (3.11)$$

e com a expressão acima podemos incluir a antena no diagrama 3.14 para obter o diagrama da figura 3.16. Note que as variáveis ω_m, T_m do eixo do motor e as variáveis ω_c, T_c do eixo

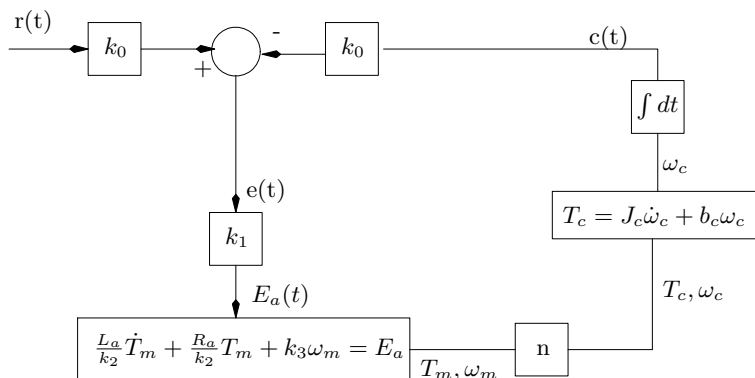


Figura 3.16: Diagrama completo do sistema de posicionamento

da carga (antena) estão ligadas entre si através da engrenagem. Além disso, a variável de interesse é a posição angular do eixo da antena, que no diagrama 3.16 é representada pela letra $c(t)$, isto é, $\dot{c}(t) = \omega_c(t)$.

Uma vez que todos os dispositivos físicos foram modelizados, podemos começar a simplificar o diagrama, já que apenas os sinais $r(t)$ de referência e $c(t)$ de posição da antena são de interesse no problema. Todos os outros sinais intermediários podem ser eliminados.

Devido às características do motor DC, na faixa normal de funcionamento a tensão no

indutor é muito pequena em relação às tensões no resistor e de efeito contra-eletromotriz. Podemos então desprezar o efeito indutivo da armadura, isto é, podemos simplificar a expressão (3.10) fazendo $L_a = 0$. Daí concluímos que

$$T_m = \frac{k_2}{R_a} E_a - \frac{k_2 k_3}{R_a} \omega_m$$

Considerando agora a engrenagem temos $T_m = T_c n$ e $\omega_m = \omega_c / n$ e juntamente com a expressão acima podemos rescrever (3.11) na forma:

$$J_c \dot{\omega}_c + (b_c + \frac{k_2 k_3}{n^2 R_a}) \omega_c = \frac{k_2}{n R_a} E_a \quad (3.12)$$

e como $\omega_c = \dot{c}(t)$ temos

$$J_c \ddot{c}(t) + (b_c + \frac{k_2 k_3}{n^2 R_a}) \dot{c}(t) = \frac{k_2}{n R_a} E_a \quad (3.13)$$

Tomando a transformada de Laplace da equação acima podemos encontrar a função de transferência da tensão $E_a(t)$ para a posição $c(t)$.

$$\frac{C(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{k_2}{n R_a}}{J_c s^2 + (b_c + \frac{k_2 k_3}{n^2 R_a}) s} \quad (3.14)$$

Com isto o diagrama 3.16 pode ser simplificado como indicado no diagrama 3.17. Por

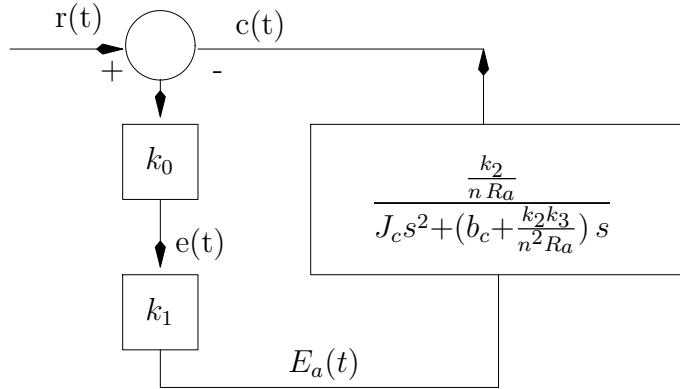


Figura 3.17: Diagrama simplificado de posicionamento da antena

conveniência de notação iremos definir a função $G(s)$ indicada a seguir.

$$G(s) = \frac{K}{J s^2 + B s} \quad (3.15)$$

$$K = \frac{K_0 K_1 K_2}{n R_a} \quad , \quad B = b_c + \frac{K_2 K_3}{n^2 R_a} \quad , \quad J = J_c$$

Com $G(s)$ acima o diagrama 3.17 pode ser rescrito como indicado na figura 3.18 que é uma forma mais conveniente para nossos propósitos. Agora a Função de Transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{J s^2 + B s + K}$$

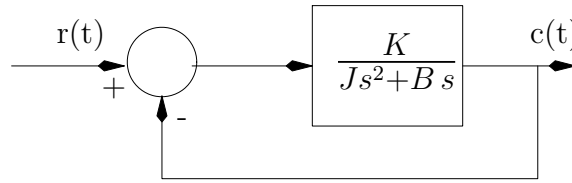


Figura 3.18: Diagrama de posicionamento na forma padrão

Comparando a equação acima com a forma padrão (3.1) encontramos os valores da frequência natural ω_n e taxa de amortecimento ξ do sistema de controle:

$$\omega_n^2 = \frac{K}{J} \quad , \quad 2\xi\omega_n = \frac{B}{J} \quad (3.16)$$

Pelas expressões acima podemos verificar a performance do sistema de controle.

Quando os valores numéricos de J, K, B são fornecidos podemos facilmente deduzir os valores de ξ, ω_n correspondentes e portanto saber se o sistema de controle vai fazer o posicionamento da antena com oscilações (se $0 < \xi \leq 1$) e quanto tempo o sistema de controle leva para deixar a antena imóvel na posição desejada (tempo de acomodação t_s). Se com os valores dados o sistema de controle não possui performance satisfatória podemos então corrigi-lo ajustando os parâmetros físicos do sistema, tais como o ganho do amplificador k_1 , ou o ganho do potenciômetro k_0 . Esse ajuste deve ser tal que o novo valor da taxa de amortecimento ξ seja compatível com as oscilações admissíveis para o sistema. Lembre que quanto menor o valor de ξ maior as oscilações da resposta ao degrau.

Exemplo 3.5 *Suponha que o sistema de controle da figura 3.18 tenha um momento de inércia $J = 1$ e um coeficiente de atrito viscoso $B = 1$. Determine o valor do ganho K de tal forma que o sobressinal M_p na resposta ao degrau seja de 20%. Verifique o tempo de acomodação obtido.*

Solução: Com os valores dados a função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

Comparando com (3.1) obtemos os valores de ξ, ω_n seguintes:

$$\omega_n^2 = K \quad , \quad 2\xi\omega_n = 1$$

Para que o sobressinal seja de 20% devemos ter a seguinte igualdade satisfeita:

$$M_p = 0,2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln(0,2) \quad \Rightarrow \quad \xi = 0,456$$

de onde tiramos $\omega_n = 1.096$ e portanto $K = 1,2$. Com esses valores de ξ, ω_n o tempo de acomodação resultante dado por (3.5) é $t_s(5\%) = 6,23$ segundos. A resposta ao degrau do sistema de controle obtido se encontra na figura 3.19.

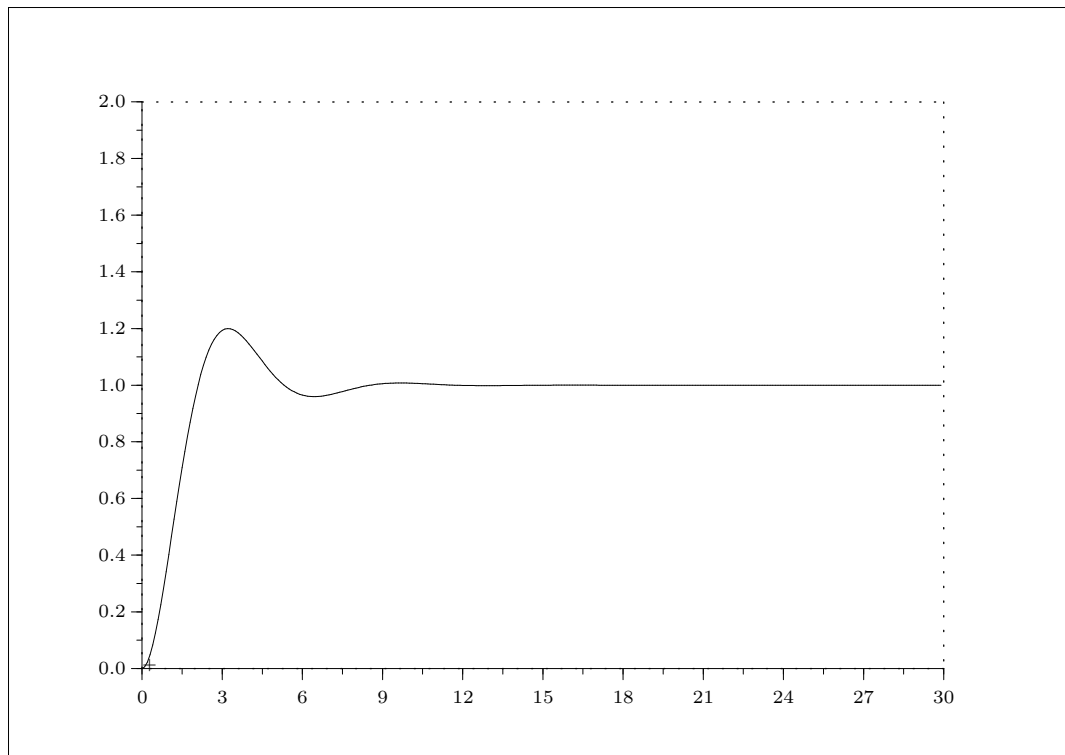


Figura 3.19: Resposta ao degrau do sistema de controle

No exemplo acima ajustamos o valor do ganho K para que a resposta ao degrau do sistema de controle apresentasse um sobressinal de 20%. Com o valor de k ajustado dessa forma o tempo de acomodação resultante foi $t_s(5\%) = 6,23$ segundos. Em geral não é possível se ajustar o sobressinal e o tempo de acomodação simultaneamente tendo k como o único parâmetro de ajuste. Nesses casos a solução é introduzir no sistema de controle outro dispositivo físico que possua um parâmetro que possa ser ajustado facilmente. Por exemplo, introduzir um medidor de velocidade é um artifício comum na prática.

Realimentação de Posição e Velocidade: A realimentação de velocidade é feita através de um tacômetro acoplado no eixo da carga. O sinal de saída desse medidor é uma tensão $v_T(t)$ que é proporcional à velocidade de rotação do eixo $\omega_c(t)$.

$$v_T(t) = K_4 \omega_c(t)$$

onde k_4 é a constante de proporcionalidade do tacômetro.

Incluindo uma realimentação de velocidade no servomecanismo da figura 3.16 obtemos um novo sistema de controle indicado na figura 3.20.

Definindo $Q = k_4/k_0$ e usando as mudanças de variáveis (3.15) podemos simplificar o diagrama 3.20 da mesma forma como foi feito na passagem da figura 3.17 para a figura 3.18. Isto nos leva ao diagrama da figura 3.21. Agora, com os parâmetros K e Q para serem ajustados temos mais graus de liberdade para ajustarmos o sobressinal e o tempo de acomodação simultaneamente. Para ver como fazer isso vamos deduzir da figura 3.21

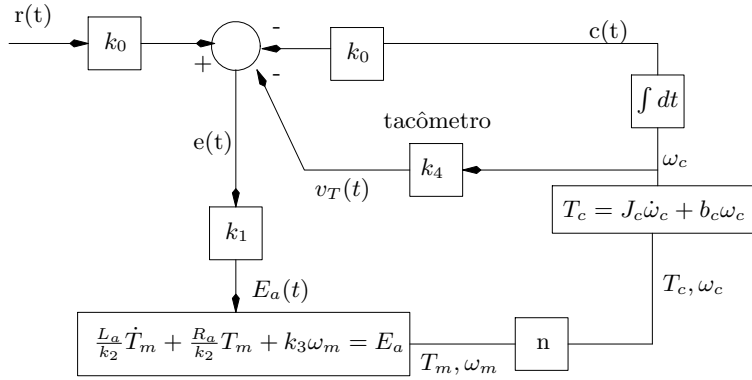


Figura 3.20: Diagrama funcional para realimentação de velocidade

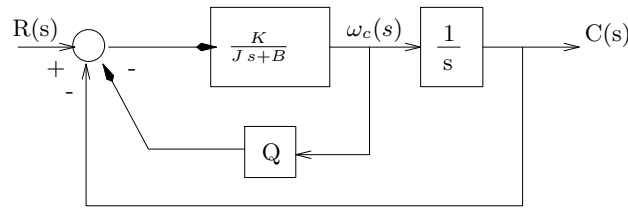


Figura 3.21: Sistema de controle com realimentação de velocidade

a nova Função de Transferência do sistema de controle indicada a seguir.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KQ)s + K}$$

Comparando a função de transferência acima com a forma padrão da equação (3.1) podemos encontrar os novos valores da taxa de amortecimento ξ e da frequência natural ω_n do novo sistema de controle.

$$2\xi\omega_n = \frac{B + KQ}{J} \quad , \quad \omega_n^2 = \frac{K}{J} \quad (3.17)$$

Com a escolha adequada dos ganhos K e Q podemos ajustar o sobressinal (M_p) e o tempo de acomodação (t_s) do novo sistema de controle. Para isso basta verificar quais são os valores de ξ e ω_n que levam o sistema de controle a ter a resposta ao degrau desejada. Uma vez encontrados esses valores de ξ e ω_n desejados, usa-se a equação (3.17) para encontrar os valores dos ganhos K e Q .

Exemplo 3.6 Suponha que no sistema da figura 3.21 o coeficiente de atrito viscoso seja $B = 1$ e o momento de inércia do sistema seja $J = 1$. Determine os valores de K e Q de tal forma que a resposta ao degrau do sistema de controle tenha sobre-sinal máximo de 20% e tempo de acomodação $t_s(5\%) = 2$ segundos.

Solução: Do exemplo 3.5 já vimos que sem a realimentação de velocidade não é possível ajustar o sobressinal e o tempo de acomodação simultaneamente. Agora, com a inserção da realimentação de velocidade podemos fazê-lo da seguinte forma. Para que o sobressinal

seja de 20% devemos ter a seguinte igualdade satisfeita:

$$M_p = 0,2 \Rightarrow -\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \ln(0,2) \Rightarrow \xi = 0,456$$

Com o valor de $\xi = 0,456$ podemos agora encontrar o valor de ω_n impondo que o tempo de acomodação dado por (3.5) seja de 20% :

$$t_s(5\%) = \frac{\ln(0,05\sqrt{1 - \xi^2})}{-\xi\omega_n} = 2 \Rightarrow \omega_n = 3,41$$

Finalmente, com os valores de $\xi = 0,456$ e $\omega_n = 3,41$ podemos encontrar os valores dos ganhos de realimentação K, Q com a expressão (3.17).

$$\omega_n^2 = K \Rightarrow K = (3,41)^2 = 11,63$$

$$2\xi\omega_n = 1 + KQ \Rightarrow Q = \frac{2\xi\omega_n - 1}{K} = 0,1814$$

A resposta ao degrau do sistema de controle obtido com esses valores de K e Q está indicada na figura 3.22.

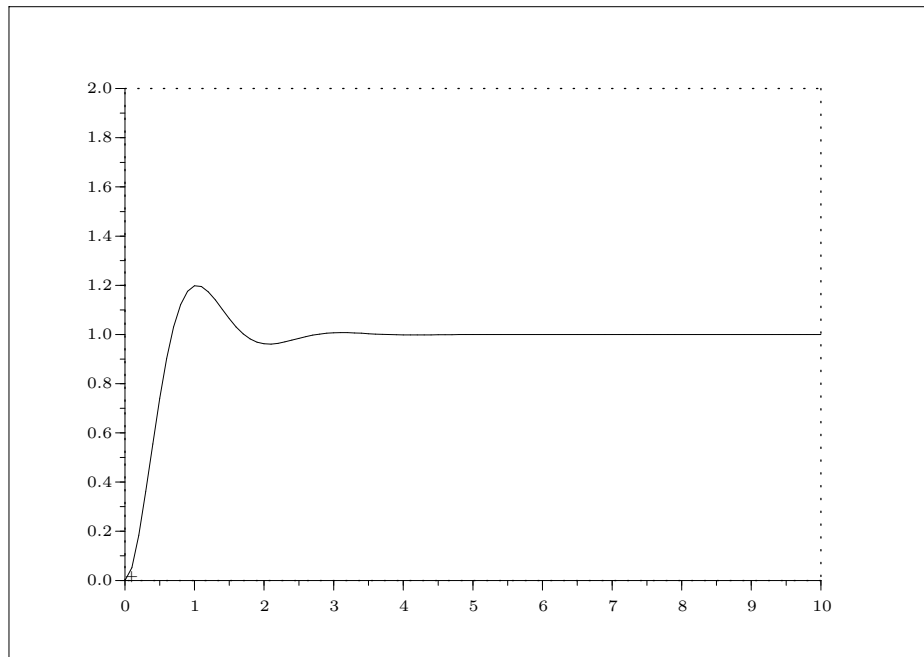


Figura 3.22: Resposta ao degrau do sistema de controle

3.6 Problemas complementares

Problema 3.3 Encontre os valores de k_p e k_v para que o sistema em malha fechada da figura 3.23 apresente os índices de performance indicados a seguir. O sistema de malha aberta é regido pela equação diferencial $2\dot{\omega} + \omega = e_a$.

- a) Dois pólos em $s = -1$.
- b) Sobressinal de 10% em 2 segundos.
- c) Determine, considerando o caso (a) ou (b), o erro de regime permanente para um degrau de amplitude 2.
- d) Calcule a resposta $\theta(t)$ do caso (a) para um degrau unitário.

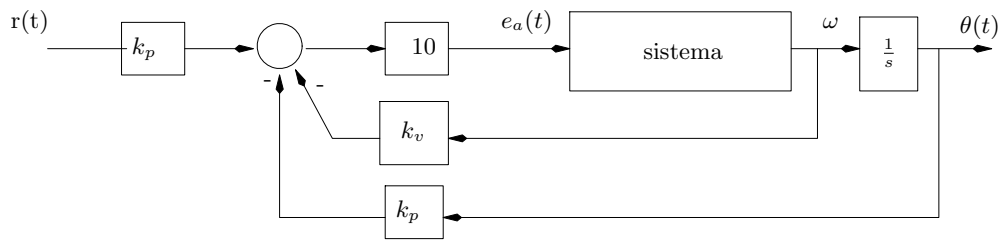


Figura 3.23: Sistema com realimentação de velocidade e posição

Problema 3.4 Considere o sistema de controle de velocidade da figura 3.24. A resposta ao degrau unitário desse sistema é indicada na figura 3.25. Encontre os valores de k_1 e k_2 sabendo que o motor é regido pela equação diferencial $\dot{\omega} + 10\omega = V_a$.

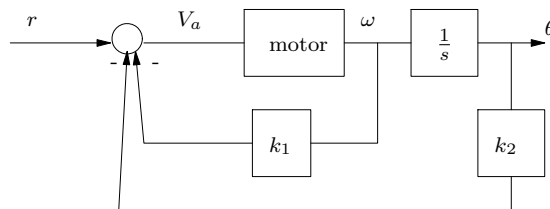


Figura 3.24: Sistema de controle de velocidade

Problema 3.5 Um passo importante no estudo de sistemas de controle é a obtenção de modelos matemáticos que descrevem o comportamento do sistema a ser controlado. No caso de circuitos podemos utilizar as leis de Kirchhoff e as leis de Newton servem para modelizar sistemas mecânicos. Existem sistemas que são mais facilmente modelizados com a utilização da equação de Lagrange, como é o caso de um microfone capacitivo. Estude a modelização do microfone capacitivo apresentada em [6], páginas 59 à 62, e verifique a utilização da equação de Lagrange e a linearização ali apresentada para que o microfone possa ser modelizado como um sistema de segunda ordem do tipo (3.1).

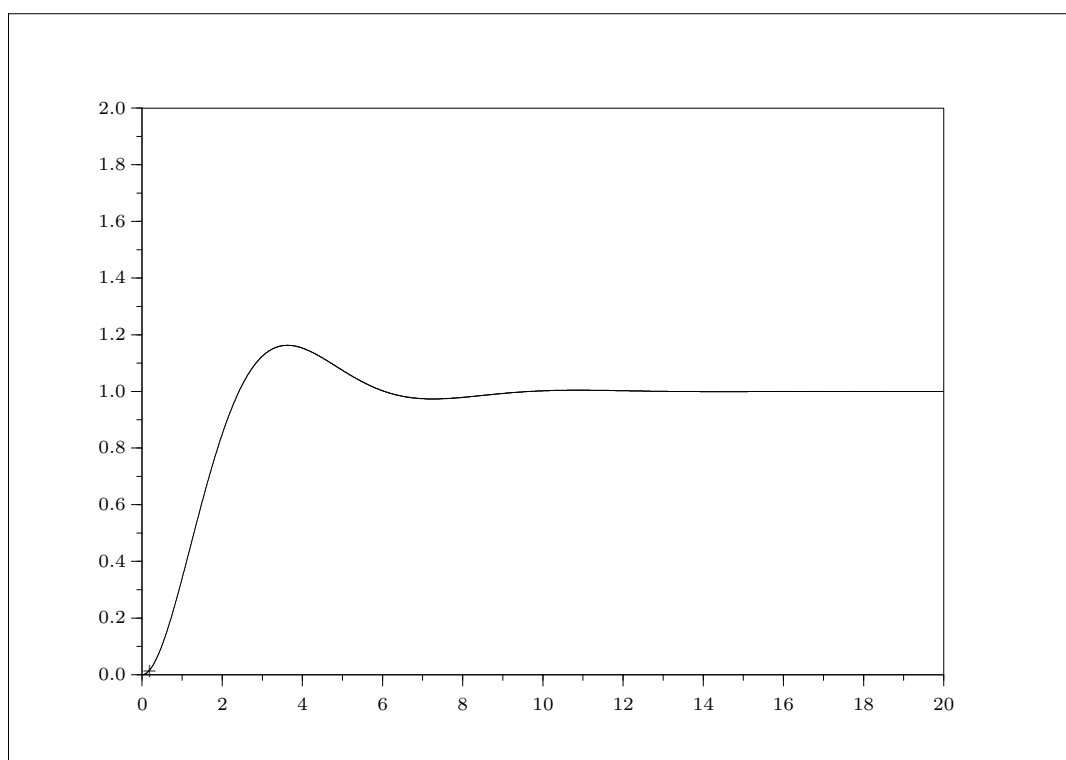


Figura 3.25: Resposta ao degrau unitário

Capítulo 4

Resposta em frequência

No capítulo anterior estudamos a resposta ao degrau de sistemas e estabelecemos índices de desempenho para caracterizar as oscilações (M_p) e a duração do transitório (t_s). Neste capítulo estudaremos a resposta de sistemas para sinais senoidais na entrada. O termo *Resposta em Frequência de um Sistema* significa resposta em regime estacionário para entradas senoidais. O método se baseia no fato de que todo sistema linear invariante estável, quando excitado com um sinal senoidal, apresenta uma resposta de regime permanente que também é uma senóide porém de amplitude e defasagem diferentes. Essas diferenças de amplitude e defasagem podem ser obtidas experimentalmente: excita-se o sistema com uma senóide de uma dada frequência; espera-se o sistema atingir o regime permanente e mede-se a amplitude e defasagem da resposta obtida; repete-se o mesmo procedimento para todas as outras frequências dentro da faixa de interesse. Curvas típicas desse procedimento podem ser encontradas na figura 4.1.

A seguir veremos um método analítico, que utiliza apenas a função de transferência do sistema para se obter as amplitudes e defasagens da resposta senoidal de regime permanente.

4.1 Resposta Senoidal em Regime Permanente

Mostraremos a seguir que a resposta em frequência de um sistema, cuja função de transferência é $F(s)$ é completamente determinada por:

$$F(s)|_{s=j\omega} = F(j\omega)$$

Considere o sistema estável: cuja Função de Transferência é:

$$G(s) = \frac{K(s + z_1) \dots (s + z_m)}{(s + s_1) \dots (s + s_n)}$$

Para entradas senoidais $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$ temos:

$$X(s) = A \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

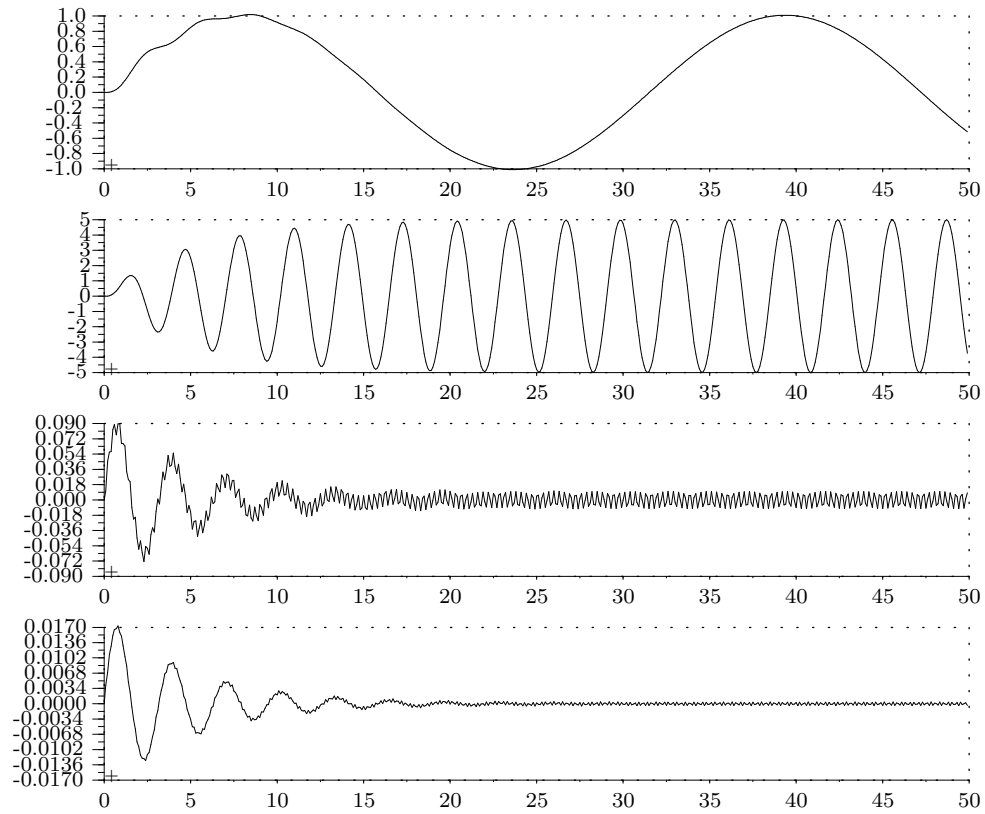
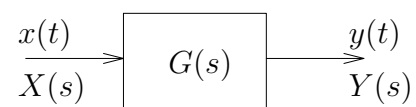


Figura 4.1: Resposta temporal para $\text{sen}(\omega t)$ com $\omega = \{0, 2; 2; 20; 100\}$ rd/s



Logo, para condições iniciais nulas, a saída é dada por:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{K(s + z_1) \dots (s + z_m)}{(s + s_1) \dots (s + s_n)} \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Se $G(s)$ possui apenas pólos distintos, então a expansão por frações parciais de $Y(s)$ conduz à:

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega_0} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega_0} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \dots + \frac{b_n}{s + s_n}$$

onde b_i são os resíduos dos pólos p_i e \bar{a} é o complexo conjugado de a . Antitransformando a expressão acima temos:

$$y(t) = a e^{-j\omega_0 t} + \bar{a} e^{j\omega_0 t} + b_1 e^{-s_1 t} + \dots + b_n e^{-s_n t}, \quad t \geq 0$$

Para um sistema estável os pólos da F.T. $G(s)$ possuem parte real negativa. Portanto à medida que $t \rightarrow \infty$ (Regime Permanente) os termos $e^{-s_i t}$ desaparecem pois $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_i t} = 0$.

Se $G(s)$ possuir pólos múltiplos a resposta temporal acima terá termos do tipo $t^n e^{-s_n t}$ que também desaparecem em regime permanente. Logo, independentemente do sistema possuir pólos múltiplos ou não, a resposta em regime estacionário de um sistema estável para entrada $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$ é:

$$y(t) = a e^{-j\omega_0 t} + \bar{a} e^{j\omega_0 t}$$

onde os resíduos a e \bar{a} são dados por:

$$a = G(s) \frac{\omega_0 A}{s^2 + \omega_0^2} (s + j\omega_0) \Big|_{s=-j\omega_0} = \frac{A G(-j\omega_0)}{-2j}$$

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega_0 A}{s^2 + \omega_0^2} (s - j\omega_0) \Big|_{s=j\omega_0} = \frac{A G(j\omega_0)}{2j}$$

Sendo $G(j\omega_0)$ uma função complexa temos:

$$G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)| e^{j\phi(\omega_0)}$$

onde $|\cdot|$ indica módulo e $\phi(\cdot)$ indica fase.

$$\text{Fase} \rightarrow \phi(\omega_0) = \angle G(j\omega_0) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}[G(j\omega_0)]}{\text{Re}[G(j\omega_0)]} \right\}$$

$$G(-j\omega_0) = |G(-j\omega_0)| e^{-j\phi(\omega_0)} = |G(j\omega_0)| e^{-j\phi(\omega_0)}$$

Exemplo 4.1 Mostre que uma função racional $G(s)$ possui as seguintes propriedades para $s = j\omega$.

- A fase de $G(j\omega)$, $\angle G(j\omega)$, é uma função ímpar, isto é, $\angle G(-j\omega) = -\angle G(j\omega)$
- O módulo de $G(j\omega)$, $|G(j\omega)|$, é uma função par, isto é, $|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|$.

Solução: Como $G(s)$ é uma função racional ela pode ser representada pela divisão de dois polinômios. Seja então $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ onde $N(s)$ e $D(s)$ são dois polinômios de coeficientes reais e graus n e d . $N(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i$ e $D(s) = \sum_{i=0}^d \beta_i s^i$, com α_i e β_i reais. Como $\overline{j\omega} = -j\omega$ (conjugação complexa) temos:

$$N(-j\omega) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (-j\omega)^i = \sum_{i=0}^n \alpha_i (\overline{j\omega})^i = \sum_{i=0}^n \alpha_i \overline{(j\omega)^i} = \overline{N(j\omega)}$$

Logo $N(j\omega)$ e $N(-j\omega)$ são complexos conjugados. Assim conclui-se que $G(j\omega)$ e $G(-j\omega)$ também são complexos conjugados já que $|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|$ e $\angle G(j\omega) = -\angle G(-j\omega)$.

Portanto $|G(j\omega)|$ é uma função par e $\angle G(j\omega)$ é uma função ímpar.

Com as expressões acima podemos escrever a resposta de regime na forma:

$$y(t) = A |G(j\omega_0)| \frac{e^{j(\omega_0 t + \phi)} - e^{-j(\omega_0 t + \phi)}}{2j} = A |G(j\omega_0)| \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

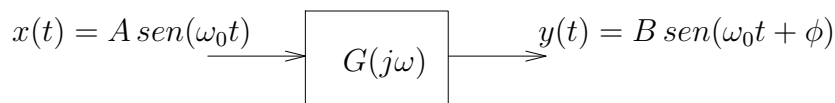


Figura 4.2: Resposta de regime ao seno

onde $B = A |G(j\omega_0)|$ e $\phi = \angle G(j\omega_0)$.

Problema 4.1 Utilizando o mesmo procedimento acima mostrar que a resposta em regime para um cossenóide $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$ é igual a $y(t) = B \cos(\omega_0 t + \phi)$, onde $B = A |G(j\omega_0)|$ e $\phi = \angle G(j\omega_0)$.

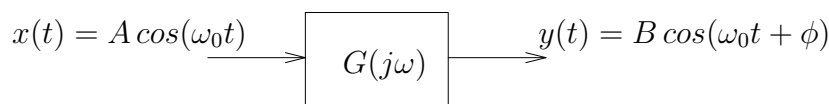


Figura 4.3: Resposta de regime ao cosseno

Exemplo 4.2 Encontre a resposta em frequência do circuito da figura 4.4. Suponha $R = 1K\Omega$, $C = 1\mu F$.

Solução: As equações do circuito são:

$$\begin{cases} -x(t) + RI(t) + v_C(t) = 0 \\ v_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt \end{cases} \Rightarrow -x(t) + RC \dot{v}_C(t) + v_C(t) = 0$$

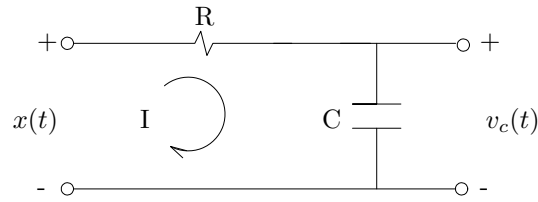


Figura 4.4: Circuito RC

Logo:

$$X(s) = RCsV_C(s) + V_C(s)$$

Assim:

$$F.T. \rightarrow \frac{V_C(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + RCs} = G(s)$$

A resposta em regime para entradas senoidais $x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t)$ é:

$$v_C(t) = B \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

onde $B = A |G(j\omega_0)|$ e $\phi = \angle G(j\omega_0)$.

$$|G(j\omega_0)| = \left| \frac{1}{1 + j\omega_0 RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 RC)^2}}$$

$$\angle G(j\omega_0) = -\tan^{-1}(\omega_0 RC)$$

A figura 4.5 mostra as funções $|G(j\omega_0)|$ (em decibel) e $\angle G(j\omega_0)$ (em graus) para a faixa de frequência $1 \leq \omega_0 \leq 10^5$ (em Hertz).

Exemplo 4.3 Obtenha a resposta em frequência do circuito RLC da figura 4.6. Suponha $C = 1\mu F$, $L = 0,01H$ e considere três situações para a resistência: (a) $R = 10\Omega$; (b) $R = 100\Omega$; (c) $R = 1K\Omega$.

Solução: Primeiro vamos obter a função de transferência. As equações do circuito são indicadas abaixo.

$$-v(t) + RC\dot{v}_C + LC\ddot{v}_C + v_C = 0$$

A função de transferência entre $v(t)$ e $v_c(t)$ é:

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e $\xi = \frac{RC}{2} \frac{\sqrt{LC}}{L} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$. A resposta frequencial do circuito acima é:

$$\begin{cases} v(t) = A \text{sen}(\omega_0 t) \\ v_C(t) = B \text{sen}(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$

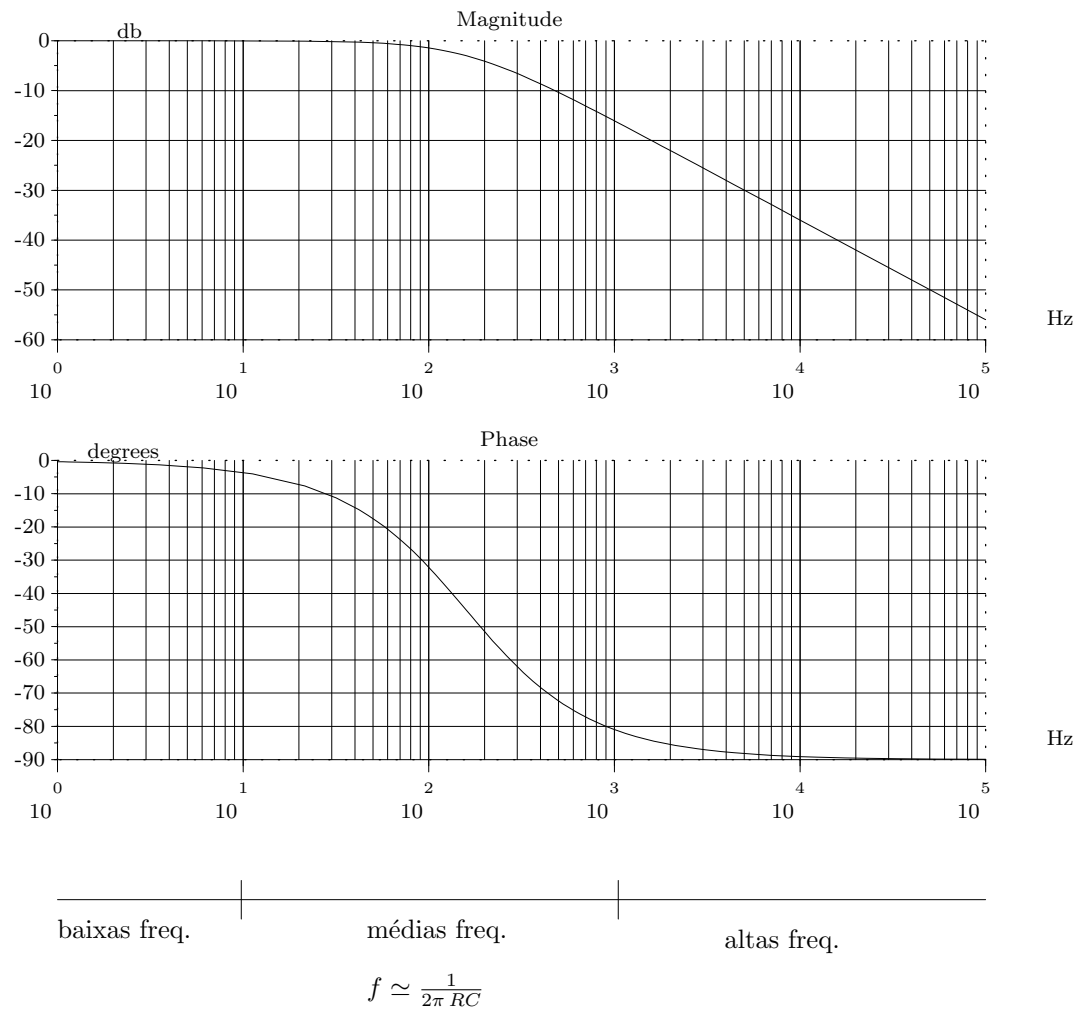


Figura 4.5: Resposta em frequência (Bode) do circuito RC

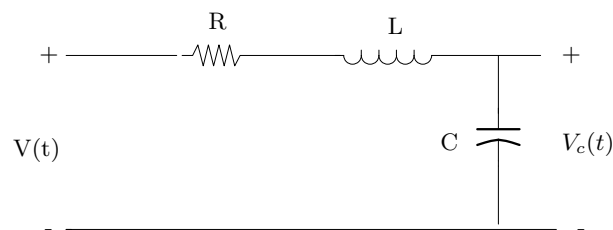


Figura 4.6: Circuito RLC

com $B = A |G(j\omega_0)|$, $\phi = \angle G(j\omega_0)$ e $G(j\omega_0) = G(s)$ para $s = j\omega_0$.

$$G(j\omega_0) = \frac{\omega_n^2}{-\omega_0^2 + \omega_n^2 + j2\xi\omega_0\omega_n}$$

$$|G(j\omega_0)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega_n)^2}} ; \quad \phi = -\tan^{-1}\left[\frac{2\xi\omega_0\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_0^2}\right]$$

A figura 4.7 mostra as funções $|G(j\omega_0)|$ (em decibel) e $\angle G(j\omega_0)$ (em graus) para a faixa de frequência $10^2 \leq \omega_0 \leq 10^5$ (em Hertz) e três valores distintos da resistência: (a) $R = 10\Omega$; (b) $R = 100\Omega$; (c) $R = 1K\Omega$.

Pela figura 4.7 podemos notar que no caso (a) o módulo (em decibel) aumenta numa certa faixa de frequência. Isto implica que as senóides de entrada nessa faixa de frequência são amplificadas. Esse fenômeno de amplificação da amplitude da senóide de entrada é conhecido como ressonância. Veremos adiante que essa amplificação ocorre próximo à freq. natural não amortecida ω_n do sistema. A freq. onde a amplitude é máxima (pico do módulo) é conhecida como freq. de ressonância. Já no caso (c) não existe pico de ressonância pois o módulo decai sempre indicando que as amplitudes da senóides de saída são sempre menores que as da entrada. Veremos também que o pico de ressonância depende do fator de amortecimento do sistema.

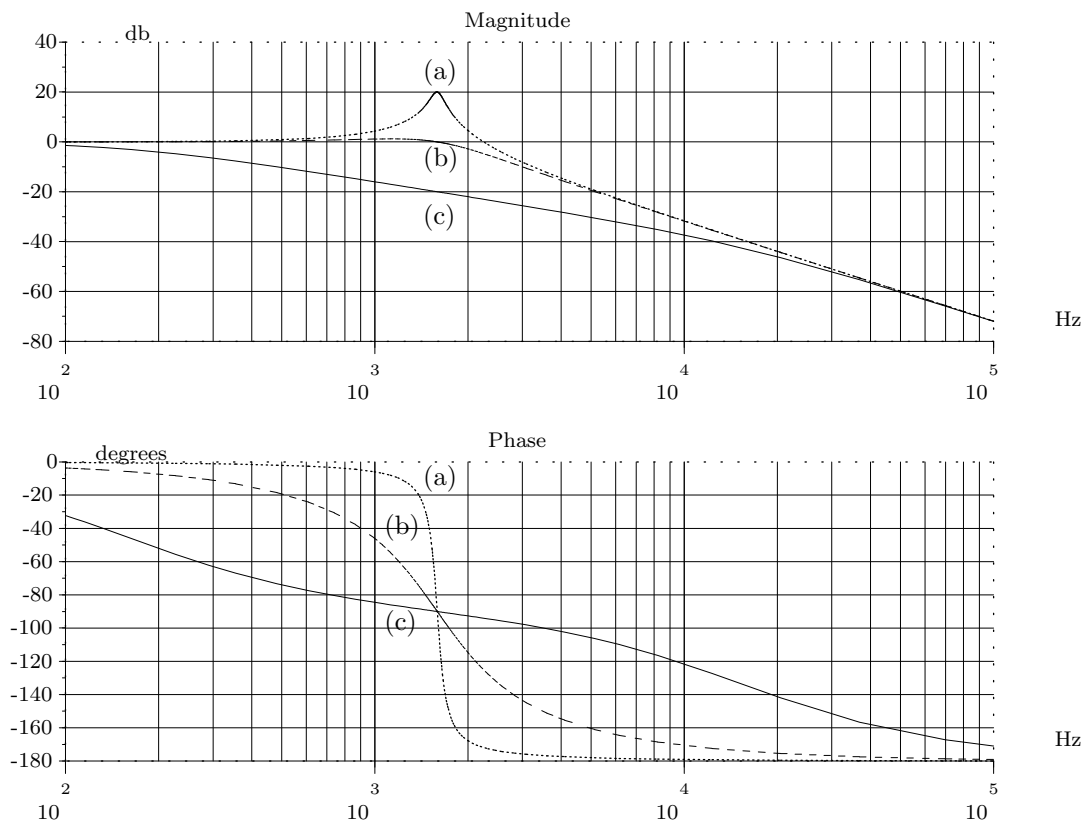


Figura 4.7: Resposta em frequência (Bode) do circuito RLC

Se compararmos as figuras 4.5 e 4.7 veremos que o módulo nas altas frequências decai (atenuação das amplitudes) segundo uma reta de inclinação -20db/década em 4.5 e -40db/década em 4.7. Já a fase nas altas frequências tende à -90 graus em 4.5 e -180

graus em 4.7. Essas diferenças nas altas frequências ocorrem devido ao fato do sistema da figura 4.5 ser de primeira ordem enquanto o sistema de 4.7 é de segunda ordem.

Nas baixas frequências os dois circuitos possuem as mesmas características, isto é o módulo (em decibel) e a fase estão próximos de zero. Isto indica que as senóides de saída e de entradas são praticamente iguais pois tanto a defasagem quanto a atenuação (ou amplificação) são muito pequenos nessa faixa de frequência.

4.2 Gráficos Logarítmicos

Das figuras 4.5 e 4.7 podemos extrair informações importantes a respeito do comportamento frequencial dos circuitos 4.4 e 4.6. Isso mostra a importância que tem a representação gráfica da função complexa $G(j\omega)$ na análise frequencial de sistemas.

Existem basicamente 3 tipos de gráficos que são utilizados para se representar a função complexa $G(j\omega)$. Cada tipo de gráfico possui vantagens e aplicações específicas.

O mais utilizado são os diagramas de Bode. Estes gráficos se consagraram com os trabalhos de Bode sobre amplificadores realimentados na década de 1940 e hoje são muito utilizados na análise de sinais e sistemas de controle.

Nesses diagramas representa-se o módulo em decibel e a fase em graus, ambos em função da frequência (tipicamente em Hertz) numa escala logarítmica. As figuras 4.5 e 4.7 são os diagramas de Bode da resposta em frequência dos circuitos 4.4 e 4.6. Lembre que o módulo em decibel de um número complexo $c = a + jb$ é dado por $|c|_{db} = 20 \log(|c|)$ onde $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo normal.

Outro diagrama bastante utilizado em sistemas de controle é o diagrama de Nyquist. Este diagrama é muito útil na análise de estabilidade de sistemas realimentados. Aqui a função $G(j\omega)$ é representada em termos das suas coordenadas retangulares: a parte real $Re[G(j\omega)]$ e a parte imaginária $Im[G(j\omega)]$. Diferentemente dos diagramas de Bode, o eixo das frequências (tipicamente em radianos/segundo) não aparece explicitamente nos diagramas de Nyquist. A figura 4.8 mostra o diagrama de Nyquist da resposta em frequência do exemplo 4.3.

Outro diagrama às vezes utilizado em projeto de sistemas de controle é o diagrama de Nichols (ou de Black como também é conhecido). Aqui representa-se o módulo (em decibel) em função da fase (em graus). Como no diagrama de Nyquist, o eixo das frequências (tipicamente em radianos/segundo) não aparece explicitamente. A figura 4.9 mostra o diagrama de Black da resposta em frequência do exemplo 4.3.

4.3 Construção do Diagrama de Bode

Como vimos anteriormente as funções $G(j\omega)$ e $G(-j\omega)$ são complexas conjugadas, isto é, possuem o mesmo módulo e fase com sinal trocado. Assim, se conhecemos o gráfico

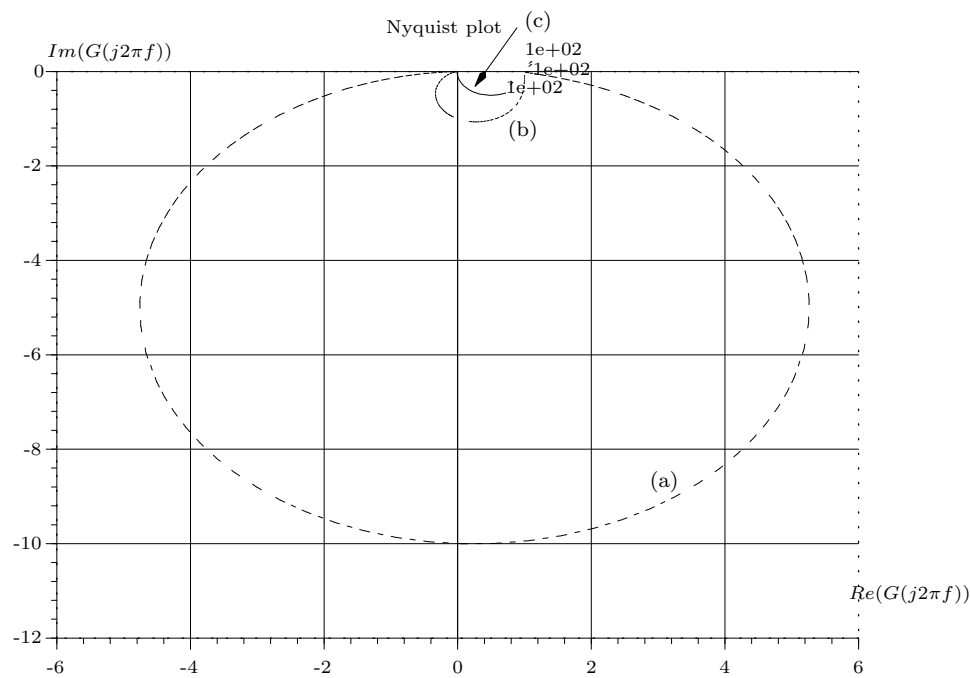


Figura 4.8: Resposta em frequência (Nyquist) do circuito RLC

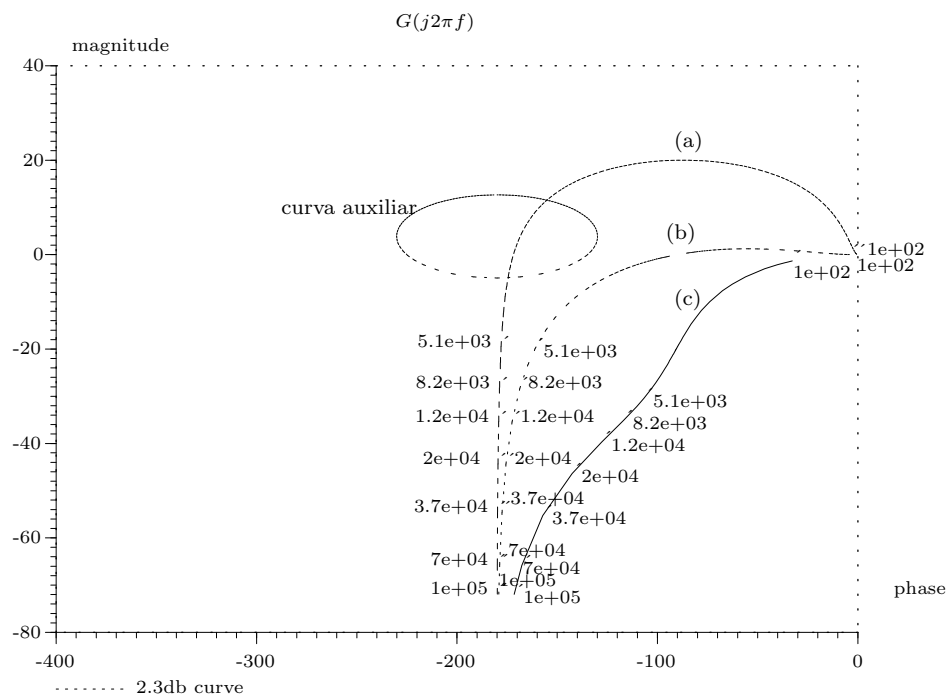


Figura 4.9: Resposta em frequência (Black) do circuito RLC

de $G(j\omega)$ podemos facilmente obter o gráfico de $G(-j\omega)$. Por esse motivo, de agora em diante vamos sempre considerar $G(j\omega)$ com $\omega \geq 0$. Isto implica que as senóides de entrada são do tipo $\text{sen}(\omega t)$ com $\omega \geq 0$. A resposta em frequência para entradas do tipo $\text{sen}(-\omega t)$ ou ainda $\text{sen}(\omega t + \theta)$ pode ser obtida da resposta em frequência para $\text{sen}(\omega t)$ com $\omega \geq 0$.

Nos diagramas de Bode o módulo é representado em dB e a fase em graus. Uma das propriedades fundamentais do módulo em dB é ilustrada no exemplo a seguir.

Exemplo 4.4 *Mostre que para dois números complexos a e b quaisquer temos:*

$$\begin{aligned} |ab|_{dB} &= |a|_{dB} + |b|_{dB} \\ \angle ab &= \angle a + \angle b \\ \left|\frac{1}{a}\right| &= -|a|_{dB} \\ \angle \frac{1}{a} &= -\angle a \end{aligned}$$

Solução: Sejam

$$\begin{cases} a = a_x + ja_y = |a|e^{j\phi_a} \\ b = b_x + jb_y = |b|e^{j\phi_b} \end{cases}$$

onde $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, $|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$, $\phi_a = \tan^{-1}[\frac{a_y}{a_x}]$ e $\phi_b = \tan^{-1}[\frac{b_y}{b_x}]$. Com isto vemos que $|ab| = |a||b|$ e:

$$\begin{aligned} |ab|_{dB} &= 20\log|ab| \\ &= 20\log|a| + 20\log|b| \\ &= |a|_{dB} + |b|_{dB} \end{aligned}$$

Além disso:

$$\angle ab = e^{j(\phi_a + \phi_b)} = \angle a + \angle b$$

$$\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} \text{ e } \left|\frac{1}{a}\right|_{dB} = 20\log\left|\frac{1}{a}\right| = -20\log|a| = -|a|_{dB}$$

$$\angle \frac{1}{a} = e^{-j\phi_a} = -\angle a$$

Assim, tanto o módulo quanto a fase do produto (ou divisão) de números complexos são transformados em soma (ou subtração) dos módulos em dB e fases individuais de cada número multiplicado (dividido). Isso facilita bastante a construção manual dos gráficos de módulo e fase. Outra vantagem é que a escala logarítmica permite uma melhor visualização de fenômenos frequenciais díspares (expansão da escala).

É comum nos diagramas de Bode se contar intervalos de frequência por década ou oitava.

Década: Intervalo de frequência $\Delta\omega = \omega_f - \omega_0$ onde $\omega_f = 10\omega_0$.

Oitava: Intervalo de frequência $\Delta\omega = \omega_f - \omega_0$ onde $\omega_f = 2\omega_0$.

Nos gráficos de módulo expressos em dB podemos fazer as seguintes observações:

- Quando o módulo adimensional é multiplicado (dividido) por dois o módulo em dB é acrescido (subtraído) de $\approx 6 \text{ dB}$ ($20\log(2) = 6.02$).
- Na faixa de frequência de 125 Hz à 8 KHz é considerado normal um ouvido humano que tenha o início da sensação auditiva entre 0 e 25 dB. Se considera também normal para um ouvido humano que ele possa ser exposto à uma intensidade de som de 85 dB, 8 horas por dia durante 35 anos. Acima de 85 dB o som passa a ser prejudicial para o sistema auditivo. A intensidade de som de um tique-taque de um relógio de pulso é em torno de 20 dB; uma conversa normal possui 60 dB; uma rua de tráfego pesado possui 80 dB e o limite para dor está próximo de 140 dB.

É importante observar que a resposta frequencial de um sistema só pode ser obtida se o mesmo for estável. No entanto é comum a construção de diagramas de Bode para funções complexas que não são analíticas no semi-plano direito. Esse é o caso por exemplo do sistema realimentado da figura 4.10. O sistema em malha fechada $F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ é estável e portanto podemos obter a resposta frequencial de $F(s)$ fazendo-se $s = j\omega$ como indicado nas figuras 4.2 e 4.3. Mas $G(j\omega)$ não está mais relacionada à resposta em frequência do sistema $G(s)$. Nesses casos $G(j\omega)$ é apenas uma função complexa auxiliar utilizada na obtenção de $F(j\omega)$. Note que $F(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$.

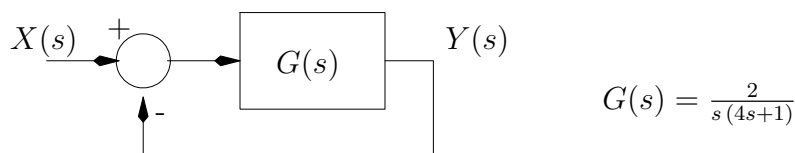


Figura 4.10: Resposta em frequência com $G(s)$ instável

Exemplo 4.5 *Obtenha os diagramas de Bode da função complexa*

$$G(s) = \frac{2}{s(4s+1)}$$

Solução: Para $s = j\omega$ temos:

$$G(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)(4j\omega+1)}$$

Logo:

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = |2|_{dB} - |j\omega|_{dB} - |4j\omega+1|_{dB} \\ \angle G(j\omega) = \angle 2 - \angle j\omega - \angle(4j\omega+1) \end{cases}$$

A seguir vamos obter as expressões analíticas para os módulos e fases acima indicados.

Fator Constante: $|2|_{dB} = 20\log|2|$ e $\angle 2 = 0$.

Fator Integral: $|\frac{1}{j\omega}|_{dB} = -|j\omega|_{dB} = -20\log|j\omega| = -20\log|\omega|$

Fator de primeira ordem:

$$\left|\frac{1}{4j\omega + 1}\right|_{dB} = -20\log|4j\omega + 1| = -20\log(\sqrt{1 + (4\omega)^2})$$

$$\angle \frac{1}{4j\omega + 1} = -\tan^{-1}(4\omega)$$

A figura 4.11(a),(b) mostra os diagramas de Bode dos termos 2 e $j\omega$ respectivamente. A figura 4.12 mostra os diagramas de Bode do termo $1/(4j\omega + 1)$. A figura 4.13 mostra os diagramas de Bode de $G(j\omega)$. Os diagramas de $G(j\omega)$ (módulo e fase) são obtidos somando-se, frequência por frequência, os diagramas dos outros termos como indicado acima.

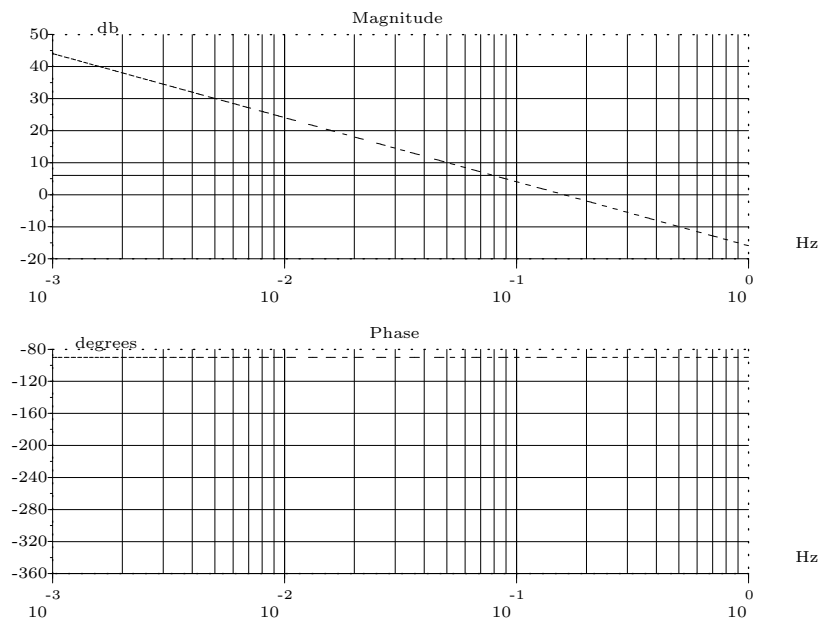


Figura 4.11: Diagrama de Bode dos termos 2 e $\frac{1}{s}$

Os diagramas de Bode podem ser construídos facilmente com o auxílio de computadores. Boas aproximações também podem ser construídas com o auxílio de gráficos assintóticos. As assíntotas são retas que aproximam o comportamento do gráfico real nas altas e baixas frequências. Nas médias frequências as assíntotas se distanciam do gráfico real mas podemos calcular o maior erro cometido. Esse erro ocorre na frequência de quebra que é definida como o ponto de encontro das duas retas assintóticas de alta e baixa frequência. Essa frequência pode ser facilmente calculada. Para um termo de primeira ordem do tipo $Ts + 1$ a frequência de quebra é $\omega = 1/T$. Os termos do tipo K , s , $1/s$ não possuem frequência de quebra pois os gráficos desses termos são retas de

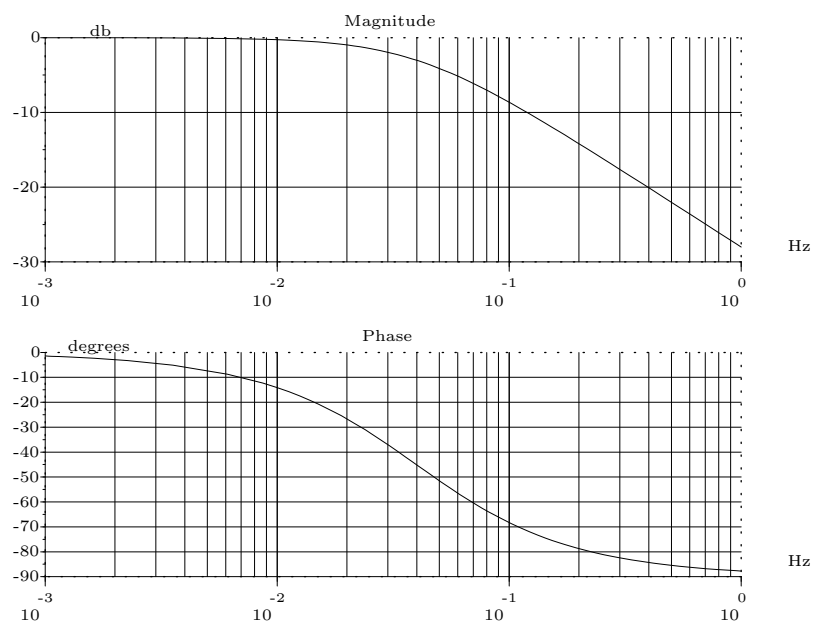


Figura 4.12: Diagrama de Bode do termo $\frac{1}{4s+1}$

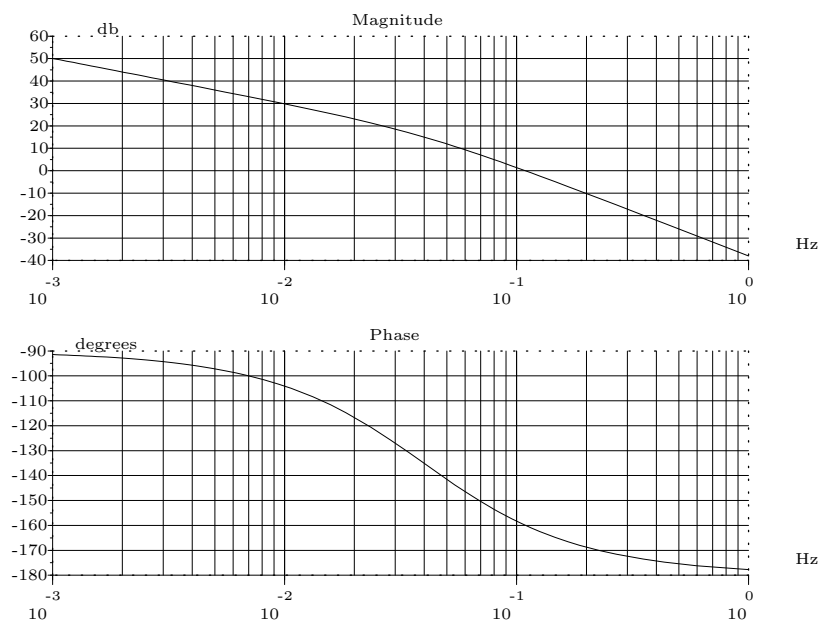


Figura 4.13: Diagrama de Bode de $G(s) = \frac{2}{s(4s+1)}$

inclinação zero, 20 dB/década e -20 dB/década respectivamente. Isso pode ser verificado a seguir.

Um fator constante é uma reta paralela ao eixo das frequências: $|k|_{dB} = 20\log|k|$ e $\angle k = 0$ se $k > 0$.

Um fator do tipo $1/s$ é uma reta de inclinação -20 dB/década que passa por zero dB quando $\omega = 1 \text{ rad/seg} = 1/2\pi \text{ Hertz}$: $|\frac{1}{j\omega}|_{dB} = -|j\omega|_{dB} = -20\log|j\omega| = -20\log|\omega|$. Sua fase é constante e vale -90 graus. Um fator do tipo s possui módulo e fase com sinais trocados.

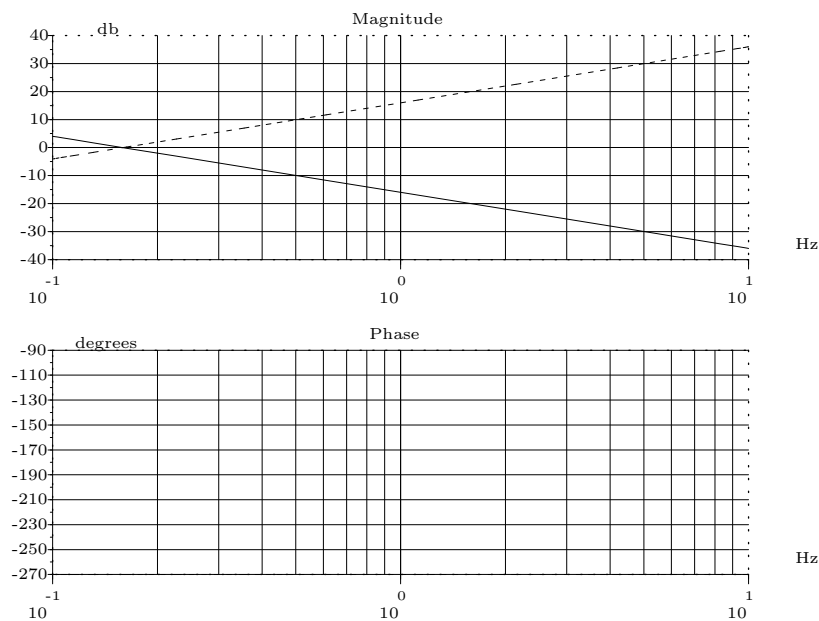


Figura 4.14: Diagrama de Bode dos termos s e $\frac{1}{s}$

Para um fator de primeira ordem do tipo $\frac{1}{Ts+1}$ temos:

- Baixas frequências: $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{j\omega T + 1} = 1$. Logo nas baixas frequências o termo se comporta como um fator constante unitário.
- Altas frequências: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1}{j\omega T}$ ($\omega \rightarrow \infty$). Logo nas altas frequências o termo se comporta como um fator do tipo $\frac{1}{j\omega T}$ que possui fase -90 graus e módulo decrescendo na razão de -20 dB/década.
- Médias frequências: na frequência de quebra $\omega = 1/T$ o temos $\frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1}{j+1}$ que possui módulo $-20\log(\sqrt{2}) = -3 \text{ dB}$ e fase $-\tan^{-1}(1) = -45 \text{ graus}$.

Veja na figura 4.15 que as assíntotas (linhas pontilhadas) possuem, no módulo, inclinações de zero e -20 dB/década para baixas e altas frequências respectivamente. A fase vale zero graus nas baixas frequências, -90 graus nas altas frequências e nas médias frequências pode ser aproximada por uma assíntota de inclinação -45 graus/década. Aqui consideramos

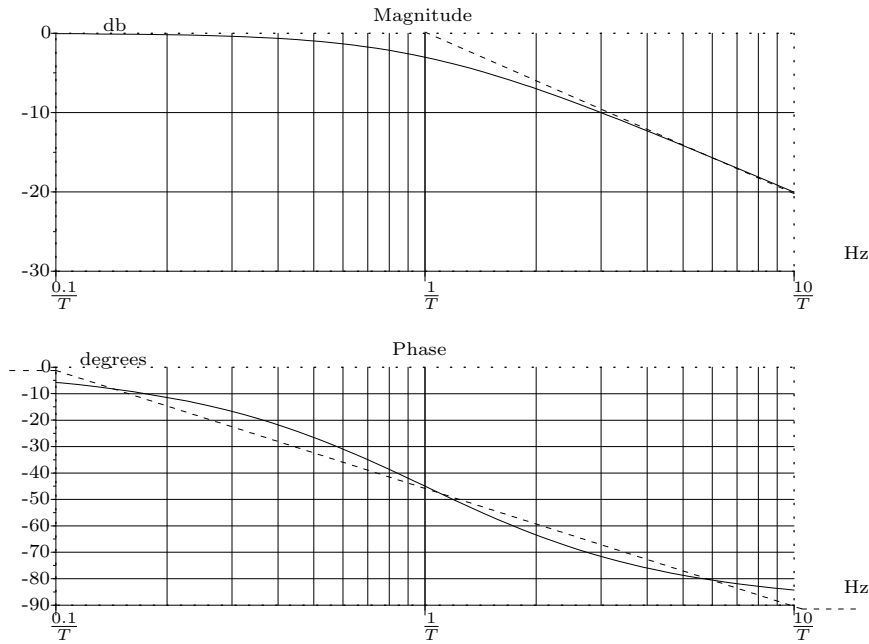


Figura 4.15: Diagrama de Bode do termo $\frac{1}{Ts+1}$ e assíntotas

médias frequências o intervalo entre uma década abaixo e uma década acima da frequência de quebra.

É importante notar que o gráfico de $Ts + 1$ é obtido trocando-se o sinal do módulo e fase.

Para um fator de segunda ordem do tipo $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ temos:

- Baixas frequências: $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = 1$. Logo nas baixas frequências o termo se comporta como um fator constante unitário.
- Altas frequências: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2}$ ($\omega \rightarrow \infty$). Logo nas altas frequências o termo se comporta como um fator do tipo $\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2}$ que possui fase -180 graus e módulo decrescendo na razão de -40 dB/década.
- Médias frequências: na frequência de quebra $\omega = \omega_n$ o temos

$$\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{j2\xi}$$

que possui módulo $-20 \log(2\xi)$ dB e fase $-\tan^{-1}(\infty) = -90$ graus.

Veja na figura 4.16 que as assíntotas (linhas pontilhadas) possuem, no módulo, inclinações de zero e -40 dB/década para baixas e altas frequências respectivamente. A fase vale zero graus nas baixas frequências, -180 graus nas altas frequências e nas médias frequências pode ser aproximada por uma assíntota de inclinação -90 graus/década. Aqui consideramos médias frequências o intervalo entre uma década abaixo e uma década acima da

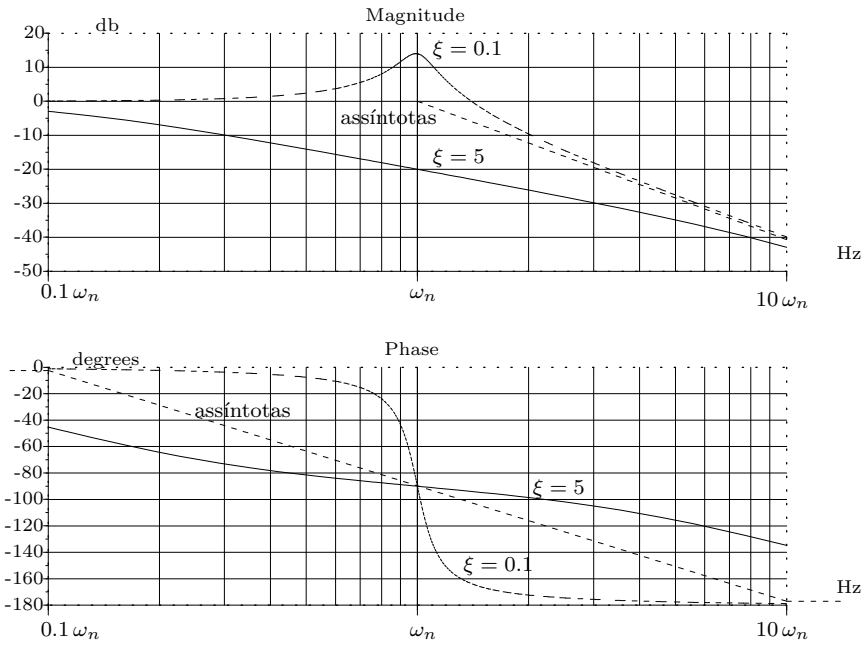


Figura 4.16: Diagrama de Bode do termo $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ e assíntotas

frequência de quebra. A frequência e o pico de ressonância são calculados da seguinte forma:

$$\frac{d}{d\omega}|G(j\omega)| = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\xi\frac{\omega}{\omega_n}]^2}} \right] = 0$$

Resolvendo a expressão acima encontramos

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad , \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.1)$$

Se $\xi > \sqrt{2}/2$ não haverá pico de ressonância e o módulo decai monotonicamente de 1 à zero.

Quando $0 \leq \xi \leq \sqrt{2}/2$ o pico de ressonância é:

$$M_r = |G(j\omega)|_{\omega=\omega_r} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.2)$$

Problema 4.2 Considere o circuito RLC da figura 4.6 com $R = 0$ (oscilador ideal) e suponha $L = 0.01H$, $C = 1\mu F$. Para esse sistema pede-se:

1. A função de transferência $G(s)$ do oscilador e seus pólos.
2. Os diagramas de Bode da função $G(j\omega)$.
3. Explique porque não se pode obter a resposta em frequência desse sistema, isto é, porque nesse caso falham as relações indicadas nas figuras 4.2 e 4.3.

4. Com o auxílio de tabelas de transformada de Laplace obtenha as respostas do oscilador para $v(t) = \text{sen}(10^4 t)u(t)$ e $v(t) = \text{sen}(2t)u(t)$.
5. Obtenha a resposta para um degrau unitário na entrada. Explique porque o teorema do valor final não pode ser aplicado neste caso.

Exemplo 4.6 Construa os diagramas de Bode para:

$$G(s) = \frac{10(s + 10)}{s(s + 1)(s^2 + 100s + 10^4)}$$

Solução: Quando se dispõe do auxílio de um computador e um software adequado o diagrama se constrói bastante facilmente (veja figura 4.19). Quando se deseja apenas um esboço manual do diagrama podemos construí-lo da seguinte forma. O primeiro passo consiste em fatorar $G(s)$ numa forma onde se conhece os diagramas assintóticos de cada um dos fatores individualmente. Os fatores que são polinômios de primeira e segunda ordem devem ter o termo independente unitário como indicado a seguir.

$$G(s) = \frac{10^{-2}(0,1s + 1)}{s(s + 1)(10^{-4}s^2 + 10^{-2}s + 1)}$$

Em seguida construa os diagramas assintóticos de dois fatores quaisquer e some as duas curvas de módulo e de fase. Construa o diagrama assintótico de um terceiro fator e some as curvas obtidas com o resultado anterior. Repita esse procedimento até que os diagramas assintóticos de todos os fatores tenham sido levados em consideração. Para construir um esboço dos diagramas de Bode a partir dos diagramas assintóticos obtidos use o fato que nas frequências de quebra de fatores lineares a distância entre a curva real e as assíntotas de ± 3 dB e nos fatores quadráticos é $\pm 20 \log(2\xi)$. As figuras 4.17, 4.18 e 4.19 ilustram esses passos. As curvas pontilhadas são as assíntotas e curvas cheias são gráficos reais. O intervalo de frequência pode ser escolhido como sendo uma década abaixo da menor frequência de quebra e uma década acima da maior.

4.4 Sistemas de Fase Mínima e Não-Mínima

Vimos em seções precedentes que um sistema é estável quando todos os pólos da sua função de transferência estão no semi-plano complexo esquerdo. Nesta seção estudaremos algumas propriedades associadas aos zeros da função de transferência.

Definição 4.1 Um sistema é dito ser de Fase Mínima se todos os zeros da função de transferência desse sistema estão no semi-plano complexo esquerdo. Caso contrário, isto é se existir algum zero no semi-plano direito ou sobre o eixo imaginário, o sistema é dito ser de Fase Não-mínima.

Para que um sistema de controle tenha algum interesse prático ele deve ser estável, isto é todos os zeros da sua função de transferência devem ter parte real estritamente negativa. No entanto alguns sistemas físicos estáveis podem possuir zeros no semi-plano direito.

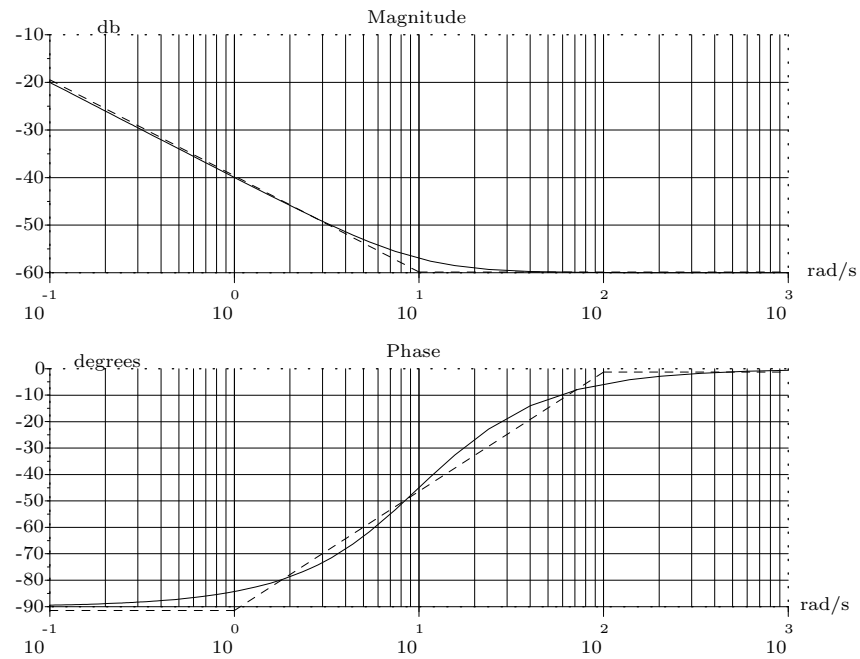


Figura 4.17: Diagrama de Bode do termo $G_1(s) = \frac{0.01(0.1s+1)}{s}$ e assíntotas

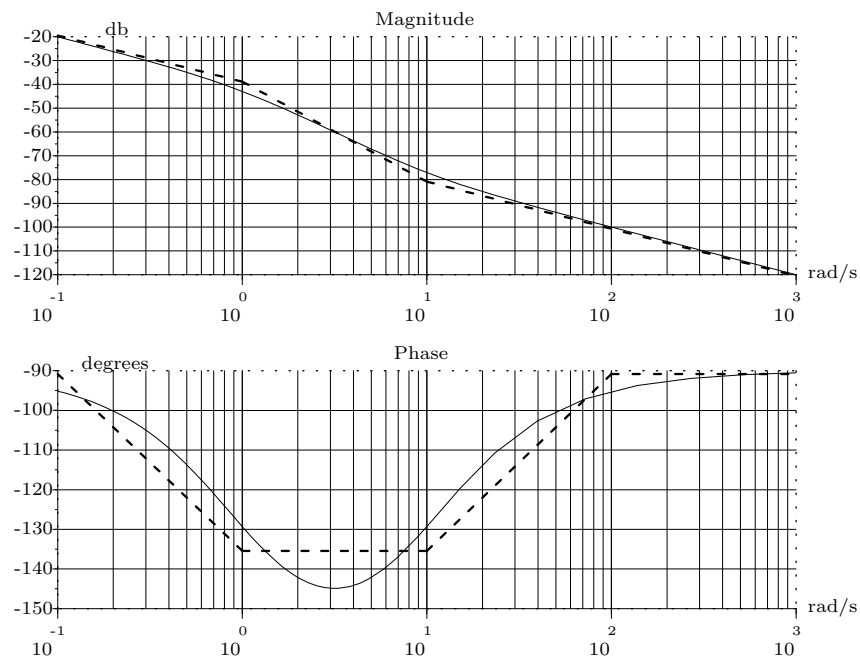


Figura 4.18: Diagrama de Bode do termo $G_2(s) = G_1(s) \frac{1}{s+1}$ e assíntotas

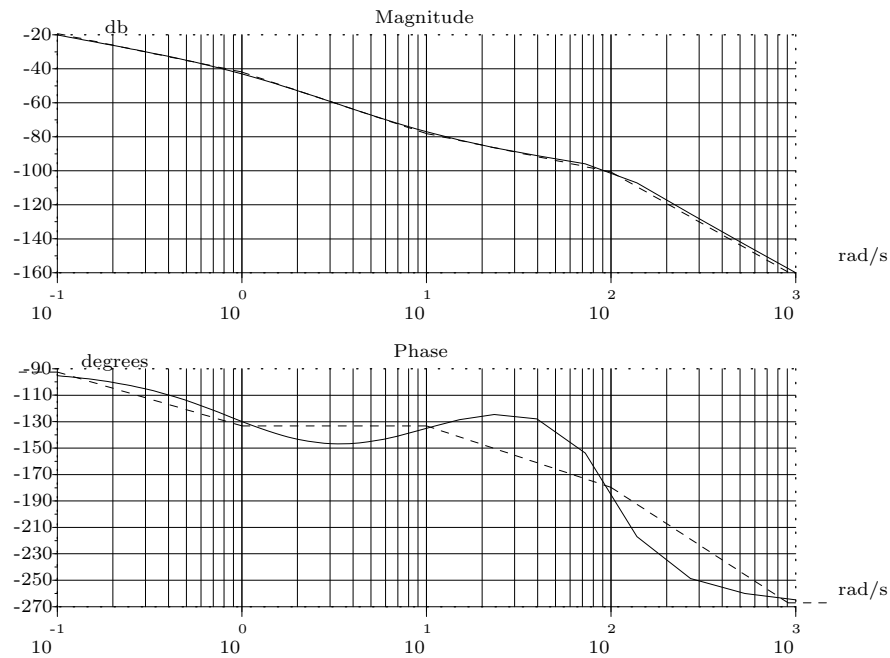


Figura 4.19: Diagrama de Bode do termo $G(s) = G_2(s) \frac{1}{10^{-4}s^2 + 10^{-2}s + 1}$ e assíntotas

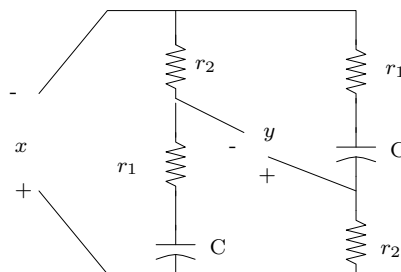


Figura 4.20: Circuito de fase não mínima ($r_2 > r_1$)

Exemplo 4.7 O circuito da figura 4.20 possui $x(t)$ como tensão de entrada e $y(t)$ como tensão de saída. A equação diferencial que rege o comportamento do circuito é $y + rC\dot{y} = x - r_0\dot{x}$ onde $r = r_1 + r_2$ e $r_0 = r_2 - r_1$. A função de transferência desse circuito é então

$$G(s) = \frac{1 - r_0Cs}{1 + rCs} \quad (4.3)$$

Note que $G(s)$ possui um pólo em $s = -\frac{1}{rC}$ e um zero em $s = \frac{1}{r_0C}$. Portanto o sistema é estável de fase não mínima se escolhermos $r_2 > r_1$, pois nesse caso o zero de $G(s)$ está no semi-plano direito. Se escolhermos $r_2 < r_1$ o sistema é estável de fase mínima pois agora o zero de $G(s)$ está no semi-plano esquerdo. O diagrama de Bode desse sistema é indicado na figura 4.21 para caso (a): $r_1 = 10K\Omega$, $r_2 = 20K\Omega$, $C = 1\mu F$ e na figura 4.22 para caso (b): $r_2 = 10K\Omega$, $r_1 = 20K\Omega$, $C = 1\mu F$. Veja que o diagrama de módulo é igual para os dois casos mas o diagrama de fase é diferente.

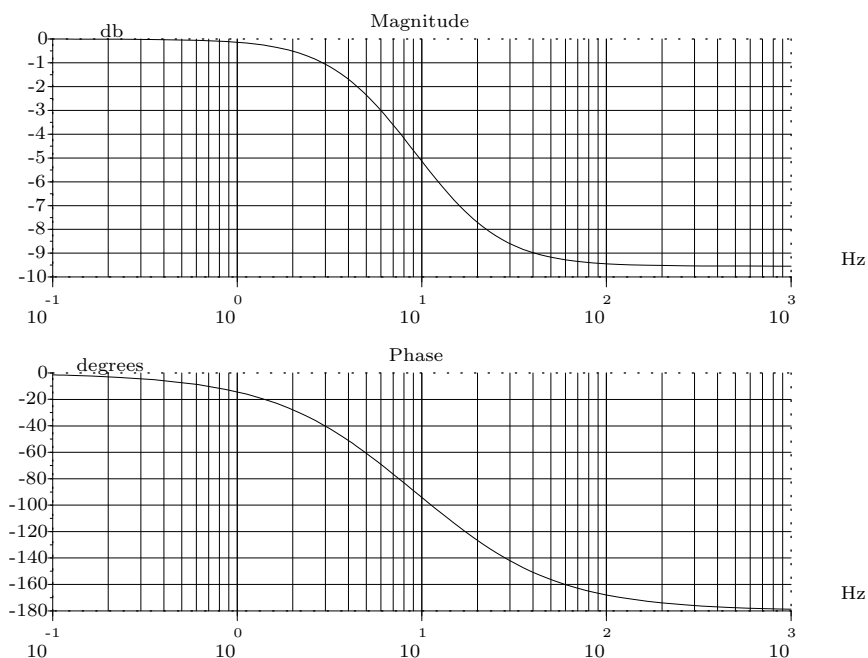


Figura 4.21: Caso (a): Sistema de fase não mínima ($r_2 > r_1$)

Sistemas de fase mínima possuem propriedades bastante interessantes. São mais simples de serem controlados e os seus diagramas de Bode (módulo e fase) são assintóticos nas altas e baixas frequências e além disso podemos relacionar a assíntota de módulo com a de fase através do grau relativo do sistema. Grau relativo de um sistema é a diferença de grau entre o denominador e o numerador da função de transferência do mesmo.

Veja o que ocorre se considerarmos um sistema que possui uma função de transferência do tipo:

$$G(s) = \frac{K(a_ms^m + \dots + a_1s + 1)}{b_ns^n + \dots + b_1s + 1} \quad (4.4)$$

com a_n, b_n, K reais positivos.

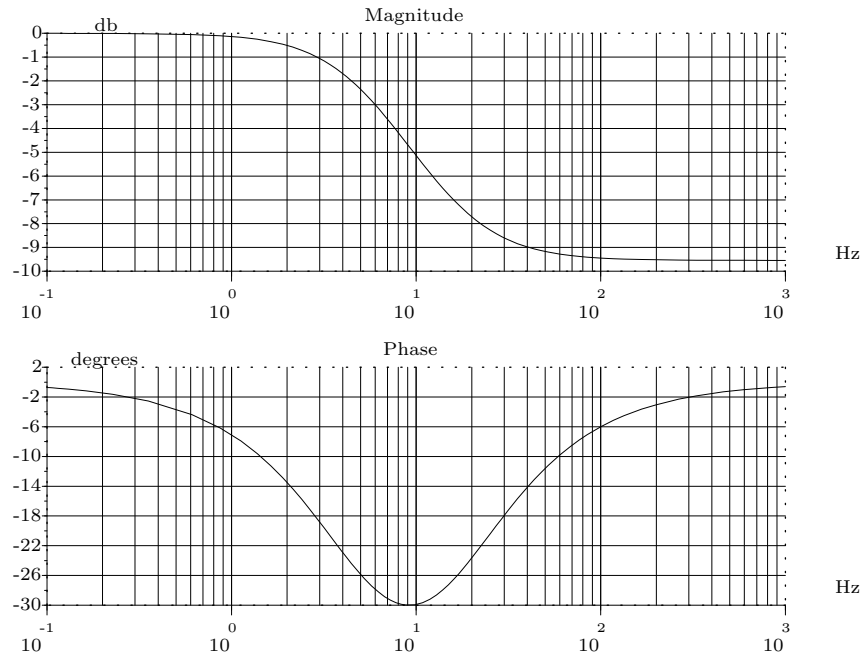


Figura 4.22: Caso (b): Sistema de fase mínima ($r_2 < r_1$)

O grau relativo desse sistema é $n - m$. Note que $n - m \geq 0$ para todo sistema de interesse prático.

Nas baixas frequências temos:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K$$

Logo o diagrama de módulo nas baixas frequências é uma assíntota de inclinação zero e valor dado por $20 \log(K)$. O diagrama de fase nas baixas frequências também é uma assíntota de inclinação zero e valor zero pois $K > 0$. Nas altas frequências temos:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} K \frac{a_m}{b_n} (j\omega)^{m-n}$$

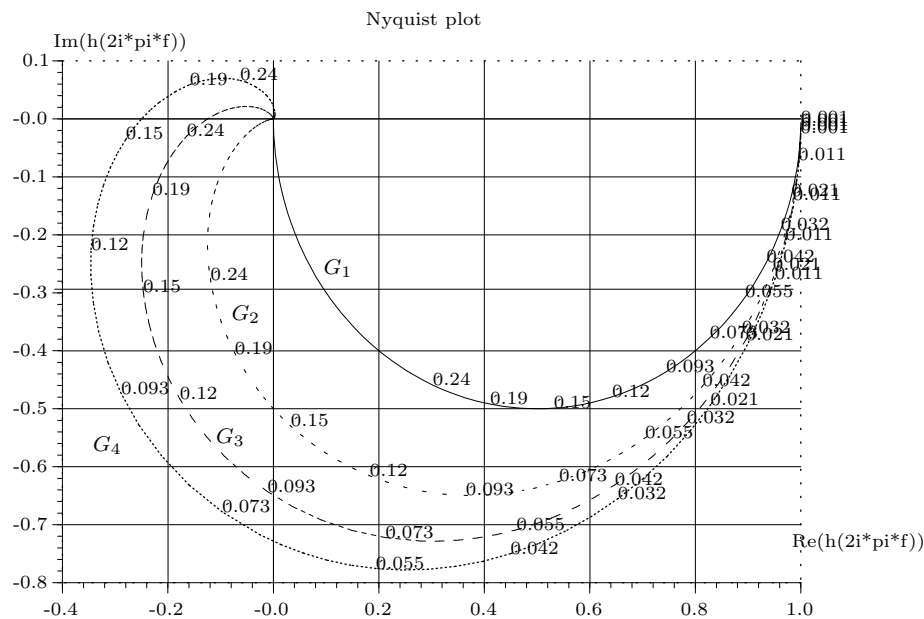
O diagrama de módulo nas altas frequências é uma assíntota de inclinação $20(m - n)$ dB por década e o valor onde esta assíntota cruza o eixo das frequências é dado por $\omega = (K \frac{a_m}{b_n})^{\frac{1}{n-m}}$. O diagrama de fase nas altas frequências também é uma assíntota de inclinação zero e valor $90(m - n)$ graus. Assim note que num sistema de fase mínima temos que se o módulo decai assintoticamente com $20(m - n)$ dB por década a fase vale $90(m - n)$ graus. Verifique este resultado no exemplo 4.7. Nesse exemplo $n = m = 1$ (grau relativo zero) e portanto no caso (b) quando $r_2 < r_1$ (sistema de fase mínima) o módulo tende à uma assíntota de inclinação zero e a fase tende a zero graus nas altas frequências. Isto não ocorre no caso (a) quando $r_2 > r_1$ (sistema de fase não mínima).

4.5 Gráficos de Nyquist (ou polares)

Como vimos na sub-seção 4.2, podemos representar a função complexa $G(j\omega)$ em termos das suas coordenadas polares. No eixo horizontal plotamos $\text{Re}[G(j\omega)]$ e no eixo vertical

$Im[G(j\omega)]$. Este gráfico recebe o nome de diagrama de Nyquist. A construção de um esboço manual para esses gráficos não é uma tarefa fácil em geral. No entanto podemos construir o diagrama de Nyquist a partir dos diagramas de Bode. Com alguns pontos de módulo e fase dos diagramas de Bode podemos construir um esboço do diagrama de Nyquist. O ponto $(-1,0)$ do diagrama de Nyquist tem um papel muito importante na análise de estabilidade de sistemas realimentados.

A figura 4.23 mostra os diagramas de Nyquist dos termos $G_1(s) = (s+1)^{-1}$, $G_2(s) = (s+1)^{-2}$, $G_3(s) = (s+1)^{-3}$, $G_4(s) = (s+1)^{-4}$. Note na figura 4.23 que o gráfico de todos



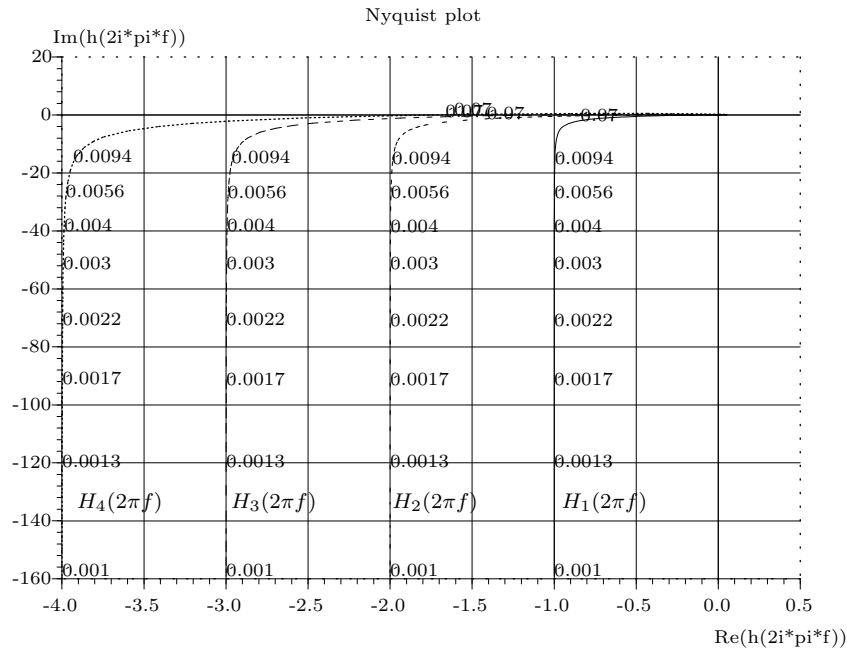


Figura 4.24: Diagrama de Nyquist de $H_1(2\pi f)$, $H_2(2\pi f)$, $H_3(2\pi f)$, $H_4(2\pi f)$

4.6 Problemas Complementares

Problema 4.3 A figura 4.25 mostra o diagrama de Bode de um sistema linear invariante. Diga se o sistema é estável, de fase mínima, e encontre uma função de transferência que tenha um diagrama de Bode similar. Sugestão: construa os diagramas assintóticos de módulo e fase e partir deles responda as questões acima.

Problema 4.4 Um sistema é regido pela seguinte equação diferencial $\ddot{y} + \dot{y} + y = x$. Calcule a resposta de regime do sistema nas seguintes situações:

a) $x(t) = \text{degrau unitário}$.

b) $x(t) = \cos(10t + \frac{\pi}{4})$.

c) $x(t) = e^{j5t}$.

Problema 4.5 A figura 4.26 mostra a resposta em frequência de um sistema linear invariante. Diga se o sistema é estável e de fase mínima. Construa o diagrama assintótico e encontre os valores das constantes k , a , b , c_1 , c_2 de tal forma que a função $F(s)$ abaixo tenha uma resposta em frequência similar.

$$F(s) = k \frac{as + 1}{(bs + 1)(c_1s^2 + c_2s + 1)}$$

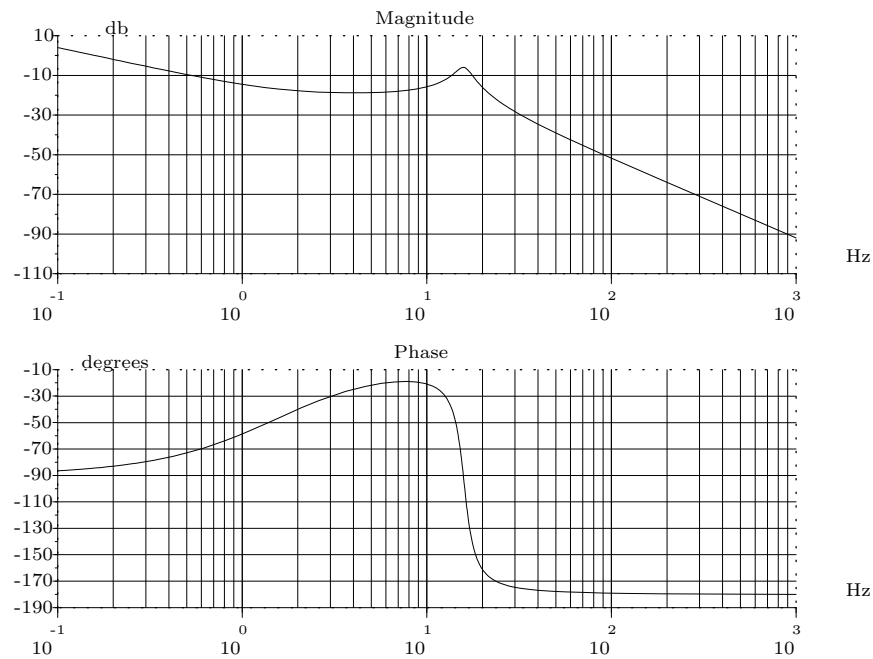


Figura 4.25: Diagrama de Bode de um sistema linear invariante

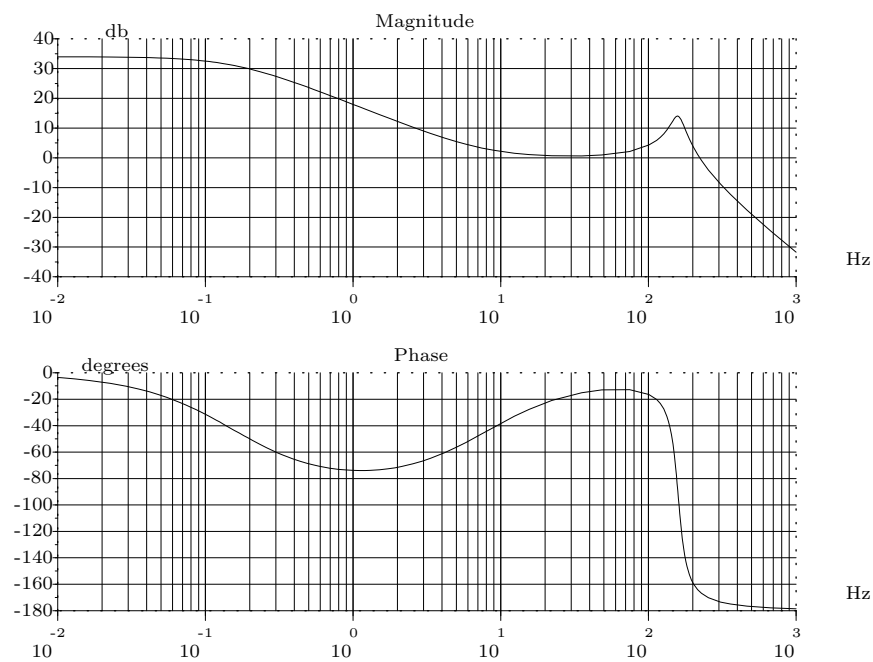


Figura 4.26: Resposta em frequência de um sistema linear invariante

Capítulo 5

Sinais e a Transformada de Fourier

Vimos nos métodos de resposta em frequência que para um sistema cuja função de transferência é $F(s)$, a função $F(j\omega)$ fornece informações importantes sobre o comportamento do sistema em regime senoidal estacionário.

Neste capítulo estudaremos a transformada de Fourier e como essa transformada pode nos auxiliar na análise de sinais e suas propriedades. A transformada de Fourier de um sinal transforma um sinal $f(t)$ numa função complexa $F(\omega)$, conhecida como espectro do sinal $f(t)$. As equações que definem a transformação de variáveis ($f(t)$ para $F(\omega)$ e vice-versa) são dadas em (5.1). Estas operações, conhecidas como transformada de Fourier e sua inversa são ilustradas na figura 5.1.

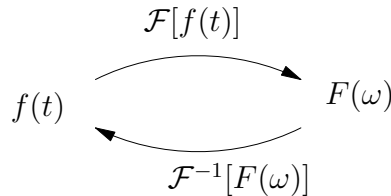


Figura 5.1: Operador Transformada de Fourier e seu inverso

$$\begin{cases} f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{cases} \quad (5.1)$$

Existem sinais $f(t)$ para os quais não é possível se calcular a Transformada de Fourier. Uma condição suficiente para a existência da Transformada de Fourier é indicada a seguir:

$$|F(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Logo, se o sinal $f(t)$ é integrável em módulo a sua transformada vai seguramente existir. No entanto o contrário não é verdade em geral, pois sinais como seno, cosseno, e degrau

não são integráveis em módulo mas suas transformadas existem como casos limites e podem ser expressas com o auxílio de funções impulsos.

5.1 Conexões entre Fourier e Laplace

Para melhor entender as conexões entre as transformadas de Fourier e Laplace vamos rescrever as definições dessas transformadas.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}: \text{Transformada de Fourier (bilateral } -\infty < t < \infty).$$

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}: \text{Transformada de Fourier (unilateral } 0 \leq t < \infty).$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}: \text{Transformada de Laplace (} 0 \leq t < \infty).$$

Note que na transformada Laplace apenas nos interessa analisar sinais para $t \geq 0$ enquanto que na transformada de Fourier podemos considerar sinais definidos de $-\infty < t < \infty$ (transformada bilateral de Fourier). Além disso se fazemos $s = j\omega$ na definição de transformada de Laplace obtemos a própria definição da transformada de Fourier unilateral. Isso mostra que a transformada unilateral de Fourier é idêntica à transformada de Laplace com $s = j\omega$. No entanto, lembre que a função $F(s)$ está bem definida para valores da variável s dentro da região de convergência da transformada de Laplace (veja seção 2.2). Assim, podemos fazer $s = j\omega$ apenas quando esses valores da variável s estão dentro da região de convergência dessa transformada. A região de convergência da transformada de Laplace é a região do plano complexo à direita do pólo mais à direita de $F(s)$. Logo, para que possamos fazer $s = j\omega$ a função $F(s)$ não pode ter pólos sobre o eixo imaginário e nem à direita dele, isto é o sinal $f(t)$ deve possuir energia limitada (veja seção 2.5). Nessas condições, ao fazermos $s = j\omega$ estamos obtendo a Transformada de Fourier $F(\omega)$ a partir da Transformada de Laplace $F(s)$, pois nesses casos:

$$F(s)|_{s=j\omega} = F(j\omega) = F(\omega)$$

Quando a região de convergência de Laplace não contiver o eixo imaginário a igualdade acima deixa de ser verdadeira como veremos em alguns exemplos.

5.2 Energia de sinais

Veremos a seguir que o módulo da Transformada de Fourier está associado à energia do sinal.

Neste capítulo vamos definir energia de um sinal $f(t)$ como sendo:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt \quad (5.2)$$

Por exemplo, se $f(t)$ representa a tensão ou corrente num resistor unitário, a energia do sinal $f(t)$ é dada pela integral acima. Os sinais que possuem energia limitada ($E < \infty$) são portanto de grande interesse prático.

Veremos a seguir que a energia de um sinal está ligada ao módulo da Transformada de Fourier do sinal em questão. Antes porém, devemos relembrar algumas propriedades da função $F(\omega)$ dadas no exemplo 5.1.

Exemplo 5.1 *Mostre que $|F(\omega)|$ é uma função par de ω e $\angle F(\omega)$ é uma função ímpar de ω .*

Solução: Seja $F(\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ onde $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$ denotam respectivamente o módulo e a fase de $F(\omega)$. Note que $f(t)$ é um sinal real logo $f(t)$ e seu conjugado complexo $\overline{f(t)}$ são iguais, isto é $f(t) = \overline{f(t)}$. Então a conjugação complexa de $F(\omega)$ resulta:

$$\overline{F(\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-j\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt = F(-\omega)$$

Portanto $F(-\omega) = \overline{F(\omega)} = M(\omega)e^{-j\phi(\omega)}$ que nos leva às conclusões desejadas:

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &= |F(-\omega)| = M(\omega) & (\text{função par}) \\ \angle F(\omega) &= -\angle F(-\omega) & (\text{função ímpar}) \end{aligned}$$

Podemos agora mostrar que a energia de um sinal está ligada ao módulo da Transformada de Fourier do sinal em questão. Com $f(t)$ de (5.1) obtemos:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} F(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Como $\overline{F(\omega)} F(\omega) = |F(\omega)|^2$ ficamos com:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5.3)$$

A fórmula acima é conhecida como teorema de Parseval. Note ainda que como $|F(\omega)|$ é uma função par temos:

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5.4)$$

A quantidade $\frac{|F(\omega)|^2}{\pi}$ é às vezes chamada de densidade espectral de energia.

Exemplo 5.2 *Encontre o intervalo de frequência $[-\omega_0, \omega_0]$ que contém metade da energia do sinal $f(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$.*

Solução: Seja E_T a energia total do sinal dada por

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

Como $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{1+j\omega}$ temos que a energia no intervalo $[-\omega_0, \omega_0]$ é dada por:

$$E_{\omega_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(\omega_0)$$

Queremos metade da energia total, ou seja, $1/4$, logo:

$$\frac{1}{\pi} \tan^{-1}(\omega_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

Logo metade da energia do sinal está no intervalo de frequência entre $[-1, 1]$.

5.3 Cálculo de algumas transformadas

5.3.1 Sinal Exponencial Unilateral ($t \geq 0$)

Seja:

$$f(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0$$

Então:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega}$$

Note que $F(\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$ pois a região de convergência da Transformada de Laplace $F(s)$ contém o eixo imaginário $j\omega$. Se $a < 0$ a Transformada de Fourier não mais existe.

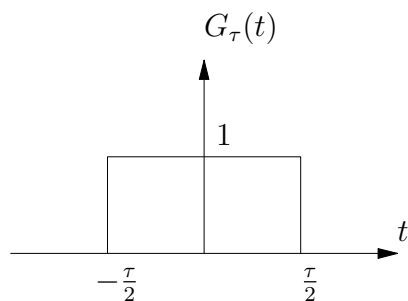
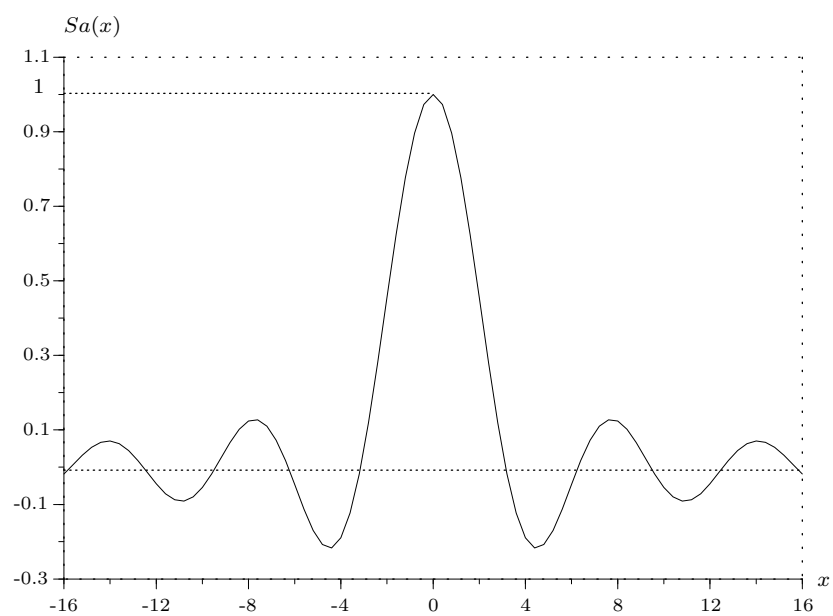
5.3.2 Sinal Porta

Usaremos a notação $G_\tau(t)$ para definir o sinal porta (gate) de largura τ como indicado a seguir.

$$G_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

A transformada do sinal porta é calculada da seguinte forma.

$$\begin{aligned} F(\omega) = \mathcal{F}[G_\tau(t)] &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) \\ &= \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)} = \tau S_a\left[\frac{\omega\tau}{2}\right] \end{aligned}$$

Figura 5.2: Sinal Porta de largura τ Figura 5.3: Função $Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

A função $Sa(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ é conhecida como função amostragem (sampling) e está indicada na figura 5.3.

$$G_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (5.5)$$

Note que $F(\omega)$ nesse caso é real pois $f(t)$ é par. Se $f(t)$ for ímpar então $F(\omega)$ é imaginário puro.

5.3.3 Sinal Impulso:

A notação para a função impulso unitário que ocorre no instante zero é $\delta(t)$. Como $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$ temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(0) dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0)$$

Logo:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{j0} = 1$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

O seguinte resultado será útil na prova de alguns teoremas.

Seja $f(t)$ a função definida a seguir.

$$f(t) = \frac{K}{\pi} Sa(Kt)$$

Podemos mostrar que a área dessa função é unitária para qualquer valor do parâmetro K , isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{\pi} Sa(Kt) dt = 1, \quad \forall K$$

Com esse resultado podemos ainda mostrar que quando K tende à infinito a função $f(t)$ tende à função impulso.

$$\delta(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{\pi} Sa(Kt) \quad (5.6)$$

5.3.4 Funções Constante, Sinal e Degrau

A transformada do degraú não pode ser facilmente obtida pela aplicação da definição. A seguir veremos como obtê-la com o auxílio das transformadas das funções sinal e constante.

A função constante unitária pode ser vista como o caso limite da função porta, isto é

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G_\tau(t) = 1$. Logo com (5.5),(5.6) temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[1] &= \mathcal{F}[\lim_{\tau \rightarrow \infty} G_\tau(t)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{F}[G_\tau(t)] \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau S_a(\omega\tau/2) \\
 &= 2\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2\pi} S_a(\omega\tau/2) \\
 &= 2\pi\delta(\omega)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

A função sinal é definida como sendo:

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

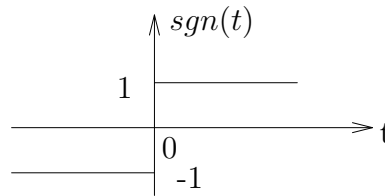


Figura 5.4: Função Sinal

A função sinal pode ser expressa através do seguinte limite:

$$sgn(t) = \lim_{a \rightarrow 0} (e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t))$$

e portanto podemos calcular sua transformada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[sgn(t)] &= \mathcal{F}[\lim_{a \rightarrow 0} (e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t))] \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)] \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

O resultado acima nos permite calcular agora a Transformada do degrau. Como $u(t) = \frac{1}{2}(1 + sgn(t))$ temos:

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[1] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[sgn(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Resumindo:

$$\begin{aligned}
 1 &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \\
 sgn(t) &\longleftrightarrow \frac{2}{j\omega} \\
 u(t) &\longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

5.3.5 Sinais Senoidais

Nos ocuparemos agora das transformadas das funções senoidais. Pela definição temos

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt$$

como $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$ temos:

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \left\{ S_a \left[T \frac{(\omega - \omega_0)}{2} \right] + S_a \left[T \frac{(\omega + \omega_0)}{2} \right] \right\}$$

com (5.6) temos:

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (5.10)$$

Da mesma forma obtem-se:

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] = j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (5.11)$$

Note que a Transformada de Fourier do $\sin(\omega_0 t)$ e $\cos(\omega_0 t)$ só não é nula nas frequências $\pm\omega_0$. Isto mostra que esses sinais possuem energia concentrada nessas frequências. Isso não ocorreria se as funções fossem $\sin(\omega_0 t)u(t)$ ou $\cos(\omega_0 t)u(t)$. Nesse caso obteríamos:

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

que é algo bastante similar ao que obteríamos a partir da Transformada de Laplace para $s = j\omega$.

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)] = \frac{s}{\omega_0^2 + s^2} \rightarrow F(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)] = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + s^2} \rightarrow F(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Os resultados não coincidem pois a região de convergência da Transformada de Laplace dessas duas funções não contém o eixo imaginário.

5.3.6 Exponencial Eterna $e^{j\omega_0 t}$

Como $e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$ temos com os resultados anteriores:

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (5.12)$$

5.3.7 Funções Periódicas

A transformada de funções periódicas se faz com o auxílio da decomposição dessas funções via série exponencial de Fourier.

Seja $f(t)$ uma função periódica de período T . Então $f(t)$ pode ser expressa em termos da Série exponencial de de Fourier indicada abaixo.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega_n t} \quad , \quad t_0 < t < t_0 + T \quad (5.13)$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ é conhecido como frequência fundamental do sinal e $\omega_n = n\omega_0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ são as frequências harmônicas do sinal. A primeira harmônica é a própria frequência fundamental. O coeficiente F_0 é o valor médio do sinal no período e F_n , $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ são os coeficientes harmônicos.

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (5.14)$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (5.15)$$

Tomando-se as transformadas dos dois lados de (5.13) temos:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (5.16)$$

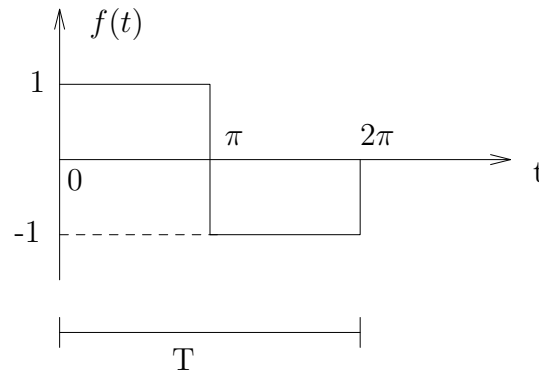
A expressão acima mostra que a transformada de Fourier de um sinal periódico não é nula apenas nas frequências harmônicas do sinal. Logo a energia de sinais periódicos está concentrada nas frequências harmônicas do sinal.

Problema 5.1 *Pela definição acima mostre que F_n e F_{-n} são complexos conjugados. Sugestão: use a fórmula de Euler $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$.*

Problema 5.2 *Mostre que se $f(t)$ é uma função par, isto é $f(t) = f(-t)$, então F_n e $\mathcal{F}[f(t)]$ são ambos reais e se $f(t)$ é ímpar, isto é $f(t) = -f(-t)$, F_n e $\mathcal{F}[f(t)]$ são puramente imaginários. Sugestão: use a fórmula de Euler $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$.*

Exemplo 5.3 *Calcule a transformada de Fourier da função periódica da figura 5.5.*

Solução: Podemos verificar pela figura que o valor médio de $f(t)$ no período é nulo, isto é $F_0 = 0$. A frequência fundamental do sinal é $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$. Como $f(t)$ é ímpar

Figura 5.5: Função onda quadrada de período 2π .

temos:

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) (\cos(\omega_n t) - j \sin(\omega_n t)) dt \\
 &= \frac{-j}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(\omega_n t) dt = \frac{-j}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(n\omega_0 t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(n\omega_0 t) dt \right] \\
 &= \frac{-j}{2\pi} \left(\left[\frac{-\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{\pi} + \frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{-j}{2n\pi} (-\cos(n\pi) + 1 + \cos(n2\pi) - \cos(n\pi)) \\
 &= \frac{-j}{2n\pi} (2 - 2\cos(n\pi)) = \frac{-2j}{n\pi} \text{ se } n \text{ é ímpar e } 0 \text{ se } n \text{ é par}
 \end{aligned}$$

Logo para n ímpar temos:

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2j}{n\pi} \delta(\omega - n)$$

Além disso, com (5.13) e n ímpar ficamos com:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2j}{n\pi} e^{jnt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2j}{n\pi} (\cos(nt) + j \sin(nt)) \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nt)
 \end{aligned}$$

Exemplo 5.4 Calcule a Transformada de Fourier da função trem de impulsos indicada na figura 5.7.

Solução: A função trem de impulsos é uma função periódica e se denotarmos seu período por T podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

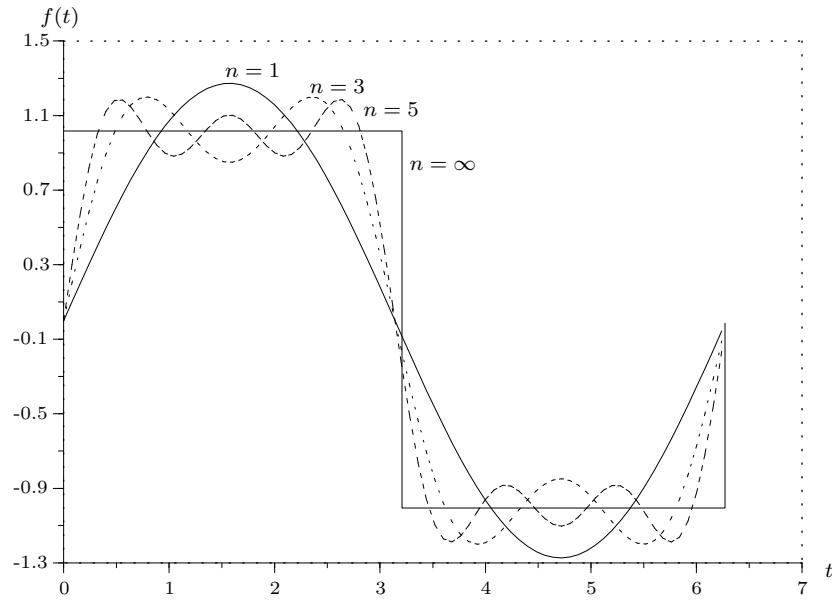


Figura 5.6: Aproximação de sinais pela série trigonométrica de Fourier.

Como $\delta_T(t)$ é periódica de período T temos:

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

onde F_n , $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ são os coeficiente harmônicos do sinal que são dados por:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0 0} = \frac{1}{T}$$

Logo

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

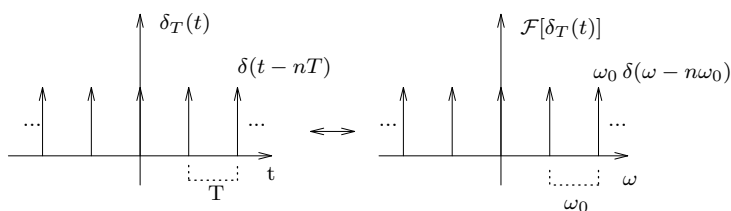


Figura 5.7: Trem de impulsos e sua transformada

$$\delta_T(t) \longleftrightarrow \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

5.4 Propriedades da transformada

Em primeiro lugar, vale a pena salientar que para funções integráveis em módulo podemos obter a transformada de Fourier diretamente da transformada de Laplace com a mudança de variável $s = j\omega$. Portanto, para funções integráveis em módulo todas as propriedades da transformada de Laplace continuam válidas para a transformada de Fourier.

A seguir apresentaremos algumas das propriedades mais importantes.

5.4.1 Linearidade

Se $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ e $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ então:

$$\mathcal{F}[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 F_1(\omega) + \alpha_2 F_2(\omega)$$

5.4.2 Simetria

Se $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ então $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$.

Veja como aplicar essa propriedade para descobrir a transformada de Fourier da função sampling. Sabemos de (5.5) que $\mathcal{F}[G_\tau(t)] = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$. Por comparação com a notação acima temos $f(t) = G_\tau(t)$ e $F(\omega) = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$. Logo, pela propriedade de simetria $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$ deduzimos

$$\mathcal{F}[\tau Sa(\frac{t\tau}{2})] = 2\pi G_\tau(-\omega)$$

Com a mudança de variável $\frac{\tau}{2} = \Omega$ e lembrando que $G_\tau(-\omega) = G_\tau(\omega)$ pois a função porta é par ficamos com o resultado desejado:

$$\mathcal{F}[Sa(\Omega t)] = \frac{\pi}{\Omega} G_{2\Omega}(\omega) \quad (5.17)$$

5.4.3 Escalonamento

Se $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ então:

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$$

Exemplo 5.5 Calcule $\mathcal{F}[G_{2\gamma}(t)]$.

Solução: Como já sabemos que $\mathcal{F}[G_\tau(t)] = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ com a mudança de variável $\tau = 2\gamma$ temos que $\mathcal{F}[G_{2\gamma}(t)] = 2\gamma Sa(\omega\gamma)$. Esta mudança de variável corresponde à aplicação da propriedade de escalonamento acima com o fator de escala $a = 0.5$, isto é com a mudança de escala $t = 0.5 t'$.

5.4.4 Deslocamento em Frequência e Modulação

Se $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ então:

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

Note que multiplicar $f(t)$ pela exponencial complexa $e^{j\omega_0 t}$ corresponde a deslocar todo o espectro de $f(t)$ centrado-o na frequência ω_0 .

Na prática ao invés de utilizar exponenciais complexas para deslocar o espectro do sinal utiliza-se funções do tipo $\cos(\omega_0 t)$. Veja o que acontece com o espectro do sinal após a multiplicação de $f(t)$ pelo cosseno.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \cos(\omega_0 t)] &= \mathcal{F}\left[f(t) \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] + \mathcal{F}[f(t) e^{-j\omega_0 t}]}{2} \\ &= \frac{F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)}{2} \end{aligned}$$

Ao multiplicar um sinal $f(t)$ pelo $\cos(\omega_0 t)$ estamos atenuando pela metade e deslocando todo o espectro do sinal $f(t)$ para as frequências $\pm\omega_0$. Este artifício é conhecido como modulação em amplitude pois o sinal $f(t)$, conhecido como sinal modulado, é a amplitude do cosseno. A função $\cos(\omega_0 t)$ recebe o nome de portadora de frequência ω_0 . A figura 5.8 mostra a transformada de Fourier do sinal porta de largura unitária $G_1(t)$. A figura 5.9 ilustra a o espectro do sinal modulado $\cos(100t)G_1(t)$.

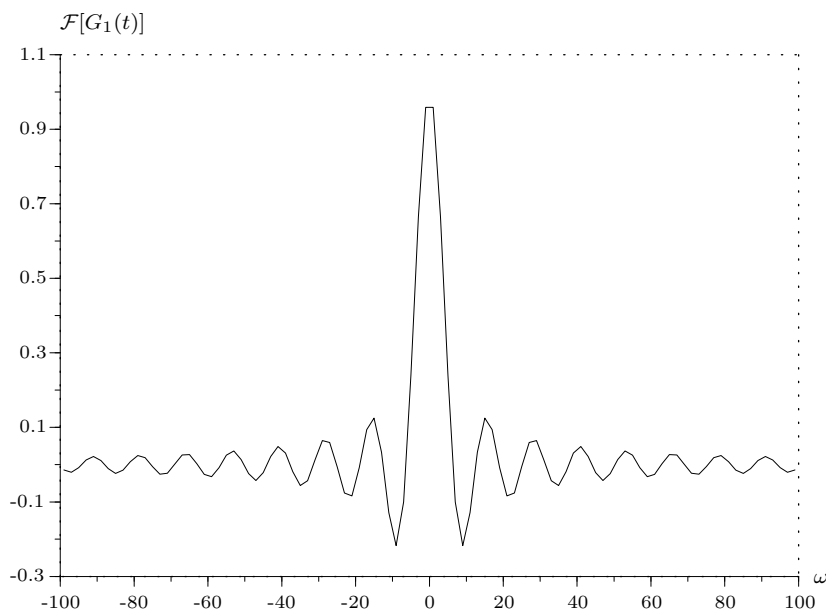


Figura 5.8: Transformada de Fourier do sinal porta de largura unitária $G_1(t)$.

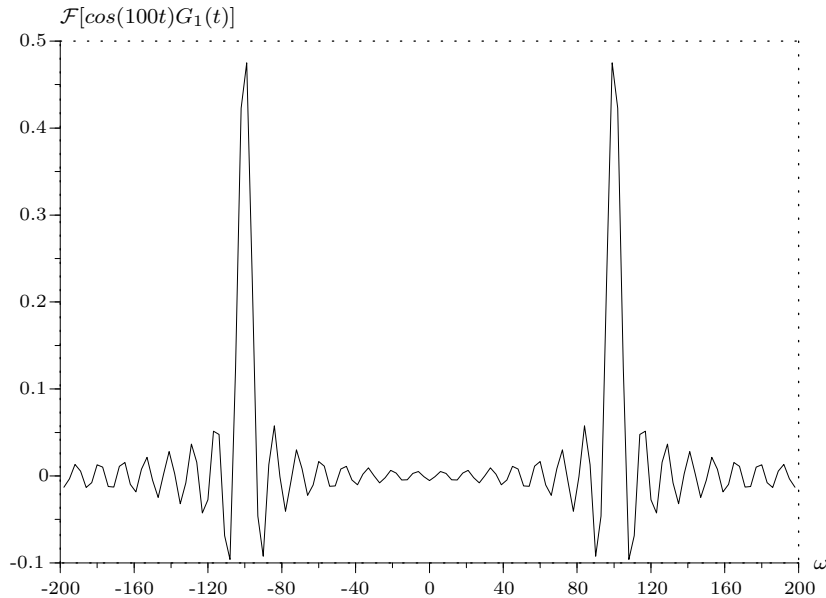


Figura 5.9: Transformada de Fourier do sinal $\cos(100t)G_1(t)$.

A modulação de sinais é utilizada em comunicações de rádio transmissão AM. Em controle de sistemas, a modulação é utilizada para deslocar a energia do sinal de controle para a faixa de frequência onde o sistema funciona.

A recuperação de um sinal modulado (demodulação) pode ser feita de várias formas. Uma delas consiste em modular novamente o sinal e em seguida filtrar as frequências indesejadas.

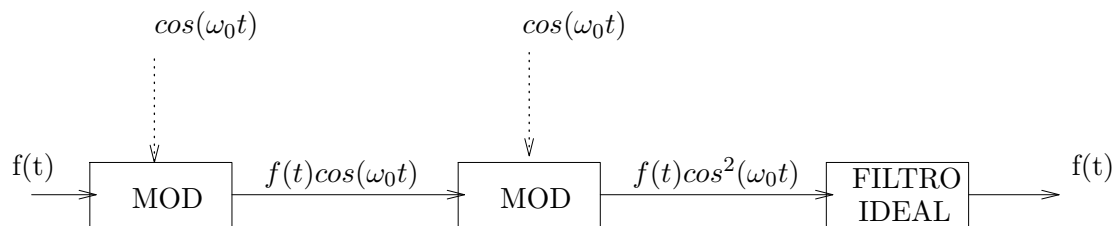


Figura 5.10: Demodulação de um sinal

5.4.5 Deslocamento no Tempo

Se $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ então:

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Note que deslocar em atraso uma função no tempo de t_0 segundos significa atrasar a fase do seu espectro de ωt_0 rad para cada valor da frequência ω .

5.4.6 Diferenciação e Integração no Tempo

De maneira similar à transformada de Laplace podemos relacionar as transformadas de Fourier de uma função e de sua derivada (ou integral).

Se $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ então:

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$$

e

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{j\omega}F(\omega) \quad , \quad \text{se } F(\omega) = 0 \text{ para } \omega = 0$$

A restrição $F(\omega) = 0$ para $\omega = 0$ implica que o valor médio do sinal deve ser nulo, isto é $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$. Essa restrição pode ser eliminada mas a expressão acima se torna mais complicada. Para maiores detalhes veja, por exemplo [5].

Exemplo 5.6 *Obtenha a Transformada de Fourier do sinal $f(t)$ da figura 5.11.*

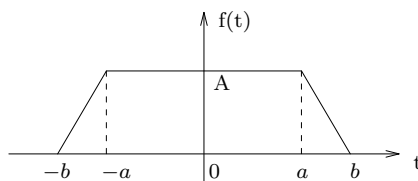


Figura 5.11: Sinal linear por trechos

Solução: Ao invés de calcular $\mathcal{F}[f(t)]$ diretamente vamos utilizar o fato que $\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$ onde $F(\omega)$ é a função que estamos procurando. A figura 5.12 mostra a derivada da função na figura 5.11.

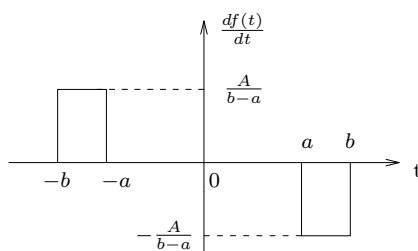


Figura 5.12: Derivada do sinal linear por trechos

Aplicando novamente a propriedade de derivação temos: $\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]\right] = j\omega \mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = (j\omega)^2 F(\omega)$. A figura 5.13 mostra a derivada segunda da função na figura 5.11.

Pela figura 5.13 podemos então escrever:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{A}{b-a} [\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)]$$

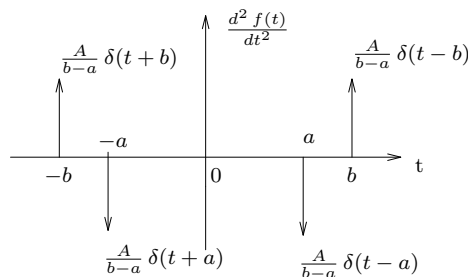


Figura 5.13: Derivada segunda do sinal linear por trechos

como $\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0}$ temos:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = \frac{A}{b-a} [e^{j\omega b} - e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} + e^{-j\omega b}] = \frac{2A}{b-a} (\cos(\omega b) - \cos(\omega a))$$

como $\mathcal{F}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = (j\omega)^2 F(\omega)$ temos o resultado desejado:

$$F(\omega) = \frac{2A}{b-a} \frac{\cos(\omega a) - \cos(\omega b)}{\omega^2}$$

5.4.7 Diferenciação em Frequência

Se $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ então:

$$\mathcal{F}[tf(t)] = j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

5.4.8 Convolução

Usaremos a seguinte notação para a Integral de Convolução entre dois sinais:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Analogamente à transformada de Laplace podemos transformar a integral de convolução em produto no domínio da frequência. Seja $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ e $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$ então:

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

A prova desse resultado é bastante simples.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt d\tau \end{aligned}$$

como $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = F_2(\omega)e^{-j\omega\tau}$ temos o resultado desejado:

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

É importante não confundir a notação para integral de convolução, aqui representada pelo símbolo $(*)$ com a notação de produto usual de sinais. Veja a diferença:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= F_1(\omega)F_2(\omega) \\ \mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] &= \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)\end{aligned}\quad (5.18)$$

Problema 5.3 *Obtenha a propriedade da modulação pela propriedade (5.18) acima.*

As transformadas de Fourier e Laplace são ferramentas muito importantes e sob certas condições podem ser usadas indistintamente. No entanto, Laplace é adequada à análise de sistemas¹ por permitir o tratamento das condições iniciais do mesmo, além de poder tratar sistemas instáveis. Já Fourier é adequado à análise de sinais devido à interpretação frequencial que se pode dar ao espectro do sinal, como por exemplo na modulação de sinais. .

Exemplo 5.7 *Calcule a resposta ao degrau unitário do filtro abaixo por Laplace e Fourier. Suponha que a função de transferência do filtro seja $F(s) = \frac{1}{s+1}$ e lembre que $Y(s) = F(s)X(s)$, $y(t) = f(t) * x(t)$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.*

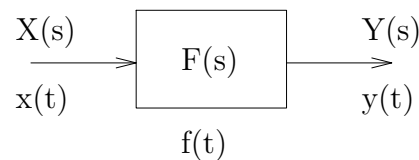


Figura 5.14: Filtro de primeira ordem com $F(s) = \frac{1}{s+1}$

Solução: Por Laplace: O sinal de entrada é um degrau unitário, logo $X(s) = \frac{1}{s}$ e assim temos:

$$\begin{aligned}Y(s) &= F(s)X(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s} = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s} \\ \Rightarrow y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

*Por Fourier: Note que $y(t) = x(t) * f(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)F(\omega)$. A transformada do sinal de entrada é*

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Para obter a transformada $F(\omega)$ note que a região de convergência de $F(s)$ contém o eixo imaginário. Logo $F(\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$.

¹descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo

Daí obtemos:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{j\omega + 1} \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) \\ &= \frac{1}{j\omega + 1} \frac{1}{j\omega} + \frac{\pi}{j\omega + 1} \delta(\omega) \end{aligned}$$

Por frações parciais temos

$$\frac{1}{j\omega + 1} \frac{1}{j\omega} = \frac{-1}{j\omega + 1} + \frac{1}{j\omega}$$

Como $\frac{\pi}{j\omega+1}\delta(\omega) = \pi\delta(\omega)$ concluímos:

$$Y(\omega) = \frac{-1}{j\omega + 1} + \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Logo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{-1}{j\omega + 1} \right] + \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] \\ &= -e^{-t} + 1, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Note que apesar da abordagem por Laplace ser mais simples, Laplace e Fourier fornecem o mesmo resultado para a resposta forçada do filtro. No entanto não seria possível aplicar Fourier para analisar a resposta livre do filtro, já que essa transformada não permite o tratamento de condições iniciais.

Problema 5.4 Podemos representar matematicamente a interação entre dois sinais $f_1(t)$, $f_2(t)$ através da convolução desses dois sinais $f_1(t) * f_2(t)$. Encontre condições para os espectros desses sinais $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ de tal forma que não exista interação entre $f_1(t)$, $f_2(t)$, isto é $f_1(t) * f_2(t) = 0$. Nesses casos dizemos que não existe interferência de $f_1(t)$ sobre $f_2(t)$ e vice-versa.

5.4.9 Amostragem

O problema que estudaremos a seguir consiste na determinação de condições para se amostrar um sinal sem perda de informação. Este problema é muito importante pois todo sinal armazenado ou processado nos computadores é antes digitalizado, isto é, o sinal é amostrado e suas amostras são transformadas em código binário para depois ser processado ou armazenado em computadores. A transmissão digital de sinais também passa pelo mesmo processo de amostragem e codificação, porém é importante que o sinal original possa ser reconstruído, a partir do digital transmitido. Torna-se então imperativo saber a frequência de amostragem do sinal para que, uma vez discretizado, se possa reconstruí-lo a partir de suas amostras coletadas.

Problema a ser resolvido: Suponha um sistema de transmissão digital ideal (sem ruído nem erro de quantização) ilustrado na figura 5.15. Determine a frequência de amostragem

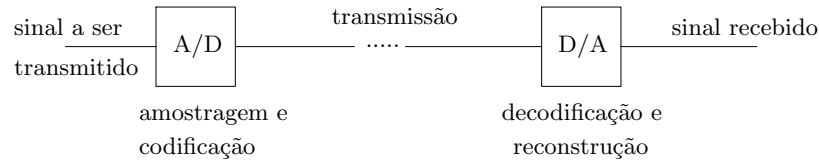


Figura 5.15: Transmissão e recuperação de sinais

de um sinal para que uma vez transmitido se possa reconstruí-lo exatamente como ele era antes da amostragem.

Um solução para o problema acima é fornecida pelo teorema da amostragem enunciado a seguir:

Um sinal limitado em frequência, isto é, cujo espectro é nulo acima de uma frequência $\bar{\omega}$ (rad/s) é reconstruído unicamente por suas amostras tomadas à intervalos uniformes menores que

$$T_a = \frac{\pi}{\bar{\omega}} \text{ segundos}$$

A seguir apresentaremos a demonstração do resultado acima.

O processo ideal de amostragem pode ser representado pelo produto do sinal $f(t)$ a ser amostrado por um trem de impulsos ocorrendo nos instantes de amostragem.

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_a}(t)$$

onde $f_s(t)$ é o sinal amostrado e $\delta_{T_a}(t)$ é o trem de impulsos cujo período é o próprio período de amostragem. O processo de amostragem assim representado é ideal porque a coleta de uma amostra leva um tempo infinitesimal, que é o tempo de duração de um impulso. O valor da amostra coletada é a área do impulso e corresponde ao valor exato do sinal no instante onde ocorre o impulso. Na prática não podemos implementar tal processo de amostragem. Porém boas aproximações podem ser obtidas substituindo-se os impulsos por pulsos de largura bem pequena e amplitude unitária.

O espectro do sinal amostrado é então:

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}[f_s(t)] = \mathcal{F}[f(t)\delta_{T_a}(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[\delta_{T_a}(t)]$$

De um exemplo anterior vimos que $\mathcal{F}[\delta_{T_a}(t)] = \omega_a \delta_{\omega_a}(\omega)$ onde $\omega_a = 2\pi/T_a$ é a frequência fundamental do trem de impulsos que corresponde à frequência de amostragem que queremos determinar. Logo, para $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ temos:

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * [\omega_a \delta_{\omega_a}] = \frac{1}{T_a} F(\omega) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_a) \right] \\ &= \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_a) = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_a) \end{aligned}$$

Como $f(t)$ é um sinal limitado em frequência, isto é, existe $\bar{\omega}$ tal que $F(\omega) = 0$ para $\omega \geq \bar{\omega}$, vamos considerar as duas possibilidades seguintes:

Caso $\omega_a > 2\bar{\omega}$ ou seja $T_a < \frac{\pi}{\bar{\omega}}$ segundos

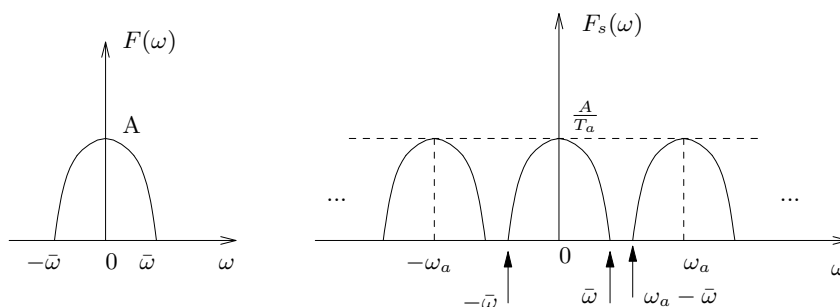


Figura 5.16: Espectro do sinal antes e após amostragem: Caso $\omega_a > 2\bar{\omega}$

A figura 5.16 mostra o espectro $F(\omega)$ de um sinal fictício $f(t)$ e o espectro $F_s(\omega)$ desse sinal amostrado com frequência de amostragem ω_a sob a hipótese de que $\omega_a > 2\bar{\omega}$. Note que o espectro do sinal amostrado $F_s(\omega)$ contém o espectro do sinal original $F(\omega)$ sem distorção, como pode ser visto entre as frequências $-\bar{\omega}$ e $\bar{\omega}$. Assim, para recuperar o sinal original a partir do sinal amostrado basta eliminar todas as componentes de frequência do sinal $F_s(\omega)$ fora do intervalo $[-\bar{\omega}, \bar{\omega}]$. Esta operação de filtragem está indicada na figura 5.17. Note que o filtro ideal anula todas as componentes de frequência fora do intervalo $[-\bar{\omega}, \bar{\omega}]$ como indicado a seguir.

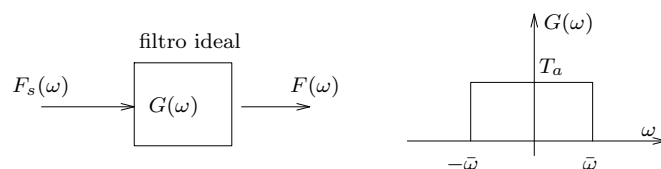


Figura 5.17: Filtro ideal para recuperação do sinal: Caso $\omega_a > 2\bar{\omega}$

$$F_s(\omega)G(\omega) = F(\omega)$$

No domínio do tempo a filtragem acima é dada pela convolução:

$$f(t) = f_s(t) * g(t)$$

onde $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = S_a(\bar{\omega}t)$. Este resultado pode ser obtido facilmente com (5.17) e

$T_a = \pi/\bar{\omega}$. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_a) \delta(t - nT_a) \right] * S_a(\bar{\omega}t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_a) \delta(t - nT_a) * S_a(\bar{\omega}t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_a) S_a(\bar{\omega}(t - nT_a)) \end{aligned}$$

A expressão acima mostra como se reconstrói exatamente o sinal $f(t)$ a partir das amostras $f(nT_a)$ coletadas no processo de amostragem. As amostras formam um conjunto de amplitudes de funções sampling que quando somadas resultam no sinal original.

Pelo exposto acima podemos concluir que quando a frequência de amostragem do sinal satisfaz o teorema da amostragem é possível a reconstrução exata do sinal. Note que a reconstrução exata requer um filtro ideal o que não pode ser implementado na prática. Apesar disso podemos obter boas aproximações do sinal a ser reconstruído substituindo-se o filtro ideal por um real que tenha uma função de transferência cujo espectro seja parecido com $G(\omega)$.

Vejamos agora o que acontece quando $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} < 2\bar{\omega}$.

Caso $\omega_a < 2\bar{\omega}$ ou seja $T_a > \frac{\pi}{\bar{\omega}}$ segundos

Nesse caso o espectro do sinal antes e após amostragem estão ambos ilustrados na figura 5.18.

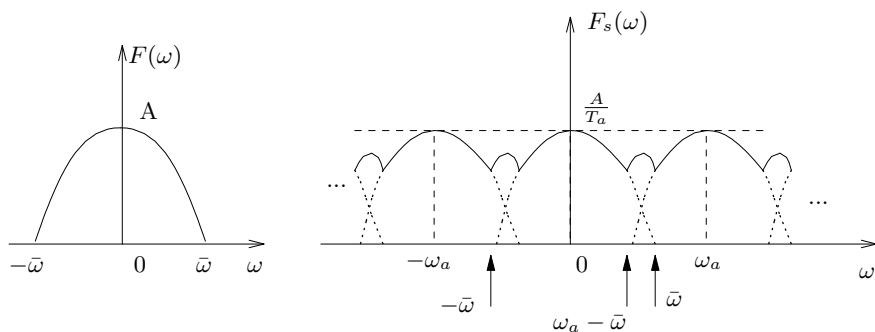


Figura 5.18: Espectro do sinal antes e após amostragem: Caso $\omega_a < 2\bar{\omega}$

Note agora que o espectro do sinal amostrado $F_s(\omega)$ contém o espectro do sinal original $F(\omega)$ porém distorcido com as superposições dos espectros deslocados. Essa distorção provocada pela superposição dos espectros inviabiliza a reconstrução do sinal e portanto na escolha da frequência de amostragem deve-se evitar o caso $\omega_a < 2\bar{\omega}$.

O teorema da amostragem é um resultado muito importante no tratamento de sinais e no controle de sistemas através de microprocessadores. É importante salientar que o

teorema enunciado pressupõe a utilização de um amostrador ideal (trem de impulsos) e de um filtro ideal para reconstrução do sinal (filtro com espectro do tipo porta). Na prática não podemos implementar nem o amostrador nem o filtro ideal. No entanto, podemos implementar dispositivos de amostragem e filtros que se aproximam bastante do caso ideal. Logo, não teremos reconstrução perfeita na prática mas sim uma reconstrução que será tão melhor quanto mais o amostrador e o filtro se aproximarem do ideal.

O teorema da amostragem parte da hipótese de que o sinal a ser amostrado é limitado em frequência, isto é seu espectro é nulo a partir de uma certa frequência ($\bar{\omega}$). Na prática o espectro dos sinais não são nulos a partir de uma certa frequência mas sim muito pequenos a partir de uma certa frequência. Logo o erro de aproximação de um sinal prático por um sinal limitado em frequência pode ser feito bastante pequeno. Para isso devemos escolher adequadamente a frequência ($\bar{\omega}$) a partir da qual iremos considerar nulo (truncar) o espectro do sinal. Em geral, quanto maior essa frequência de truncamento menor o erro cometido. Entretanto, quanto maior a frequência de truncamento mais rápido deve ser o processo de amostragem ($\omega_a > 2\bar{\omega}$) o que torna o dispositivo mais caro.

Exemplo 5.8 Utilize o teorema da amostragem para determinar a frequência de discretização do sinal $f(t) = \cos(100\pi t) + \sin(10\pi t)$.

Solução: Com a transformada de Fourier podemos calcular o espectro do sinal. Ele está ilustrado na figura 5.19.

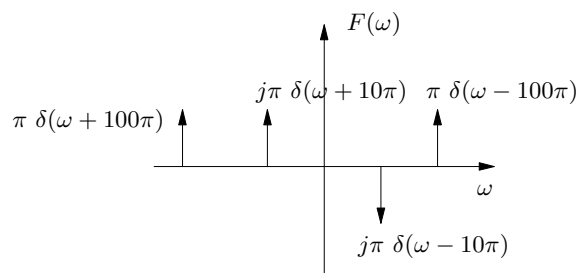


Figura 5.19: Espectro do sinal $f(t) = \cos(100\pi t) + \sin(10\pi t)$.

$$\mathcal{F}[\cos 100\pi t] = \pi[\delta(\omega - 100\pi) + \delta(\omega + 100\pi)]$$

$$\mathcal{F}[\sin 10\pi t] = j\pi[\delta(\omega + 10\pi) - \delta(\omega - 10\pi)]$$

como $F(\omega) = 0$ para $\omega > 100\pi$ temos $\bar{\omega} = 100\pi$. Logo:

$$\omega_a > 2\bar{\omega} = 200\pi$$

Exemplo 5.9 Com o auxílio do teorema da amostragem determine a resposta $y(t)$ do sistema indicado na figura 5.20 para o seguinte sinal de entrada $x(t) = S_a(50\pi t)$.

Solução: O espectro do sinal de entrada está indicado na figura 5.21(a) e pode ser calculado com (5.17) da seguinte forma.

$$X(\omega) = \mathcal{F}[S_a(50\pi t)] = \frac{\pi}{50\pi} G_{100\pi}(\omega) = \frac{1}{50} G_{100\pi}(\omega)$$

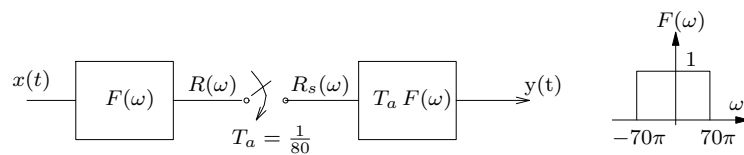
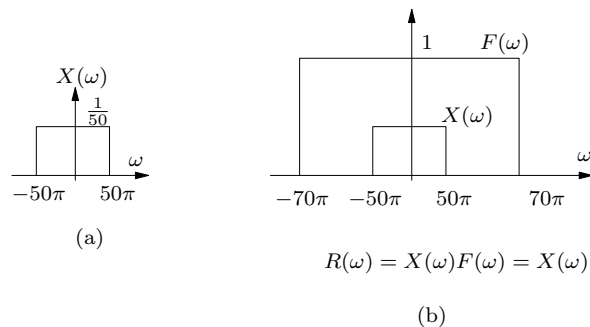


Figura 5.20: Sistema de amostragem e recuperação de sinais

Figura 5.21: Espectro dos sinais $x(t)$, $r(t)$

O sinal na saída do primeiro filtro é dado por $R(\omega) = X(\omega)F(\omega)$ de onde concluímos que $R(\omega) = X(\omega)$. Veja figura 5.21. O espectro $R_s(\omega)$ do sinal amostrado $R_s(t)$ está indicado na figura 5.22 e é dado por

$$R_s(\omega) = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(\omega - n\omega_a) = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_a)$$

onde $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 160\pi$ é a frequência de amostragem.

O espectro do sinal após o segundo filtro é dado por

$$Y(\omega) = T_a F(\omega) R_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_a F(\omega) \frac{1}{T_a} X(\omega - n\omega_a) = X(\omega)$$

O produto $T_a F(\omega) R_s(\omega)$ pode ser facilmente obtido através da figura 5.22. Logo concluímos que $y(t) = x(t)$.

5.5 Problemas complementares

Problema 5.5 Considere o sistema da figura 5.23 onde

$$x(t) = \tau S_a(\tau t/2)$$

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_a} G_{2\omega_a}(\omega)$$

Calcule o valor da constante τ para que a energia do sinal $y(t)$ seja $E = 2\pi$.

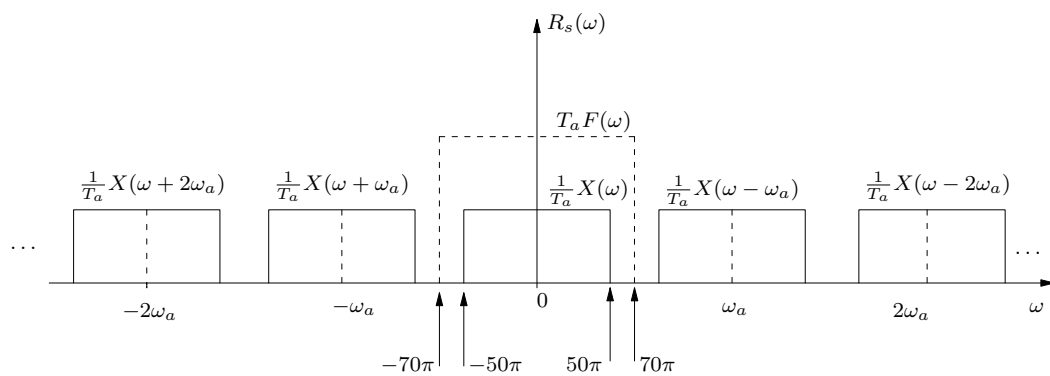


Figura 5.22: Espectro do sinal amostrado

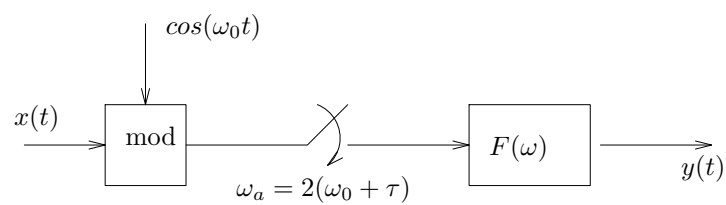


Figura 5.23: Sistema com modulação e discretização

Capítulo 6

Sistemas Discretos e Amostrados

6.1 Introdução

Os termos *tempo contínuo* e *analógico* são idênticos quando empregados para caracterizar sinais e sistemas. Sinais analógicos são funções de uma variável de tempo contínuo e sistemas analógicos são aqueles que manipulam sinais analógicos. De maneira análoga, os termos *tempo discreto* e *digital* são também idênticos. Um sinal de tempo discreto existe apenas em instantes específicos de tempo. Sistemas de tempo discreto são aqueles que manipulam sinais digitais.

Microcomputadores e microprocessadores digitais são largamente utilizados na indústria atual, seja para fins de supervisão ou de controle dos processos. No entanto, um grande número de sistemas industriais são de natureza analógica. Sempre que um microcomputador faz parte de um sistema analógico a presença de *conversores A/D e D/A* se faz necessária.

Cada sinal analógico que será processado por um computador digital deve primeiro ser convertido de analógico para digital por um conversor A/D. Paralelamente, cada valor digital que irá influenciar o sistema analógico deverá primeiro ser convertido de digital para analógico por um conversor D/A. Como a saída do computador digital não muda até que os próximos cálculos e conversões D/A sejam completados, o sinal analógico gerado por alguns conversores D/A são mantidos constantes durante cada ciclo. Isto é feito por um dispositivo chamado *sample-and-hold (S/H)*. Veremos mais tarde que conversores A/D também utilizam dispositivos S/H.

6.1.1 Conversão A/D

A grande vantagem de se manipular variáveis discretas é que elas podem ser armazenadas e processadas em computadores digitais. Para isso basta transformar os valores discretos em código binário.

A conversão para código binário não é exata em geral. Sempre existe um erro entre o

valor discreto a ser codificado e código binário que representa o valor em questão. Por exemplo, um sinal de tensão entre 0 e 10V pode ser representado em código binário de 4 bits de acordo com a tabela 6.1 e a figura 6.1.

tensão analógica	representação binária
0 à 0.625	0000
0.625 à 1.25	0001
1.25 à 1.875	0010
1.875 à 2.5	0011
2.5 à 3.75	0101
3.75 à 4.375	0110
4.375 à 5	0111
5 à 5.625	1000
5.625 à 6.25	1001
6.25 à 6.875	1010
6.875 à 7.5	1011
7.5 à 8.125	1100
8.125 à 8.75	1101
8.75 à 9.375	1110
9.375 à 10	1111

Tabela 6.1: Representação de um sinal de tensão analógico não negativo em código binário de 4 bits

Cada incremento do código binário representa um salto de $2^{-4} = 6.25\%$ em relação ao valor máximo do sinal analógico, isto é 6.25% de 10 volts no caso acima. Assim cada código binário representa um intervalo de tensão analógica e portanto existe um *erro de quantização* associado à conversão. Num conversor de 4 bits o erro é de 6.25% ou seja, uma *relação sinal/ruído* de $20\log(2^4)$ dB. Para um conversor de 16 bits teríamos um erro de 0.0015% que corresponde à uma *relação sinal/ruído* de $20\log(2^{16}) = 96.3$ dB. Bons dispositivos de audio possuem *relação sinal/ruído* entre 60 e 70 dB. Esta faixa é atingida com conversores de 12 bits ou mais.

6.1.2 Conversão D/A e Sample-and-Hold

O dispositivo sample-and-hold (S/H) é normalmente utilizado na entrada de conversores A/D e na saída conversores D/A. A sua função básica é coletar amostras (sample) e mantê-la constante (hold) durante todo o intervalo de amostragem.

A figura 6.2 mostra o diagrama de blocos e um esquema eletrônico simplificado do dispositivo S/H. A chave lógica s é controlada por um relógio. Com a chave na posição 1 o dispositivo funciona como um circuito RC cuja função de transferência é $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{RCs+1}$. A saída se torna praticamente igual à entrada pois a frequência de quebra do circuito $\omega_q = \frac{1}{RC}$ é escolhida grande em relação à máxima frequência de quebra do espectro do sinal de entrada. Valores típicos são $R = 1000$ ohms e $C = 30 \cdot 10^{-12}$ farads oque implica numa frequência de quebra de $f_q = \frac{1}{2\pi RC} = 5.3$ MHz. Com a chave na posição 1 a

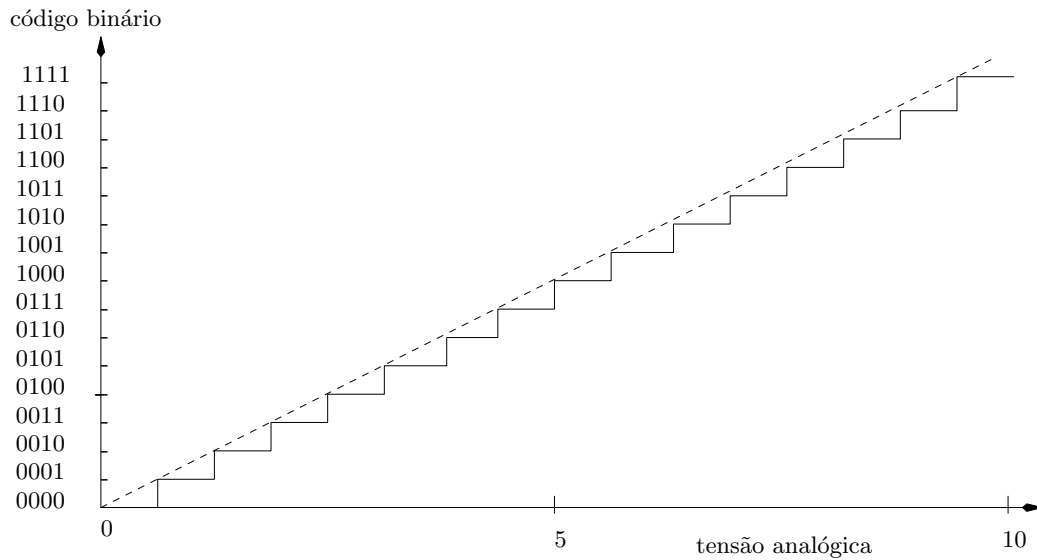


Figura 6.1: Representação de um sinal de tensão analógico não negativo em código binário de 4 bits

saída do dispositivo segue a entrada com um atraso desprezível (etapa de rastreamento isto é acompanhamento do sinal de entrada). Quando uma amostra deve ser tomada no instante $t = kT$ a chave é comutada para a posição 2 e o capacitor mantém constante o valor da saída do dispositivo pelo tempo necessário para se efetuar a conversão binária. Quando a conversão é completada o número digital pode ser processado pelo computador (não representado na figura). Nesse instante a chave volta à posição 1, o computador é desligado da saída do S/H e começa a processar a informação recém disponibilizada e paralelamente a saída do dispositivo S/H recomeça a seguir o sinal de entrada. Por exemplo, o tempo de conversão do conversor BurrBrown ADC803 de 12 bits é de 1.5 microsegundos. O capacitor deve manter constante a saída apenas durante esse pequeno intervalo de tempo.

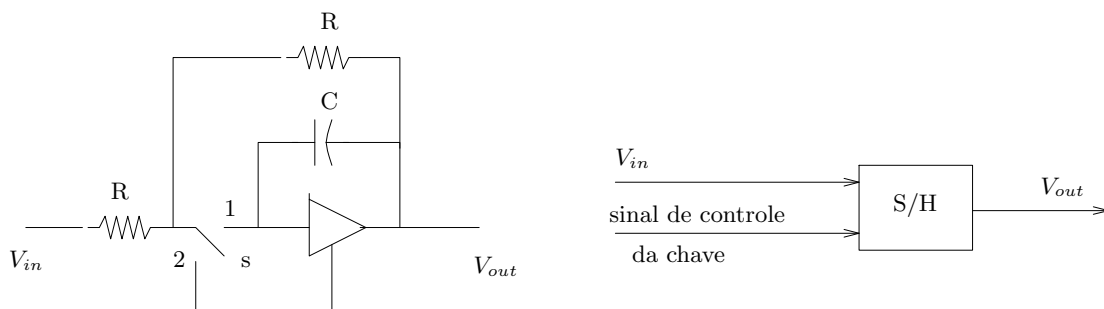


Figura 6.2: Esquema simplificado de um circuito sample-and-hold e seu diagrama de blocos

A seguir veremos de forma simplificada o funcionamento desse dispositivo quando acoplado a conversores A/D e D/A.

Quando um sinal analógico vai ser codificado, o primeiro passo é coletar as amostras

do sinal e depois utilizar o processo de conversão A/D discutido anteriormente. Cada amostra coletada deve ser disponibilizada, isto é mantida constante na entrada do conversor, durante todo o processo de conversão A/D de cada amostra. Esta operação de manter constante o sinal pode ser feita por um dispositivo S/H.

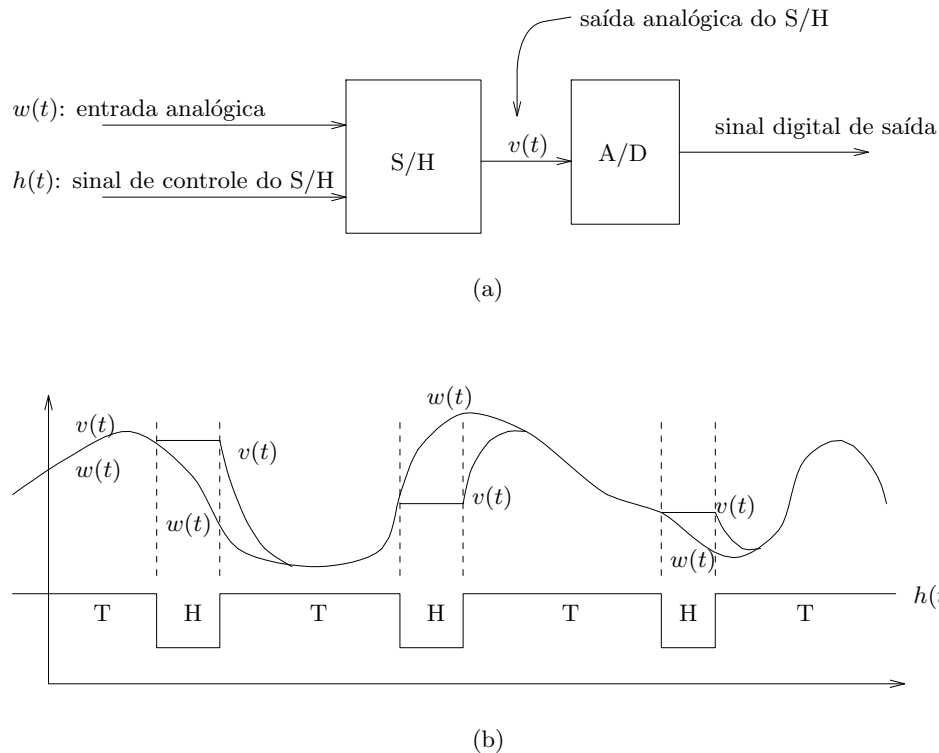


Figura 6.3: (a) Diagrama de blocos de um conversor A/D com sample-and-hold e (b) funcionamento do sistema

A figura 6.3(b) mostra os sinais de entrada e saída nas duas fases de funcionamento do dispositivo. Chave na posição 1 corresponde à fase *segurar o sinal* representada por H (do inglês hold) e chave na posição 2 à fase de *rastreamento* T (do inglês tracking).

Cada amostra coletada do sinal de entrada é mantida constante no conversor durante todo o intervalo de amostragem. O conjunto de amostras é atualizado apenas com a chegada de uma nova amostra depois de cada intervalo de amostragem. Assim, o dispositivo S/H juntamente com o conversor A/D (codificador) possuem a função de *amostrar e segurar* a amostra (já codificada) durante todo o intervalo de amostragem.

Durante o processo de conversão D/A a saída do conversor pode flutuar muito. Para evitar esse inconveniente utiliza-se um dispositivo S/H na saída do conversor. O S/H mantém constante o valor da amostra precedente até que uma nova amostra esteja disponível (decodificada). O funcionamento desse dispositivo está indicado na figura 6.4. O sinal temporizador de controle indica as duas fases de funcionamento: manter o sinal de entrada (H) e rastrear o sinal de entrada (T).

Note que o S/H executa duas operações: *amostrar* (sample) e *segurar* (hold). Afim de obter um modelo matemático de funcionamento do S/H, estudaremos a seguir essas duas

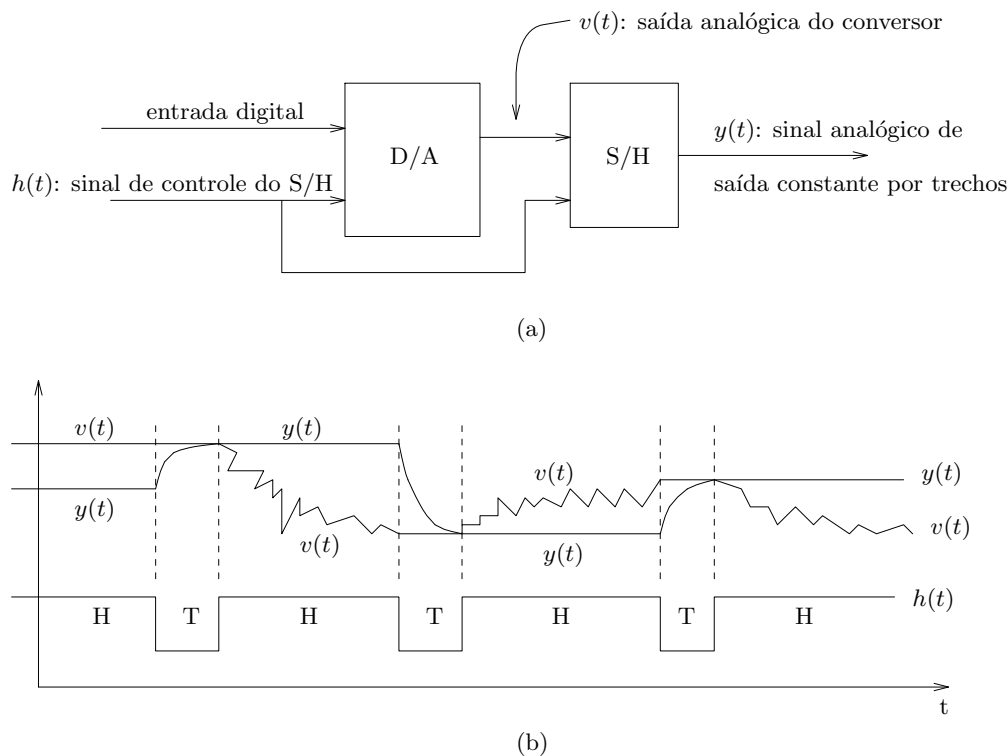


Figura 6.4: (a) Conversor D/A com S/H e (b) Sinais de entrada e saída

operações separadamente.

A partir de agora assumiremos que a operação *amostrar* do S/H pode ser representada por um amostrador ideal, isto é ela pode ser representada pela multiplicação do sinal a ser amostrado por um trem de impulsos como ilustra a figura 6.5. A amostra do sinal $r(t)$ coletada no instante $t = kT$ corresponde à área do impulso que ocorre no instante $t = kT$, isto é $r(kT)\delta(t - kT)$.

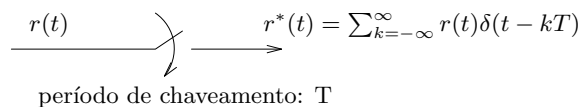


Figura 6.5: Amostrador ideal: produto por um trem de impulsos

A operação *segurar* do S/H consiste em manter o valor de uma amostra $r^*(t) = r(kT)\delta(t - kT)$ (obtida com um amostrador ideal) constante durante todo o período de amostragem T . Veja figura 6.6. O bloco *ZOH* recebe o nome de *segurador de ordem zero* (Zero Order Holder) devido ao fato da saída ser uma interpolação de ordem zero das amostras de entrada. Matematicamente podemos escrever:

$$r_h(t) = r(kT) \quad \text{para} \quad kT \leq t < kT + T \quad (6.1)$$

O bloco *ZOH* representa um sistema cuja função de transferência pode ser obtida. Para isso basta calcular a resposta impulsional desse sistema que chamaremos de $zoh(t)$, isto

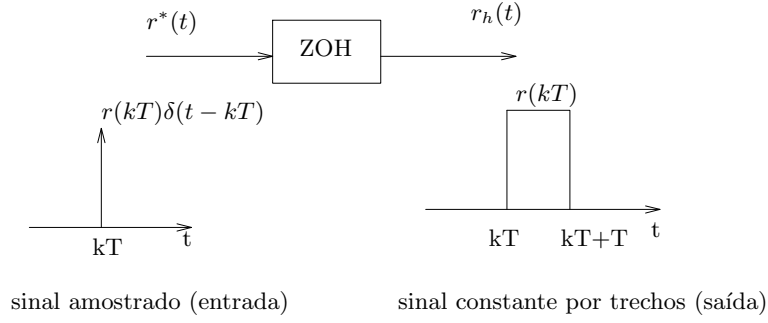


Figura 6.6: Segurador de ordem zero: a saída é constante por trechos

é o valor específico do sinal $r_h(t)$ obtido com $r^*(t) = \delta(t)$. Pela figura 6.6 deduzimos que a resposta impulsionar vale

$$r_h(t) = zoh(t) = 1 \quad \text{para} \quad 0 \leq t < T \quad (6.2)$$

que pode ser rescrita de uma forma mais conveniente com o auxílio da função degrau unitário $u(t)$ na forma

$$zoh(t) = u(t) - u(t - T) \quad (6.3)$$

A função de transferência $ZOH(s)$ do bloco ZOH pode então ser calculada com o auxílio da transformada de Laplace

$$ZOH(s) = \mathcal{L}[zoh(t)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \quad (6.4)$$

Assim concluímos que o dispositivo S/H pode ser representado por um amostrador ideal em cascata com um segurador de ordem zero como ilustra a figura 6.7.

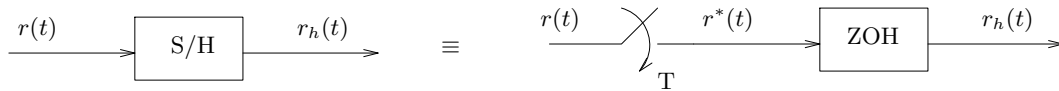


Figura 6.7: Sample-and-Hold visto como um amostrador ideal em cascata com um segurador de ordem zero

É importante notar que o amostrador ideal não pode ser implementado na prática devido à presença de impulsos no sinal amostrado. No entanto a representação do dispositivo S/H indicada na figura 6.7 possui duas propriedades interessantes: (i) existem dispositivos S/H cujos comportamentos entrada/saída são similares ao acima descrito e (ii) o segurador de ordem zero pode ser tratado de maneira muito conveniente pela Transformada Z, como veremos mais tarde.

Um outro ponto importante a ser notado é que no controle de sistemas normalmente se assume a priori, por razões de simplicidade, que o erro de conversão binária é desprezível. Isso implica que o conversor A/D pode ser representado por um amostrador ideal e o conversor D/A por um segurador de ordem zero. Essas hipóteses são comuns em todos os livros clássicos de controle e também serão assumidas nesse capítulo sempre que houver conversores A/D e D/A presentes na malha de controle.

6.2 Sinais e Sistemas de Tempo Discreto

Diferentemente dos sinais analógicos, que podem ser representados por funções do tipo $x(t)$ onde t é a variável tempo contínuo, um sinal discreto é uma sequência de valores organizados no tempo e pode ser representado por função do tipo $x(kT)$ onde k é a variável tempo discreto ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) e T denota o intervalo de tempo entre dois valores consecutivos de $x(kT)$. Neste capítulo usaremos indistintamente os termos sinal discreto ou sequência.

Exemplo 6.1 A dinâmica da variável corrente no circuito da figura 6.8 é descrita por uma equação diferencial pois $I(t)$ é uma variável analógica (tempo contínuo).

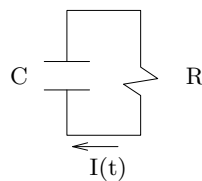


Figura 6.8: Circuito RC: resposta livre

$$v_C(t) + RI(t) = 0$$

com $v_C(0) = v_0$.

$$C\dot{I}(t) + RI(t) = 0$$

com $I(0) = v_0/R$. Logo:

$$I(t) = I(0)e^{-t/RC}, \quad t \geq 0.$$

Suponha agora que estamos interessados em saber os valores da corrente $I(t)$ apenas nos instantes $t = kT$, onde $k = 0, 1, 2, \dots$ e T é um intervalo de tempo dado. Os valores da corrente nesses instantes são representados agora por uma sequência $I(kT)$ e não mais por um sinal analógico como mostra a figura 6.9.

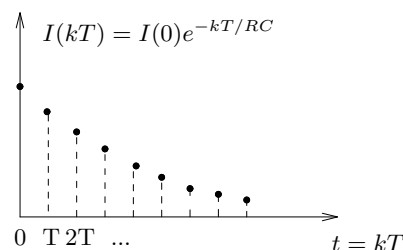


Figura 6.9: Valor da corrente no capacitor nos instantes $t = kT$

Além disso a relação entre os valores de $I(kT)$ já não é mais representada por uma equação diferencial mas sim por uma equação recursiva que define uma progressão geométrica com razão $a = e^{-T/RC}$.

$$I(kT + T) = a I(kT), \quad a = e^{-T/RC} \quad (6.5)$$

Sistemas contínuos são aqueles que manipulam sinais analógicos e são representados por equações diferenciais, como é o caso do sistema na figura 6.8. Sistemas discretos são aqueles que manipulam sequências e são representados por equações recursivas, como é o caso do sistema representado pela equação recursiva 6.5. Note que o sistema discreto não é equivalente ao sistema contínuo que lhe deu origem pois apesar dos dois sistemas representarem o comportamento exato da corrente no circuito nos instantes $t = kT$, apenas o sistema contínuo pode fornecer o valor exato da corrente para todo instante de tempo $t \geq 0$. Além disso, o sistema discreto descrito pela equação recursiva 6.5 pode ser interpretado como um algoritmo cuja evolução define a dinâmica da corrente do circuito RC nos instantes $t = kT$.

Exemplo 6.2 Obtenha a equação recursiva que rege o comportamento dinâmico do circuito da figura 6.10 nos instantes $t = kT$ sendo T um intervalo de tempo dado, $k = 0, 1, 2, \dots$ uma variável discreta e $e(t)$ constante por trechos, isto é, $e(t) = e(kT)$ para $kT \leq t < kT + T$.

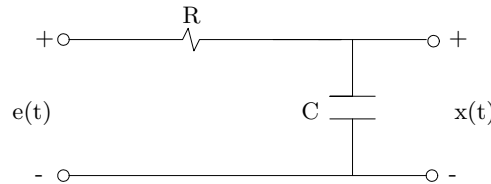


Figura 6.10: Circuito RC com entrada constante por trechos

Solução: Para $kT \leq t < kT + T$ a dinâmica do circuito é dada por:

$$RC\dot{x} + x = e(kT), \quad x(t_0) = x(kT)$$

Como $e(kT)$ é constante no intervalo temos:

$$RC[sX(s) - x(kT)] + X(s) = \frac{e(kT)}{s}$$

Logo:

$$\begin{aligned} X(s) &= \left(\frac{e(kT)}{s} + RCx(kT) \right) \frac{1}{RCs + 1} = \frac{e(kT) + sRCx(kT)}{s(RCs + 1)} \\ &= \frac{e(kT)}{s} + \frac{x(kT) - e(kT)}{s + 1/RC} \end{aligned}$$

Usando a Transformada Inversa e lembrando que o lado direito da equação acima possui instante inicial $t_0 = kT$ temos:

$$x(t) = e(kT) + (x(kT) - e(kT))e^{-\frac{t-kT}{RC}}, \quad kT \leq t < kT + T$$

Como $x(t)$ é uma função contínua temos pela expressão acima que o valor de $x(kT + T)$ é dado por:

$$x(kT + T) = \lim_{t \rightarrow kT+T} x(t) = e(kT) + (x(kT) - e(kT))e^{-T/RC}$$

Logo o valor da tensão $x(t)$ no instante $t = kT + T$ pode ser obtido recursivamente através da expressão:

$$x(kT + T) = ax(kT) + be(kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

onde a e b são duas constantes dadas por:

$$a = e^{-T/RC} \quad b = 1 - e^{-T/RC}$$

O sistema discreto dado pela equação recursiva acima define o comportamento da corrente $I(t)$ (saída) em função da tensão $e(t)$ (entrada) nos instantes $t = kT$ como indicado na figura 6.11. Mais tarde iremos calcular a função de transferência discreta desse sistema com o auxílio da transformada Z .



Figura 6.11: Representação de um sistema discreto

Equações recursivas são fundamentais quando se utiliza o computador digital para processar sinais e controlar sistemas.

No esquema de controle da figura 6.12, um determinado sistema é controlado com o auxílio de um computador. O computador executa um algoritmo de controle que deve ser devidamente projetado e é representado por uma equação recursiva envolvendo as sequências $e(kT)$ e $u(kT)$.

Problema 6.1 O funcionamento de um certo sistema digital de leitura, manipulação e registro de dados composto por um conversor A/D, um computador e um conversor D/A é representado por uma equação recursiva cujo código FORTRAN está indicado abaixo. Encontre a equação recursiva executada pelo algoritmo.

```

100 format(F16.8)
110 Y0=0.
120 Y1=0.
130 R1=0.
140 R0=0.
150 read(1,100)R2
160 Y2=3.*Y1-2.*Y0+2.*R2+5.*R0
170 Y0=Y1
180 Y1=Y2
190 R0=R1
200 R1=R2
210 write(2,100)Y2
220 go to 150

```

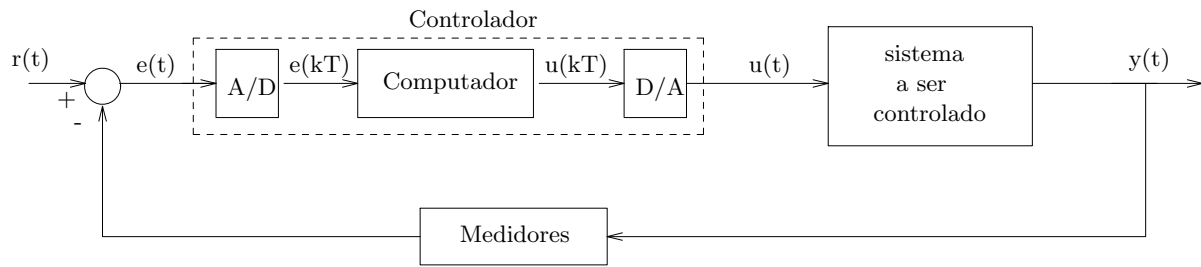


Figura 6.12: Sistema controlado por computador

$r(t)$ Sinal de Referência

$y(t)$ Sinal a ser controlado

$e(t)$ Sinal de Erro (Analógico)

$e(kT)$ Sinal de Erro (Digital)

$u(kT)$ Sinal de Controle (Digital)

$u(t)$ Sinal de Controle (Analógico)

230 stop

240 end

O conversor A/D é tomado como periférico 1 com formato de leitura F16.8 e o periférico 2 é o conversor D/A com formato de escrita F16.8. É assumido que o processador espera no passo 150 até que a variável R2 esteja disponível para leitura, da mesma forma como ele esperaria caso a entrada de dados fosse via teclado. Também se assume que o periférico 2 possui um buffer que armazena cada amostra da saída até que a conversão D/A seja efetuada. Identifique as condições iniciais, o sinal de entrada e o sinal de saída.

6.3 Transformada Z

Assim como a Transformada de Laplace nos permite resolver equações diferenciais e definir a noção de Função de Transferência, a Transformada Z, que passaremos a estudar em seguida, é a ferramenta que vai nos permitir resolver equações recursivas e definir a noção de Função de Transferência para sistemas a tempo discreto.

6.3.1 Definição e exemplos

A transformada Z de uma sequência $x(kT)$ que satisfaz $x(kT) = 0$ para $k < 0$, é definida pela expressão:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad ; \quad x(kT) = 0, \quad \forall k < 0 \quad (6.6)$$

onde $z = \alpha + j\beta$ é uma variável complexa similar à variável s da transformada de Laplace. Assim, a transformada Z transforma uma sequência $x(kT)$ numa função $X(z)$ da variável complexa z . Veremos mais tarde que podemos relacionar a função $X(z)$ com a função $X(s)$ da transformada de Laplace do sinal $x(t)$ amostrado nos instantes $t = kT$.

Note que a transformada Z é definida como sendo a soma dos termos de uma série na variável complexa z , pois pela definição temos

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots$$

Além disso, os coeficientes dessa série são os valores que o sinal assume nos diversos instantes discreto de tempo. O valor do sinal $x(t)$ no instante $t = kT$ aparece na série como o coeficiente do termo z^{-k} .

Em alguns casos, quando a série é geométrica e de razão r conhecida, podemos calcular o resultado da soma através da fórmula

$$x(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots = \frac{x(0)}{1-r} \quad (6.7)$$

Para que o resultado da soma da série seja dado pela fórmula acima é preciso que a série seja convergente, isto é a razão da série deve possuir módulo menor que a unidade $|r| < 1$. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 6.3 Calcule a transformada Z da sequência degrau unitário ($u(kT)$) definida como $u(kT) = 1$ para $k \geq 0$ e $u(kT) = 0$ para $k < 0$.

Solução: Pela definição temos:

$$\mathcal{Z}[u(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

A série acima possui razão $r = z^{-1}$ e a soma dos termos dessa série é dada por 6.7 desde que a variável complexa z esteja na região onde $|r| = |z^{-1}| < 1$. Nessas condições temos:

$$U(z) = \mathcal{Z}[u(t)] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Analogamente à Transformada de Laplace e Fourier, a Transformada Z também possui uma região de convergência. Uma série é convergente se em módulo a razão é menor que

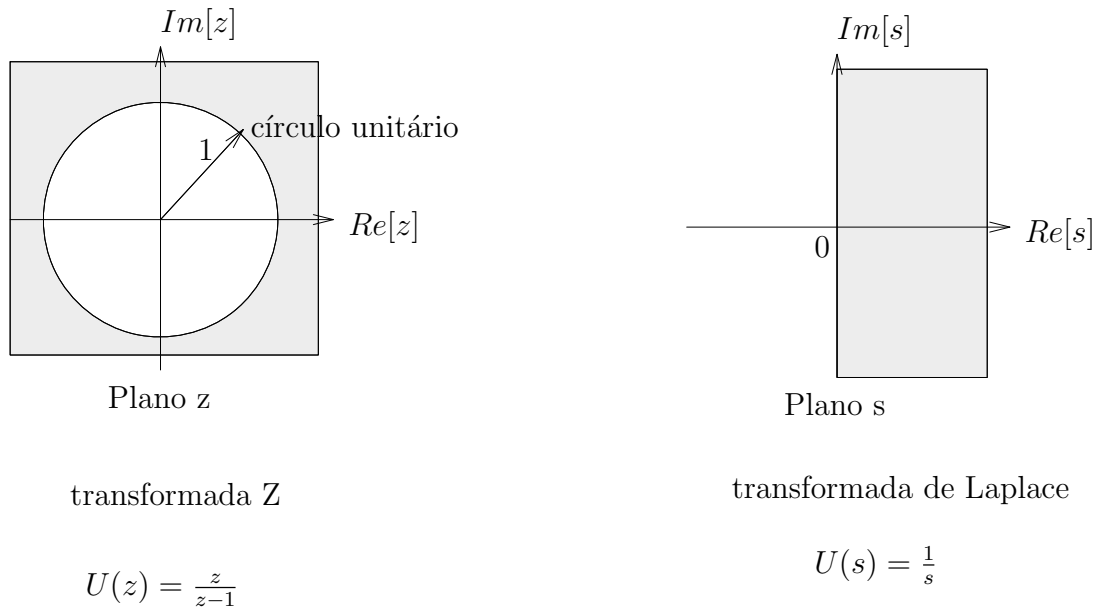


Figura 6.13: Região de convergência das transformadas do degrau unitário

a unidade. Para o caso do degrau unitário a região de convergência é $|z^{-1}| < 1$ que no plano z define a região externa ao círculo unitário como ilustra a figura 6.13. Dentro da região de convergência a sequência $u(kT)$ e sua Transformada Z estão relacionadas de maneira biunívoca como ilustra a figura 6.14.

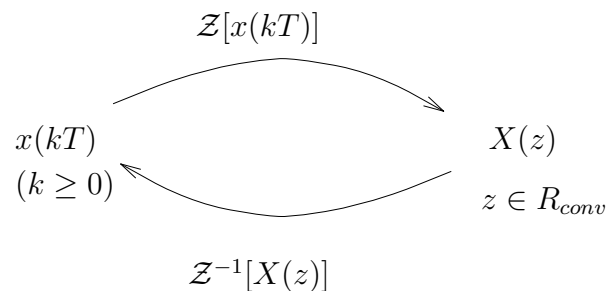


Figura 6.14: Relação biunívoca entre a sequência $x(kT)$ e sua transformada Z

A existência de uma região de convergência para a Transformada, seja Laplace, Fourier ou Z, é um dado importante, pois caso contrário a Transformada em questão deixa de ter sentido. No entanto, calcular essa região de convergência é algo irrelevante, pois se existe uma região de convergência, existe uma função $X(s)$, $X(j\omega)$ ou $X(z)$ conforme o caso. Dentro da região de convergência a Transformada e a respectiva função temporal estão diretamente relacionadas. Fora da região de convergência, a Transformada pode ser vista como uma função auxiliar que contém informações relevantes sobre a função no domínio do tempo, mesmo não estando diretamente relacionadas.

6.3.2 Relação com a transformada de Laplace

Podemos facilmente relacionar a variável complexa z da transformada Z com a variável s da transformada de Laplace.

Vamos supor que $x(t)$ seja um sinal analógico dado e que

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

seja a representação do sinal $x(t)$ amostrado com amostrador ideal (veja figura 6.5). Note que a representação do sinal amostrado $x^*(t)$ é diferente da representação da sequência $x(kT)$ obtida com os valores de $x(t)$ nos instantes $t = kT$. Enquanto $x^*(t)$ é um sinal analógico com impulsos, a sequência $x(kT)$ é um sinal discreto.

Tomemos agora a Transformada de Laplace da expressão acima:

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}, \quad x(t) = 0, \quad t < 0$$

Considerando a mudança de variável

$$z = e^{Ts} \tag{6.8}$$

podemos reescrever $X^*(s)$ em termos da variável z como indicado a seguir.

$$X^*(s)|_{s=\ln(z)/T} = \mathcal{Z}[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad ; \quad x(kT) = 0, \quad \forall k < 0 \tag{6.9}$$

Comparando (6.9) com (6.6) concluímos que a mudança de variável (6.8) define a relação entre a variável s da transformada de Laplace do sinal amostrado $x^*(t)$ e a variável z da transformada Z da sequência $x(kT)$.

Veja por exemplo a relação que existe entre os pólos da transformada Z e Laplace do degrau unitário indicadas na figura 6.13. O pólo da transformada de Laplace está na origem $s = 0$. O pólo da transformada Z está em $z = 1$. Este mapeamento de $s = 0$ em Laplace para $z = 1$ no plano Z é dado pela equação (6.8).

Exemplo 6.4 (Função Potência) Calcule a transformada Z da função potência a^k onde a é uma constante e $k \geq 0$ é uma variável discreta.

Solução: Com (6.7) temos:

$$\mathcal{Z}[a^k u(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Como curiosidade, a região de convergência da transformada é $R_{conv} = \{z : |a z^{-1}| < 1\}$. Note ainda que com o resultado acima podemos facilmente obter a transformada Z da função exponencial $f(k) = e^{bk}$ onde b é uma constante e $k \geq 0$ é uma variável discreta (verifique!).

Exemplo 6.5 (Função Senoidal) Calcule a transformada Z da função senoidal $\text{sen}(\omega_0 kT)$ onde ω_0 e T são constantes e $k \geq 0$ é uma variável discreta.

Solução: Aplicando a definição e fórmula de Euler temos:

$$\begin{aligned} Z[\text{sen}(\omega_0 kT)u(kT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \text{sen}(\omega_0 kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 kT} - e^{-j\omega_0 kT}}{2j} z^{-k} \\ &= \frac{1}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} [e^{j\omega_0 kT} z^{-k} - e^{-j\omega_0 kT} z^{-k}] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega_0 T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0 T}} \right] \\ &= \frac{z \text{sen}(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1} \end{aligned}$$

Exemplo 6.6 (Pulso Unitário) Calcule a transformada Z da função Pulso Unitário: $\delta(k)$ definida como $\delta(k) = 1$ para $k = 0$ e nula para $k \neq 0$.

Solução: Aplicando a definição encontramos

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = 1$$

Para a função pulso deslocada no instante $k = m$, definida como $\delta(k - m) = 1$ para $k = m$ e nula para $k \neq m$ encontramos

$$\mathcal{Z}[\delta(k - m)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k - m)z^{-k} = z^{-m}$$

As figuras 6.15, 6.16 e 6.17 ilustram a relação entre a localização dos pólos da transformada Z do sinal e o seu comportamento temporal.

6.4 Propriedades da Transformada Z

6.4.1 Linearidade

A Transformada Z é uma operação linear, isto é,

$$\mathcal{Z}[\alpha_1 x(k) + \alpha_2 y(k)] = \alpha_1 \mathcal{Z}[x(k)] + \alpha_2 \mathcal{Z}[y(k)]$$

para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}$.

Problema 6.2 Prove que a transformada Z é uma operação linear

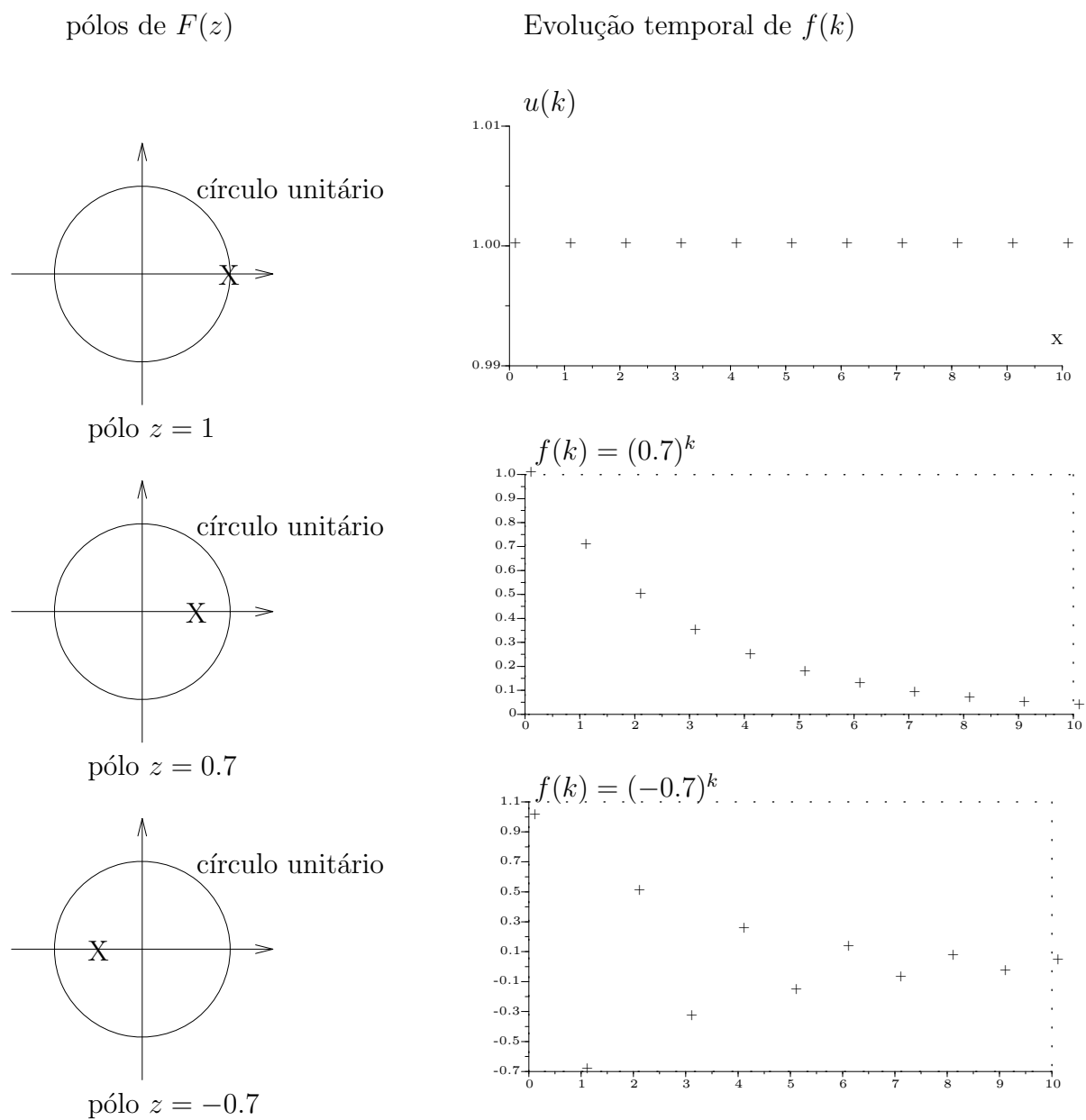


Figura 6.15: Relação entre localização pólos e evolução temporal

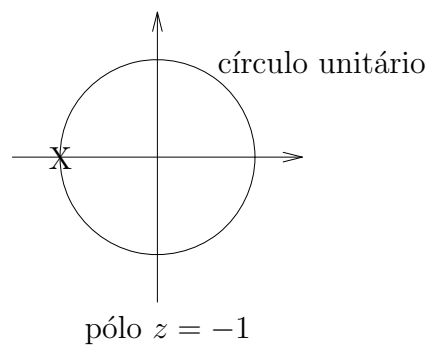
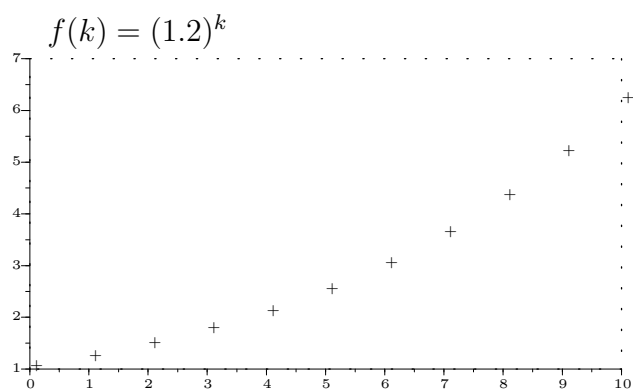
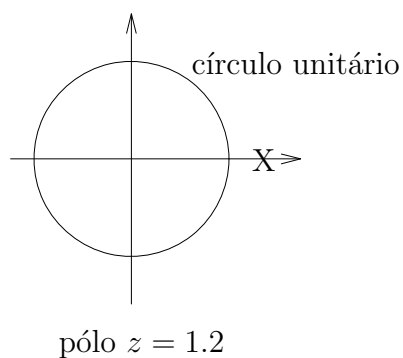
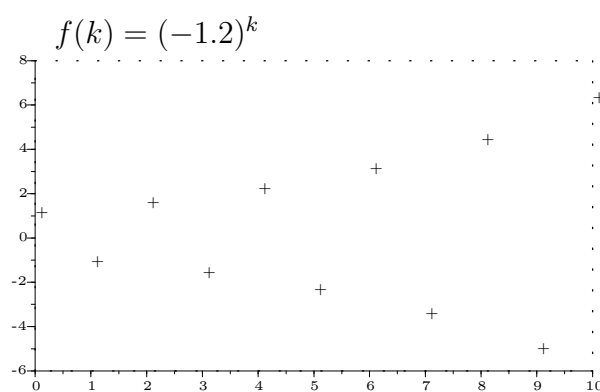
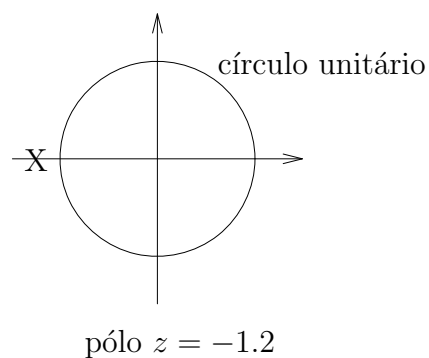
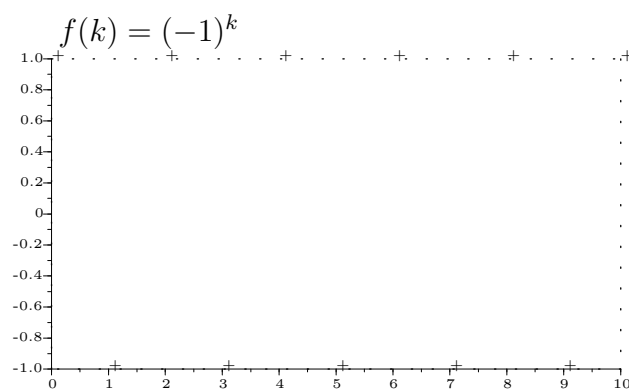
pólos de $F(z)$ Evolução temporal de $f(k)$ 

Figura 6.16: Relação entre localização pólos e evolução temporal

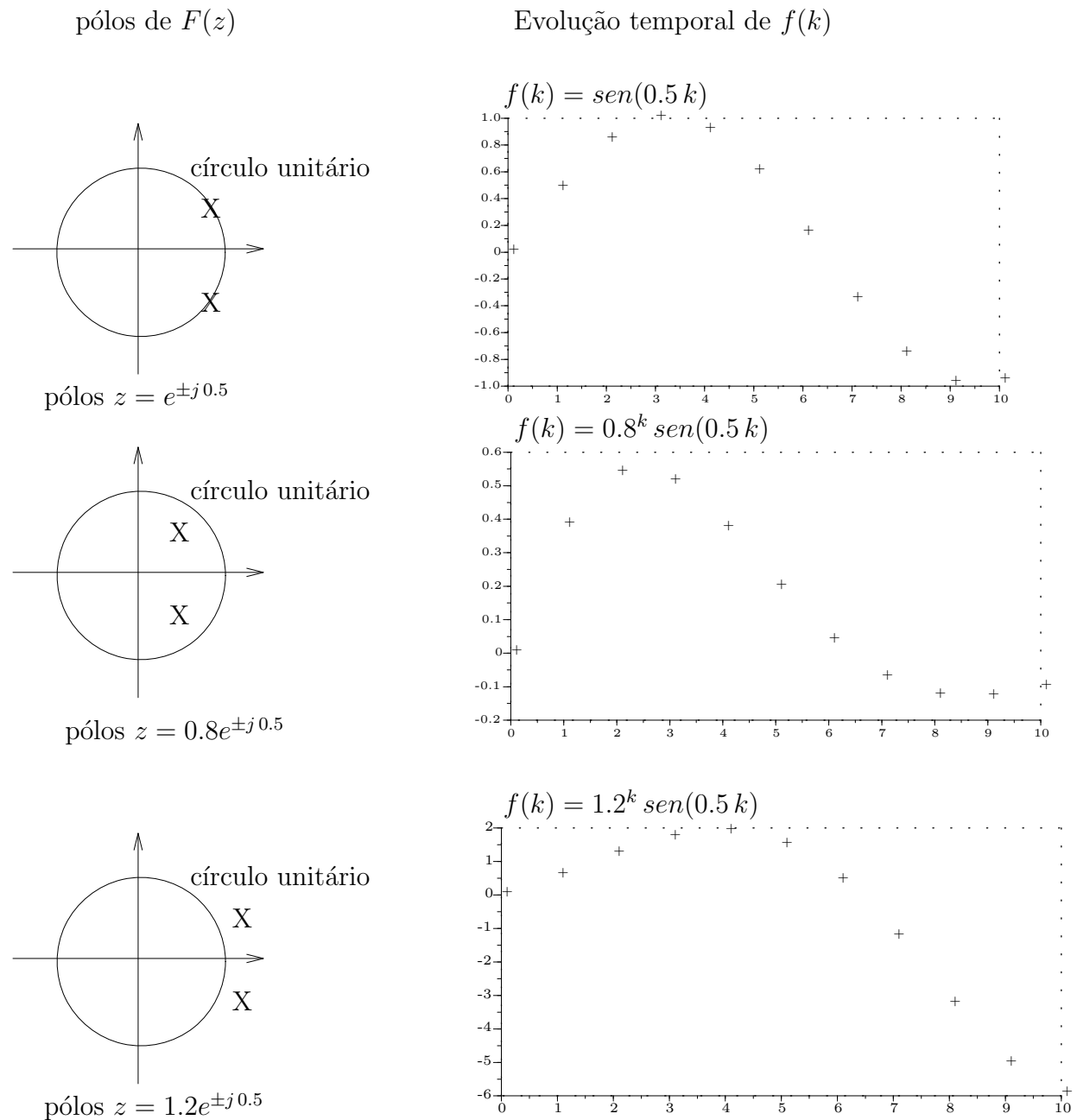


Figura 6.17: Relação entre localização pólos e evolução temporal

6.4.2 Teorema do Valor Inicial

Se $\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ existe então:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

Prova: Note que $\mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + \dots$

Logo, quando $z \rightarrow \infty$ obtem-se o resultado desejado.

6.4.3 Teorema do Valor Final

Se $\mathcal{Z}[x(k)] = X(z)$ e se a função $(z-1)X(z)$ é analítica sobre e fora do círculo unitário, então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

Prova: Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(k)] &= X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ \mathcal{Z}[x(k+1)] &= zX(z) - zx(0) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} \end{aligned}$$

Tomando a diferença entre as duas expressões acima:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [x(k+1) - x(k)]z^{-k} = zX(z) - zx(0) - X(z) = (z-1)X(z) - zx(0)$$

Supondo que a sequência $x(k)$ converge para um valor finito em regime, temos que $X(z)$ pode ter no máximo um pólo sobre o círculo unitário e nenhum pólo fora dele (veja figuras 6.15-6.17). Isso implica que a função auxiliar $(z-1)X(z)$ não pode ter pólos sobre nem fora do círculo unitário, ou seja devem estar dentro do círculo unitário. Logo para $z \rightarrow 1$ temos o seguinte resultado:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} [x(k+1) - x(k)]z^{-k} = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z) - zx(0)]$$

de onde se conclui que no limite ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1) - x(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] - x(0) \\ x(\infty) - x(0) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) - x(0) \\ \Rightarrow x(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

6.4.4 Obtenção de $F(z)$ a partir de $F(s)$

Vimos anteriormente que existe uma relação entre a transformada de Laplace de um sinal $x^*(t)$ amostrado nos instantes $t = kT$ e a transformada Z da sequência $x(kT)$. Dessa relação podemos montar tabelas que relacionam $X(s)$ (a transformada de Laplace do sinal $x(t)$) e a respectiva transformada Z da sequência $x(kT)$. A figura 6.18 ilustra essa relação.

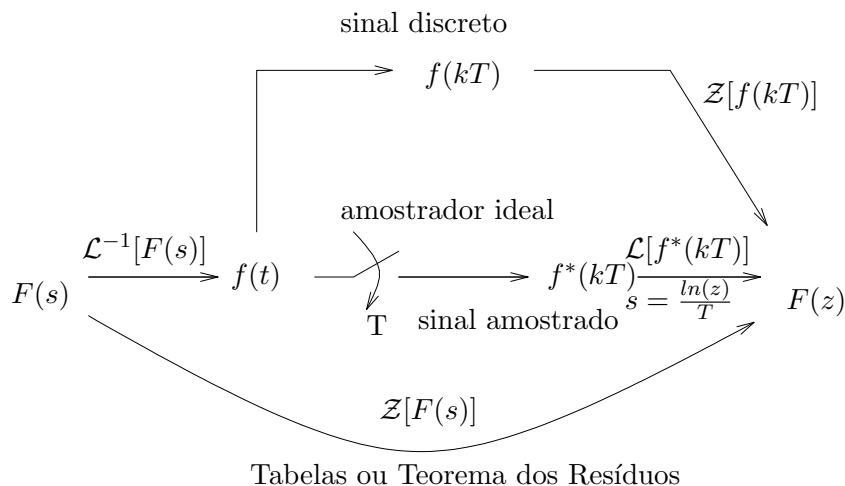


Figura 6.18: Obtenção de $F(z)$ a partir de $F(s)$

As funções mais usuais já se encontram tabeladas em termos de suas Transformadas Z, Laplace e Fourier. Logo o uso de tabelas associado ao método de expansão em frações parciais pode ser útil na determinação de $F(z)$ a partir de $F(s)$.

No entanto o uso de tabelas pode apresentar limitações em alguns casos. A seguir apresenta-se um procedimento analítico alternativo bastante simples conhecido como método dos resíduos.

Sejam P_1, \dots, P_n o conjunto de pólos distintos de $F(s)$. Caso $F(s)$ possua pólos repetidos inclua o pólo apenas uma vez no conjunto.

Então, com $F(s)$ e P_1, \dots, P_n podemos calcular $F(z)$ da seguinte forma:

$$F(z) = \sum_{i=1}^n R(P_i)$$

sendo $R(P_i)$ o resíduo do pólo P_i ($i = 1 \dots n$) dados por:

- Pólo simples (multiplicidade 1)

$$R(P_i) = \left[(s - P_i) F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=P_i}$$

- Pólo múltiplo (multiplicidade m)

$$R(P_i) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s - P_i)^m F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=P_i}$$

O resultado acima é apresentado como exercício resolvido no livro do Ogata [1] (edição 1982) ou ainda em vários outros livros sobre controle de sistemas a tempo discreto.

Exemplo 6.7 Obtenha $F(z) = \mathcal{Z}[F(s)]$ dado $F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$.

Solução: Como $F(s)$ possui dois pólos distintos temos:

$$F(z) = R(P_1) + R(P_2)$$

sendo:

$$\begin{cases} R(P_1) = \left[(s+a)F(s) \frac{z}{z-e^{sT}} \right]_{s=-a} = \frac{1}{b-a} \frac{z}{z-e^{-aT}} \\ R(P_2) = \left[(s+b)F(s) \frac{z}{z-e^{sT}} \right]_{s=-b} = \frac{1}{a-b} \frac{z}{z-e^{-bT}} \end{cases}$$

Logo:

$$F(z) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}} \right]$$

O resultado pode ser conferido com o auxílio de tabelas (verifique!).

6.4.5 Convolução Discreta

De forma análoga à integral de convolução para sistemas de tempo contínuo, podemos definir convolução para sistemas de tempo discreto através de um somatório.

Tempo contínuo:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau$$

Tempo discreto:

$$x_1(kT) * x_2(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(nT) x_2(kT - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(nT) x_1(kT - nT)$$

Normalmente temos $x_1(t) = 0$ e $x_2(t) = 0$ para $t < 0$ e nesses casos podemos tomar $t_0 = 0$ como limite inferior, tanto na integral como no somatório.

Com a Transformada de Laplace vimos que convolução no domínio do tempo se transforma em produto no domínio da frequência. Mostraremos a seguir que isto também é verdade em relação à convolução discreta e a Transformada Z.

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s)X_2(s) \quad (\text{Transf. Laplace - Tempo Contínuo})$$

$$\mathcal{Z}[x_1(kT) * x_2(kT)] = X_1(z)X_2(z) \quad (\text{Transf. Z - Tempo Discreto})$$

Prova: Seja $y(kT)$ o resultado da convolução discreta.

$$y(kT) = x_1(kT) * x_2(kT)$$

Pela definição da Transformada Z temos:

$$\mathcal{Z}[y(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_1(nT)x_2(kT - nT) \right) z^{-k}$$

Fazendo a mudança de variável $m = k - n$ encontramos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y(kT)] &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_1(nT)x_2(mT)z^{-(m+n)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} x_2(mT)z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} x_1(nT)z^{-n} \\ &= X_1(z)X_2(z) \end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

Note que a convolução de uma sequência qualquer $x_1(kT)$ com um pulso unitário $\delta(kT)$ resulta na própria sequência $x_1(kT)$ pois, como já vimos $\mathcal{Z}[\delta(kT)] = 1$.

$$\delta(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{Pulso Unitário na Origem}$$

$$\mathcal{Z}[\delta(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT)z^{-k} = 1$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(kT) * \delta(kT)] &= \mathcal{Z}[f(kT)]\mathcal{Z}[\delta(kT)] = \mathcal{Z}[f(kT)] \\ \Rightarrow f(kT) * \delta(kT) &= f(kT) \end{aligned}$$

A função pulso unitário $\delta(kT)$ tem (em relação a Transformada Z) as mesmas propriedades que a função impulso unitário $\delta(t)$ tem em relação à Transformada de Laplace.

6.5 Transformada Z Inversa

Existem basicamente três métodos para a determinação da Transformada Z Inversa. Cada um possui características diferentes, vantagens e desvantagens. A seguir apresentaremos os dois mais utilizados.

6.5.1 Método da divisão polinomial

Este método é uma consequência direta da própria definição de Transformada Z :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots$$

Como normalmente $X(z)$ é expressa em termos de uma fração polinomial, isto é $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ sendo $N(z)$ e $D(z)$ dois polinômios, temos:

$$\frac{N(z)}{D(z)} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots$$

Para obter a igualdade acima através das regras usuais de divisão polinomial seguimos o seguinte procedimento: Suponha que o grau de $N(z)$ não é superior ao grau de $D(z)$ e defina $n = \text{grau}(D(z))$. Construa dois polinômios auxiliares

$$\tilde{N}(z^{-1}) = z^{-n}N(z) \quad , \quad \tilde{D}(z^{-1}) = z^{-n}D(z)$$

Faça agora a divisão de $\tilde{N}(z^{-1})$ por $\tilde{D}(z^{-1})$ para encontrar os valores de $x(0), x(T), x(2T), \dots$

$$\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\tilde{N}(z^{-1})}{\tilde{D}(z^{-1})} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots \quad (6.10)$$

Exemplo 6.8 Determine o valor numérico de $x(4T)$ dado que $X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$.

Solução:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{10z}{z^2 - 3z + 2} \\ \tilde{D}(z^{-1}) &= z^{-2}D(z) = 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} \\ \tilde{N}(z^{-1}) &= z^{-2}N(z) = 10z^{-1} \end{aligned}$$

Por divisão polinomial se obtém:

$$\frac{\tilde{N}(z^{-1})}{\tilde{D}(z^{-1})} = 10z^{-1} + 30z^{-2} + 70z^{-3} + 150z^{-4} + \dots$$

Logo, por igualdade polinomial com (6.10) concluímos que: $x(0) = 0$, $x(T) = 10$, $x(2T) = 30$, $x(3T) = 70$, $x(4T) = 150$.

Quando se deseja obter uma forma analítica para $x(kT)$ este método não é adequado e o método seguinte pode ser utilizado.

Comparação	
Tempo contínuo $\dot{x}(t)$	Transformada de Laplace $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$
Tempo discreto $x(kT + T)$	Transformada Z $\mathcal{Z}[x(kT + T)] = zX(z) - zx(0)$

Tabela 6.2: Comparação entre $\mathcal{L}[\dot{x}(t)]$ e $\mathcal{Z}[x(kT + T)]$

6.5.2 Método das frações parciais de $X(z)/z$

Este método é o análogo da expansão por frações parciais da utilizado na obtenção da transformada inversa de Laplace. Note apenas que ao invés de expandir $F(z)$ por frações parciais devemos expandir $X(z)/z$. Veja o exemplo que segue.

Exemplo 6.9 Calcule a sequência $x(k)$ cuja transformada Z é $X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$.

Solução: Expandindo $X(z)/z$ for frações parciais temos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

onde $A = \frac{10}{z-2}|_{z=1} = -10$ e $B = \frac{10}{z-1}|_{z=2} = 10$.

Logo:

$$X(z) = -10 \frac{z}{z-1} + 10 \frac{z}{z-2}$$

Lembrando que $\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$ temos:

$$x(k) = -10(1)^k + 10(2)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

6.6 Solução de Equações recursivas

Veremos a seguir como calcular Transformada Z de uma sequência deslocada e a utilização desse resultado na solução de equações recursivas.

Seja $X(kT)$ um sequência e $x(kT + T)$ a sequência deslocada de T segundos ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Assim como a Transformada de Laplace nos permite resolver equações diferenciais, a Transformada Z nos permite resolver equações recursivas. Veja a comparação na tabela 6.2.

Quando as condições iniciais são nulas podemos concluir que derivar um sinal de tempo contínuo corresponde a multiplicar sua transformada de Laplace por s , isto é $sX(s)$. Analogamente, deslocar (um passo à frente) um sinal de tempo discreto corresponde à

multiplicar sua transformada Z por z , isto é $zX(z)$. A variável complexa s corresponde ao operador *derivada* no domínio do tempo contínuo e a variável complexa z corresponde ao operador *deslocamento um passo à frente* no domínio do tempo discreto.

Para provar essa propriedade da Transformada Z note que:

$$\mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}, \quad x(t) = 0 \quad t < 0$$

$$\mathcal{Z}[x(kT + T)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + T)z^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty} x(nT)z^{-(n-1)} \quad (n = k + 1)$$

Somando e subtraindo o termo $zx(0)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(kT + T)] &= z \sum_{n=1}^{\infty} x(nT)z^{-n} + zx(0) - zx(0) \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} - zx(0) \\ &= z\mathcal{Z}[x(nT)] - zx(0) \end{aligned}$$

que prova a propriedade desejada. Analogamente temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(kT + 2T)] &= z\mathcal{Z}[x(kT + T)] - zx(T) \\ &= z[z\mathcal{Z}[x(kT)] - zx(0)] - x(T) \\ &= z^2\mathcal{Z}[x(kT)] - z^2x(0) - zx(T) \end{aligned}$$

Podemos enfim generalizar a propriedade do deslocamento no tempo aplicando sucessivamente os resultados acima e obtemos após m sucessivos deslocamentos:

$$\mathcal{Z}[x(k + m)] = z^m X(z) - z^m x(0) - z^{m-1} x(1) - \cdots - zx(m-1) \quad (6.11)$$

Como z corresponde ao operador *deslocamento um passo à frente no tempo* a variável z^{-1} corresponde ao operador *deslocamento um passo à traz no tempo*. Utilizando o mesmo procedimento acima encontramos

$$\mathcal{Z}[x(k - m)] = z^{-m} X(z) \quad (6.12)$$

Exemplo 6.10 Resolva a seguinte equação recursiva:

$$x(k + 2) + 3x(k + 1) + 2x(k) = 0, \quad x(0) = 0, x(1) = 1$$

Solução: Tomando a Transformada dos dois lados e usando a linearidade temos:

$$\mathcal{Z}[x(k + 2)] + 3\mathcal{Z}[x(k + 1)] + 2\mathcal{Z}[x(k)] = 0$$

com a propriedade de deslocamento encontramos:

$$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) + 3[zX(z) - zx(0)] + 2X(z) = 0$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z+2)(z+1)} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

Como $\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$ obtemos:

$$x(k) = (-1)^k - (-2)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Note que os pólos da Transformada $X(z)$ se tornam a base das exponenciais no tempo. Logo uma sequência $x(kT)$ é convergente, $x(k)$ tende assintoticamente à zero quando $k \rightarrow \infty$, se todos os pólos da sua transformada $X(z)$ são em módulo inferiores à unidade. Confirme esse resultado na figuras 6.15-6.17.

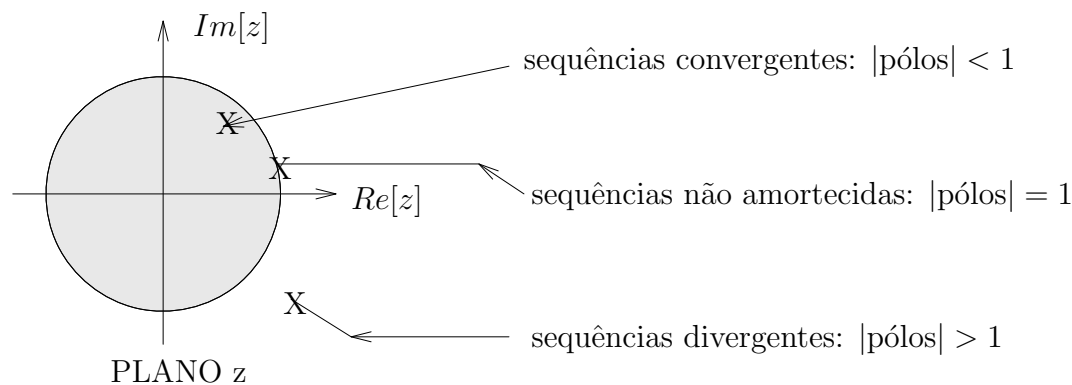


Figura 6.19: Sequências convergentes e a localização dos pólos no plano z

Note que no caso da sequência $x(kT) = \text{sen}(\omega_0 kT)u(kT)$ sua transformada:

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega_0 T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0 T}} \right]$$

possui dois pólos ($z = e^{-j\omega_0 T}$ e $z = e^{j\omega_0 T}$) que são complexos conjugados ($z = \cos(\omega_0 T) \pm j\text{sen}(\omega_0 T)$) e possuem módulo unitário indicando que a série é oscilatória sem amortecimento.

Exemplo 6.11 Determine a resposta do sistema descrito pela seguinte equação recursiva:

$$x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = u(k)$$

onde $u(k)$ é o pulso unitário e $x(k) = 0$ para $k \leq 0$.

Solução: Para resolver a equação acima precisamos das condições iniciais $x(0)$ e $x(1)$. O valor de $x(0) = 0$ é dado e o valor de $x(1) = 0$ se obtém da própria equação recursiva com $k = -1$. Além disso, com a Transformada Z encontraremos:

$$z^2 X(z) - 3zX(z) + 2X(z) = U(z)$$

A transformada do pulso unitário já calculamos anteriormente e vale $U(z) = \mathcal{Z}[u(k)] = 1$. Logo:

$$X(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{-1}{z - 1} + \frac{1}{z - 2}$$

Como $\mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) - zx(0)$ e $x(0) = 0$ temos:

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = zX(z) = \frac{-z}{z - 1} + \frac{z}{z - 2}$$

Lembrando que $\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$ obtemos finalmente:

$$x(k+1) = -(1)^k + (2)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 6.12 Já vimos no exemplo 6.2 que no circuito RC da figura 6.10 onde $e(t)$ é constante por trechos ($e(t) = e(kT)$, $kT \leq t \leq kT + T$) os sinais de entrada e saída nos instantes $t = kT$ são dados pela equação recursiva:

$$x(KT + T) - ax(kT) = be(kT)$$

$$a = e^{-T/RC}, \quad b = 1 - e^{-T/RC}$$

Obtenha a sequência de saída $x(kT)$ para um degrau unitário aplicado na entrada. Suponha os dados $e^{-T/RC} = 0.5$ e $x(0) = 0$.

Solução: Com a Transformada Z temos:

$$\mathcal{Z}[x(kT + T)] - a\mathcal{Z}[x(kT)] = b\mathcal{Z}[e(kT)]$$

$$zX(z) - zx(0) - aX(z) = bE(z)$$

Como $E(z) = \frac{z}{z-1}$ temos:

$$X(z) = \frac{z0.5}{(z - 0.5)(z - 1)} = \frac{-z}{z - 0.5} + \frac{z}{z - 1}$$

Lembrando que $\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$ encontramos:

$$x(kT) = -(0.5)^k + (1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Note que a tensão em regime permanente se obtém pelo limite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = 1, \quad (\text{Sistema Estável})$$

Analogamente a tensão inicial se obtém:

$$\lim_{k \rightarrow 0} x(kT) = 0$$

6.7 Função de Transferência Discreta e Estabilidade

Todo sistema discreto pode ser representado por um diagrama similar ao da figura 6.20 onde $x(k)$ representa a sequência de entrada dada, $y(k)$ a sequência de saída obtida, CI as condições iniciais (que são os $n - 1$ valores iniciais da variável de saída) e o bloco sistema representa um sistema que será descrito por uma equação recursiva linear e invariante no tempo (coeficientes constantes) do tipo

$$a_n y(k+n) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_m x(k+m) + \dots + b_1 x(k+1) + b_0 x(k) \quad (6.13)$$

Por conveniência de notação estamos utilizando $x(k), y(k)$ ao invés de $x(kT)$ e $y(kT)$. Isto não significa que estamos assumindo o intervalo $T = 1$ (tempo entre dois valores consecutivos da sequência). Esta notação, muito utilizada em livros de controle, significa que estamos representando a sequência numa escala de tempo normalizado $k = t/T$. Note entretanto que os coeficientes da equação recursiva dependem de T e não podemos eliminar essa dependência. Veja no caso do exemplo 6.12: poderíamos rescrever a equação recursiva na forma $x(k+1) - a x(k) = b e(k)$ mas os coeficientes a, b seriam os mesmos anteriores que dependem de T e dos parâmetros físicos do sistema (capacitância e resistência nesse exemplo particular).

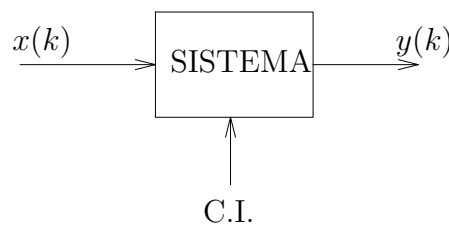


Figura 6.20: Sistema discreto genérico

6.7.1 Respostas de Estado Zero e Entrada Zero

A resposta de todo sistema linear invariante no tempo pode ser decomposta em duas parcelas: uma que depende do sistema e do sinal de entrada e outra que depende do sistema e das condições iniciais. A primeira parcela chamaremos de *Resposta de estado zero* já que esta parcela indica como um sistema, inicialmente em repouso (condições iniciais nulas), responde a um dado sinal de entrada. A segunda parcela chamaremos de *Resposta de Entrada Nula* pois ela indica como um sistema se comporta quando é deixado para responder livremente às suas condições iniciais (sem excitação externa).

As respostas de Estado Zero e Entrada Zero de um sistema descrito por (6.13) pode ser determinada através da Transformada Z.

Exemplo 6.13 Considere o circuito descrito no exemplo 6.12. Calcule a resposta de Entrada Zero, para uma dada condição inicial $x(0) = x_0$ e a resposta de Estado Zero para uma entrada genérica $e(k)$.

Solução: Tomando a Transformada Z da equação recursiva temos:

$$zX(z) - zx(0) - aX(z) = bE(z)$$

$$\Rightarrow X(z) = F(z)E(z) + F_0(z)x(0)$$

onde $F(z) = \frac{b}{z-a}$ e $F_0(z) = \frac{z}{z-a}$.

Sejam $f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$ e $f_0(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F_0(z)]$. Podemos então reescrever a expressão acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x(k) &= \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)E(z)] + \mathcal{Z}^{-1}[F_0(z)]x(0) \\ &= f(k) * e(k) + f_0(k)x(0) \end{aligned}$$

Note que $f(k)$ e $f_0(k)$ dependem apenas dos coeficientes constantes da equação recursiva. Não dependem nem da entrada, nem da saída nem das condições iniciais.

A parcela $f(k) * e(k)$, que é uma convolução discreta e não depende das condições iniciais, é a resposta de Estado Zero e a parcela $f_0(k)x(0)$, que não depende da entrada, é a resposta de Entrada Zero.

Problema 6.3 Calcule as sequências $f(k)$ e $f_0(k)$ do exemplo acima.

Se ao invés do circuito *RC* (de primeira Ordem) acima tomarmos a equação recursiva de um sistema genérico (6.13) obteríamos:

$$y(k) = f(k) * x(k) + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(k)c_i \quad (6.14)$$

onde $c_i = y(i)$ são as condições iniciais do sistema, $f(k)$ e $f_i(k)$ são sequências que dependem apenas dos coeficientes da equação recursiva (6.13), $x(k)$ é a sequência de entrada e $y(k)$ a de saída.

Da expressão acima observe que:

1. A saída de um sistema discreto depende dos parâmetros físicos e do período de amostragem que determinam os coeficientes da equação recursiva e que por sua vez determinam as funções $f(k)$ e $f_i(k)$ em (6.14).
2. A saída de um sistema discreto depende da entrada que lhe é aplicada e essa dependência se expressa através da convolução discreta $y(kT) = f(kT) * x(kT)$. Esta parcela da resposta recebe o nome de resposta de Estado Zero.

$$y_{esz}(kT) = f(kT) * x(kT).$$

3. A saída de um sistema depende das condições iniciais $c_i = y(iT)$ ($i = 0, \dots, n-1$). Esta parcela da resposta recebe o nome de resposta de Entrada Zero.

$$y_{enz}(kT) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(kT)c_i$$

4. A resposta de Entrada Zero é linear (afim) em relação às condições iniciais e a resposta de Estado Zero é linear em relação à entrada.
5. Os pólos de $F(z)$ definem a estabilidade da resposta. Se $F(z)$ possuir algum pólo com módulo maior que a unidade então a resposta terá uma parcela que diverge. A função $F(z)$ é conhecida como Função de Transferência Discreta (ou pulsada) do sistema.

6.7.2 Resposta ao Pulso e Estabilidade

Quando as condições iniciais são nulas a saída de um sistema discreto linear invariante só depende da entrada e da Função de Transferência Discreta, como pode ser visto em (6.14).

Domínio do Tempo: $y(k) = f(k) * x(k)$.

Domínio da Frequência: $Y(z) = F(z)X(z)$.

A função $f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$ recebe o nome de resposta ao pulso unitário pois $f(k)$ é a resposta do sistema quando as condições iniciais são nulas e a entrada é um pulso unitário no instante $k = 0$. ($X(z) = 1$).

Definição 6.1 (Sistemas Causais ou Não-Antecipativos) *Um sistema discreto é dito ser Causal (ou Não-Antecipativo) se a resposta de Estado Zero para um pulso unitário é nula para $k < 0$.*

Num sistema causal o valor da resposta num dado instante de tempo $y(kT)$ não depende do sinal de entrada $x(nT)$ para valores de $n > k$. Caso contrário o valor da resposta no instante $t = kT$ passa a depender de valores futuros do sinal de entrada ($x(t)$ para $t > kT$) e que portanto ainda não estão disponíveis no instante $t = kT$.

Mostraremos a seguir que um sistema é causal quando o polinômio do numerador da Função de Transferência $F(z)$ possui grau \leq ao do denominador.

Com (6.13) temos que:

$$a_n y(k+n) + \cdots + a_0 y(k) = b_m x(k+m) + \cdots + b_0 x(k)$$

Observe que $y(k+n)$ depende de $x(k+m)$ e portanto se $m > n$ a saída no instante $k+n$ depende de valores da entrada em instantes de tempo futuros pois $k+m > k+n$ para todo k . Logo para que um sistema discreto seja causal devemos ter $m \leq n$.

Definição 6.2 (Estabilidade) *Um sistema discreto linear invariante no tempo é exponencialmente estável se todos os pólos da sua Função de Transferência Pulsada possuem módulo inferior à unidade. Caso contrário é dito ser instável.*

Pela definição acima, note que a estabilidade é uma propriedade intrínseca do sistema. Ela só depende dos parâmetros físicos do mesmo. Não depende da entrada nem das condições iniciais. O nome exponencialmente estável apenas enfatiza que os pólos da Função de Transferência serão a base de exponenciais no domínio do tempo e portanto a resposta ao pulso converge exponencialmente para zero.

Exemplo 6.14 *Verifique a estabilidade do sistema cuja função de transferência é*

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$$

Solução: Os pólos de $F(z)$ são $z = 1$ e $z = -2$ e pela definição acima o sistema é instável pois $F(z)$ possui pólos fora do círculo unitário (ou sobre o círculo). Para ver o efeito desses pólos na resposta ao pulso unitário temos:

$$F(z) = \frac{1}{3} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{3} \frac{z}{z+2}$$

e como $\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$ temos:

$$\mathcal{Z}^{-1} = f(k) = \frac{1}{3}(1)^k - \frac{1}{3}(-2)^k$$

Assim, se algum pólo da Função de Transferência $F(z)$ possuir módulo ≥ 1 a resposta ao pulso não tende à zero. Será crescente, oscilatória ou converge para um valor não nulo, caracterizando assim a instabilidade do sistema.

6.8 Sistemas Amostrados

Vimos que a transformada de Laplace é adequada ao tratamento de sinais e sistemas de tempo contínuo. De forma análoga a transformada Z nos possibilita o tratamento de sinais e sistemas de tempo discreto. No entanto, a maioria dos sistemas a serem controlados são de natureza contínua e são controlados por computadores digitais (natureza discreta). Essa mistura de sistemas contínuos e discretos tornam o problema de análise de estabilidade mais complicado pois tanto a transformada de Laplace como a transformada Z já não fornecem resultados satisfatórios se aplicadas diretamente. A seguir veremos como transformar sistemas amostrados em sistemas discretos equivalentes. Com essa transformação todos os sinais do sistema passam a ser discretos e a transformada Z pode ser usada sem maiores problemas na análise do sistema.

A figura 6.21(a) mostra um sistema contínuo $G(s)$ cuja entrada $x^*(t)$ é um sinal amostrado com amostrador ideal (trem de impulsos de período T). A saída $y(t)$ desse sistema será discretizada para posterior tratamento num computador digital, isto é apenas os valores $y(kT)$ serão considerados. Precisamos então saber qual seria o sistema discreto equivalente que tem as sequências $x(kT)$ como entrada e $y(kT)$ como saída, como indica a figura 6.21(b). O sistema discreto que procuramos possui as mesmas informações do sistema amostrado e além disso a transformada Z pode ser aplicada diretamente.

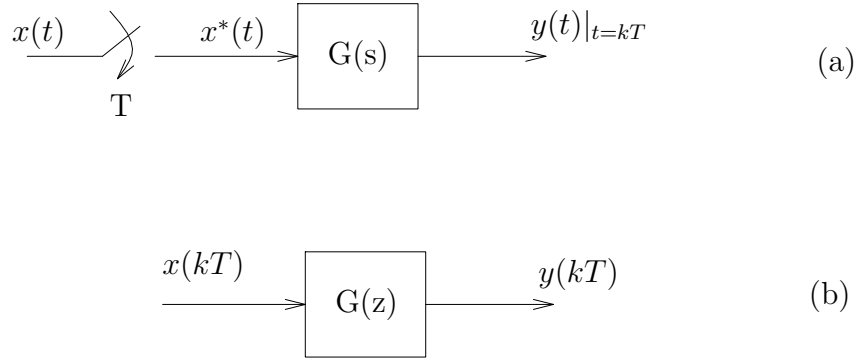


Figura 6.21: Sistema amostrado e seu discreto equivalente

Note que a entrada do bloco analógico $G(s)$ na figura 6.21(a) é um sinal amostrado onde os impulsos possuem áreas de valores $x(kT)$ e a entrada do bloco discreto $G(z)$ na figura 6.21(b) é uma sequência de valores $x(kT)$. A saída $y(t)$ figura 6.21(a) é analógica mas apenas os valores $y(kT)$ medidos nos instantes $t = kT$ são de interesse. Já a saída na figura 6.21(b) é a própria sequência $y(kT)$.

A seguir apresentamos um procedimento para, dado o sistema analógico $G(s)$, encontrar o bloco discreto equivalente $G(z)$. E equivalência à qual nos referimos é no sentido de que os valores do sinal de entrada $x(kT)$ e saída $y(kT)$ do sistema discreto são os mesmos do sistema contínuo $x(t), y(t)$ nos instantes $t = kT$.

Seja então $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ a resposta impulsional do sistema representado por $G(s)$. Daí, a resposta $y(t)$ é dada pela convolução contínua da entrada com a resposta impulsional.

$$\text{ENTRADA: } x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT), \quad x(t) = 0 \text{ para } t < 0.$$

$$\text{SAÍDA: } y(t) = \left[\sum_{n=0}^k x(nT)\delta(t - nT) \right] * [g(t)], \quad 0 \leq t \leq kT.$$

Sem perda de generalidade representamos $y(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq kT$ para algum valor de $k \geq 0$. Note que estamos supondo que $G(s)$ representa um sistema causal e portanto $g(t) = 0$ para $t < 0$.

Desenvolvendo a expressão acima encontramos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^k x(nT)[\delta(t - nT) * g(t)], \quad 0 \leq t \leq kT \\ &= \sum_{n=0}^k x(nT)g(t - nT) \end{aligned}$$

Os valores de $y(t)$ nos instantes $t = kT$ são dados por:

$$y(t)|_{t=kT} = y(kT) = \sum_{n=0}^k x(nT)g(kT - nT) \quad (6.15)$$

que é a convolução discreta da sequência de entrada $x(kT)$ com a sequência de saída $y(kT)$. Pela propriedade de convolução da Transformada Z temos também que:

$$\mathcal{Z}[y(kT)] = \mathcal{Z}[x(kT)]\mathcal{Z}[g(kT)] \quad ; \quad Y(z) = X(z)G(z) \quad (6.16)$$

As equações (6.15) e (6.16) definem a relação entre as sequências $x(kT)$ e $y(kT)$ na figura 6.21(b) que é o resultado desejado. Assim, para se obter o sistema discreto $G(z)$ equivalente a um sistema contínuo $G(s)$, calcule $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ com a transformada inversa de Laplace. Em seguida calcule a sequência $g(kT)$ fazendo $t = kT$ na função $g(t)$ obtida e finalmente calcule a função de transferência do sistema discreto equivalente $G(z)$ aplicando a transformada Z na sequência $g(kT)$ obtida. Um procedimento mais simples para a passar de $G(s)$ para $G(z)$ está indicado na seção 6.4.4. A figura 6.22 mostra um resumo dos principais resultados de conversão de Laplace para Z. .

Exemplo 6.15 Considere o sistema amostrado da figura 6.21(a) com $G(s) = \frac{\alpha}{(s+a)(s+b)}$. Calcule a função de transferência discreta $G(z)$ entre a sequência $x(kT)$ de entrada e $y(kT)$ de saída indicada na figura 6.21(b).

Solução: Podemos resolver esse problema de duas formas:

(1) Utilizando o Teorema do Resíduo apresentado na seção 6.4.4. Nesse caso temos

$$\begin{aligned} G(z) &= R(P_1) + R(P_2) \\ R(P_1) &= \left[(s+a)G(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-a} = \frac{\alpha}{b-a} \frac{z}{z - e^{-aT}} \\ R(P_2) &= \left[(s+b)G(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-b} = \frac{\alpha}{a-b} \frac{z}{z - e^{-bT}} \\ \Rightarrow G(z) &= \frac{\alpha}{b-a} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{z}{z - e^{-bT}} \right] \end{aligned}$$

que é a função de transferência discreta desejada. Além disso, com a notação $Y(z) = \mathcal{Z}[y(kT)]$ e $X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)]$ podemos escrever a relação de entrada/saída do sistema $Y(z) = G(z)X(z)$.

(2) Utilizando as expressões (6.15) e (6.16). Nesse caso temos

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\alpha}{b-a} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) \right] = \frac{\alpha}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$$

Discretizando a resposta impulsional $g(t)$ obtemos:

$$g(t)|_{t=kT} = g(kT) = \frac{\alpha}{b-a} (e^{-akT} - e^{-bkT})$$

tomando a Transformada Z da sequência $g(kT)$ obtemos:

$$G(z) = \mathcal{Z}[g(kT)] = \frac{\alpha}{b-a} \left(\frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{z}{z - e^{-bT}} \right)$$

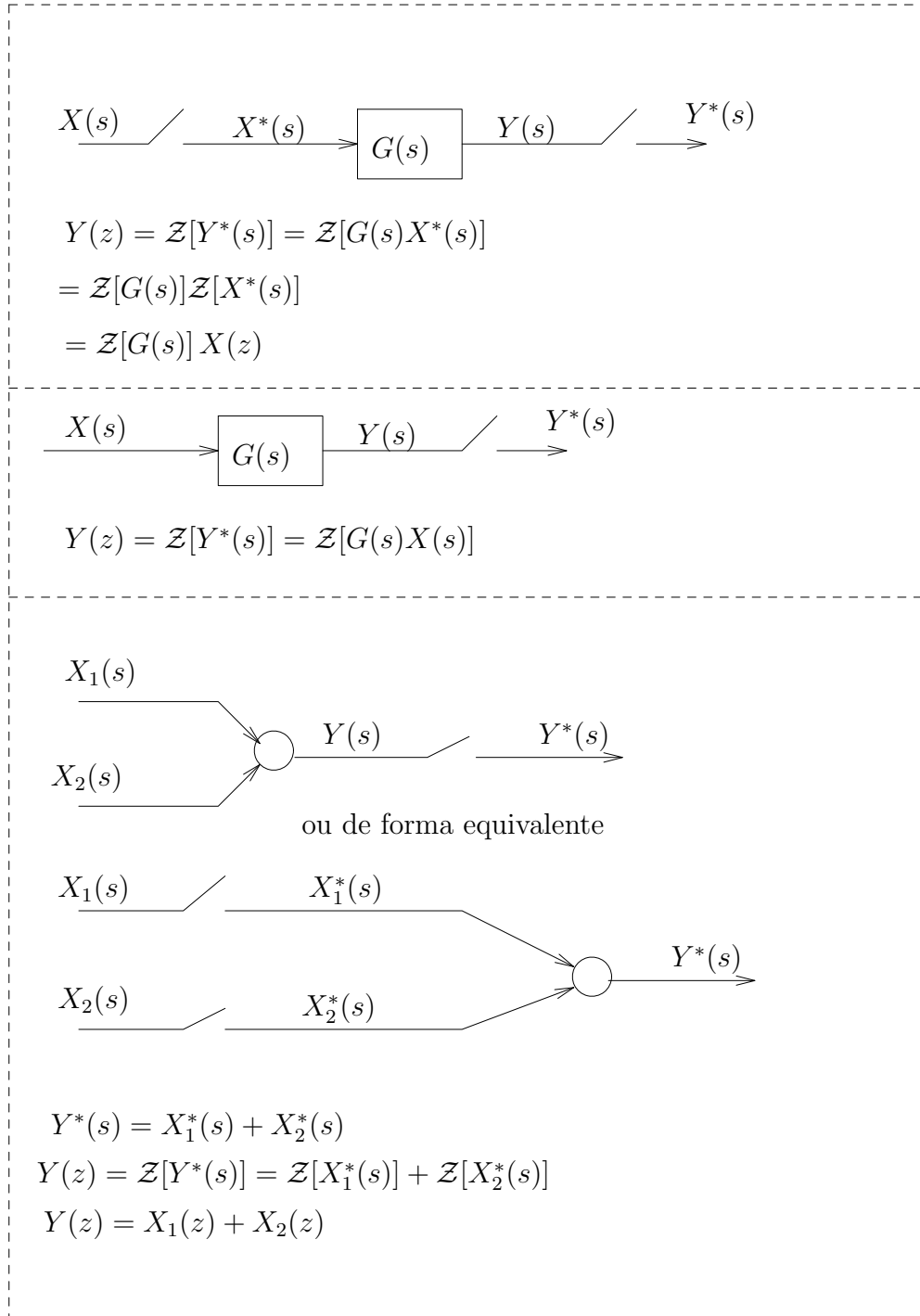


Figura 6.22: Resumo dos resultados de conversão de Laplace para Z

e finalmente temos:

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z)X(z) & \text{Frequência} \\ y(kT) &= g(kT) * x(kT) & \text{Tempo} \end{aligned}$$

A maioria dos sistemas amostrados possuem algum dispositivo sample-and-hold no seu interior. A figura 6.23 mostra um sistema desse tipo. A função $ZOH(s)$ é a função de transferência do segurador de ordem zero como indicado em (6.4).

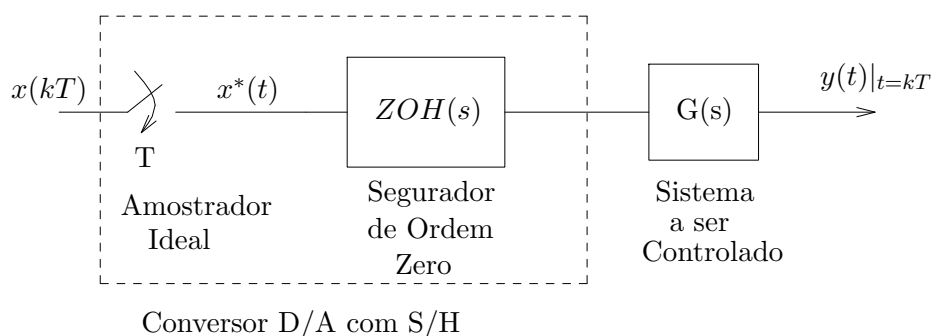


Figura 6.23: Sistema amostrado com conversor D/A e S/H

Da figura 6.23 vamos definir a função auxiliar $H(s) = ZOH(s)G(s)$. O problema agora é encontrar a função de transferência discreta $H(z)$ que corresponde à função $H(s)$. Para isso vamos utilizar a notação $H(z) = \mathcal{Z}[H(s)]$. Lembrando que $e^{sT} = z$ temos com (6.4)

$$H(z) = \mathcal{Z}[ZOH(s)G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad (6.17)$$

Exemplo 6.16 Considere o sistema da figura 6.23 onde $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$. Calcule a função de transferência Pulsada entre a sequência $x(kT)$ e a saída $y(t)$ nos instantes $t = kT$ com $T = 1\text{seg}$.

Solução: Pelo resultado acima temos:

$$H(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s+1)}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

Definindo $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$ podemos calcular $F(z)$ através do teorema dos resíduos.

$$F(z) = R(P_1) + R(P_2)$$

onde:

$$R(P_1) = \left[(s+1)F(s)\frac{z}{z - e^{Ts}}\right]_{s=-1} = \frac{z}{z - e^{-1}}$$

e

$$\begin{aligned}
 R(P_2) &= \left[\frac{d}{ds} \left(s^2 F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right) \right]_{s=0} \\
 &= \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \frac{z}{z - e^{sT}} \right) \right]_{s=0} \\
 &= \left[\frac{-1}{(s+1)^2} \frac{z}{z - e^{sT}} + \frac{1}{s+1} \frac{-z}{(z - e^{sT})^2} (-T e^{sT}) \right]_{s=0} \\
 &= -\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-1}} + \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1}$$

e portanto:

$$H(z) = (1 - z^{-1})F(z) = \frac{z-1}{z - e^{-1}} + \frac{1}{z-1} - 1$$

que é a função de transferência desejada.

Exemplo 6.17 Considere o circuito RC do exemplo 6.2 onde o sinal de entrada é constante por trechos. Represente o sinal constante por trechos como sendo a saída de um segurador de ordem zero como indicado na figura 6.24. Calcule a equação recursiva que rege o comportamento do sistema nos instantes $t = kT$. Calcule também a resposta do circuito para um degrau unitário.

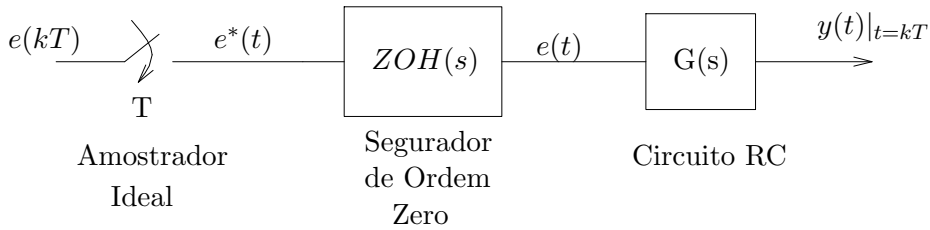


Figura 6.24: Circuito com entrada constante por trechos

Solução: A função de transferência Pulsada entre a sequência de tensão de entrada $e(kT)$ e a de saída $y(kT)$ pode ser obtida com:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1}{RCs + 1} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\underbrace{\frac{1}{s(RCs + 1)}}_{F(s)} \right] \\
 &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[F(s)] = (1 - z^{-1})[R(P_1) + R(P_2)]
 \end{aligned}$$

$$R(P_1) = \left[sF(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=0} = \frac{z}{z-1}$$

$$R(P_2) = \left[(s + 1/RC)F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-1/RC} = \frac{-z}{z - e^{-T/RC}}$$

$$\Rightarrow H(z) = (1 - z^{-1}) \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T/RC}} \right] = \frac{1 - e^{-T/RC}}{z - e^{-T/RC}}$$

Como $Y(z) = H(z)E(z)$ temos $a = e^{-T/RC}$ e $b = 1 - e^{-T/RC}$

$$Y(z)z - aY(z) = bE(z)$$

e pela propriedade de deslocamento obtemos:

$$y(kT + T) - ay(kT) = be(kT)$$

que é a equação recursiva desejada.

Para calcular a resposta ao degrau unitário temos $E(z) = \frac{z}{z-1}$ e portanto $Y(z) = H(z)\frac{z}{z-1}$ e por frações parciais obtemos a resposta ao degrau:

$$\begin{aligned} y(kT) &= \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1} \frac{b}{z-a}\right] \\ &= 1 - e^{-kT/RC}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Exemplo 6.18 Calcule a função de transferência discreta dos sistemas indicados na figura 6.25.

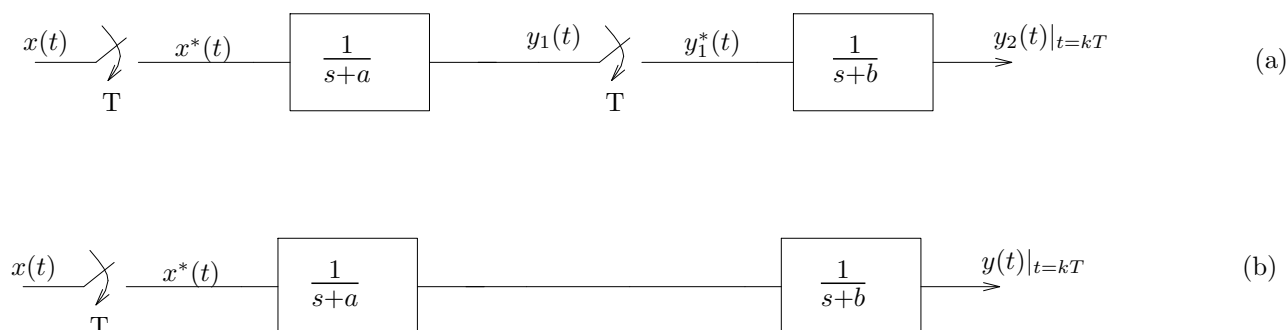


Figura 6.25: (a) Dois sistemas amostrados em cascata; (b) Dois sistemas contínuos em cascata

Solução: No caso da figura 6.25(a), a relação entre as sequências de entrada $x(kT)$ e a de saída $y_1(kT)$ é:

$$\mathcal{Z}[y_1(kT)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\right] \mathcal{Z}[x(kT)] \Leftrightarrow Y_1(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\right] X(z)$$

A relação entre as sequências de entrada $y_1(kT)$ e a de saída $y_2(kT)$ é:

$$\mathcal{Z}[y_2(kT)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right] \mathcal{Z}[y_1(kT)] \Leftrightarrow Y_2(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right] Y_1(z)$$

Combinando as duas expressões acima temos que a função de transferência Pulsada entre as sequências $x(kT)$ e $y_2(kT)$ é:

$$Y_2(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\right] \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right] X(z)$$

Note que $\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{z}{z-e^{-aT}}$ e $\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right] = \frac{z}{z-e^{-bT}}$.

No caso da figura 6.25(b), a relação entre as sequências de entrada $x(kT)$ e a de saída $y(kT)$ é:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right] X(z)$$

Assim concluímos que

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right] = \frac{1}{b-a} \left(\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}} \right)$$

e portanto

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s+a)}\right] \mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s+b)}\right] \neq \mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right]$$

ou seja, os sistemas amostrados das figuras 6.25(a) e (b) são diferentes pois suas respectivas funções de transferência são diferentes. Este resultado pode ser generalizado. Em geral, para quaisquer funções $G_1(s)$ e $G_2(s)$

$$\mathcal{Z}[G_1(s) G_2(s)] \neq \mathcal{Z}[G_1(s)] \mathcal{Z}[G_2(s)]$$

Exemplo 6.19 Prove o resultado da equação (6.17).

Solução: Definindo $H(s)$ como sendo a transferência da sequência $x(kT)$ para a saída $y(t)$ temos:

$$H(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) = \frac{G(s)}{s} - e^{-Ts} \frac{G(s)}{s}$$

Definindo $h_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$ e lembrando que $\mathcal{L}^{-1}[e^{-Ts}G(s)/s] = h_0(t - T)$ a resposta impulsional é: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = h_0(t) - h_0(t - T)$

Os valores de $h(t)$ nos instantes $t = kT$ formam a seguinte sequência (resposta ao pulso unitário).

$$h(kT) = h_0(kT) - h_0(kT - T)$$

Tomando a Transformada Z de $h(kT)$ vem

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(kT)] = \mathcal{Z}[h_0(kT)] - \mathcal{Z}[h_0(kT - T)]$$

Note que $G(s)$ é um sistema físico e portanto causal. Logo $G(s)/s$ também é causal e portanto $h_0(t) = 0$ para $t < 0$. Assim:

$$\mathcal{Z}[h_0(kT - T)] = \sum_{k=0}^{\infty} h_0(kT - T) z^{-k} = h_0(-T) + h_0(0)z^{-1} + h_0(T)z^{-2} + \dots$$

como $h_0(-T) = 0$ temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[h_0(kT - T)] &= z^{-1}[h_0(0) + h_0(T)z^{-1} + h_0(2T)z^{-2} + \dots] \\ &= z^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} h_0(kT)z^{-k}\right] = z^{-1}\mathcal{Z}[h_0(kT)]\end{aligned}$$

e portanto obtemos o seguinte resultado:

$$\text{para } H(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)$$

$$\text{temos } H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[h_0(kT)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

logo:

$$\underbrace{\mathcal{Z}[x(kT)]}_{X(z)} = H(z) \underbrace{\mathcal{Z}[y(kT)]}_{Y(z)}$$

que é o resultado desejado.

6.9 Sistemas Realimentados

A idéia de sistemas discretos realimentados é análoga a de sistemas realimentados contínuos. Uma estrutura comum de controle de sistemas amostrados está indicada na figura 6.26(a). A figura 6.26(b) mostra uma reinterpretação do sistema em (a) enfatizando as funções executadas pelo computador e medidor digital. A figura 6.26(c) mostra o sistema discreto correspondente aos casos (a),(b). Nos instantes $t = kT$ o modelo discreto possui as mesmas entradas e saídas do sistema contínuo indicado nos casos (a) e (b) e além disso possui a vantagem de poder ser tratado diretamente pela transformada Z. O modelo discreto depende, entre outros fatores, da localização dos conversores A/D e D/A. Para verificar essa afirmação considere os sistemas da figura 6.27 e suponha que estamos interessados nas funções de transferência Pulsadas entre as sequências $r(kT)$ e $c(kT)$ nos casos (a) e (b).

Vamos primeiro considerar o sistema da figura 6.27(a). Para encontrar a função de transferência entre as sequências $e(kT)$ e $c(kT)$ temos

$$C(z) = G(z)E(z) \quad \text{onde } G(z) = \mathcal{Z}[ZOH(s)G(s)]$$

e a função de transferência entre $e(kT)$ e $v(kT)$ é:

$$V(z) = GH(z)E(z) \quad \text{onde } GH(z) = \mathcal{Z}[ZOH(s)G(s)H(s)]$$

Como $E(z) = R(z) - V(z)$ temos:

$$R(z) = E(z) + GH(z)E(z) = (1 + GH(z))\frac{C(z)}{G(z)}$$

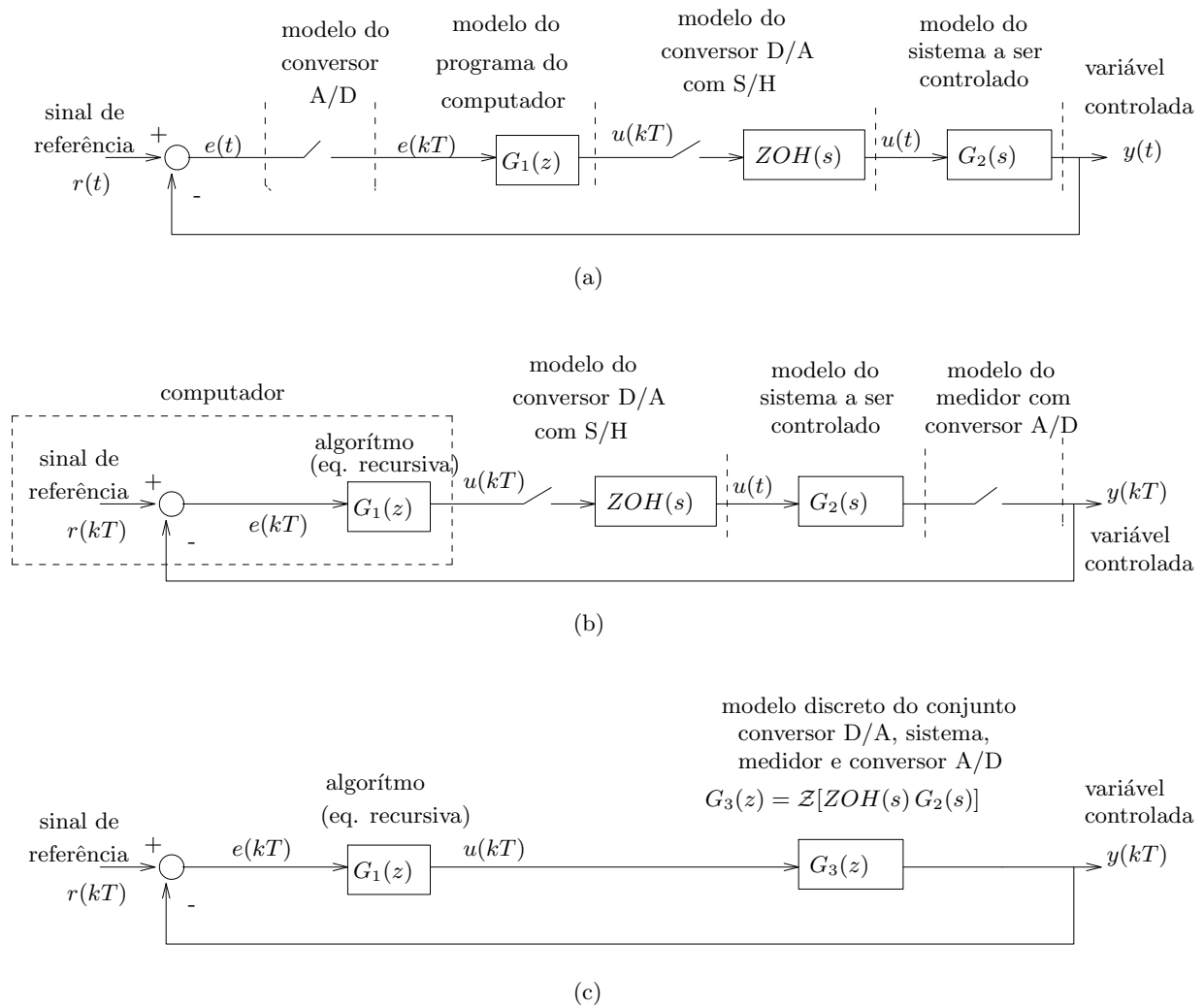


Figura 6.26: Sistema de controle digital e seu modelo discreto

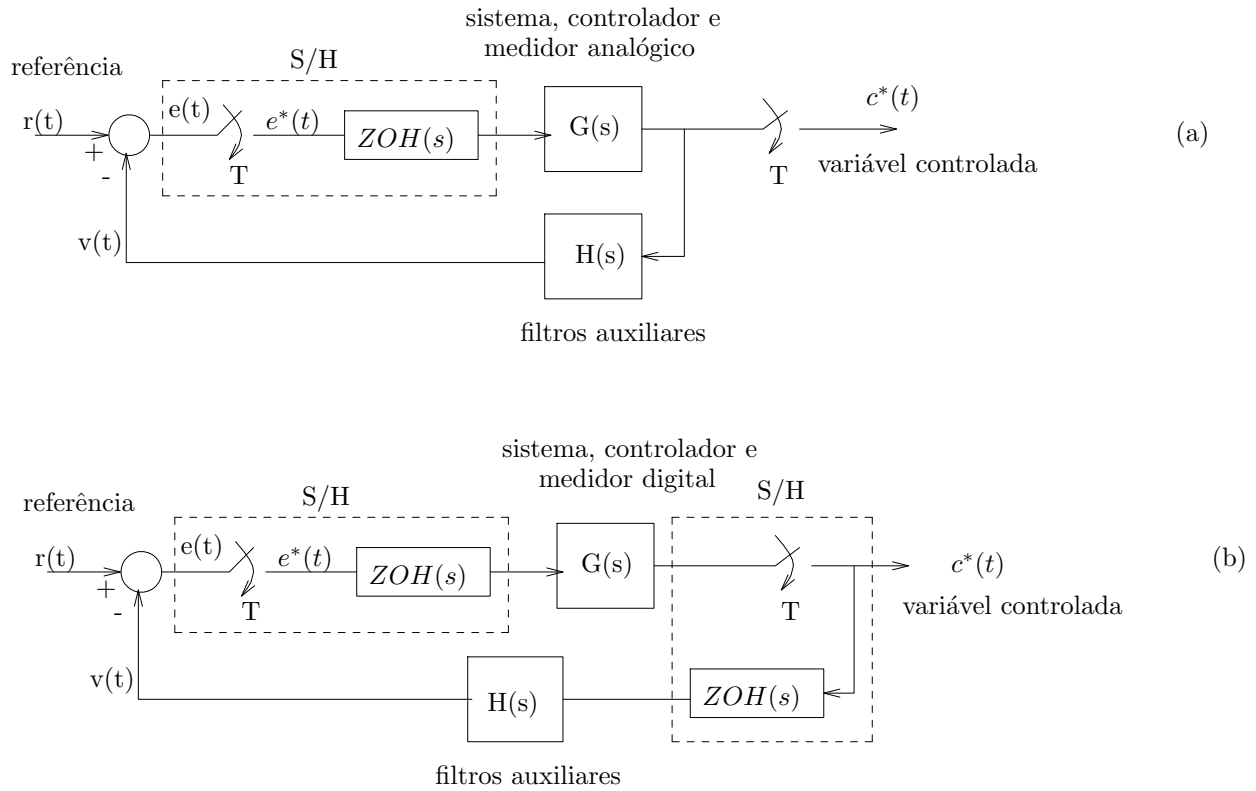


Figura 6.27: Sistema de controle digital com medidor analógico (a) e digital (b)

e portanto:

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z)$$

que expressa a relação entre a sequência $r(kT)$ e $c(kT)$ no sistema da figura 6.27(a).

Passemos agora ao sistema da figura 6.27(b). Para encontrar a função de transferência entre as sequências $e(kT)$ e $c(kT)$ temos

$$C(z) = G(z)E(z) \quad \text{onde } G(z) = \mathcal{Z}[ZOH(s)G(s)]$$

e a função de transferência entre $c(kT)$ e $v(kT)$ é:

$$V(z) = H(z)C(z) \quad \text{onde } H(z) = \mathcal{Z}[ZOH(s)H(s)]$$

Como $E(z) = R(z) - V(z)$ temos:

$$R(z) = \frac{C(z)}{G(z)} + H(z)C(z) = (1 + G(z)H(z)) \frac{C(z)}{G(z)}$$

e portanto:

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} R(z)$$

que expressa a relação entre a sequência $r(kT)$ e $c(kT)$ no sistema da figura 6.27(b).

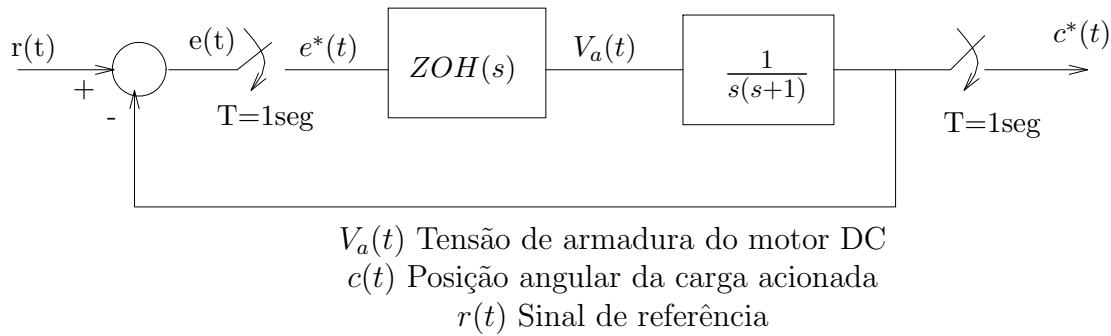


Figura 6.28: Controle digital de posição angular através de um motor DC

Exemplo 6.20 Obtenha a resposta ao degrau unitário $c(kT)$ para o sistema de controle de posição acionado por um Motor DC, como indicado na figura 6.28.

Solução: De um exemplo anterior já vimos que:

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{z^2 - (1 + e^{-1})z + e^{-1}} = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - 1,368z + 0,368}$$

Logo:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - z + 0,632}$$

Para uma entrada degrau unitário $R(z) = \frac{z}{z-1}$ temos:

$$C(z) = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - z + 0,632} \frac{z}{z-1}$$

Por divisão polinomial obtém-se:

$$C(z) = 0,368z^{-1} + z^{-2} + 1,4z^{-3} + 1,4z^{-4} + 1,147z^{-5} + 0,895z^{-6} + 0,802z^{-7} + \dots$$

Problema 6.4 Com o auxílio de uma tabela de transformadas e da transformada inversa encontre a expressão analítica para $c(kT)$ no exemplo 6.20.

Problema 6.5 É importante notar que o método da Transformada Z fornece os valores da saída $c(t)$ apenas nos instantes de amostragem $t = kT$. O valor de $c(t)$ entre instantes de amostragens consecutivos não pode ser obtido pela Transformada Z. Com o auxílio de um programa de simulação verifique que os resultados analíticos obtidos coincidem com o resultado da simulação do sistema de controle indicado no exemplo 6.20.

6.10 Escolha do Período de Amostragem

A melhor escolha do período de amostragem em sistemas de controle é um compromisso entre vários fatores normalmente contraditórios. Normalmente a performance de um

controlador digital melhora com o aumento da frequência de amostragem mas o custo do dispositivo também. Diminuição da frequência de amostragem significa mais tempo disponível para o cálculo do sinal de controle em tempo real, o que possibilita a utilização de computadores mais lentos e portanto mais baratos. Para sistemas com conversores A/D, menor frequência de amostragem significa que menor velocidade de conversão é necessária, o que também diminui o custo do dispositivo. Além disso, normalmente uma grande frequência de amostragem requer uma grande precisão na representação binária (número de bits elevado), o que também aumenta o custo.

Vários fatores afetam a performance de controladores digitais e para que o sistema apresente uma performance mínima aceitável se faz necessário uma frequência de amostragem mínima muito superior àquela fornecida pelo Teorema da Amostragem.

Para o sistema de controle digital da figura 6.26 vamos definir ω_b a frequência de banda passante desejada do sistema em malha fechada e $\omega_a = \frac{2\pi}{T}$ a frequência de amostragem que precisamos utilizar para que a performance do sistema não se deteriore demais em relação à do sistema desejado. A banda passante desejada do sistema deve ser escolhida em função dos requisitos de rapidez de resposta desejados em malha fechada. Então os seguintes fatores impõem um limite mínimo para que ω_a que em muitas aplicações é dado por $\omega_a > 20\omega_b$.

1. Seguir sinais de referência com energia dentro da banda passante do sistema.
2. Tempo de acomodação pequeno e pouca oscilação.
3. Erros devido à perturbações e ruídos que incidem sobre o sistema a ser controlado dificultando o controle adequado.
4. Degradação da estabilidade que aumenta com a diminuição da frequência de amostragem devido à sensibilidade à erros nos parâmetros do modelo. Isto é acentuado ainda mais em conversores com palavra de tamanho pequeno.
5. Introdução de prefiltros (analógicos) de amostragem para atenuar ruídos de medida mas que também podem introduzir defasagens na variável medida dificultando o projeto do controlador em alguns casos.

Para maiores detalhes veja por exemplo [9],[2].

6.11 Resposta em Frequência

Como vimos anteriormente a Transformada Z de um sinal amostrado pode ser definida a partir da Transformada de Laplace do sinal amostrado com a mudança de variável $z = e^{Ts}$. Esta relação mostra como os pólos do plano s de Laplace são mapeados para o plano z .

Exemplo 6.21 O sinal $y(t) = e^{-at} \cos(bt)$, $t \geq 0$ com $aT = 0,3567$ e $bT = \pi/4$ resulta na seguinte sequência para $T = 1 \text{ seg}$.

$$\begin{aligned} y(kT) &= (e^{-3567})^k \cos(\pi k/4), \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ &= 0,7^k \cos(\pi k/4) \end{aligned}$$

Calcule a relação entre os pólos de $Y(s)$ e $Y(z)$.

Solução: Com o auxílio das transformadas de Laplace e Z podemos montar a seguinte tabela:

Pólos de $Y(s)$	Pólos de $Y(z)$
$s_1 = -a - jb$	$z_1 = e^{-aT} e^{-jbT} = e^{s_1 T}$
$s_2 = -a + jb$	$z_2 = e^{-aT} e^{jbT} = e^{s_2 T}$

Pelo exemplo acima confirmamos que se uma transformada $Y(s)$ possui todos os pólos no semiplano negativo (estável) então $Y(z)$ terá todos os pólos dentro do círculo unitário (estável). Se algum pólo de $Y(s)$ está sobre o eixo imaginário ele será mapeado em $Y(z)$ sobre o círculo unitário e finalmente um pólo de $Y(s)$ no semiplano direito (instável) será mapeado em $Y(z)$ na região fora do círculo unitário (instável). Veja figuras 6.15-6.17.

Vimos também que a resposta senoidal em regime permanente de um sistema linear invariante em Laplace é completamente determinada pela Função de Transferência do sistema com $s = j\omega_0$, como indicado nas figuras 4.2 e 4.3. Em outras palavras, a resposta frequencial de um sistema contínuo se obtém fazendo s percorrer todo o eixo imaginário ($s = j\omega$). Como todos os pontos sobre o eixo imaginário são mapeados sobre o círculo unitário da Transformada Z podemos concluímos que a resposta frequencial de um sistema discreto se obtém fazendo z percorrer todo o círculo unitário, isto é, $z = e^{j\omega T}$.

A seguir mostraremos que resultados análogos aos das figuras 4.2 e 4.3 são válidos para sistemas discretos.

Seja o sistema discreto abaixo:

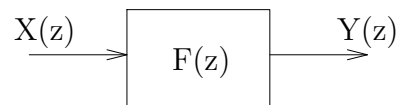


Figura 6.29: Sistema discreto estável

onde $F(z)$ é estável e a entrada é uma sequência senoidal $x(k) = \cos(\omega_0 kT)$, $k \geq 0$. A resposta em regime também será uma cossenóide de mesma frequência porém com amplitude e fase que dependem de $F(z)$ para $z = e^{j\omega_0 T}$. Para mostrar isso vamos representar $F(e^{j\omega_0 T})$ em termos de sua coordenada polar:

$$\begin{cases} |F(e^{j\omega_0 T})| = M \\ \angle F(e^{j\omega_0 T}) = \phi \end{cases} \Rightarrow F(e^{j\omega_0 T}) = M e^{j\phi}$$

Como $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] = \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega_0 T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0 T}} \right]$ temos:

$$Y(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega_0 T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0 T}} \right] F(z)$$

Supondo $F(z)$ estável, isto é, que todos os seus pólos estejam dentro do círculo unitário, a resposta em regime permanente é dada pelos termos da expansão por frações parciais de $Y(z)$ correspondentes aos pólos sobre o círculo unitário, pois todos os outros termos irão desaparecer quando $k \rightarrow \infty$. Dessa forma, expandindo $Y(z)/z$ por frações parciais e desprezando os termos associados aos pólos dentro do círculo unitário ficamos com:

$$Y_{ss}(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega_0 T}} F(e^{j\omega_0 T}) + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0 T}} F(e^{-j\omega_0 T}) \right]$$

Como $F(e^{j\omega_0 T}) = Me^{j\phi}$ é uma constante e $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-a} \right] = a^k$ vem:

$$\begin{aligned} y_{ss}(kT) &= \frac{1}{2} [(e^{j\omega_0 kT})Me^{j\phi} + (e^{-j\omega_0 kT})Me^{-j\phi}] \\ &= M \cos(\omega_0 T k + \phi) \end{aligned}$$

onde $M = |F(e^{j\omega_0 T})|$ e $\phi = \angle F(e^{j\omega_0 T})$.

Assim de forma análoga à resposta frequencial de sistemas contínuos temos: onde

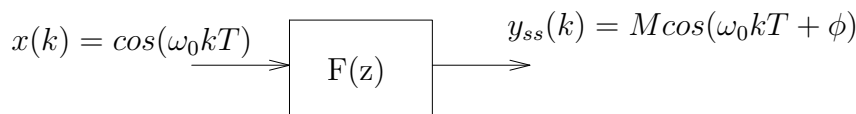


Figura 6.30: Resposta frequencial de um sistema discreto

$M = |F(e^{j\omega_0 T})|$ e $\phi = \angle F(e^{j\omega_0 T})$ (em regime).

Um resultado análogo pode ser obtido para entradas senoidais.

6.12 Problemas Complementares

Problema 6.6 O sinal de entrada do circuito na figura 6.31 é constante por trechos, isto é $v(t) = v(kT)$ para $kT \leq t < kT + T$. Sendo $T = 1$ segundo pede-se: (i) a equação recursiva que define o comportamento entrada/saída nos instantes $t = kT$; (ii) a função de transferência discreta; (iii) a resposta de estado zero ao degrau de 10 volts; (iv) a resposta de entrada zero para $v_c(0) = 1V$, $v_c(T) = 0V$; (v) a resposta total para uma entrada degrau unitário e condições iniciais $v_c(0) = 3V$, $v_c(T) = 0V$.

Problema 6.7 O sistema da figura 6.32 mostra um esquema de controle de velocidade de um motor DC controlado pela armadura. O período de amostragem é de $T = 1$ seg e o computador executa um algoritmo de controle descrito pela equação recursiva $u(kT) - 0,5u(kT - T) = e(kT)$. A indutância de armadura do motor pode ser desprezada

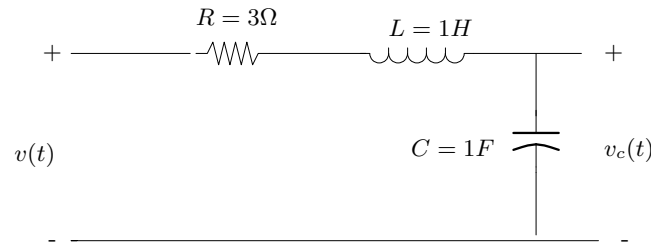


Figura 6.31: Circuito RLC com entrada constante por trechos

e portanto a dinâmica da velocidade do motor em função da tensão de armadura pode ser representada pela equação diferencial $\dot{w}(t) + 2w(t) = v_a(t)$. Pedese: (i) a função de transferência discreta de malha fechada; (ii) verifique se o sistema é estável e justifique sua resposta; (iii) a velocidade de regime permanente do motor quando o sinal de referência é um degrau unitário.

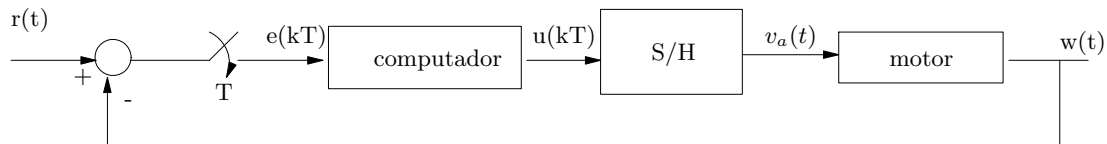


Figura 6.32: Sistema de controle de velocidade

Problema 6.8 A resposta de um sistema linear invariante ao degrau de amplitude dois e certas condições iniciais é $y_1(k) = 2 + 1,4616(0,0729)^k - 2,4616(0,682)^k$ onde $k \geq 0$. Para um degrau unitário e o dobro das condições iniciais a resposta é $y_2(k) = 1 + 2,4102(0,0729)^k - 1,4102(0,682)^k$. Pedese (no domínio do tempo):

- (i) A equação recursiva do sistema.
- (ii) A resposta ao pulso unitário.
- (iii) A resposta de estado zero na situação 1.
- (iv) A resposta de entrada zero na situação 1.
- (v) As condições iniciais da situação 1.

Problema 6.9 Verifique se os sistemas da figura 6.33 são estáveis. Justifique sua resposta.

Problema 6.10 Seja $x(k)$ uma sequência onde $x(k) = 0, \forall k < 0$. Mostre que :

- (a) $\mathcal{Z}[x(k+1)] = \mathcal{Z}[x(k)]z - x(0)z$
- (b) $\mathcal{Z}[x(k-1)] = \mathcal{Z}[x(k)]z^{-1}$

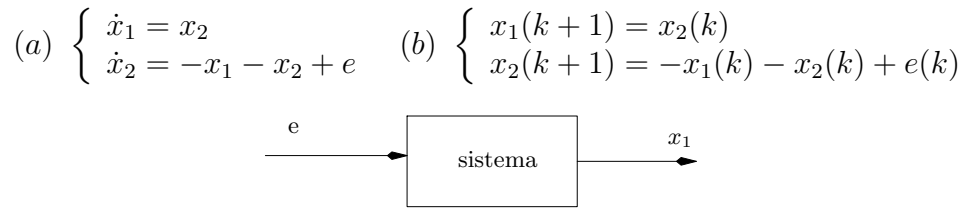
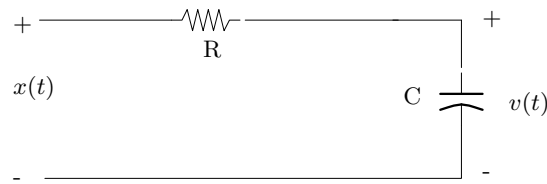


Figura 6.33: Caracterização entrada/saída dos sistemas

Problema 6.11 Considere o sistema da figura 6.34. Seja $x(t)$ um sinal de tensão constante por trechos, isto é, $x(t) = x(kT)$ para $kT \leq t < kT + T$. Pede-se:

- (a) A função de transferência pulsada entre $x(kT)$ e $v(kT)$.
- (b) A equação recursiva que descreve o comportamento dinâmico entre $x(kT)$ e $v(kT)$.
- (c) A resposta de entrada zero para $v(0) = 1V$.
- (d) A resposta de estado zero para $x(kT) = e^{-2kT}$, $x(k) = 0$, $\forall k < 0$.

Figura 6.34: Entrada: tensão $x(t)$; saída: tensão $v(t)$; $R=1 \Omega$, $C=1 F$

Problema 6.12 Calcule a resposta $y(kT)$ de regime permanente no sistema da figura 6.35.

- a) para $x(k)$ um degrau unitário.
- b) para $x(k) = \sin(10k)$

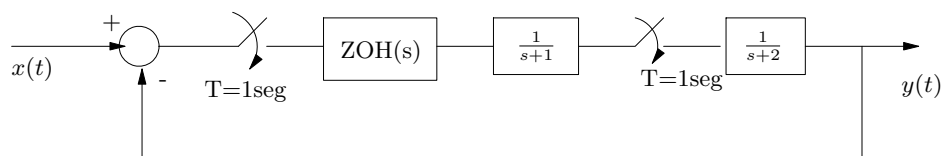


Figura 6.35: Sistema de controle

Bibliografia

- [1] K. OGATA, *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice Hall 1993.
- [2] K. OGATA, *Discrete Time Control Systems*, Prentice Hall, 1995.
- [3] C.T. CHEN, *System and Signal Analysis*, Saunders 1989.
- [4] A.V. OPPENHEIM, A.S. WILLSKY, *Signal and Systems*, Prentice Hall 1983.
- [5] B.P. LATHI, *Sistemas de Comunicação*, Editora Guanabara, 1987.
- [6] J.J. d' Azzo, C.H.Houpis, *Análise e projeto de sistemas de controle lineares*, Editora Guanabara 1988.
- [7] K.A.STROUD, *Engineering mathematics*, MacMillan Press, 1995.
- [8] R.T.STEFANI, C.L.SAVANT, B.SHAHIAN, G.H.HOSTETTER, *Design of feedback control systems*, Saunders College Publishing, 1994.
- [9] G.F.Franklin, J.D.Powell, M.L.Workman, *Digital control of Dinamic Systems*, Addison-Wesley, 1990.