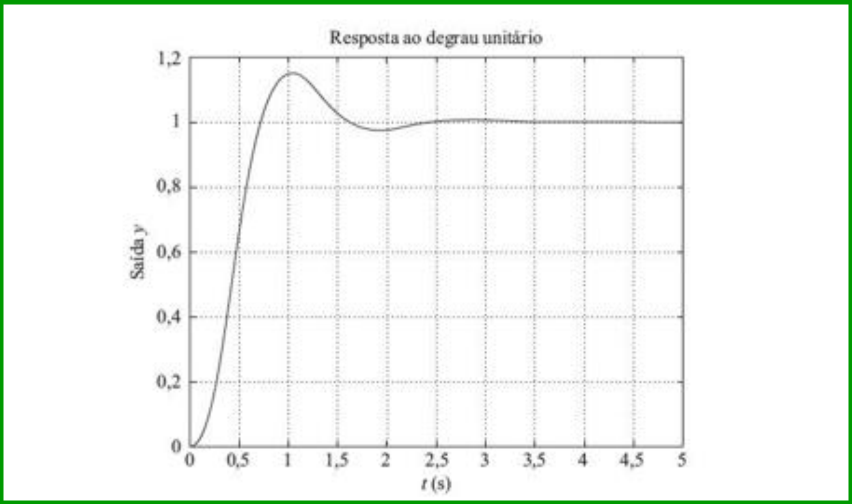
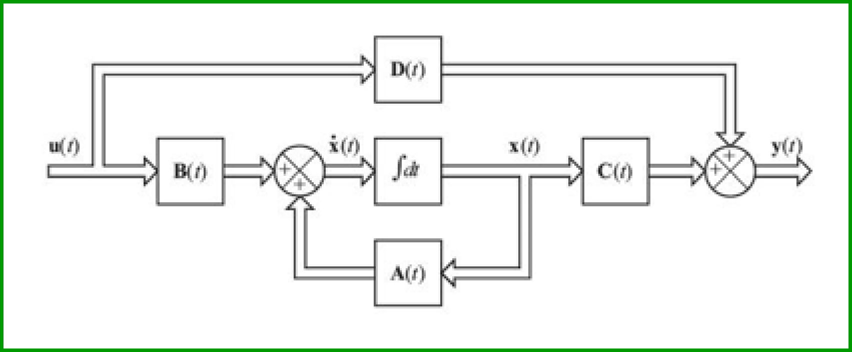
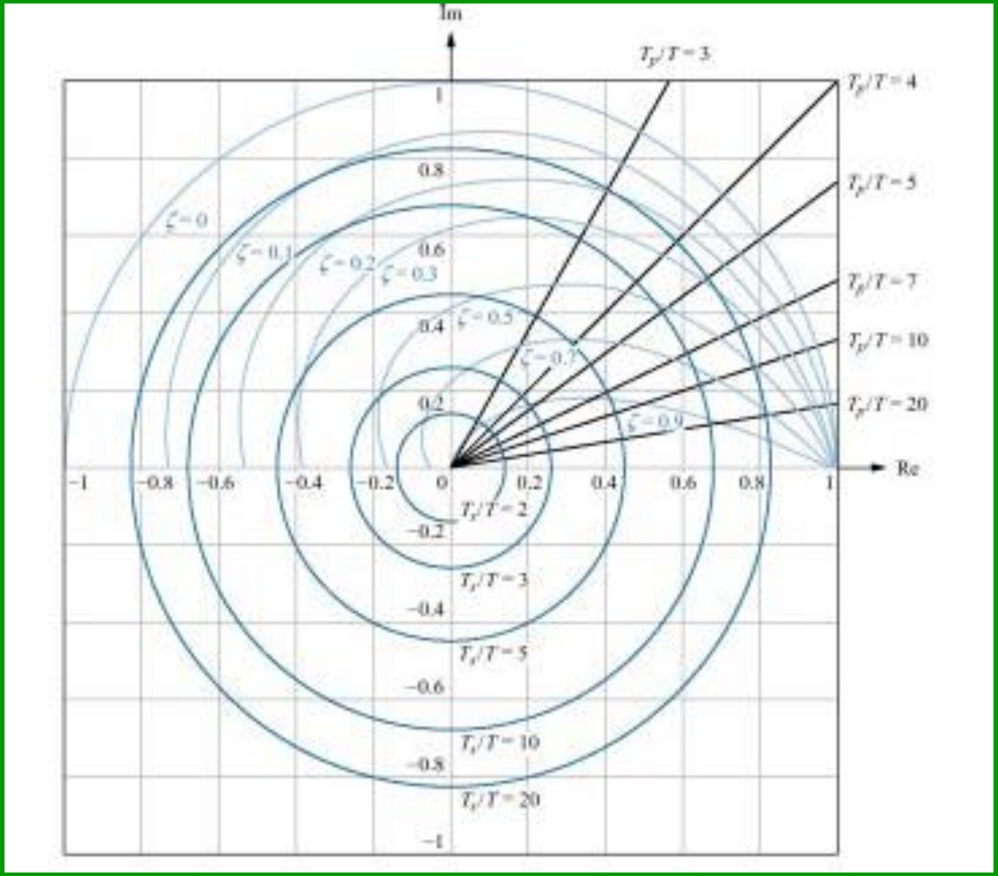
Projeto de Controladores Digitais







Flábio A. B. Batista - flabio@ifsc.edu.br

Projeto de Controlador por Método Analítico

Vamos apresentar um método de projeto analítico para controladores digitais que vai forçar a sequência de erro, quando sujeita a uma entrada de tipo específico no domínio do tempo, a tornar-se zero após um número finito de períodos de amostragem e, de fato, tornar-se zero e permanecer em zero após o número mínimo de períodos de amostragem.

Se a resposta de um sistema de controle em malha fechada a uma entrada degrau exibir o tempo de acomodação mínimo possível (isto é, a saída atinge o valor final no tempo mínimo e permanece lá), sem erro em regime permanente, sem oscilações entre os instantes de amostragem, então este tipo de resposta é comumente denominada de resposta deadbeat.

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto de Controladores Digitais para Tempo de Acomodação Mínimo com Erro Nulo em Regime Permanente

Considere o sistema de controle digital mostrado na Fig. 1.

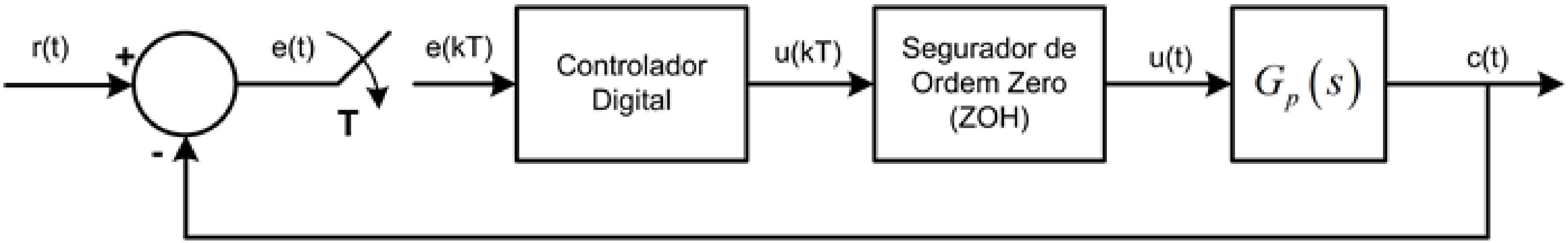


Fig. 1 Sistema de controle digital

O sinal de erro e(t), que é a diferença entre a entrada r(t) e a saída c(t), é amostrado a cada intervalo de tempo T. A entrada do controlador digital é o sinal de erro e(kT). A saída do controlador digital é o sinal de controle u(kT). O sinal de controle u(kT) é injetado no Segurador de Ordem Zero (ZOH), e a saída é o sinal u(t), que é contínuo por trechos, é injetado na planta.

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto de Controladores Digitais

Deseja-se projetar um controlador digital $G_D(z)$, de maneira que o sistema de controle em malha fechada vai apresentar o menor tempo de acomodação possível com erro nulo em regime permanente para uma entrada em degrau, rampa ou parábola. É requisito também que a saída do sistema não exiba ondulações (ripple) entre amostras depois de que o regime permanente tenha sido atingido. O sistema deve satisfazer quaisquer outras especificações, caso seja necessário, como uma especificação para constante de erro estático de velocidade.

Vamos definir a transformada z da planta que é precedida pelo ZOH como G(z), ou:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} G_p(s)\right]$$

Assim, a função de transferência pulsada torna-se $G_D(z)G(z)$, como mostra a Fig. 2.

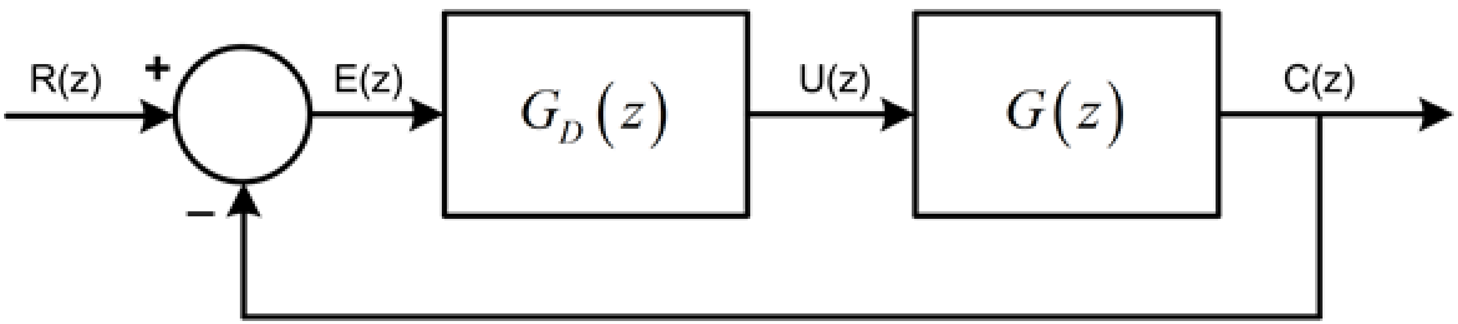


Fig. 2 – Diagrama mostrando o sistema de controle digital equivalente

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto de Controladores Digitais

A seguir, defina função de transferência pulsada de malha fechada desejada como $F(z)$:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1+G_D(z)G(z)} = F(z) \qquad [1]$$

Como é necessário que o sistema exiba um tempo de acomodação finito com erro nulo em regime, o sistema deve apresentar uma resposta finita ao impulso. Portanto, a função de transferência pulsada de malha fechada deve ser da seguinte forma:

$$F(z) = \frac{a_0 z^N + a_2 z^{N-1} + \cdots + a_N}{z^N} \qquad [2]$$

$$F(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}$$

Onde $N \geq n$ e n é a ordem do sistema.

Na nossa abordagem de projeto, resolvemos a função de transferência pulsada de malha fechada para a função de transferência do controlador $G_D(z)$. Isto é, determinamos a função de transferência pulsada $G_D(z)$ que vai satisfazer a equação [1] para $G_D(z)$:

$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)\left[1-F(z)\right]} \qquad [3]$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

O sistema projetado deve ser fisicamente realizável. As condições para realização física impõem certas restrições na função de transferência pulsada de malha fechada F(z) e na função de transferência do controlador $G_D(z)$. As condições para realização física são:

1. A ordem do numerador de $G_D(z)$ deve ser igual ou menor que a ordem do denominador. (se for diferente, o controlador requer dados de entrada futuros para produzir a saída atual).
2. Se a planta $G_p(z)$ envolver um atraso de transporte e^{-Ls}, então o sistema de malha fechada projetado deve envolver pelo menos a mesma magnitude do atraso de transporte. (se for diferente, o sistema em malha fechada teria de responder antes que uma entrada fosse aplicada, o que é impossível para um sistema fisicamente realizável).

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

3. Se $G(z)$ for expandido em uma série em z^{-1}, o termo de menor potência na expansão em série de $F(z)$ em z^{-1} deve ser pelo menos tão grande quanto aquele de $G(z)$. Por exemplo, se uma expansão de $G(z)$ em uma série em z^{-1} começar com o termo z^{-1}, então o primeiro termo de $F(z)$ dado pela equação [2] deve ser zero, ou a_0 deve ser igual a zero; isto é, a expansão deve ser da seguinte forma

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$$

onde $N \geq n$ e n é a ordem do sistema. Isto significa que a planta não pode responder instantaneamente quando um sinal de controle de magnitude finita é aplicado: a resposta vem com um delay de pelo menos um período de amostragem se a expansão em série de $G(z)$ começa com um termo em z^{-1}.

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Além das condições de realização física, devemos atentar para os aspectos de estabilidade do sistema. Especificamente, devemos evitar o cancelamento de um pólo instável da planta por um zero do controlador digital. Se tal cancelamento for tentado, quaisquer erros no cancelamento de pólo-zero irá divergir à medida que o tempo passa e o sistema vai se tornar instável. De maneira similar, a função de transferência pulsada do controlador digital não deve envolver pólos instáveis para cancelar zeros da planta que ficam fora do círculo unitário.

A seguir, vamos investigar o que acontecerá à função de transferência pulsada de malha fechada $F(z)$ se $G(z)$ envolver um pólo instável (ou criticamente estável), isto é, um pólo $z=\alpha$ fora (ou sobre) o círculo unitário.

OBS.: Perceba que o argumento seguinte se aplica igualmente, se $G(z)$ envolve dois ou mais pólos instáveis – ou criticamente estáveis.

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Vamos definir:

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{z-\alpha}$$

onde $G_1(z)$ não inclui um termo que se cancela com $z-\alpha$. Então, a função de transferência pulsada de malha fechada fica:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1+G_D(z)G(z)} = \frac{G_D(z)\frac{G_1(z)}{z-\alpha}}{1+G_D(z)\frac{G_1(z)}{z-\alpha}} = F(z) \qquad [4]$$

Como é necessário que nenhum zero de $G_D(z)$ cancele o pólo instável de $G(z)$ em $z=\alpha$, devemos ter:

$$1-F(z) = \frac{1}{1+G_D(z)\frac{G_1(z)}{z-\alpha}} = \frac{z-\alpha}{z-\alpha+G_D(z)G_1(z)}$$

Isto é, $1-F(z)$ deve ter $z=\alpha$ como um zero. Além disso, pode-se perceber, a partir da Eq. [4], que se zeros de $G(z)$ não cancelam pólos de $G_D(z)$, os zeros de $G(z)$ se tornam zeros de $F(z)$. [$F(z)$ pode envolver zeros adicionais].

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Agora vamos proceder com o projeto. Como $e(kT) = r(kT) - c(kT)$, de acordo com a Eq. [1] temos:

$$E(z) = R(z) - C(z) = R(z)\left[1 - F(z)\right] \qquad [5]$$

Para uma entrada degrau unitário $r(t) = 1(t)$:

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Para uma entrada rampa unitária $r(t) = t1(t)$

$$R(z) = \frac{Tz}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$$

Para uma entrada parábola unitária $r(t) = \frac{1}{2}t^2 1(t)$

$$R(z) = \frac{T^2 z^{-1}\left(1 + z^{-1}\right)}{2\left(1 - z^{-1}\right)^3}$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Assim, geralmente, as transformadas z destas entradas polinomiais no domínio do tempo podem ser escritas como:

$$R(z) = \frac{P(z)}{\left(1 - z^{-1}\right)^{q+1}} \qquad [6]$$

onde $P(z)$ é um polinômio em z^{-1}. Perceba que para uma entrada degrau unitário: $P(z)=1$ e $q=0$; para uma entrada rampa unitária, $P(z)=Tz^{-1}$ e $q=1$; e para uma entrada parábola unitária, $P(z)=\frac{1}{2}T^2z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)$ e $q=2$.

Pela substituição da Eq. [6] na Eq. [5]:

$$E(z) = \frac{P(z)\left[1 - F(z)\right]}{\left(1 - z^{-1}\right)^{q+1}} \qquad [7]$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Para garantir que o sistema atinja o regime permanente em um número finito de períodos de amostragem e mantenha erro zero em regime permanente, $E(z)$ deve ser um polinômio em z^{-1} com um número finito de termos. Então, com relação à Eq. [7], escolhemos que a função $1-F(z)$ seja da forma:

$$1-F(z)=\left(1-z^{-1}\right)^{q+1}N(z) \qquad [8]$$

onde $N(z)$ é um polinômio em z^{-1} com um número finito de termos. Então:

$$E(z)=P(z)N(z) \qquad [9]$$

Que é um polinômio em z^{-1} com um número finito de termos. Isto significa que o sinal de erro se torna zero em um número finito de períodos de amostragem.

A partir da análise precedente, a função de transferência pulsada do controlador digital pode ser determinada da seguinte maneira. Ao fazer com que $F(z)$ satisfaça as condições de realização física e de estabilidade e então substituindo a Eq. [8] na Eq. [3], obtemos:

$$G_D(z)=\frac{F(z)}{G(z)\left(1-z^{-1}\right)^{q+1}N(z)} \qquad [10]$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Exemplo 4-13

Considere o sistema de controle digital mostrado na Fig. 1, onde a função de transferência $G_P(s)$ é dada por:

$$G_P(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Projete um controlador digital de maneira que o sistema em malha fechada apresente uma resposta do tipo deadbeat para uma entrada de degrau unitário. (Em uma resposta deabbeat, o sistema não pode apresentar oscilações entre amostras após o tempo de acomodação ter sido alcançado.) O período de amostragem adotado é de T = 1 s. Utilizando o controlador digital projetado $G_D(z)$, analise a resposta deste sistema para uma entrada do tipo rampa unitária.

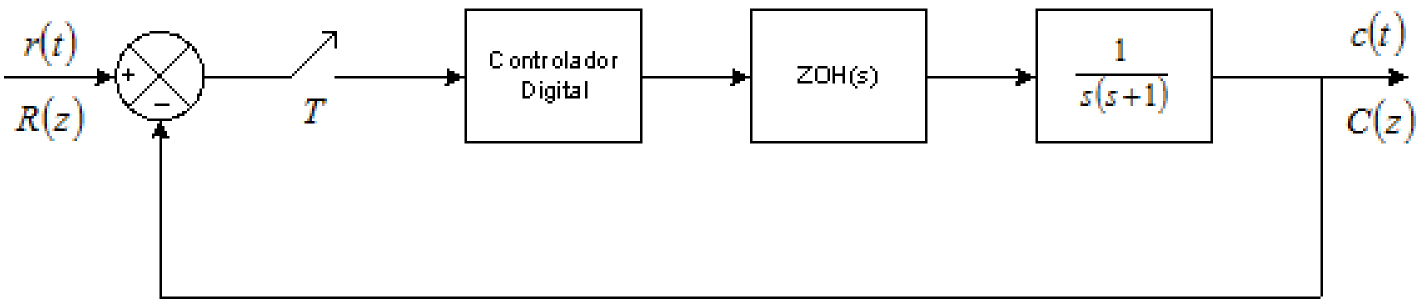


Fig. 1 – Sistema de controle digital.

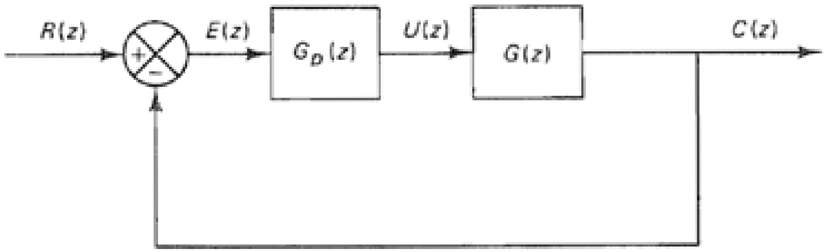
Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Solução:

Já que o período de amostragem é T=1s, a função de transferência pulsada G(z) da planta precedida pelo segurador de ordem zero (ZOH) pode ser obtida:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,\frac{1}{s(s+1)}\right] \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\ &= (1-z^{-1})\left[\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-0.3679z^{-1}}\right] \\ &= \frac{0.3679(1+0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.3679z^{-1})} \end{aligned}$$

Redesenhando o diagrama de controle da Fig.1, determina-se a função de transferência de malha fechada F(z).



Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)G(z)}{1 + G_D(z)G(z)} = F(z)$$

Se G(z) for expandido em série de z^{-1}, o primeiro termo será 0,3679 z^{-1}. Então, F(z) precisa começar com um termo em z^{-1}. Como o sistema é de segunda ordem, assume-se que F(z) é da seguinte forma:

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

Para uma entrada do tipo degrau unitário, é preciso que:

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})N(z)$$

Desde que G(z) tem um polo criticamente estável em z = 1, o requisito de estabilidade para 1 – F(z) precisa ter um zero em z = 1. Como a função 1 – F(z) já tem o termo 1 - z^{-1}, este requisito já é satisfeito.

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Como o sistema não pode apresentar oscilações entre amostras após o tempo de acomodação ter sido alcançado, precisa-se que c(t ≥ 2) seja constante. Notando que em u(t), a saída do segurador de ordem zero, é uma função contínua no tempo, a saída constante em c(t ≥ 2) requer que u(t) também seja constante para t ≥ . Em termos de transformada z, U(z) precisa ser da seguinte forma em z^{-1}.

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b(z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \cdots)$$

Como a função de transferência G(s) possui um integrador, b precisa ser zero (caso contrário, a saída não permanecerá constante). Consequentemente:

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

Da Fig. 1, U(z) pode ser dado por:

$$U(z) = \frac{C(z)}{G(z)} = \frac{C(z)}{R(z)} \frac{R(z)}{G(z)} = F(z) \frac{R(z)}{G(z)}$$

$$= F(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}$$

$$= F(z) \frac{1 - 0.3679z^{-1}}{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Para U(z) ser uma série em z^{-1} com apenas dois termos, F(z) precisa ser da seguinte forma:

$$F(z) = (1 + 0.7181z^{-1})z^{-1} F_1$$

Onde F_1 é uma constante. Então, U(z) pode ser escrito como:

$$U(z) = 2.7181(1 - 0.3679z^{-1})F_1$$

Esta equação dá U(z) em termo de F_1. Uma vez que a constante F_1 for determinada, U(z) pode ser dado como uma série em z^{-1} com apenas dois termos.

Das equações de F(z) e 1 – F(z), temos:

$$1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} = (1 - z^{-1})N(z)$$

O lado esquerdo desta equação deve ser divisível por $1 - z^{-1}$. Se o lado esquerdo da equação for dividido por $1 - z^{-1}$, o cociente é $1 + (1 - a_1)z^{-1}$ e o resto é $(1 - a_1 - a_2)z^{-2}$. Então N(z) é determinado como:

$$N(z) = 1 + (1 - a_1)z^{-1}$$

Para que o resto seja zero:

$$1 - a_1 - a_2 = 0$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Como:

$$F(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 + 0.7181z^{-1})z^{-1} F_1$$

Então,

$$a_1 + a_2 z^{-1} = (1 + 0.7181z^{-1})F_1$$

Dividindo o lado esquerdo da equação por $1 + 0.7181z^{-1}$ resulta como cociente a1 e o resto igual a $(a_2 - 0.7181a_1)z^{-1}$. Igualando o cociente a F_1 e o resto a zero, temos:

$$F_1 = a_1$$

e

$$a_2 - 0.7181a_1 = 0$$

Resolvendo o sistema de equações resultantes, obtêm-se:

$$a_1 = 0.5820, \qquad a_2 = 0.4180$$

Então, F(z) é determinada como

$$F(z) = 0.5820z^{-1} + 0.4180z^{-2},$$

$$F_1 = 0.5820$$

e

$$N(z) = 1 + 0.4180z^{-1}$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto de Controladores Digitais

A função de transferência do controlador digital é determinada como:

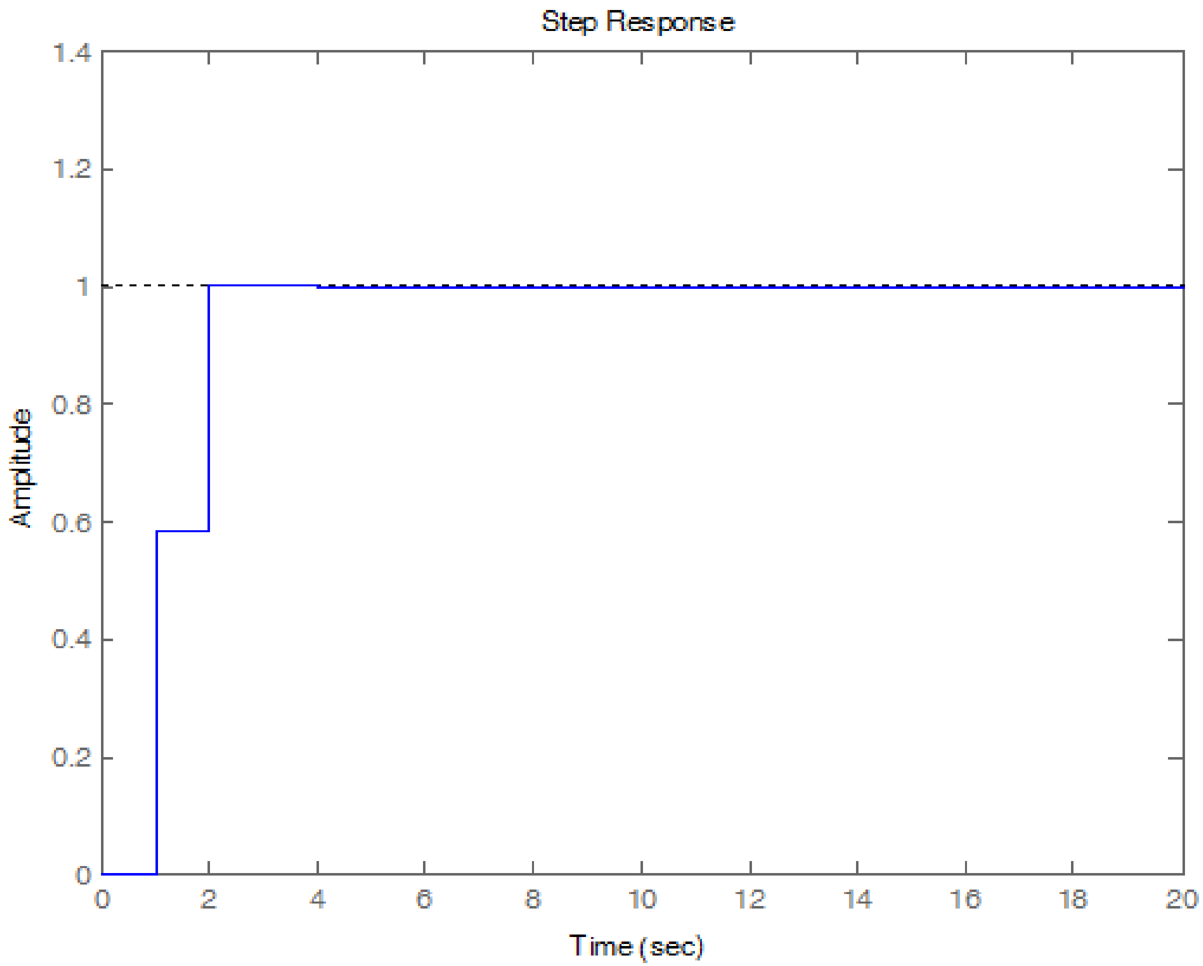
$$G_D(z) = \frac{F(z)}{G(z)(1 - z^{-1})N(z)}$$

$$= \frac{(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}(0.5820)}{\dfrac{0.3679(1 + 0.7181z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}(1 - z^{-1})(1 + 0.4180z^{-1})}$$

$$= \frac{1.5820 - 0.5820z^{-1}}{1 + 0.4180z^{-1}}$$

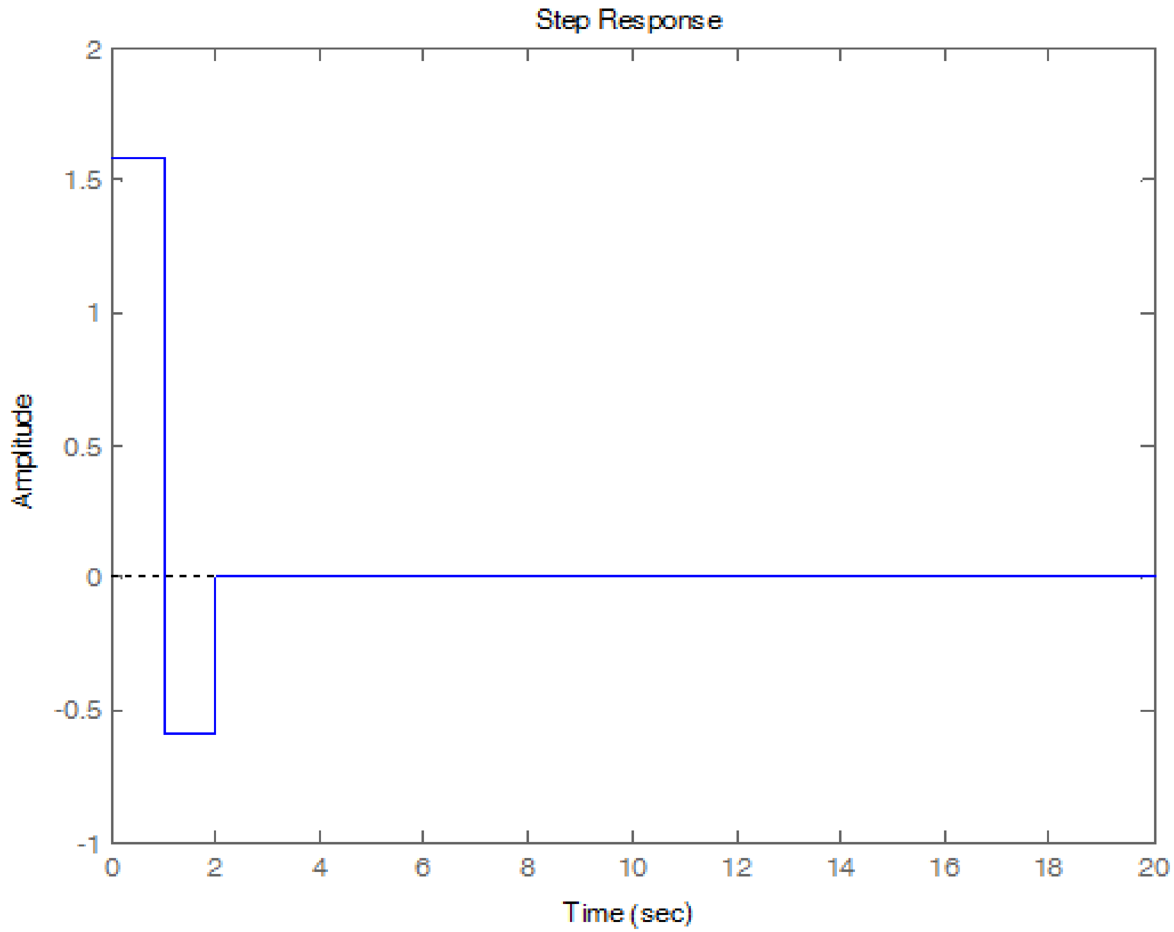
Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Reposta ao degrau para a saída



Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Reposta ao degrau para a ação de controle



Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems