그래픽 곡면과 곡선

Graphic Curve

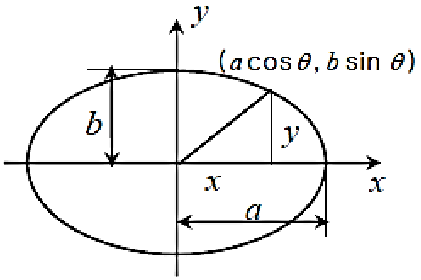
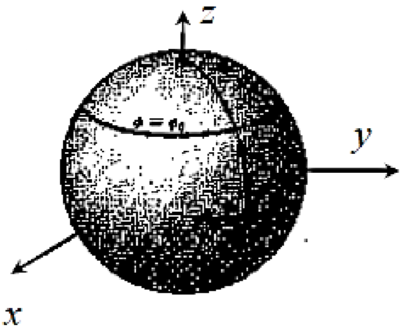
곡면과 곡선

3차원 상의 곡선과 곡면

대상	양 함수식 표현 (explicit form)	음 함수식 표현 (implicit form)	매개 변수식 표현 (parametric form)
이차원 평면 곡선	$y = f(x)$	$f(x, y) = 0$	$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$
삼차원 공간 곡선	$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = g(x,y) \end{cases}$	$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$	$\mathbf{r}(t) =$ $(x(t), y(t), z(t))$
곡면	$z = f(x,y)$	$f(x,y,z) = 0$	$\mathbf{r}(u,v) =$ $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

곡면과 곡선

3차원 상의 곡선과 곡면 (분류별 표현 예)

	양함수식 표현	음함수식 표현	매개변수식 표현
	$y = b\sqrt{1-x^2/a^2}$ $y = -b\sqrt{1-x^2/a^2}$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\mathbf{r}(\theta)=\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$ $0<\theta<2\pi$
	$z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$ $z = -\sqrt{r^2-x^2-y^2}$	$x^2+y^2+z^2-r^2=0$	$\mathbf{r}(\theta,\phi)=$ $\begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$

곡면과 곡선

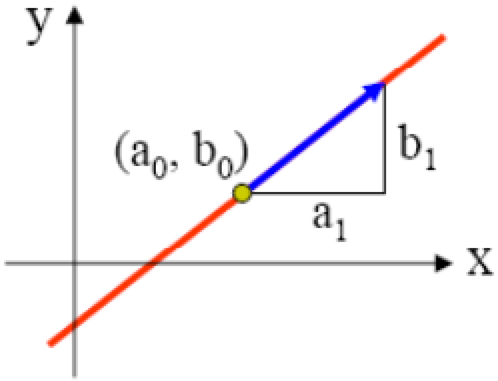
매개 변수식

- $x = f(t), y = g(t)$
  > 매개변수 t를 매개로 x, y를 얻음

- 직선

$$x = \ a_0 + a_1 t$$
$$y = \ b_0 + b_1 t$$

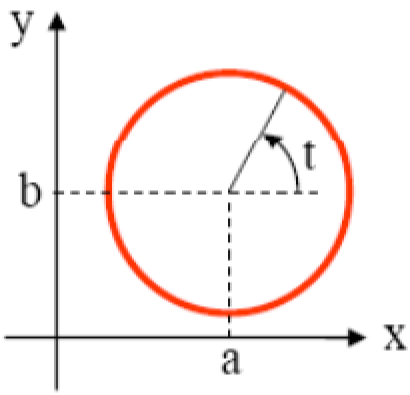
  > t가 0일 때 (a_0, b_0)를 지나고
  > x가 a_1 갈 때 y가 b_1 만큼 이동



- 원

$$x = a + rcos(t)$$
$$y = b + rcos(t)$$

  > 중심이 (a, b)에 있고
  > 반경이 r



곡면과 곡선

매개 변수식

일반형

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

$\boldsymbol{t}$가 결정되면 x, y, z가 결정

1차식

$$x = a_0 + a_1 t$$
$$y = b_0 + b_1 t$$
$$z = c_0 + c_1 t$$

2차식

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$
$$z = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

3차식

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$
$$z = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

Scalar form

$$x(u) = a_{0x} + a_{1x}u + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3$$
$$y(u) = a_{0y} + a_{1y}u + a_{2y}u^2 + a_{2y}u^3$$
$$z(u) = a_{0z} + a_{1z}u + a_{2z}u^2 + a_{3z}u^3$$

$$0 \le u \le 1$$

Vector form

$$\mathrm{r}(u) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 u + \mathrm{a}_2 u^2 + \mathrm{a}_3 u^3 = \sum_{i=0}^{3} u^i \mathrm{a}_i$$

$$0 \le u \le 1$$

Matrix form

$$\mathrm{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a}_0 \\ \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \\ \mathrm{a}_3 \end{bmatrix} = \mathrm{UA}$$

$$0 \le u \le 1$$

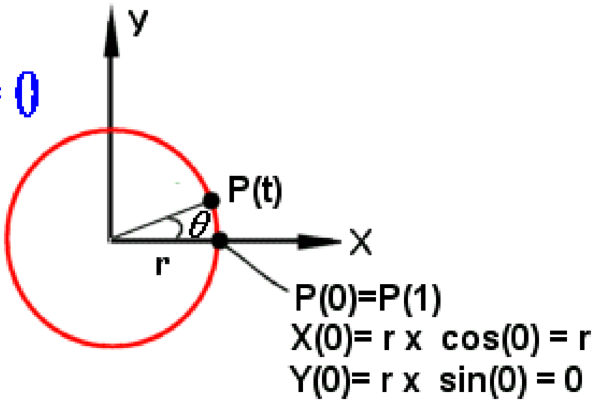
곡면과 곡선

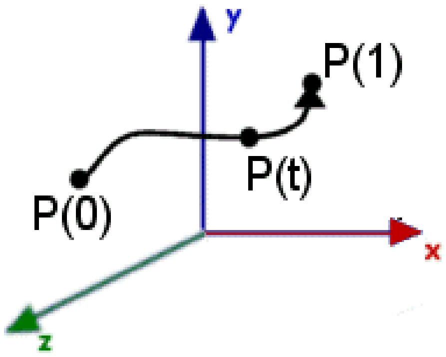
곡선의 매개변수 식

- t라는 변수 1개에만 의존
- 일반적으로 매개변수 식은 매개변수 t 값은 0 ~ 1 사이로 정의

  예) xy 평면에서 원점을 중심으로 한 원의 경우 매개변수 식을 이용하면 다음과 같은 식으로 표현

$$x(t) = r \cdot \cos(2\pi t),\ y(t) = r \cdot \sin(2\pi t),\ z(t) = 0$$





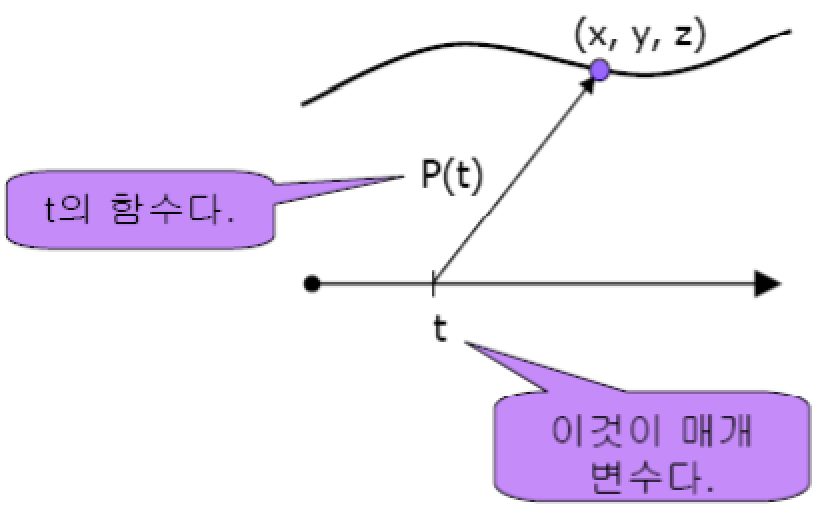
$$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

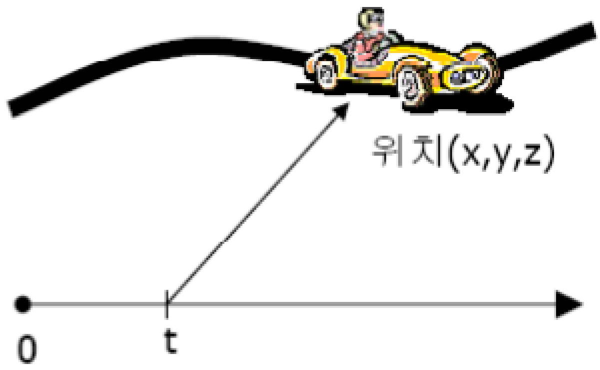
x = 5-t^2 y = $\frac{t}{4}$ -3 <= t <= 4 ??

곡면과 곡선

곡선의 매개변수 식

- 매개 변수로 곡선(이동 궤적)을 표현 가능
  x, y, z를 직접 조작하는 것이 아닌, 매개 변수 t를 넣어 좌표 값을 계산하므로
  t를 알면 해당 위치를 알 수 있음



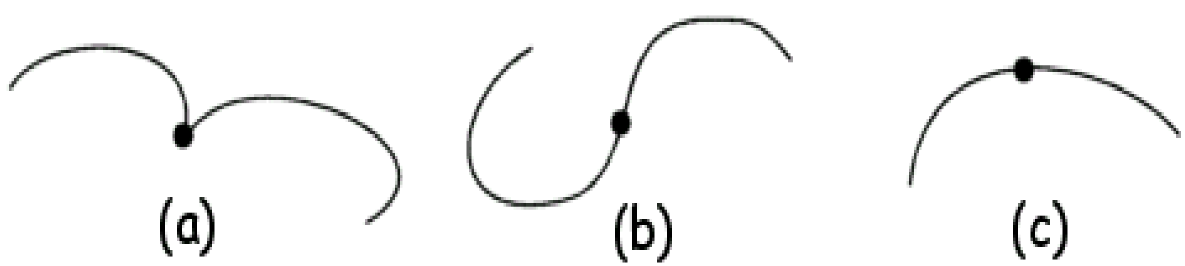


곡면과 곡선

곡선의 매개변수 식

- 하지만, 임의의 곡선을 하나의 매개변수 식에 의해 나타낸다는 것은 불가능
  > 곡선을 여러 부분으로 나눠 각 각의 부분곡선에 맞는 매개변수식을 정의
  매개 변수식의 집합으로 전체 곡선을 나타냄
  > 다항식 형태
  > 곡선의 한 부분에서 옆의 부분으로 옮겨갈 때 자리 옮김이 부드럽게 이루어 지는 지에 대해 알아야 함 (곡선상에서의 부드러움)

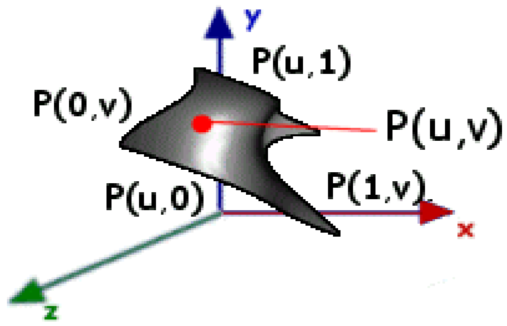
(a) 0차 연속(zero-order continuity) : 두 곡선이 단지 만남
(b) 1차 연속(first-order) : 두 곡선의 1차 미분 값이 같음
(c) 2차 연속(second-order): 두 곡선의 2차 미분 값이 같음



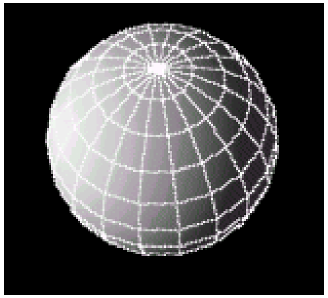
곡면과 곡선

표면의 매개 변수 식

- 두 개의 변수 (u, v)에 의해 정의
  > 표면상 좌표 점은 다음과 같은 벡터 함수로써 표현 가능
  > 두 개의 변수 u, v는 0~1 사이에서 변하도록 함



$$P(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$



$$x(u,v) = r\sin(\pi u)\cos(2\pi v)$$
$$y(u,v) = r\sin(\pi u)\sin(2\pi v)$$
$$z(u,v) = r\cos(\pi u)$$

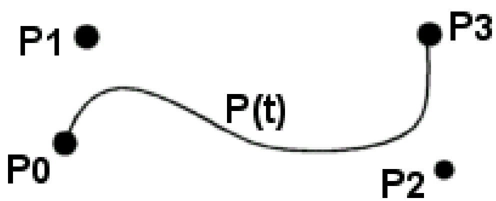
r : 구의 반지름
매개변수 u : 곡면상의 위도 선을 표시,
매개변수 v : 경도선
한 매개변수 값을 고정시키고, 다른 매개변수 값을 0부터 1까지 변화시키면 구를 표현한다.

곡면과 곡선

제어점과 매개 변수식

- 실제 디자인 등 응용할 경우, 곡선이나 곡면은 대화식으로 몇 개의 제어점을 지정함으로써 정의하는 방법을 사용

- 제어점들을 사용하여 하나의 곡선을 나타내는 **다항 매개변수식**을 만들어냄



(a)Interpolate (b)Approximate

- 이 때, 만들어지는 곡선이 모든 제어점을 지나가는 경우와 (포함: Interpolation), 곡선이 제어점에 가깝게 위치하게 만드는 경우가 있음 (접근: Approximation)

- 주어진 제어점에 의하여 그의 유사한 곡선이나 곡면에 해당하는 다항매개변수식을 만드는 기법으로는 “베지어(Bezier)”와 “스플라인(spline)” 기법이 존재

곡면과 곡선

베지어 곡선 (Bezier Curves)

- 몇 개의 제어점을 입력하면, 제어점의 좌표 값으로 부터 다항 함수를 만들고 이를 이용하여 근접 커브를 만들어 냄

- N+1 개의 제어점 입력 해야함

- 각 점이 벡터 $P_k = (x_k, y_k, z_k)$ 형태로 지정되었다고 가정 (k=0~n)
  > N+1 점들로부터 입력된 제어점 P_k 에 맞는 곡선을 위한 3개의 매개변수식을 나타내는 근접 베지어 벡터 함수 P(t)를 계산해 낼 수 있음

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t)$$

- $B_{k,n}(t)$: 다항함수

$$B_{k,n}(t) = C(n,k)t^k(1-t)^{n-k}$$

- $C(n,k)$: 이항분포 계수

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

곡면과 곡선

베지어 곡선 (Bezier Curves)

- $B_{k,n}(t)$: 제어점 P_k 를 위한 n번째 결합함수
  > 각 각의 제어점을 혼합하여 하나의 곡선을 나타내는 복합적인 함수를 만들어 냄
  > 복합적인 함수의 차원: 사용된 제어점의 개수 – 1
  예) 3개의 제어점 > 2차원 포물선
  4개의 제어점 > 3차원 곡선

- 매개변수 공식 $P(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t)$ 을 각 각 곡선좌표 값에 대하여 적용

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k B_{k,n}(t)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} y_k B_{k,n}(t)$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n} z_k B_{k,n}(t)$$

곡면과 곡선

베지어 곡선 (Bezier Curves) – 1차 (linear Bezier curves)

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t)$$

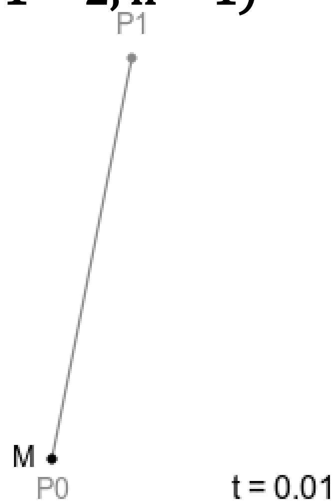
$$B_{k,n}(t) = C(n,k)t^k(1-t)^{n-k}$$

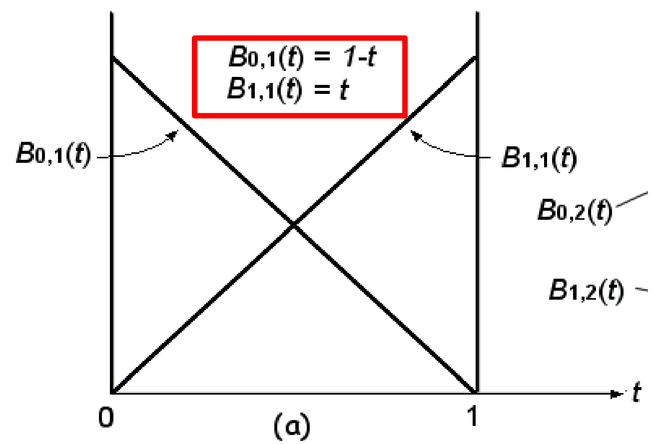
$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- 제어점 2개, P0, P1 (즉, n+1 = 2, n = 1)
- n = 1, k = 0, 1

$$B_{0,1}(t) = C(1,0)t^0(1-t)^1$$
$$= \frac{1!}{0!1!}t^0(1-t)^1$$
$$= (1-t)^1$$

$$B_{1,1}(t) = C(1,1)t^1(1-t)^0$$
$$= \frac{1!}{1!0!}t^1(1-t)^0$$
$$= t^1$$





제어점 P0과 P1에 대한 베지어 곡선은

$$P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

곡면과 곡선

베지어 곡선 (Bezier Curves) – 1차 (linear Bezier curves)

$$P(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k B_{k,n}(t)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} y_k B_{k,n}(t)$$

$$x(t) = (1 - t)x_0 + tx_1$$

$$y(t) = (1 - t)y_0 + ty_1$$

곡면과 곡선

베지어 곡선 (Bezier Curves) – 2차 (Quadratic Bezier)

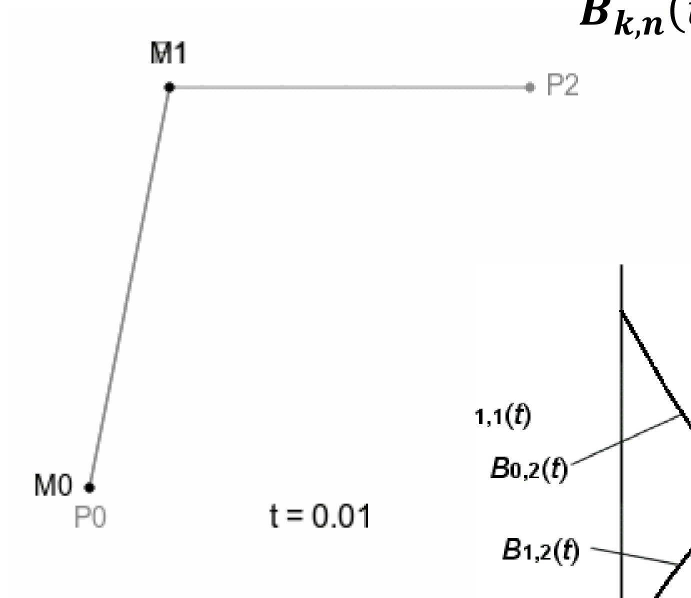
- 제어점 3개, P0, P1, P2 (즉, n+1 = 3, n = 2)
- n = 2, k = 0, 1, 2

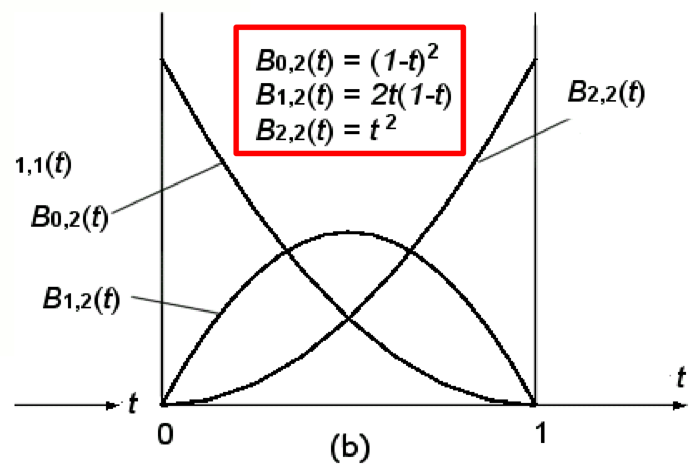
$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t)$$

$$B_{k,n}(t) = C(n,k)t^k(1-t)^{n-k}$$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} B_{0,2}(t) &= C(2,0)t^0(1-t)^2 \\ &= \frac{2!}{0!2!}t^0(1-t)^2 \\ &= (1-t)^1 \\ B_{1,2}(t) &= C(2,1)t^1(1-t)^1 \\ &= \frac{2!}{1!1!}t^1(1-t)^1 \\ &= 2t^1(1-t) \\ B_{2,2}(t) &= C(2,2)t^2(1-t)^0 \\ &= \frac{2!}{2!0!}t^2(1-t)^0 \\ &= t^2 \end{aligned}$$





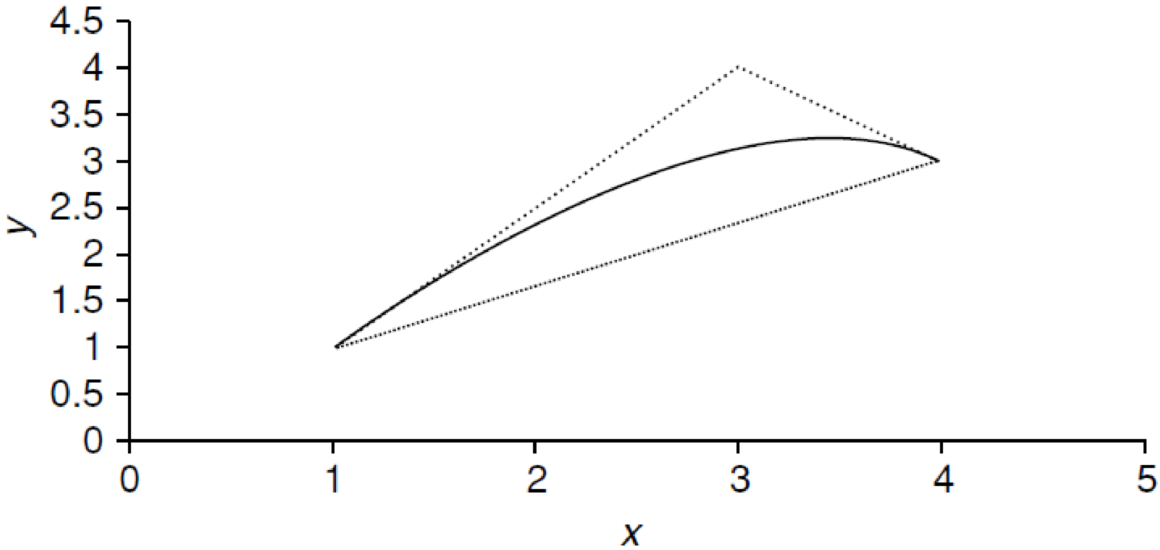
$$\therefore\ P(t) = (1-t)P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$$

곡면과 곡선

베지어 곡선 (Bezier Curves) – 2차 (Quadratic Bezier)

- If (1, 1) (3, 4) (4, 3)

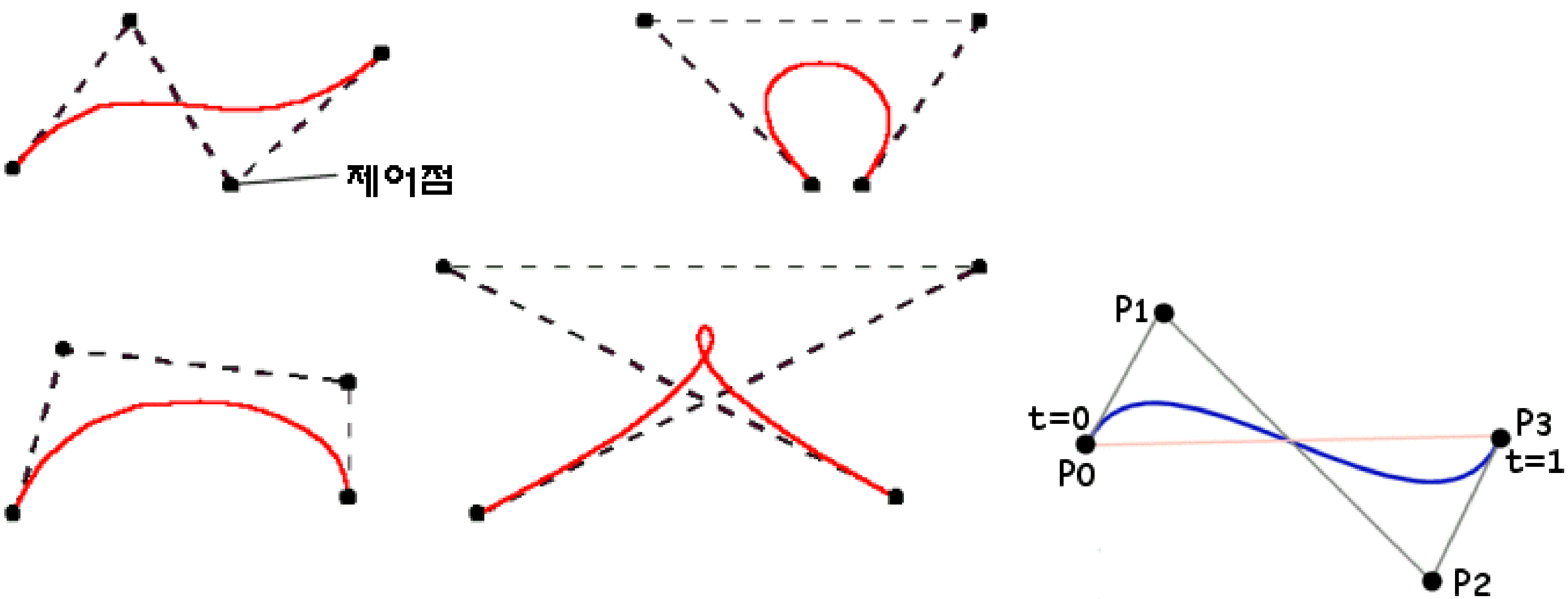
$$\therefore\ P(t) = (1-t)P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$$



곡면과 곡선

베지어 곡선 (Bezier Curves) – 3차 (Cubic)

- xy 평면에서 제어점 4개를 가진 베지어 곡선 예

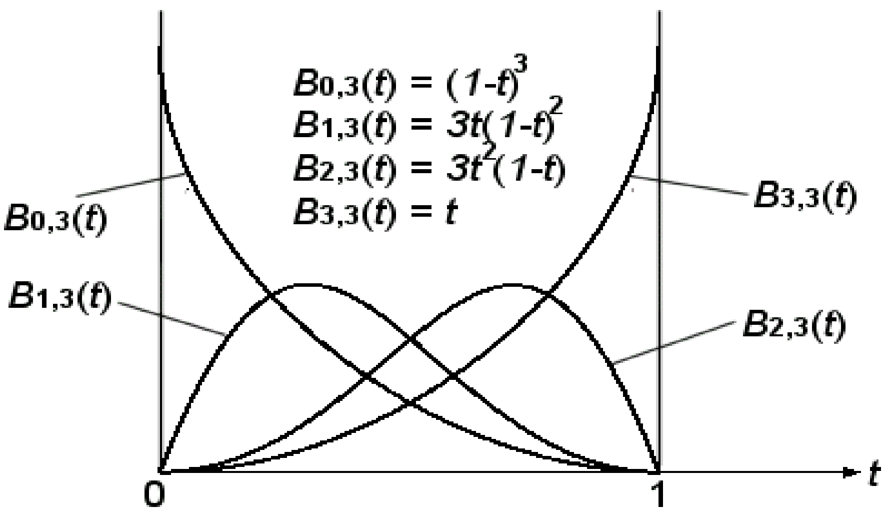


- 중요 성질: 곡선이 제어점으로 만들어진 다각형 내 위치함
(곡선은 항상 제어점을 벗어나지 않고 그 안에서 부드럽게 그려짐

곡면과 곡선

베지어 곡선 (Bezier Curves) – 3차 (Cubic)

- 4개의 제어점에 맞는 곡선을 만들기 위해 사용되는 4개의 베지어 다항식 모양
  > 각 결합함수는 하나의 제어점이 매개변수 t 값에 따라 곡선의 모양에 어떻게 영향을 주는가를 결정



- t = 0, 함수 값이 0이 아닌 것은 $B_{0,3}$ 값은 1
- t = 1, 함수 값이 0이 아닌 것은 $B_{3,3}$ 값은 1

즉, 베지어 곡선에서는 언제나 처음 제어점과 마지막 제어점을 지남

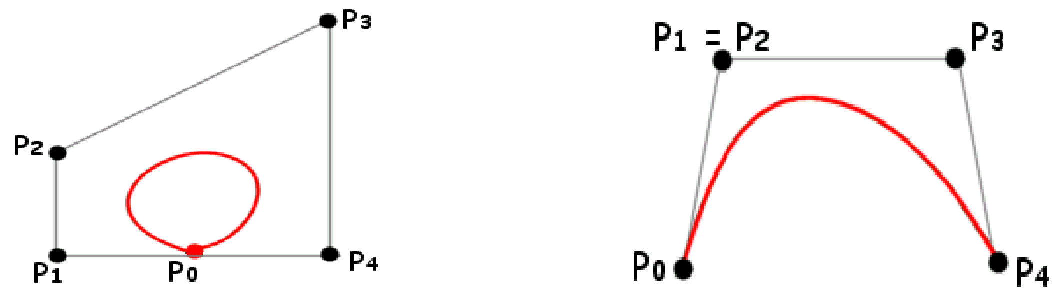
다른 함수는 t의 중간 값을 취하면서 곡선 모양의 영향을 주게 됨
(p1과 p2에 치우치는 형태)

$$\therefore\ P(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$$

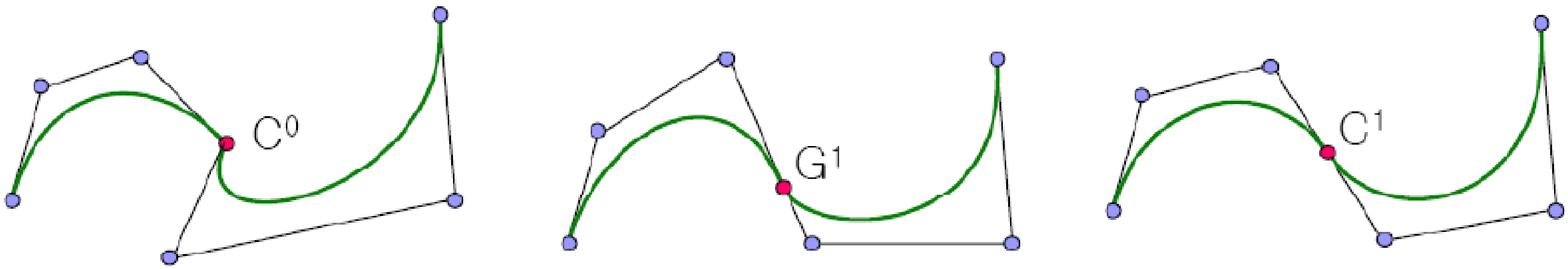
곡면과 곡선

제어점 입력에 따른 결과

- 처음과 마지막 제어점을 같게 지정 > 닫혀진(closed)곡선이 만들어짐
- 하나의 점에 제어점을 복수 지정 > 그 점에 비중이 더해짐

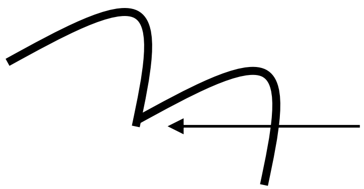


- 제어점이 많아질 경우 계산이 복잡해지므로 제어점을 나누어 처리
- 이를 곡선 세분화(Curve Segment)라 하며 이어지는 점을 어떻게 생성하는지에 따라 곡선의 연결점 부드러움이 결정됨



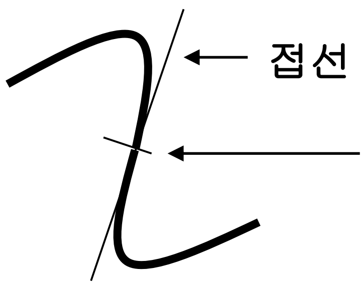
곡면과 곡선

제어점 입력에 따른 결과



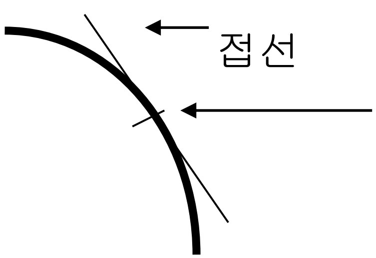
Zero-Order Continuity

두개의 곡선의 단순히 연결되어 있는 것
첫 번째 곡선의 끝점과 두 번째 곡선의 시작점을 일치시킴으로써 얻을 수 있다.



First-Order Continuity

첫 번째 곡선의 끝점과 두 번째 곡선의 시작 점을 연결 시키고, 두 곡선의 연결 점에서의 접선의 기울기를 같게 함으로써 얻을 수 있다.
이 경우 두 곡선의 연결 점을 눈으로 식별할 수 없다.



Second-Order Continuity

연결 점에서의 접선의 기울기 뿐 아니라 곡률까지 같게 함으로써 얻을 수 있다. 이 경우에는 연결 점을 식별할 수 없을 뿐 아니라 두 개의 곡선이 마치 하나의 곡선같이 보인다.

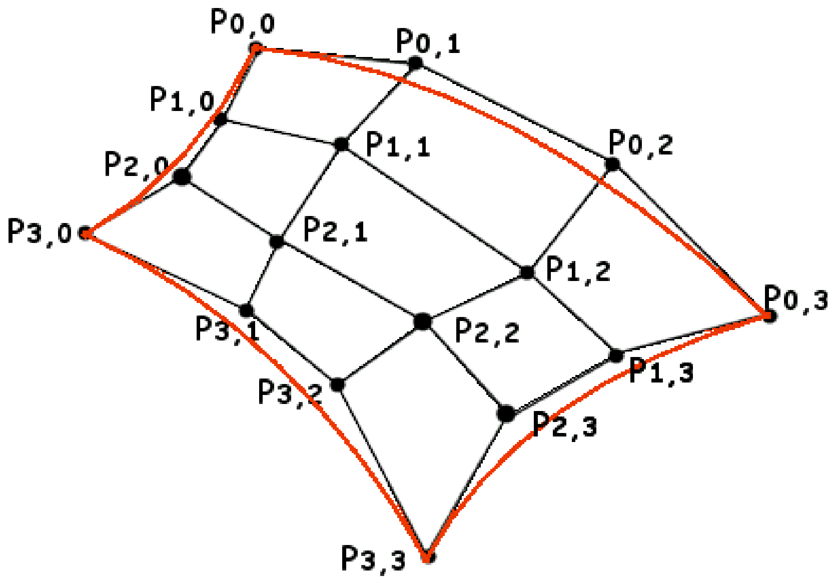
곡면과 곡선

베지어 표면

- 표면 : 두 개의 베지어 곡선을 이용하여, 제어점들에 의하여 표현

- 베지어 표면에서 매개변수 벡터 함수는 베지어 결합함수의 곱으로 나타낸다.
  Pj, k : (m+1)×(n+1)개의 제어점의 위치를 가리킴

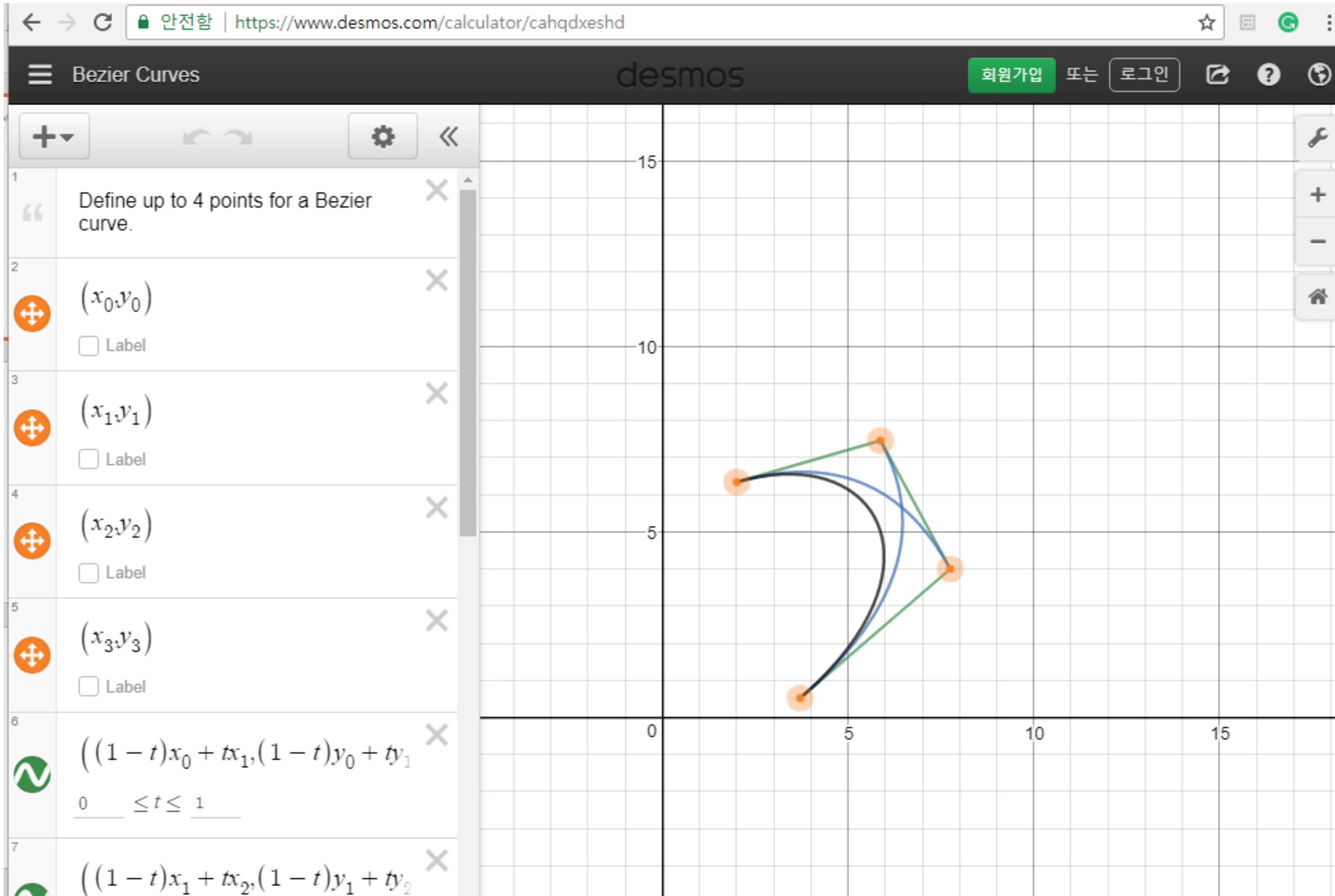
$$P(u,v) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{j,k} B_{j,m}(u)\, B_{k,n}(v)$$



3 개의 베지어 표면으로 만든 하나의 베지어 곡면

곡면과 곡선

베지어 예제 사이트 https://www.desmos.com/calculator/cahqdxeshd



곡면과 곡선

베지어 예제 사이트

http://lib.ivank.net/?p=demos&d=bezier