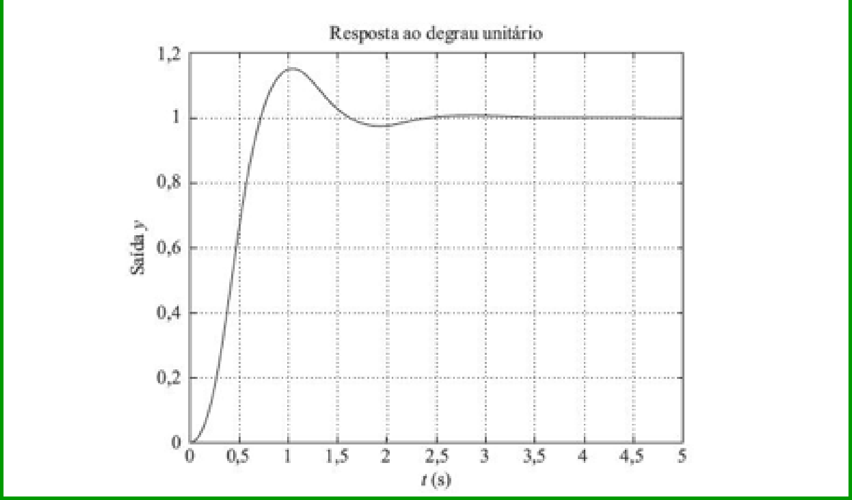
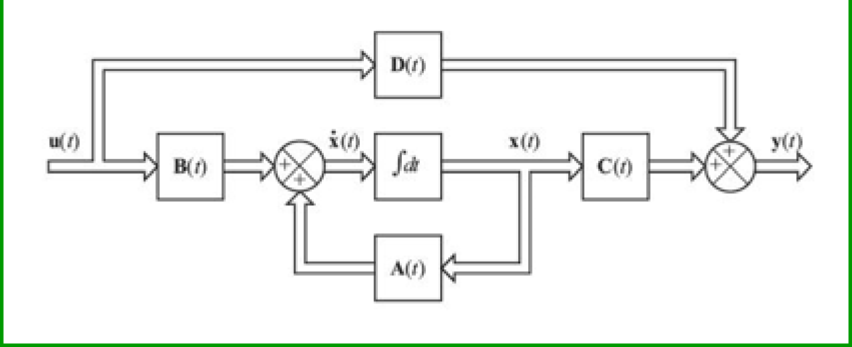
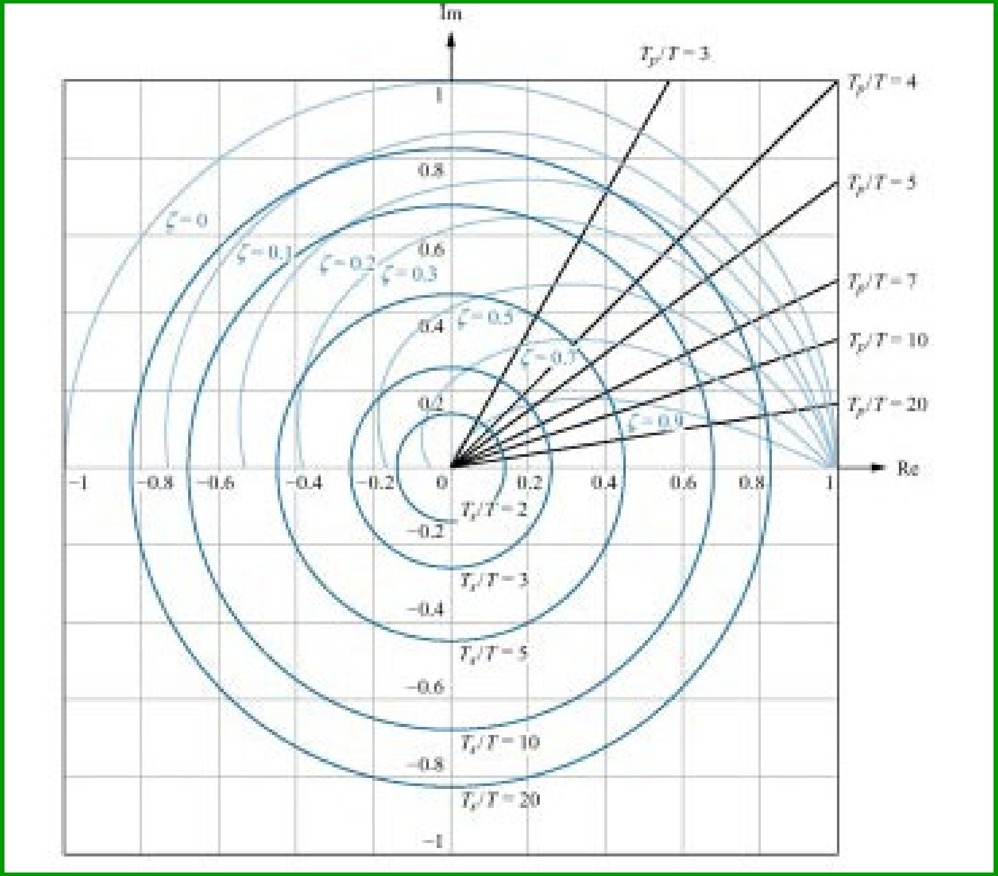
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA
CURSO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA
SCT- 22108 – SISTEMAS DE CONTROLE II

Projeto de Controladores Digitais







Flábio A. B. Batista - flabio@ifsc.edu.br

Projeto Baseado no Método do Lugar das Raízes

Exemplo 4-9

Considere o sistema de controle digital mostrado na Fig. 1. No plano z, projete um controlador digital de maneira que os pólos de malha fechada dominantes tenham um coeficiente de amortecimento ζ=0,5 e um tempo de acomodação de 2s. O período de amostragem adotado é de T=0,2s. Obtenha a resposta do sistema de controle digital projetado para uma entrada degrau unitário. Obtenha também a constante de erro estático de velocidade K_v do sistema.

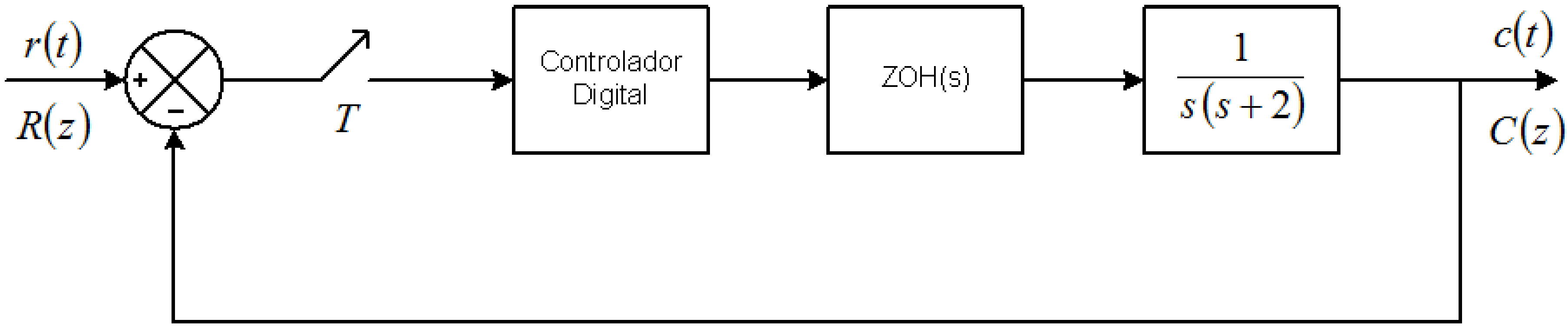


Fig. 1 – Sistema de controle digital.

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Solução:

Para um sistema de segunda-ordem que possua um par de pólos dominantes de malha fechada, um tempo de acomodação de 2s significa que:

$$t_S = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0{,}5\omega_n} = 2$$

que nos fornece a freqüência natural não-amortecida ω_n dos pólos dominantes de malha fechada como:

$$\omega_n = 4 \text{ rad/s}$$

A freqüência natural amortecida ω_d é calculada então:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4\sqrt{1-0{,}5^2} = 3{,}464$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Como o período de amostragem T=0,2s, termos:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi = 31{,}42$$

Como $\frac{\omega_s}{\omega_d} = \frac{31{,}42}{3{,}464} = 9{,}07$, temos, aproximadamente, nove amostras por ciclo da oscilação amortecida. Portanto, um período de amostragem de 0,2s é satisfatório.

Agora vamos localizar os pólos dominantes de malha fechada no plano z. Referindo-se às equações abaixo:

$$|z| = e^{-T\zeta\omega_n}$$

$$\angle z = T\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = T\omega_d = \theta\ (\text{rad})$$

E considerando um coeficiente de amortecimento constante temos:

$$|z| = e^{-T\zeta\omega_n} = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right) \quad \text{e} \quad \angle z = T\omega_d = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto de Controladores Digitais

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

Para as especificações fornecidas (ζ=0,5 e $\omega_d = 3{,}464$), o módulo e o ângulo do pólo dominante de malha fechada no semiplano superior do plano z são determinados da seguinte maneira:

$$|z| = \exp\left(-\frac{2\pi \cdot 0{,}5}{\sqrt{1-0{,}5^2}}\,\frac{3{,}464}{31{,}42}\right) = e^{-0{,}4} = 0{,}6703$$

E

$$\angle z = 2\pi\,\frac{3{,}464}{31{,}42} = 0{,}6927\ rad = 39{,}69^\circ$$

Agora podemos localizar o pólo dominante de malha fechada desejado no semiplano superior do plano z, que chamaremos de ponto z1.

z1=$0{,}6703\angle 39{,}69^\circ = 0{,}5158 + j0{,}4281$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto pelo Lugar das Raízes

Polo desejado:

$$s = -\zeta \cdot \omega_n + j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$$

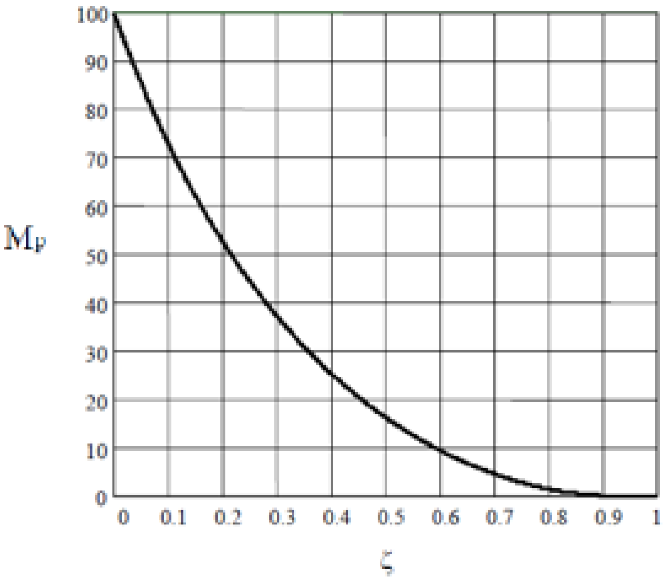
$$M_P = e^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$t_{S5\%} = 3\tau = \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n}$$

$$t_{S2\%} = 3{,}9\tau = \frac{3{,}9}{\zeta \cdot \omega_n}$$

$$t_{S1\%} = 4{,}6\tau = \frac{4{,}6}{\zeta \cdot \omega_n}$$

$$z = e^{Ts}$$

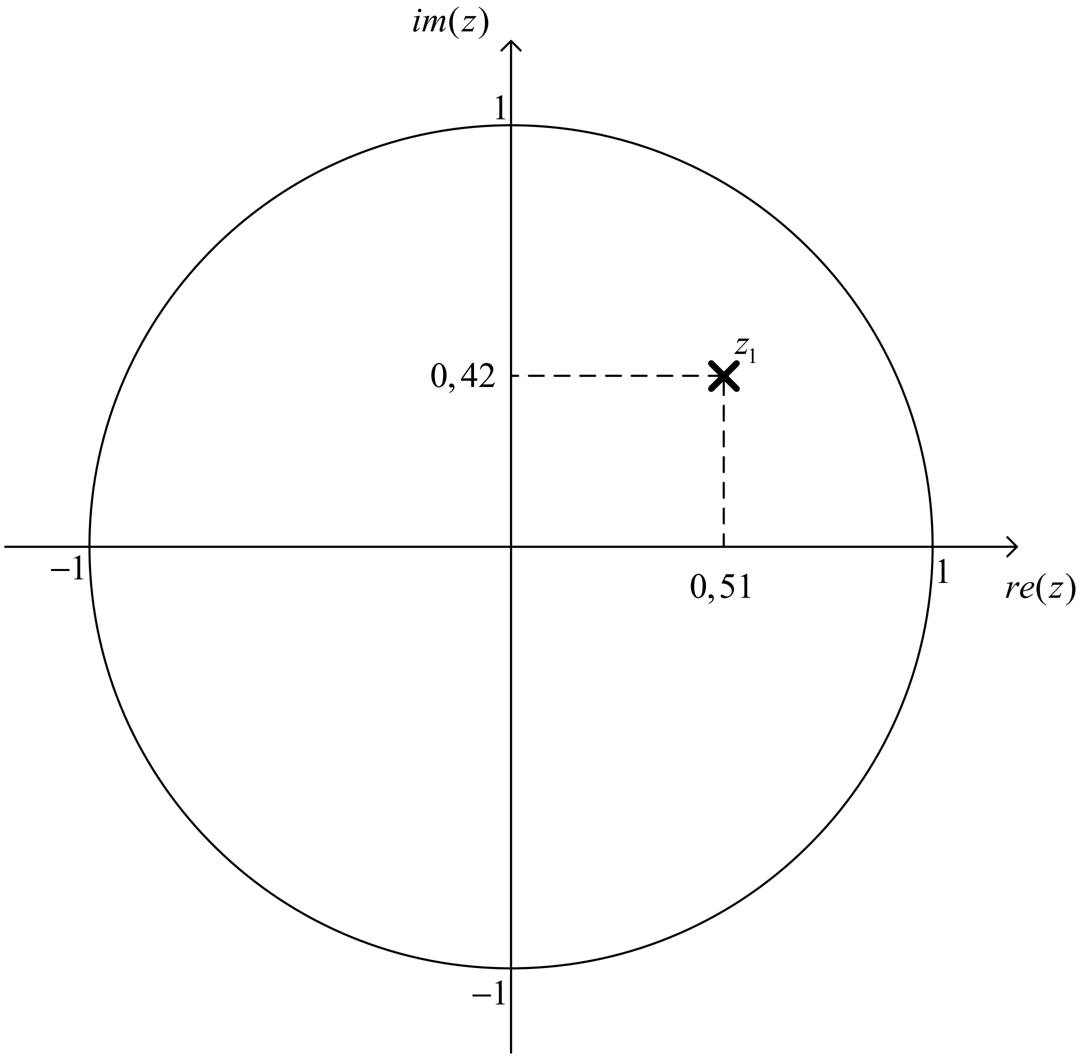


Projeto de Controladores Digitais

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

Pólo desejado:

Plano z



Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Já que o período de amostragem é T = 0,2 s, a função de transferência pulsada G(z) da planta precedida pelo segurador de ordem zero (ZOH) pode ser obtida:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-0,2s}}{s} \quad \frac{1}{s(s+2)}\right] = \left(1-z^{-1}\right) \quad \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right]$$

Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$, temos:

$$G(z) = \frac{0,01758(z+0,8760)}{(z-1)(z-0,6703)}$$

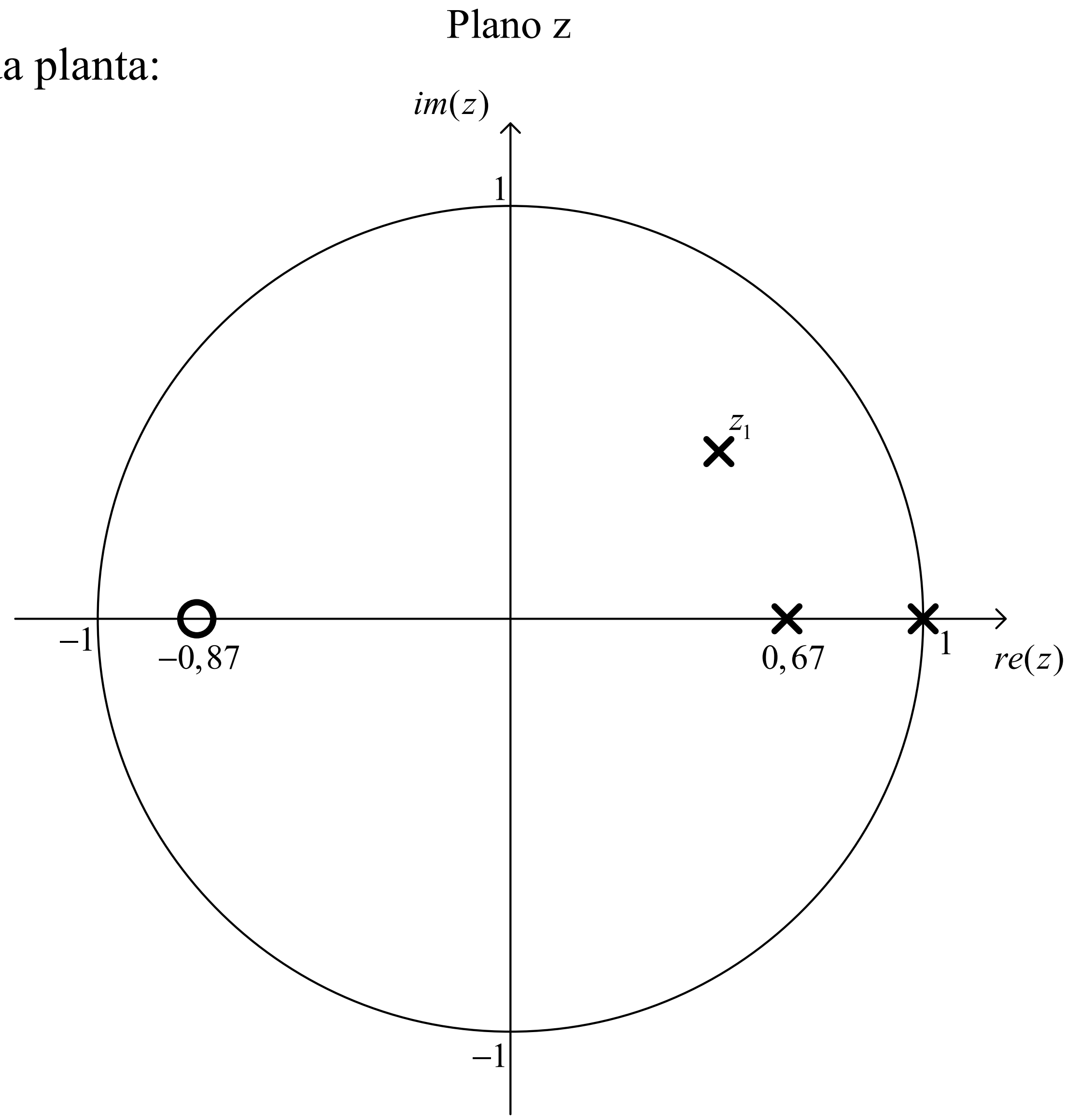
Agora vamos localizar os pólos (z = 1 e z = 0,6703) e o zero (z = -0,8760) de G(z) no plano z.

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto de Controladores Digitais

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

Pólos e zeros da planta:



Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto pelo Lugar das Raízes

Para a função de transferência de laço aberto, F(z) = FTMA(z)

CONDIÇÃO DE ÂNGULO:

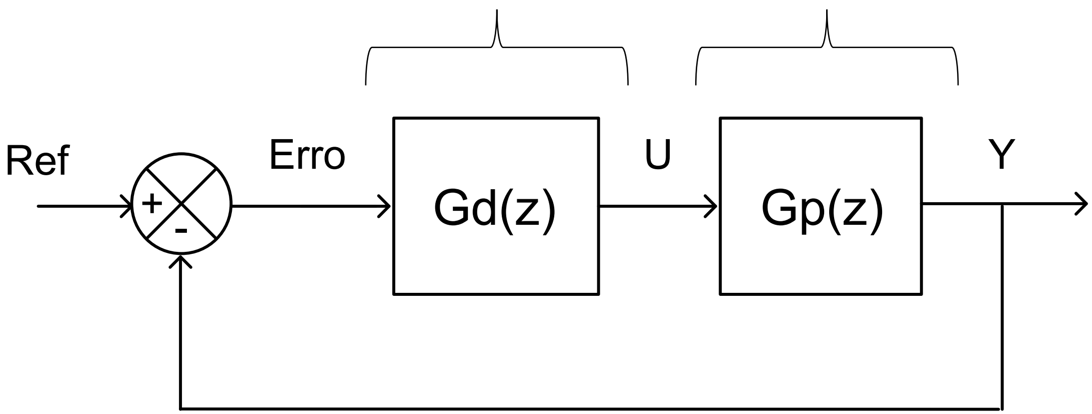
$$\angle F(z) = \pm 180^0 (2k+1), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

CONDIÇÃO DE MÓDULO:

$$|F(z)| = 1$$

O polo desejado z1 depende das especificações

$$\angle Gd(z1) \quad + \quad \angle Gp(z1) = \pm 180°$$



$$\mathrm{FTMA(z) = Gd(z) \cdot Gp(z)}$$

Se o ponto z1 é o local escolhido para o pólo dominante de malha fechada, então a soma dos ângulos no ponto z1 deve ser igual a ±180°. Porém, a soma das contribuições do ângulo no ponto z1 é:

17,10°-138,52°-109,84° = -231,26°

Portanto, o ângulo resultante é:

-231,26°+180° = -51,26°

Assim, a função de transferência pulsada do controlador deve fornecer 51,26°. Podemos adotar a função de transferência do controlador como:

$$G_D(z) = K\frac{z+\alpha}{z+\beta}$$

onde K é o ganho do controlador.

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto pelo Lugar das Raízes

$\angle Gp(z1) = ?$

$17,10°-138,52°-109,84° = -231,26°$

$z1 = 0,5158 + j\ 0,4281$

$$Gp(z) = \frac{0,01758(z+0,8760)}{(z-1)(z-0,6703)}$$

$\angle(z1 + 0,8760) = 17,10^{o}$

$\angle(z1 - 1) = 138,52^{o}$

$\angle(z1 - 0,6703) = 109,84^{o}$

No matlab:

```
z1=0.5158+0.4281i;
180/pi*angle(z1+0.8760)
```

Ou

```
[n2,d2]=tfdata(Gpz,'v’);
% fi2 é o ângulo de Gpz quando z=z1
fi2=180/pi*angle(polyval(n2,z1)/polyval(d2,z1));
```

Se decidirmos cancelar o pólo em z = 0,6703 pelo zero do controlador em z = -α, então o pólo do controlador pode ser determinado (a partir da condição de que o controlador deve fornecer +51,26°) como um ponto em z = 0,2543 (β = -0,2543). Assim, a função de transferência pulsada para o controlador pode ser determinada por:

$$G_D(z) = K\frac{z-0,6703}{z-0,2543}$$

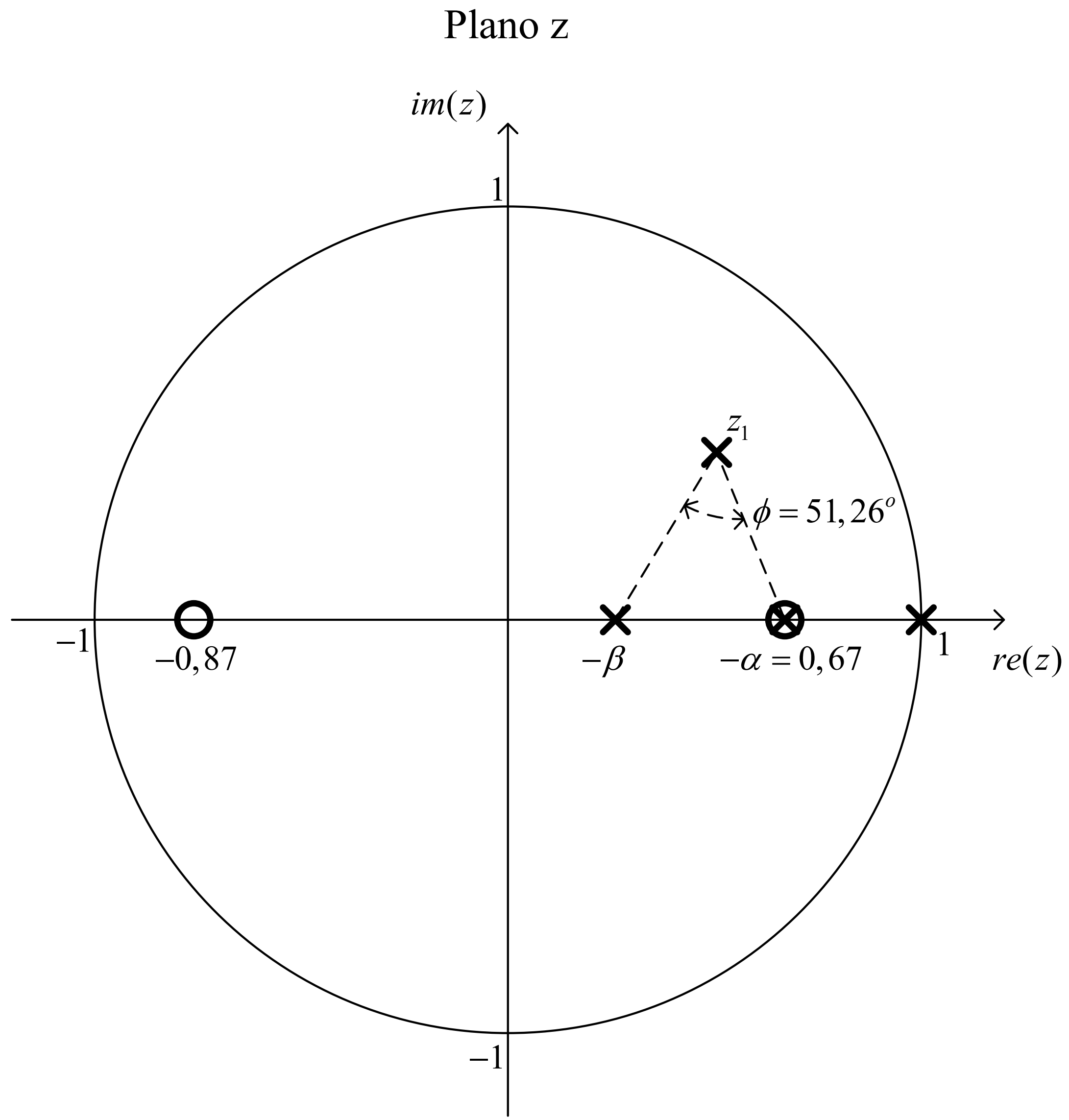
Assim, a função de transferência de malha aberta torna-se:

$$G_D(z)\cdot G(z) = K\frac{z-0,6703}{z-0,2543}\cdot\frac{0,01758(z+0,8760)}{(z-1)\cdot(z-0,6703)} = K\frac{0,01758(z+0,8760)}{(z-1)\cdot(z-0,2543)}$$

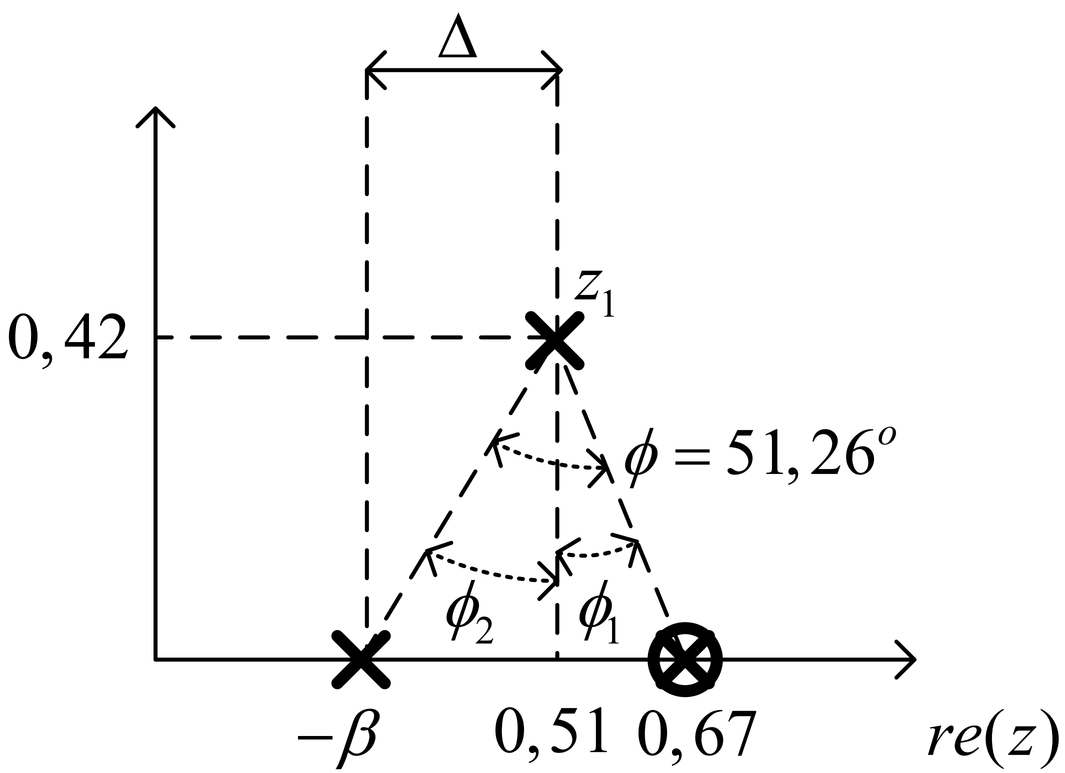
Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto de Controladores Digitais

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA



Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems



$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{0,67 - 0,51}{0,42}\right)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta}{0,42}\right)$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

O ganho K pode ser determinado a partir da seguinte condição de módulo:

$$\left|G_D(z)G(z)\right|_{z=0,5158+j0,4281}=1$$

Assim:

$$K\left|\frac{0,01758(z+0,8760)}{(z-1)(z-0,2543)}\right|_{z=0,5158+j0,4281}=1$$

que nos fornece: K = 12,6653

Portanto, o controlador digital projetado fica:

$$G_D(z)=12,6653\frac{z-0,6703}{z-0,2543}$$

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto de Controladores Digitais

A função de transferência de malha aberta fica:

$$G_D(z)\cdot G(z)=\frac{12,6653\cdot 0,01758\cdot(z+0,8760)}{(z-1)\cdot(z-0,2543)}$$

A função de transferência de malha fechada fica:

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_D(z)\ \ G(z)}{1+G_D(z)\ \ G(z)}=\frac{0,222(z+0,8753)}{z^2-1,032z+0,4492}$$

Cujos pólos são: 0,5160 + 0,4277i e 0,5160 - 0,4277i. ✓

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems

Projeto pelo Lugar das Raízes

INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

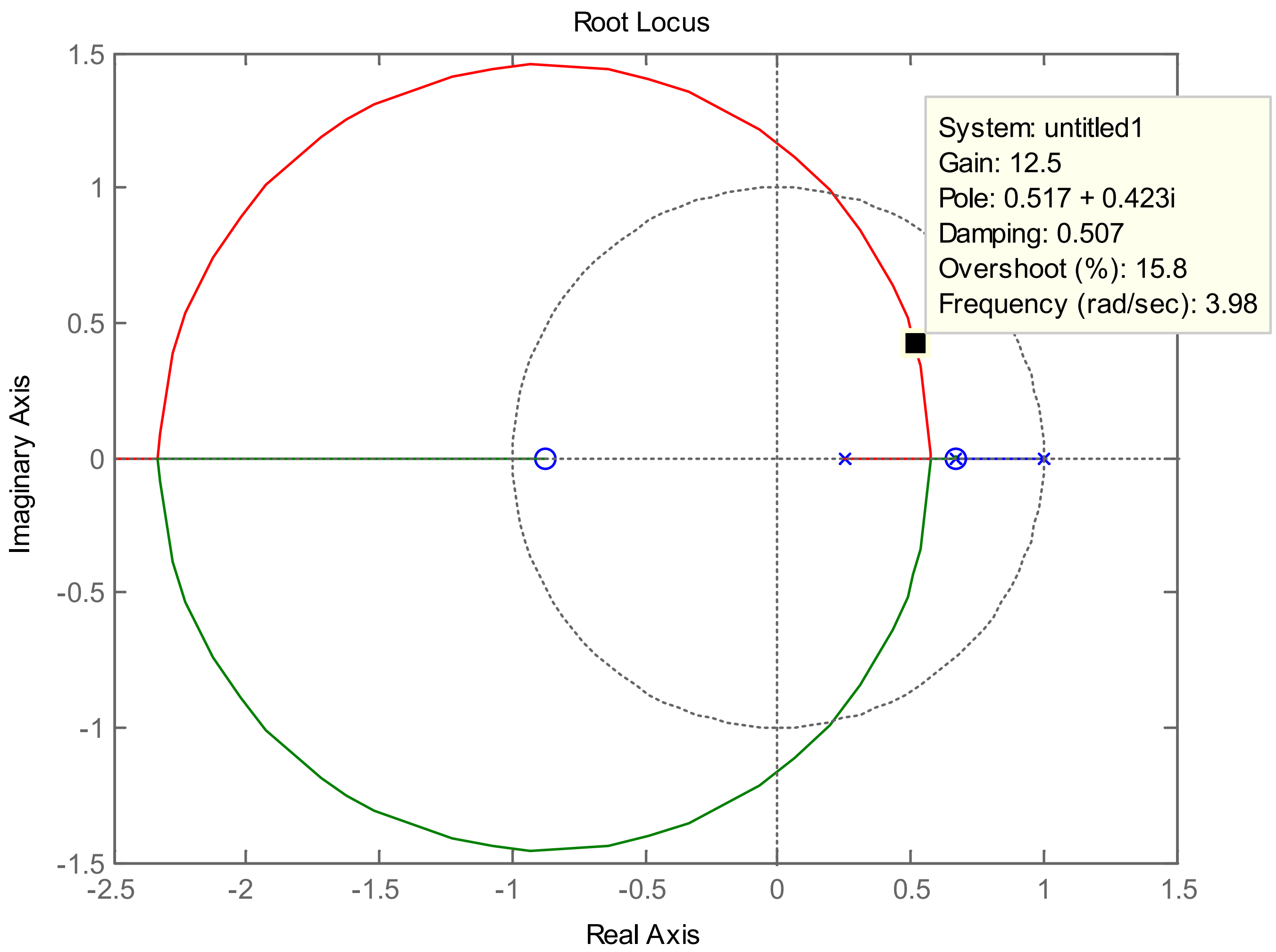
Verificações:

- Condição de ângulo:
  ```
  z1=        ;
  [n,d]=tfdata(FTMA,'v’);
  180/pi*angle(polyval(n,z1)/polyval(d,z1))
  ```

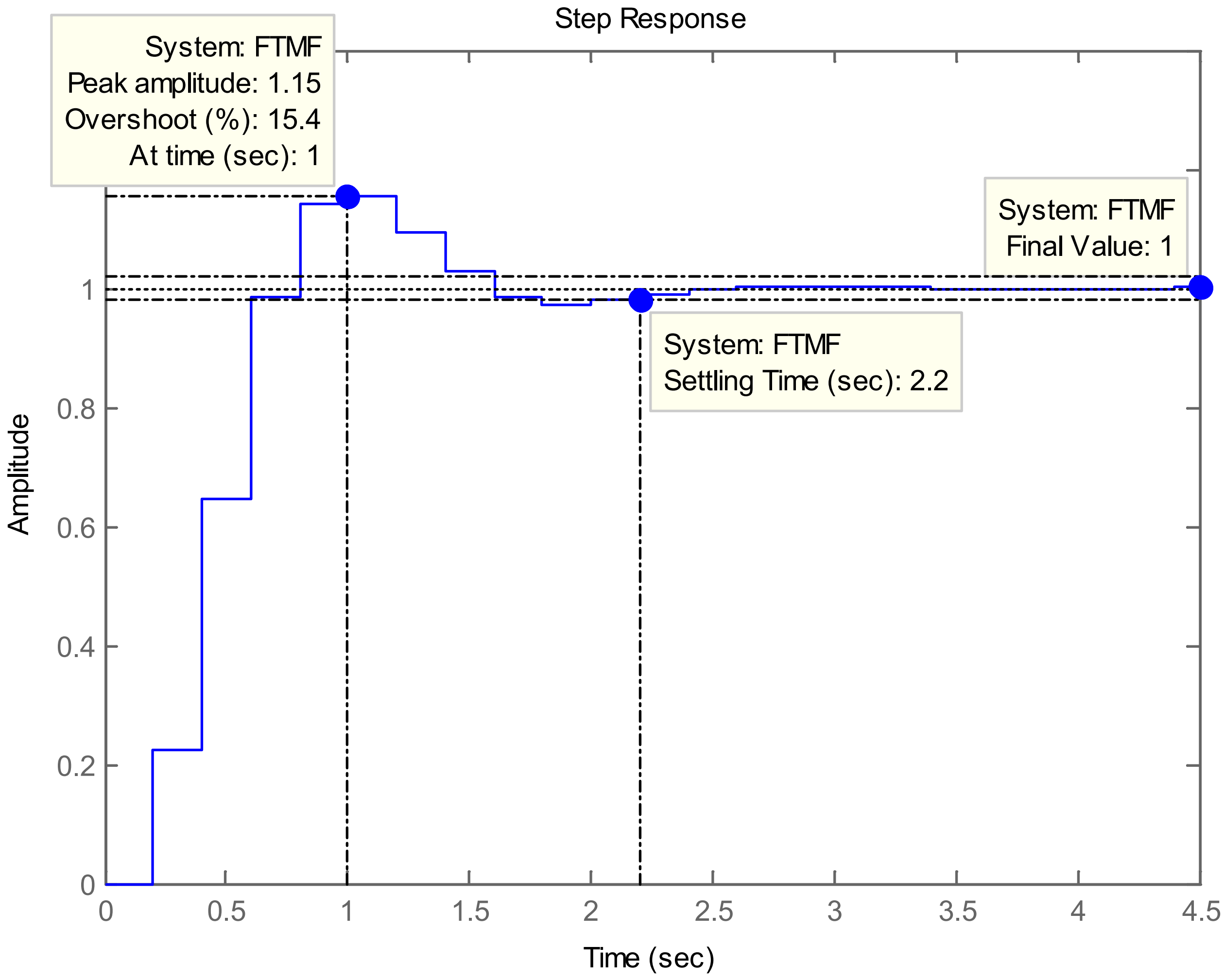
- Condição de Módulo:
  ```
  abs (polyval(n,z1)/polyval(d,z1))
  ```

- Pólos de malha fechada;
  ```
  pole(FTMF)
  ```

Projeto de Controladores Digitais



Projeto de Controladores Digitais



Próximos passos:

- Verificar a amplitude da ação de controle em simulação com simulink;
- Realizar simulação com equações recursivas (controlador e planta);
- Calcular erro para entrada tipo rampa e verificar por simulação.

Fonte: Ogata, K.; Discrete-Time Control Systems