Quiz #1

2017170713 박준성

1. False

2. False

3.
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$ row 1 × 1 + row 3 하면

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$ row2×4 + row3 하면

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 이 상태이고, pivot이 모두 1이고, pivot column 에서 pivot이 유일한 nonzero 이므로, 이 matrix가 reduced echelon form 이다.

4. $b \in W$ 이려면 b가 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ 의 linear combination 이어야한다.

즉, $x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1-2x_2-6x_3 \\ 3x_2+7x_3 \\ x_1-2x_2+5x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ 이 consistent 해야한다.

이를확인하기위해 Augment Matrix를 보면

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$ 이고, row3 − 1× row1 하면

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$ 으로, pivot 아래가 모두 0이므로, 이는 echelon form이다. right most element에 pivot 이 없으므로, 위의 식은 consistent하고, $b \in W$ 이다.

5. $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}$

이 Consistent 해야 b가 a_1, a_2, a_3의 linear Combination이 된다.

이를 확인하기위해 Augment Matrix를 만든다.

Augment Matrix는

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & 0 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ 이고, row2 + 2xrow1 와, row3 - 2xrow1을 하면.

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 17 \end{bmatrix}$ 이고, row3 - row2 하면,

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ 이다. 이때 pivot이 rightmost element에 있으므로, Matrix equation은 inconsistent하고, b는 a_1, a_2, a_3의 linear combination이 될수 없다.

#Quiz 2

박준성, PARK JOON SUNG, 2021954959

1. True.

2. True

3. $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 3x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax$ 이므로,

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ 이다. 이때 $T(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$ 인 x는 Augment Matrix로 구하

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore x_1 = 5,\ x_2 = 2$ 이다. 즉, $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

4.

$$\begin{bmatrix} x_1+3x_2+x_3 \\ -4x_1-9x_2+2x_3 \\ x_1-5x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ 인데,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -4x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_2 \\ -9x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ -5x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & -9 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ 이다. 이를 Augment Matrix로 풀면

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -9 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 이다. $x_1-5x_3=-2$
$x_2+2x_3=1$ 이고,
x_3 : free variable

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+5x_3 \\ 1-2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 이다. x_3를 parameter t로 두면

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 이다.

5.

$Ax=b$ unique solution. $[a_1\ a_2\ a_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

따라서 A의 모든 column은 pivot을 가지고 있어야한다. A의 reduce echelon form은 결과 Identity Matrix가 될것이다. square matrix가 모든 column에 pivot이 있기 때문이다.

$$A_{reduced}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

이때 B는 $B=[a_1\ a_2\ a_3\ a_3\ a_2\ a_1]$ 으로, A의 column이 대칭으로 구성되어 있다. 1~3번째 column까지는 A에서와 마찬가지의 reduced form이 나올것이며 대칭성에 의해 4~6번째 column은 대칭으로 뒤집혀서 reduced form이 나올것이다.

즉, B의 reduced echelon form은 $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$ 이다.

(※ 이는 row operation이 column에는 영향이 없기때문이다.)

ex) $A=\begin{bmatrix}1&0&-2\\-2&1&6\\3&-2&-5\end{bmatrix}$ $A_{reduced}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&-2&-2&0&1\\-2&1&6&6&1&-2\\3&-2&-5&-5&-2&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

위의 예시와 같이 1~3번째의 연산에 상관없이 4~6번째의 column이 함께 연산됨을 알수있다. 이 알고리즘에 따라 위의 답은 타당하다.

Quiz 3

박준성 2021944949

1. False

2. False

3. Augment matrix $= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 5 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & -9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 11 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & -27 & -19 & -25 & 0 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & 38 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

pivot column의 위치에따라 bases of Col A는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

Augment matrix는 마저 reduce하면 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - 7x_5 = 0 \\ x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \to x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_3 \\ 3x_3 + 7x_5 \\ x_3 \\ 2x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bases of Nul A는 $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & -12 & -4 \\ 0 & 12 & 22 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

তাহলে $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0$ 이므로 역행렬 존재.

$n \times n$ 행렬이므로 $A^{-1}A = I$ 에서, $A^{-1} = E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1$ 가 존재할것이다.
역행렬을 찾는 과정을 통해 elementary matrices를 찾는다.

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$ row 2 → row2 − 2×row 1

$\therefore E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$ row2 → $-\frac{1}{2}$ × row 2

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$ row1 → row1 − 3 row 2

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$

따라서, $E_3 E_2 E_1 A = I$ 이고, $A^{-1} = E_3 E_2 E_1$ 이다.
이를 inverse 하면 $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$ 인데,
닫힌 식으로 표시하면 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Quiz 4

박준성 2021954959

1. False

2. True

3.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & -6 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} -(-4)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} + (-6)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\{(-\lambda)(5-\lambda)+6\} + 4(\lambda-5+3) - 6\cdot(-2+\lambda)$$

$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) + 4(\lambda-2) - 6(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)(-\lambda^2+3\lambda-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0$$

이때 $\lambda=2$이면 A의 Augmented Matrix $[A-\lambda I \;\; 0]$는

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1+2x_2+3x_3=0$, $x_1 = -2x_2-3x_3$ 이고, x_2, x_3는 free

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 이고, eigenvector는 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 1$이면 Augmented Matrix는

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $x_1 + 2x_3 = 0$

$x_2 + x_3 = 0$

x_3 free.

$\therefore$ $X = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이고,

$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 는 eigenvector 이다. P는 eigenvector의 column 집합이고, D는 eigenvalue의 diagonal 집합이다.

따라서 $P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 이고, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.

A : eigenvalues 0, 3, 5 eigenvector u, v, w

$$Au = 0 \cdot u = 0$$

$$Av = 3 \cdot v$$

$$Aw = 5 \cdot w$$ 이라고 하면

$Ax = \frac{1}{3}Av + \frac{1}{5}Aw = A\left(\frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w\right)$ 이다.

즉, $x = \frac{1}{3}v + \frac{1}{5}w$ 이다.

general solution은 $x = \frac{1}{3}c_1 v + \frac{1}{5}c_2 w$ 가 될 것이다.

(c_1, c_2는 상수)

5.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ 이를 echelon form으로 만들자.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

△표시된곳이 pivot이다.
이에 대응되는 곳에 Col A와
Row A가 있다. 따라서,

$$\text{Col } A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Row } A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

Nul A는 Augmented Matrix를 만들어 구한다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \div 2,$$

$x_4 = x_5 = 0$

x_3 free

$x_1 - 7/6\, x_3 = 0$

$x_2 + 1/3\, x_3 = 0$

$$\therefore x = \begin{bmatrix} 7/6\, x_3 \\ -1/3\, x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 7/6 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{Nul } A = \left\{ \begin{bmatrix} 7/6 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Quiz 5

박준성 2021954959

1. False

2. True

3. $y = at^2 + bt + c$

dataset에 따라

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot 0 + b\cdot 0 + c = 1 \\ a\cdot 1 + b\cdot 1 + c = 1 \\ a\cdot 4 + b\cdot 2 + c = 0 \\ a\cdot 9 + b\cdot 3 + c = 2 \\ a\cdot 16 + b\cdot 4 + c = 2 \end{array}\right\}$$ 를 Matrix로 표현하면

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

이고, 이는 각 위치에 대응되게 $Ax = b$ 의 형태이다.
여기서 $\hat{x}$를 구하기위에 normal equation을 사용한다.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ 15 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 5 & -20 & 10 \\ -20 & 87 & -54 \\ 10 & -54 & 62 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 51 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/14 \\ -39/70 \\ 36/35 \end{pmatrix}$$

즉, best-fitting qudratic polynomial 은 $y = \frac{3}{14}x^2 - \frac{39}{70}x + \frac{36}{35}$ 이다.

4. A의 각 열을 [a b c]로 보고, Gram-Schmidt Process를 행한다.

$V_1 = a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad u_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이고, $\therefore\ b\cdot u_1 = \frac{3}{2}$

$V_2 = b - \frac{b\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$ $\quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$c\cdot u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$ $\quad c\cdot u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$V_3 = c - \frac{c\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1 - \frac{c\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3/\sqrt{12} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6} \\ \frac{1}{2} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \\ \frac{1}{2} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ $\quad R = Q^T A$ 이므로,

$R = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} \end{bmatrix}$

$\therefore\ A = QR = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/\sqrt{12} & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} \end{bmatrix}$

5.

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 로 두면 $uu^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [1\ 0 \cdots 0] = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}}^{n} \Big) n$

$|A - \lambda I| = |(1-\lambda)I - 2uu^T| = 0$ 이 되게하는 λ를 구하라.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \cdots & & 0 \\ \vdots & 1-\lambda & & \\ \vdots & & 1-\lambda & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(-1-\lambda)}_{1\text{개}}\underbrace{(1-\lambda)\cdots(1-\lambda)}_{n-1\text{개}} = 0$$

$(\because$ triangular form$)$

$\therefore \lambda = -1$ or $\lambda = 1$ 이다.

이는 u의 1이 어느 row에 있어도 변함이 없음이 자명하다.

그저 $-1-\lambda$의 위치가 diagonal entry에서 변경될 뿐이다.