공업수학 I 정리 목차.

PART 1. Ordinary Differential Equations.

PART 2. Vectors, Vector Spaces, Linear Algebra
Linear Differential Equations.

└ Chapter 6. Vector, Vector Spaces.
- 6.4 Vectorspace R^n
- 6.5 Orthogonalization
- 6.6 Orthogonal Complements & Projection
- 6.7 The Function Space $C[a,b]$

└ Chapter 7. Matrices & Linear Systems.
- 7.1 ~7.4 Matrices, ERO, Gauss Elimination, Row/Column Space.
- 7.5 Homogeneous System
- 7.6 Non-Homogeneous System.
- 7.7 Matrix Inverse.

└ Chapter 8. Determinants.
- 8.1 Definition
- 8.2 Evaluation 1
- 8.3 Evaluation 2
- 8.4 A^{-1}의 Determinant 공식.
- 8.5 Cramer's Rule.

└ Chapter 9. Eigenvalue, Diagonalization.
- 9.1 Eigenvalue, Eigenvector.
- 9.2 Diagonalization.

└ Chapter 10. System of Linear Differential Equation (선형미분방정식 행렬화)
- 10.1 $X' = AX$
- 10.2 $X' = AX + G$
- 10.3 Exponential Matrix Solution.

* $y = Ce^{-x/a}$ 등을 대입해 확인하는 것이 routine.

* Case 1: Separable

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(x)G(y) \text{ 형태.}$$

sol). $\frac{1}{G(y)}dy = F(x)dx$ 적분.

이때 $G(y)=0$ 이게 하는 y 값도 근이다.

* Case 2: Linear

$$y' + p(x)y = q(x) \text{ 형태.}$$

sol) integrating factor $e^{\int p(x)dx}$ 양변에 곱하고 적분.

곱한 적분은 $\int \{e^{\int p(x)}y' + e^{\int p(x)} \cdot p(x)y\}dx = e^{\int p(x)}y$ 간단히 된다.

* Case 3: Exact

$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ 혹은

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$ 형태

sol) $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ 인지를 확인한다. 맞으면 potential function 존재.

potential function φ에 대해 $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$ 인데,

$d\varphi = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ 로 본다.

여기서, $\varphi(x,y) = C$를 계산하므로,

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y)$와 $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y)$를 모두 만족하는 $\varphi(x,y) = C$를

구한다.

*Case 4 : Homogeneous

$y' = f(y/x)$ 형태 $y' = \frac{1}{x+y} = \frac{y/x}{1+y/x}$ 등...

sol) $u = \frac{y}{x}$로 치환, u와 x의 식으로 풀이.

*Case 5 : Bernoulli Eq.

$y' + P(x)y = R(x)y^{\alpha}$ $\alpha \neq 0, 1$

sol) $v = y^{1-\alpha}$ 치환.

*Case 6 : Ricatti Eq.

$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$.

sol) 하나의 간단한 근 $S(x)$를 찾고, $y = S(x) + 1/z$를 대입.
x와 z의 식이 되게 한다.
$S(x)$는 때려 맞춘다.

Case1 ex) $dy/dx = y^2 e^x$.

$\therefore \frac{1}{y^2} dy = e^x dx$ 적분 $-\frac{1}{y} = e^x + k$,

$y = 1/(e^x + k)$

Case2 ex) $y' + y = x$. $I.F = e^{\int dx} = e^x$.

$e^x y' + e^x y = e^x x$ 적분

$e^x y = \int x e^x dx = xe^x - e^x + C$.

$\therefore y = x - 1 + Ce^{-x}$

Case3 ex) $(\cos x - 2xy) + (e^y - x^2) y' = 0$ $y(1) = 4$.

$\rightarrow (\cos x - 2xy) dx + (e^y - x^2) dy = 0$.

$\partial M/\partial y = -2x = \partial N/\partial x \rightarrow$ Exact!

$\partial f/\partial x = \cos x - 2xy$, $f = \sin x - x^2 y + g(y)$.

$\partial f/\partial y = -x^2 + g'(y) = -x^2 + e^y$

$\therefore g(y) = e^y + C$, $f = \sin x - x^2 y + e^y + C$.

$\therefore \sin x - x^2 y + e^y = C \Leftarrow y(1) = 4$ 대입.

$= e^4 - 4 + \sin(1)$.

* $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 형태.

$p(x), q(x)$는 연속. $f(x)$는 forcing function. $\begin{cases} f(x)=0 : \text{homogeneous (제차)} \\ f(x)\neq 0 : \text{non-homogeneous (비제차)} \end{cases}$

* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 의 두근 y_1, y_2 가 linearly independent 하면, general solution으로 $C_1y_1 + C_2y_2$를 가지게 된다.

이때, y_1, y_2 의 linearly independence를 판단하는 Wronskian test
$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$ 이면,
linearly independent 하다.

* non-homogeneous case 풀이를 위해, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$의 associated homogeneous equation을 먼저 푼다.

① $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 의 general solution $C_1y_1 + C_2y_2$.

② $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$의 particular solution Y_p를 찾는다.

③ general solution $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + Y_p(x)$.

2.2 Constant Coefficient Case.

※ 계수가 정수가 아니라 → Laplace Transform.

계수가 정수가 아니고, 1차식이라 → 1st ODE 풀이법 접근.

* 풀이법

$y'' + ay' + by = 0$ 에. $y = e^{\lambda x}$ 대입

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$: 특성방정식

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

서로다른 두 실근

서로같은 두 중근 → 3 cases 로 분류

서로다른 두 허근.

Case 1 : 서로다른 두 실근

$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ → $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ linearly independent.

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ (general solution)

ex) $y'' - y' - 6y = 0$ → $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. $\lambda = -2, 3$.

$\therefore y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

두번째 근이 $y=u(x)e^{\lambda x}$로 두고 계산한 것이다
↓
공업수학 교재 참고

Case 2 : 서로 같은 두 중근.

$\lambda = -\frac{a}{2}$ 로 된다. $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-\frac{a}{2}x}$

$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$ 로 된다.

$= c_1 x e^{\lambda x} + c_2 e^{\lambda x}$ 혹은 이렇게.

ex) $y'' + 8y' + 16y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 \quad \lambda = -4.$

$y = c_1 x e^{-4x} + c_2 e^{-4x}$

Case 3 : 서로 다른 두 허근

$\lambda_1 = \alpha + i\beta \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$

general solution $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$

$= e^{\alpha x}(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x})$

이걸 오일러 방정식에 의해,

$\left.\begin{aligned} e^{i\beta x} &= \cos\beta x + i\sin\beta x \\ e^{-i\beta x} &= \cos\beta x - i\sin\beta x \end{aligned}\right\} \rightarrow$ 대입 후 정리.

$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

$= e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

ex) $y'' + 2y' + 3 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0, \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{2}i$

$\alpha = -1, \ \beta = \sqrt{2}$

$\therefore y = e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x)$

2.3. nonhomogeneous Equation.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 에서 $f(x) \neq 0$ 인경우,

$y(x) = \underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{\text{associated homogeneous eq 에서 구한다.}} + Y_P(x)$

① method of variation of Parameters.
② $p(x), q(x)$가 상수 → guess $Y_P(x)$.

① Method of variation of parameters.

$Y_P(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$ 로 두고.

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} dx \qquad u_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx.$$

y_1, y_2는 associated homogeneous solution 이고,
$W(x)$는 y_1, y_2의 Wronskian.

즉, general solution

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + Y_P$$
$$= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

ex) $y'' + 4y = \sec x$ 를 풀어라.
associated는, $\lambda = \pm 2i$ 이므로,
$y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2$$

$$\therefore u_1(x) = -\int \frac{1}{2} \sin 2x \sec x \, dx = -\int \sin x \, dx = \cos x$$

$$u_2(x) = \int \frac{1}{2} \cos 2x \sec x \, dx = \int \cos x - \frac{1}{2} \sec x \, dx = \sin x - \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\therefore y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \cos x \cos 2x + \left(\sin x - \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x|\right) \sin 2x$$

② guessing $Y_p(x)$.

$f(x)$의 형태에 따라 $Y_p(x)$를 추정하고, 대입한다.

P, Q, R은 n degree polynomial.

$f(x)$의 형태		$Y_p(x)$ 대입할 것.
$P(x)$		$Q(x)$.
$Ae^{\alpha x}$		$Re^{\alpha x}$
$A\cos(\beta x)$, $A\sin(\beta x)$	$\longrightarrow$	$C\cos\beta x + D\sin\beta x$
$P(x)e^{\alpha x}$		$Q(x)e^{\alpha x}$
$P(x)\cos\beta x$, $P(x)\sin\beta x$	$\longrightarrow$	$Q(x)\cos\beta x + R(x)\sin\beta x$
$P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$	$\longrightarrow$	$Q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + R(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

※ $Y_p(x)$의 값이 associated homogeneous eq의 근이 되버려서 contradiction 이 되는 경우, 아니게 될때까지 그 Y_p에 x를 곱한다.

ex) $y''+2y'-3y=8e^x$

$Y_p = Ae^{x}$ 로 추정. 이는 $y''+2y'-3y=0$의 근이 된다.
$Y_p = Axe^{x}$ 로 추정. 대입.

$2Ae^x + Axe^x + 2Ae^x + 2Axe^x - 3Axe^x = 8e^x$
$\therefore Y_p = 2xe^x$

$y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^x + 2xe^x$

ex) $y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}$ → associated eq의 근은 $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$.

$\therefore Y_p = Ax^2e^{3x}$ 로 추정해야한다.

$2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} - 6(2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x}) + 9Ax^2e^{3x}$
$= 2Ae^{3x} = 5e^{3x}$ $\therefore A = 5/2$.

$\therefore$ general solution $y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{5}{2}x^2e^{3x}$

ex) $y'' - 5y' + 6y = -3\sin(2x)$. $Y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$.
$Y_p' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$.
$Y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$.

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 10A\sin 2x - 10B\cos 2x + 6A\cos 2x + 6B\sin 2x$
$= (2A - 10B)\cos 2x + (2B + 10A)\sin 2x$
$= -3\sin 2x$.
$\therefore$ $A = 5B$, $10A + 2B = -3$ $B = -3/52$,
$A = -15/52$.

$\therefore y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} - \frac{15}{52}\cos 2x - \frac{3}{52}\sin 2x$

* Principle of Superposition.

$y'' + P(x)y' + q(x)y = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ 의 Y_p는,

$y'' + P(x)y' + q(x)y = f_j$ 의 특수해 Y_j 에 대해.

$Y_p = \sum_{j=1}^{n} Y_j = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 이다.

ex) $y'' + 4y = x + 2e^{-2x} \rightarrow$ $y'' + 4y = x \cdots ①$

$y'' + 4y = 2e^{-x} \cdots ②$

① : $Y_1 = ax + b$.

$4ax + 4b = x$, $a = \frac{1}{4}, b = 0$. $Y_1 = \frac{1}{4}x$.

② $Y_2 = Ae^{-2x}$.

$4Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} = 8Ae^{-2x} = 2e^{-2x}$, $A = 2/8$.

$Y_2 = \frac{2}{8}e^{-2x} = \frac{1}{4}e^{-2x}$

$\therefore y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{4}(x + e^{-2x})$

2.4 Spring Motion.

모든 물체의 구성은

spring : 변위에 따른 힘

damper : 속도에 따른 힘.

mass : 가속도에 따른 힘

↑(−)

↓(+)

즉, 식을 쓰면, $\Sigma F = my'' = -ky - cy' + f(t)$ 이고,

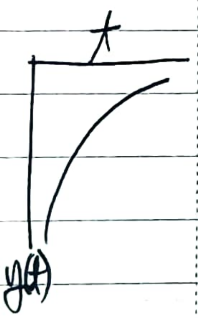
$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}f(t)$ 로 정리가능하다.

$f(t) \begin{cases} 0 : \text{unforced Motion.} \\ \neq 0 : \text{forced Motion.} \end{cases}$

1. unforced Motion : $f(t) = 0$.

$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$ 의 특성방정식의 근 $\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4km}$

이걸로 판단.



$\boxed{\text{case 1}}$ overdamping. $c^2 - 4km > 0$.

$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4km} \quad \lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4km}$

$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

이때, $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$. 시간이 지남에 따라 원점으로 가려한다. 그러나

equilibrium → Critical point를 지나가지는 못한다.

$\boxed{\text{case 2}}$ Critical damping. $c^2 - 4km = 0$.

$y(t) = C_1 e^{-\frac{c}{2m}t} + C_2 t e^{-\frac{c}{2m}t}$

초기조건에 따라 equilibrium point에 1번 or 0번 도달한다.

$\boxed{\text{case 3}}$ Underdamping : $c^2-4km<0$

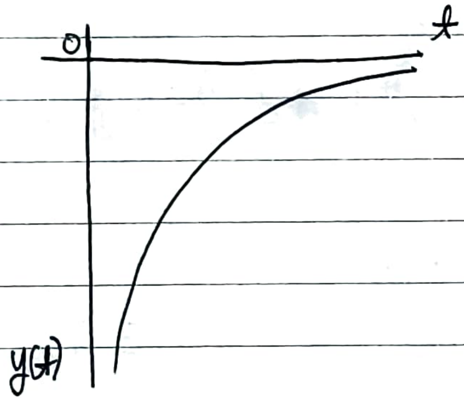
$y(t)=e^{-\frac{c}{2m}t}[c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t]$

비주기적 진동.

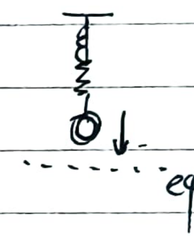
Case 1 Ex) Overdamping : $c=6, k=5, m=1, y(0)=-4, y'(0)=2$

$y''+6y'+5y=0$. $\lambda=-1,-5$.

$\Rightarrow y=-\frac{9}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-5t}$

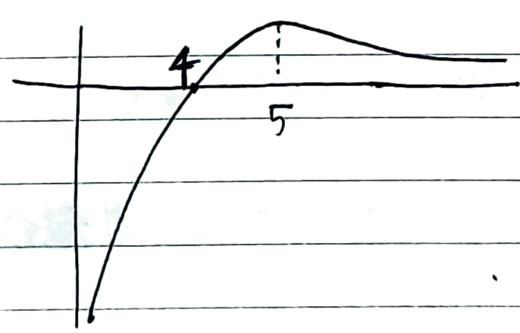


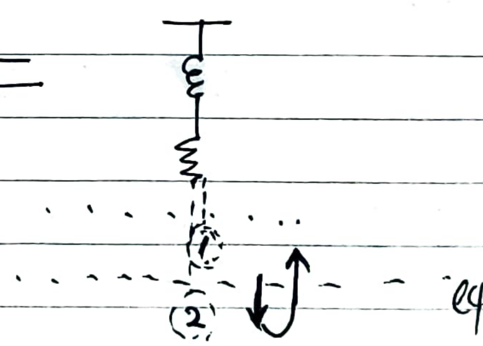
물체가 아래로 늘어지는 쪽으로 equilibrium point에 가는 중.



Case 2 Ex) Critical damping : $c=2, k=m=1, y(0)=-4, y'(0)=5$.

$y''+2y'+y=0$. $\lambda=-1$. $\therefore y=-4e^{-t}+te^{-t}$



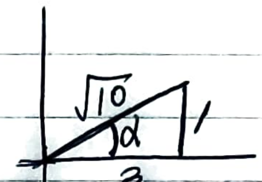


Case7 Ex) Underdamping : $c=k=2$, $m=1$. $y(0)=-3$, $y'(0)=2$.

$y''+2y'+2=0$.

$y(t) = -e^{-t}(3\cos(t)+\sin(t))$

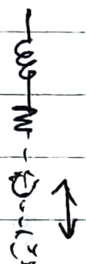
$\quad = -e^{-t}\sqrt{10}\cos(t-\alpha)$.



이때 $\tan\alpha = 1/3$. $\therefore \alpha = \arctan(1/3)$

$\therefore y(t) = -e^{-t}\sqrt{10}\cos(t-\arctan(1/3))$

↳ $t = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2n+1}{2}\pi$ 에서 equilibrium point 지난다.



비중요.

2. Forced Motion. ($f(t) = A\cos\omega t$ 에대해)

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{A}{m}\cos\omega t.$$

이때, $$Y_p(t) = \frac{mA(k-\omega^2 m)}{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}\cos\omega t + \frac{A\omega c}{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2}\sin\omega t$$

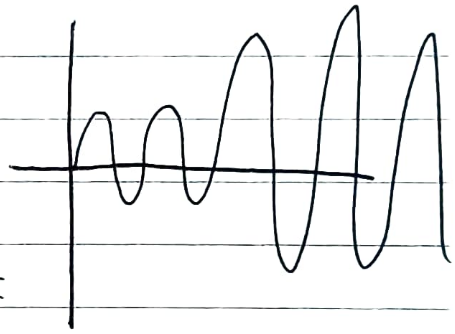
$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 을 이용하면, $k = \omega_0^2 m$.

$$Y_p(t) = \frac{mA(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}\cos\omega t + \frac{A\omega c}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}\sin\omega t$$

$\boxed{\text{Case1}}$ Overdamped Forced Motion. $c=6,\ k=5,\ m=1.$ $A=6\sqrt5,\ \omega=\sqrt5$

$$y'' + 6y' + 5y = 6\sqrt5\cos\sqrt5 t \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$y(t) = \underbrace{\frac{\sqrt5}{4}(-e^{-t} + e^{-5t})}_{t\to\infty\ :\ 0\text{으로 수렴.}} + \underbrace{\sin\sqrt5 t}_{\text{이부분 진동하며 남음}}$$

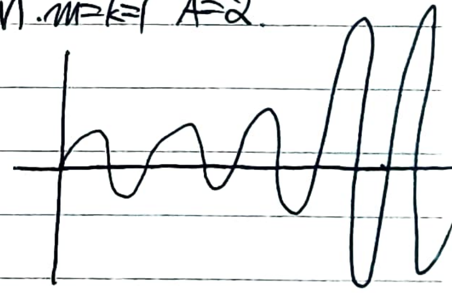


$\boxed{\text{Case2}}$ Critically Damped Forced Motion. $c=2,\ m=k=1,\ \omega=1,\ A=2.$

$$y'' + 2y' + y = 2\cos t. \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$y(t) = \underbrace{-te^{-t}}_{} + \sin(t)$$

$t\to\infty$: 0으로 수렴. Overdamped case 보다는 더 늦게 사인파가 된다.



$\boxed{\text{Case 3}}$ Underdamped Forced Motion $c=k=2,\ \omega=\sqrt{2}$ $m=1,\ A=2\sqrt{2}$

$$y'' + 2y' + 2y = 2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$y(t) = \underbrace{-\sqrt{2}e^{-t}\sin(t)}_{t\to\infty:\ 0\text{으로 수렴}} + \sin(\sqrt{2}t).$$

3. Resonance ($c=0$. no damping. 공명). ($\omega=\omega_0$)

$$y'' + \frac{k}{m}y = \frac{A}{m}\cos\omega t$$

ω_0: natural frequency. 스프링과 물체의 것.

ω: input frequency. driving force의 것.

$$\therefore y(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \boxed{\frac{A}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t} \rightarrow \infty.$$

일반 상황

이때 $\omega \to \omega_0$ 일때, 즉 $\omega=\omega_0$ 일때의 예시이므로

$$y'' + \frac{k}{m}y = \frac{A}{m}\cos\omega_0 t$$

$$y(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{A}{2m\omega_0}t\sin(\omega_0 t).$$

t가 증가할수록, $y(t)$도 커진다

4. Beats ($c=0$, $\omega \neq \omega_0$): 진폭의 주기적인 변화를 보인다.

$y'' + \omega_0^2 y = \frac{A}{m}\cos(\omega t)$ 이에 대한 solution은,

$y(0) = y'(0) = 0.$

$$y(t) = \frac{A}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)$$

$$= \frac{2A}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)$$

$\omega_0+\omega$, $\omega_0-\omega$에 따라 진폭의 주기변화가 달라진다.

2.5 Euler's Differential Equation.

$x>0$, $x<0$이어야 한다.

$x^2y''+Axy'+By=0$ 형태의 방정식이 Euler's Differential Eq.
(A, B는 상수)

이 식에 $x=e^t$을 대입해서, $y(e^t)=Y(t)$로 두면,

$Y''(t)+(A-1)Y'(t)+BY(t)=0$ 이다.

이걸 $Y(t)$를 구하고, $t=\ln x$를 대입해 다시 $y(x)$로 둔다.

ex) $x^2y''-5xy'+10y=0$, $y(1)=4$, $y'(1)=-6$.

$\downarrow$

$Y''(t)-6Y'(t)+10Y(t)=0$. $\lambda=3\pm\sqrt{1}\,i=3\pm i$

$\therefore Y(t)=e^{3t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$

이때 $x=e^t$, $Y(t)=y(x)$.

$y(x)=x^3(c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x)$

$y(1)=4=c_1$

$y'(x)=3x^2(c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x)+x^3(-\frac{c_1}{x}\sin\ln x+\frac{c_2}{x}\cos\ln x)$

$y'(1)=3c_1+c_2=-6$, $c_2=-18$

$\therefore y(x)=4x^3\cos(\ln x)-18x^3\sin(\ln x)$

* Laplace Transform의 정의

f를 라플라스 변환 한다고 하면

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

※ $\mathcal{L}[f] = F$
$\mathcal{L}[g] = G$
$\mathcal{L}[h] = H$

* t는 양의 정수. a, b는 상수. 아래는 Laplace Transform Table.

$$f(t) \longrightarrow F(s)$$

$$1 \longrightarrow 1/s$$

$$t^n \longrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$e^{at} \longrightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$\sin(at) \longrightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\cos(at) \longrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$t\sin(at) \longrightarrow \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$t\cos(at) \longrightarrow \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\sinh(at) \longrightarrow \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\cosh(at) \longrightarrow \frac{s}{s^2-a^2}$$

* 다른 법칙에 의해 결정되는 Laplace Transform.

$$f(t) \longrightarrow F(s)$$

$$t^n e^{at} \longrightarrow \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$e^{at}\sin(bt) \longrightarrow \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$e^{at}\cos(bt) \longrightarrow \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\delta(t-a) \longrightarrow e^{-as}$$

* Laplace Transform과 Inverse Laplace Transform은 Linear 하다.

$\mathcal{L}^{-1}[F+G] = f+g$ $\qquad$ $\mathcal{L}[f+g] = F+G$

$\mathcal{L}^{-1}[cF] = cf$ (c is constant) $\qquad$ $\mathcal{L}[cf] = cF$ (c is constant)

3.2 Laplace Transform을 통한 Initial Value Problem 풀기.

※ Piecewise Continuous : 유한개의 불연속, 불연속이 모두 jump 형태.

※ Laplace 변환 기본 법칙.

$$\left.\begin{cases} f\text{가 } t\geq 0\text{에서 연속.} \\ f'\text{가 } t\geq 0\text{에서 piecewise continuous.} \\ s>0\text{ 에서 } \lim_{k\to\infty} e^{-sk}f(k)=0. \end{cases}\right\}\text{ 일때,}$$

0에서 불연속이면 $f(0)$을 $f(0+)$로 대체. $sF(s)-f(0+)$

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0)$$

응용해서,

$$\left.\begin{cases} f, f' \ t\geq 0\text{에서 연속} \\ f'' \ t\geq 0 \text{ piecewise continuous} \\ \lim_{k\to\infty} e^{-sk}f(k) = \lim_{k\to\infty} e^{-sk}f'(k) = 0 \end{cases}\right\}\text{ 일때,}$$

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

※ $$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

ex) $y''+4y'+3y = e^t$ $\quad y(0)=0,\ y'(0)=2.$

양변에 Laplace Transform.

$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4sY - 4y(0) + 3Y = \frac{1}{s-1}$

$(s^2+4s+3)Y = \frac{2s-1}{s-1}$ $\quad\therefore\ Y = (2s-1)/(s-1)(s+3)(s+1)$

$\frac{2s-1}{(s-1)(s+3)(s+1)} = \frac{1}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{7}{8}\frac{1}{s+3}$

inverse Laplace Transform → $y = \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{7}{8}e^{-3t}$

Initial value problem 만 해결가능하다. General Solution은 못구함

3.3 Shifting. Heaviside function

• $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$
• $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = H(t-a)f(t-a)$
• $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$
• $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$
이 네가지 구분.

① e^{at}이 붙어있다.
라플라스면 ①식
역이면 ④식

② shifted 상태:
라플라스면 ③식
역이면 ②식

① First Shifting Theorem. (Shifting in the s variable)

$$\begin{cases} \mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a) & ① \\ \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)](t) = e^{at}f(t) & ② \end{cases}$$

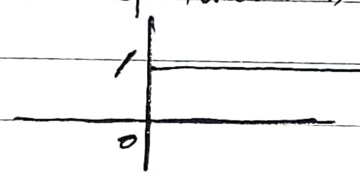
ex) $\mathcal{L}[e^{at}\cos bt](s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{4}{s^2+4s+20}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{4}{(s+2)^2+4^2}\right]$

$= e^{-2t}\sin 4t$

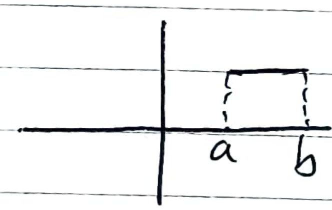
★ Heaviside Function (unit step function)

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$$



(a<b) 가정

$$H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & a\leq t<b \\ 0 & t\geq b \end{cases}$$



② Second Shifting Theorem.

$$\begin{cases} \mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s) & ③ \\ \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)](t) = H(t-a)f(t-a) & ④ \end{cases}$$

ex) $g(t) = \begin{cases} 0 & t<2 \\ t^2+1 & t\geq 2 \end{cases} \rightarrow g(t) = H(t-2)(t^2+1)$

$= H(t-2)\{(t-2)^2 + 4(t-2) + 5\}$

들어가는 변수가 동일해야 되야.

$= (t-2)^2 H(t-2) + 4(t-2)H(t-2) + 5H(t-2)$

$\therefore \mathcal{L}[g] = e^{-2s}\dfrac{2}{s^3} + e^{-2s}\cdot\dfrac{4}{s^2} + e^{-2s}\cdot\dfrac{5}{s}$

ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\cdot e^{-3s}\right]$

여기에 $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}\cdot F(s)] = f(t-a)H(t-a)$ 적용

원식 $= \cos 2(t-3)\cdot H(t-3)$

종합 ex) $y''+4y=f(t)$. $f(t)=\begin{cases}0 & t<3\\ t & t\geq 3\end{cases}$, $y(0)=y'(0)=0$

Laplace Transform.

$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4Y = \mathcal{L}[tH(t-3)]$

$= \mathcal{L}[(t-3)H(t-3)] + \mathcal{L}[3H(t-3)]$

$= e^{-3s}/s^2 + 3e^{-3s}/s$

$\therefore Y(s) = \frac{3s+1}{s^2(s^2+4)}\cdot e^{-3s}$

$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s}e^{-3s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2}e^{-3s} - \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4}e^{-3s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4}e^{-3s}$

$y(t) = \frac{3}{4}H(t-3) + \frac{1}{4}(t-3)H(t-3) - \frac{3}{4}\cos(2(t-3))H(t-3)$
$- \frac{1}{8}\sin(2(t-3))H(t-3)$

$\therefore y = \begin{cases}0 & t<3\\ \frac{1}{8}(2t - 6\cos 2(t-3)) - \sin 2(t-3) & t\geq 3\end{cases}$

3.4 Convolution

1. 정의

$t \geq 0$ 에서 정의된 $f(t), g(t)$.
이때 아래의 식이 성립하면, 이를 f와 g의 convolution이라 한다.

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

2. 성질

① $f * g = g * f$ (교환법칙)
② $\mathcal{L}[f*g](s) = F(s)G(s)$
③ $\mathcal{L}^{-1}[FG] = f * g$

* 이를 이용해서, inverse Laplace Transform을 함수별로 나타낸다.

ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)^2}\right]$ 해보자.

$F(s) = \frac{1}{s}$, $G(s) = \frac{1}{(s-4)^2}$.

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$f(t) = 1$. $\quad g(t) = e^{4t} \cdot t$

$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-4)^2}\right] = 1 * te^{4t} = \int_0^t 1 \cdot \tau e^{4\tau}\,d\tau$

$= \frac{1}{4}te^{4t} - \frac{1}{16}e^{4t} + \frac{1}{16}$.

* 반복적는 f(t)의 형태도 풀 수 있다.

ex) $f(t) = 2t^2 + \int_0^t f(t-\tau)e^{-\tau}\,dt$

$= 2t^2 + f(t) * e^{-\tau}$. → Laplace.

$F(s) = \frac{4}{s^3} + F(s) \cdot \frac{1}{s+1}$.

$\frac{s}{s+1}F(s) = \frac{4}{s^3}$, $F(s) = \frac{4(s+1)}{s^4} = \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s^4}$

$\therefore f(t) = 2t^2 + \frac{4}{6} \cdot t^3 = 2t^2 + \frac{2}{3}t^3$

3.5 Impulse & Delta Function.

1. Definition.

※ impulse : $\delta_\epsilon(t) = \dfrac{H(t) - H(t-\epsilon)}{\epsilon}$ large magnitude on short time ϵ

* Dirac delta function : $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0+} \delta_\epsilon(t)$
infinite spike처럼 생겼다.

* $\mathcal{L}[\delta_\epsilon(t-a)] = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{s}e^{-as} - \frac{1}{s}e^{-(a+\epsilon)s}\right) = \dfrac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{\epsilon s}$

※ 사실상 $\delta(t-a)$는 $H(t-a)\delta(t-a)$와 차이가 없으므로... 같은 결과가 나온다.

$\therefore \mathcal{L}[\delta(t-a)] = \lim_{\epsilon \to 0+} \dfrac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{\epsilon s} = e^{-as}.$

a=0을 대입해서, $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ $\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$

2. 성질.

① $f * \delta = f$. ② $\int_0^\infty f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a)$. (if $a>0$ $\int_0^\infty f(t)\,dt$ 수렴)

ex) First/Second Shifting Theorem과, Delta Function의 Laplace를 사용

$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-3)$ $y(0) = y'(0) = 0$. 라플라스 변환에 의해

$(s^2+2s+2)Y = e^{-3s}$, $Y = \left[\dfrac{1}{(s+1)^2+1}\right]\left[e^{-3s}\right]$

이걸 inverse laplace transform 해야하는데, 지수함수도 붙어있고, shifted도 되어있다.

$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{as}f(t)$ ← 이것이용.

$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = H(t-a)f(t-a)$ ← 이것먼저 적용할 것이므로, f(t)항을 찾기위해

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\sin t$

$\therefore \mathcal{L}^{-1}[Y] = H(t-3)e^{-(t-3)}\sin(t-3)$

3.6 Solution of System.

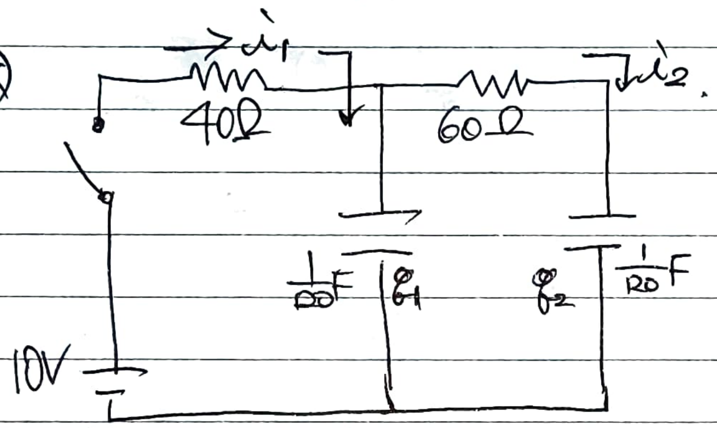
※ $\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[g]$

∵ $f(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau,\quad f'(t) = g(t)$

$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) = s\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right]$

$\mathcal{L}[g(t)] = s\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right]$ ∴ 성립.

응용예제 (EX)



키르히호프 법칙에 따라.

$$40i_1 + 120(q_1 - q_2) = 10$$

$$60i_2 + 120q_2 = 120(q_1 - q_2)$$

이때 $q(t) = \int_0^t i(t)\,dt + q(0)$ 를 이용. $q(0)=0$.

laplace transform 전에 대입하면 $40i_1 + 120\int_0^t i_1 - i_2\,dt = 10$

$$60i_2 + 120\int_0^t i_2\,dt = 120\int_0^t i_1 - i_2\,dt$$

$$\begin{cases} 40I_1 + \frac{120}{s}I_1 - \frac{120}{s}I_2 = \frac{10}{s} \\ 60I_2 + \frac{120}{s}I_2 = \frac{120}{s}I_1 - \frac{120}{s}I_2 \end{cases}$$

이는 방정식 계로 풀고, inverse laplace transform 한다.

3.7 Polynomial Coefficients / Bessel Function.

1. 정리

① $s>b$ 에서, $F(s)$ 가 미분가능할 때,

$$\mathcal{L}[t f(t)](s) = -F'(s)$$

② 확장해서

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

ex) $\mathcal{L}[t^2 f(t)](s) = F''(s)$.

③ $f(t)$가 $t \geq 0$ 에서 piecewise continuous 하고,
$|f(t)| \leq Me^{bt}$ $(t \geq 0)$를 만족하는 M과 b가 존재할 때,

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

ex) $y'' + 2ty' - 4y = 1$. $y(0) = y'(0) = 0$. Laplace transform.

$s^2 Y + 2\mathcal{L}[ty'] - 4Y = 1/s$

$s^2 Y - 4Y + 2(-(sY - y(0))') = 1/s$.

$\because \mathcal{L}[ty'] = -(\mathcal{L}[y'])' = -(sY - y(0))' = -sY' - Y$.

$(s^2 - 4)Y - 2Y - 2sY' = 1/s$.

$-2sY' + (s^2 - 6)Y = 1/s$.

$\therefore Y' + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)Y = -\frac{1}{2s^2}$

linear First ODE 이므로, integral factor: $e^{3\ln s - \frac{1}{4}s^2}$

양변에 곱하고 적분하면,

$$e^{3\ln s - \frac{1}{4}s^2} \cdot Y = \int \left(e^{3\ln s - \frac{1}{4}s^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2s^2}\right) ds = \int \left(s^3 \cdot e^{-\frac{1}{4}s^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2s^2}\right) ds$$

$= \int -\frac{1}{2} s e^{-\frac{1}{4}s^2} \cdot ds$. $\omega = -\frac{1}{4}s^2$, $d\omega = -\frac{1}{2}s\,ds$.

$= \int e^{\omega} d\omega = e^{\omega} + C = e^{-\frac{1}{4}s^2} + C$.

$\therefore Y = \frac{1}{s^3} + \frac{C}{s^3} e^{s^2/4}$.

만일에 $\lim_{s\to\infty} Y = 0$ 인 조건이 있으면, $C = 0$.

$\therefore y(t) = \frac{1}{2}t^2$.

* Bessel function. (참고)

Bessel Equation of order n.

$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$. 을 풀면,

* $y(t) = C \cdot \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{(2^m m!)^2} t^{2m}$ ($n=0$ 일때).

* 여기에 초기조건 $y(0)=1$ → $y(t) = \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{(2^m m!)^2} t^{2m} = J_0(t)$.

* 모든 양의 정수 n에 대해,

$$y(t) = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n} k! (n+k)!} t^{n+2k} = J_n(t)$$

CH4. Series Solutions

정식 형태 X

조언: solution의 결과가 closed form 이 아닐수도 있다.

ex) $y'+2y=1$. $y(0)=3$.

$$sY-y(0)+2Y=\frac{1}{s}.\quad (s+2)Y=\frac{3s+1}{s}.\quad Y=\frac{3s+1}{s(s+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{5}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$y(x)=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}e^{-2x}=\frac{1}{2}(1+5e^{-2x})$$

이런게 아니라,

ex) $y''+e^{x}y=x^2$. $y(0)=4$ 의 근이,

$$y(x)=e^{-e^{x}}\int_0^x \xi^2 e^{e^{\xi}}\,d\xi+4e^{-e^{x}}\ldots$$

numerical approximation도 가능.

이런 깔끔하지 못하고, 일반적인 풀이가 안되는 경우, 급수해를 구한다.

Power Series.

Frobenius Solution.
$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=F(x)$에서
$P(x)=0$인 x_0에 대해 그 근을
구해야 할때.

* 계수가 constant가 아니어서 풀이가 어려운 경우에도 가능하다.

4.1 Power Series Solution

1. Taylor Series (Power Series)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$$

이런 Taylor Series를 (x_0-h, x_0+h)에서 가지면 f를 analytic 하다고.

$b \in (a,x)$ ※ 원래는 해당 범위에서 $R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(b)(x-a)^{n+1}/(n+1)!$ 를 구하고, $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ 이어야 수렴이 증명되지만..
예시의 문제는 간단히 미분후 x_0를 대입해서 분모가 0이 아니기만 하면 되는 함수만 존재한다.

※ 대표적 Taylor series Table.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} {}_kC_n x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

※ 급수해의 존재/유일성

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = A, \quad y'(x_0) = B.$$

P, q, f 가 x_0에서 analytic → x_0에서 analytic한, 유일한, 급수해 갖는다.

ex) $y'' + x^2 y = 0$. $x_0 = 0$ 에서.

$x_0=0$인 경우 여기서 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}$

이걸 그대로 대입하고, a_n의 점화식을 푼다.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

이때 차수 맞추기를 위해...

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} = 1\cdot 2 \cdot a_2 x^0 + 2\cdot 3\, a_3 x^1 \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = a_0 x^2 + a_1 x^3 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

즉, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)(n+2) a_{n+2} + a_{n-2}\right) x^n + 2a_2 + 6a_3 x = 0.$$

이때 항등식 $\therefore$ $a_2 = a_3 = 0$.

$\therefore$ $a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} a_{n-2}$. 하나하나 대입해서 풀면

$$a_4 = -\frac{1}{12} a_0, \quad a_5 = -\frac{1}{20} a_1, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = 0 \ \dots$$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= a_0 + a_1 x + 0x^2 + 0x^3 + -\frac{1}{12} a_0 x^4 - \frac{1}{20} a_1 x^5 \dots$

4.2 Frobenius Series Solution.

1. 조건

regular한 점에 Approximation method. regular singular point에 대해 급수해를 구할 때 사용.

※. $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=F(x)$ 에 대해, $P(x_0)=0$인 x_0를 singular point라 한다.

이런 x_0 중, $(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$, $(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ 가 모두 analytic.

즉 taylor series 가 존재하면 그 singular point는 regular이다.

ex) $x^3(x-2)^2y'' + 5(x+2)(x-2)y' + 3x^2y = 0$.

0, 2 의 singular point.

$(x-0)\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{5}{x^2}\cdot\frac{(x+2)}{(x-2)}$ 이는 $x_0=0$에 대해 not analytic.

$(x-2)\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{5(x+2)}{x^3}$, $(x-2)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{3}{x}$ 모두 $x_0=2$ 대해 analytic.

∴ 0는 irregular singular point.
2는 regular singular point.

2. 방법.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^{n+r}$$ 을 대입.

indicial equation을 풀고 3가지 case에 대해 2가지 linearly independent solution을 만든다.

보통 최종식에서 일반해 형태 안나오니 기대 X.

* $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ 에 대해 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$ 를 대입해서 indicial equation에 의해 $r_1 \geq r_2$ 이 나올때

① $r_1 - r_2$이 양의 정수가 아닌경우

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1} \qquad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* x^{n+r_2}$$

단, $C_0 \neq 0$, $C_0^* \neq 0$

② $r_1 - r_2 = 0$ 인경우,

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1}$ 을 구한후, $y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* x^{n+r_1}$ $\begin{pmatrix} C_0 \neq 0 \\ C_0^* \neq 0 \end{pmatrix}$

y_2를 윗식에 대입해서 C_n^*를 구한다.

③ $r_1 - r_2$이 양의 정수

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1}$, $y_2(x) = k y_1(x) \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* x^{n+r_2}$ $\begin{pmatrix} C_0 \neq 0 \\ C_0^* \neq 0 \end{pmatrix}$

indicial equation을 풀어서, $C_0^* = 0 \rightarrow k$를 구한다. y_2를 대입해서.

$C_0^* \neq 0 \rightarrow k = 0$ 로 둔다. k를 구하지 않는다

Case 1 ex) $x^2y'' + x(\frac{1}{2}+2x)y' + (x-\frac{1}{2})y = 0$.

$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ 라 가정하고 풀어보자.

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1}$

$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n \cdot \frac{1}{2} x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)c_n x^{n+r+1}$
$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} c_n x^{n+r} = 0$.

이걸 정리하면...

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)c_n + \frac{1}{2}(n+r)c_n + 2(n+r-1)c_{n-1} + c_{n-1} - \frac{1}{2}c_n\right]x^{n+r}$

$+\left[r(r-1)c_0 + \frac{1}{2}c_0 r - \frac{1}{2}c_0\right]x^r = 0$

indicial equation

항등식이므로, $r(r-1)+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$, $r_1=1$, $r_2=-\frac{1}{2}$.

$c_n = -\frac{1+2(n+r-1)}{(n+r)(n+r-1)+\frac{1}{2}(n+r)-\frac{1}{2}} c_{n-1}$. 에 $r_1=1$ 대입.

$c_n = -\frac{2n+1}{n(n+\frac{3}{2})} c_{n-1}$, $\rightsquigarrow$ $c_1 = -\frac{6}{5}c_0$, $c_2 = \frac{6}{7}c_0$
$c_3 = -\frac{4}{9}c_0 \ldots$

$r_2 = -\frac{1}{2}$ 대입한 경우, $c_n^* = -\frac{2n-2}{n(n-\frac{3}{2})} c_{n-1}^*$ 인데, 여기에 $c_1^*=0$ 이여서...
$c_2^* = c_3^* = \cdots = 0$ 이다.

$\therefore y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1} = c_0\left(x - \frac{6}{5}x^2 + \frac{6}{7}x^3 - \frac{4}{9}x^4 \ldots\right)$

$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^{n+r_2} = c_0^* x^{-\frac{1}{2}}$.

두개의 linearly independent solution 나온다.

Case2 ex) $x^2y'' + 5xy' + (x+4)y = 0$ 에 $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ 대입

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + 5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+r)(n+r-1)c_n + 5(n+r)c_n + c_{n-1} + 4c_n\right)x^{n+r}$$

$$+ r(r-1)c_0 + 5rc_0 + 4c_0 = 0.$$

즉, $r_1 = r_2 = -2$. 대입하면, $c_n = -c_{n-1}/n^2$ 이므로,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \cdot (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} x^{n-2} = c_0\left(x^{-2} - x^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{36}x + \frac{1}{576}x^2 + \dots\right)$$

$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* x^{n-2}$ 이다. 이걸 원식에 대입... 하씨발.

$$y_2' = y_1'\ln(x) + y_1(x)/x + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)c_n^* x^{n-3}$$

$$y_2'' = y_1''\ln(x) + 2y_1'(x)/x - y_1(x)/x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)c_n^* x^{n-4}$$

$$x^2 y_1''\ln(x) + 2xy_1'(x) - y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)c_n^* x^{n-2}$$

$$+ 5xy_1'\ln(x) + 5y_1(x) + 5\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)c_n^* x^{n-2}$$

$$+ xy_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* x^{n-1} + 4y_1(x)\ln x + 4\sum_{n=1}^{\infty} c_n^* x^{n-2}$$

$$= \ln(x)\cancel{[x^2y_1'' + 5xy_1' + (x+4)y_1]} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)c_n^* x^{n-2} + 5\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)c_n^* x^{n-2}$$

solution : 0

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 4c_n^* x^{n-2}$$

이를 다시 정리...

$$x^{-1}(c_1^* - 2) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left\{\frac{4(-1)^n}{(n!)^2} + \frac{2(-1)^n}{(n!)^2}\right\}(n-2) + (n-2)(n-3)c_n^* + 5(n-2)c_n^*\right.$$

$$\left. + c_{n-1}^* + 4c_n^*\right]x^{n-2} = 0.$$

$$\therefore c_1^* = 2, \quad c_n^* = -\frac{1}{n^2}c_{n-1}^* - \frac{2(-1)^n}{n(n!)^2}$$

$$\therefore y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{4}\right) + \frac{11}{108}x - \frac{25}{3456}x^2 \dots$$

Case 3, $k=0$) $x^2y''+xy'-2y=0$. 대입하면.

$$(r^2-r-2)c_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)c_n+(n+r-1)c_{n-1}-2c_n]x^{n+r}=0.$$

$r_1=2, r_2=-1$. $c_n=-\frac{n+1}{n(n+3)}c_{n-1}$. on $r=2$

$c_n^*=-\frac{n-2}{n(n-3)}c_{n-1}^*$ on $r=-1$.

즉, $y_1(x)=c_0x^2(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{20}x^2\cdots)$ 이고,

$y_2(x)=c_0^*\frac{1}{x}+c_1^*$ 이다 ($\because c_2^*=0$ 이므로).

이처럼 $c_0^*\neq 0$ 이면 k값을 구하지 않는다.

Case 3, $k\neq 0$). $xy''-y=0$. 대입하면

$$(r^2-r)c_0x^{r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)c_n-c_{n-1}]x^{n+r-1}=0.$$

$\therefore r_1=1, r_2=0$. $c_n=\frac{1}{(n+r)(n+r-1)}c_{n-1}$

i) $c_n=\frac{1}{n(n+1)}c_{n-1}$ on $r_1=1$. $\rightsquigarrow$ $c_n=\frac{1}{n!(n+1)!}c_0$

$\therefore y_1(x)=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}x^{n+1}$

$=c_0(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3+\cdots)$

ii) $c_n^*=\frac{1}{(n-1)n}c_{n-1}^*$ on $r_2=0$. 여기서 c_0을 정의 불가하고,
일반식에서는 이에 $c_0^*=0$ 이다.

$y_2(x)=ky_1\ln(x)+\sum_{n=0}^{\infty}c_n^*x^n$ 을 대입하여, k값을 구한다.

$y_2'=ky_1'\ln(x)+ky_1/x+\sum_{n=0}^{\infty}nc_n^*x^{n-1}$

$y_2''=ky_1''\ln(x)+2ky_1'/x-ky_1/x^2+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n^*x^{n-2}$

대입하면

$kxy_1''\ln(x)+2ky_1'-ky_1/x+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n^*x^{n-1}-ky_1\ln(x)-\sum_{n=0}c_n^*x^n=0$

$2ky_1'-\frac{1}{x}\cdot ky_1+\sum_{n=0}n(n-1)c_n^*x^{n-1}+\sum_{n=0}c_n^*x^n=0$

y_1을 대입하면, $2k\sum_{n=0}\frac{1}{(n!)^2}x^n - k\sum_{n=0}\frac{1}{n!(n+1)!}x^n + \sum_{n=2}c_n^* n(n-1)x^{n-1}$

$- \sum_{n=0} c_n^* x^n = 0.$

정리하면, $\sum_{n=1}\left[\frac{2k}{(n!)^2} - \frac{k}{n!(n+1)!} + n(n+1)c_{n+1}^* - c_n^*\right]x^n$

$+ (k - c_0^*)x^0 = 0.$

$\therefore$ $k = c_0^*$ 그리고, 점화식은

$$c_{n+1}^* = \frac{1}{n(n+1)}\left[c_n^* - \frac{(2n+1)k}{n!(n+1)!}\right] = \frac{1}{n(n+1)}\left[c_n^* - \frac{(2n+1)c_0^*}{n!(n+1)!}\right]$$

c_1^*도 골라야하므로,

$$c_2^* = \frac{1}{2}\left(c_1^* - \frac{3}{2}c_0^*\right)$$

$$c_3^* = \frac{1}{6}\left(c_2^* - \frac{5}{12}c_0^*\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}c_1^* - \frac{14}{12}c_0^*\right) = \frac{1}{12}\left(c_1^* - \frac{14}{6}c_0^*\right)$$

이때 c_1^*, c_0^*은 어느 수가 될수 있으므로 하나를 고르면, $c_1^* = c_0^* = 1.$

$$y_2(x) = y_1 \ln(x) + 1 + x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{36}x^3 \ldots$$

6.4 Vector Space R^n

(용어가 중요한 관건)

1. 용어. 정의. 정리

① n-vector : n개원벡터, $\langle x_1, x_2 \ldots x_n \rangle$

② n-space : n-vector의 집합. R^n

③ norm (distance).

$F = \langle a_1, a_2 \ldots a_n \rangle$ 이면

norm of $F = |F| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

④ n-space에서 standard unit vectors는,

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = \langle 1, 0, \ldots 0 \rangle \\ e_2 = \langle 0, 1, \ldots 0 \rangle \\ \vdots \\ e_n = \langle 0, 0 \ldots 1 \rangle \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{orthogonormal} \\ = \text{서로 직교 \& 길이 1.} \end{array}$$

* Subspace. (S).

① O(영벡터)가 S에 포함

② S의 벡터들의 합이 S에 포함 (합에 대해 닫혀있다).

③ 실수곱이 S에 포함 (실수곱에 대해 닫혀있다.)

②와 ③에 의해 S에 F, G 벡터가 있으면 $\alpha F + \beta G$도 S에 포함.

* Linearly Independence

linear Comb.

n개의 vector $F_1, F_2, \ldots F_n$에 대해

$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_n F_n$을 linear Combination 이라 한다.

이때 $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_n F_n = 0$ 이

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ 을 통해서만 성립되면, $F_1, F_2 \ldots F_n$을

linearly independent 하다 한다.

linearly dependent 하면, $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_n F_n = 0$ 이,

'한 벡터가 다른 벡터들의 합으로 표현가능하다'는 의미가 된다.

Subspace
∪
Span
∪
basis

* Span은, R^n에서 linear Combination으로 구현된 Subspace.

즉, 모든 $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_n F_n$의 집합으로,
Subspace의 정의에 따라, Subspace에 포함된다.
이런 Subspace를 Span이라 한다 ← 벡터들의,
여기서 Span은 linear Comb를 구성하는 linearly independence 보장이 되지 않는다.
$F_1, F_2, \ldots F_n$은 Spaning Set.
그 벡터들의 집합이.

모든 Subspace의 Spanning Set은 basis를 포함

* 여기서 Span에서 linearly independence가 되면, 그건 basis(기저)이다.
linear Comb를 구성하는 벡터들이

즉, Subspace 사전인 { 0 벡터 포함, 합 닫힘, 실수곱 닫힘 }
~~모든 벡터의 linear Combination으로 구성~~
모든 벡터가 linearly Independent 하고,
그 벡터가 Spaning Set 이면,
→ Subspace S의 BASIS
〈기저 벡터들의 모임〉
〈linear Comb의 모임 X〉

- Dimension: basis의 크기, 기저벡터의 개수. 모든 basis는 Dimension은 같다
- basis의 vector들 $v_1, v_2, \ldots v_k$에 대해 X를 기술하면.
  $X = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$ 이고,
  $c_1, c_2 \ldots c_k$를 coordinate 라 한다.

* $F_1, \ldots F_k$로 인한 Span에서 basis를 탄생시키자…?
  $V_1 \ldots V_k$는 span. (R^n의 Subspace S)
  $G_1 \ldots G_t$는 S의 basis 라고하면. 당연히 $t \le k$

* orthogonal basis : basis vector가 서로 직교.

orthonormal basis : basis vector가 서로 직교, 크기가 모두 1.

* X를 orthogonal basis로 전개할 때

$$X = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_k V_k$$

$$C_1 = \frac{X \cdot V_1}{V_1 \cdot V_1}, \quad C_2 = \frac{X \cdot V_2}{V_2 \cdot V_2} \rightarrow \cdots \quad C_j = \frac{X \cdot V_j}{V_j \cdot V_j} = \frac{X \cdot V_j}{|V_j|^2}$$

6.5 Orthogonalization

* basis → Orthogonal Basis.

basis $X_1, X_2 \ldots X_m$

orthogonal basis $V_1, V_2 \ldots \cancel{X}_m$ 라 두면, V_j는 아래처럼 구한다.

Gram-schmidt process.

$$V_j = X_j - \frac{X_j \cdot V_1}{|V_1|^2} \cdot V_1 - \frac{X_j \cdot V_2}{|V_2|^2} V_2 - \cdots - \frac{X_j \cdot V_{j-1}}{|V_{j-1}|^2} V_{j-1}$$

$V_1, V_2 \ldots V_m$은 orthogonal → 서로 linearly independent

6.6 Orthogonal Complements & Projection

1. 용어. 정의. 정리.

1. Subspace S (R^n의)에 대해
$S^\perp$는 S의 모든 벡터에 직교하는 모든벡터의 집합.
Orthogonal Complement of S 라고 한다.

※ $S \cap S^\perp = \{0\}$ (zero vector)

2. R^n의 subspace S, R^n의 vector u 에 대해,
$u_s \subset S$, $u^\perp \subset S^\perp$ 있고,

$u = u_s + u^\perp$ 로 표현된다.

u_s : Orthogonal Projection of u.
→ orthogonal basis 에대해 u를 project 한것이다.

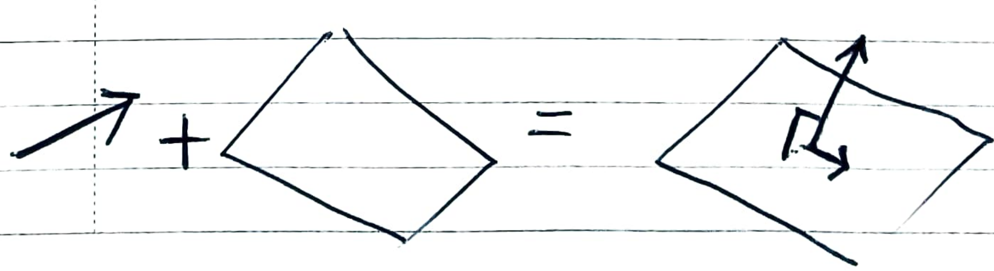
* 이때, $u_s = \left(u \cdot \frac{v_1}{|v_1|}\right)\frac{v_1}{|v_1|} + \left(u \cdot \frac{v_2}{|v_2|}\right)\frac{v_2}{|v_2|} + \cdots + \left(\frac{u \cdot v_m}{|v_m|}\right)\frac{v_m}{|v_m|}$

$= \frac{u \cdot v_1}{|v_1|^2}v_1 + \frac{u \cdot v_2}{|v_2|^2}v_2 + \cdots + \frac{u \cdot v_m}{|v_m|^2}v_m$

$= \sum_{j=1}^{m} \frac{u \cdot v_j}{|v_j|^2}v_j$ ($v_1, v_2 \ldots v_m$은 S의 orthogonal basis)

$u^\perp = u - u_s$ 로 구한다.

* R^3에서 평면의 Subspace S에 대해,
R^3의 u가 평면성분 u_s와 그 직교성분 $u^\perp$로 나뉜다고 생각하자



* 주어진 u와 S에 대해, 어떤 Orthogonal basis 에도 같은 u_S가 나온다.

ex) $S : \langle x, 0, y, 0, z \rangle$

$u = \langle 1, 4, 1, -1, 3 \rangle$

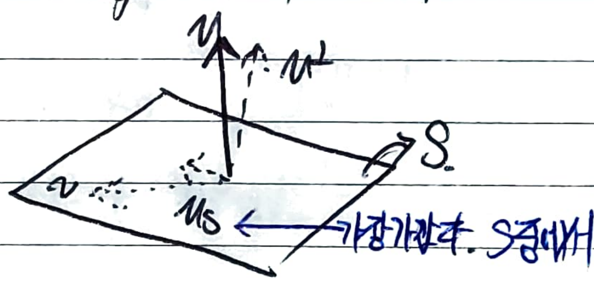
case1) $\left.\begin{array}{l} v_1 = \langle 1, 0, 0, 0, 0 \rangle \\ v_2 = \langle 0, 0, 1, 0, 2 \rangle \\ v_3 = \langle 0, 0, 2, 0, -1 \rangle \end{array}\right\} u_S = \langle 1, 0, 1, 0, 3 \rangle$

$\left.\begin{array}{l} v_1 = \langle 1, 0, 1, 0, 0 \rangle \\ v_2 = \langle -3, 0, 3, 0, 0 \rangle \\ v_3 = \langle 0, 0, 0, 0, 6 \rangle \end{array}\right\} u_S = \langle 1, 0, 1, 0, 3 \rangle$

* ∴ $|u - u_S| < |u - v|$ 이다.

즉, u_S은 u에 가장 가까운 벡터이다.

물론 Subspace S에 한해서.



6.7 The Function Space C[a, b].

1. 개념.

[1] R^n일 vector space
C[a,b]는 [a,b] 구간의 모든 실수계수 연속함수 집합.

② C[a,b]의 $f_1, f_2, \ldots f_n$에 대해, 상수 $c_1, c_2 \ldots c_n$

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0$$

이 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 에서만 성립 → linearly independent.

☆특징.
R^n은 finite한 basis가 있다.
C[a,b]는 basis가 무한히 크다. finite basis가 없다.

③ Dot Product for functions in C[a,b].

Weight function $W(x) > 0$. $\}$
$a < x < b$

$$f \cdot g = \int_a^b W(x) f(x) g(x)\, dx$$ (보통 $W(x)=1$ 둔다)

① 이때, $f \cdot g = \int_a^b W(x) f(x) g(x)\, dx = 0$ → orthogonal.

② norm of $f = \|f\| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_a^b p(x)\{f(x)\}^2 dx}$

2. 응용.

함수를 벡터로 본다는 점에서, $|f-f_S| < |f-g|$를 이용.

즉, f_S가 f에 가장 가까운걸 이용해 추정한다. 주어진 S에 대해.

ex) $f(x) = x(\pi - x)$.

Basis는 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x \ldots$ 같은 수열 日 가까운 함수에 근사

→ $c_1 \sin x + c_2 \sin 2x + c_3 \sin 3x + c_4 \sin 4x$ 형태로 추정함

즉, $$f_S = \frac{f \cdot \sin x}{|\sin(x)|^2} \sin x + \frac{f \cdot \sin 2x}{|\sin 2x|^2} \cdot \sin 2x + \frac{f \cdot \sin 3x}{|\sin 3x|^2} \cdot \sin 3x + \frac{f \cdot \sin 4x}{|\sin 4x|^2} \sin 4x$$

$$|\sin nx|^2 = \int_0^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nx)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$p(x)=1$로 가정

$$f \cdot \sin nx = \int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}$$

$$\therefore f_S = \frac{8}{\pi} \sin x + \frac{8}{27\pi} \sin 3x.$$

* Matrix Multiplication.

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$

* ERO : Elementary Row Operations.

Type 1 : 두 행 교환

Type 2 : 0 아닌 수를 한행에 곱.

Type 3 : 한행에 수 곱하고 다른행에 더한다.

* 행렬 A에 ERO를 한것 = I 에 ERO한걸 A에 곱한것.
* I에 ERO를 여러번해서 Ω를 만든후 $\Omega A \to$ ERO한 결과.
* ERO는 역산해서 ΩA 에서 A를 구할수 있다.

※ row equivalent : ERO통해서 $A \to B$ 된경우, A와 B는 row eq.

① 모든 행렬은 자신에게 row eq

② $A \Leftrightarrow B$. row eq (A가 B에게 row eq → B가 A에게 row eq)

③ A가 B에게, B가 C에게 row eq ⇒ A가 C에게 row eq.

* Reduced Form of Matrix

1. leading entry는 1.
2. leading entry 위아래로 모두 0.
3. nonzero row의 leading entry는 점점 오른쪽으로 밀려나야 한다.
4. zero row는 맨 밑에.

* 순서.

1. 0만 있는 행 아래로.
2. 맨위, 맨左을 leading entry 1로.
3. leading entry 위아래로 0.
4. 2, 3를 다음 행에 반복.

* 위의 과정을 $[A : I]$에 시행해서 $[A : I]_R$의 I_R을 구한 후,
  $A \cdot I_R = A_R$ 이 된다.

A_R의 nonzero rows는 [illegible] basis를 형성!

* 각 행을 row vector로 보면, row space가 형성, 이 sub space의 basis의 dimension을 row rank라고 한다.

* 모든 행렬에서 row rank = column rank.

* A를 A_R로 만들고, $\mathrm{rank}(A_R) = \mathrm{rank}(A)$
  $=$ number of nonzero rows of A_R.

7.5 Homogeneous System.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

* $AX=0$ 와 $A_RX=0$ 의 solution은 같다.

* A_R이 zero row가 존재시 free variable이 생긴다.

* $AX=0$의 solution set = solution space
  dimension of solution space =
  = m − number of nonzero rows of A_R
  = $m - \text{rank}(A) = m - \text{rank}(A_R)$

* if $m - \text{rank}(A) > 0 \Rightarrow$ nontrivial sol.
* if A가 $n \times n$ 이고, $A_R = I_n$ 이면 $\Rightarrow m - \text{rank}(A) = 0$
  $\Rightarrow$ trivial sol.

7.6 Nonhomogeneous System.

~~*형태~~ : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n$

즉, $AX = B$ 형태.

이때 근이 있으면 consistent
없으면 inconsistent.

* $AX=B$의 associated homogeneous sys $AX=0$ 에 대한 근 H이 있고, $AX=B$의 particular sol U_p가 있다면 $AX=B$의 general sol U는.

$$U = H + U_p \text{ 형태.}$$

즉, ① $AX=0$ → H를 구하고
② $AX=B$ → U_p를 구한다.

이때 $AX=0$ 에서 $A_R = I_n$ ⇒ H is trivial sol
all zero.
⇒ $U=U_p$. Unique sol.

* $AX=B$ 와 $A_R X = C_R$ 의 근은 같다.
이때, $[A:B]_R \to [A_R : C]$

Ex) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} X = \begin{vmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ ⇒ $\begin{array}{c} A_R \quad C \\ \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right| \end{array}$ $H = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $U_p = \begin{vmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 3/2 \end{vmatrix}$.

$\therefore U = H + U_p = \begin{vmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 3/2 \end{vmatrix}$

* A와 $[A:B]$가 rank가 같으면 (A_R과 $[A:B]_R$이 rank가 같으면)
$AX=B$는 consistent.
if rank(A) < rank([A:B])
$AX=B$는 inconsistent

EX) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 7 & -5 \\ -2 & -1 & 11 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$0x_1+0x_2+0x_3=1$ 인 상황이 나오게 된다...

7.7 Matrix inverse

* 정사각행렬 A에 대해,

$$AB = BA = I_n$$

성립하게하는 B는 A의 역행렬이다.

$$B = A^{-1}$$

* singular : 역행렬 X
nonsingular : 역행렬 O

* 역행렬 성질. (정사각행렬 n×n A)

① I_n 의 역행렬은 I_n

② $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

③ $(A^{-1})^{-1} = A$

④ $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

⑤,⑥ $A_R = I_n$ ($\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_R) = n$) ⇒ A는 nonsingular

⑦,⑧ AB nonsingular ⟹ A와 B도 nonsingular
A혹은B singular ⇒ AB와 BA도 singular

⑨ ERO의 elementary matrix는 nonsingular.
역행렬도 같은 타입의 elementary matrix가 나옴

⑩ n×1인 행렬인 임의의 B에 대해 AX=B가 solution이 있으면
A는 nonsingular.

* 역행렬과 sol 구하기.

① AX=0 근 $X = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$ 아니라면, A는 singular 이어야한다.

(∵ A singular → $A_R \neq I_n$. 당연히 $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 아닐 수 밖에).

② A nonsingular ⇒ AX=B unique solution
$X = A^{-1}B$

See EX 7.30

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 = -8 \\ 4x_1 - 8x_2 + 11x_3 = 15 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{53}\begin{pmatrix} 83 & -13 & -25 \\ -19 & 10 & 7 \\ -44 & 12 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{53}\begin{pmatrix} 83 & -13 & -25 \\ -19 & 10 & 7 \\ -44 & 12 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{53}\begin{pmatrix} 61 \\ -51 \\ 13 \end{pmatrix}$$

* 역행렬 만드는 법 (Gauss Elimination)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \quad (A:I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow (A:I_2)_R = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} \end{array}\right)$$

$\rightarrow A^{-1}$

여기에서
I_n이 나오면 nonsingular
안나오면 singular

CH8. Determinants.

* permutation : 모든 순서의 정수들을 나열해서, 한 수의 뒤에 수가 더 작은 수인 정수들을 합한 함수.

조:예시

$p(1)=2$
$p(2)=5$
$p(3)=1$
$p(4)=4$
$p(5)=3$

ex) $p: 12345 \to 25143.$

2보다 작은수 1개
5보다 작은수 3개
1 〃 0개
4 〃 1개

→ 이 permutation p는 odd.
$p=5.$

이때, $\sigma(p)=\begin{cases}1 & (\text{even})\\ -1 & (\text{odd})\end{cases}$

* Determinant 의 Definition.

$$\det A = |A| = \sum_{p} \sigma(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

ex) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

ex2) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

※ properties of Determinants.

① About ERO... A to B.

Type I : two row interchange.

$$|B| = -|A|$$

Type II : multiply one row by α

$$|B| = \alpha|A|$$

Type III : add α times one row to other.

$$|B| = |A|$$

② zero row/column → $|A|=0$

two row/column same → $|A|=0$

one row/colum is constant multiple of other row/colum → $|A|=0$

③ $|A^t| = |A|$

④ 하나의 row에 대해 $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$ (k는 constant) 성립시,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ b_{k1}+c_{k1} & \cdots & b_{kj}+c_{kj} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kj} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

할 때, 즉 $|A| = |B| + |C|$ 로 계산한다.

⑤ A, B 모두 n 정사각행렬일 때, $|AB| = |A||B|$

⑥ $|A| \neq 0$ → A는 nonsingular. (역행렬 有)

8.2 Evaluation of Determinants - 1

✱ 하나의 row/column을 한 원소 제외하고 모두 0로 만든다.

ex) 0이 있는 row의, 유일한 nonzero 원소의 행/열을 삭제

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

✱ $|A| = (-1)^{k+r} a_{kr} |A_{kr}|$. a_{kr}은 유일한 nonzero 원소. A_{kr}은 행/열 삭제한 새 행렬.

✱ ERO를 이용하여, 하나의 row/column을 zero로 만든다.
row operation 뿐 아니라 column operation도 가능
(단, determinant 관련 문제 한정)

EX)
$$A=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 15 & -3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[|A|=|B|]{\text{Type III}} B=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & 7 \\ 20 & 3 & 0 & -5 & 3 \\ 30 & 1 & 0 & -18 & -8 \\ -17 & 15 & 0 & 18 & 10 \end{pmatrix}$$

$|B| = (-1)^{1+3}(1)|C|$

$$\rightarrow C=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 7 \\ 20 & 3 & -5 & 3 \\ 30 & 1 & -18 & -8 \\ -17 & 15 & 18 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[|C|=|D|]{\text{Type III}} D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 103 & 15 & 143 \\ 30 & 151 & 12 & 202 \\ -17 & -70 & 1 & -109 \end{pmatrix}$$

$|D| = (-1)^{1+1}(-1)|E| = -|E|$

$$\rightarrow E=\begin{pmatrix} 103 & 15 & 143 \\ 151 & 12 & 202 \\ -70 & 1 & -109 \end{pmatrix} \xrightarrow[|E|=|F|]{\text{Type III}} F=\begin{pmatrix} 1153 & 0 & 1778 \\ 991 & 0 & 1510 \\ -70 & 1 & -109 \end{pmatrix}$$

$|F| = -|G|$

$$\rightarrow G=\begin{pmatrix} 1153 & 1778 \\ 991 & 1510 \end{pmatrix} \quad |G| = -20968$$

$|A| = |B| = |C| = |D| = -|E| = -|F|$
$= |G| = -20968.$

8.3 Evaluation of Determinants - 2.

큰 Det를 작은 Det의 합으로 만든다.

* expansion by cofactors. 앞의 Det 성질 ④에 의해 분리.

for $n \times n$ A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{k2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

이렇게 하고, 앞의 $|A| = (-1)^{k+r} a_{kr} |A_{kr}|$ 을 이용,

zero elem가 많은 row 고르면 개꿀

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}$$

: expansion by cofactors along row k.

* 같은 방식으로 하나의 열에 대해서도 가능하다. for $n \times n$ A,

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Ex1) $A = \begin{pmatrix} \boxed{-6 \quad 3 \quad 7} \\ 12 \quad -5 \quad -9 \\ 2 \quad 4 \quad -6 \end{pmatrix}$ $|A| = (-1)^{1+1} \cdot (-6) \begin{vmatrix} -5 & -9 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 12 & -9 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$

$+ (-1)^{1+3} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 12 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 172.$

Ex2) $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 7 \\ 12 & -5 & -9 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ $|A| = (-1)^{1+1} \cdot (-6) \begin{vmatrix} -5 & -9 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 12 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$

$+ (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} = 172.$

8.4 역행렬 공식. (Gauss Elimination 변형).

* 하기전에 $|A| \neq 0$ 먼저 확인.

$n \times n$ Matrix A가 nonsingular 일때, $B = A^{-1}$ 라하면

$$\ast \quad b_{ij} = \frac{1}{|A|}(-1)^{i+j} M_{ji}$$

EX)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 2 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

$|A| = 120.$

$$b_{11} = \frac{1}{120}(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} \quad M_{11}$$

$$b_{12} = \frac{1}{120}(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & -5 \end{vmatrix} \quad M_{21}$$

$$b_{13} = \frac{1}{120}(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \quad M_{31}$$

8.5 Cramer's Rule (실용성X, 컴퓨터계산용)

* $AX=B$ 가 unique 한 nonhomogeneous sol 구할때 사용.
즉, $U = H + U_p$. 에서, $H=0$ 이어야하므로,
$\text{rank}(A_R) = n$ 이어야 한다.

* A: $n \times n$ Matrix　　$AX=B$ 에대해,
B: $n \times 1$ vector.

$$x_k = \frac{1}{|A|}|A(k;B)|$$

이때 $A(k;B)$ 는, A의 column k를 B로 대체한것.

※
$$|A(k;B)| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ \text{column } k. \end{array}$$

9.1 Eigenvalue, Eigenvector.

* $n \times n$ Matrix A, $n \times 1$ vector x와 scalar λ에 대해서

$Ax = \lambda x$를 성립시키는 λ = eigenvalue
x = eigenvector associated to λ.

하나의 A에 대해서 λ는 1개에서 n개까지 존재가능.

* $n \times n$ Matrix 에 대해

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda)x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \underline{(A - \lambda I)X = 0}$$

이때 eigenvector는 nonzero. $\Rightarrow$ $|A-\lambda I| = 0$ 이어야한다.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ 인 특성방정식을 푼다.

ex) $A=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 에서,

$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$|A-\lambda I| = (5+\lambda)(2+\lambda)-4$

$= 10+7\lambda+\lambda^2-4 = (\lambda+6)(\lambda+1)=0.$

$\therefore \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-6.$

i) $\lambda_1=-1$ 에서

$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -4x_1+2x_2=0,$

$x_2=2x_1.$

$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ if $\alpha=1 \rightarrow x=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

ii) $\lambda_2=-6$ 에서

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_1+2x_2=0,$

$x_1=-2x_2.$

$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ if $\beta=1 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Thm1: n×n Matrix의 characteristic eq의 근의 1개에서 n개.
즉, eigenvalue는 1~n개.

Thm2: ω, x가 eigenvector 면, ω+x와 kx도 eigenvector.

※ Eigenspace of A: 하나의 λ에 대한 모든 eigenvector와 zero vector 의 집합

Ex) $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}-2-\lambda & 2 & -3\\ 2 & 1-\lambda & -6\\ -1 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}$

$= (\lambda-5)(\lambda+3)^2 = 0.$

i) for $\lambda=5$.

$|A-5I| = \begin{vmatrix}-7 & 2 & -3\\ 2 & -4 & -6\\ -1 & -2 & -5\end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$\therefore x_1 = -x_3,\ x_2 = -2x_3.$

$x = \alpha\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$

ii) for $\lambda=-3$

$(A+3I) = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$\therefore x_1 = -2x_2 + 3x_3$ $X = \alpha\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

※ n×n Matrix A의 서로 다른 n개의 eigenvalue
→ n개의 linearly independent eigenvector.

n개보다 작은, 즉 반복되는 eigenvalue 가 나와도
n개의 linearly independent eigenvector 나올수있다.

*Thm) $n\times n$ Matrix A의 eigenvalue가 λ라 할 때,

① A^T의 eigenvalue도 λ.
② A^{-1} 〃 $1/\lambda$
③ triangular, diagonal Matrices의 eigenvalue는 main diagonal entries다.

ex) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = 1, 2$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = 1$

* $\lambda = \alpha + i\beta$가 eigenvalue → $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$도 eigenvalue.
(A가 real Matrix인 경우)

* A가 real Matrix 인 경우, $\bar{A} = A$ 이며,
$\lambda = \alpha + i\beta$의 eigenvector E ~~이라 하면~~ ⇒
$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$의 eigenvector $\bar{E}$도 eigenvector다.

* real, Symmetric Matrix 의 모든 eigenvector는
서로 orthogonal 하다.

ex) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1)$
$= 0$.

real, Symmetric.

for $\lambda = -1$

$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

나머지는 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. 즉, 서로는 orthogonal.

* Symmetric Matrix : $A^T = A$ $(a_{kj} = a_{jk})$
Skew-Symmetric Matrix : $A^T = -A$ $(a_{kj} = -a_{jk})$
Orthogonal Matrix : $A^T = A^{-1}$

Ex) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ symmetric $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$ skew-symmetric

$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = A^{-1} \Rightarrow$ Orthogonal Matrix

* Symmetric Matrix R, skew-Symmetric Matrix S 에 대하여 행렬 A를 $A = R + S$로 표현할 수 있다.
이때, $R = (A + A^T)/2$ $S = (A - A^T)/2$

Ex) $A = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = R + S = \begin{bmatrix} 9 & 3.5 & 3.5 \\ 3.5 & 3 & -2.0 \\ 3.5 & -2.0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & -1.5 \\ -1.5 & 0 & -6 \\ 1.5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

* Thm 1. Symmetric Matrix 의 eigenvalue는 실수다.
ex) $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ $|A - \lambda I| = (\lambda - 9)^2(\lambda + 9) = 0$. $\lambda = \pm 9$

* Thm 2. Skew-Symmetric Matrix의 eigenvalue는 순허수 or zero.
ex) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$. $\therefore \lambda = \pm i$

*Thm 4

Orthogonal Matrix의 Determinant는 ±1 이다.

ex) $C = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$ $|C| = \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\right)$

$= -\frac{12}{27} - \frac{3}{27} - \frac{12}{27} = -1$

*Thm 5

Orthogonal Matrix의 Eigenvalue는 실수 or 켤레복소수 이다.

이때 그 Eigenvalue의 크기는 1이다.

ex) $C = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$ $|C-\lambda I| = -\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - 1 = 0.$

$\therefore \lambda = -1, \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{6}$

9.2. Diagonalization.

중요X . 1. Similarity.

$\hat{A} = P^{-1}AP$ 에대해 $\hat{A}$를 A의 similar하다한다.
P는 어떤 nxn nonsingular Matrix다.
이 과정을 similarity transform 이라 한다.

① $\hat{A}$와 A는 동일한 eigenvalue.
② A가 λ에대해 eigenvector x를 지니면,
$\hat{A}$는 λ에대해 $P^{-1}x$를 지닌다.

ex) $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda = 2, 3.$

$|\hat{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda = 2, 3.$

for $\lambda = 2$, A에서 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\therefore x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\hat{A}$에서 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

이때, $P^{-1}x = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

⋮

2. Diagonalization.

A가 eigenvector가 있을 때,

$D = X^{-1}AX$ 를 diagonal Matrix라고 한다.

이때, ① D는 A의 main diagonal entries가 들어있다.

② X는 A의 eigenvector를 column vector로 한 것이다.
이 순서는, D의 diagonal entries의 순서와 대응된다.

③ $n \times n$ Matrix A가 n개보다 적은 linearly independent eigenvector를 지니면 diagonalize 불가.
반드시 n개의 linearly independent eigenvector를 지녀야한다.
↳ 모든 eigenvector를 구해야한다 !

ex) $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ $\therefore \lambda = 1, 4.$

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\lambda = 4$: $\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow x_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$ $\quad$ $\therefore x_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore D = X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

※ $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 이면, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 된다.

CH10. 고계연립방정식의 해법.

10.1. $X'=AX$를 푸는 법. (constant A)

$X' = AX(t) + F(t)$ ← single Matrix equation.

$\downarrow$

$X' = AX(t)$ ← associated homogeneous equation.

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = \vdots \\ x_3' = \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$X' = AX + F$: $F=0$ → homogeneous $X' = AX$

※ $X'=AX$의 solution들 $\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_n$에 대해.

$\phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{12}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t) \end{pmatrix} \cdots \phi_n = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{2n}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$ 이라하면.

서로의 column vector가 linearly independent 하기 때문 가능

이 sol들이 서로 linearly independent 하려면, wronski

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & & \varphi_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

* $X'=AX$가 $n \times n$ matrix A 이고, n개의 linearly independent solution을 가지면, 각각의 solution $\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_n$에 대해.

(linear combi) general solution $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n$을 가진다.

☆ 이때, 이 general solution의 각항을 column vector로 보고, Ω를 형성할 수 있다.

즉,

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n \xrightarrow[\text{column vector}]{\text{to}} \Omega C. \quad \text{이때 } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ex) $X' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} X$ 의 두근, $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{3t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}$

즉, $X = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$

$$= \begin{pmatrix} -2c_1e^{3t} \\ c_1e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-2t)c_2e^{3t} \\ c_2te^{3t} \end{pmatrix}$$

이걸 ΩC 형태로 하면,

$$\Omega C = \begin{pmatrix} -2c_1e^{3t} & (1-2t)c_2e^{3t} \\ c_1e^{3t} & c_2te^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

* 이제부터 진짜 풀이법.

A가 $n \times n$ constant real Matrix 일때.

A의 eigenvalue λ 와, 그에따른 eigenvector E이 있을때,

solution $X = Ee^{\lambda t}$ 이다.

n개의 distinct eigenvalue가 아니다.

∵ $n \times n$ A에 대해 n개의 linearly independent eigenvector를 지니면, 각각의 solution들 $(E_1 e^{\lambda_1 t}, E_2 e^{\lambda_2 t} \ldots)$도 linearly independent 하다.

ex) $X' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} X \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 6$

$\therefore \lambda = 1, 6.$

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow X_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} e^t, \; X_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$

general solution → $\therefore X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$

$= \begin{pmatrix} c_1 e^t & c_2 e^{6t} \\ -\frac{3}{2} c_1 e^t & c_2 e^{6t} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} e^t & e^{6t} \\ -\frac{3}{2} e^{t} & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}$

$= \Omega(t)\, C$

* Eigenvalue가 허수가 나오는 경우.

Eigenvalue $\alpha + i\beta$ Eigenvector $U + iV$ 형태인데,

$$\begin{aligned} &e^{(\alpha+i\beta)t}(U+iV) \\ &e^{(\alpha-i\beta)t}(U-iV) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &e^{\alpha t}[\cos(\beta t)U - \sin(\beta t)V] \\ &e^{\alpha t}[\sin(\beta t)U + \cos(\beta t)V] \end{aligned}$$ 로 표시한다.

ex) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $X' = AX$ 에서.

eigenvalue 2, $-1 \pm \sqrt{3}i$

solution은 각각.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{3}i \\ -3+\sqrt{3}i \end{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{3}i)t} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3}i \\ -3-\sqrt{3}i \end{pmatrix} e^{(-1-\sqrt{3}i)t}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{3}i \\ -3+\sqrt{3}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = U + iV$$

$$\rightarrow \begin{aligned} &e^{-t}\{\cos\sqrt{3}t\, U - \sin\sqrt{3}t\, V\} \\ &e^{-t}\{\sin\sqrt{3}t\, U + \cos\sqrt{3}t\, V\} \end{aligned}$$

$$\therefore \Omega = \begin{Bmatrix} e^{2t} & e^{-t}\cos\sqrt{3}t & e^{-t}\sin\sqrt{3}t \\ 0 & 2\sqrt{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t & -2\sqrt{3}e^{-t}\cos\sqrt{3}t \\ 0 & e^{-t}[-3\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t] & e^{-t}[-3\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t] \end{Bmatrix}$$

* Eigenvalue가 중복되는 경우...
미분방정식의 특성방정식이 중근인 경우와 같이 한다.

$E_1 e^{\lambda t}$ 구하고, $\phi_2 = E_1 t e^{\lambda t} + E_2 e^{\lambda t}$ 을 원래식에 대입해 E_2 구하기
그리고 반복하면, $\phi_3 = \frac{1}{2!}E_1 t^2 e^{\lambda t} + E_2 t e^{\lambda t} + E_3 e^{\lambda t}$

$\phi_4 = \frac{1}{3!}E_1 t^3 e^{\lambda t} + \frac{1}{2!}E_2 t^2 e^{\lambda t} + E_3 t e^{\lambda t} + E_4 e^{\lambda t}$

$\vdots$

ex) $X' = AX$ 에서 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ $\lambda = 4 \to E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$ 변수가 2개이므로 two linearly independent solution이 있어야한다.

$\phi_2 = E_1 t e^{4t} + E_2 e^{4t}$.
이것을 대입.
$\phi_2' = E_1 e^{4t} + 4E_1 t e^{4t} + 4E_2 e^{4t}$
$A\phi_2 = AE_1 t e^{4t} + AE_2 e^{4t}$
이때, $AE_1 = \lambda E_1 = 4E_1$.

$\therefore E_1 e^{4t} + 4E_1 t e^{4t} + 4E_2 e^{4t}$
$= AE_1 t e^{4t} + AE_2 e^{4t}$
$= 4E_1 t e^{4t} + AE_2 e^{4t}$

$\Rightarrow E_1 e^{4t} + 4E_2 e^{4t} = AE_2 e^{4t}$

$(A - 4I)E_2 = E_1$ $\therefore$ E_2를 풀자

$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore -3a + 3b = 1$, $b = \frac{3a+1}{3}$.

$E_2 = \begin{pmatrix} a \\ \frac{3a+1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

$\phi_2 = \begin{pmatrix} te^{4t} \\ te^{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ \frac{4}{3}e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{4t} + e^{4t} \\ te^{4t} + \frac{4}{3}e^{4t} \end{pmatrix}$

$$\therefore \Omega = \begin{pmatrix} e^{4t} & (1+t)e^{4t} \\ e^{4t} & (4/3+t)e^{4t} \end{pmatrix}$$

10.2 $X' = AX + G$ 푸는법 (nonhomogeneous)

방법① $X' = AX$의 general solution $X = \Omega C$ 구하고,
$X' = AX + G$의 particular solution을 구해, $X = \Omega C + \psi_p$를 구한다.

$\psi_p = \Omega(t)U(t)$ 형태의 particular solution을 찾는다.
U는 n×1 Matrix.
원래 식에 대입하면,

$$(\Omega U)' = \boxed{\cancel{\Omega' U}} + \Omega U' = \boxed{\cancel{A\Omega U}} + G.$$

$\because \Omega' = A\Omega$

$$\therefore U' = \Omega^{-1}G, \quad U = \int \Omega^{-1}(t)G(t)\,dt.$$

이때, general solution은,

$$X(t) = \Omega(t)C + \Omega(t)U(t)$$

ex) $X' = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = -1, 6$ $E_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \Omega(t) = \begin{pmatrix} 5e^{-t} & -2e^{6t} \\ e^{-t} & e^{6t} \end{pmatrix}$ $\Omega^{-1}(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} e^{t} & 2e^{t} \\ -e^{-6t} & 5e^{-6t} \end{pmatrix}$

$\rightarrow U(t) = \int \Omega^{-1}(t)G(t)dt = \begin{pmatrix} (t+1)e^{t}/7 \\ \frac{-29}{252}e^{-6t} + \frac{1}{42}te^{-6t} \end{pmatrix}$

$\therefore X(t) = \Omega(t)C + \Omega(t)U(t)$
$= \begin{pmatrix} 5e^{-t} & -2e^{6t} \\ e^{-t} & e^{6t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5e^{-t} & -2e^{6t} \\ e^{-t} & e^{6t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (t+1)e^{t}/7 \\ -\frac{29}{252}e^{-6t} + \frac{1}{42}te^{-6t} \end{pmatrix}$

방법② A가 diagonalizable 하면, P가 A를 대각화 할 때,
X=PZ로 두고 대입해서 문제를 해결할 수 있다.

→ 두개의 연립미분 방정식을 각각의 미분방정식으로 만든다.

ex) $X' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 8 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}$ $\lambda = 2, 6$ $E_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

이때, X=PZ를 원식에 대입.

$$PZ' = A(PZ) + G$$
$$Z' = (P^{-1}AP)Z + P^{-1}G$$
$$= A_D Z + P^{-1}G$$

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \begin{cases} z_1' = 2z_1 - 2 + e^{2t} \\ z_2' = 6z_2 + 2 + 3e^{2t} \end{cases}$ 푼다. Laplace or Linear eq.

10.3 지수행렬 풀이.

$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2}(at)^2 + \frac{1}{3!}(at)^3 + \cdots$ 똑같이 행렬에 대해

$e^{At} = I_n + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$

* 행렬 지수의 성질.

① $e^{A\cdot 0} = e^0 = I \quad (A^0 = I)$

② $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$

③ $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

④ $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$

⑤ $e^{aIt} = e^{at} \cdot I$ (I는 단위행렬)

⑥ 대각행렬 $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{pmatrix}$

$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n t} \end{pmatrix}$

⑦ A가 대각화 가능해서 $D = P^{-1}AP \rightarrow A = PDP^{-1}$ 이고,

$e^{At} = e^{(PDP^{-1})t} = e^{P(Dt)P^{-1}} = I + P(Dt)P^{-1} + \frac{1}{2!}P(Dt)P^{-1} \cdot P(Dt)P^{-1} + \cdots$

$= Pe^{Dt}P^{-1}$ X'=AX 풀이에 사용.

※ homogeneous Linear equation solution.

$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$ ⇝ $X' = AX$를 만족.

즉. e^{At}는 fundamental Matrix 되고. e^{At}의 각 column vector는 서로 linearly independent 하다.

즉, $\Omega(t) = e^{At}$ 이고, general solution $X(t) = \Omega(t)C$
$= e^{At}C$ 이된다.

ex) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 인 $X' = AX$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-5) = 0.$

$\lambda = -2$ $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = -3x_2$ $\therefore E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\lambda = 5$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_1 = 2x_2.$ $\therefore E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A를 대각화 하면, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $e^{Dt}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}$

$\Omega(t) = e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$

$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{pmatrix}$

ex) 중근인 경우.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $X'=AX$ 에서,

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0.$

$\Omega(t) = e^{At} = e^{2t} \cdot e^{(A-2I)t} = e^{2t}[I + (A-2I)t]$

$= e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right]$

$= \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

아래참고
$(\lambda-2)^2=0$ 이므로
케-해 정리에 의해 $(A-2I)^2=0$ 성립.
$\therefore e^{At}=e^{2t}e^{(A-2I)t}$
$=I+(A-2I)t$
$\cancel{+\frac{1}{2!}(A-2I)^2t^2} \to 0$
$\vdots$

$\therefore X(t) = \Omega(t)\,C$

$= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

※. 케일리해밀턴 정리

A의 특성 방정식이 중근형태: $(A-\lambda I)^n=0$ 인 경우. 다음이 성립한다.

① $P(\lambda) = |A-\lambda I| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$

일 때

$P(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$

② $e^{At} = e^{\lambda I t} \cdot e^{(A-\lambda I)t}$ 로 유한항 표현이 가능하다.

$e^{(A-\lambda I)t} = I + (A-\lambda I)t + \frac{1}{2!}(A-\lambda I)\cdot(A-\lambda I)t^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}(A-\lambda I)^{n-1}t^{n-1}$

이기 때문이다.

③ $A^{-1} = (-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \cdots - a_2 A - a_1 I)/a_0$

4. non homogeneous Linear equation solution.

$X' = AX + G$의 solution은

$$X(t) = \Omega(t)C + \Omega(t)U(t)$$
$$= \Omega(t)C + \Omega(t)\int \Omega^{-1}(t)G(t)dt.$$
$$= \Omega(t)C + \Omega(t)\int_0^t \Omega^{-1}(s)G(s)ds$$
$$= \Omega(t)C + \int_0^t \Omega(t)\Omega^{-1}(s)G(s)ds.$$

$\Omega(s) = e^{st}$
$\Omega(s)^{-1} = (e^{st})^{-1} = e^{-st}$

이때 $\Omega(t)\Omega^{-1}(s) = e^{At}\cdot e^{-As} = e^{A(t-s)} = \Omega(t-s)$

$$\therefore X(t) = \Omega(t)C + \int_0^t \Omega(t-s)G(s)ds$$

(associated 사용) 이때 $X(t) = \Omega(t)C$, $C = \Omega^{-1}(t_0)X(t_0)$

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) &= \Omega(t)\Omega^{-1}(t_0)X(t_0) + \int_0^t \Omega(t-s)G(s)ds. \\ &= e^{At}X(t_0) + \int_0^t e^{A(t-s)}G(s)ds \end{aligned}}$$

ex) $X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$|A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 + 3 = 0.\quad \lambda = \pm 1.$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_2 = -1 \rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \Omega(t) = \begin{pmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{pmatrix}$

다음 참고. $\quad \underline{e^{At} = \Omega(t)\Omega^{-1}(0)} = \begin{pmatrix} 3e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{3}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

이걸 위 식에 대입.

※ $X' = AX$의 두 fundamental Matrix

$\psi(t) = \Omega(t)C$ 가 있다고 하면, $\psi = e^{At}$ 일때.

$e^{At} = \Omega(t)\Omega^{-1}(0)$ 로 표현 가능하다.