



# 그래픽 곡면과 곡선

Graphic Curve

# 곡면과 곡선

## 3차원 상의 곡선과 곡면

대상	양 함수식 표현 (explicit form)	음 함수식 표현 (implicit form)	매개 변수식 표현 (parametric form)
이차원 평면 곡선	$y = f(x)$	$f(x, y) = 0$	$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$
삼차원 공간 곡선	$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = g(x, y) \end{cases}$	$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$	$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
곡면	$z = f(x, y)$	$f(x, y, z) = 0$	$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

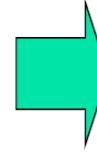
# 곡면과 곡선



## 매개 변수식

일반형

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$



$t$ 가 결정되면  $x, y, z$ 가 결정

1차식

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t \\ y &= b_0 + b_1 t \\ z &= c_0 + c_1 t \end{aligned}$$

2차식

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ y &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \\ z &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \end{aligned}$$

3차식

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ y &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \\ z &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \end{aligned}$$

Scalar form

$$x(u) = a_{0x} + a_{1x}u + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3$$

$$y(u) = a_{0y} + a_{1y}u + a_{2y}u^2 + a_{3y}u^3$$

$$z(u) = a_{0z} + a_{1z}u + a_{2z}u^2 + a_{3z}u^3$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Vector form

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 u + \mathbf{a}_2 u^2 + \mathbf{a}_3 u^3$$

$$= \sum_{i=0}^3 u^i \mathbf{a}_i$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Matrix form

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{A}$$

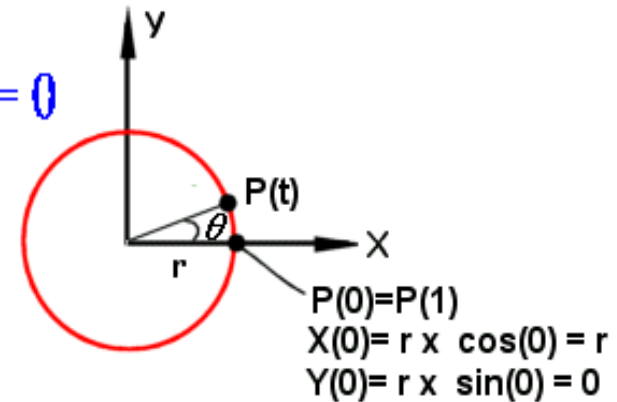
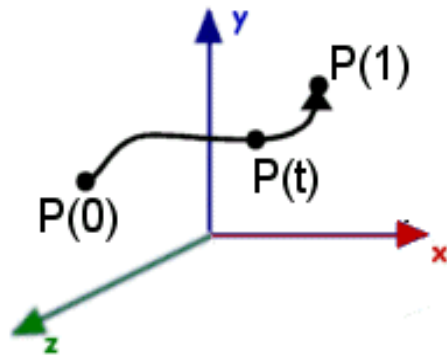
$$0 \leq u \leq 1$$

# 곡면과 곡선

## 곡선의 매개변수 식

- $t$ 라는 변수 1개에만 의존
- 일반적으로 매개변수 식은 매개변수  $t$  값은  $0 \sim 1$  사이로 정의
- 예)  $xy$  평면에서 원점을 중심으로 한 원의 경우 매개변수 식을 이용하면 다음과 같은 식으로 표현

$$x(t) = r \cdot \cos(2\pi t), \quad y(t) = r \cdot \sin(2\pi t), \quad z(t) = 0$$



$$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$x = 5 - t^2 \quad y = \frac{t}{4} \quad -3 \leq t \leq 4 \quad ??$$

# 곡면과 곡선



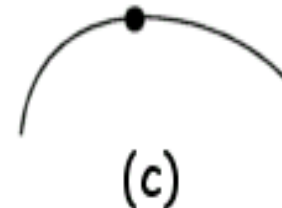
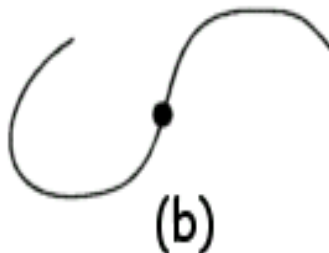
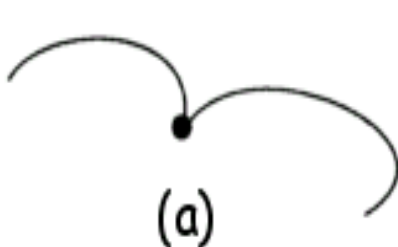
## 곡선의 매개변수 식

- 하지만, 임의의 곡선을 하나의 매개변수 식에 의해 나타낸다는 것은 불가능
  - > 곡선을 여러 부분으로 나눠 각 각의 부분곡선에 맞는 매개변수식을 정의
  - 매개 변수식의 집합으로 전체 곡선을 나타냄
  - > 다항식 형태
  - > 곡선의 한 부분에서 옆의 부분으로 옮겨갈 때 자리 옮김이 부드럽게 이루어 지는 지에 대해 알아야 함 (곡선상에서의 부드러움)

(a) 0차 연속(zero-order continuity) : 두 곡선이 단지 만남

(b) 1차 연속(first-order) : 두 곡선의 1차 미분 값이 같음

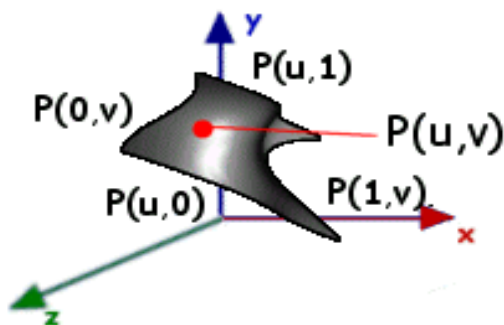
(c) 2차 연속(second-order) : 두 곡선의 2차 미분 값이 같음



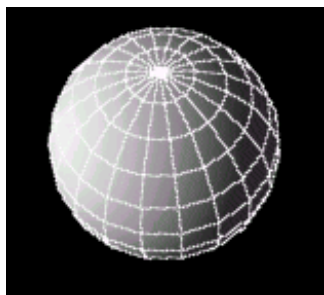
# 곡면과 곡선

## 표면의 매개 변수 식

- 두 개의 변수  $(u, v)$ 에 의해 정의
  - > 표면상 좌표 점은 다음과 같은 벡터 함수로써 표현 가능
  - > 두 개의 변수  $u, v$ 는  $0 \sim 1$  사이에서 변하도록 함



$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



$$x(u, v) = r \sin(\pi u) \cos(2\pi v)$$

$$y(u, v) = r \sin(\pi u) \sin(2\pi v)$$

$$z(u, v) = r \cos(\pi u)$$

$r$  : 구의 반지름

매개변수  $u$  : 곡면상의 위도 선을 표시,

매개변수  $v$  : 경도선

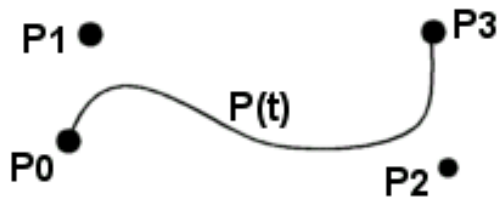
한 매개변수 값을 고정시키고, 다른 매개변수 값을 0부터 1까지 변화시키면 구를 표현한다.

# 곡면과 곡선



## 제어점과 매개 변수식

- 실제 디자인 등 응용할 경우, 곡선이나 곡면은 대화식으로 몇 개의 제어점을 지정함으로써 정의하는 방법을 사용
- 제어점들을 사용하여 하나의 곡선을 나타내는 다항 매개변수식을 만들어냄



(a)Interpolate



(b)Approximate

- 이 때, 만들어지는 곡선이 모든 제어점을 지나가는 경우와 (포함: Interpolation), 곡선이 제어점에 가깝게 위치하게 만드는 경우가 있음 (접근: Approximation)
- 주어진 제어점에 의하여 그의 유사한 곡선이나 곡면에 해당하는 다항매개 변수식을 만드는 기법으로는 “베지어(Bezier)”와 “스플라인(spline)” 기법이 존재



## 베지어 곡선 (Bezier Curves)

- 몇 개의 제어점을 입력하면, 제어점의 좌표 값으로 부터 다항 함수를 만들고 이를 이용하여 근접 커브를 만들어 냄
- N+1 개의 제어점 입력해야함
- 각 점이 벡터  $P_k = (x_k, y_k, z_k)$  형태로 지정되었다고 가정 (k=0~n)  
> N+1 점들로부터 입력된 제어점  $P_k$  에 맞는 곡선을 위한 3개의 매개변수식을 나타내는 근접 베지어 벡터 함수  $P(t)$ 를 계산해 낼 수 있음

$$P(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,n}(t)$$

•  $B_{k,n}(t)$  : 다항함수

$$B_{k,n}(t) = C(n, k) t^k (1 - t)^{n-k}$$

•  $C(n, k)$  : 이항분포 계수

$$C(n, k) = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$





## 베지어 곡선 (Bezier Curves)

- $B_{k,n}(t)$  : 제어점  $P_k$  를 위한  $n$ 번째 결함함수
  - > 각 각의 제어점을 혼합하여 하나의 곡선을 나타내는 복합적인 함수를 만들어 냄
  - > 복합적인 함수의 차원: 사용된 제어점의 개수 - 1
  - 예) 3개의 제어점 > 2차원 포물선
  - 4개의 제어점 > 3차원 곡선
- 매개변수 공식  $P(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,n}(t)$  을 각 각 곡선좌표 값에 대하여 적용

$$x(t) = \sum_{k=0}^n x_k B_{k,n}(t)$$

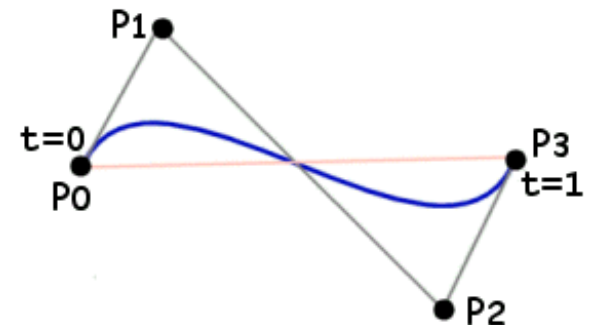
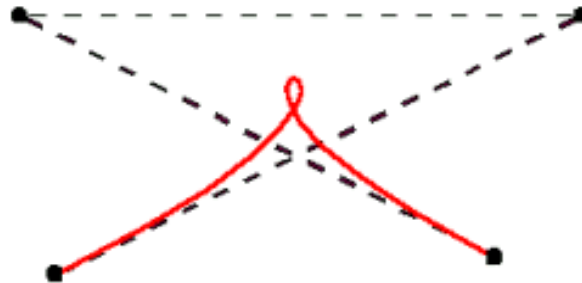
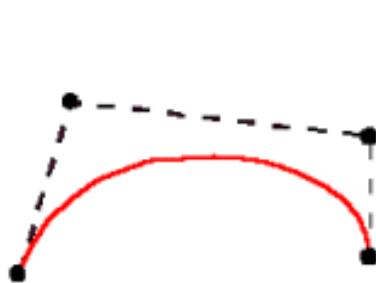
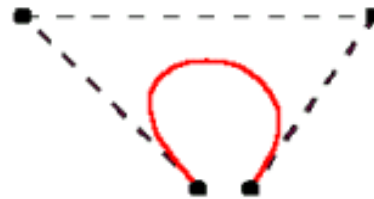
$$y(t) = \sum_{k=0}^n y_k B_{k,n}(t)$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^n z_k B_{k,n}(t)$$

# 곡면과 곡선

## 베지어 곡선 (Bezier Curves)

- $xy$  평면에서 제어점 4개를 가진 베지어 곡선 예

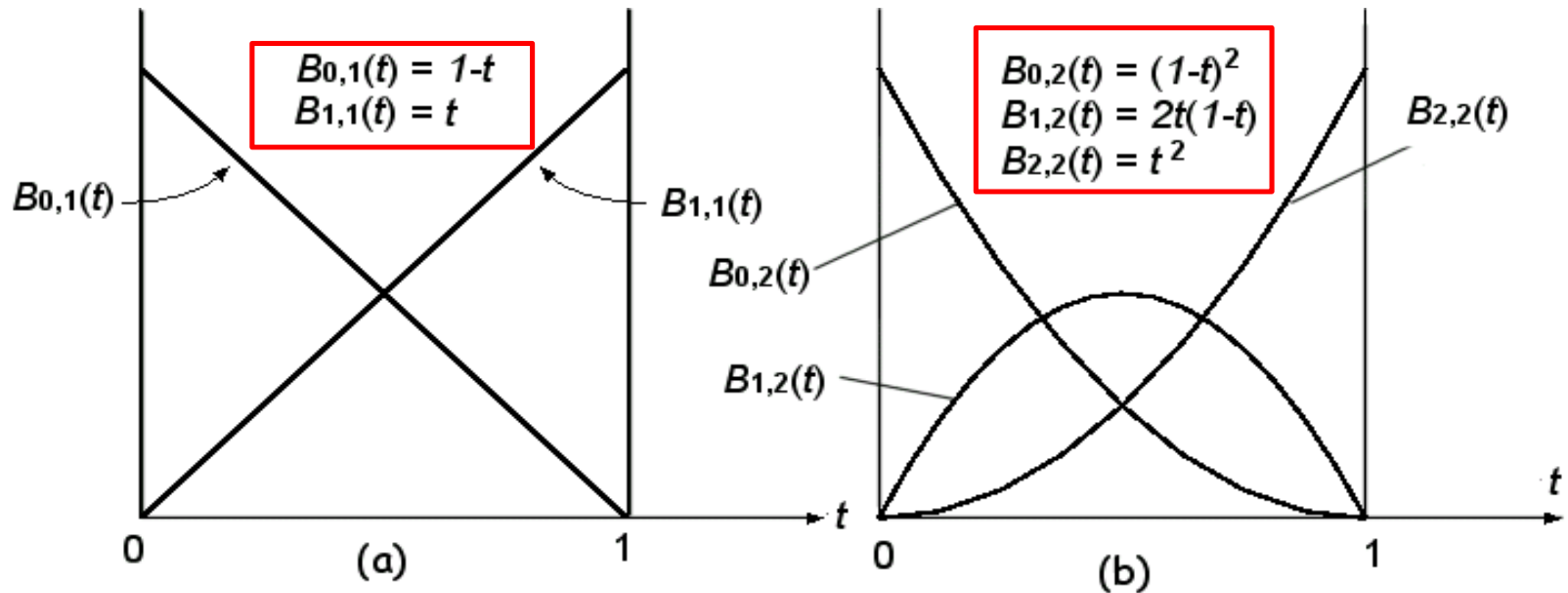


- 중요 성질: 곡선이 제어점으로 만들어진 다각형 내 위치함  
(곡선은 항상 제어점을 벗어나지 않고 그 안에서 부드럽게 그려짐)

# 곡면과 곡선

## 베지어 곡선 - 차수(제어점 개수)에 따른 결합함수

- 결합함수의 차수: 제어점 개수 - 1
- 각 차수(제어점 개수)에 따른 결합함수



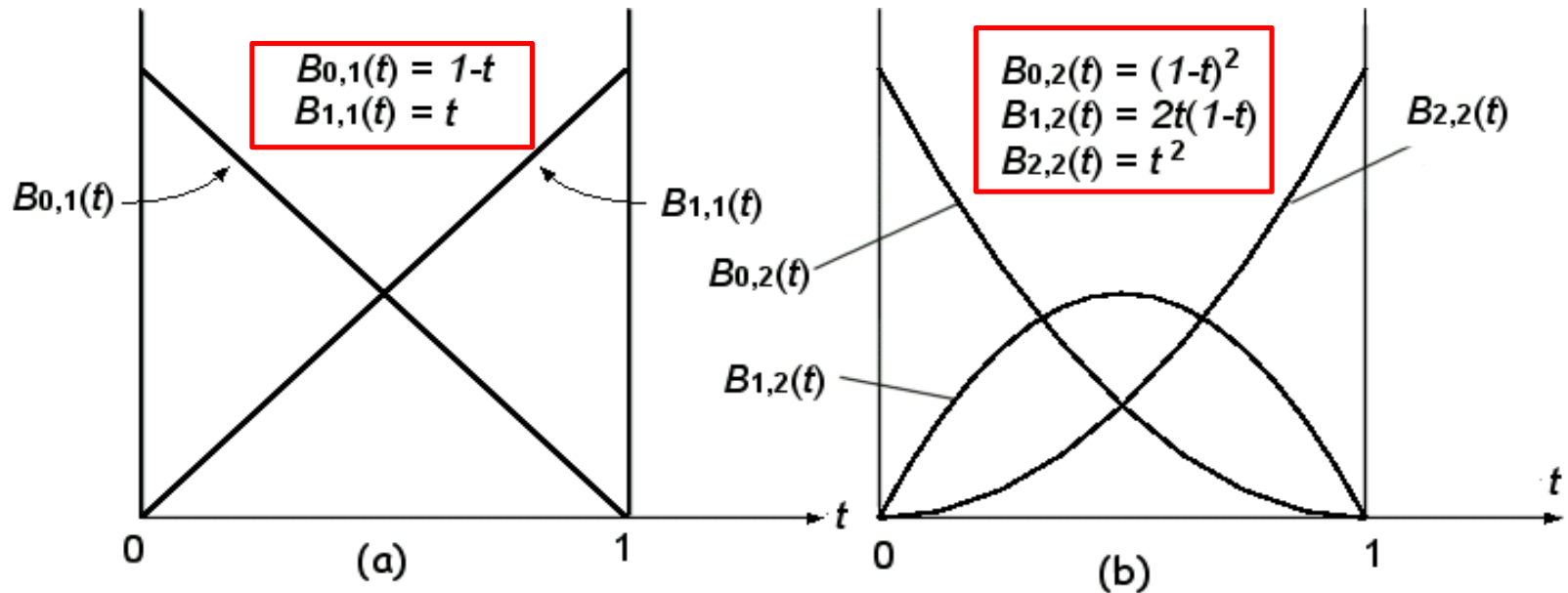
$$B_{k,n}(t) = C(n, k) t^k (1-t)^{n-k}$$

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# 곡면과 곡선

## 베지어 곡선 - 차수(제어점 개수)에 따른 결합함수

- 결합함수의 차수: 제어점 개수 - 1
- 각 차수(제어점 개수)에 따른 결합함수



$$B_{k,n}(t) = C(n, k) t^k (1-t)^{n-k}$$

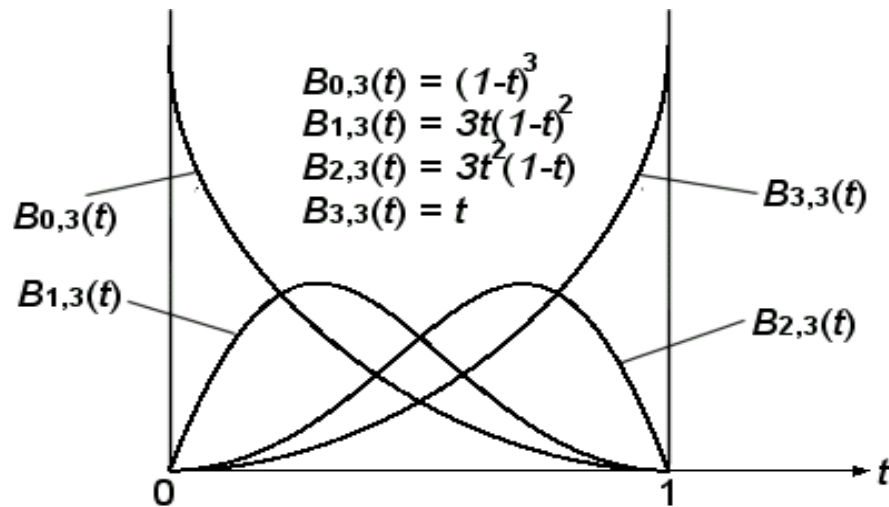
$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# 곡면과 곡선



## 베지어 곡선 - 차수(제어점 개수)에 따른 결합함수

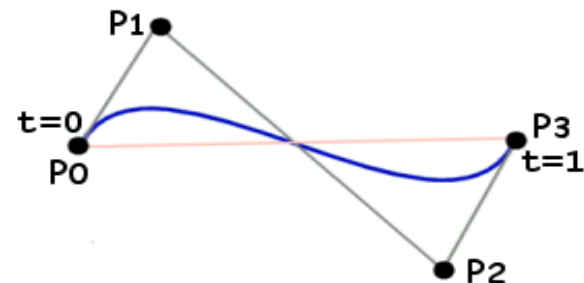
- 4개의 제어점에 맞는 곡선을 만들기 위해 사용되는 4개의 베지어 다항식 모양  
> 각 결합함수는 하나의 제어점이 매개변수  $t$  값에 따라 곡선의 모양에 어떻게 영향을 주는가를 결정



- $t = 0$ , 함수 값이 0이 아닌 것은  $B_{0,3}$  값은 1
- $t = 1$ , 함수 값이 0이 아닌 것은  $B_{3,3}$  값은 1

즉, 베지어 곡선에서는 언제나 처음 제어점과 마지막 제어점을 지남

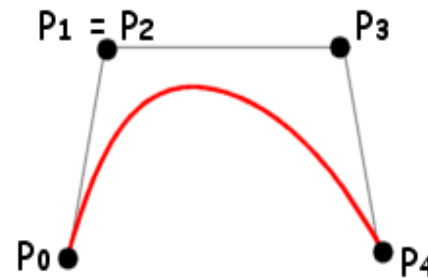
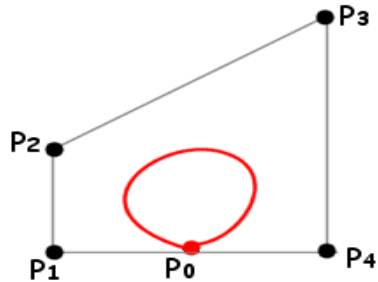
다른 함수는  $t$ 의 중간 값을 취하면서 곡선 모양의 영향을 주게 됨  
( $p_1$ 과  $p_2$ 에 치우치는 형태)



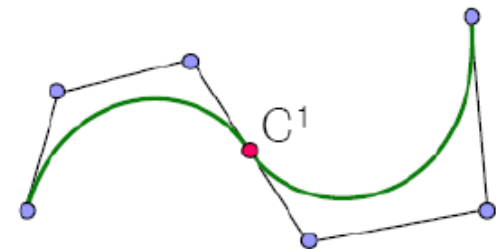
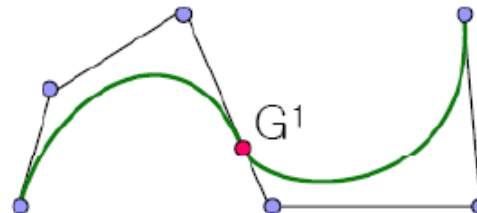
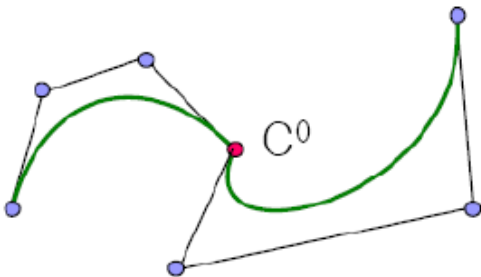
# 곡면과 곡선

## 제어점 입력에 따른 결과

- 처음과 마지막 제어점을 같게 지정 > 닫혀진(closed)곡선이 만들어짐
- 하나의 점에 제어점을 복수 지정 > 그 점에 비중이 더해짐



- 제어점이 많아질 경우 계산이 복잡해지므로 제어점을 나누어 처리
- 이를 곡선 세분화(Curve Segment)라 하며 이어지는 점을 어떻게 생성하는지에 따라 곡선의 연결점 부드러움이 결정됨



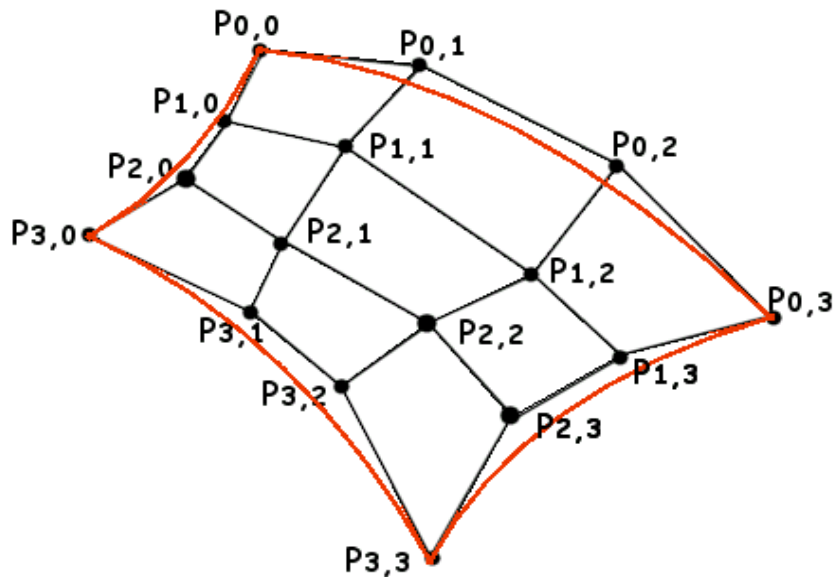
# 곡면과 곡선



## 베지어 표면

- 표면 : 두 개의 베지어 곡선을 이용하여, 제어점들에 의하여 표현
- 베지어 표면에서 매개변수 벡터 함수는 베지어 결합함수의 곱으로 나타낸다.  
 $P_{j,k} : (m+1) \times (n+1)$ 개의 제어점의 위치를 가리킴

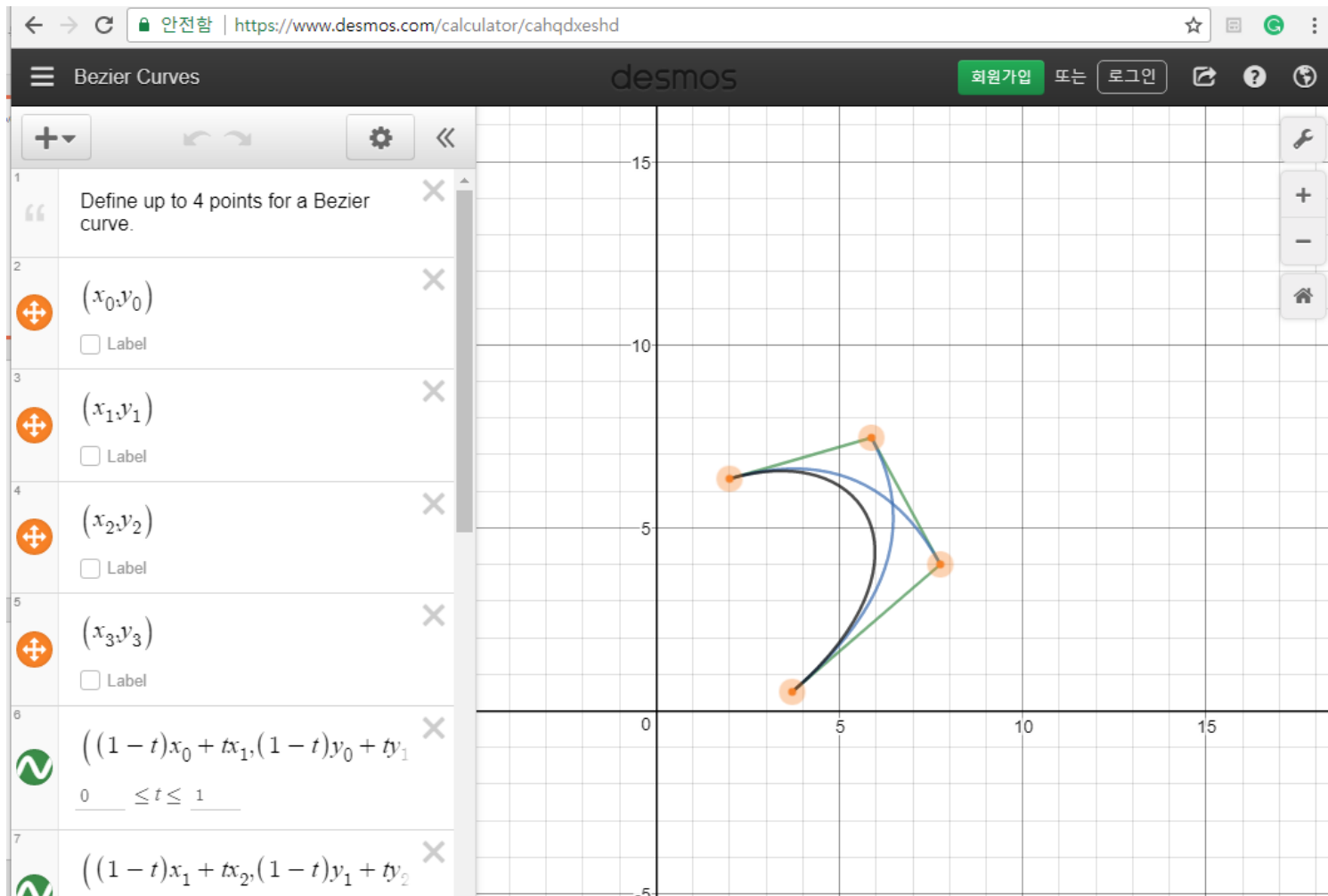
$$P(u,v) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n p_{j,k} B_{j,m}(u) B_{k,n}(v)$$



3 개의 베지어 표면으로 만든 하나의  
베지어 곡면

# 곡면과 곡선

 **베지어 예제 사이트** <https://www.desmos.com/calculator/cahqdxeshd>





# 곡면과 곡선



## 베지어 예제 사이트

<http://lib.ivank.net/?p=demos&d=bezier>

