3D 그래픽 좌표개념 및 평면 공식

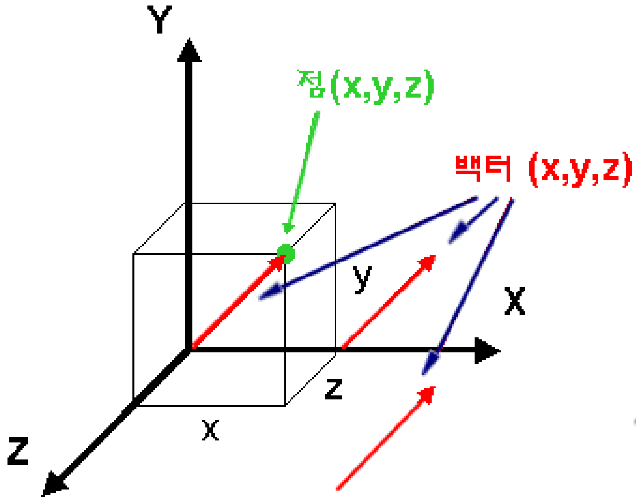
3D graphic coordination concepts and

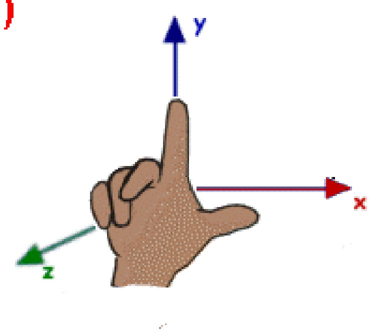
Plan equation

3D 그래픽 좌표

3D Coordinate Systems

- 3D 직각 좌표체계(데카르트 좌표체계)의 기본축 방향
  > 오른손 좌표체계
  > 모든 물체의 전체 좌표체계(또는 실세계 좌표계: world coordinate)는 오른손 좌표체계를 따른다고 가정



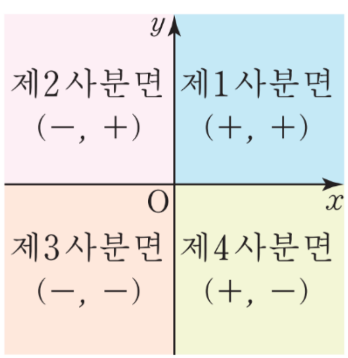


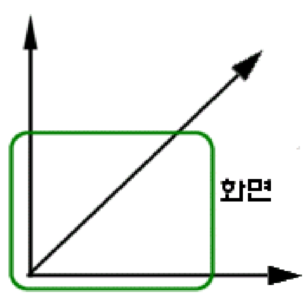
Right Handed System (RHS)

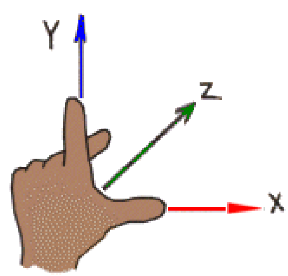
3D 그래픽 좌표

3D Coordinate Systems

- 왼손에 의하여 정의되는 좌표체계
  > 그래픽스 응용에서 매우 편리
  > 왼손 좌표 체계에서의 원점이 화면의 왼쪽 아래에 위치하면, XY 평면의 제 1상한이 화면 좌표축과 그대로 일치하게 되고, 양수의 z값은 화면 뒤에 있는 지점을 가리킴
  > z=0인 평면이 화면이 되므로 출력장치의 좌표를 표시하는데 매우 편리 z축의 양수방향으로 값이 커질수록, 관측자로부터 멀리 떨어져 있음





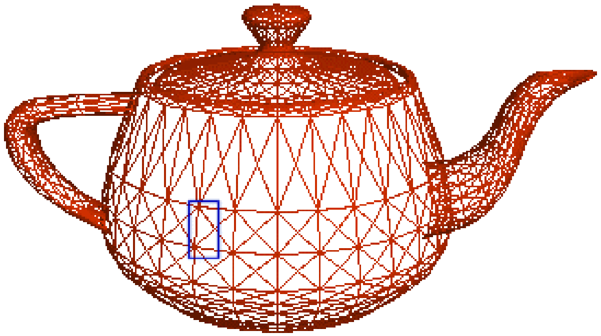


3D 그래픽 좌표

다각형 표면 (Polygon Mesh)

- **3차원 물체의 기본 요소: 점, 선, 면**
  점: (x, y, z) 좌표 값에 의해 정의
  선: 두 개의 점 (x1, y1, z1)과 (x2, y2, z2)에 의해 정의
  모서리: 인접한 두 면에 의해 정의
  면: 접해있는 선에 의해 정의

- **3차원 물체: 평면이나, 다각형의 집합으로 표현**
  > 단순한 기하학적 형태는 수 십개의 다각형으로 정의될 수 있지만 아주 많은 세부 묘사가 필요한 형태는 수 백개의 다각형으로 정의
  > 다면체와 같은 것은 정확히 정의가능



다각형 그물 표현법

3D 그래픽 좌표

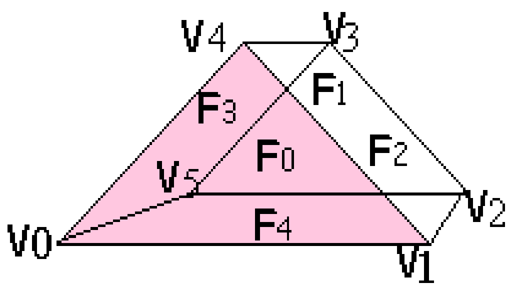
다각형 테이블 (Polygon Tables)

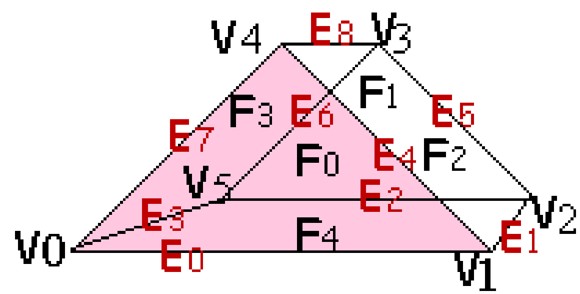
- 다각형 표면이 사용자에 의해서 한번 정의가 되면, 이 값을 테이블에 저장
- 이 테이블을 이용하여 한 표면이 처리되어, 화면에 보이게 됨
- 대상물체의 기하학적 성질과 속성을 포함하고 있으며, 컴퓨터 내에서의 처리가 용이하게 끔 구성
- 기하학적 데이터 테이블은 경계선 좌표와 다각형 표면의 공간에서의 방향을 나타내는 매개 면수 값을 포함
- 물체의 속성에 관한 정보: 색깔이나, 명암 등

3D 그래픽 좌표

다각형 테이블 (Polygon Tables) 구성 방법

- **좌표에 관한 정보를 3개의 표에 만들어 넣음**
  (꼭지점, 변, 면)





꼭지점 테이블
V_0 : x_0,y_0,z_0
V_1: x_1,y_1,z_1
V_2 : x_2,y_2,z_2
V_3 : x_3,y_3,z_3
V_4 : x_4,y_4,z_4
V_5 : x_5,y_5,z_5

다각형면 테이블
F_0 : V_0, V_1, V_4
F_1 : V_3, V_2, V_5
F_2 : V_1, V_2, V_3, V_4
F_3 : V_0, V_3, V_4, V_5
F_4 :V_0, V_1, V_2, V_5

변 테이블
E_0 : V_0, V_1, F_0, F_4
E_1 : V_1, V_2, F_2, F_4
E_2 : V_2, V_5, F_2, F_4
E_3 : V_0, V_5, F_3, F_4
E_4 : V_1, V_4, F_0, F_2
E_5 : V_2, V_3, F_1, F_2
E_6 : V_3, V_5, F_1, F_3
E_7 : V_0, V_4, F_0, F_3
E_8 : V_3, V_4, F_2, F_3

평면 공식

평면 공식 (Plane Equation)

- 공간 내에서의 다각형의 위치를 나타내는 매개변수 값
  > 꼭지점의 좌표 값과 다각형을 포함하는 평면공식으로부터 구한다

- 공식 : $Ax + By + Cz + D = 0$
  > (x, y, z) 평면상의 임의의 점
  > 계수 A, B, C, D: 상수, 평면상에서 일직선상에 놓이지 않는 3개의 좌표 값으로부터 계산
  -> 일반적으로 다각형 경계선상에 연속적으로 이웃하고 있는 세 개의 꼭지점을 이용하여 계수를 알아냄
  -> (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) 라 하고, 같은 식을 A/D, B/C, C/D의 비율로 사용하여 다음식들을 풀면

$$\left(\frac{A}{D}\right)x_i + \left(\frac{B}{D}\right)y_i + \left(\frac{C}{D}\right)z_i = -1, i = 1, 2, 3$$

평면 공식

평면 공식 (Plane Equation)

- (a) 각 각의 평면 매개변수 A, B, C, D를 구하기 위한 해
- (b) 행렬식을 풀어서 평면 식의 계수에 관하여 정리

$$A = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(a)

$$A = y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)$$

$$B = z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)$$

$$C = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

$$D = -x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) - x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)$$

(b)

평면 공식

평면 공식 (Plane Equation)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\det(A) = |A|$$

$$Determinat\, of\, A$$

행렬 A의 행렬식

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a} & \overset{-}{b} & \overset{+}{c} \\ \overset{-}{d} & \overset{+}{e} & \overset{-}{f} \\ \overset{+}{g} & \overset{-}{h} & \overset{+}{i} \end{vmatrix}$$

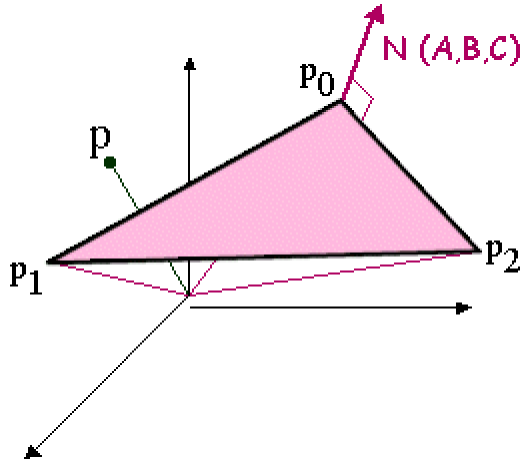
3*3 크기를 갖는 행렬 B의 행렬식 계산법

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg)$$

평면 공식

평면 공식 (Plane Equation)

- 공간에서의 평면 방향 : 평면에 대한 정규 벡터(normal vector)로 정의
- 3D 정규벡터는 좌표 값 (A, B, C)를 갖는다

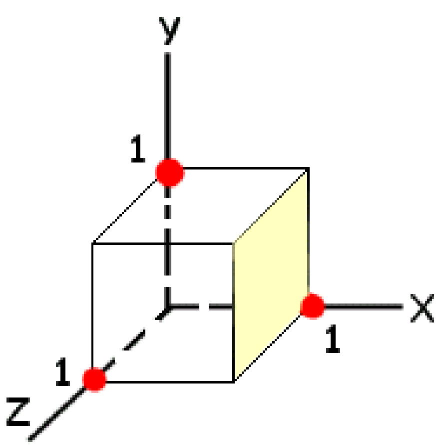


Ax+By+Cz+D = 0 공식에 의해 만들어진 평면에 수직인 정규벡터 N은 좌표값 (A,B,C)를 갖는다.

평면 공식

평면 공식 (Plane Equation)

- 평면에서 대상물체의 내부를 향하고 있는 면. 내면(안쪽 면)
- 대상물체의 밖에 해당하는 면. 외면 (바깥쪽 면)
- 오른손 좌표 체계에서 평면의 외면을 볼 때 꼭지점이 시계반대 방향으로 정의되어 있으면, 정규 벡터의 방향은 내면에서 외면으로 가게됨



- 노랑색 면에 대한 정규벡터 값을 정하기 위해서, 다각형 경계의 4개의 꼭지점 중에서 세 개를 선택한다.
  이 점들은 육면체의 밖에서 내부를 들여다 보는 방향에서 볼 때 시계반대방향 순으로 정한다.
- 이 꼭지점들에 대하여 평면공식을 이용하여 평면계수를 구하면 A=1, B=0, C=0, D=-1이다.
- 이것은 평면에 대한 정규벡터가 x축의 양수방향임을 의미한다.

정육면체의 노랑색 면 부분의
평면 공식은 x-1=0이고 정규 벡터는 (1,0,0)이다.

평면 공식

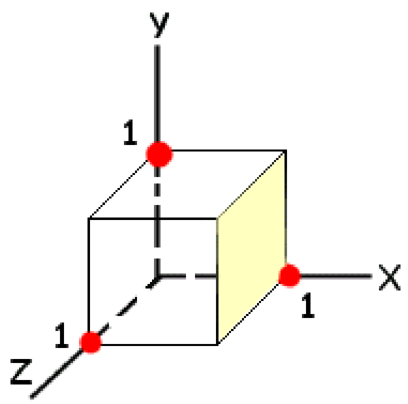
평면 공식 (Plane Equation)

- 평면 공식은 한 점이 내부에 있는지, 또는 외부에 있는지 알아내는데도 사용
- 임의의 점이 평면 바깥쪽에 위치하면…

$$Ax + By + Cz + D > 0$$

- 임의의 점이 평면 안쪽에 위치하면…

$$Ax + By + Cz + D < 0$$



노랑색 평면에서 보면, 면 외부에 위치한 임의의 점은 x-1>0을 만족시키고, 안에 위치한 임의의 점은 x축의 값이 항상 1보다 작아서 x-1<0을 만족시킨다.