BOLYAI-KÖNYVEK SOROZAT

A sikeres Bolyai-könyvek példatár sorozat e kötetében a szerző a determinánsokkal, azok főbb tulajdonságaival és átalakításukkal, a nevezetes determinánsokkal és alkalmazásukkal, a mátrix fogalmával és a mátrixműveletekkel foglalkozik. Kitér a lineáris egyenletrendszerek vizsgálatára és különleges megoldási módszereire, továbbá ismerteti a vektortereket és a vektortereken értelmezett lineáris transzformációkat.

A példatár minden feladat kidolgozott megoldásmenetét tartalmazza, magyarázó megjegyzésekkel, helyenként több megoldással.

Használhatják a matematika iránt érdeklődő középiskolás diákok, műszaki egyetemek és főiskolák hallgatói, közgazdász hallgatók, közép- és felsőfokú intézetek matematika oktatói, a matematika gazdasági felhasználásával foglalkozó szakemberek.

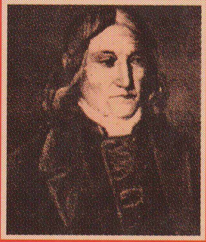
ISBN 963-16-3060-9

9 789631 630602

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ

MÁTRIXSZÁMÍTÁS

BOLYAI-KÖNYVEK



SCHARNITZKY VIKTOR

MÁTRIX-SZÁMÍTÁS

$$kA = k[a_{ik}] = [ka_{ik}]$$

SCHARNITZKY VIKTOR

MÁTRIXSZÁMÍTÁS

Az n-edrendű determináns értéke:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1} a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

ahol A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó $(n-1)$-edrendű aldetermináns

Sarrus-szabály:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\\ -(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

Mátrix jelölése:

$$\mathbf{A}=\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2m} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nm} \end{bmatrix}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m]=\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix}=[a_{ik}]_{n,m}\doteq[a_{ik}]$$

Mátrixok egyenlősége:

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}=\underset{(n,m)}{\mathbf{B}},\quad \text{ha}\quad a_{ik}=b_{ik},\quad i=1,2,\ldots,n;\quad k=1,2,\ldots,m$$

Mátrixok összevonása:

$$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=[a_{ik}]\pm[b_{ik}]=[a_{ik}\pm b_{ik}]$$

Mátrix szorzása skalárral:

$$k\mathbf{A}=k[a_{ik}]=[ka_{ik}]$$

Mátrixok szorzása:

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}\,\underset{(m,p)}{\mathbf{B}}=\underset{(n,p)}{\mathbf{C}}=[c_{ik}],\quad \text{ahol}\quad c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{im}b_{mk}$$

Mátrix diadikus szorzata:

$$\mathbf{AB}\doteq[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m]\begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^m \end{bmatrix}=\mathbf{a}_1\mathbf{b}^1+\mathbf{a}_2\mathbf{b}^2+\ldots+\mathbf{a}_m\mathbf{b}^m$$

A BOLYAI-SOROZAT KÖTETEI:

Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás
Solt György: Valószínűségszámítás
Lukács Ottó: Matematikai statisztika
Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek
Bárczy Barnabás: Integrálszámítás
Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás
Urbán János: Matematikai logika
Urbán János: Határérték-számítás
Zalay Miklós–Fekete Zoltán: Többváltozós függvények analízise

SCHARNITZKY VIKTOR

MÁTRIXSZÁMÍTÁS

PÉLDATÁR

8. kiadás

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Lektorálta:
DR. FRIED ERVIN
a matematikai tudományok doktora

ETO: 519.831
ISBN 963 16 3060 9 (hetedik kiadás)
ISSN 1216-5344

TARTALOMJEGYZÉK

DETERMINÁNSOK

I. A DETERMINÁNS FOGALMA ÉS ALKALMAZÁSA LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA

A determinánsok széles körű alkalmazhatóságának fő oka, hogy segítségükkel bonyolult és nehezen áttekinthető kifejezéseket tehetünk könnyen megjegyezhetőkké.

A determinánsok értéke gépi úton rendkívül gyorsan határozható meg, úgyhogy alkalmazásuk nemcsak áttekinthető, hanem gazdaságos számításokat is eredményez.

1. Két ismeretlent tartalmazó elsőfokú egyenletrendszer megoldása. A másodrendű determináns

Induljunk ki a kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1;$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$$

általános rendezett alakjából, ahol $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ és b_2 tetszőlegesen adott valós számok (együtthatók), azonban a_{11} és a_{12}, valamint a_{21} és a_{22} egyszerre nem lehet 0; x_1 és x_2 ismeretlenek. A kettős index első száma azt jelenti, hogy hányadik egyenletben szerepel az illető együttható, az index második száma pedig azt, hogy hányadik ismeretlen együtthatója.

Az *egyenletrendszer megoldásának* nevezzük azokat az (x_1, x_2) valós értékpárokat, amelyek egyidejűleg kielégítik mindkét egyenletet.

A megoldás megkeresése céljából szorozzuk meg először az első egyenletet a_{22}-vel, a másodikat $(-a_{12})$-vel, és adjuk össze a kapott két egyenletet, majd szorozzuk meg az első egyenletet $(-a_{21})$-gyel, a másodikat a_{11}-gyel, s ugyancsak adjuk össze az így kapott egyenleteket (egyenlő együtthatók módszere). Így

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1-a_{12}b_2;$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

A továbbiakban három esetet különböztetünk meg.

a) Ha $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \neq 0$ (és ez a leggyakrabban előforduló úgynevezett *közönséges eset*), akkor

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad (**)$$

és ez az egyenletrendszer *egyetlen megoldása.*

b) Ha viszont

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = 0, \quad \text{azaz} \quad a_{11}a_{22}=a_{12}a_{21},$$

akkor (*) csak úgy állhat fenn, ha egyúttal

$$a_{22}b_1-a_{12}b_2 = 0, \quad \text{azaz} \quad a_{22}b_1=a_{12}b_2$$

és

$$a_{11}b_2-a_{21}b_1 = 0, \quad \text{azaz} \quad a_{11}b_2=a_{21}b_1.$$

Ebből következik — ha a szereplő együtthatók egyike sem nulla —, hogy

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

Ez azt jelenti, hogy a kiinduló egyenletrendszer egyik egyenlete a másikból egy alkalmas állandóval való végigszorzás útján adódik: *egyik egyenlet a másiknak következménye* (könnyen belátható, hogy ugyanez a helyzet akkor is, ha nem minden együttható 0-tól különböző) és így bármely olyan értékpár, amely az egyik egyenletet kielégíti, egyszersmind eleget tesz a másik egyenletnek is, tehát egyenletrendszerünknek most *végtelen sok megoldása* van. Ezek kiszámításához az előbbiek alapján az egyik, pl. az első egyenlet elegendő. Innen valamelyik ismeretlent, pl. $a_{11}\neq 0$ esetén az elsőt kifejezve

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$$

adódik. Ha a jobb oldalon $a_{12}\neq 0$, akkor x_2 helyébe tetszőleges értéket helyettesítve, megkapjuk a megfelelő x_1 értéket, és az összetartozó értékpárok alkotják az egyenletrendszer megoldásait. Ha pedig $a_{12}=0$, akkor nyilván az $x_1=b_1/a_{11}$ érték x_2 bármely értékével párosítva megoldást szolgáltat.

c) Előfordulhat még az az eset is, hogy

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = 0,$$

de

$$a_{22}b_1-a_{12}b_2 \neq 0 \quad \text{és} \quad a_{11}b_2-a_{21}b_1 \neq 0.$$

E feltételek mellett a (*) egyenletek bal oldalán zérus, jobb oldalán pedig zérustól különböző szám áll, az egyenletek ellentmondók, ezért az egyenletrendszernek *nincs megoldása.* Az ellentmondás abból is látható, hogy a kiinduló egyenletek bal oldalán álló megfelelő együtthatóinak aránya állandó, de ez különbözik a jobb oldali együtthatók arányától.

Tárgyalásunkat áttekintve látjuk, hogy feltételeinkben és az egyenletrendszer megoldásában bizonyos jellegzetes, az egyenletrendszer együtthatóiból felépített kifejezések szerepelnek. Számukra egyszerű jelölést és külön elnevezést vezetünk be.

Általában valamilyen a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} *elemekből* alkotott

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

alakú kifejezést *másodrendű determinánsnak* nevezünk, amelynek *értéke* $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, amit úgy kapunk meg, hogy az úgynevezett *főátló* két végén álló elemek szorzatából kivonjuk az úgynevezett *mellékátló* két végén álló elemek szorzatát. (Determináns értéke helyett — ha félreértést nem okoz — szokás röviden *determinánst* is mondani.)

A vízszintesen egymás mellett álló elemek a determináns egy-egy *sorát*, a függőlegesen egymás alá írt elemek a determináns egy-egy *oszlopát* alkotják. A sorokat felülről lefelé, az oszlopokat balról jobbra haladva számozzuk. Az elemek kettős indexe helyüket jelöli ki egyértelműen: az első index azt jelöli, hogy az elem a determináns hányadik sorában, a második index azt, hogy az elem a determináns hányadik oszlopában van.

Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása a másodrendű determinánssal így írható fel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

feltéve hogy a közös nevező:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

A D determinánst, amely az egyenletrendszer bal oldalán álló együtthatókat természetes elrendezésben tartalmazza, az *egyenletrendszer determinánsának* szokás nevezni.

Vegyük észre, hogy a számlálókban álló determinánsok úgy származtathatók az egyenletrendszer determinánsából, hogy annak az ismeretlennek az együtthatói helyébe, amelyet éppen ki akarunk számítani, az egyenletek jobb oldalán álló számokat helyettesítjük. Jelölje az x_1 számlálójában álló determinánst D_1 (ennek első oszlopában vannak az egyenletek jobb oldalán álló számok), az x_2 számlálójában álló determinánst pedig D_2 (ennek második oszlopában vannak az egyenletek jobb oldalán álló számok). Ha $D \neq 0$, akkor tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

Az elsőfokú egyenletrendszerek megoldásának ezt a módját *Cramer-szabálynak* nevezzük.

Gyakorló feladatok

Számítsuk ki a következő determinánsok értékét:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - (-4)(-4) = -7.$

3. $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 9 = 7.$

4. $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -6 & 15 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0.$

5. $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

6. $3x - 5y = 13;$

$5x - 7y = 19.$

Mivel az egyenletrendszer determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 25 = 4,$$

azaz nem zérus, azért egyértelmű megoldás van, és ez (az x-hez tartozó determinánst most D_x-szel, az y-hoz tartozót D_y-nal jelölve):

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 19 & -7 \end{vmatrix}}{4} = \frac{4}{4} = 1,$$

továbbá

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 5 & 19 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

7. $2x_1 + 3x_2 - 1 = 0;$

$4x_1 + 9x_2 - 4 = 0.$

Mivel az egyenletrendszer determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6 \neq 0,$$

ezért az egyértelmű megoldás (tekintettel arra, hogy az abszolút tagokat a jobb oldalra átvive, előjelük pozitív lesz):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

8. $4x - 2y = 6;$

$2x - y = 3.$

Az egyenlet determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0,$$

ezért nincs egyértelmű megoldás. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, mert

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{és} \quad D_y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

tehát a két egyenlet egymás következménye. Valóban: a másodikból az első 2-vel való végigszorzás útján adódik.

A második egyenletből y-t x-szel kifejezve: $y = 2x-3$. Itt x helyébe bármilyen számot helyettesítve, ez a megfelelő y értékkel együtt az egyenletrendszernek egy megoldása. Ilyenek pl. $x_1=0$, $y_1=-3$; $x_2=1$, $y_2=-1$; $x_3=2$, $y_3=1$; $x_4=-3$, $y_4=-9$; és így tovább.

9. $4x-2y = 6;$

$2x-y = 1.$

Az egyenletrendszer determinánsa — mint az előző feladatban kiszámítottuk — nulla, de

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \text{és} \quad D_y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

ezért az egyenletrendszer ellentmondó, megoldás pedig nincsen. Valóban: az első egyenlet bal oldala kétszerese, jobb oldala viszont hatszorosa a második egyenlet megfelelő oldalának.

10. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x \\ 4 & x-3 \end{vmatrix} = 0.$$

A determináns értékét kiszámítva,

$$(x+2)(x-3)-4x = 0,$$

vagyis

$$x^2-5x-6 = 0,$$

amelynek gyökei $x_1=6$, $x_2=-1$. Visszahelyettesítéssel könnyen látható, hogy mindkét gyök kielégíti az eredeti egyenletet. Pl. $x_1=6$ esetében

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Számítsuk ki az alábbi egyenletrendszer gyökeit:

$ax-3y = 1;$

$ax-2y = 2.$

Mivel

$$D = \begin{vmatrix} a & -3 \\ a & -2 \end{vmatrix} = a,$$

ezért egyértelmű megoldás akkor van, ha $a \neq 0$. A megoldás ekkor

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{és} \quad D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = a$$

miatt

$$x = \frac{4}{a}, \qquad y = \frac{a}{a} = 1.$$

12. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} \equiv 1.$$

A determinánst kifejtve $(\sin^2 x+\cos^2 x)$-et kapunk és ennek értéke x-től függetlenül 1.

13. Igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \sin^2 y & \cos^2 y \end{vmatrix} \equiv \sin(x+y)\sin(x-y).$$

Útmutatás: Használjuk fel, hogy

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y+\cos x \sin y$$

és

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y-\cos x \sin y.$$

2. Három ismeretlent tartalmazó elsőfokú egyenletrendszer megoldása. A harmadrendű determináns

Az elsőfokú *háromismeretlenes egyenletrendszer* általános rendezett alakja:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = b_1;$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 = b_2;$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 = b_3,$$

ahol x_1, x_2, x_3 a három ismeretlent jelöli, a többi betű pedig megadott valós számot jelent. Az együtthatók kettős indexe az egyenletrendszerben elfoglalt helyüket jelöli.

Az egyenletrendszer megoldása a kétismeretlenes esethez hasonlóan most is rövid és jól megjegyezhető alakban írható fel determinánsok segítségével.

Harmadrendű determinánsnak nevezünk egy $3^2=9$ *elemből* álló

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

típusú, négyzetes alakú táblázatot, amelynek a következő értéket tulajdonítjuk:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Az azonos első indexű elemek egy-egy *sort*, az azonos második indexű elemek egy-egy *oszlopot* alkotnak.

Könnyen észrevehető, hogyan kapjuk meg a harmadrendű determináns értékét: az első sor elemeit rendre megszorozzuk egy-egy másodrendű determinánssal, amelyet úgy nyerünk, hogy az eredeti determinánsból elhagyjuk azt a sort és oszlopot, amelyben a kérdéses elem van; végül az így adódó szorzatot a_{11} esetében pozitív, a_{12} esetében negatív, a_{13} esetében ismét pozitív előjellel látjuk el, majd a kapott szorzatokat összeadjuk. Hogy egyszerűbben fejezhessük ki magunkat, nevezzük általában egy a_{ij} elemhez tartozó *aldeterminánsnak* (jele: A_{ij}) azt a másodrendű determinánst, amely az eredeti determináns i-edik sorának és j-edik oszlopának a törléséből keletkezik, mégpedig a

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

táblázatban az a_{ij} helyén álló előjellel ellátva (ún. *sakktábla-szabály*). Könnyű észrevenni, hogy ezt az előjelet éppen $(-1)^{i+j}$ szabja meg, hiszen ez $(+1)$-et ad, ha $i+j$ páros, és (-1)-et, ha $i+j$ páratlan. A harmadrendű determináns szóban forgó kiszámítási utasításának neve: *a determináns első sora szerinti kifejtése.*

Rövid számolással igazolható, hogy az első sor szerepét *bármelyik* másik *sor* vagy *oszlop* átveheti, és ezt a kiszámítási utasítást *a harmadrendű determináns sor vagy oszlop szerinti kifejtésének* nevezzük. Pl. a harmadrendű determináns kifejtése a harmadik oszlop elemei szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$$

$$= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

ami az aldeterminánsok értékének beírása után ismét az előbb kapott *hattagú* kifejezést szolgáltatja.

A másodrendű determináns is felírható első sora szerinti kifejtés alakjában:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

ahol az A_{11} és A_{12} aldeterminánsok egyetlen számból állnak: $A_{11}=a_{22}$ és $A_{12}=-a_{21}$. Ezek után nyilvánvaló az elsőrendű determináns definíciója:

$$|a_{11}| = a_{11};$$

az elsőrendű determináns egyetlen egy számból áll, és értéke éppen ez a szám.

A harmadrendű determináns értékének kiszámítását az előbbiekben a kifejtési szabály segítségével másodrendű determinánsok kiszámítására vezettük vissza, eljárhatunk azonban a következőképpen is.

Képzeljük a harmadrendű determináns mellé leírva még egyszer az első és a második oszlopot:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

A determináns értékét úgy kapjuk meg, hogy a főátló irányában (folytonos nyíl) összeköthető elemhármasok szorzatösszegéből kivonjuk a mellékátló irányában (szaggatott nyíl) összeköthető elemhármasok szorzatösszegét. Ekkor ugyanis

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33});$$

és ez a sorrendtől eltekintve megegyezik a kifejtéssel kapott eredménnyel. A harmadrendű determináns értéke kiszámításának ez a módja *Sarrus-szabály* néven ismeretes.

Egy kis gyakorlás után a Sarrus-szabályban foglalt utasítást végrehajthatjuk anélkül, hogy a két első oszlopot le kellene másolnunk.

Már itt fel szeretnénk hívni a figyelmet arra, hogy a Sarrus-szabály *kizárólag* harmadrendű determinánsok értékének kiszámítására alkalmas.

Visszatérve már most a háromismeretlenes egyenletrendszer megoldásához, ez így írható fel a harmadrendű determináns segítségével:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}};$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

feltéve, hogy a nevezőben álló determináns, *az egyenletrendszer determinánsa* nem zérus. Látható, hogy a számlálóban álló determináns az egyenletrendszer determinánsából úgy keletkezett, hogy x_i együtthatói helyébe az egyenletrendszer jobb oldalán álló számokat helyettesítettük.

Ez a kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásánál már megismert eljárás, a *Cramer-szabály* három ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer esetén. Ha az egyenletrendszer determinánsát D-vel, a törtek számlálójában álló determinánsokat pedig rendre D_1, D_2, D_3-mal jelöljük, akkor a $D \neq 0$ *közönséges esetben az egyenletrendszer egyetlen megoldása:*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

Nehézség nélkül, de kissé hosszadalmasan megmutatható, hogy a $D = 0$ *kivételes esetben* most is két lehetőség van: vagy végtelen sok megoldása van, vagy egyáltalában nincs megoldása az egyenletrendszernek.

Végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek, ha $D = 0$ és $D_1 = D_2 = D_3 = 0$; *nincs megoldása* az egyenletrendszernek (az egyenletek között van ellentmondó), ha $D = 0$ és a D_1, D_2, D_3 determinánsok közül legalább az egyik nem 0.

Az eddigiekben hallgatólagosan olyan lineáris egyenletrendszerek megoldásával foglalkoztunk, amelyeknek a jobb oldalán nem állt csupa zérus. Ezek az ún. *inhomogén egyenletrendszerek.* Egy olyan egyenletrendszert, amelyben csak ismeretleneket tartalmazó tagok fordulnak elő, *homogén egyenletrendszernek* nevezünk. Így pl. a háromismeretlenes homogén egyenletrendszer általános alakja:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0;$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0.$$

Azonnal látható, hogy $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ esetén mindhárom egyenlet teljesül. Ezt a csupa zérusból álló megoldást a homogén egyenletrendszer *triviális* (nyilvánvaló) *megoldásának* nevezzük.

Kíséreljük meg a Cramer-szabállyal kiszámítani az ismeretlenek értékét. Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer determinánsa: $D \neq 0$, akkor

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}; \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

A számlálókban álló determinánsok úgy keletkeztek az egyenletrendszer determinánsából, hogy a kiszámítandó ismeretlen együtthatói helyébe a jobb oldalon álló nullákat írtuk. Így bármelyik számlálóban álló determináns egyik oszlopa csupa nulla elemből áll, úgyhogy a determinánst pl. a Sarrus-szabály szerint kifejtve, a kifejtés minden egyes tagjában az egyik tényező 0 lesz, így a kérdéses determináns értéke zérus. Ebből következik, hogy esetünkben $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Mivel a Cramer-szabály az egyetlen lehetséges megoldást szolgáltatja, kimondhatjuk: *ha egy homogén lineáris egyenletrendszer determinánsa nem* 0, *akkor az egyenletrendszer egyetlen megoldása a triviális megoldás.*

Ahhoz tehát, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszernek legyen a triviálistól különböző megoldása, szükséges, hogy az egyenletrendszer determinánsa zérus legyen. Ekkor azonban a Cramer-szabály nem alkalmazható (a 0-val való osztásnak nincs értelme), tehát más úton kell az egyenletrendszert megoldanunk.

Egyszerű behelyettesítéssel igazolható a következő tétel:

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszer D determinánsa 0, viszont D valamelyik sorához tartozó aldeterminánsok nem mind zérusok, akkor ez utóbbiak tetszőleges közös tényezővel szorozva az egyenletrendszer egy megoldását szolgáltatják. Tehát az egyenletrendszernek *végtelen sok megoldása* van. Belátható továbbá az is, hogy a szóban forgó esetben más megoldás nincs.

Pl. ha a D első sorához tartozó aldeterminánsok között van 0-tól különböző, akkor a homogén egyenletrendszer összes megoldása felírható az

$$x_1 = tA_{11}; \quad x_2 = tA_{12}; \quad x_3 = tA_{13}$$

alakban, ahol t tetszőleges valós szám. Ha $A_{13} \neq 0$, akkor ez így is írható:

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_{11} : A_{12} : A_{13}.$$

Ez azt jelenti, hogy bár végtelen sok megoldás van, de az ismeretlenek *aránya adott.* Azt is mondhatjuk, hogy az egyik ismeretlen értéke szabadon választható, de ha ezt rögzítettük, akkor felhasználásával a többi ismeretlen már egyértelműen meghatározható.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) az első sor szerinti kifejtéssel; *b)* a második oszlop szerinti kifejtéssel; *c)* a Sarrus-szabállyal.

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(0+5)+3(0+10)+2(4-6) = 5+30-4 = 31.$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(0+10)+3(0-4)-1(-5-8) = 30-12+13 = 31.$$

c) $$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right. =$$

$$= (0+30+8)-(12-5+0) = 38-7 = 31.$$

2. $$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$$

Az első sor szerint kifejtve:

$$D = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(45-48)-2(36-42)+3(32-35) = -3+12-9 = 0.$$

3. $$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = ?$$

Sarrus-szabállyal számolva:

$$D = (18+3+4)-(2+12+9) = 2.$$

4. $$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

Az első oszlop szerint kifejtve:

$$D = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Számítsuk ki a következő determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0,1 & 1 & 0 \\ 0,01 & -0,1 & 1 \\ 0,001 & 0,01 & -1 \end{vmatrix}$$

A determinánst az utolsó oszlop szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 0,1 & 1 & 0 \\ 0,01 & -0,1 & 1 \\ 0,001 & 0,01 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0,1 & 1 \\ 0,001 & 0,01 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0,1 & 1 \\ 0,01 & -0,1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(0,001-0,001)-(-0,01-0,01) = 0,02.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix} \equiv 0.$$

A determinánst első sora szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \sin 2x \begin{vmatrix} -\cos x & \cos x \\ \sin x & \sin x \end{vmatrix} + \cos 2x \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= (\sin 2x)(-\cos x \sin x - \cos x \sin x) + (\cos 2x)(\sin^2 x - \cos^2 x) +$$

$$+ (\sin^2 x + \cos^2 x) = (\sin 2x)\ (-\sin 2x) + (\cos 2x)\ (-\cos 2x) + 1 =$$

$$= -\sin^2 2x - \cos^2 2x + 1 = -1+1 \equiv 0.$$

7. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst első oszlopa szerint kifejtve:

$$x^2(2-3) - x(4-9) + 1(12-18) = 0,$$

és így a megoldandó másodfokú egyenlet

$$-x^2+5x-6 = 0,$$

amelynek gyökei $x_1=2$, $x_2=3$.

8. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & x & -1 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

legyen!

Fejtsük ki a determinánst második sora szerint. A

$$D = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 13+29x-1 = 0$$

egyenletből

$$x = -\frac{12}{29}.$$

9. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} \equiv ab.$$

Ha a determinánst pl. első sora szerint kifejtjük, akkor

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1+a)(1+b) - 1 - (1+b-1) + 1 - (1+a) = ab.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy

$$D = \begin{vmatrix} 1+\cos x & 1+\sin x & 1 \\ 1-\sin x & 1+\cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1.$$

A determinánst pl. a Sarrus-szabály szerint kifejtve:

$$D = (1+\cos x)^2+(1+\sin x)+(1-\sin x)-[(1+\cos x)+(1+\cos x)+$$

$$+(1-\sin^2 x)] = 1+2\cos x+\cos^2 x+2-3-2\cos x+\sin^2 x =$$

$$= \cos^2 x+\sin^2 x \equiv 1.$$

11. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x+4y+2z = 5;$$

$$-3x+2y+z = -1;$$

$$4x-y-z = 2.$$

Az inhomogén egyenletrendszer determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-2+1)-4(3-4)+2(3-8) = -1+4-10 = -7 \neq 0,$$

tehát egyértelmű megoldás van. A megoldás:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{0}{-7} = 0;$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

12. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x_1-2x_2+x_3 = 2;$$

$$3x_1+8x_2-6x_3 = -5;$$

$$6x_1+10x_2+3x_3 = 4.$$

Az inhomogén egyenletrendszer determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -6 \\ 6 & 10 & 3 \end{vmatrix} = (24+72+30)-(48-18-60) =$$

$$= 126+30 = 156 \neq 0,$$

azért egyértelmű megoldás van. Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -5 & 8 & -6 \\ 4 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 104;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -39;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & -5 \\ 6 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 130,$$

ezért

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{104}{156} = \frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-39}{156} = -\frac{1}{4};$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{130}{156} = \frac{5}{6}.$$

13. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x_1+x_2-x_3 = 6;$$

$$3x_1-2x_2+5x_3 = 3;$$

$$6x_1+x_2+2x_3 = 21.$$

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4-5)-(6-30)-(3+12) = -9+24-15 = 0,$$

tehát nincs egyértelmű megoldás. Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 21 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 21 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 21 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(-4-5)-(6-105)-(3+42) = 0;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 21 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 21 & 2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} =$$

$$= (6-105)-6(6-30)-(63-18) = -99+144-45 = 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 21 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-42-3)-(63-18)+6(3+12) = -45-45+90 = 0,$$

ezért *végtelen sok megoldás van:* az egyenletrendszer egyenletei nem függetlenek egymástól. Vegyük észre, hogy a harmadik egyenlet az első egyenlet háromszorosának és a második egyenletnek az összege.

Ha pl. harmadik egyenletet elhagyjuk, az első két egyenletből két ismeretlen, pl. az x_1 és x_2 kifejezhető a harmadik ismeretlennel. Ha x_3-at ui. paraméternek tekintjük, akkor az

$$x_1+x_2 = 6+x_3;$$

$$3x_1-2x_2 = 3-5x_3$$

egyenletrendszernek az x_1 és x_2 ismeretlenekben egyértelmű megoldása van, mert az egyenletrendszer determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2-3 = -5 \neq 0;$$

ez a megoldás tetszőleges rögzített x_3-ra:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6+x_3 & 1 \\ 3-5x_3 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}(-12-2x_3-3+5x_3) = 3-\frac{3}{5}x_3;$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6+x_3 \\ 3 & 3-5x_3 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}(3-5x_3-18-3x_3) = 3+\frac{8}{5}x_3.$$

Ha pl. $x_3 = 5$, akkor $x_1=0$, $x_2=11$; ha $x_3=1$, akkor $x_1 = \frac{12}{5}$, $x_2 = \frac{23}{5}$.

Természetesen úgy is eljárhattunk volna, hogy egy másik ismeretlent, pl. x_1-et tekintjük szabadon választhatónak, és ekkor a másik két ismeretlent az

$$x_2-x_3 = 6-x_1;$$

$$-2x_2+5x_3 = 3-3x_1$$

egyenletrendszerből számíthatjuk ki. Mivel ennek az egyenletrendszernek determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5-2 = 3 \neq 0,$$

ezért egyértelmű megoldása:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6-x_1 & -1 \\ 3-3x_1 & 5 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}(30-5x_1+3-3x_1) = 11-\frac{8}{3}x_1;$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6-x_1 \\ -2 & 3-3x_1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}(3-3x_1+12-2x_1) = 5-\frac{5}{3}x_1.$$

Ezért eredeti egyenletrendszerünk megoldása:

$$x_1 = \text{tetszőleges};$$

$$x_2 = 11-\frac{8}{3}x_1;$$

$$x_3 = 5-\frac{5}{3}x_1.$$

Pl. ha $x_1=0$, akkor $x_2=11$, $x_3=5$, ami megegyezik az előző megoldás első számhármasával.

Nem minden feladatban mindegy, hogy melyik ismeretlent tekintjük szabadon választhatónak, miként azt a következő feladatokban majd látjuk.

14. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x_1-3x_2+2x_3 = -3;$$

$$2x_1-6x_2-3x_3 = -6;$$

$$-x_1+3x_2-2x_3 = 3.$$

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$D=\begin{vmatrix}1&-3&2\\2&-6&-3\\-1&3&-2\end{vmatrix}=12-9+12-(12-9+12)=0,$$

ezért nincs egyértelmű megoldás. Mivel

$$D_1=\begin{vmatrix}-3&-3&2\\-6&-6&-3\\3&3&-2\end{vmatrix}=-36+27-36-(-36-36+27)=0;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-3&2\\2&-6&-3\\-1&3&-2\end{vmatrix}=D=0;$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-3&-3\\2&-6&-6\\-1&3&3\end{vmatrix}=-18-18-18-(-18-18-18)=0,$$

ezért végtelen sok megoldás van, s az egyenletek nem függetlenek egymástól. Könnyen észrevehető, hogy a harmadik egyenlet az elsőnek (-1)-szerese. Ha pl. a felesleges harmadik egyenletet elhagyjuk, majd x_1-et és x_2-t x_3-mal akarjuk kifejezni, az

$$x_1-3x_2=-3-2x_3;$$
$$2x_1-6x_2=-6+3x_3$$

egyenletrendszerre jutunk; ennek determinánsa

$$\begin{vmatrix}1&-3\\2&-6\end{vmatrix}=-6+6=0,$$

így tetszőleges x_3 rögzített értéke mellett nem kapunk egyértelmű megoldást x_1-re és x_2-re. Az eredeti egyenletrendszer nem volt ellentmondó, ezért a két megmaradt egyenlet sem lehet az, csupán összefüggő. Ha pedig a két megmaradt egyenlet összefüggő, akkor

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-3-2x_3\\2&-6+3x_3\end{vmatrix}=0$$

kell legyen, amiből

$$-6+3x_3+6+4x_3=0,$$

és ez csak úgy teljesül, ha $x_3=0$. x_3 tehát nem választható paraméterként. Az eredeti egyenletrendszer figyelmes megtekintésekor észrevehetjük, hogy a második egyenlet mindegyik tagja — az x_3-at tartalmazó tag kivételével — kétszerese az első egyenlet megfelelő tagjának. Ebből következik, hogy a két egyenlet csak akkor lehet nem ellentmondó, ha $x_3=0$. Ha x_3 értékét visszahelyettesítjük a megmaradt két egyenletbe, az

$$x_1-3x_2=-3;$$
$$2x_1-6x_2=-6$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ennek determinánsa — mint már láttuk — 0, a két egyenlet összefüggő; az egyik, pl. a második elhagyható. A megmaradt egyenletből x_1 kifejezhető x_2-vel:

$$x_1=3x_2-3.$$

Az eredeti egyenletrendszer végtelen sok megoldása tehát ilyen alakú:

$$x_1=3x_2-3,\ \text{ahol } x_2 \text{ tetszőleges};$$
$$x_3=0.$$

Ha pl. $x_2=2$, akkor az egyenletrendszer egy megoldása az $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=0$ számhármas. Ha a felesleges harmadik egyenlet elhagyása után nem x_3-mal, hanem pl. x_1-gyel mint paraméterrel fejeztük volna ki a másik két ismeretlent, a

$$-3x_2+2x_3=-3-x_1;$$
$$-6x_2-3x_3=-6-2x_1$$

egyenletrendszerhez jutottunk volna; ennek determinánsa

$$D=\begin{vmatrix}-3&2\\-6&-3\end{vmatrix}=9+12=21\neq 0,$$

így az egyenletrendszernek rögzített x_1 mellett x_2-ben és x_3-ban egyértelmű megoldása van. Mivel

$$D_2=\begin{vmatrix}-3-x_1&2\\-6-2x_1&-3\end{vmatrix}=7x_1+21 \quad \text{és} \quad D_3=\begin{vmatrix}-3&-3-x_1\\-6&-6-2x_1\end{vmatrix}=0,$$

ezért a megoldás:

$$x_2=\frac{7x_1+21}{21}=\frac{1}{3}x_1+1,\quad \text{ahol } x_1 \text{ tetszőleges};\quad x_3=0.$$

Ha pl. $x_1=3$, akkor $x_2=2$, $x_3=0$, és ezzel éppen az előző megoldásban kapott számhármasra jutunk.

15. Oldjuk meg az

$$x_1-3x_2+2x_3=-3;$$
$$2x_1-6x_2-3x_3=-6;$$
$$-x_1+3x_2+8x_3=3$$

egyenletrendszert.

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$D=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -6 & -3\\ -1 & 3 & 8\end{vmatrix}=-48-9+12-(12-9-48)=0,$$

ezért nincs egyértelmű megoldás. Mivel

$$D_1=\begin{vmatrix}-3 & -3 & 2\\ -6 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 8\end{vmatrix}=144+27-36-(-36+144+27)=0;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -6 & -3\\ -1 & 3 & 8\end{vmatrix}=D=0;$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & -3\\ 2 & -6 & -6\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}=-18-18-18-(-18-18-18)=0,$$

ezért az egyenletek nem lehetnek függetlenek. Az első és a harmadik egyenlet csak akkor nem ellentmondó, ha $x_3=0$, hiszen a többi megfelelő tag egymásnak (-1)-szerese. x_3 most kapott értékét visszahelyettesítve az eredeti egyenletrendszerbe, az

$$x_1-3x_2=-3;$$

$$2x_1-6x_2=-6;$$

$$-x_1+3x_2=3$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelyből két egyenlet is elhagyható, hiszen a második az elsőnek kétszerese, a harmadik az elsőnek (-1)-szerese. Az első egyenletből

$$x_1=3x_2-3,$$

s így az eredeti egyenletrendszer megoldása:

$$x_1=3x_2-3;\quad x_2 \text{ tetszőleges};\quad x_3=0.$$

(Vesd össze az előző feladattal!)

16. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x_1-3x_2+2x_3=1;$$

$$2x_1-6x_2+4x_3=2;$$

$$3x_1-9x_2+6x_3=6.$$

Az egyenletrendszer determinánsa

$$D=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -6 & 4\\ 3 & -9 & 6\end{vmatrix}=-36-36-36-(-36-36-36)=0,$$

ezért az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása.

Mivel

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -6 & 4\\ 6 & -9 & 6\end{vmatrix}=-36-72-36-(-72-36-36)=0;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 6 & 6\end{vmatrix}=12+12+24-(12+12+24)=0;$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -6 & 2\\ 3 & -9 & 6\end{vmatrix}=-36-18-18-(-18-36-18)=0,$$

az egyenletek nem függetlenek. Könnyen észrevehető, hogy a második egyenlet az első egyenletnek kétszerese.

Az is azonnal szembetűnik, hogy a harmadik egyenlet ellentmond mind az első, mind a második egyenletnek, hiszen a megfelelő ismeretlenek együtthatói arányosak (pl. a harmadik egyenlet bal oldala háromszorosa az első egyenlet bal oldalának), az egyenletek jobb oldalán álló konstansok azonban nem. Mivel a három egyenlet ellentmondó, az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Ha az ellentmondást nem vesszük észre, és az összefüggő egyenletek egyikét, pl. a második egyenletet elhagyva az

$$x_1-3x_2=1-2x_3,$$

$$3x_1-9x_2=6-6x_3$$

egyenletrendszert próbáljuk megoldani, azt látjuk, hogy ennek determinánsa

$$D=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -9\end{vmatrix}=0.$$

Ez azt jelenti, hogy a maradék két egyenletből álló egyenletrendszernek sincs egyértelmű megoldása. Mivel most

$$D_1=\begin{vmatrix}1-2x_3 & -3\\ 6-6x_3 & -9\end{vmatrix}=-9+18x_3-(-18+18x_3)=9,$$

azaz x_3 értékétől függetlenül nem zérus, ezért e két egyenlet ellentmond egymásnak, ennélfogva eredeti egyenletrendszerünk is ellentmondásos volt, tehát nincs megoldása.

17. Oldjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszert:

$$x_1+2x_2+x_3=0;$$
$$3x_1-2x_2+2x_3=0;$$
$$6x_1+4x_2+5x_3=0.$$

A homogén egyenletrendszernek akkor és csak akkor van az $x_1=x_2=x_3=0$ triviális megoldástól különböző megoldása, ha determinánsa 0. Esetünkben

$$D=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&-2&2\\6&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&2\\4&5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-2\\6&4\end{vmatrix}=-18-6+24=0,$$

tehát van a triviálistól különböző megoldás. Mivel az a_{13} elemhez tartozó aldetermináns

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3&-2\\6&4\end{vmatrix}=24,$$

azaz nem zérus, így az ismeretlenek aránya:

$$x_1:x_2:x_3=A_{11}:A_{12}:A_{13}=$$
$$=\begin{vmatrix}-2&2\\4&5\end{vmatrix}:\left(-\begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}\right):\begin{vmatrix}3&-2\\6&4\end{vmatrix}=(-18):(-3):(24)=6:1:(-8).$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy

$$x_1=6t,\quad x_2=t,\quad x_3=-8t.$$

ahol t tetszőleges valós szám. Speciálisan a $t=1$ értéknek megfelelő megoldás:

$$x_1=6,\quad x_2=1,\quad x_3=-8.$$

18. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x_1-3x_2+2x_3=0;$$
$$2x_1+3x_2-x_3=0;$$
$$8x_1+3x_2+5x_3=0.$$

Az egyenletrendszer determinánsa

$$D=\begin{vmatrix}1&-3&2\\2&3&-1\\8&3&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1\\3&5\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&-1\\8&5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&3\\8&3\end{vmatrix}=$$
$$=(15+3)+3(10+8)+2(6-24)=36\neq 0,$$

ezért ennek az egyenletrendszernek nincs a triviálistól különböző megoldása.

19. A determináns utolsó sora szerinti kifejtéssel lássuk be, hogy

$$\begin{vmatrix}2\cos^2\dfrac{x}{2}&\sin x&1\\2\cos^2\dfrac{y}{2}&\sin y&1\\1&0&1\end{vmatrix}=\sin(y-x).$$

A kifejtés a következő:

$$\sin x-\sin y+2\cos^2\frac{x}{2}\sin y-2\cos^2\frac{y}{2}\sin x.$$

Felhasználva, hogy $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1\equiv\cos\alpha$, fenti kifejezésből

$$-\sin x\cos y+\sin y\cos x=\sin(y-x).$$

20. A Sarrus-szabály alkalmazásával igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}=-2(x^3+y^3).$$

A determinánsra a Sarrus-szabályt alkalmazva, értéke

$$xy(x+y)+xy(x+y)+xy(x+y)-(x+y)^3-y^3-x^3=$$
$$=3x^2y+3xy^2-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-y^3-x^3=-2(x^3+y^3).$$

21. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix}\cos(x-y)&\cos(y-z)&\cos(z-x)\\\cos(x+y)&\cos(y+z)&\cos(z+x)\\\sin(x+y)&\sin(y+z)&\sin(z+x)\end{vmatrix}=-2\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x).$$

Útmutatás. Fejtsük ki a determinánst első sora szerint és használjuk fel a

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$

és

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\sin x\sin y$$

azonosságokat.

3. Az n-edrendű determináns

Az előző alfejezetben a harmadrendű determináns kétféle definícióját láttuk. Az első esetben a harmadrendű determinánst másodrendű, tehát eggyel alacsonyabb rendű determinánsok segítségével definiáltuk, a második esetben a determináns értékét bizonyos szorzatok összegeként értelmeztük. Mindkét definíció alkalmas magasabbrendű determinánsok értelmezésére is:

n-edrendű determinánsnak nevezünk egy n^2 *elemből* álló, *n sort* és *n oszlopot* tartalmazó, következő alakú táblázatot:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix};$$

az $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ elemeket együtt *főátlónak*, az $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ elemeket együtt *mellékátlónak* nevezzük.

Az n-edrendű determinánsnak a következő értéket tulajdonítjuk:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i},$$

ahol A_{1i} az a_{1i} elemhez tartozó $(n-1)$-edrendű *aldeterminánst* jelenti, amelyet úgy kapunk meg, hogy az első sor és az i-edik oszlop elhagyásával adódó $(n-1)$-edrendű determinánst $(-1)^{1+i}$-vel megszorozzuk. (Ez más szóval éppen a *sakktábla-szabály* kiterjesztését jelenti.) A determináns értékének ez a meghatározási módja a determináns *első sora szerinti kifejtése*. (Kifejthető a determináns teljesen hasonló módon bármely sora vagy bármely oszlopa szerint is.)

Ha a fenti kifejtésben szereplő $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ $(n-1)$-edrendű aldeterminánsokat a közölt módon $(n-2)$-edrendű aldeterminánsaikkal, ezeket $(n-3)$-adrendű aldeterminánsaikkal fejezzük ki, és ezt az eljárást tovább folytatjuk, végül másodrendű aldeterminánsokhoz jutunk. Értéküket kiszámítva, mindegyik másodrendű determinánsból két-két szorzatot kapunk, így az n-edrendű determináns kifejtése során kapott n-tényezős szorzatok száma

$$n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2 = n!$$

(az $n!$ jelet „n faktoriális"-nak olvassuk). A kifejtés módját átgondolva belátható, hogy a szorzatokban minden sorból és oszlopból egy és csakis egy elem szerepel.

Ezek az n-tényezős szorzatok közvetlenül is felírhatók, és ez a felírás adja az n-edrendű determináns — előbbivel egyenértékű — másik definícióját:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{S} (-1)^K a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

ahol $k_1, k_2, \dots, k_n$ az $1, 2, \dots, n$ oszlopindexek egy sorrendjét jelenti; K e sorrend inverzióinak a számát jelöli; az összegezés pedig az $1, 2, \dots, n$ elemek minden lehetséges sorrendjére terjesztendő ki. A tagok felírására azonban $n > 3$ esetében nincs a Sarrus-szabályhoz hasonló egyszerű módszer.

Mindkét definícióból látszik, hogy egy n-edrendű determináns kiszámítása már viszonylag kicsi n esetén is elég hosszadalmas és fárasztó feladat. A következő alfejezetben majd látunk olyan kiszámítási módszereket, amelyek ezt a munkát bizonyos mértékig csökkenthetik.

A magasabbrendű determinánsok segítségével a háromnál több ismeretlent tartalmazó elsőfokú inhomogén egyenletrendszerek megoldását is megkaphatjuk a Cramer-szabállyal, és a háromnál több ismeretlent tartalmazó elsőfokú homogén egyenletrendszerek megoldása is hasonló a két, illetve három ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerek megoldásához.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a következő determináns értékét:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -9 & 3 \\ 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

A determinánst első sora szerint fejtjük ki, mivel így egy tag a 0 elem következtében eltűnik, majd a kapott harmadrendű determinánsok értékét a Sarrus-szabállyal számítjuk ki:

$$D=2\begin{vmatrix}2&-9&3\\-6&4&-2\\3&2&2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-4&-9&3\\2&4&-2\\1&2&2\end{vmatrix}+0-(2)\begin{vmatrix}-4&2&-9\\2&-6&4\\1&3&2\end{vmatrix}=$$

$$=2[(16+54-36)-(36+108-8)]+$$
$$+[(-32+18+12)-(12-36+16)]-$$
$$-2[(48+8-54)-(54+8-48)]=-204+6+24=-174.$$

2. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét:

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\a&1&0&0&0\\b&c&1&0&0\\d&e&f&1&0\\g&h&i&j&1\end{vmatrix}.$$

Ezt az ötödrendű determinánst, majd a kapott aldeterminánsokat nyilván mindig az első soruk szerint célszerű kifejteni. Ekkor

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\c&1&0&0\\e&f&1&0\\h&i&j&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\f&1&0\\i&j&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\j&1\end{vmatrix}=1.$$

3. Számítsuk ki a következő determináns értékét:

$$D=\begin{vmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&2&1\\0&0&0&3&2&1\\0&0&4&3&2&1\\0&5&4&3&2&1\\6&5&4&3&2&1\end{vmatrix}.$$

hatodrendű determinánst, majd a kapott aldeterminánsokat nyilván első soruk szerint célszerű kifejteni:

$$D=-\begin{vmatrix}0&0&0&0&2\\0&0&0&3&2\\0&0&4&3&2\\0&5&4&3&2\\6&5&4&3&2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}0&0&0&3\\0&0&4&3\\0&5&4&3\\6&5&4&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}0&0&4\\0&5&4\\6&5&4\end{vmatrix}=$$

$$=24\begin{vmatrix}0&5\\6&5\end{vmatrix}=-720=-6!$$

4. Ellenőrizzük, hogy

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\2&-1&4&-3\\2&3&-4&-5\\3&-4&5&6\end{vmatrix}=-304.$$

A determinánst utolsó sora vagy oszlopa szerint érdemes kifejteni, mert ekkor az adódó harmadrendű determinánsokban, ennélfogva a további műveletekben kisebb számok szerepelnek. A determinánst pl. utolsó sora szerint kifejtve

$$D=-3\begin{vmatrix}-2&3&-4\\-1&4&-3\\3&-4&-5\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1&3&-4\\2&4&-3\\2&-4&-5\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1&-2&-4\\2&-1&-3\\2&3&-5\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&-1&4\\2&3&-4\end{vmatrix}.$$

Az egyes harmadrendű determinánsokat pl. a Sarrus-szabállyal kiszámítva:

$$D=-3[(40-27-16)-(-48+15-24)]-$$
$$-4[(-20-18+32)-(-32-30+12)]-5[(5+12-24)-(8+20-9)]+$$
$$+6[(4-16+18)-(-6+16+12)]=-162-176+130-96=-304.$$

5. Mutassuk meg, hogy

$$D=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\end{vmatrix}=a^2b^2.$$

Fejtsük ki a determinánst pl. az első sor szerint, ekkor

$$D=(1+a)\begin{vmatrix}1-a&1&1\\1&1+b&1\\1&1&1-b\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+b&1\\1&1&1-b\end{vmatrix}+$$
$$+\begin{vmatrix}1&1-a&1\\1&1&1\\1&1&1-b\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1-a&1\\1&1&1+b\\1&1&1\end{vmatrix}.$$

A kapott harmadrendű determinánsokat pl. a Sarrus-szabály szerint kifejtve:

$$D=(1+a)[(1-a)(1+b)(1-b)+1+1-(1+b+1-a+1-b)]-$$
$$-[(1+b)(1-b)+1+1-(1+b)-(1-b)-1]+$$
$$+[1-b+1-a+1-1-1-(1-a)(1-b)]-$$
$$-[1+(1-a)(1+b)+1-1-(1-a)-(1+b)]=$$
$$=[(1+a)(1-a)(1+b)(1-b)-(1+a)(1-a)]-[(1+b)(1-b)-1]+$$
$$+[1-a-b-(1-a)(1-b)]-[(1-a)(1+b)+a-1-b]=$$
$$=(1-a^2)(1-b^2)-1+a^2-1+b^2+2-a-b-1+a+b-ab-1+a-$$
$$-b+ab-a+1+b=1-a^2-b^2+a^2b^2-1+a^2+b^2=a^2b^2.$$

II. A DETERMINÁNSOK FŐBB TULAJDONSÁGAI ÉS DETERMINÁNSOK ÁTALAKÍTÁSA

Az alábbiakban a determinánsok néhány olyan tulajdonságát soroljuk fel, ill. olyan feltételeket említünk meg, amelyek a determinánsok értékének kiszámításában előnyösen felhasználhatók.

1. *A determináns bármelyik sora vagy oszlopa szerint kifejthető.* Így pl. az n-edrendű determináns i-edik sora szerinti kifejtése

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

alakú, j-edik oszlopa szerinti kifejtése pedig

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

alakú.

2. *A determináns értéke nem változik, ha megfelelő sorait és oszlopait egymással felcseréljük, azaz ha a determináns elemeit főátlójára tükrözzük.* Ez azt jelenti, hogy a determináns soraira kimondott bármely tétel érvényes a determináns oszlopaira is, és viszont. *A determináns sorai és oszlopai minden tekintetben egyenrangúak.*

Valóban, pl. harmadrendű determináns esetén:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

és

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}- \\ -a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

3. *Ha a determináns két sorát (oszlopát) egymással felcseréljük, a determináns előjelet vált, azaz értéke* (-1)*-gyel szorzódik.*

Ha pl. harmadrendű determináns esetén a második és harmadik oszlopot egymással felcseréljük, akkor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}- \\ -a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{22}a_{33},$$

és ez valóban az eredeti kifejtés (-1)-szerese.

4. *Ha egy determináns két sora (oszlopa) megegyezik elemről elemre, akkor a determináns értéke zérus.*

Ha pl. harmadrendű determináns esetén a második és harmadik sor elemei egyeznek meg, akkor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{23}+a_{12}a_{23}a_{21}+a_{13}a_{21}a_{22}- \\ -a_{13}a_{22}a_{21}-a_{12}a_{21}a_{23}-a_{11}a_{23}a_{22}=0.$$

5. *Ha a determináns valamelyik sorának (oszlopának) minden elemét megszorozzuk ugyanazzal a c számmal, akkor a determináns értéke is c-vel szorzódik.* Ez azt jelenti, hogy egy sor (oszlop) elemeinek közös tényezője kiemelhető a determinánsból.

Harmadrendű determináns esetén pl.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. *Ha a determináns valamelyik sorában (oszlopában) csupa* 0 *áll, akkor a determináns értéke zérus.*

Harmadrendű determináns esetén pl.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. *Ha két n-edrendű determináns csak egy sorban (oszlopban) különbözik egymástól, akkor a két determináns úgy adható össze, hogy a két különböző sorban (oszlopban) álló megfelelő elemeket páronként összeadjuk, a közös sorokat (oszlopokat) pedig változatlanul leírjuk.*

Ha pl. harmadrendű determinánsok esetén csak az utolsó oszlopban különbözik egymástól a két determináns, akkor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix}.$$

Az előbbi egyenlőséget visszafelé olvasva azt kapjuk, hogy ha egy determináns valamelyik sorát (oszlopát) kéttagú összegekre bontjuk, a determináns a jelzett módon két determináns összegére bontható.

8. *A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorához (oszlopához) hozzáadjuk egy másik sorának (oszlopának) tetszőleges többszörösét.* Ez a tétel lehetővé teszi, hogy a determináns tetszőleges eleme helyébe tetszőleges értéket vigyünk a determináns értékének megváltozása nélkül. A determináns más elemei ilyenkor természetesen megváltoznak.

9. *Ha a determináns főátlójának egyik oldalán minden elem zérus, akkor a determináns értéke egyenlő a főátlóban álló elemek szorzatával.*

Ez az állítás azonnal belátható, ha a determináns kifejtését mindig a legtöbb 0-t tartalmazó sor (oszlop) szerint végezzük el

10. *Determinánsok szorzása.* Előrebocsátunk egy elnevezést: Két n-elemű értékrendszer,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{és} \quad (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

komponálásán a megfelelő elemek összeszorzását és a kapott kéttényezős szorzatok összeadását értjük. Az így adódó

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

szorzatösszeg a két értékrendszer *kompozíciója.*

Két n-edrendű determináns szorzata olyan n-edrendű determinánsként írható fel, amelyben az i-edik sor j-edik eleme az egyik determináns i-edik sorának (vagy oszlopának) a másik determináns j-edik sorával (vagy oszlopával) való kompozíciója.

A szabályból világosan kiderül, hogy csak azonos rendű determinánsok szorozhatók össze, ezek viszont négyféle módon, hiszen egyaránt komponálhatunk sort sorral, oszlopot oszloppal, oszlopot sorral és sort oszloppal. A gyakorlatban legtöbbször az utolsó szoktuk használni, mert hasonló tétel érvényes mátrixok szorzására is.

Például harmadrendű determinánsok esetében sor—oszlopkompozíciót alkalmazva, a szorzatdetermináns a következőképpen írható fel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{23}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}.$$

Ha a két összeszorzandó determináns nem azonos rendű, akkor a kisebb rendű a magasabb rendűvel azonos rendűre bővíthető ki úgy, hogy értéke nem változik meg (ui. a főátlót egyesekkel egészítve ki, a többi új elem helyére pedig nullát írva).

11. *Laplace-féle kifejtés.* Egy adott determináns kifejtésekor célszerű a kifejtést azon sor (oszlop) szerint elvégezni, amelyben a legtöbb 0 áll, hiszen ekkor annyival kevesebb aldeterminánst kell kiszámolnunk, ahány 0 elem az illető sorban (oszlopban) van. Ha több ilyen sor (vagy oszlop) van, érdemes ezeket (megfelelő számú sor- vagy oszlopcserével) egymás mellé hozni, és a kifejtést így elvégezni.

Ez az összefüggés nagyon speciális esete Laplace kifejtési tételének, mely a determináns sor, ill. oszlop szerinti kifejtésének általánosítása r számú sor, ill. oszlop szerinti kifejtésre:

A determináns értékét megkapjuk, ha tetszőlegesen kijelölt r számú sorból (oszlopból) elkészítjük az összes lehetséges r-edrendű aldeterminánst, ezeket rendre megszorozzuk a hozzájuk tartozó $(n-r)$-edrendű aldeterminánsokkal, a szorzatokat megfelelő előjellel látjuk el és összeadjuk.

A megfelelő előjel azt jelenti, hogy a szorzatokat $(-1)^{R+S}$-sel kell megszorozni, ahol R jelenti a kiválasztott r számú sor (oszlop) sorindexének (oszlopindexének) összegét (ez a sorok, ill. oszlopok rögzítése után egy kifejtésen belül nem változik); S pedig a képezett r-edrendű aldeterminánsok oszlopindexeinek (sorindexeinek) az összegét. A kifejtésben szereplő aldeterminánsok előjelét a számításokban figyelmen kívül hagyhatjuk, mert — mint belátható — a kifejtés során összetartozó aldetermináns-pár szorzatának előjele mindig pozitív.

Ha pl. egy ötödrendű determinánst második és ötödik sora szerint fejtünk ki, a kifejtés a következő:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{51} & a_{52} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{51} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{25} \\ a_{51} & a_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{52} & a_{54} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{23} & a_{25} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Az összeg első tagjának előjele pl. azért pozitív, mert ez esetben $R = 2+5 = 7$, valamint $S = 1+2 = 3$, így az előjel $(-1)^{7+3}=(-1)^{10}=1$; a hatodik tagjának előjele azért negatív, mert $R = 2+5 = 7$ (ez változatlan), $S = 2+4 = 6$ és $(-1)^{6+7}=(-1)^{13} = -1$.

12. Nem beszéltünk még arról, milyen mennyiségek lehetnek egy determináns elemei. Belátható, hogy *a determinánsokra kimondott valamennyi tulajdonság és tétel nemcsak akkor igaz, ha a determináns elemei (komplex) számok, hanem akkor is, ha függvények.*

13. *Determináns differenciálása.* Ha a determináns elemei egy változónak differenciálható függvényei, akkor beszélhetünk a determináns deriváltjáról. Az x változótól függő D determináns deriváltját $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} D$-vel jelöljük.

Az n-edrendű determináns deriváltját megkapjuk, ha a determináns egy-egy sorának (vagy oszlopának) minden elemét a változó szerint deriváljuk, a többi sor (oszlop) elemeit változatlanul hagyjuk, majd az így kapott n számú determinánst összeadjuk.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a következő determináns értékét:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Kivonjuk a második oszlop elemeinek kétszeresét a harmadik oszlop megfelelő elemeiből (röviden: kivonjuk a második oszlop kétszeresét a harmadikból), ekkor

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8-2\cdot4 \\ -2 & 1 & 5-2\cdot1 \\ -3 & 2 & 4-2\cdot2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Látható, hogy így a harmadik oszlopban egyetlen elemtől eltekintve minden elem zérus, ezért a determinánst a harmadik oszlopa szerint kifejtve, csupán egyetlen másodrendű determinánst kapunk. Ezért

$$D = -3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -3(2+12) = -42.$$

2. Kiszámítandó a

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

determináns értéke.

Mivel a második sor első eleme 1, ezért célszerű a második sor háromszorosát levonni az első sorból, és egyidejűleg a második sor kétszeresét hozzáadni a harmadik sorhoz. Így az első oszlop első és harmadik eleme 0 lesz, és a kapott determinánst az első oszlopa szerint kifejtve, csak egyetlen másodrendű determinánst kapunk.

$$D=\begin{vmatrix}3&4&5\\1&2&3\\-2&5&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-3\cdot1&4-3\cdot2&5-3\cdot3\\1&2&3\\-2+2\cdot1&5+2\cdot2&-4+2\cdot3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0&-2&-4\\1&2&3\\0&9&2\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-2&-4\\9&2\end{vmatrix}=-(-4+36)=-32.$$

3. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét:

$$D=\begin{vmatrix}2&4&-4\\5&-6&3\\4&2&-3\end{vmatrix}.$$

I. Megoldás:

A Sarrus-szabályt alkalmazva,

$$D=36+48-40-(96-60+12)=44-48=-4.$$

II. Megoldás:

Az utolsó sor (-2)-szeresét érdemes az első sorhoz, 3-szorosát pedig a második sorhoz adnunk, mert ekkor a második oszlop első és második eleme 0 lesz, és így a második oszlop szerinti kifejtés egyetlen másodrendű determinánshoz vezet:

$$D=\begin{vmatrix}-6&0&2\\5&-6&3\\4&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&0&2\\17&0&-6\\4&2&-3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-6&2\\17&-6\end{vmatrix}=-4.$$

4. Kiszámítandó a

$$D=\begin{vmatrix}28&25&38\\42&38&65\\56&47&83\end{vmatrix}$$

determináns értéke.

Most nem érdemes a Sarrus-szabályt alkalmazni, mert a determináns elemei nagyok, és a szorzás nehezen végezhető el fejben.

Kiemelünk az első oszlopból 14-et, majd kivonjuk az első oszlop 12-szeresét a második oszlopból és 20-szorosát a harmadik oszlopból. Ez jelentős mértékben csökkenti az egyes elemek nagyságát. Ekkor

$$D=14\begin{vmatrix}2&25&38\\3&38&65\\4&47&83\end{vmatrix}=14\begin{vmatrix}2&25-12\cdot2&38-20\cdot2\\3&38-12\cdot3&65-20\cdot3\\4&47-12\cdot4&83-20\cdot4\end{vmatrix}=14\begin{vmatrix}2&1&-2\\3&2&5\\4&-1&3\end{vmatrix}.$$

Most kivonjuk az első oszlopból a második kétszeresét, majd a harmadik oszlophoz a második oszlop kétszeresét adjuk:

$$D=14\begin{vmatrix}2&1&-2\\3&2&5\\4&-1&3\end{vmatrix}=14\begin{vmatrix}0&1&0\\-1&2&9\\6&-1&1\end{vmatrix}.$$

Így az első sorban két elem zérus; e szerint a sor szerint kifejtve,

$$D=-14\begin{vmatrix}-1&9\\6&1\end{vmatrix}=-14(-1-54)=770.$$

5. Kiszámítandó az alábbi determináns értéke:

$$D=\begin{vmatrix}2&3&-2&4\\3&-2&1&2\\3&2&3&4\\-2&4&0&5\end{vmatrix}$$

I. Megoldás:

A determináns harmadik oszlopában már egy elem (a negyedik) 0. Ha hozzáadjuk a második sor kétszeresét az elsőhöz, majd kivonjuk a második sor háromszorosát a harmadikból, akkor a harmadik oszlopban újabb két elem (az első és a harmadik) lesz zérus. Tehát most már a harmadik oszlop szerint kifejtve a determinánst, csupán egy harmadrendű determinánst kapunk:

$$\begin{vmatrix}2&3&-2&4\\3&-2&1&2\\3&2&3&4\\-2&4&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+2\cdot3&3+2(-2)&-2+2\cdot1&4+2\cdot2\\3&-2&1&2\\3-3\cdot3&2-3(-2)&3-3\cdot1&4-3\cdot2\\-2&4&0&5\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}8&-1&0&8\\3&-2&1&2\\-6&8&0&-2\\-2&4&0&5\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}8&-1&8\\-6&8&-2\\-2&4&5\end{vmatrix}.$$

Most adjuk hozzá a második oszlop 8-szorosát az első és harmadik oszlophoz:

$$-\begin{vmatrix}8&-1&8\\-6&8&-2\\-2&4&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&-1&0\\58&8&62\\30&4&37\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}58&62\\30&37\end{vmatrix}=-286.$$

II. Megoldás:

Most az előző negyedrendű determináns értékét első két sora szerinti Laplace-féle kifejtéssel számítjuk ki. Ekkor

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-13)(15) - (8)(-6) + (-8)(-12) + (-1)(23) - (14)(6) + (-8)(16) =$$

$$= -286.$$

6. Keressünk az I. fejezet 3. pontjának **4.** gyakorló feladatában szereplő

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

determináns kiszámítására egyszerűbb módszert!

Az első oszlop első eleme 1. Ezt kihasználva, az első oszlop többi eleme helyére könnyen vihetünk be 0-t. Ugyanis adjuk hozzá az első sor (-2)-szeresét a második és harmadik sorhoz, (-3)-szorosát a harmadik sorhoz, majd fejtsük ki a determinánst első oszlopa szerint. Ekkor

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -10 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -10 & 3 \\ 2 & -4 & 18 \end{vmatrix}.$$

A kapott harmadrendű determinánsra pl. a Sarrus-szabályt alkalmazva,

$$D = -540 - 12 - 140 - (-100 - 252 - 36) = -304.$$

7. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

I. Megoldás:

Mivel a harmadik sor első két eleme zérus, célszerű lesz az első két oszlop szerint elvégezni a Laplace-féle kifejtést. Ekkor ui. a kifejtés lehetséges hat tagjából háromnak értéke zérus, mert a bennük szereplő egyik másodrendű determináns egyik sorában csupa 0 áll, ennélfogva e determináns értéke 0. A megmaradó másik három tag:

$$D = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) + (-2)(1) - (5)(-1) = 0.$$

II. Megoldás:

Ha a negyedik oszlopot kivonjuk a harmadik oszlopból, a determináns harmadik sorának első három eleme 0, így a harmadik sora szerinti kifejtése csupán egy harmadrendű determinánshoz vezet:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Most a második sort hozzáadjuk az elsőhöz és a harmadikhoz:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 & 101 \\ 0 & 4 & 0 & 41 & 0 \\ 2 & 0 & 20 & 0 & 201 \\ 0 & 5 & 0 & 51 & 0 \\ 3 & 0 & 30 & 0 & 301 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 101 \\ 2 & 20 & 201 \\ 3 & 30 & 301 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 41 \\ 5 & 51 \end{vmatrix}.$$

Fejtsük ki a bal oldalon álló determinánst az első, harmadik és ötödik sora alapján Laplace tétele szerint. Az első, harmadik és ötödik sorból összesen 10 harmadrendű determináns képezhető, de közülük csak egyetlen van, amelyben egyetlen egy oszlopban sem áll csupa 0, mégpedig az, amelyhez az első, harmadik és ötödik oszlopot használjuk fel. Ez éppen a jobb oldal első tényezője. A második tényező pedig a hozzá tartozó másodrendű determináns. Az előjel $(-1)^{R+S}=(-1)^{1+3+5+1+3+5}=(-1)^{18}=+1$, tehát állításunk valóban igaz.

9. Számítsuk ki a következő determináns értékét:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{vmatrix}$$

Látszik, hogy az első oszlopban könnyű az elemek „kipusztítása", mert az első elem 1. Ezért kivonjuk az első sor 2-szeresét a második, 3-szorosát a harmadik, 4-szeresét a negyedik sorból. Ekkor

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{vmatrix}.$$

Ha a harmadik sorból 2-t kiemelünk, azonnal látszik, hogy a determináns második és harmadik sora megegyezik, tehát $D=0$.

10. Kiszámítandó a következő determináns értéke:

$$D=\begin{vmatrix}0{,}921&0{,}185&0{,}476&0{,}614\\0{,}782&0{,}157&0{,}527&0{,}138\\0{,}875&0{,}484&0{,}637&0{,}799\\0{,}312&0{,}555&0{,}841&0{,}448\end{vmatrix}$$

Először is valamely elem, pl. az első sor első eleme helyére 1-est hozunk be. Ezt úgy érhetjük el, hogy az első sorból kiemelünk 0,921-et. (A részletszámításokat logarléccel végezzük.) Ekkor

$$D=0{,}921\begin{vmatrix}1&0{,}201&0{,}517&0{,}667\\0{,}782&0{,}157&0{,}527&0{,}138\\0{,}875&0{,}484&0{,}637&0{,}799\\0{,}312&0{,}555&0{,}841&0{,}448\end{vmatrix}$$

Most az első sor segítségével az első oszlop elsőtől különböző elemei helyére nullákat hozunk be úgy, hogy az első sor 0,782-szeresét levonjuk a második sorból, 0,875-szörösét a harmadik sorból, 0,312-szeresét a negyedik sorból.

A kapott determinánst első oszlopa szerint kifejtjük. Az így adódó egyetlen harmadrendű determinánst majd hasonlóképpen alakítjuk át, végül csak egy másodrendű determinánst kell kiszámolnunk. Részletezve:

$$D=0{,}921\begin{vmatrix}1&0{,}201&0{,}517&0{,}667\\0&0&0{,}123&-0{,}384\\0&0{,}309&0{,}196&0{,}217\\0&0{,}492&0{,}680&0{,}240\end{vmatrix}=$$

$$=0{,}921\begin{vmatrix}0&0{,}123&-0{,}384\\0{,}309&0{,}196&0{,}217\\0{,}492&0{,}680&0{,}240\end{vmatrix}=$$

$$=0{,}921(-0{,}384)\begin{vmatrix}0&-0{,}320&1\\0{,}309&0{,}196&0{,}217\\0{,}492&0{,}680&0{,}240\end{vmatrix}=$$

$$=0{,}921(-0{,}384)\begin{vmatrix}0&0&1\\0{,}309&0{,}265&0{,}217\\0{,}492&0{,}757&0{,}240\end{vmatrix}=$$

$$=0{,}921(-0{,}384)\begin{vmatrix}0{,}309&0{,}265\\0{,}492&0{,}757\end{vmatrix}=$$

$$=0{,}921(-0{,}384)(-0{,}104)=-0{,}037.$$

11. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix}1&2&7\\2&3&5\\4&5&8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&5&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&10\\2&3&9\\4&5&11\end{vmatrix}.$$

I. Megoldás:

Számítsuk ki az egyes determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix}1&2&7\\2&3&5\\4&5&8\end{vmatrix}=24+40+70-(84+32+25)=134-141=-7,$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&5&3\end{vmatrix}=9+32+30-(36+12+20)=71-68=3,$$

$$\begin{vmatrix}1&2&10\\2&3&9\\4&5&11\end{vmatrix}=33+72+100-(120+44+45)=205-209=-4.$$

Valóban $-7+3=-4$.

II. Megoldás:

Vegyük észre, hogy mindhárom determináns első két oszlopa megegyezik, a bal oldali két determináns harmadik oszlopának megfelelő elemeit összeadva pedig éppen a jobb oldali determináns utolsó oszlopát kapjuk. Ebből pedig következik az egyenlőség teljesülése.

12. Kiszámítandó a következő determináns értéke:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 9 & 1 \\ -2 & 7 & -2 & 2 \\ 3 & 9 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Adjuk hozzá a negyedik oszlopot a harmadikhoz, így a harmadik oszlop második eleme 0 lesz:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 10 & 1 \\ -2 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Adjuk hozzá a negyedik oszlopot az elsőhöz, így az első oszlop második eleme 0 lesz, tehát a második sorban két 0 áll:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 10 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Most észrevehetjük, hogy a harmadik oszlop pontosan kétszerese az első oszlopnak, vagyis 2-t kiemelve a determináns elé, két oszlop megegyezik; ezért

$$D=0.$$

13. Számítsuk ki minél egyszerűbben az I. fejezet 3. pontjának 3. gyakorló feladatában megadott

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értékét!

Ha az első és hatodik, második és ötödik, valamint a harmadik és negyedik oszlopot felcseréljük, akkor egy háromszögdeterminánst kapunk, és a három oszlopcsere miatt az eredeti determináns értéke $(-1)^3 = -1$-gyel szorzódik:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

A háromszögdetermináns értéke a 9. tétel értelmében a főátlóban álló elemek szorzatával egyenlő: vagyis

$$D = -1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = -720.$$

14. Az

$$x+2y+3z = 14;$$

$$y+2z+3t = 20;$$

$$z+2t+3x = 14;$$

$$t+2x+3y = 12$$

egyenletrendszerből számítsuk ki y értékét!

A számítást Cramer-szabállyal végezhetjük. Az egyenletrendszer determinánsát az egyenletrendszer alábbi módon rendezett alakjából könnyebben írhatjuk fel:

$$x+2y+3z+0t = 14;$$

$$0x+y+2z+3t = 20;$$

$$3x+0y+z+2t = 14;$$

$$2x+3y+0z+t = 12.$$

Ebből ui. könnyen leolvasható, hogy

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

D kiszámítása érdekében az első oszlop kétszeresét kivonjuk a második oszlopból, háromszorosát pedig a harmadikból, így az első sorba három 0 elem lép be:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\3&0&1&2\\2&3&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&3\\3&-6&-8&2\\2&-1&-6&1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3\\-6&-8&2\\-1&-6&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3\\-3&-4&1\\-1&-6&1\end{vmatrix}.$$

Adjuk hozzá az első sort a harmadik sorhoz, és az első sor háromszorosát a második sorhoz, így az első oszlopban két 0 elemet kapunk:

$$D=2\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&10\\0&-4&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&10\\-4&4\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot2\cdot4\begin{vmatrix}1&5\\-1&1\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot4(1+5)=96.$$

Mivel az egyenletrendszer determinánsa nem 0, ezért van egyértelmű megoldás.

Most számítsuk ki D_y értékét!

$$D_y=\begin{vmatrix}1&14&3&0\\0&20&2&3\\3&14&1&2\\2&12&0&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&7&3&0\\0&10&2&3\\3&7&1&2\\2&6&0&1\end{vmatrix}.$$

Kivonjuk az első sor kétszeresét a negyedik sorból, háromszorosát a harmadik sorból:

$$D_y=2\begin{vmatrix}1&7&3&0\\0&10&2&3\\0&-14&-8&2\\0&-8&-6&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}10&2&3\\-14&-8&2\\-8&-6&1\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot2\begin{vmatrix}5&1&3\\-7&-4&2\\-4&-3&1\end{vmatrix}.$$

Kivonjuk a harmadik sor kétszeresét a második sorból, háromszorosát az első sorból, ekkor:

$$D_y=8\begin{vmatrix}17&10&0\\1&2&0\\-4&-3&1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}17&10\\1&2\end{vmatrix}=8(34-10)=192.$$

A keresett ismeretlen tehát:

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{192}{96}=2.$$

15. A determináns kifejtése nélkül bizonyítsuk be, hogy

$$D=\begin{vmatrix}-4&1&1&1&1\\1&-4&1&1&1\\1&1&-4&1&1\\1&1&1&-4&1\\1&1&1&1&-4\end{vmatrix}=0.$$

Hozzáadjuk az első oszlophoz a többi oszlopot, ekkor

$$D=\begin{vmatrix}-4&1&1&1&1\\1&-4&1&1&1\\1&1&-4&1&1\\1&1&1&-4&1\\1&1&1&1&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\0&-4&1&1&1\\0&1&-4&1&1\\0&1&1&-4&1\\0&1&1&1&-4\end{vmatrix}=0,$$

mert az első oszlopban csupa zérus áll.

16. Számítsuk ki a

$$D=\begin{vmatrix}i&i&i\\i&2+2i&i\\i&i&1+3i\end{vmatrix}$$

determináns értékét, ahol i a képzetes egységet jelenti ($i^2=-1$).

Ha az első sort a második és harmadik sorból levonjuk, akkor

$$D=\begin{vmatrix}i&i&i\\0&2+i&0\\0&0&1+2i\end{vmatrix},$$

s mivel a főátló alatt csupa 0 áll, ezért

$$D=i(2+i)(1+2i)=2i-1-4-2i=-5.$$

17. Határozzuk meg a

$$D=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\i&0&1&1\\i&i&0&1\\i&i&i&0\end{vmatrix}$$

determináns értékét, ahol i a képzetes egységet jelenti, tehát $i^2=-1$.

Kivonjuk a negyedik oszlop elemeit a második és a harmadik oszlop elemeiből:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ i & -1 & 0 & 1 \\ i & i-1 & -1 & 1 \\ i & i & i & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} i & -1 & 0 \\ i & i-1 & -1 \\ i & i & i \end{vmatrix}.$$

Kivonjuk az első sor elemeit a második és harmadik sor elemeiből. Ekkor:

$$D = -\begin{vmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & i+1 & i \end{vmatrix} = -i\begin{vmatrix} i & -1 \\ i+1 & i \end{vmatrix} = -i(-1+i+1) = -i^2 = 1.$$

18. Bizonyítsuk be, hogy

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0,$$

bármilyen számokat is jelent a, b, c.

Hozzáadjuk a második oszlopot a harmadik oszlophoz:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}.$$

Kiemeljük a harmadik oszlopból $(a+b+c)$-t:

$$D = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

mivel a determináns két oszlopa megegyezik.

19. A determináns kifejtése nélkül mutassuk meg, hogy bármilyen a, b, c esetén igaz:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

Vegyük észre, hogy ha a második sort az elsőből kivonjuk, akkor az így adódó első sorból az $(a-b)$ tényező már kiemelhető:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & a-b & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Hasonlóképpen, kivonva a harmadik sort a másodikból, $(b-c)$ válik kiemelhetővé:

$$D = (a-b)\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b^2-c^2 & b-c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Most már kifejtjük a determinánst harmadik oszlopa szerint:

$$D = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(b-c)(a+b-b-c) = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

20. Bizonyítsuk be lehetőleg egyszerűen, hogy

$$D = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}.$$

I. Megoldás:

Szorozzuk meg a bal oldali determináns első oszlopát a-val, második oszlopát b-vel, harmadik oszlopát c-vel, és osszunk is abc-vel:

$$\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2c \\ ab^2 & abc & b^2c \\ ac^2 & bc^2 & abc \end{vmatrix}.$$

Emeljük ki az első sorból a-t, a második sorból b-t, a harmadik sorból c-t:

$$D = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix},$$

ez pedig valóban a jobb oldalon álló determináns.

II. Megoldás:

A determinánsokra nézve látható, hogy mindkét determináns Sarrus-szabály szerinti kifejtésében a megfelelő tagok megegyeznek, mégpedig a főátló irányában mindegyik tag $a^2b^2c^2$, a mellékátló irányában pedig rendre a^3c^3, b^3c^3, ill. a^3b^3.

21. A két n-edrendű determináns kifejtése nélkül mutassuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \ldots 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \ldots 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \ldots 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 \ldots 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \ldots 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \ldots 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \ldots 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \ldots 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 \ldots 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \ldots 1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Ha hozzáadjuk az első $n-1$ oszlopot az utolsóhoz, majd kiemeljük az utolsó oszlopból $(n-1)$-et, akkor a jobb oldalon álló determinánst kapjuk. Ezután kivonjuk az utolsó oszlopot az összes előzőből, majd kifejtjük a determinánst utolsó sora szerint. Így olyan $(n-1)$-edrendű determinánst kapunk, amelynek főátlójában mindenütt -1 áll, többi eleme pedig 0. Ennek a determinánsnak értéke a főátlóban álló elemek szorzata, azaz $(-1)^{n-1}$.

22. Nyilván igaz, hogy

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1; \qquad D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=1.$$

Ennek általánosításaként mutassuk meg, hogy ha az n-edrendű D_n determináns a_{ik} eleme megegyezik az i és k számok közül a kisebbikkel, ill. $i=k$ esetén közös értékükkel, akkor a determináns értéke 1.

A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. $n=1, 2, 3$ esetén igaz a tétel. Tegyük fel, hogy $n-1$ esetén is igaz, azaz:

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\dots & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\dots & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\dots & 3 & 3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 2 & 3\dots & n-2 & n-2\\ 1 & 2 & 3\dots & n-2 & n-1\end{vmatrix}=1.$$

Írjuk fel a hasonló szerkezetű n-edrendű determinánst, majd vonjuk ki első oszlopát az összes többiből:

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\dots & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\dots & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\dots & 3 & 3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 2 & 3\dots & n-1 & n-1\\ 1 & 2 & 3\dots & n-1 & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\dots & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\dots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\dots & 2 & 2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 2\dots & n-2 & n-2\\ 1 & 1 & 2\dots & n-2 & n-1\end{vmatrix}.$$

Ha ezt a determinánst első sora szerint kifejtjük, éppen D_{n-1}-et kapjuk, amelynek értéke indukciós feltevésünk szerint 1, tehát állításunkat bebizonyítottuk.

23. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix}a & b & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & e & f\\ 0 & 0 & g & h\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}e & f\\ g & h\end{vmatrix}.$$

Állításunk azonnal belátható, ha a bal oldalon álló determinánst — Laplace tételét alkalmazva — első két sora szerint kifejtjük. A kifejtés során adódó tagok egyetlen kivétellel mind zérusok. A kivétel áll a bizonyítandó állítás jobb oldalán. Az előjel pozitív, mert $(-1)^{1+2+1+2}=(-1)^6=+1$.

24. Szorozzuk össze a

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & 5 & 3\end{vmatrix} \quad \text{és a} \quad D_2=\begin{vmatrix}6 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

determinánsokat mind a négyféle módon! Ellenőrizzük a kapott eredményt!

Ha D_1 sorait D_2 soraival komponáljuk, akkor

$$D_1D_2=\begin{vmatrix}12+3+0 & 4-9+1 & 0-3-1\\ 12-4+0 & 4+12-2 & 0+4+2\\ -6-5+0 & -2+15+3 & 0+5-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}15 & -4 & -4\\ 8 & 14 & 6\\ -11 & 16 & 2\end{vmatrix}.$$

Ha D_1 sorait D_2 oszlopaival komponáljuk, akkor

$$D_1D_2=\begin{vmatrix}6 & -10 & -4\\ 20 & 8 & 6\\ 4 & 19 & 2\end{vmatrix},$$

ha D_1 oszlopait D_2 soraival komponáljuk, akkor

$$D_1D_2=\begin{vmatrix}10 & 9 & 3\\ -22 & 11 & -1\\ 8 & -1 & -5\end{vmatrix},$$

végül ha D_1 oszlopait D_2 oszlopaival komponáljuk, akkor

$$D_1D_2=\begin{vmatrix}16 & 3 & 3\\ -10 & 20 & -1\\ 2 & -4 & -5\end{vmatrix}.$$

D_1D_2 bármelyikét kifejtve, (-1820)-at kapunk. Másfelől

$$D_1=70 \quad \text{és} \quad D_2=-26,$$

és e számok szorzata valóban -1820.

25. Számítsuk ki a következő determináns négyzetét (önmagával való szorzás útján):

$$D=\begin{vmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\[4pt] \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\[4pt] \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}.$$

Ellenőrizzük a kapott eredményt!

Mivel a determináns a főátlóra szimmetrikus, ezért sorai rendre megegyeznek a megfelelő oszlopokkal, így bármely szorzási mód ugyanazt a számítási eljárást adja:

$$D^2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ellenőrzésként kiszámítjuk a D determináns értékét:

$$D = \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}[-1(1-4)-2(-2-4)+2(4+2)] = \frac{1}{27}(3+12+12) = 1.$$

Tehát D^2 valóban 1.

26. Szorozzuk össze az alábbi két determinánst:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ellenőrizzük a kapott eredményt.

Mivel a két determináns különböző rendű, a másodrendű determinánst ugyanolyan értékű harmadrendű determinánssá kell kiegészítenünk. A kiegészítés nem egyértelműen meghatározott, sokféle módon lehetséges. Például

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 3 & 5 \\ y & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ x & 1 & y \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

stb., ahol x és y értéke tetszőleges lehet. Legyen az egyszerű számolás kedvéért

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

ekkor sor-oszlop szorzást végezve:

$$D_1 D_2 = \begin{vmatrix} 9-10 & -1 & 15+20 \\ 3-6 & 7 & 5+12 \\ -3-2 & -2 & -5+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 35 \\ -3 & 7 & 17 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -88 \\ -5 & 3 & -176 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 10 & -88 \\ 3 & -176 \end{vmatrix} = -(-1760+264) = 1496.$$

Valóban

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 4 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 104-36 = 68,$$

$$D_2 = 12+10 = 22,$$

és így $D_1 D_2 = 22 \cdot 68 = 1496$.

27. Határozzuk meg a

$$D = \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix}$$

determináns deriváltját!

$$D' = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x \begin{vmatrix} 2x-1 & x^3 \\ x & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & -2 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} 2 & 3x^2 \\ x & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & 3 \\ 1 & x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x(-4x+2-x^4)-(-2)+x^2(-4-3x^3)-(x^5-3) =$$

$$= -6x^5-12x^2+4x+5.$$

Mivel

$$D = \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} x^2 & 3 \\ 1 & x^3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} x^2 & x+1 \\ 1 & 2x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -x(x^5-3)-2(2x^3-x^2-x-1) = -x^6-4x^3+2x^2+5x+2,$$

ezért

$$D' = -6x^5 - 12x^2 + 4x + 5,$$

ami előző eredményünkkel valóban megegyezik.

28. Mutassuk meg, hogy

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 118.$$

A harmadik sorban négy elem 1, ezért oda könnyű 0-kat behozni. E célból vonjuk ki pl. az első oszlopot a másodikból, negyedikből és ötödikből és az első oszlop kétszeresét a harmadikból. Utána fejtsük ki a determinánst harmadik sora szerint:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -5 & -3 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & -3 & -6 \\ -5 & -4 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$$

A második sorban már van egy 0, érdemes számukat szaporítani. Ezért adjuk hozzá a harmadik oszlop 3-szorosát az elsőhöz, majd másodikhoz, és utána fejtsük ki a determinánst második sora szerint:

$$D = \begin{vmatrix} -12 & -8 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -14 & -14 & -3 & -6 \\ -8 & -7 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -12 & -8 & -3 \\ -14 & -14 & -6 \\ -8 & -7 & -5 \end{vmatrix}.$$

Hogy ne kelljen nagy számokat összeszorozni, emeljünk ki a második sorból (-2)-t, majd adjuk hozzá a második sort a harmadikhoz. Így

$$D = 2\begin{vmatrix} -12 & -8 & -3 \\ 7 & 7 & 3 \\ -8 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -12 & -8 & -3 \\ 7 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -12 & -8 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = (-2)(-3) - 4(-28) = 118.$$

29. Ellenőrizzük, hogy a

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{10} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{7} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{10} & -\sqrt{7} & -\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix}$$

determináns értéke: $2(\sqrt{5} + \sqrt{15} - \sqrt{21})^2$

Az első sorból és az első oszlopból $\sqrt{2}$-t kiemelve,

$$D = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ -1 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{7} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{7} & -\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{7} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{5}+\sqrt{15} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{7} & \sqrt{21}-\sqrt{5} & \sqrt{35} \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{7} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{5}+\sqrt{15} \\ -\sqrt{5} & \sqrt{21}-\sqrt{5} & \sqrt{35} \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} -1 & 0 & \sqrt{7} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{5}+\sqrt{15} \\ -\sqrt{5} & \sqrt{21}-\sqrt{5}-\sqrt{15} & \sqrt{35} \end{vmatrix} =$$

$$= 2(\sqrt{21}-\sqrt{5}-\sqrt{15})(-\sqrt{5}-\sqrt{15}+\sqrt{21}) = 2(\sqrt{5}+\sqrt{15}-\sqrt{21})^2.$$

30. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ -b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - b^4.$$

A determinánst az első oszlop szerint fejtve ki

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ -b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -b & 0 & 0 \\ a & -b & 0 \\ 0 & a & -b \end{vmatrix} =$$

$$= a^2\begin{vmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} - b^2\begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & -b \end{vmatrix} = a^4 - b^4.$$

31. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+u \end{vmatrix} = xyzu + xyz + yzu + xyu + xzu.$$

Az első sort kivonjuk a másodikból, harmadikból és negyedikből, majd kifejtjük a determinánst utolsó oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & y & 0 & 0 \\ -x & 0 & z & 0 \\ -x & 0 & 0 & u \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x & 0 & z \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} + u\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ -x & y & 0 \\ -x & 0 & z \end{vmatrix} =$$

$$= xyz + u(yz + xyz + xy + xz) = xyz + uyz + uxyz + uxy + uxz.$$

32. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 \dots 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & 1+a_2b_3 \dots 1+a_2b_n \\ 1+a_3b_1 & 1+a_3b_2 & 1+a_3b_3 \dots 1+a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & 1+a_nb_3 \dots 1+a_nb_n \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ha } n > 2.$$

Kivonjuk a determináns második oszlopát a harmadikból, az elsőt a másodikból, majd kiemeljük a második oszlopból $(b_2 - b_1)$-et, a harmadik oszlopból $(b_3 - b_2)$-t; ekkor a második és harmadik oszlop elemei megyegyeznek, ezért a determináns értéke 0.

III. NÉHÁNY NEVEZETES DETERMINÁNS

1. A Vandermonde-féle determináns

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokhoz tartozó *Vandermonde-féle determináns:*

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \dots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \dots a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 \dots a_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

minden n esetén igaz, hogy

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\dots(a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}) =$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i);$$

ahol tehát a szorzat tényezői az összes olyan $(a_j - a_i)$ alakú különbség, amelyben a_i és a_j az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok valamelyike és $i < j$. Megemlítjük, hogy összesen $\frac{n(n-1)}{2}$ számú tényező van a szorzatban.

A Vandermonde-féle determináns szorzatelőállításából kitűnik, hogy ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ páronként különböző számok, akkor a hozzájuk tartozó Vandermonde-féle determináns értéke nem zérus.

2. A reciprok determináns

Az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

n-edrendű determináns *reciprok determinánsának* nevezzük az

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{A} & \frac{A_{12}}{A} \dots \frac{A_{1n}}{A} \\ \frac{A_{21}}{A} & \frac{A_{22}}{A} \dots \frac{A_{2n}}{A} \\ \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{A} & \frac{A_{n2}}{A} \dots \frac{A_{nn}}{A} \end{vmatrix}$$

n-edrendű determinánst, ahol A_{ik} az a_{ik} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst jelenti.

Az A^{-1} reciprok determináns nevezetes tulajdonsága, hogy A-val való szorzata

$$A \cdot A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} = 1,$$

ami a sor—sor-szorzás elvégzésével azonnal látható.

Ha a reciprok determináns minden sorából kiemeljük $\frac{1}{A}$-t, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{A^n} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{vmatrix},$$

és így az A determináns elemeihez tartozó (előjeles) aldeterminánsokból képezett determináns értéke:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{vmatrix} = A^n \cdot A^{-1} = A^{n-1} \cdot A \cdot A^{-1} = A^{n-1}.$$

Megjegyezzük, hogy ez akkor is igaz, ha $A=0$, mert ez esetben az aldeterminánsokból képezett determináns értéke is 0.

3. A szimmetrikus determináns

Azt a determinánst, amelyben minden i és k indexre $a_{ik}=a_{ki}$, vagyis amelyben az elemek a főátlóra tükrösek, *szimmetrikus determinánsnak* nevezzük. Ha az elemek ezen kívül a mellékátlóra is szimmetrikusak, a determinánst *biszimmetrikusnak* mondjuk.

A szimmetrikus determinánsban a megfelelő aldeterminánsok is egyenlők: $A_{ik}=A_{ki}$, ezért a szimmetrikus determináns reciprok determinánsa is szimmetrikus.

Ha az n-edrendű S szimmetrikus determináns értéke 0, de nem minden $(n-1)$-edrendű aldeterminánsának értéke 0, akkor közülük legalább egy az S determináns főátlójában álló elemhez tartozik (vagyis A_{kk} alakú).

A szimmetrikus determináns négyzete is szimmetrikus, hiszen a szimmetrikus determináns i-edik sora és i-edik oszlopa megegyezik és ezért az i-edik sor és k-adik oszlop kompozíciója egyenlő a k-adik sor és i-edik oszlop kompozíciójával.

4. A ferdén szimmetrikus determináns

Azt a determinánst, amelyben minden i és k indexre $a_{ik}=-a_{ki}$, *ferdén szimmetrikus determinánsnak* nevezzük. A definícióból következik, hogy a ferdén szimmetrikus determináns főátlójában csupa 0 elem áll.

A ferdén szimmetrikus determináns fontos tulajdonsága: a páratlanrendű ferdén szimmetrikus determináns értéke 0, a párosrendű ferdén szimmetrikus determináns értéke az elemeiből alkotott bizonyos racionális kifejezések (Pfaff-féle alakok) teljes négyzete.

5. Az ortogonális determináns

A

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

n-edrendű determinánst akkor nevezzük *ortogonálisnak*, ha

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = 1 \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

és

$$a_{i1}a_{k1}+a_{i2}a_{k2}+\cdots+a_{in}a_{kn}=0 \qquad (i\neq k);$$

vagyis az ortogonális determináns minden sorának önmagával való kompozíciója 1, két különböző sorának kompozíciója 0. Ebből következik, hogy

$$\Delta^2=1,$$

azaz

$$\Delta=\pm 1.$$

Megemlítjük, hogy ortogonális determináns transzponáltja is ortogonális, és két ortogonális determináns szorzata is ortogonális determináns.

Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i).$$

Állításunk bizonyítását teljes indukcióval hajtjuk végre.

a) $n=2$ esetben

$$V_2(a_1, a_2)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1.$$

$n=3$ esetben (l. még a II. fejezet **19.** Gyakorló feladatát):

$$V_3(a_1, a_2, a_3)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Vonjuk ki az első oszlop a_1 -szeresét a második oszlopból, a második oszlop a_1-szeresét pedig a harmadik oszlopból, majd fejtsük ki a kapott determinánst első sora szerint:

$$V_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) \\ 1 & a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) \end{vmatrix}.$$

Emeljük ki az első sorból (a_2-a_1)-et, a második sorból (a_3-a_1)-et, ekkor

$$V_3=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix}=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2),$$

tehát V_3-ra is érvényes az állítás.

b) Tegyük fel, hogy az $(n-1)$-edrendű Vandermonde-féle determinánsra igaz a szorzatelőállítás:

$$V_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_2 \ldots a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 \ldots a_3^{n-2} \\ \cdots & \cdots \\ 1 & a_n \ldots a_n^{n-2} \end{vmatrix}=$$

$$=(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)(a_n-a_3)\cdots(a_n-a_{n-1})=$$

$$=\prod_{2\leq i<j\leq n}(a_j-a_i).$$

c) Bebizonyítjuk, hogy ekkor a $V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ determinánsra is igaz a szorzatelőállítás.

Az $n=3$ esetben alkalmazott eljárást itt is követve,

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \ldots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ 1 & a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & \ldots & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \ldots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \ldots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & \ldots & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \ldots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}=$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_2 \ldots a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 \ldots a_3^{n-2} \\ \cdots & \cdots \\ 1 & a_n \ldots a_n^{n-2} \end{vmatrix}=$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\,[V_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n)].$$

$V_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ értékét a feltételből ide behelyettesítve:

$$V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)=$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)[(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)(a_n-a_3)\ldots(a_n-a_{n-1})]=$$

$$=\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i);$$

s ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

2. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}.$$

I. Megoldás:

Mivel az első sorban és oszlopban csupa 1 áll, érdemes az első sort levonni a többiből. Ekkor

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&7\\0&-2&0&-2\\0&-3&3&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&7\\-2&0&-2\\-3&3&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&6\\-2&0&0\\-3&3&-6\end{vmatrix}=$$

$$=2\begin{vmatrix}3&6\\3&-6\end{vmatrix}=2(-18-18)=-72.$$

II. Megoldás:

Sokkal egyszerűbb a determináns kiszámítása, ha észrevesszük, hogy D egy $V_4(1, 2, -1, -2)$ alakú Vandermonde-féle determináns, ui.

$$V_4(1, 2, -1, -2) = (2-1)(-1-1)(-1-2)(-2-1)(-2-2)(-2+1) =$$

$$= 1(-2)(-3)(-3)(-4)(-1) = -72.$$

3. Határozzuk meg a $V_5(2, -1, 3, 1, -2)$ Vandermonde-féle determináns értékét!

$$V_5(2,-1,3,1,-2)=\begin{vmatrix}1&2&4&8&16\\1&-1&1&-1&1\\1&3&9&27&81\\1&1&1&1&1\\1&-2&4&-8&16\end{vmatrix}=$$

$$=(-1-2)(3-2)(3+1)(1-2)(1+1)(1-3)(-2-2)(-2+1)(-2-3)(-2-1)=$$

$$=-2880.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy

$$D=\begin{vmatrix}a^2&a&1&bcd\\b^2&b&1&acd\\c^2&c&1&abd\\d^2&d&1&abc\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

I. Megoldás:

Ha a determináns első sorából a másodikat, a másodikból a harmadikat, a harmadikból a negyediket kivonjuk, a harmadik oszlopba az utolsó elem kivételével csupa 0 kerül:

$$D=\begin{vmatrix}a^2-b^2&a-b&0&-(a-b)cd\\b^2-c^2&b-c&0&-(b-c)ad\\c^2-d^2&c-d&0&-(c-d)ab\\d^2&d&1&abc\end{vmatrix}.$$

Fejtsük ki a determinánst harmadik oszlopa szerint, és emeljünk ki az első sorból $(a-b)$-t, a másodikból $(b-c)$-t, a harmadikból $(c-d)$-t. Ekkor

$$D=(-1)\begin{vmatrix}a^2-b^2&a-b&-(a-b)cd\\b^2-c^2&b-c&-(b-c)ad\\c^2-d^2&c-d&-(c-d)ab\end{vmatrix}=$$

$$=(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix}a+b&1&cd\\b+c&1&ad\\c+d&1&ab\end{vmatrix}.$$

Most ismét kivonjuk a második sort az elsőből, a harmadikat a másodikból, majd kifejtjük a determinánst második oszlopa szerint:

$$D=(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix}a-c&0&-d(a-c)\\b-d&0&-a(b-d)\\c+d&1&ab\end{vmatrix}=$$

$$=(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix}a-c&d(a-c)\\b-d&a(b-d)\end{vmatrix}=$$

$$=(a-b)(b-c)(c-d)(a-c)(b-d)\begin{vmatrix}1&d\\1&a\end{vmatrix}=$$

$$=(a-b)(b-c)(c-d)(a-c)(b-d)(a-d).$$

II. Megoldás:

A determináns mindegyik sorában egy-egy elem nulladik, első és második hatványa szerepel; ha sikerülne a harmadik hatványokat is a megfelelő helyekre behoznunk, Vandermonde-féle determinánst kapnánk, ennek kifejtése pedig egyszerű.

Vegyük észre, hogy ez sikerül, ha megszorozzuk a determináns első sorát a-val, második sorát b-vel, harmadik sorát c-vel, negyedik sorát d-vel, majd kiemeljük az utolsó oszlopból a közös $abcd$-t (természetesen a szorzás miatt $abcd$-vel osztani is kell a determinánst):

$$\begin{vmatrix}a^2&a&1&bcd\\b^2&b&1&acd\\c^2&c&1&abd\\d^2&d&1&abc\end{vmatrix}=\frac{abcd}{abcd}\begin{vmatrix}a^3&a^2&a&1\\b^3&b^2&b&1\\c^3&c^2&c&1\\d^3&d^2&d&1\end{vmatrix}.$$

Ennek a determinánsnak az értéke:

$$V_4(a, b, c, d) = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Megjegyezzük, hogy az állítás az $abcd=0$ esetben is igaz, mint erről könnyen meggyőződhetünk.

5. Határozzuk meg a

$$D=\begin{vmatrix}2&3&-4\\5&-6&3\\4&2&-3\end{vmatrix}$$

determináns reciprok determinánsát (ha ilyen van)! Ellenőrizzük a kapott eredményt!

A reciprok determináns létezéséhez szükséges, hogy $D\neq 0$ legyen.

$$D=\begin{vmatrix}2&3&-4\\5&-6&3\\4&2&-3\end{vmatrix}=36+36-40-(96-45+12)=-31\neq 0,$$

tehát D-nek van reciprok determinánsa. Számítsuk ki a reciprok determináns felírásához szükséges aldeterminánsokat!

$$D_{11}=\begin{vmatrix}-6&3\\2&-3\end{vmatrix}=18-6=12;\quad D_{12}=-\begin{vmatrix}5&3\\4&-3\end{vmatrix}=-(-15-12)=27;$$

$$D_{13}=\begin{vmatrix}5&-6\\4&2\end{vmatrix}=10+24=34;\quad D_{21}=-\begin{vmatrix}3&-4\\2&-3\end{vmatrix}=-(-9+8)=1;$$

$$D_{22}=\begin{vmatrix}2&-4\\4&-3\end{vmatrix}=-6+16=10;\quad D_{23}=-\begin{vmatrix}2&3\\4&2\end{vmatrix}=-(4-12)=8;$$

$$D_{31}=\begin{vmatrix}3&-4\\-6&3\end{vmatrix}=9-24=-15;\quad D_{32}=-\begin{vmatrix}2&-4\\5&3\end{vmatrix}=-(6+20)=-26;$$

$$D_{33}=\begin{vmatrix}2&3\\5&-6\end{vmatrix}=-12-15=-27.$$

Így D reciprok determinánsa:

$$D^{-1}=\begin{vmatrix}-\frac{12}{31}&-\frac{27}{31}&-\frac{34}{31}\\-\frac{1}{31}&-\frac{10}{31}&-\frac{8}{31}\\\frac{15}{31}&\frac{26}{31}&\frac{27}{31}\end{vmatrix}.$$

Ellenőrizzük, hogy valóban $D\cdot D^{-1}=1$.

$$D\cdot D^{-1}=\begin{vmatrix}2&3&-4\\5&-6&3\\4&2&-3\end{vmatrix}\cdot\frac{1}{31^3}\begin{vmatrix}-12&-27&-34\\-1&-10&-8\\15&26&27\end{vmatrix}=$$

$$=(-31)\cdot\frac{1}{31^3}\cdot(-961)=1,$$

mert

$$\begin{vmatrix}-12&-27&-34\\-1&-10&-8\\15&26&27\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-12&93&62\\-1&0&0\\15&-124&-93\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}93&62\\-124&-93\end{vmatrix}=-961.$$

6. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus

$$A=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{vmatrix}$$

determináns reciprok determinánsa is szimmetrikus.

Mivel $A=1\neq 0$ (II. fejezet 23. Gyakorló feladata), ezért A-nak létezik reciprok determinánsa. A szükséges aldeterminánsok:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&2\\2&3\end{vmatrix}=6-4=2;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=-3+2=-1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=-3+2=-1;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=3-1=2;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-2+1=-1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-2+1=-1;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1.$$

A reciprok determináns tehát

$$A^{-1}=\begin{vmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}.$$

7. Határozzuk meg

$$S=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

négyzetét!

Mivel S szimmetrikus, ezért négyzete is az, nem kell tehát S^2 minden elemét külön meghatározni.

Sor—oszlop-szorzással:

$$S^2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 4+1+9 & & \\ -2-1-6 & 1+1+4 & \\ 6+2-12 & -3-2+8 & 9+4+16 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 14 & -9 & -4 \\ -9 & 6 & 3 \\ -4 & 3 & 29 \end{vmatrix}.$$

8. Mutassuk meg, hogy

$$B=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -9 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

és hogy a B_{12} és B_{31} aldeterminánsok egymással egyenlők!

Vegyük észre, hogy B szimmetrikus, továbbá, hogy az egy sorban (oszlopban) álló elemek összege 0; ha tehát pl. az első oszlophoz az összes többit hozzáadjuk, akkor az első oszlopban csupa 0 áll, ezért a determináns értéke 0.

A feladat második részének igazolására számítsuk ki a B_{12} és B_{31} aldeterminánsokat:

$$B_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-(-4+9-36-2)=33,$$

$$B_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -9 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-24-27+9-12+81+6=33.$$

Tehát B_{12} és B_{31} valóban egyenlő.

Az olyan szimmetrikus determinánst, amelyben minden sor elemeinek összege 0, *Borchard-féle determinánsnak* nevezzük. E determináns értéke 0, és minden eggyel alacsonyabb rendű aldeterminánsának értéke egyenlő. (Vesd össze a II. fejezet **15.** Gyakorló feladatával.)

9. Mutassuk meg, hogy az

$$S=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értéke nulla, és állapítsuk meg, van-e nem 0 értékű másodrendű aldeterminánsa!

Ha az első sorhoz hozzáadjuk a másodikat és harmadikat, az első sor két eleme 0 lesz, és a determináns értéke könnyen megkapható:

$$S=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Mivel S szimmetrikus és értéke 0, tehát ha vannak nem 0 értékű másodrendű aldeterminánsai, akkor közöttük van a főátló valamely eleméhez tartozó is. Ezért célszerű az A_{kk} aldeterminánsokat vizsgálni:

$$S_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-1=0;\qquad S_{22}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1;$$

$$S_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3-4=-1.$$

Tehát a harmadrendű nulla értékű, szimmetrikus S determinánsnak van nemnulla értékű másodrendű aldeterminánsa.

10. Számítsuk ki a következő determináns értékét:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 & 7 & 6 \\ -3 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ -7 & 4 & -1 & 0 & 5 \\ -6 & -1 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy a determináns ferdén szimmetrikus. Mivel ezen kívül páratlanrendű ($n=5$), ezért értéke 0.

11. A determináns kifejtése nélkül igazoljuk, hogy a

$$\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix}=0$$

egyenlet egyik gyöke $x=0$ (a, b, c adott valós számok).

Helyettesítsünk x helyébe 0-t; így a

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

ferdén szimmetrikus, páratlanrendű ($n=3$) determinánst kapjuk, ennek értéke pedig a, b, c értékétől függetlenül valóban 0.

12. Bizonyítsuk be, hogy

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{vmatrix} = (x^2+y^2+1)^2.$$

I. Megoldás:

A determináns mindegyik sorában és oszlopában van már egy zérus, így mindegy, hogy hol szaporítjuk a zérusok számát. Tegyük ezt pl. az első oszlopban.

Adjuk hozzá az utolsó sor x-szeresét az első, $-y$-szorosát a második sorhoz, majd fejtsük ki a kapott determinánst első oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y & xy & 1+x^2 \\ 0 & x & -1-y^2 & -xy \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y & xy & x^2+1 \\ x & -(y^2+1) & -xy \\ 1 & x & -y \end{vmatrix}.$$

Most az utolsó sor y-szorosát vonjuk ki az első, x-szeresét a második sorból, majd fejtsük ki a determinánst első oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} y & xy & x^2+1 \\ x & -(y^2+1) & -xy \\ 1 & x & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (x^2+y^2+1) \\ 0 & -(x^2+y^2+1) & 0 \\ 1 & x & -y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & (x^2+y^2+1) \\ -(x^2+y^2+1) & 0 \end{vmatrix} = (x^2+y^2+1)^2.$$

II. Megoldás:

A determináns szerkezete azt sugallja, hogy érdemes lehet első két oszlopa (vagy sora) szerint kifejteni:

$$D = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -y \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -y & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -y & x \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x & -y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2+y^2)^2+x^2+y^2+y^2+x^2+1 = (x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)+1 =$$

$$= (x^2+y^2+1)^2,$$

hiszen a kapott összeg $(a+b)^2$ alakú, ahol $a = x^2+y^2$, $b=1$.

13. Határozzuk meg az alábbi, ferdén szimmetrikus determináns értékét mint az elemeiből képzett racionális kifejezés (Pfaff-féle alak) négyzetét:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}.$$

Próbáljunk meg valamelyik sorba, pl. az elsőbe, több 0-t behozni. E célból adjuk hozzá a második oszlop $\left(-\dfrac{b}{a}\right)$-szorosát a harmadikhoz, $\left(-\dfrac{c}{a}\right)$-szorosát a negyedikhez, ekkor

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & \dfrac{bd}{a} & f+\dfrac{cd}{a} \\ -c & -e & -f+\dfrac{eb}{a} & \dfrac{ce}{a} \end{vmatrix} =$$

$$= -a \begin{vmatrix} -a & d & e \\ -b & \dfrac{bd}{a} & f+\dfrac{cd}{a} \\ -c & -f+\dfrac{eb}{a} & \dfrac{ce}{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & e \\ ab & bd & af+cd \\ c & -f+\dfrac{eb}{a} & \dfrac{ce}{a} \end{vmatrix} =$$

$$= bcde+acdf+(cd)^2-abef+(be)^2-$$

$$-[bcde+bcde+(-af+eb)(af+cd)] =$$

$$= (af)^2-2abef+(be)^2+2acdf-2bcde+(cd)^2 = (af-be+cd)^2.$$

14. Döntsük el, hogy az

$$F = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

determináns ortogonális-e!

Mivel $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$, és $\cos\alpha \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0$, ezért a determináns ortogonális, és így $F^2=1$. Közvetlenül is látható, hogy $F=1$ (vö. I. 1. **5.** Gyakorló feladatával).

15. Ortogonális-e a következő determináns:

$$D = \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{2} \end{vmatrix}.$$

Behelyettesítve a szereplő szögek koszinuszát:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix}.$$

Mivel mindegyik sorban álló elemek négyzetösszege 1, és bármelyik két sor kompozíciója 0, a determináns ortogonális.

16. Szorozzuk össze az

$$F_1 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \quad \text{és az} \quad F_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

ortogonális determinánsokat!

Sor—oszlop-szorzást alkalmazva:

$$F_1F_2 = \begin{vmatrix} \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Látható, hogy F_1F_2 is ortogonális determináns.

Ha sor—sor-szorzást alkalmazunk, akkor

$$F_1F_2 = \begin{vmatrix} \cos^2\alpha-\sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix},$$

amely ugyancsak ortogonális determináns, tehát értéke szintén 1.

IV. A DETERMINÁNSOK NÉHÁNY TOVÁBBI EGYSZERŰ ALKALMAZÁSA

A determinánsok alkalmazását egy-, ill. kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldására már láttuk az I.1. és I.2. pontokban. Most néhány egyéb alkalmazási lehetőséget mutatunk meg. Az ehhez felhasználható képleteket, összefüggéseket összefoglalva közöljük.

1. Egyenes egyenlete

Két adott $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ ponton áthaladó egyenes egyenlete harmadrendű determinánssal felírva:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

vagy másodrendű determinánssal felírva:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x-x_2 & y-y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Gyakorló feladatok

1. Írjuk fel a $P_1(1; -3)$ és $P_2(-2; 5)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét!

Az egyenes egyenlete

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{vagy} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+3 \\ x+2 & y-5 \end{vmatrix} = 0,$$

amiből — bármelyik determinánst kifejtve, majd az egyenletet rendezve — $8x+3y+1=0$.

2. Döntsük el, hogy a $P_1(1;-3)$, $P_2(-2;5)$ és $P_3(4;-11)$ pontok egy egyenesen vannak-e?

Három pont nyilván akkor van egy egyenesen, ha a bármely kettőjük által meghatározott egyenes egyenletébe behelyettesítve a harmadik koordinátáit, az kielégíti az egyenletet, vagyis ha a koordinátáikból alkotott determináns értéke 0.

A determinánst felírva, majd utolsó oszlopa szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 4 & -11 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2-1+(-1) = 0,$$

tehát a három pont egy egyenesen van.

2. Háromszög területe

A $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$ és $P_3(x_3;y_3)$ csúcspontú háromszög területének előjeles mérőszáma

$$t = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ha $t=0$, akkor a három pont egy egyenesen van.

Az a, b, c oldalaival adott háromszög területének négyzete:

$$t^2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Az

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13} = 0;$$

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23} = 0;$$

$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33} = 0$$

egyenesek által határolt háromszög (előjeles) területe:

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}}.$$

Ha $t=0$, akkor a három egyenes egy ponton halad át!

Ha a nevezőben álló determinánsok egyike zérus, akkor két egyenes párhuzamos.

Az $\mathbf{a}=(a_1;a_2;a_3)$ és $\mathbf{b}=(b_1;b_2;b_3)$ vektorok által kifeszített térbeli háromszög területe egyenlő $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoriális szorzata abszolút értékének felével:

$$t = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$

3. Határozzuk meg a $P_1(-1;2)$, $P_2(4;-3)$ és $P_3(-2;2)$ csúcspontú háromszög területét!

Esetünkben — a determinánst a Sarrus-szabály alapján kifejtve —

$$t = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3-4+8-6-8+2) = -\frac{5}{2},$$

a háromszög területe tehát 2,5 területegység.

4. Számítsuk ki a 3, 4, 6 cm oldalhosszúságú háromszög területét!

A keresett terület négyzete:

$$t^2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

A második oszlop kétszeresét kivonva az utolsóból, majd az első sor szerint kifejtve,

$$t^2 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 0 & -9 \\ 6 & 4 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \frac{3}{16}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & -9 \\ 6 & 3 & -8 \end{vmatrix} - \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & -9 \\ 6 & 4 & -8 \end{vmatrix}.$$

A két harmadrendű determinánst a Sarrus-szabály alapján kifejtve,

$$t^2 = \frac{3}{16}(-324+48+81+192) - \frac{1}{4}(-144+64-144+108) =$$

$$= -\frac{9}{16} + \frac{116}{4} = \frac{455}{16}.$$

Ebből $t = \frac{1}{4}\sqrt{455} \approx 5{,}33\ \mathrm{cm}^2$.

5. Határozzuk meg annak a háromszögnek a területét, amelyet az $5x-3y+11=0$, az $5x-2y+14=0$ és az $y-2=0$ egyenesek határolnak.

A háromszög előjeles területe, a határoló egyenesek együtthatóival felírva:

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 5 & -2 & 14 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(20+55-30-70)^2}{(-10+15)(5)(-5)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{25^2}{5^3} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$$

területegység.

6. Számítsuk ki a $P_1(3;\,-2;\,1)$, $P_2(-2;\,4;\,-1)$ és $P_3(0;\,5;\,-2)$ pontok által meghatározott háromszög területét vektorokkal!

Feladatunkban $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{a}(-5;\,6;\,-2)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \mathbf{b}(-3;\,7;\,-3)$; vagyis

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = (-18+14)\mathbf{i} - (15-6)\mathbf{j} + (-35+18)\mathbf{k} =$$

$$= -4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 17\mathbf{k}.$$

Így a terület

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{16+81+289} = \frac{1}{2}\sqrt{386} = \frac{19{,}6}{2} = 9{,}8$$

területegység.

3. Paralelepipedon és tetraéder térfogata

Az $\mathbf{a}(a_1;\,a_2;\,a_3)$, $\mathbf{b}(b_1;\,b_2;\,b_3)$, $\mathbf{c}(c_1;\,c_2;\,c_3)$ vektorok által kifeszített paralelogramma alapú hasáb (paralelepipedon) előjeles térfogata a három vektor vegyes szorzata:

$$V = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ha $V=0$, akkor a három vektor egy síkban van.

Az $A(a_1;\,a_2;\,a_3)$, $B(b_1;\,b_2;\,b_3)$, $C(c_1;\,c_2;\,c_3)$ és $D(d_1;\,d_2;\,d_3)$ csúcspontok által meghatározott tetraéder előjeles térfogata

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ha $V=0$, akkor a négy pont egy síkban van.

7. Legyen egy paralelepipedon egyik csúcsából kiinduló három éle az $\mathbf{a}(10;\,-5;\,10)$; $\mathbf{b}(-11;\,-2;\,10)$ és $\mathbf{c}(-2;\,-14;\,-5)$ vektor. Számítsuk ki a paralelepipedon térfogatát!

Feladatunkban

$$V = \begin{vmatrix} 10 & -5 & 10 \\ -11 & -2 & 10 \\ -2 & -14 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -15 & -2 & 6 \\ -30 & -14 & -33 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -15 & 6 \\ -30 & -33 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(495+180) = 3375$$

térfogategység.

8. Számítsuk ki az $A(2;\,-3;\,5)$, $B(-1;\,4;\,3)$, $C(3;\,1;\,1)$ és $D(-2;\,5;\,1)$ csúcspontok által meghatározott tetraéder térfogatát!

Esetünkben felírva a determinánst, majd harmadik sorát az összes többi sorból kivonva:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

A második sor kétszeresét kivonva az első sorból,

$$V=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}7&-10&0\\-4&3&2\\-5&4&0\end{vmatrix}=\frac{2}{6}\begin{vmatrix}7&-10\\-5&4\end{vmatrix}=\frac{1}{3}(28-50)=-\frac{22}{3}.$$

Tehát a tetraéder térfogata $7\frac{1}{3}$ térfogategység.

9. Döntsük el, hogy a $P_1(2; 1; 6)$, $P_2(-1; 1; 12)$, $P_3(1; -3; -4)$ és a $P_4(-2; -2; 5)$ pontok egy síkban vannak-e.

Mivel az adott pontok által meghatározott tetraéder térfogata

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2&1&6&1\\-1&1&12&1\\1&-3&-4&1\\-2&-2&5&1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2&-1&6&1\\-3&0&6&0\\-1&-4&-10&0\\-4&-3&-1&0\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-3&0&6\\-1&-4&-10\\-4&-3&-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-3&0&0\\-1&-4&-12\\-4&-3&-9\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-4&-12\\-3&-9\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(36-36)=0,$$

ezért a négy pont egy síkban van.

10. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a}(1; a; a^2)$, $\mathbf{b}(1; b; b^2)$ és $\mathbf{c}(1; c; c^2)$ vektorok ($a \leq b \leq c$) által meghatározott paralelepipedon térfogata egyenlő egy olyan téglatest térfogatával, amelynek élei $b-a$, $c-a$, ill. $c-b$ hosszúságúak.

A ferde hasáb térfogatát kifejező

$$V=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$$

determináns a $V_3(a, b, c)$ Vandermonde-féle determináns, amelynek értéke

$$V_3(a, b, c)=(b-a)(c-a)(c-b);$$

ez pedig valóban a $b-a$, $c-a$, $c-b$ élhosszúságú téglatest térfogatával egyenlő.

4. Kör egyenlete

A $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ pontokon áthaladó kör egyenlete:

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2&x&y&1\\x_1^2+y_1^2&x_1&y_1&1\\x_2^2+y_2^2&x_2&y_2&1\\x_3^2+y_3^2&x_3&y_3&1\end{vmatrix}=0.$$

11. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P_1(1; 0)$, $P_2(0; -1)$ és $P_3(-1; 0)$ pontokon!

Adatainkkal a keresett kör egyenlete:

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2&x&y&1\\1+0&1&0&1\\0+1&0&-1&1\\1+0&-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x^2+y^2-1&x&y&1\\0&1&0&1\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=$$

$$=(x^2+y^2-1)\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{vmatrix}=-2(x^2+y^2-1)=0.$$

A kör egyenlete tehát $x^2+y^2=1$. Valóban: a három pont az egységsugarú, origóközéppontú kört adta meg.

12. Igazoljuk, hogy az alábbi négy pont egy körön helyezkedik el: $P_1(-1; 0)$, $P_2(3; -4)$, $P_3(-1; -4)$ és $P_4(3; 0)$.

A négy pont közül tetszőlegesen kiválasztott három ponton átmenő kör egyenletébe behelyettesítjük a negyedik pont koordinátáit; az így kapott determináns:

$$\begin{vmatrix}x_1^2+y_1^2&x_1&y_1&1\\x_2^2+y_2^2&x_2&y_2&1\\x_3^2+y_3^2&x_3&y_3&1\\x_4^2+y_4^2&x_4&y_4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\25&3&-4&1\\17&-1&-4&1\\9&3&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\8&4&0&0\\17&-1&-4&1\\9&3&0&1\end{vmatrix}=$$

$$=-4\begin{vmatrix}1&-1&1\\8&4&0\\9&3&1\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1&-1&1\\8&4&0\\8&4&0\end{vmatrix}=0,$$

mert a determináns két sora megegyezik. Így a negyedik pont koordinátái is kielégítik a kör egyenletét, tehát a négy pont valóban egy körön helyezkedik el.

5. Interpoláció

Három adott $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ ponthoz $(x_1 \neq x_2 \neq x_3)$ mindig meghatározható olyan — legfeljebb másodfokú — interpolációs polinom, amelynek grafikonja e pontokon átmegy, és amelynek egyenlete

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

alakú, tehát görbéje az y-tengellyel párhuzamos tengelyű parabola. Ezeknek az együtthatóknak meghatározásához meg kell oldani az

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1;$$

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2;$$

$$a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = y_3$$

lineáris egyenletrendszert. Ennek valóban van egyértelmű megoldása, mivel determinánsa

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

alakú, vagyis Vandermonde-féle determináns, amelynek értéke különböző abszcisszájú pontok esetén nem lehet 0.

Hasonlóan határozható meg $n+1$ számú különböző abszcisszájú ponthoz olyan, legfeljebb n-edfokú interpolációs polinom, amelynek görbéje e pontokon átmegy, és amelynek egyenlete

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x$$

alakú.

13. Határozzuk meg azt a legfeljebb másodfokú, $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ alakú polinomot, amelynek grafikonja áthalad a $P_1(1; 0)$, $P_2(2; 3)$ és $P_3(3; 10)$ pontokon!

Az $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ egyenletű parabola akkor halad át a három adott ponton, ha

$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0;$$

$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 3;$$

$$a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 = 10.$$

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$V_3(1, 2, 3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(3-2) = 2.$$

Mivel — a Sarrus-szabállyal számolva —

$$D_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 40+9-20-27 = 2;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 27+10-3-40 = -6;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 20+3-9-10 = 4,$$

ezért

$$a_0 = \frac{2}{2} = 1, \qquad a_1 = \frac{-6}{2} = -3, \qquad a_2 = \frac{4}{2} = 2,$$

így a keresett parabola egyenlete

$$y = 2x^2 - 3x + 1.$$

14. Írjuk fel annak a legfeljebb harmadfokú $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ egyenletű parabolának az együtthatóit, amely a $P_1(-1; 0)$, $P_2(1; 0)$, $P_3(2; 6)$ és $P_4(3; 24)$ pontokon halad át.

Az $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ parabola görbéje akkor halad át az adott négy ponton, ha

$$a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 = 0;$$

$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = 0;$$

$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 6;$$

$$a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 = 24.$$

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & (-1) & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \end{vmatrix},$$

vagyis a $V_4(-1, 1, 2, 3)$ Vandermonde-féle determináns, ezért értéke

$$(1+1)(2+1)(2-1)(3+1)(3-1)(3-2) = 48.$$

Mivel — a harmadik sor négyszeresét a negyedikből levonva, majd az első oszlop szerint kifejtve —:

$$D_0 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \\ 24 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -5 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

(a kapott utolsó determináns első és harmadik oszlopa megegyezik), továbbá hasonlóan számítva

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & 24 & 9 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & -7 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -8 & -12 & -5 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = -48;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 24 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ -3 & -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ -3 & -5 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -8 & -5 & -12 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = 48,$$

ezért

$$a_0 = \frac{0}{48} = 0, \quad a_1 = \frac{-48}{48} = -1, \quad a_2 = \frac{0}{48} = 0, \quad a_3 = \frac{48}{48} = 1,$$

és így a keresett polinom

$$y = x^3 - x.$$

6. A Fibonacci-féle számsorozat

Az $u_1 = 0$; $u_2 = 1$; ...; $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n = 3, 4, \ldots)$ rekurzióval megadott számsorozatot *Fibonacci-féle számsorozatnak* nevezzük. A sorozat néhány első eleme: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

15. Mutassuk meg, hogy a Fibonacci-féle számsorozat az alábbi determinánsok sorozatával is megadható:

$$u_1 = 0; \quad u_2 = 1; \quad u_3 = |1|; \quad u_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$u_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad u_6 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$u_7 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8; \ \ldots;$$

$$u_n = \begin{array}{c} \\ \underbrace{}_{1} \\ \underbrace{}_{2} \\ \underbrace{}_{3} \\ \\ \underbrace{}_{n-3} \\ \underbrace{}_{n-2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underbrace{}_{1} & \underbrace{}_{2} & \underbrace{}_{3} & \underbrace{}_{n-3} & \underbrace{}_{n-2} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array},$$

vagyis általánosan u_n azzal az $(n-2)$-edrendű determinánssal adható meg, amelynek főátlójában csupa 1-es, a tőle jobbra levő átlóban csupa -1-es, a tőle balra levő átlóban csupa 1-es áll, a többi elem pedig zérus.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a sorozat első elemeire az összefüggés igaz, be kell még látnunk, hogy

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Ha az u_{n+2} determinánst utolsó sora szerint előbb kifejtjük, majd az így kapott két determináns közül az elsőt utolsó oszlopa szerint, akkor a jobb oldalon valóban u_{n+1} és u_n összege áll:

$$u_{n+2}=\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & & n-2 & n-1 & n \\
1 & 1 & -1 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & -1\ldots & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 1\ldots & 0 & 0 & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n-2 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 & -1 & 0 \\
n-1 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 1 & -1 \\
n & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 1
\end{array}=$$

$$=(-1)\begin{array}{|ccccc|c}
1 & & & n-2 & n-1 & \\
1 & -1 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1\ldots & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1\ldots & 0 & 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & -1 & n-1
\end{array}+\begin{array}{|ccccc|c}
1 & & & & n-1 & \\
1 & -1 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1\ldots & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1\ldots & 0 & 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & -1 & \\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & 1 & n-1
\end{array}=$$

$$=\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & & & n-2 \\
1 & 1 & -1 & 0\ldots & 0 \\
 & 1 & 1 & -1\ldots & 0 \\
 & 0 & 1 & 1\ldots & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n-2 & 0 & 0 & 0\ldots & 1
\end{array}+\begin{array}{|ccccc|c}
1 & -1 & 0\ldots & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1\ldots & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1\ldots & 0 & 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & -1 & \\
0 & 0 & 0\ldots & 1 & 1 & n-1
\end{array}=u_{n+1}+u_n.$$

7. Racionális egészfüggvények

Minden *racionális egészfüggvény (polinom) determináns alakban írható fel* a következőképpen:

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=$$

$$=\begin{vmatrix}
x+a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3}\ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
-1 & x & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & x\ldots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0\ldots & -1 & x & 0 \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & -1 & x
\end{vmatrix}$$

16. Igazoljuk a fenti összefüggést!

Adjuk hozzá az első oszlop x-szeresét a második oszlophoz, majd az így átalakított második oszlop x-szeresét a harmadik oszlophoz, és így tovább, végül fejtsük ki a determinánst az utolsó oszlopa szerint. A kifejtés csupán egy tagot tartalmaz, mert az oszlop az első elemtől eltekintve csupa 0-ból áll. Az első elem éppen a bal oldalon álló polinom, a hozzá tartozó $(n-1)$-edrendű aldetermináns pedig a következő alakú:

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}
-1 & 0\ldots & 0 \\
0 & -1\ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0\ldots & -1
\end{vmatrix}$$

Ennek értéke

$$(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=(-1)^{2n},$$

ami n-től függetlenül 1.

8. Függvények lineáris függetlensége

Legyen az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények mindegyike legalább $(n-1)$-szer differenciálható az $a\leq x\leq b$ intervallumban. Ha léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ számok, hogy a

$$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n\equiv 0$$

azonosság teljesül, és $c_1, c_2, \ldots, c_n$ között van zérustól különböző, akkor az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények egymással *lineárisan összefüggnek.* Ha a fenti azonosság csak $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$ esetben áll fenn, a függvények *lineárisan függetlenek.*

Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények lineárisan függetlenek legyenek, az, hogy a belőlük képezett *Wronski-féle determináns* ne tűnjön el, azaz

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\begin{vmatrix}
y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\
y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}
\end{vmatrix}\neq 0$$

legyen.

17. Döntsük el, hogy az $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$, $y_3=e^{3x}$ függvények lineárisan függetlenek-e.

Mivel

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & e^{2x} & 2e^{3x} \\ 0 & 3e^{2x} & 8e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^x(8e^{5x} - 6e^{5x}) = 2e^{6x} \neq 0,$$

ezért az adott függvények lineárisan függetlenek.

18. Döntsük el, hogy az $y_1 = x^2+8$, $y_2 = x^2-3$, $y_3 = 1+x^2$ függvények lineárisan függetlenek-e. Ha összefüggnek, adjuk meg az összefüggést!

$$W(x^2+8,\ x^2-3,\ x^2+1) = \begin{vmatrix} x^2+8 & x^2-3 & x^2+1 \\ 2x & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

mert a második sorból x-et kiemelve, a determinánsban két sor megegyezik. Ezért a három függvény lineárisan összefügg.

Ez azt jelenti, hogy van olyan zérustól különböző c_1, c_2, c_3 számhármas, amelyre

$$c_1(x^2+8)+c_2(x^2-3)+c_3(x^2+1) \equiv 0,$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$c_1+c_2+c_3 = 0;$$

$$8c_1-3c_2+c_3 = 0.$$

A második egyenletből az elsőt kivonva,

$$7c_1-4c_2 = 0.$$

Ez utóbbi egyenletnek végtelen sok megoldása van, hiszen egyik ismeretlen, pl. c_1 szabadon megválasztható. Ekkor $c_2 = \frac{7}{4}c_1$, és az első egyenletből $c_3 = -c_1 - \frac{7}{4}c_1 = -\frac{11}{4}c_1$. Ha pl. $c_1 = 4$, akkor $c_2 = 7$, $c_3 = -11$ és valóban

$$4(x^2+8)+7(x^2-3)-11(x^2+1) \equiv 0.$$

MÁTRIXOK

I. A MÁTRIX FOGALMA, NÉHÁNY FONTOSABB SPECIÁLIS MÁTRIX

a) **Alapfogalmak.** A gyakorlatban nap nap után sok-sok számadattal kell dolgoznunk. Ezeket az adatokat legtöbbször célszerű (az áttekinthetőség kedvéért) különféle táblázatokba rendezni.

Egy osztály tanulóinak néhány adott érdemjegyét pl. a következő táblázatba érdemes rendezni:

Tantárgyak	5	4	3	2	1
Magyar	5	9	11	6	0
Történelem	6	10	13	2	0
Matematika	2	7	12	8	2
Fizika	3	9	10	8	1
Kémia	4	10	10	6	1
Orosz nyelv	6	9	9	6	1

Így ui. az adatok könnyen áttekinthetők, összehasonlíthatók.

Ha több osztályról és ugyanezekről a tantárgyakról van szó, felesleges a fejléceket mindig megismételni, egy-egy osztály jegyeit elegendő az alábbi alakban megadni:

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 11 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 13 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 12 & 8 & 2 \\ 3 & 9 & 10 & 8 & 1 \\ 4 & 10 & 10 & 6 & 1 \\ 6 & 9 & 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Itt nagyon lényeges, hogy melyik szám melyik helyen áll. A most felírt táblázatot mátrixnak nevezzük.

Általánosan *mátrixnak* nevezzük bármilyen $n \cdot m$ számú a_{ik} mennyiség ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$) alábbiak szerinti téglalap alakú elrendezését, amelyet szögletes (esetleg kerek) zárójelbe tesznek:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nm} \end{bmatrix}$$

Azt mondjuk, hogy a fenti mátrix $n \cdot m$ *típusú*, mert *n sorból* és *m oszlopból* áll. Az a_{ik} mennyiségek a mátrix *elemei*; itt az index az elem helyét jelöli: az a_{ik} elem az *i*-edik sor és a *k*-adik oszlop találkozásában áll.

A mátrix elemei lehetnek valós vagy komplex számok, függvények, vektorok, esetleg mátrixok is. A továbbiakban — hacsak mást nem mondunk — a mátrix elemeit *valós számokból* vesszük.

A mátrixot célszerű egyetlen matematikai fogalomnak tekinteni és egyetlen jellel jelölni. Nyomtatásban félkövér latin nagybetűket, kézírásban kétszer aláhúzott nagybetűket szokás mátrixok jelölésére használni. Előző mátrixunk tehát így jelölhető:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nm} \end{bmatrix}$$

A mátrix röviden így is jelölhető:

$$\mathbf{A} = [a_{ik}].$$

Ha a rövid jelölésben azt is fel akarjuk tüntetni, hogy a mátrixnak *n* sora, ill. *m* oszlopa van, ezt így tehetjük:

$$\underset{(n,\,m)}{\mathbf{A}} = [a_{ik}]_{n,\,m}.$$

Ha egy mátrix sorainak és oszlopainak száma egyenlő ($n=m$), *négyzetes mátrixnak (kvadratikus mátrixnak)* nevezzük. A négyzetes mátrix sorainak (és oszlopainak) száma a *mátrix rendje.* Az *n*-edrendű mátrixnak tehát n^2 eleme van; az elsőrendű mátrix egyetlen elemből áll. A mátrixfogalom a számfogalom kiterjesztéseként fogható fel.

Ha az **A** mátrix sorait és oszlopait felcseréljük egymással, az A *mátrix transzponáltját* kapjuk, ezt $\mathbf{A}^*$-gal jelöljük:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} \dots a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Ezért az $n \cdot m$ típusú mátrix transzponáltja $m \cdot n$ típusú mátrix. A transzponálás lényegét jól mutatja az

$$[a_{ij}]^* = [a_{ji}]$$

jelölés is. Az *n*-edrendű (tehát négyzetes) mátrix rendszáma a transzponálás során nem változik. Például az

$$\underset{(2,\,3)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

mátrix transzponáltja az

$$\underset{(3,\,2)}{\mathbf{A}^*} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

mátrix.

Nyilvánvaló, hogy az **A** mátrix transzponáltjának transzponáltja az eredeti **A** mátrix.

Különleges szerepe van az $n \cdot 1$ és az $1 \cdot m$ típusú mátrixoknak, vagyis azoknak a mátrixoknak, amelyeknek csupán egy oszlopa vagy csupán egy sora van. Az egyetlen oszlopból álló mátrixot *oszlopmátrixnak* (vagy — ha vektorként fogjuk fel — *oszlopvektornak*), az egyetlen sorból álló mátrixot *sormátrixnak* (vagy *sorvektornak*) nevezzük. Az oszlop- és a sormátrixokat félkövér latin kisbetűkkel jelöljük. Az **a** oszlopmátrix pl. így adható meg:

$$\mathbf{a} = [a_{ik})_{n,\,1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix},$$

vagy — ha itt a felesleges kettős indexet elhagyjuk —:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

A sormátrix jelölésekor — az oszlopmátrixtól való megkülönböztetés céljából — még azt is jelezzük, hogy a sormátrix az oszlopmátrix transzponáltja:

$$\mathbf{a}^* = [a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}] = [a_1, a_2, \ldots, a_m].$$

Ha több sormátrixot kell megkülönböztetnünk, és félreértést nem okozhat, akkor a csillagot felső indexszel helyettesíthetjük. Helykímélés céljából szokás az oszlopmátrixot

$$\mathbf{a} = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}]^*$$

alakban is felírni. Ez azt jelenti, hogy az **a** oszlopmátrix a jobb oldalon álló sormátrix transzponáltja.

A mátrix fogalma — mint az eddigiekből látható — a vektor fogalmának általánosításaként is felfogható.

Ha valamely **A** mátrixból tetszés szerinti sort és oszlopot elhagyunk, az **A** mátrix egy *minormátrixát* kapjuk. Ha pl. a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -6 & 7 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 7 & -3 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix első, harmadik és negyedik sorában, valamint a második és negyedik oszlopában álló elemeit elhagyjuk, akkor **B** következő minormátrixát kapjuk:

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ezt a minormátrixot szokás $\mathbf{B}^{2;5}_{1;3,5}$-tel is jelölni, mert második

és ötödik sorának első, harmadik és ötödik oszlopában álló elemekből alkottuk.

Bontsunk fel egy mátrixot bizonyos sorai, ill. oszlopai mentén részekre, azaz olyan minormátrixokra, amelyeknek szomszédos elemei az említett mátrixban is szomszédosak. Egy-egy ilyen minormátrixot az eredeti mátrix *blokkjának* szokás nevezni, a szétbontás műveletét pedig a *mátrix particionálásának*. Például az

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ \hline 5 & 0 & 7 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

mátrixot bontsuk fel a behúzott szaggatott egyenesek mentén blokkokra. Ha az egyes blokkokat az

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

betűkkel jelöljük, az eredeti **A** mátrix így írható fel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Ez az írásmód sok esetben megkönnyíti a tárgyalást. Az ilyen mátrixot, amelynek elemei tehát szintén mátrixok, *hipermátrixnak* szokás nevezni.

Egy mátrix speciális minormátrixaiként foghatók fel a mátrix oszlopaiból alkotott oszlopmátrixok, ill. a soraiból adódó sormátrixok. Ezekkel pl. a mátrix a következőképpen is felírható:

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nm} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{a}_k$ a k-adik oszlopmátrixot és $\mathbf{a}^k$ a k-adik sormátrixot jelenti, azaz

$$\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}^k = [a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{km}].$$

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix felírható oszlopmátrixok segítségével az

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$$

alakban, ahol

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix},$$

ill. sormátrixok segítségével az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{bmatrix}$$

alakban, ahol

$$\mathbf{a}^1 = [2, 8, 4, -3] \quad \text{és} \quad \mathbf{a}^2 = [1, -2, 5, 6].$$

(Ügyeljünk arra, hogy a felső index itt nem kitevőt jelent, aminek itt nincs is értelme.)

b) **Speciális mátrixok.** Most néhány fontos speciális mátrixot mutatunk be.

1. *Zérusmátrixnak* nevezzük azokat a mátrixokat, amelyeknek minden eleme 0. Pl. a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix zérusmátrix.

2. *Diagonálmátrixnak* nevezzük az olyan négyzetes mátrixot, amelynek csak a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba húzott átlójában — a főátlóban — van 0-tól különböző eleme. Az

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonálmátrix rövid jelölésére az

$$\langle a_{11}, \quad a_{22}, \ldots, a_{nn} \rangle$$

szimbólumot használjuk. Így pl.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle 3, -1, 0 \rangle.$$

3. *Egységmátrix* az a diagonálmátrix, amelynek főátlójában minden elem 1-gyel egyenlő. Az egységmátrixokat $\mathbf{E}$-vel vagy $[\delta_{ij}]$-vel jelöljük, ahol δ_{ij} a Kronecker-féle szimbólum: $\delta_{ij}=1$, ha $i=j$ és $\delta_{ij}=0$, ha $i \neq j$. Az egységmátrix rendszámát az $\mathbf{E}$ mellé tett indexszel jelölhetjük; így pl.

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \langle 1, 1, 1 \rangle.$$

Az „egységmátrix” elnevezés indokoltságát a mátrixműveletek kapcsán fogjuk belátni.

Azokat az oszlop-, ill. sormátrixokat, amelyeknek egyik eleme 1, a többi zérus, *egységvektoroknak* nevezzük. A három elemű egységvektorok oszlopmátrix alakban

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

sormátrix alakban

$$\mathbf{e}_1^* = [1, 0, 0]; \qquad \mathbf{e}_2^* = [0, 1, 0]; \qquad \mathbf{e}_3^* = [0, 0, 1].$$

Az index itt azt jelöli, hogy az egységvektor melyik eleme 1.

Minden n-edrendű egységmátrix n olyan oszlopra (sorra) bontható, amelyeknek mindegyike egységvektor:

$$\mathbf{E}_n = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n] \quad \text{vagy} \quad \mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^* \end{bmatrix}.$$

4. *Összegező vektor* az az oszlop- vagy sormátrix, amelynek minden eleme 1; jele: **1**. *Az összegező vektor nem egységvektor!* Az elnevezést a mátrixműveletek indokolják.

5. *Permutáló mátrixnak* nevezzük azt a négyzetes mátrixot, amely az egységmátrixból az oszlopok vagy sorok más sorrendű leírásával (permutálásával) kapható. A permutáló mátrix minden sora és oszlopa csak egy-egy 1-est tartalmaz, a többi eleme 0. Egy negyedrendű permutáló mátrix pl. a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. *Szimmetrikus mátrixnak* mondjuk azt a négyzetes mátrixot, amelynek elemei a főátlóra szimmetrikusak, azaz $a_{ij} = a_{ji}$. A szimmetrikus **A** mátrix nyilvánvalóan azonos transzponáltjával, **A***-gal. Szimmetrikus pl.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. *Antiszimmetrikus* vagy *ferdén szimmetrikus* az a négyzetes mátrix, amelyben a főátlóra szimmetrikus elemek egymásnak ellentettjei, azaz $a_{ij} = -a_{ji}$ minden i-re és j-re. Ezért az antiszimmetrikus mátrix főátlójában csak 0 állhat. Antiszimmetrikus mátrix pl.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & -4 \\ 3 & -5 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. *Háromszögmátrix* az olyan négyzetes mátrix, amelynek főátlója alatt vagy fölött csupa 0 elem áll. Az elsőt *felső*, az utóbbit *alsó* háromszögmátrixnak nevezzük. A diagonális mátrixok olyan speciális háromszögmátrixok, amelyek egyszerre felső és alsó háromszögmátrixok. Felső, ill. alsó háromszögmátrix pl.

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

9. *Ciklikus mátrix* az olyan négyzetes mátrix, amelynek elemei soronként (és oszloponként) ciklikusan ismétlődnek, azaz bármelyik sor a közvetlenül fölötte álló sorból úgy kapható, hogy annak mindegyik eleme helyébe az illető elem bal oldali szomszédját írjuk. Az első elem helyébe — amelynek nincs bal oldali szomszédja — a sor utolsó eleme kerül. A ciklikus mátrixot tehát első sora már meghatározza. Ezért szokás a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \ldots c_n \\ c_n & c_1 \ldots c_{n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_2 & c_3 \ldots c_1 \end{bmatrix}$$

ciklikus mátrixot

$$\mathbf{C}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

alakban is megadni. Például

$$\mathbf{C}(-2, 1, 3, 2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

10. *Primitív ciklikus mátrixnak* nevezzük azt a ciklikus mátrixot, amelynek első sorában az első elem 0, a második 1, a többi zérus. A negyedrendű primitív ciklikus mátrix pl.

$$\mathbf{C}(0,1,0,0)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

A primitív ciklikus mátrix egyúttal speciális permutáló mátrix is.

11. *Komplex mátrixnak* nevezzük a mátrixot, ha elemei között komplex számok is előfordulnak. Komplex mátrix pl.

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}3+4i&1&-i\\5&2-i&1+2i\end{bmatrix}.$$

12. *Komplex mátrix konjugált mátrixát* úgy kapjuk meg, hogy minden eleme helyébe annak konjugáltját írjuk. Például az előbbi **K** mátrix konjugáltja

$$\overline{\mathbf{K}}=\begin{bmatrix}3-4i&1&i\\5&2+i&1-2i\end{bmatrix}.$$

Nyilvánvalóan a **K** mátrix $\overline{\mathbf{K}}$ konjugáltjának a konjugáltja az eredeti **K** mátrix: $\overline{\overline{\mathbf{K}}}=\mathbf{K}$.

13. *Hermitikus mátrix* az olyan négyzetes mátrix, amelyben $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$ minden i és j indexre. Ez azt jelenti, hogy a főátlóra szimmetrikus elemek egymásnak konjugáltjai, és a főátlóban álló elemek csak valós számok lehetnek. Hermitikus mátrix pl.

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&1-i&3i\\1+i&5&6\\-3i&6&0\end{bmatrix}.$$

A valós elemekből álló szimmetrikus mátrix a hermitikus mátrix speciális esete.

14. *Ferdén hermitikus* vagy *alternáló* az a négyzetes *mátrix*, amelyben minden i és j indexre $a_{ij}=-\overline{a_{ji}}$, ami azt jelenti, hogy a főátlóra szimmetrikus elemek egymásnak negatív konjugáltjai, ennélfogva a főátlóban álló elemek tiszta képzetes számok vagy zérusok. Ferdén hermitikus pl.:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}i&1-i&2\\-1-i&3i&i\\-2&i&0\end{bmatrix}.$$

A valós elemekből álló ferdén szimmetrikus mátrix a ferdén hermitikus mátrix speciális esete.

15. *Kontinuánsmátrix* az olyan négyzetes mátrix, amely csak a főátlóban és a főátlóval párhuzamos két szomszédos átlóban tartalmaz zérustól különböző elemeket. Kontinuánsmátrix pl.:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\2&5&6&0\\0&-2&-1&2\\0&0&2&-3\end{bmatrix}.$$

A diagonálmátrix eszerint speciális kontinuánsmátrix.

Gyakorló feladatok

1. Egy üzem háromféle terméket gyárt négyféle alapanyagból. Az egyes termékek egy-egy darabjához az alábbi nyersanyagmennyiségek szükségesek:

Anyag / Termék	*a*	*b*	*c*	*d*
I.	3	2	0	5
II.	1	1	4	2
III.	3	2	1	4

Írjuk fel a termelési adatokat mátrix segítségével!

Ha pl. a mátrix egy-egy sorába az egyes termékek nyersanyagszükségletét, egy-egy oszlopába az egyes nyersanyagokat írjuk, a keresett mátrix a következő:

$$\underset{(3,4)}{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}3&2&0&5\\1&1&4&2\\3&2&1&4\end{bmatrix}.$$

Ha az egyes termékek nyersanyagszükségletét írjuk az oszlopokba, és a különböző nyersanyagokat a sorokba, az eredeti mátrix transzponáltját kapjuk:

$$\underset{(4,3)}{\mathbf{T}^*} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Az is azonnal látható, hogy a **T** mátrix oszlopmátrixai egy-egy nyersanyag felhasznált mennyiségét mutatják, ha mindegyik termékből egyetlen darabot gyártunk; sormátrixai pedig az egyes termékekhez felhasznált nyersanyagok mennyiségét. (A $\mathbf{T}^*$ mátrix esetében éppen fordított a helyzet.) Például a

$$\mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oszlopmátrix a c nyersanyag felhasznált mennyiségét mutatja, a

$$\mathbf{t}^2 = [1, 1, 4, 2]$$

sormátrix pedig a II. termék nyersanyagszükségletét.

2. A hírlapelosztóban az alábbi táblázat mutatja az egyes újságárusokhoz kiszállítandó napilapok mennyiségét:

Hírlap \ Árus	1	2	3	4	5	6	7	8
Népszabadság	50	150	100	150	100	200	180	100
Népszava	30	100	150	120	50	100	120	50
Magyar Nemzet	30	120	50	150	100	50	150	40
Magyar Hírlap	20	80	50	100	50	50	100	40
Esti Hírlap	40	200	150	150	150	100	150	80
Daily News	5	10	5	20	20	10	30	5

Készítsünk az adatok alapján mátrixot, melynek soraiban az egy-egy lapból kiszállított példányszámok állnak. Milyen mátrixszal adható meg az idegen nyelvű lap kiszállított példányszáma, a 3. számú elárusítóhely napi forgalma, a Szikra Lapnyomdából elszállítandó lapok száma (ha tudjuk, hogy a Népszabadság és az Esti Hírlap készül a Szikra Lapnyomdában)?

Ha az egyes napilapok kiszállított példányszámát a mátrix egy-egy sorában, az egy-egy újságárusnak szállított lapokat pedig egy-egy oszlopában kívánjuk elhelyezni, a keresett mátrix

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 50 & 150 & 100 & 150 & 100 & 200 & 180 & 100 \\ 30 & 100 & 150 & 120 & 50 & 100 & 120 & 50 \\ 30 & 120 & 50 & 150 & 100 & 50 & 150 & 40 \\ 20 & 80 & 50 & 100 & 50 & 50 & 100 & 40 \\ 40 & 200 & 150 & 150 & 150 & 100 & 150 & 80 \\ 5 & 10 & 5 & 20 & 20 & 10 & 30 & 5 \end{bmatrix}.$$

Természetesen az $\mathbf{N}^*$ mátrix is alkalmas az adatok rögzítésére.

Az $\mathbf{n}^6$ sormátrix az idegen nyelvű napilap példányszámáról, az $\mathbf{n}_3$ oszlopmátrix a 3. számú elárusító hely napi összforgalmáról, az $\mathbf{N}^{1,5}_{1,2,3,4,5,6,7,8}$ minormátrix a Szikra Lapnyomdából elszállítandó példányok számáról ad felvilágosítást.

3. Egy áruház egy bizonyos napon a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ cikkekből $x_1, x_2, \ldots, x_n$ darabot adott el. Ha az egyes cikkek ára $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Ft, akkor az áruház napi forgalma

$$\mathrm{F} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

Ft; ha az egyes cikkek csomagolási költségei $k_1, k_2, \ldots, k_n$ Ft, akkor a csomagolási költségek

$$\mathrm{K} = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n$$

Ft-ot tesznek ki; ha az egyes cikkek eladása után $j_1, j_2, \ldots, j_n$ árrést kap az áruház, a napi árrés összege

$$\mathrm{Á} = j_1x_1 + j_2x_2 + \ldots + j_nx_n$$

Ft. Irjuk le ezeket az adatokat áttekinthetően, mátrix alakban, mégpedig úgy, hogy egy-egy árufféleségnek egy-egy oszlop, az árnak, a költségnek, ill. az árrésnek pedig egy-egy sor feleljen meg!

Ha az árakat az első sorban, a költségeket a másodikban, az árréseket a harmadikban tüntetjük fel, akkor a keresett mátrix:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ k_1 & k_2 \ldots k_n \\ j_1 & j_2 \ldots j_n \end{bmatrix}.$$

4. Egy vetélkedő döntőjében az A, B és C csapatok egymás ellen a következő pontszámokat érték el:

$A:B = 14:15;$

$A:C = 12:14;$

$B:C = 14:16.$

Írjuk fel az eredményeket mátrix alakban úgy, hogy az *i*-edik sor és a *k*-adik oszlop metszéspontjában az *i*-edik csapatnak a *k*-adik csapat ellen szerzett pontszáma legyen!

A döntő eredményei a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 12 \\ 15 & 0 & 14 \\ 14 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal jellemezhetők, ahol a mátrix a_{ik} eleme helyén az *i*-edik csapatnak a *k*-adik csapattal szemben elért pontszáma áll.

5. Egy konzervgyár vegyes gyümölcsbefőttet gyárt meggyből, őszibarackból és körtéből. Minden üzemrészben azonban csak egyféle gyümölcsöt dolgoznak fel, és a gyümölcsök keverését később végzik el. Az előírt arányok elérése céljából az I. üzemrész a II. üzemrésznek 14 t, a III. üzemrésznek 12 t meggyet; a II. üzemrész az I. üzemrésznek 15 t, a III. üzemrésznek 14 t őszibarackot; a III. üzemrész az I. üzemrésznek 14 t, a II. üzemrésznek 16 t körtét szállít. Írjuk fel a szállítási adatokat mátrix segítségével!

A szóban forgó adatok az

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 12 \\ 15 & 0 & 14 \\ 14 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixszal jellemezhetők, ahol az a_{ik} elem az *i*-edik üzemrészből a *k*-adik üzemrészbe szállított gyümölcs mennyiségét jelenti.

A **4.** és **5.** feladatban kapott mátrixok egybevetésével ($\mathbf{D}=\mathbf{M}$) figyeljük meg, hogy merőben más problémák vezethetnek ugyanahhoz a mátrixhoz!

II. MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL

1. Alapműveletek mátrixokkal

a) **Két mátrix egyenlősége.** *Két mátrix akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha ugyanannyi sort és ugyanannyi oszlopot tartalmaznak (tehát azonos típusúak) és megfelelő helyeken álló elemeik megegyeznek.* Az

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = \underset{(n,m)}{\mathbf{B}}$$

mátrixegyenlőség tehát $n \cdot m$ számú számegyenlőségnek felel meg.

Az azonos típusú mátrixokra szokás még az egyenlő (ill. nem egyenlő) reláción kívül a

nagyobb ($>$), kisebb ($<$);
nem kisebb ($\geqq$), nem nagyobb ($\leqq$)

relációkat is definiálni.

A szóban forgó relációk valamelyike akkor teljesül két mátrixra, ha a reláció elemről elemre teljesül.

Előfordulhat, hogy két azonos típusú mátrix esetén a „nagyobb", „kisebb", „egyenlő" relációk egyike sem teljesül, és csak annyi mondható, hogy a két mátrix nem egyenlő. Például

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

esetén $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

b) **Összeadás, kivonás.** Az összeadás és kivonás csak *ugyanolyan típusú* mátrixokra van értelmezve, mégpedig

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nm} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2m} \\ \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nm} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \dots a_{1m} \pm b_{1m} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \dots a_{2m} \pm b_{2m} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} \dots a_{nm} \pm b_{nm} \end{bmatrix},$$

vagyis az összegmátrix is ugyanolyan típusú, és minden eleme a két mátrix megfelelő elemeinek az összege (különbsége).

A definíció kiterjeszthető akárhány ugyanolyan típusú mátrix összeadására (kivonására) is. A most definiált összeadás *kommutatív* és *asszociatív* művelet, vagyis

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A},$$

ill.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C});$$

fennáll továbbá

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \pm \mathbf{B}^*.$$

A definícióból látható, hogy pl. szimmetrikus mátrixok összege is szimmetrikus mátrix, háromszögmátrixok összege szintén háromszögmátrix stb., továbbá

$$\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

és

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B} = \mathbf{A}.$$

c) **Mátrix szorzása skalár számmal.** Mátrixot úgy szorzunk skalár számmal, hogy *a mátrix minden elemét megszorozzuk a skalárral:*

$$k\mathbf{A} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} \dots ka_{2m} \\ \dots & \dots \\ ka_{n1} & ka_{n2} \dots ka_{nm} \end{bmatrix}.$$

Ez a szabály az összeadás közvetlen következménye, illetve általánosítása.

Mátrix szorzása skalárral kommutatív, asszociatív és disztributív művelet, vagyis

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k; \quad (k_1k_2)\mathbf{A} = k_1(k_2\mathbf{A});$$

$$(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A} \quad \text{és} \quad k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}.$$

A $(-1)\mathbf{A}$ helyett röviden $-\mathbf{A}$-t szokás írni.

d) **Négyzetes mátrix felbontása egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére.** Minden valós elemekből álló négyzetes mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{T},$$

ahol

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$$

és

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*).$$

Hasonló tétel érvényes komplex elemű mátrixokra is: minden $\mathbf{K}$ komplex elemű mátrix egyértelműen felbontható egy hermitikus és egy ferdén hermitikus mátrix összegére, mégpedig

$$\mathbf{K} = \mathbf{H} + \mathbf{F},$$

ahol

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} + \overline{\mathbf{K}^*}),$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} - \overline{\mathbf{K}^*}),$$

és $\overline{\mathbf{K}}$ a $\mathbf{K}$ mátrix konjugáltját jelenti.

e) **Mátrixok lineáris kombinációja.** Ha az $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ azonos típusú mátrixokat rendre megszorozzuk a $k_1, k_2, \dots, k_n$ számokkal, és a szorzatokat összeadjuk, akkor az így kapott

$$k_1\mathbf{A}_1 + k_2\mathbf{A}_2 + \dots + k_n\mathbf{A}_n = \mathbf{L}$$

mátrixot az adott mátrixok lineáris kombinációjának nevezzük.

Az olyan lineáris kombinációt, amelyben a $k_1, k_2, \dots, k_n$ számok mindegyike nemnegatív és összegük 1, *konvex lineáris kombinációnak* nevezik.

Megjegyezzük, hogy mátrixok konvex lineáris kombinációjának minormátrixai a mátrixok megfelelő minormátrixainak ugyanazon számokkal képzett konvex lineáris kombinációi.

f) **Mátrix szorzása mátrixszal.** Az $\mathbf{A}$ mátrixnak a $\mathbf{B}$ mátrixszal való $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ szorzata csak akkor van értelmezve, ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak (azaz a bal oldali tényezőnek) ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a $\mathbf{B}$ mátrixnak (azaz a jobb oldali tényezőnek). Ha ez teljesül, azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ *az adott sorrendben konformábilisak.* Az $\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}$ és $\underset{(m,p)}{\mathbf{B}}$ mátrixok az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sorrendben konformábilisak, de ha $n \neq p$, akkor a $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ sorrendben nem.

Az $n \times m$ típusú $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ és $m \times p$ típusú $\mathbf{B}=[b_{ik}]$ mátrixok $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ szorzatán azt az $n \times p$ típusú $\mathbf{C}$ mátrixot értjük, amelynek c_{ik} eleme

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{im}b_{mk}.$$

Vagyis a **C** szorzatmátrix i-edik sorában és k-adik oszlopában álló elemet úgy kapjuk meg, hogy az **A** mátrix i-edik sorának és a **B** mátrix k-adik oszlopának *kompozícióját* képezzük. Az összeadás és a szorzás definíciójából következik, hogy *a mátrixszorzás* nem kommutatív, de *disztributív művelet*, vagyis

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC};$$

ill.

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}.$$

Szorozzuk össze példaként az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixokat. Ezek **A**, **B** sorrendben konformábilisak, szorzatuk,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 4+3\cdot 0 & 1\cdot 0+3\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+3\cdot 0 \\ 2\cdot 4+0\cdot 0 & 2\cdot 0+0\cdot(-1) & 2\cdot(-1)+0\cdot 0 \\ (-1)\cdot 4+1\cdot 0 & (-1)\cdot 0+1\cdot(-1) & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 0 \\ 0\cdot 4+2\cdot 0 & 0\cdot 0+2\cdot(-1) & 0\cdot(-1)+2\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 8 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A szorzatmátrix kiszámításakor könnyű hibázni, a kiszámított elemet rossz helyre írni. Ezért célszerű a két összeszorzandó mátrixot úgy elhelyezni, hogy a beírandó elem helyét ne lehessen eltéveszteni. Az alábbi elrendezés egy ilyen lehetőséget mutat, amelyet *Falk-módszernek* neveznek:

$$\begin{array}{r cc|ccc|l} & & & 4 & 0 & -1 & \\ \mathbf{B} = & & & 0 & -1 & 0 & \\ \hline & 1 & 3 & 4 & -3 & -1 & \\ & 2 & 0 & 8 & 0 & -2 & \\ \mathbf{A} = & -1 & 1 & -4 & -1 & 1 & = \mathbf{AB}. \\ & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & \end{array}$$

Így az eredménymátrix eleme éppen annak a sornak és oszlopnak a kompozíciója, amelyeknek metszéspontjában áll.

Ez egyszerű lehetőséget ad a számítás ellenőrzésére: az ún. *oszlopösszeg-próbát* vagy *sorösszeg-próbát*.

Az oszlopösszeg-próba esetében összeadjuk az **A** mátrix oszlopaiban álló elemeket, és az összegeket az **A** mátrix utolsó sora alá írjuk kiegészítő sorként. Ezután elvégezzük ezzel a sorral is a szorzást, és a kapott eredményeket az **AB** mátrix utolsó sora alá írjuk. Ha minden számításunk helyes volt, így az **AB** mátrix oszlopaiban álló elemek összegét kapjuk.

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 4 & 0 & -1 \\ & & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 4 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 8 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 2 & 6 & 8 & -6 & -2 \end{array}$$

Az eljárás alapja az $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$ disztributív törvény. Ha a próbát a **B** mátrixon végezzük el, és oszlop helyett mindenütt sort veszünk (és fordítva), a sorösszeg-próbához jutunk.

Esetünkben:

$$\begin{array}{cc|ccc|c}
 & & 4 & 0 & -1 & 3\\
 & & 0 & -1 & 0 & -1\\ \hline
1 & 3 & 4 & -3 & -1 & 0\\
2 & 0 & 8 & 0 & -2 & 6\\
-1 & 1 & -4 & -1 & 1 & -4\\
0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2
\end{array}$$

A mátrixszorzás definíciójából nyilvánvaló, hogy az **A** és **B** mátrixok csak akkor szorozhatók össze mind az **AB**, mind pedig a **BA** sorrendben, ha az **A** mátrix $n\times m$ típusú és a **B** mátrix $m\times n$ típusú.

Mivel a mátrixszorzás általában nem kommutatív művelet, ezért beszélünk *bal oldali* és *jobb oldali szorzásról.*

Könnyen belátható, hogy *speciálisan diagonálmátrixok szorzása kommutatív.* Ha $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, akkor **A** és **B** kommutábilis mátrixok.

Az egységmátrixszal végzett szorzás akár balról, akár jobbról történik, a másik mátrixot változatlanul hagyja:

$$\mathbf{EA}=\mathbf{AE}=\mathbf{A};$$

a zérusmátrixszal való szorzás pedig — akár balról, akár jobbról történik — a zérusmátrixot eredményezi:

$$\mathbf{0A}=\mathbf{A0}=\mathbf{0}.$$

Zérusmátrixot kaphatunk eredményül azonban *akkor is, ha a tényezők egyike sem zérusmátrix*! Így az a megszokott megállapítás, hogy „egy szorzat akkor és csak akkor zérus, ha egyik tényezője

zérus" a mátrixok körében nem érvényes. Például az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

mátrixok **AB** szorzata zérusmátrix.

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|l}
 & & & & -1 & 3 & 5 & \\
\mathbf{B}= & & & & 1 & -3 & -5 & \\
 & & & & -1 & 3 & 5 & \\ \hline
 & 2 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & \\
\mathbf{A}= & -1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & =\mathbf{AB}.\\
 & 1 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline
 & 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Ha az **A** mátrixhoz található olyan $\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$ mátrix, amellyel $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$, akkor az **A** mátrixot *bal oldali zérusosztónak* nevezik. (Előző példánk **A** mátrixa tehát bal oldali zérusosztó.) Hasonlóan: ha a **B** mátrixhoz található olyan $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$ mátrix, hogy $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$, akkor **B** *jobb oldali zérusosztó* (vagyis előző feladatunk **B** mátrixa jobb oldali zérusosztó), **A** és **B** *zérusosztópár.*

Érdemes megfigyelni, hogy esetünkben $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$ szintén igaz,

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|l}
 & & & & 2 & -3 & -5 & \\
\mathbf{A}= & & & & -1 & 4 & 5 & \\
 & & & & 1 & -3 & -4 & \\ \hline
 & -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & \\
\mathbf{B}= & 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & =\mathbf{BA},\\
 & -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline
 & -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

tehát **B** bal oldali zérusosztó, **A** pedig jobb oldali zérusosztó is.

g) **Skalár szorzat, diadikus szorzat.** Ha konformábilis oszlop-, ill. sormátrixokat szorzunk össze, akkor a tényezők sorrendjétől függően *a szorzat vagy szám vagy négyzetes mátrix.*

Ugyanis

$$\mathbf{a}^*\mathbf{b} = \mathbf{b}^*\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$= [b_1, b_2, \ldots, b_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k;$$

másrészt

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, b_2, \ldots, b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \ldots a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \ldots a_2 b_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_n b_1 & a_n b_2 \ldots a_n b_n \end{bmatrix},$$

ill.

$$\mathbf{b}\mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} [a_1, a_2, \ldots, a_n] = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 \ldots b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 \ldots b_2 a_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ b_n a_1 & b_n a_2 \ldots b_n a_n \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{a}^*\mathbf{b} = \mathbf{b}^*\mathbf{a}$ szorzat *skalár szorzat*; az $\mathbf{ab}^*$, ill. $\mathbf{ba}^*$ szorzat neve *diadikus szorzat* vagy röviden *diád*.

Minden $\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m,p)}{\mathbf{B}}$ mátrixszorzat mindig kifejezhető a tényezők oszlop-, ill. sormátrixaival, mégpedig *kétféle módon* aszerint, hogy melyik tényezőt állítjuk elő sormátrixaival és melyiket oszlopmátrixaival. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p]$$

alakban felírt tényezők esetén

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{a}^1\mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^2\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{a}^2\mathbf{b}_p \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}^n\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^n\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{a}^n\mathbf{b}_p \end{bmatrix},$$

tehát a szorzatmátrixnak n sora és p oszlopa van és elemei skalárszorzatok. Az

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m] \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^m \end{bmatrix}$$

alakban felírt tényezők esetén pedig

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^m \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}^1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}^2 + \cdots + \mathbf{a}_m\mathbf{b}^m,$$

tehát a szorzat m számú diád összege: *két mátrix szorzata mindig felírható diádok összegeként.*

h) **Többtényezős mátrixszorzatok.** Többtényezős mátrixszorzatok akkor és csak akkor értelmezhetők, ha *az egymás mellett álló tényezők konformábilisak.* Például az

$$\underset{(n,m)}{\mathbf{A}} \quad \underset{(m,p)}{\mathbf{B}} \quad \underset{(p,r)}{\mathbf{C}} \quad \underset{(r,q)}{\mathbf{D}}$$

mátrixok ilyen sorrendben összeszorozhatók.

Mátrixok szorzására érvényes az *asszociatív törvény*, azaz pl.

$$\left(\underset{(n,m)}{\mathbf{A}}\ \underset{(m,p)}{\mathbf{B}}\right)\underset{(p,r)}{\mathbf{C}} = \underset{(n,m)}{\mathbf{A}}\left(\underset{(m,p)}{\mathbf{B}}\ \underset{(p,r)}{\mathbf{C}}\right) = \underset{(n,r)}{\mathbf{G}}.$$

i) **Négyzetes mátrix hatványa.** Az **A** négyzetes mátrixból képezhető n tényezős

$$\underset{1}{\mathbf{A}} \cdot \underset{2}{\mathbf{A}} \cdot \underset{3}{\mathbf{A}} \cdot \ldots \cdot \underset{n}{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^n$$

szorzatot az **A** mátrix n-edik *hatványának* nevezzük (n természetes szám). Megállapodunk abban, hogy

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}.$$

A definícióból következik, hogy egy diagonális mátrix n-edik hatványa ismét diagonális mátrix, amelynek a főátlóban álló elemei az eredeti mátrix főátlójában álló megfelelő elemek n-edik hatványai:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle^n = \langle a_1^n, a_2^n, \ldots, a_k^n \rangle.$$

A négyzetes zérusmátrix minden hatványa zérusmátrix, az egységmátrix minden hatványa egységmátrix.

Ha az **A** mátrixhoz található olyan k kitevő, amelyre

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{0},$$

akkor az **A** mátrixot *nilpotens mátrixnak* nevezzük. Az olyan háromszögmátrixok, amelyeknek a főátlóban álló elemei is zérusok, nilpotensek! Például

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nilpotens, mert

$$\mathbf{N}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{N}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vagyis a harmadik hatvány már zérusmátrix.

A zérusmátrix nilpotens, mert

$$\mathbf{0}^k = \mathbf{0}, \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Azt a **P** mátrixot, amelynek bármely pozitív egész hatványa önmagával egyenlő, azaz

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^3 = \ldots,$$

projektor (vetítő) mátrixnak vagy *idempotens* (önmagát visszaadó) *mátrixnak* nevezzük. A zérusmátrix és az egységmátrix egyúttal projektor mátrix is.

Gyakorló feladatok

1. Legyenek adottak a következő egyenlőségek:

$$a = \alpha; \quad b = \beta; \quad c = \gamma; \quad d = \delta.$$

Fejezzük ki ezeket mátrixegyenlőséggel!

Az egyenlőségek bal és jobb oldalaiból egy-egy négyelemű mátrix képezhető háromféle módon: négyzetes mátrixként, sor-, ill. oszlopmátrixként; ezen kívül az elemek elhelyezése is tetszőleges lehet. A feladat megoldása tehát pl.:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

vagy

$$[a, c, d, b] = [\alpha, \gamma, \delta, \beta],$$

vagy

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}.$$

2. Határozzuk meg, hogy mikor egyenlő egymással a következő két mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \pi & -2 \\ 8 & -7 & 2{,}5 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & a & -2 \\ x^3 & -7 & 2{,}5 & \ln y \end{bmatrix}.$$

A két mátrix akkor egyenlő, ha $a = \pi$, $x = 2$, és $y = e$.

3. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki az A+B, A−B, 3A, −B mátrixokat!

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1+3 & 2-4 & -1+1 & 0+2\\ 4+1 & 0+5 & 2+0 & 1+3\\ 2+2 & -5-2 & 1+3 & 2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0 & 2\\ 5 & 5 & 2 & 4\\ 4 & -7 & 4 & 1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1-3 & 2+4 & -1-1 & 0-2\\ 4-1 & 0-5 & 2-0 & 1-3\\ 2-2 & -5+2 & 1-3 & 2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6 & -2 & -2\\ 3 & -5 & 2 & -2\\ 0 & -3 & -2 & 3\end{bmatrix};$$

$$3\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 6 & -3 & 0\\ 12 & 0 & 6 & 3\\ 6 & -15 & 3 & 6\end{bmatrix};\qquad -\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -1 & -2\\ -1 & -5 & 0 & -3\\ -2 & 2 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

4. Legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix};\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\quad \text{és}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}-\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})-\mathbf{C}!$$

$$\mathbf{B}-\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix};\qquad \mathbf{A}+(\mathbf{B}-\mathbf{C})=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 9 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ 9 & 2 & 7\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix};\qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})-\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 9 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

amivel az állítást igazoltuk.

5. Oldjuk meg az $\mathbf{A}+\mathbf{X}=\mathbf{B}$ egyenletet, ha

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix};\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & -2\end{bmatrix}.$$

Az eredeti egyenletből $\mathbf{X}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$, de a kijelölt kivonás nem végezhető el, mert az **A** és **B** mátrixok nem ugyanolyan típusúak. Az adott egyenlet tehát nem oldható meg.

6. Keressük meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}\quad \text{és}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

mátrixokhoz azt a

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{bmatrix}$$

mátrixot, amelyre $\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{D}=\mathbf{0}$.

A feltétel értelmében

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1-3-p & 2-2-q\\ 3+1-r & 4-5-s\\ 5+4-t & 6+3-u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-p & -q\\ 4-r & -1-s\\ 9-t & 9-u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Két mátrix akkor egyenlő egymással, ha a megfelelő elemeik egyenlők, azaz ha

$-2-p=0$, ahonnan $p=-2$; $-q=0$, ahonnan $q=0$;

$4-r=0$, ahonnan $r=4$; $-1-s=0$, ahonnan $s=-1$;

$9-t=0$, ahonnan $t=9$; $9-u=0$, ahonnan $u=9$.

Így

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 4 & -1\\ 9 & 9\end{bmatrix}=\mathbf{A}+\mathbf{B}.$$

7. Számoljunk utána, hogy valóban fennáll-e

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & -2\\ 0 & 5 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 6 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -6 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Az egyenlőség valóban fennáll, mert a bal oldali mátrixok azonos helyén álló elemek összege egyenlő a jobb oldalon álló mátrix megfelelő elemével.

8. Az I. fejezet **1.** Gyakorló feladatában szereplő üzem három termékének nyersanyag-felhasználását a

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

mátrixszal jellemeztük. Milyen mátrix írja le a nyersanyagszükségletet, ha mindegyik termékből 25 db-ot akarnak készíteni?

Mivel a nyersanyagfelhasználás ekkor az előző 25-szöröse, a keresett mátrix

$$25\mathbf{T}=\begin{bmatrix}75 & 50 & 0 & 125\\ 25 & 25 & 100 & 50\\ 75 & 50 & 25 & 100\end{bmatrix}.$$

9. Legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 1 & 1{,}5\\ 2 & 0 & 1{,}5\\ 1{,}5 & 0{,}5 & 2\end{bmatrix};$$

számítsuk ki a $\mathbf{C} = 2\mathbf{A}-4\mathbf{B}$ mátrixot!

$$\mathbf{C} = 2\mathbf{A}-4\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2 & -4 & 2\\ 10 & 6 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 0 & 6\\ 6 & 2 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -8 & -4\\ 2 & 6 & -4\\ -6 & 0 & -6\end{bmatrix}.$$

10. Legyenek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1-i\\ 2i & 3\end{bmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4i & 1+2i\\ 4 & 3-i\end{bmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-2i & 1\\ 1 & 1+i\end{bmatrix},$$

és számítsuk ki a $\mathbf{D} = i\mathbf{A}-2\mathbf{B}+3\mathbf{C}$ mátrixot!

$$\mathbf{D} = i\mathbf{A}-2\mathbf{B}+3\mathbf{C} = \begin{bmatrix}i & i+1\\ -2 & 3i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8i & -2-4i\\ -8 & -6+2i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6i & 3\\ 3 & 3+3i\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-13i & 2-3i\\ -7 & -3+8i\end{bmatrix}.$$

11. Írjuk fel az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ -2 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 2\\ 6 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

mátrixoknak a $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=\frac{1}{4}$, $k_3=\frac{1}{4}$ skalárokkal képzett konvex lineáris kombinációját!

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{A}+\frac{1}{4}\mathbf{B}+\frac{1}{4}\mathbf{C} =$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & -0{,}5\\ 1{,}5 & 1 & 0\\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0{,}25 & 0{,}75 & 1{,}25\\ -0{,}5 & 1{,}5 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -0{,}25 & 0{,}5\\ 0{,}75 & -0{,}25 & 0{,}5\\ 1{,}5 & 0 & 0{,}25\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0{,}75 & 2{,}5 & 1{,}25\\ 1{,}75 & 2{,}25 & 0{,}5\\ 2 & -0{,}75 & 1{,}25\end{bmatrix}.$$

12. Legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-4 & -5\\ 9 & -23\end{bmatrix}.$$

Léteznek-e olyan k_1 és k_2 számok, amelyekre teljesül a $k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B} = \mathbf{C}$ egyenlőség, és ha igen, akkor melyek ezek?

A szóban forgó egyenlőség akkor teljesül, ha a $k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B}$ mátrix elemei rendre megegyeznek a $\mathbf{C}$ mátrix elemeivel, azaz ha

$$k_1+2k_2 = -4;$$
$$2k_1+3k_2 = -5;$$
$$3k_1-k_2 = 9;$$
$$-4k_1+5k_2 = -23.$$

A két ismeretlen meghatározásához két egyenlet elegendő. Az első egyenletből

$$k_1 = -4-2k_2,$$

és ez pl. a másodikba helyettesítve

$$-8-4k_2+3k_2 = -5,$$

amiből $k_2 = -3$, ennélfogva $k_1=2$. A két gyök a két utolsó egyenletet is kielégíti, ezért az egyetlen megoldás

$$k_1=2,\ k_2 = -3.$$

Valóban

$$2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -5\\ 9 & -23\end{bmatrix}.$$

13. Mutassuk meg, hogy

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*.$$

Legyen $\mathbf{A}=[a_{ij}]$, $\mathbf{B}=[b_{ij}]$. Tekintsük az $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ és $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^*$ mátrixok tetszőleges, pl. az i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elemét. Ez rendre a_{ji}, b_{ji} és $a_{ji}+b_{ji}$, és ebből már látható, hogy $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$.

14. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}+\mathbf{A}^*$ akkor és csak akkor négyzetes mátrix, ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix!

Ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, akkor $\mathbf{A}^*$ is az, hiszen az egyenlő számú sort és oszlopot cseréltük meg, és két ugyanolyan rendű mátrix összege (különbsége) ugyanolyan rendű négyzetes mátrix.

Fordítva: ha $\mathbf{A}+\mathbf{A}^*$ négyzetes mátrix, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^*$ ugyanolyan rendű négyzetes mátrix, mint $\mathbf{A}+\mathbf{A}^*$, hiszen ellenkező esetben az összeadás (kivonás) nem volna elvégezhető; tehát $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix.

15. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, akkor $\mathbf{A}+\mathbf{A}^*$ szimmetrikus mátrix.

Azt kell kimutatnunk, hogy az $\mathbf{A}+\mathbf{A}^*$ mátrix egyenlő a transzponáltjával.

Ez valóban igaz, mert — felhasználva az $(A^*)^* = A$ összefüggést —

$$(A+A^*)^* = A^*+(A^*)^* = A^*+A = A+A^*;$$

ez éppen azt jelenti, hogy $A+A^*$ szimmetrikus.

16. Bizonyítsuk be, hogy ha A négyzetes mátrix, akkor $A-A^*$ antiszimmetrikus mátrix!

Írjuk fel $A-A^*$ transzponálját:

$$(A-A^*)^* = A^*-(A^*)^* = A^*-A = -(A-A^*),$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy $A-A^*$ antiszimmetrikus mátrix.

17. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix egyenlő egy szimmetrikus S és egy antiszimmetrikus T mátrix összegével: $A = S+T$, akkor $S = \frac{1}{2}(A+A^*)$ és $T = \frac{1}{2}(A-A^*)$.

Ha

$$A = S+T,$$

akkor

$$A^* = (S+T)^* = S^*+T^*.$$

Mivel S szimmetrikus mátrix, ezért $S^* = S$; mivel T antiszimmetrikus mátrix, ezért $T^* = -T$; így

$$A^* = S-T.$$

Összeadva a fenti egyenleteket,

$$A+A^* = 2S,$$

amiből

$$S = \frac{1}{2}(A+A^*);$$

kivonva a két egyenletet,

$$T = \frac{1}{2}(A-A^*).$$

18. Bontsuk fel az

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrixot egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére!

Mivel

$$A^* = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

ezért a szimmetrikus rész

$$S = \frac{1}{2}(A+A^*) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -8 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -4 \\ 11 & -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1{,}5 & 5{,}5 \\ 1{,}5 & -1 & -2 \\ 5{,}5 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

az antiszimmetrikus rész pedig

$$T = \frac{1}{2}(A-A^*) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & -2{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & 4 \\ 2{,}5 & -4 & 0 \end{bmatrix};$$

tehát a felbontás

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1{,}5 & 5{,}5 \\ 1{,}5 & -1 & -2 \\ 5{,}5 & -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & -2{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & 4 \\ 2{,}5 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

19. Mutassuk meg a

$$K = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$$

mátrix segítségével, hogy $(\overline{K})^* = \overline{K^*}$, azaz a transzponálás és konjugálás művelete felcserélhető!

Írjuk fel a szóban forgó mátrixokat:

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}; \quad (\overline{K})^* = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix};$$

$$K^* = \begin{bmatrix} 1+2i & 3 \\ i & 2-3i \end{bmatrix}; \quad \overline{K^*} = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix},$$

azaz valóban

$$(\overline{K})^* = \overline{K^*}.$$

20. Bizonyítsuk be, hogy ha K_1 és K_2 komplex elemű mátrixok, akkor

$$\overline{(K_1+K_2)} = \overline{K_1}+\overline{K_2}.$$

Tekintsük a szóban forgó mátrixok tetszőleges, mondjuk i-edik sorának és j-edik oszlopának egy-egy elemét. Ezek legyenek

$$\overline{z_1+z_2}; \quad \overline{z_1}, \quad \overline{z_2},$$

mivel azonban a komplex számok körében

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2},$$

ezért eredeti állításunk is igaz.

21. Bizonyítsuk be, hogy ha **K** komplex elemű mátrix, akkor $\overline{\overline{\mathbf{K}}}=\mathbf{K}$.
Mivel a **K** mátrix minden z_{ij} elemére $\overline{\overline{z}}_{ij}=z_{ij}$, ezért az állítás igaz.

22. Mutassuk meg, hogy ha **K** komplex elemű négyzetes mátrix, akkor

$\mathbf{K}+\overline{\mathbf{K}^*}$ hermitikus

és $\mathbf{K}-\overline{\mathbf{K}^*}$ ferdén hermitikus

mátrix.

Egy mátrix akkor hermitikus, ha egyenlő transzponáltjának konjugáltjával.
A $\mathbf{K}+\overline{\mathbf{K}^*}$ mátrix transzponáltja

$$(\mathbf{K}+\overline{\mathbf{K}^*})^* = \mathbf{K}^*+(\overline{\mathbf{K}^*})^* = \mathbf{K}^*+\overline{\mathbf{K}},$$

és így a transzponált konjugáltja:

$$\overline{(\mathbf{K}+\overline{\mathbf{K}^*})^*} = \left(\overline{\mathbf{K}^*+\overline{\mathbf{K}}}\right) = \overline{\mathbf{K}^*}+\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \overline{\mathbf{K}^*}+\mathbf{K} = \mathbf{K}+\overline{\mathbf{K}^*},$$

vagyis valóban az eredeti mátrix, ami azt jelenti, hogy a $\mathbf{K}+\overline{\mathbf{K}^*}$ mátrix hermitikus.
A feladat második része hasonlóan bizonyítható.

23. Bontsuk fel a

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4-2i & 6+8i \\ 10 & -4i \end{bmatrix}$$

komplex mátrixot egy hermitikus és egy ferdén hermitikus mátrix összegére!
Mivel

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 4-2i & 10 \\ 6+8i & -4i \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \overline{\mathbf{K}^*} = \begin{bmatrix} 4+2i & 10 \\ 6-8i & 4i \end{bmatrix},$$

ezért az hermitikus rész:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}+\overline{\mathbf{K}^*}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 16+8i \\ 16-8i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8+4i \\ 8-4i & 0 \end{bmatrix},$$

a ferdén hermitikus rész pedig:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}-\overline{\mathbf{K}^*}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4i & -4+8i \\ 4+8i & -8i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i & -2+4i \\ 2+4i & -4i \end{bmatrix};$$

tehát a felbontás

$$\begin{bmatrix} 4-2i & 6+8i \\ 10 & -4i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8+4i \\ 8-4i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2i & -2+4i \\ 2+4i & -4i \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizzük a következő mátrixszorzások helyességét (**24—29.** feladatok!)

24. $$[4,\ 5,\ 6]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [4(2)+5(3)+6(-1)] = [17] = 17.$$

25. $$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}[4,\ 5,\ 6] = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 6 \\ (-1)\cdot 4 & (-1)\cdot 5 & (-1)\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

26. $$[1,\ 2,\ 3]\begin{bmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & -11 & -8 \end{bmatrix} = [1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 5;\ \ 1(-6)+2(-7)+$$
$$+3\cdot 8;\ \ 1\cdot 9+2\cdot 10+3(-11);\ \ 1\cdot 6+2\cdot 7+3(-8)] = [19,\ 4,\ -4,\ -4].$$

27. $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3 \\ 1\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

28. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 1+1(-2) & 1(-4)+2\cdot 5+1\cdot 2 \\ 4\cdot 3+0\cdot 1+2(-2) & 4(-4)+0\cdot 5+2\cdot 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

29. $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+4\cdot 1-3\cdot 1 \\ 2\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 \\ -1\cdot 1+3\cdot 1-5\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy egy $n\cdot m$ típusú mátrixnak szorzása az $[\underset{1}{\underbrace{1}},\ \underset{2}{\underbrace{1}},\ \dots,\ \underset{n}{\underbrace{1}}]^*$ $n\cdot 1$ típusú *összegező mátrixszal* olyan oszlopmátrixot eredményez, amelynek elemei az eredeti mátrix megfelelő soraiban álló elemek összege. Az elektronikus számítógépek is így végzik az elemek összegezését.

30. Elvégezhető-e az alábbi szorzás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}[1,\ 1,\ 1].$$

A szorzás nem végezhető el, mert a két mátrix ebben a sorrendben nem konformábilis, ugyanis (3,3), ill. (1,3) típusúak.

31. Végezzük el a következő szorzást:

$$[1,\ 1,\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ez a szorzás elvégezhető, mégpedig

$$[1,\ 1,\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = [2,\ 7,\ -7].$$

Az eredmény olyan sormátrix, amelynek elemei az eredeti mátrix oszlopaiban álló elemek összege.

32. Szorozzuk össze az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat az **AB** sorrendben!

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

33. Szorozzuk össze az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat!

A Falk-módszert alkalmazva és az oszlopösszeg-próbát használva,

$$\begin{array}{r|cc|cccc|l}
\cline{4-7}
 & & & 5 & 1 & -2 & 3 & \\
\mathbf{B} = & & & 0 & 2 & 3 & 1 & \\
\cline{2-7}
 & 2 & 1 & 10 & 4 & -1 & 7 & \\
\mathbf{A} = & 3 & -2 & 15 & -1 & -12 & 7 & = \mathbf{AB}. \\
 & 1 & 0 & 5 & 1 & -2 & 3 & \\
\cline{2-7}
 & 6 & -1 & 30 & 4 & -15 & 17 & \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

34. Állapítsuk meg, hogy az alábbi mátrixok kommutábilisak-e!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|l}
\cline{5-7}
 & & & & 1 & 2 & 3 & \\
\mathbf{B} = & & & & 2 & 4 & 6 & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & \\
\cline{2-7}
 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
\mathbf{A} = & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & = \mathbf{AB}; \\
 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cline{2-7}
 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|l}
\cline{5-7}
 & & & & 1 & -1 & 1 & \\
\mathbf{A} = & & & & -3 & 2 & -1 & \\
 & & & & -2 & 1 & 0 & \\
\cline{2-7}
 & 1 & 2 & 3 & -11 & 6 & -1 & \\
\mathbf{B} = & 2 & 4 & 6 & -22 & 12 & -2 & = \mathbf{BA}. \\
 & 1 & 2 & 3 & -11 & 6 & -1 & \\
\cline{2-7}
 & 4 & 8 & 12 & -44 & 24 & -4 & \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

Tehát $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, vagyis **A** és **B** nem kommutábilis.

35. Szorozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{mátrixot a} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

permutáló mátrixszal előbb balról, majd jobbról!

A permutáló mátrixszal először balról szorozzuk meg **A**-t:

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy a mátrix sorai megcserélődtek, mégpedig az első sorból harmadik sor, a másodikból első és a harmadikból második sor lett. Ez annak a következménye, hogy a permutáló mátrixban az a_{12}, a_{23}, a_{31} elemek helyén álltak az 1-esek. Vegyük észre, hogy az elemek indexét fordított sorrendben olvasva, megkapjuk a sorcseréket.

Most jobbról szorozzuk **A**-t a permutáló mátrixszal:

$$\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}4&-1&0\\3&2&-1\\5&-6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4&-1\\-1&3&2\\3&5&-6\end{bmatrix}.$$

Most könnyű észrevenni, hogy az oszlopok cserélődtek fel, mégpedig az első oszlopból második, a második oszlopból harmadik és a harmadik oszlopból első lett. A permutáló mátrix nemzérus elemeinek, az a_{12}, a_{23}, a_{31} elemeknek az indexe az oszlopcseréket is elárulja, csak az indexeket most szabályos sorrendben kell olvasni. Ezek alapján bármilyen sor- vagy oszlopcsere egy szorzással könnyen elvégezhető.

36. Milyen permutáló mátrixszal kell egy tetszőleges negyedrendű **A** mátrixot megszorozni ahhoz, hogy az első sorából harmadik, a második sorból első, a harmadik sorból negyedik, a negyedik sorból pedig második legyen?

Mivel sorcserét kell elérnünk, a permutáló mátrixszal balról szorozzuk meg **A**-t.

A sorcserék: $1\to3$, $2\to1$, $3\to4$, $4\to2$, ezért az a_{31}, a_{12}, a_{43}, a_{24} elemek az 1-esek, így a keresett permutáló mátrix:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

Gyakorlásképpen ellenőrizzük számításaink helyességét!

37. Milyen permutáló mátrixszal kell egy tetszőleges negyedrendű **A** mátrixot megszorozni ahhoz, hogy az első oszlopából negyedik, a második oszlopából első legyen, a harmadik oszlopa helyén maradjon, a negyedik oszlopból pedig második legyen?

Most jobbról kell szoroznunk az **A** mátrixot a permutáló mátrixszal, hiszen oszlopcserét kívánunk, mégpedig az $1\to4$, $2\to1$, $3\to3$, $4\to2$ cseréknek megfelelően. Ekkor az 1-es elemeknek az a_{14}, a_{21}, a_{33}, a_{42} elemek helyén kell állniok, és így a keresett mátrix

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

38. **Írjuk fel azt az n-edrendű permutáló mátrixot, amivel egy tetszőleges n-edrendű mátrixot megszorozva, abban két adott sor (ill. oszlop) helyet cseréi!**

Ha az n-edrendű **A** mátrix i-edik sorát akarjuk felcserélni k-adik sorával, akkor olyan **P** mátrixszal kell **A**-t balról megszoroznunk, amelyben $a_{ik}=a_{ki}=1$, továbbá a főátlóban álló, de nem az i-edik és k-adik sorhoz tartozó elemek mindegyike 1, a többi 0. Például negyedrendű mátrixok esetén, ha azt akarjuk, hogy az első és második sor cseréljen helyet, az **A** mátrixot balról a

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

mátrixszal kell szorozni.

Ha oszlopcserét akarunk végrehajtani, a szorzást ugyanezzel a mátrixszal jobbról kell elvégezni. Például az előbbi **P** mátrixszal:

$$\begin{array}{r|cccc|cccc|}
\cline{6-9}
 & & & & & 0&1&0&0\\
\mathbf{P}= & & & & & 1&0&0&0\\
 & & & & & 0&0&1&0\\
 & & & & & 0&0&0&1\\
\cline{2-9}
 & 1&2&3&4 & 2&1&3&4\\
\mathbf{A}= & 1&2&3&4 & 2&1&3&4\\
 & 1&2&3&4 & 2&1&3&4\\
 & 1&2&3&4 & 2&1&3&4\\
\cline{2-9}
\end{array}$$

39. Szorozzuk meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\4&-1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

mátrixot a

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{bmatrix}$$

mátrixszal mindkét oldalról!

$$\mathbf{CA}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&-2\\4&-1&2\\1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\4&-1&2\\c&2c&c\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{AC}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\4&-1&2\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&-2c\\4&-1&2c\\1&2&c\end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy az első esetben **A** harmadik sora, a második esetben **A** harmadik oszlopa szorzódott c-vel, a többi elem változatlan maradt.

Általában, ha az egységmátrix a_{ii} átlós eleme helyett c-t írunk, akkor vele balról szorozva a másik tényező i-edik sora, jobbról szorozva a másik tényező i-edik oszlopa c-vel szorzódik.

40. Szorozzuk meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

mátrixot a

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

mátrixszal mintkét oldalról!

$$\mathbf{DA}=\begin{bmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+4c & 3-c & -2+2c\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{AD}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & c+3 & -2\\ 4 & 4c-1 & 2\\ 1 & c+2 & 1\end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy az első esetben a szorzás ugyanazt eredményezte, mintha a mátrix második sorának c-szeresét hozzáadtuk volna az első sorhoz, a második esetben pedig mintha az első oszlop c-szeresét adtuk volna hozzá a második oszlophoz.

Általában, ha az egységmátrix $a_{ij}=0\,(i\neq j)$ eleme helyébe c-t írunk, és az így kapott mátrixszal egy ugyanolyan rendű **A** mátrixot balról megszorzunk, akkor az **A** mátrix i-edik sorához adódik a j-edik sorának c-szerese; ha pedig ugyanezzel a mátrixszal jobbról szorozzuk meg az **A** mátrixot, akkor az **A** mátrix i-edik oszlopának c-szerese adódik hozzá a j-edik oszlopához.

41. Milyen mátrixszal kell szorozni a negyedrendű **A** mátrixot, hogy második sorához adódjék negyedik sorának (-2)-szerese?

Mivel sort kell sorhoz adnunk, a szorzás balról történik, mégpedig olyan mátrixszal, amelyet úgy kapunk, hogy az $\mathbf{E}_4$ mátrix a_{24} eleme helyén álló 0 helyébe (-2)-t írunk. A keresett mátrix tehát

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

42. Milyen mátrixszal kell szorozni a harmadrendű A mátrixot ahhoz, hogy a második oszlop -3-szorosa a harmadik oszlophoz adódjék?

Mivel oszlopot kell oszlophoz adnunk, a szorzás jobbról történik, mégpedig a

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

mátrixszal, amit úgy kaptunk, hogy az $\mathbf{E}_3$ egységmátrix a_{23} eleme helyébe (-3)-t írtunk.

43. Szorozzuk meg az **A** négyzetes mátrixot mindkét oldalról transzponáltjával!

Ha

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 5 & -1 & 0\\ -3 & 2 & -2\end{bmatrix},\quad \text{akkor}\quad \mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}1 & 5 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & 0 & -2\end{bmatrix},$$

és így

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{5-7}
 & & & & 1 & 5 & -3 & \\
\mathbf{A}^*= & & & & 3 & -1 & 2 & \\
 & & & & -2 & 0 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 3 & -2 & 14 & 2 & 7 & \\
\mathbf{A}= & 5 & -1 & 0 & 2 & 26 & -17 & =\mathbf{AA}^*;\\
 & -3 & 2 & -2 & 7 & -17 & 17 & \\
\hline
 & 3 & 4 & -4 & 23 & 11 & 7 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{5-7}
 & & & & 1 & 3 & -2 & \\
\mathbf{A}= & & & & 5 & -1 & 0 & \\
 & & & & -3 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 5 & -3 & 35 & -8 & 4 & \\
\mathbf{A}^*= & 3 & -1 & 2 & -8 & 14 & -10 & =\mathbf{A}^*\mathbf{A}.\\
 & -2 & 0 & -2 & 4 & -10 & 8 & \\
\hline
 & 2 & 4 & -3 & 31 & -4 & 2 & \\
\hline
\end{array}$$

Látható, hogy mind az $\mathbf{AA}^*$, mind az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, de nem egyenlők.

Ha $\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, az **A** mátrixot *normális mátrixnak* nevezik.

44. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{AA}^*$ és $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ mindig létezik (vagyis ez a két szorzás mindig elvégezhető)!

Legyen $\mathbf{A}$ $n \cdot m$ típusú mátrix. Ekkor $\mathbf{A}^*$ $(m \cdot n)$ típusú mátrix. Az

$$\underset{(n,\,m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}^*} \quad \text{és} \quad \underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}^*} \cdot \underset{(n,\,m)}{\mathbf{A}}$$

szorzás elvégezhető, mert a két-két mátrix konformábilis!

45. Szorozzuk össze az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

alsó háromszögmátrixokat mindkét sorrendben!

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{5-7}
 & & & & 1 & 0 & 0 & \\
\mathbf{B} = & & & & 5 & 3 & 0 & \\
 & & & & -1 & 0 & -7 & \\
\hline
 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \\
\mathbf{A} = & 5 & 3 & 0 & 20 & 9 & 0 & = \mathbf{AB}; \\
 & 8 & 7 & -4 & 47 & 21 & 28 & \\
\hline
 & 11 & 10 & -4 & 65 & 30 & 28 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{5-7}
 & & & & -2 & 0 & 0 & \\
\mathbf{A} = & & & & 5 & 3 & 0 & \\
 & & & & 8 & 7 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \\
\mathbf{B} = & 5 & 3 & 0 & 5 & 9 & 0 & = \mathbf{BA}. \\
 & -1 & 0 & -7 & -54 & -49 & 28 & \\
\hline
 & 5 & 3 & -7 & -51 & -40 & 28 & \\
\hline
\end{array}$$

A szorzás definíciója alapján könnyen belátható, hogy két alsó (két felső) háromszögmátrix szorzata ismét alsó (felső) háromszögmátrix, és általában $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Ha egy alsó és egy felső háromszögmátrixot szorzunk össze, a szorzatmátrix már általában nem lesz háromszögmátrix.

46. Határozzuk meg az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzatot, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

A Falk-módszerrel

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{5-7}
 & & & & -3 & 1 & -1 & \\
\mathbf{B} = & & & & 0 & 2 & 5 & \\
 & & & & 0 & 0 & 6 & \\
\hline
 & 2 & 0 & 0 & -6 & 2 & -2 & \\
\mathbf{A} = & 4 & 1 & 0 & -12 & 6 & 1 & = \mathbf{AB}; \\
 & -5 & 3 & 4 & 15 & 1 & 44 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & -3 & 9 & 43 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{5-7}
 & & & & 2 & 0 & 0 & \\
\mathbf{A} = & & & & 4 & 1 & 0 & \\
 & & & & -5 & 3 & 4 & \\
\hline
 & -3 & 1 & -1 & 3 & -2 & -4 & \\
\mathbf{B} = & 0 & 2 & 5 & -17 & 17 & 20 & = \mathbf{BA}. \\
 & 0 & 0 & 6 & -30 & 18 & 24 & \\
\hline
 & -3 & 3 & 10 & -44 & 33 & 40 & \\
\hline
\end{array}$$

47. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixokat, és bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$.

$$\begin{array}{r|rrr|rrrr|l}
\cline{5-8}
 & & & & 1 & 4 & 1 & 0 & \\
\mathbf{B} = & & & & 2 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & & 1 & -2 & 1 & 2 & \\
\hline
 & 2 & -3 & -5 & -9 & 15 & -6 & -13 & \\
\mathbf{A} = & -1 & 4 & 5 & 12 & -10 & 8 & 14 & = \mathbf{AB}; \\
 & 1 & -3 & -4 & -9 & 9 & -6 & -11 & \\
\hline
 & 2 & -2 & -4 & -6 & 14 & -4 & -10 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|rrrr|l}
 & & & & 0 & 7 & 3 & 2 & \\
 \mathbf{C} = & & & & 3 & -2 & -1 & -1 & \\
 & & & & 0 & 1 & 3 & 4 & \\ \hline
 & 2 & -3 & -5 & -9 & 15 & -6 & -13 & \\
 \mathbf{A} = & -1 & 4 & 5 & 12 & -10 & 8 & 14 & = \mathbf{AC}. \\
 & 1 & -3 & -4 & -9 & 9 & -6 & -11 & \\ \hline
 & 2 & -2 & -4 & -6 & 14 & -4 & -10 &
\end{array}$$

Figyeljük meg, hogy az $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ mátrixegyenlőségből *nem következik* a **B** és a **C** mátrixok egyenlősége!

48. Mutassuk meg, hogy $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, ha

$$\mathbf{A}=[2,\ -5,\ 4];\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 5\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix};\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2\\ -4\\ 7\end{bmatrix}.$$

Egyrészt

$$\mathbf{AB}=[2,\ -5,\ 4]\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 5\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}=[32,\ -4,\ -37],$$

és így

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=[32,\ -4,\ -37]\begin{bmatrix} 2\\ -4\\ 7\end{bmatrix}=64+16-259=-179;$$

másrészt

$$\mathbf{BC}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 5\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2\\ -4\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\\ 23\\ -17\end{bmatrix},$$

ezért

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=[2,\ -5,\ 4]\begin{bmatrix} 2\\ 23\\ -17\end{bmatrix}=4-115-68=-179.$$

49. Az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix};\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix};\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

mátrixokra mutassuk meg, hogy $(\mathrm{AB})\mathrm{C}=\mathrm{A}(\mathrm{BC})$.

Egyrészt

$$\begin{array}{r|rrr|rr|rrrr|l}
 & & & & 1 & 3 & & & & & \\
 \mathbf{B} = & & & & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & -4 & = \mathbf{C} \\
 & & & & -1 & 4 & 2 & 0 & -2 & 1 & \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 0 & -10 & 5 & \\
 \mathbf{A} = & -2 & 0 & 3 & -5 & 6 & 7 & -10 & -27 & 26 & = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \\
 & 3 & -1 & 2 & 1 & 15 & 31 & 2 & -27 & 11 & \\ \hline
 & 2 & -2 & 6 & -4 & 26 & 48 & -8 & -64 & 42 & \\
 & & & & \multicolumn{2}{c|}{\Vert} & & & & & \\
 & & & & \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{AB}} & & & & &
\end{array}$$

(Itt az ellenőrzést oszlopösszeg-próbával végeztük.)
Másrészt

$$\begin{array}{r|rrr|rrrr|r|l}
 & & & & 1 & 2 & 3 & -4 & 2 & \\
 \mathbf{C} = & & & & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & \\ \hline
 & & 1 & 3 & 7 & 2 & -3 & -1 & 5 & \\
 \mathbf{B} = & & 0 & 2 & 4 & 0 & -4 & 2 & 2 & \\
 & & -1 & 4 & 7 & -2 & -11 & 8 & 2 & \rightarrow = \mathbf{BC} \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & 10 & 0 & -10 & 5 & 5 & \\
 \mathbf{A} = & -2 & 0 & 3 & 7 & -10 & -27 & 26 & -4 & \\
 & 3 & -1 & 2 & 31 & 2 & -27 & 11 & 17 & \\ \hline
 & & & & \multicolumn{4}{c|}{\Vert} & & \\
 & & & & \multicolumn{4}{c|}{\mathbf{A}(\mathbf{BC})} & &
\end{array}$$

(Itt az ellenőrzést sorösszeg-próbával végeztük.)

50. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

mátrix négyzetét és köbét!

$$
\begin{array}{r|ccc|ccc|l}
\cline{5-7}
 & & & & 2 & -1 & 1 & \\
 & & & \mathbf{A} = & 0 & 1 & 2 & \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 2 & -1 & 1 & 5 & -3 & 1 & \\
\mathbf{A} = & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & = \mathbf{A}^2 \\
 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & \\
\hline
 & 2 & -1 & 1 & 11 & -8 & 0 & \\
 & 0 & 1 & 2 & 8 & -1 & 8 & = \mathbf{A}^3 \\
 & 1 & 0 & 1 & 8 & -4 & 3 & \\
\hline
\end{array}
$$

51. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}1 & n\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el.

Közvetlenül látszik, hogy pl.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy $n=k$-ra tételünk igaz, azaz

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & k+1\\0 & 1\end{bmatrix},$$

és ebből már a bizonyítandó összefüggés következik.

52. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_n\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}a_1^k & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_2^k & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_n^k\end{bmatrix}.$$

$k=2$-re igaz az állítás, mert

$$
\begin{array}{|cccc|cccc|}
\cline{5-8}
\multicolumn{4}{c|}{} & a_1 & 0 & \dots & 0 \\
\multicolumn{4}{c|}{} & 0 & a_2 & \dots & 0 \\
\multicolumn{4}{c|}{} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\multicolumn{4}{c|}{} & 0 & 0 & \dots & a_n \\
\hline
a_1 & 0 & \dots & 0 & a_1^2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & a_2^2 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & a_n^2 \\
\hline
\end{array}
$$

Tegyük fel, hogy $k=i$-re már igaz az állítás; akkor $k = (i+1)$-re is igaz, hiszen

$$
\begin{array}{|cccc|cccc|}
\cline{5-8}
\multicolumn{4}{c|}{} & a_1 & 0 & \dots & 0 \\
\multicolumn{4}{c|}{} & 0 & a_2 & \dots & 0 \\
\multicolumn{4}{c|}{} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\multicolumn{4}{c|}{} & 0 & 0 & \dots & a_n \\
\hline
a_1^i & 0 & \dots & 0 & a_1^{i+1} & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_2^i & \dots & 0 & 0 & a_2^{i+1} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a_n^i & 0 & 0 & \dots & a_n^{i+1} \\
\hline
\end{array},
$$

és ez azt jelenti, hogy az állítás minden k-ra igaz.

53. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

mátrixok segítségével mutassuk meg, hogy

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2;$$

$$\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2 \neq (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}).$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 10\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -18\\ 6 & 13\end{bmatrix};$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 4 & -17 \end{bmatrix};$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^2+2AB+B^2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 22 \\ 8 & -34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -11 \end{bmatrix};$$

és valóban

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -11 \end{bmatrix}.$$

$$A-B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \end{bmatrix};$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ -8 & 8 \end{bmatrix};$$

$$A^2-B^2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -15 & -3 \end{bmatrix};$$

és valóban

$$\begin{bmatrix} -5 & 11 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}.$$

54. Mutassuk meg az előző feladatban szereplő **A** és **B** mátrixra, hogy

$$(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2.$$

Láttuk, hogy

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}; \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 4 & -17 \end{bmatrix}; \quad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 6 & 13 \end{bmatrix},$$

kiszámítandó még

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 10 \\ 11 & -6 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$A^2+AB+BA+B^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 4 & -17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 10 \\ 11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix},$$

és ez azonos az $(A+B)^2$ mátrixszal, ezért az állítás helyes.

Könnyen belátható, hogy általában is igaz az

$$(A+B)^2 \equiv A^2+AB+BA+B^2$$

összefüggés.

Abban a speciális esetben, ha $AB=BA$, tehát ha **A** és **B** kommutábilis, akkor

$$(A+B)^2 \equiv A^2+2AB+B^2.$$

55. Mutassuk meg az előző két feladatban szereplő **A** és **B** mátrixra, hogy

$$(A+B)(A-B) = A^2+BA-AB-B^2;$$

$$(A-B)(A+B) = A^2-BA+AB-B^2.$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ -8 & 8 \end{bmatrix};$$

$$A^2+BA-AB-B^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 10 \\ 11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 4 & -17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ -8 & 8 \end{bmatrix},$$

tehát az első azonosság érvényes.

$$(A-B)(A+B) = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 13 \\ -22 & -14 \end{bmatrix};$$

$$A^2-BA+AB-B^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -11 & 10 \\ 11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 4 & -17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 13 \\ -22 & -14 \end{bmatrix},$$

ennélfogva a második azonosság is érvényes.

Belátható, hogy az

$$(A+B)(A-B) \equiv A^2+BA-AB-B^2$$

és az

$$(A-B)(A+B) \equiv A^2-BA+AB-B^2$$

azonosság általában is igaz.

56. Legyen adott három mátrix:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy ebben az esetben

a) $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{0}$;

b) $\mathbf{AC}=\mathbf{A}$;

c) $\mathbf{CA}=\mathbf{C}$,

majd ezeket felhasználva bizonyítsuk be, hogy

d) $\mathbf{ACB}=\mathbf{CBA}$;

e) $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2=(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$;

f) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2$.

a) Mivel

$$\begin{array}{rrrr|rrr|l}
 & & & \mathbf{B} = & -1 & 3 & 5 & \\
 & & & & 1 & -3 & -5 & \\
 & & & & -1 & 3 & 5 & \\ \hline
 & 2 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & \\
\mathbf{A} = & -1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & = \mathbf{AB}\\
 & 1 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline
 & 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

és

$$\begin{array}{rrrr|rrr|l}
 & & & & 2 & -3 & -5 & \\
 & & & \mathbf{A} = & -1 & 4 & 5 & \\
 & & & & 1 & -3 & -4 & \\ \hline
 & -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & \\
\mathbf{B} = & 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & = \mathbf{BA},\\
 & -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline
 & 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

mindkét szorzatmátrix zérusmátrix, így az *a)* állítást bebizonyítottuk.

b)

$$\begin{array}{rrrr|rrr|l}
 & & & & 2 & -2 & -4 & \\
 & & & \mathbf{C} = & -1 & 3 & 4 & \\
 & & & & 1 & -2 & -3 & \\ \hline
 & 2 & -3 & -5 & 2 & -3 & -5 & \\
\mathbf{A} = & -1 & 4 & 5 & -1 & 4 & 5 & = \mathbf{AC} = \mathbf{A}.\\
 & 1 & -3 & -4 & 1 & -3 & -4 & \\ \hline
 & 2 & -2 & -4 & 2 & -2 & -4 &
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rrrr|rrr|l}
 & & & & 2 & -3 & -5 & \\
 & & & \mathbf{A} = & -1 & 4 & 5 & \\
 & & & & 1 & -3 & -4 & \\ \hline
 & 2 & -2 & -4 & 2 & -2 & -4 & \\
\mathbf{C} = & -1 & 3 & 4 & -1 & 3 & 4 & = \mathbf{CA} = \mathbf{C}.\\
 & 1 & -2 & -3 & 1 & -2 & -3 & \\ \hline
 & 2 & -1 & -3 & 2 & -1 & -3 &
\end{array}$$

d) Mivel $\mathbf{AC}=\mathbf{A}$, ezért a bal oldal $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$; hasonlóképpen a jobb oldal $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$ miatt $\mathbf{0}$.

e) Az $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})\equiv\mathbf{A}^2-\mathbf{AB}+\mathbf{AB}-\mathbf{B}^2$ azonosságban a két középső tag $\mathbf{0}$, ezért valóban $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$.

f) Az $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2\equiv\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}+\mathbf{BA}+\mathbf{B}^2$ azonosságban ismét a két középső tag $\mathbf{0}$, ezért valóban $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2$.

57. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\quad \text{és}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$$

mátrixokra

$$\mathbf{AB}=-\mathbf{BA}\quad \text{és}\quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2.$$

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}=-\mathbf{BA}.$$

A második állítás ebből már következik, hiszen $\mathbf{AB}+\mathbf{BA}=\mathbf{0}$.

58. Mutassuk meg, hogy a konformábilis $\mathbf{K}_1$ és $\mathbf{K}_2$ komplex mátrixokra

$$\overline{\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2}=\overline{\mathbf{K}_1}\cdot\overline{\mathbf{K}_2}.$$

Mivel tetszőleges $z_1 = a_1+b_1i$ és $z_2 = a_2+b_2i$ komplex számra

$$\overline{z_1z_2} = \overline{(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)} = \overline{a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i} =$$

$$= a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)i = (a_1-b_1i)(a_2-b_2i) = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,$$

ezért ez az átalakítás a $\overline{\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2}$ mátrix minden elemére elvégezhető, így állításunk igaz.

59. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

projektormátrix!

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\multicolumn{4}{r|}{} & 2 & -2 & -4 & \\
\multicolumn{4}{r|}{\mathbf{P} =} & -1 & 3 & 4 & \\
\multicolumn{4}{r|}{} & 1 & -2 & -3 & \\
\hline
 & 2 & -2 & -4 & 2 & -2 & -4 & \\
\mathbf{P} = & -1 & 3 & 4 & -1 & 3 & 4 & = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}; \\
 & 1 & -2 & -3 & 1 & -2 & -3 & \\
\hline
 & 2 & -1 & -3 & 2 & -1 & -3 &
\end{array}$$

$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2\cdot\mathbf{P} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{P}, \ldots, \mathbf{P}^n = \mathbf{P}$, tehát **P** valóban projektormátrix.

60. Bizonyítsuk be, hogy ha az **A** és **B** mátrixokra $\mathbf{AB}=\mathbf{A}$ és $\mathbf{BA}=\mathbf{B}$, akkor **A** is, **B** is projektormátrix!

A mátrixszorzás asszociatív tulajdonsága és a feltételek miatt egyrészt

$$\mathbf{ABA}=(\mathbf{AB})\mathbf{A}=\mathbf{AA}=\mathbf{A}^2;$$

másrészt

$$\mathbf{ABA}=\mathbf{A}(\mathbf{BA})=\mathbf{AB}=\mathbf{A}.$$

Mivel így $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$, bebizonyítottuk, hogy **A** projektormátrix. A **BAB** szorzatból kiindulva, **B**-re vonatkozó állításunk teljesen hasonlóan belátható.

61. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrixok projektormátrixok, majd mutassuk meg példájukon, hogy az előző feladatban szereplő állítás megfordítása nem igaz: ha **A** és **B** projektormátrixok, abból még nem következik $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$, sem $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$!

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\multicolumn{4}{r|}{} & 2 & -3 & -5 & \\
\multicolumn{4}{r|}{\mathbf{A} =} & -1 & 4 & 5 & \\
\multicolumn{4}{r|}{} & 1 & -3 & -4 & \\
\hline
 & 2 & -3 & -5 & 2 & -3 & -5 & \\
\mathbf{A} = & -1 & 4 & 5 & -1 & 4 & 5 & = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}; \\
 & 1 & -3 & -4 & 1 & -3 & -4 & \\
\hline
 & 2 & -2 & -4 & 2 & -2 & -4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\multicolumn{4}{r|}{} & -1 & 3 & 5 & \\
\multicolumn{4}{r|}{\mathbf{B} =} & 1 & -3 & -5 & \\
\multicolumn{4}{r|}{} & -1 & 3 & 5 & \\
\hline
 & -1 & 3 & 5 & -1 & 3 & 5 & \\
\mathbf{B} = & 1 & -3 & -5 & 1 & -3 & -5 & = \mathbf{B}^2 = \mathbf{B}, \\
 & -1 & 3 & 5 & -1 & 3 & 5 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 5 &
\end{array}$$

tehát **A** és **B** valóban projektormátrix.

Az 56. Gyakorló feladatban már kiszámoltuk, hogy $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ és $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$, tehát $\mathbf{AB}\neq\mathbf{A}$ és $\mathbf{BA}\neq\mathbf{B}$.

62. Bizonyítsuk be, hogy ha az **A** és **B** mátrixokra $\mathbf{AB}=\mathbf{A}$ és $\mathbf{BA}=\mathbf{B}$, akkor $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ projektormátrix és $\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ nilpotens mátrix.

Felhasználva, hogy feltételeink mellett **A** és **B** projektormátrix (60. Gyakorló feladat), $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ négyzete így alakítható át:

$$\left[\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\right]^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}+\mathbf{BA}+\mathbf{B}^2) = \frac{1}{4}(\mathbf{A}+\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B}),$$

tehát az első állítás igaz.

A második állítás bebizonyításához tekintsük $\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ négyzetét, amely így alakítható át:

$$\left[\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{B})\right]^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{A}^2-\mathbf{AB}-\mathbf{BA}+\mathbf{B}^2) = \frac{1}{4}(\mathbf{A}-\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{B}) = \mathbf{0},$$

ehát $\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ valóban nilpotens.

63. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ projektormátrix és $\lambda\neq 1$, ill. $\lambda\neq 0$, akkor $\lambda\mathbf{A}$ nem projektormátrix!

Mivel

$$(\lambda\mathbf{A})^2=\lambda^2\mathbf{A}^2=\lambda^2\mathbf{A}\neq\lambda\mathbf{A}, \quad \text{ha} \quad \lambda\neq 1, \quad \lambda\neq 0,$$

ezért $\lambda\neq 1$ és $\lambda\neq 0$ esetében $\lambda\mathbf{A}$ nem projektormátrix.

64. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{P}$ projektormátrix, akkor $\mathbf{R} = \mathbf{E}-\mathbf{P}$ is projektormátrix, valamint $\mathbf{PR}=\mathbf{RP}=\mathbf{0}$.

Felhasználva, hogy $\mathbf{E}^2=\mathbf{E}$, $\mathbf{EP}=\mathbf{PE}=\mathbf{P}$ és $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$, az $\mathbf{R}$ mátrix négyzete így írható fel:

$$\mathbf{R}^2 = (\mathbf{E}-\mathbf{P})^2 = \mathbf{E}^2-\mathbf{EP}-\mathbf{PE}+\mathbf{P}^2 = \mathbf{E}-\mathbf{P}-\mathbf{P}+\mathbf{P} = \mathbf{E}-\mathbf{P} = \mathbf{R},$$

tehát $\mathbf{R}$ valóban projektormátrix. Másrészt

$$\mathbf{PR} = \mathbf{P}(\mathbf{E}-\mathbf{P}) = \mathbf{PE}-\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}-\mathbf{P} = \mathbf{0},$$

ill.

$$\mathbf{RP} = (\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{P} = \mathbf{EP}-\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}-\mathbf{P} = \mathbf{0},$$

amivel állításunkat bebizonyítottuk.

65. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrix nilpotens!

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N}^3 = \mathbf{N}^2\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Mivel $\mathbf{N}^3=\mathbf{0}$, tehát $\mathbf{N}$ valóban nilpotens.

66. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{N}$ olyan nilpotens mátrix, amelyre $\mathbf{N}^2=\mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{N}(\mathbf{E}+\mathbf{N})^n = \mathbf{N}$$

bármilyen pozitív n-re!

Ha $\quad \mathbf{N}^2=\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{N}^3=\mathbf{N}^4=\ldots=\mathbf{N}^n=\mathbf{0}$, és így

$$\mathbf{N}(\mathbf{E}+\mathbf{N})^n = \mathbf{N}(\mathbf{E}\pm n\mathbf{N}) = \mathbf{NE}\pm n\mathbf{N}^2 = \mathbf{N}.$$

Az első lépésben felhasználtuk, hogy az n tényezős szorzat kiszámításakor a feltétel szerint a szorzatnak csak az a tagja lesz zérustól különböző, amelyhez vagy minden tényezőből az $\mathbf{E}$-t választjuk ($\mathbf{E}^n=\mathbf{E}$), vagy amelyhez az egyikből az $\mathbf{N}$-et, az összes többiből az $\mathbf{E}$-t. Ez utóbbit n-féleképpen tehetjük meg ($n\mathbf{NE}=n\mathbf{N}$).

67. Gyakorlásképpen mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrix nilpotens!

Valóban

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

68. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrixnak csak két különböző hatványmátrixa van, amelyek váltakozva ismétlődnek!

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|r|l}
\cline{5-8}
 & & & & 1 & -2 & -6 & -7 & \\
 & & & \mathbf{A} = & -3 & 2 & 9 & 8 & \\
 & & & & 2 & 0 & -3 & -1 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -6 & -5 & -6 & -6 & -17 & \\
\mathbf{A} = & -3 & 2 & 9 & 9 & 10 & 9 & 28 & \mathbf{A}^2 \\
 & 2 & 0 & -3 & -4 & -4 & -3 & -11 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -6 & 1 & -2 & -6 & -7 & \\
\mathbf{A} = & -3 & 2 & 9 & -3 & 2 & 9 & 8 & \mathbf{A}^3 \\
 & 2 & 0 & -3 & 2 & 0 & -3 & -1 & \\
\hline
\end{array}$$

A táblázatból már látható, hogy $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$, amiből közvetlenül következik, hogy $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2$; $\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^3\,\mathbf{A}$ = stb. és általában

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^5 = \ldots = \mathbf{A}^{2k+1} = \ldots,$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4 = \ldots = \mathbf{A}^{2k} = \ldots$$

69. Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix négyzete az $\mathbf{E}_3$ egységmátrix!

				−1	−1	−1	
			A =	0	1	0	
				0	0	1	
	−1	−1	−1	1	0	0	
A =	0	1	0	0	1	0	$= \mathbf{E}_3$.
	0	0	1	0	0	1	
	−1	0	0	1	1	1	

Tehát valóban fennáll, hogy $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}_3$.

70. Az előző feladathoz hasonlóan igazoljuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4 = \mathbf{E}_3.$$

Valóban

			0	1	0	0	1	0	
			−1	−1	−1	−1	−1	−1	
			0	0	1	0	0	1	
0	1	0	−1	−1	−1	1	0	0	
−1	−1	−1	1	0	0	0	1	0	$= \mathbf{E}_3$,
0	0	1	0	0	1	0	0	1	

és

			0	1	0	0	1	0	0	1	0	
			0	0	1	0	0	1	0	0	1	
			−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	
0	1	0	0	0	1	−1	−1	−1	1	0	0	
0	0	1	−1	−1	−1	1	0	0	0	1	0	$= \mathbf{E}_3$.
−1	−1	−1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	

71. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrixokkal $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

				−2	−1	−6	
			B =	3	2	9	
				−1	−1	−4	
	1	2	3	1	0	0	
A =	3	2	0	0	1	0	$= \mathbf{AB} = \mathbf{E}_3$,
	−1	−1	−1	0	0	1	

				1	2	3	
			A =	3	2	0	
				−1	−1	−1	
	−2	−1	−6	1	0	0	
B =	3	2	9	0	1	0	$= \mathbf{BA} = \mathbf{E}_3$,
	−1	−1	−4	0	0	1	

tehát valóban $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

72. Mutassuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixokra, hogy $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}; \quad (AB)^* = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^* = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$B^*A^* = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát valóban fennáll $(AB)^* = B^*A^*$.

73. Bizonyítsuk be, hogy általánosan igaz az előző példában az adott két mátrixra igazolt összefüggés, vagyis, hogy $(AB)^* = B^*A^*$ minden konformábilis **A** és **B** mátrixra!

Legyen az $A = [a_{ij}]$ mátrix típusa (m, n); a $B = [b_{ij}]$ mátrix típusa (n, p). Ekkor a szorzás **AB** sorrendben elvégezhető, és a $C = AB = [c_{ij}]$ mátrix típusa (m, p). Az **AB** mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elem — ami egyúttal $(AB)^*$ j-edik sorában és i-edik oszlopában áll —

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

A B^* mátrix j-edik sorában a $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ elemek állnak, az A^* mátrix i-edik oszlopának elemei $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. A B^*A^* szorzatmátrix j-edik sorában és i-edik oszlopában éppen a most felsorolt elemek kompozíciója áll, azaz

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

ez valóban éppen c_{ij}, és ezzel a bizonyítást befejeztük.

74. Bizonyítsuk be, hogy

$$(ABC)^* = C^* B^* A^*.$$

Felhasználva a mátrixszorzás asszociatív tulajdonságát és az előző feladat eredményét,

$$(ABC)^* = \{(AB)C\}^* = C^*(AB)^* = C^* B^* A^*.$$

75. Legyenek **A** és **B** n-edrendű négyzetes szimmetrikus mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az **AB** szorzat akkor és csak akkor szimmetrikus mátrix, ha **A** és **B** szorzata felcserélhető.

Ha **A** és **B** szorzata felcserélhető, azaz $AB = BA$, akkor (**A** és **B** szimmetrikus voltát kihasználva)

$$(AB)^* = B^*A^* = BA = AB,$$

ami azt jelenti, hogy **AB** szimmetrikus.

Fordítva: ha **AB** szimmetrikus, akkor ez azt jelenti, hogy $(AB)^* = AB$, és most is fenn kell állnia az általános összefüggésnek is, vagyis

$$(AB)^* = B^*A^* = BA,$$

tehát $AB = BA$, azaz szorzatuk felcserélhető.

76. Mutassuk meg, hogy ha **A** m-edrendű szimmetrikus mátrix és **B** $m \cdot n$ típusú tetszőleges mátrix, akkor a $C = B^*AB$ mátrix szimmetrikus.

Ha **A** szimmetrikus mátrix, akkor (felhasználva a 74. Gyakorló feladat eredményét)

$$C^* = (B^*AB)^* = B^*A^*(B^*)^* = B^*A^*B = B^*AB = C,$$

és ez éppen azt jelenti, hogy **C** szimmetrikus.

Hasonló tétel mondható ki akkor, ha **A** antiszimmetrikus.

77. Gyakorlásképpen bizonyítsuk be, hogy ha **A** szimmetrikus, akkor mind $AA^* = A^*A$, mind pedig A^2 is szimmetrikus.

Ha **A** szimmetrikus, akkor $A = A^*$, ezért

$$A^2 = AA = AA^* = A^*A,$$

továbbá pl. az AA^* mátrix szimmetrikus, mert az i-edik sorában és j-edik oszlopában álló eleme az **A** mátrix i-edik sorának és az A^* mátrix j-edik oszlopának kompozíciója. De ez van AA^* j-edik sorában és i-edik oszlopában álló elem helyén is, hiszen ugyanazokat az elemeket komponáltuk.

Az alábbiakban a mátrixok közgazdasági alkalmazásával kapcsolatos néhány elnevezést sorolunk fel.

Tekintsünk egy üzemet. Jelöljön $T_1, T_2, \ldots, T_m$ egy-egy, az üzem által gyártott terméket. A gyártáshoz $E_1, E_2, \ldots, E_n$ erőforrás (nyersanyag) áll az üzem rendelkezésére. Az egyes termékegységekre vonatkozó ráfordításokat, az ún. *technológiai együtthatókat* a következő táblázat mutatja:

	T_1	$T_2 \ldots$	T_m
E_1	a_{11}	$a_{12} \ldots$	a_{1m}
E_2	a_{21}	$a_{22} \ldots$	a_{2m}
$\vdots$	. . . .	. . . .	. . . .
E_n	a_{n1}	$a_{n2} \ldots$	a_{nn}

a_{ij} jelenti azt a ráfordítást, ami az E_i erőforrásból egységnyi T_j *előállításához szükséges.*

A táblázatban feltüntetett számadatok a *technológiai mátrixot* adják:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nm} \end{bmatrix}.$$

A mátrixnak annyi sora van, ahány erőforrással rendelkezünk, és annyi oszlopa, amennyi a termékek száma.

Ha az üzemnek a $T_1, T_2, \dots, T_m$ termékekből rendre $p_1, p_2, \dots, p_m$ egységnyit kell előállítania, ezt a feladatot a

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_m]^*$$

oszlopmátrixszal adjuk meg, amit *programmátrixnak* vagy *programvektornak* neveznek.

Az $\mathbf{Mp}$ szorzat az adott termelési program erőforrás- (nyersanyag-) szükségletét mutatja, erőforrások szerinti bontásban.

A rendelkezésre álló erőforrások adatait tartalmazó

$$\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^*$$

oszlopmátrixot *kapacitásvektornak* nevezik.

Az egyes erőforrások egységárait tartalmazó

$$\mathbf{a}^* = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

sormátrixot *árvektornak* szokás nevezni. Ezekkel az adatokkal a *termelési program anyagköltsége*

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}^*\mathbf{Mp}.$$

Az $\mathbf{a}^*\mathbf{M}$ mátrix az egyes termékek egységére eső ún. *fajlagos anyagköltséget* adja meg.

78. Egy üzem három erőforrás segítségével négyféle terméket készít, melyek technológiai mátrixa

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a termelés anyagköltségét és fajlagos anyagköltségét, ha az üzemnek az egyes termékekből rendre 40, 25, 60, 50 darabot kell előállítania, az egyes erőforrások kapacitása 450, 400, 300 egység és az erőforrások egységára 10, 12, 8 egység.

A programvektor

$$\mathbf{p} = [40, 25, 60, 50]^*.$$

Az előírt termelés erőforrásszükséglete:

$$\mathbf{Mp} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 25 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 435 \\ 380 \\ 265 \end{bmatrix}.$$

A kapacitásvektor:

$$\mathbf{k} = [450, 400, 300]^*,$$

tehát az előírt program szerinti termelés végrehajtható, mert egyik erőforrással szemben támasztott igény sem nagyobb, mint az illető erőforrás kapacitása.

Az árvektor:

$$\mathbf{a}^* = [10, 12, 8].$$

Az előírt termelési program anyagköltsége

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}^*\mathbf{Mp} = [10, 12, 8] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 25 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} = [10, 12, 8] \begin{bmatrix} 435 \\ 380 \\ 265 \end{bmatrix} =$$

$$= 11\,030 \text{ egység}.$$

A fajlagos anyagköltség

$$\mathbf{a}^*\mathbf{M} = [10, 12, 8] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [26, 62, 64, 92].$$

Ellenőrzésképpen

$$[26, 62, 64, 92] \begin{bmatrix} 40 \\ 25 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} = 11\,030.$$

79. Egy üzem az N_1, N_2 nyersanyagokból az első munkafázisban F_1, F_2 és F_3 félkészterméket állít elő, majd ezekből a második fázisban V_1 és V_2 végterméket. Az egyes termékek egységenkénti anyag-, ill. félkésztermék-szükségletét az alábbi táblázat mutatja:

	F_1	F_2	F_3
N_1	1	4	5
N_2	2	3	6

	V_1	V_2
F_1	1	3
F_2	5	3
F_3	4	1

Melyik nyersanyagból mennyi szükséges az egyes végtermékekhez, és mekkora a nyersanyagszükséglet, ha V_1-ből 1000, V_2-ből 1200 darabot gyártanak?
A félkésztermékek nyersanyagszükségletét az

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

a végtermékek félkésztermék-szükségletét az

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

technológiai mátrixszal írhatjuk fel. A végtermék nyersanyagszükséglete e két mátrix szorzatából olvasható le:

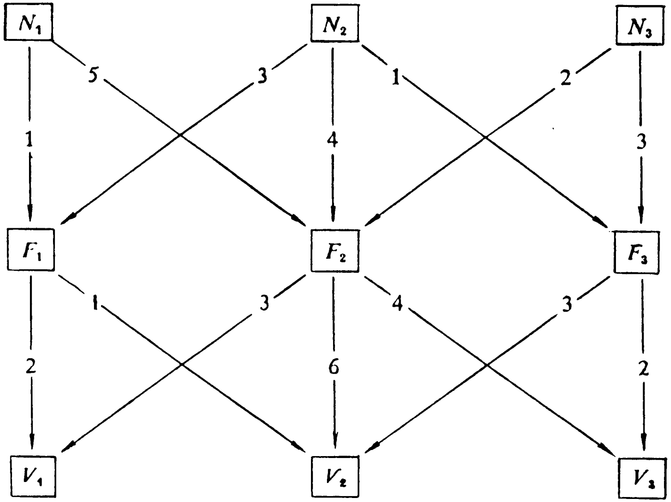
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 20 \\ 41 & 21 \end{bmatrix},$$

mégpedig az $\mathbf{M}$ mátrix első oszlopmátrixa a V_1, a második oszlopmátrixa a V_2 végtermék egy darabjának a nyersanyagszükségletét mutatja. Az $\mathbf{M}$ mátrix sormátrixai az egy-egy darab gyártásához felhasznált nyersanyagok mennyiségét mutatják. A teljes gyártás nyersanyagszükséglete a

$$\begin{bmatrix} 41 & 20 \\ 41 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65000 \\ 66200 \end{bmatrix}$$

oszlopmátrixból olvasható le, mégpedig N_1-ből 65 000 egységre, N_2-ből 66 200 egységre van szükség.

80. Egy üzem három nyersanyagból (amelyek N_1, N_2, N_3) az első munkaciklusban három félkészterméket (ezek F_1, F_2, F_3) állít elő, majd ezekből a második ciklusban három végterméket (ezek V_1, V_2, V_3). Az anyagfelhasználást az alábbi séma mutatja. A vonalakra írt számok a szükséges fajlagos anyagmennyiséget jelentik.



Például az N_1-et és F_2-t összekötő vonalon levő 5-ös azt jelenti, hogy egy egység F_2 előállításához 5 egység N_1-re van szükség.
Írjuk fel a technológiai mátrixot! Határozzuk meg a nyersanyagszükségletet megadó oszlopvektort, ha a programvektor

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

A táblázatból könnyen leolvasható, hogy az első munkaciklus technológiai mátrixa

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

ahol most az oszlopmátrixok az egyes félkésztermékek fajlagos anyagszükségletét jelentik; a második munkaciklus technológiai mátrixa

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

amelynek egyes oszlopmátrixai egy-egy végtermék félkésztermék-szükségletét mutatják.

A teljes gyártás technológiai mátrixa az $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ mátrix; a teljes anyagszükséglet

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{p}.$$

A szorzást elvégezve:

			$\mathbf{M}_2 =$	2	1	0	100	
				3	6	4	200	$= \mathbf{p}$
				0	3	2	300	
	1	5	0	17	31	20	13900	
$\mathbf{M}_1 =$	3	4	1	18	30	18	13200	$= \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{p}.$
	0	2	3	6	21	14	9000	
	4	11	4	41	82	52		

Vagyis N_1-ből 13 900, N_2-ből 13 200, N_3-ből 9000 egység szükséges a kívánt mennyiségű végtermék előállításához.

81. Egy üzem hat nyersanyagból ($N_1, \ldots, N_6$) ez első munkaciklusban három (X_1, X_2, X_3), a második munkaciklusban öt ($Y_1, \ldots, Y_5$) alkatrészt gyárt, és ezekből készül el négy ($Z_1, \ldots, Z_4$) végtermék. Az egyes termékek anyagszükségletét az alábbi táblázat tünteti fel. Egy-egy kisbetű az első indexszel a felhasznált anyagot, ill. terméket jelöli, a további indexek a felhasználás fázisát jelölik. Például n_{13} az az anyagmennyiség, amely a N_1 nyersanyagból az X_3 alkatrész előállításához szükséges, vagy x_{103} az a mennyiség, amely az X_1 alkatrészből a második (az Y) ciklus kihagyásával a Z_3 végtermék előállításához szükséges.

Az adatok:

$n_{11}=2$	$n_{53}=1$	$x_{11}=1$	$x_{32}=1$	$y_{11}=2$
$n_{21}=3$	$n_{61}=1$	$x_{12}=2$	$x_{33}=2$	$y_{13}=1$
$n_{32}=1$	$n_{62}=3$	$x_{13}=3$	$x_{34}=5$	$y_{22}=3$
$n_{42}=4$	$n_{101}=4$	$x_{14}=4$	$x_{35}=1$	$y_{32}=1$
$n_{43}=3$	$n_{103}=1$	$x_{21}=1$	$x_{101}=1$	$y_{33}=2$
$n_{51}=2$	$n_{604}=1$	$x_{22}=3$	$x_{103}=2$	$y_{34}=1$
$n_{52}=2$	$n_{605}=3$	$x_{24}=4$	$x_{202}=1$	$y_{43}=3$
			$x_{303}=3$	$y_{44}=1$
				$y_{51}=2$
				$y_{52}=1$

Minden meg nem nevezett érték zérus.

Írjuk fel a teljes termelés technológiai mátrixát! Mekkora nyersanyagszükséglettel kell számolnunk, ha a gyárnak az alábbi alkatrész- és végterméket kell szállítania:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 400 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \\ 1500 \end{bmatrix}.$$

Az adatok alapján az egyes részmunkák az alábbi technológiai mátrixokkal jellemezhetők (a mátrix indexében a munkafolyamat elején és végén szereplő anyag, ill. gyártmány betűjele van):

$$\mathbf{M}_{NX} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{NY} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{XY} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{XZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{YZ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A részmunkák alapján a végtermék előállítására vonatkozó teljes technológiai mátrix:

$$\mathbf{M}_{NZ} = (\mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XY} + \mathbf{M}_{NY})\mathbf{M}_{YZ} + \mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XZ},$$

a szállítandó árumennyiség nyersanyagszükségletét pedig az

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_X + \mathbf{u}_Y + \mathbf{u}_Z$$

oszlopmátrix adja, ahol

$$\mathbf{u}_X = \mathbf{M}_{NX}\mathbf{X};\qquad \mathbf{u}_Y=(\mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XY}+\mathbf{M}_{NY})\mathbf{Y};\qquad \mathbf{u}_Z = \mathbf{M}_{NZ}\mathbf{Z},$$

tehát $\mathbf{u}_X, \mathbf{u}_Y$, ill. $\mathbf{u}_Z$ az X, Y, ill. Z termékből szállítandó mennyiség teljes anyagszükséglete (nyersanyagból és alkatrészből).

A részletes számítások:

$$\mathbf{M}_{XY} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{NX} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 15 & 6 & 31 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 21 & 1 \\ 4 & 11 & 3 & 16 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XY}.$$

$$\mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XY}+\mathbf{M}_{NY} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 15 & 6 & 31 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 21 & 1 \\ 4 & 11 & 3 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_{YZ} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XY}+\mathbf{M}_{NY} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 15 & 6 & 31 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 21 & 1 \\ 4 & 11 & 3 & 17 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 12 & 27 & 36 & 14 \\ 6 & 30 & 54 & 21 \\ 2 & 10 & 12 & 4 \\ 14 & 58 & 105 & 37 \\ 10 & 46 & 79 & 29 \\ 14 & 43 & 57 & 20 \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XY}+\mathbf{M}_{NY})\mathbf{M}_{YZ}.$$

$$\mathbf{M}_{XZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{NX} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XZ}.$$

Így a teljes termelés technológiai mátrixa:

$$\mathbf{M}_{NZ} = (\mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XY}+\mathbf{M}_{NY})\mathbf{M}_{YZ}+\mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XZ} = \begin{bmatrix} 14 & 27 & 40 & 14 \\ 9 & 30 & 60 & 21 \\ 2 & 11 & 12 & 4 \\ 14 & 62 & 114 & 37 \\ 12 & 48 & 86 & 29 \\ 15 & 46 & 59 & 20 \end{bmatrix}.$$

A gyár által szállítandó alkatrészek anyagszükséglete a következő: az X_1, X_2, X_3 alkatrészeké:

$$\mathbf{u}_X = \mathbf{M}_{NX}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 200 \\ 2000 \\ 1000 \\ 700 \end{bmatrix};$$

és az Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 alkatrészeké:

$$\mathbf{u}_Y = (\mathbf{M}_{NX}\mathbf{M}_{XY}+\mathbf{M}_{NY})\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 15 & 6 & 31 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 21 & 1 \\ 4 & 11 & 3 & 17 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3100 \\ 3300 \\ 900 \\ 6600 \\ 5000 \\ 4500 \end{bmatrix}.$$

A szállítandó végtermékek anyagszükséglete:

$$\mathbf{u}_Z = \mathbf{M}_{NZ}\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 14 & 27 & 40 & 14 \\ 9 & 30 & 60 & 21 \\ 2 & 11 & 12 & 4 \\ 14 & 62 & 114 & 37 \\ 12 & 48 & 86 & 29 \\ 15 & 46 & 59 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99\,400 \\ 124\,500 \\ 30\,800 \\ 235\,100 \\ 181\,900 \\ 147\,400 \end{bmatrix}.$$

A teljes szállítás anyagszükséglete tehát:

$$\mathbf{u}_X + \mathbf{u}_Y + \mathbf{u}_Z = \begin{bmatrix} 102700 \\ 128100 \\ 31900 \\ 243007 \\ 187900 \\ 152600 \end{bmatrix},$$

vagyis az egyes nyersanyagokból a következő mennyiségek szükségesek a gyártási program teljesítéséhez:

$N_1 = 102\,700$ egység; $N_4 = 243\,700$ egység;

$N_2 = 128\,100$ egység; $N_5 = 187\,900$ egység;

$N_3 = 31\,900$ egység; $N_6 = 152\,600$ egység.

2. A négyzetes mátrix determinánsa, a mátrix rangja, a mátrix elemi átalakításai

a) **A négyzetes mátrix determinánsa.** Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

négyzetes mátrix determinánsán az elemeiből képezett determinánst értjük, amelyet $|\mathbf{A}|$-val vagy det $\mathbf{A}$-val jelölünk:

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A determináns felírásakor tehát a mátrix minden elemét a helyén hagyjuk.

Ha det $\mathbf{A} \neq 0$, akkor $\mathbf{A}$ *reguláris* vagy *nem szinguláris;* ha det $\mathbf{A} = 0$, akkor $\mathbf{A}$ *szinguláris.*

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix reguláris, mert

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 8 + 6 - (8 + 4 + 18) = -4.$$

A mátrix determinánsának a mátrixok körében hasonló szerepe van, mint az abszolút értéknek a számok körében.

Könnyen látható, hogy

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^*|; \qquad |\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

b) **A mátrix rangja.** Minden nem zérus mátrixhoz egyértelműen hozzárendelhető egy természetes szám, *a mátrix rangja.*

Az $\mathbf{A}$ mátrix ragja akkor r, ha r-edrendű kvadratikus minormátrixai között van legalább egy reguláris és minden $(r+1)$-edrendű [valamint ebből következően minden $(r+1)$-nél magasabb rendű] minormátrixa szinguláris.

A definícióból következik, hogy az $n \cdot m$ típusú mátrix rangja nem lehet nagyobb sem sorai, sem oszlopai számánál.

A zérusmátrix rangja 0. Ha egy mátrix rangja 0, akkor abból következik, hogy a mátrix zérusmátrix.

Az $\mathbf{A}$ mátrix rangját $\varrho(\mathbf{A})$-val jelöljük.

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja $\varrho(\mathbf{A}) = 2$, mert

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{de} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Két mátrix összegének és szorzatának rangjára vonatkozólag a következők bizonyíthatók be:

Két mátrix összegmátrixának a rangja nem nagyobb a tagok rangjának összegénél:

$$\varrho(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqq \varrho(\mathbf{A})+\varrho(\mathbf{B});$$

szorzás által a rang nem növekszik:

$$\varrho(\mathbf{AB}) \leqq \varrho(\mathbf{A}); \qquad \varrho(\mathbf{AB}) \leqq \varrho(\mathbf{B}).$$

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrixokra $\varrho(\mathbf{A}) = 2$, $\varrho(\mathbf{B}) = 2$. Szorzatukat kiszámítva:

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|l} \multicolumn{4}{r|}{\mathbf{B} =} & 1 & 2 & 3 & \\ \multicolumn{4}{r|}{} & 1 & 2 & 5 & \\ \multicolumn{4}{r|}{} & 2 & 4 & 8 & \\ \cline{2-7} & 1 & 2 & 3 & 9 & 18 & 37 & \\ \mathbf{A} = & -4 & 0 & 5 & 6 & 12 & 28 & = \mathbf{AB} \\ \cline{2-7} & -3 & 2 & 8 & 15 & 30 & 65 & \\ \cline{2-7} \end{array}$$

és $\quad \varrho(\mathbf{AB}) = 2.$

A mátrix rangjának fontos szerepe van az alkalmazásokban, de kiszámítása a definíció alapján nagy elemszámú mátrixok esetén nagyon fáradságos. Egyik egyszerűbb kiszámítási mód, ha a mátrixon olyan átalakításokat hajtunk végre, amelyek a rangjának kiszámításához szükséges determinánsok zérus vagy nem zérus voltát és ezzel a mátrix rangját nem befolyásolják, de magát a mátrixot egyszerűbbé — pl. sok zérus elemet tartalmazó mátrixszá — alakítják.

Négyzetes mátrix esetében célszerű a mátrixot háromszögmátrixszá alakítani, mert ennek determinánsának értéke a főátlóban álló elemek szorzata. Ha az n-edrendű háromszögmátrix főátlójában csupa zérustól különböző elem áll, akkor a mátrix determinánsának értéke nem zérus, és a mátrix rangja éppen n.

c) **A mátrix elemi átalakításai.** Most a mátrixok átalakításához felhasználható *elemi átalakításokat* soroljuk fel:

α) A mátrix i-edik és j-edik sorának felcserélése; jele: H_{ij}.
β) A mátrix i-edik és j-edik oszlopának a felcserélése; jele: K_{ij}.
γ) Az i-edik sor elemeinek egy $c \neq 0$ számmal való szorzása; jele: $H_i(c)$.
δ) Az i-edik oszlop elemeinek egy $c \neq 0$ számmal való szorzása; jele: $K_i(c)$.
ε) A j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz való adása; jele: $H_{ij}(c)$.
ζ) A j-edik oszlop c-szeresének az i-edik oszlophoz való adása; jele: $K_{ij}(c)$.

A H átalakításokat *elemi sorátalakításoknak*, a K átalakításokat *elemi oszlopátalakításoknak* nevezzük.

A mátrixok rangjának megállapítására a későbbiekben még más módszert is látunk.

Az **A** *mátrixot akkor nevezzük hasonlónak a* **B** *mátrixhoz,* jelben $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, *ha az egyik mátrix a másikból elemi átalakításokkal megkapható.*

Miként az a II. fejezet **35—42.** Gyakorló feladataiban látható, valamennyi elemi átalakítás speciális mátrixok szorzásával is elérhető.

Például harmadrendű mátrixok esetén néhány elemi átalakításnak a következő mátrixokkal való szorzás felel meg:

$$\text{A } H_{12} \text{ átalakításnak a } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ mátrixszal balról;}$$

a K_{23} átalakításnak az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal jobbról;

a $H_3(c)$ átalakításnak az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ mátrixszal balról;

a $H_{12}(-2)$ átalakításnak az $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixszal balról;

a $K_{32}(1)$ átalakításnak az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixszal jobbról

való szorzás felel meg.

d) **Mátrix normálformája.** Bármilyen **A** mátrix, amelynek rangja $\varrho(\mathbf{A}) > 0$, elemi átalakításokkal az

$$\mathbf{E}_r; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{E}_r, \mathbf{0}]: \quad \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

mátrixok valamelyikére alakítható át. Ez utóbbiakat az **A** mátrix *normálformájá*nak nevezik.

Gyakorló feladatok

1. Reguláris-e az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix?

Mivel a mátrix determinánsa

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -6 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(ugyanis két sora megegyezik), a mátrix nem reguláris, hanem szinguláris.

2. Mutassuk meg, hogy $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^*|$.

$\mathbf{A}^*$ úgy keletkezett **A**-ból, hogy **A** sorait és oszlopait egymással felcseréltük. Ha azonban egy determináns sorait és oszlopait felcseréljük egymással, a determináns értéke nem változik, így

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^*|.$$

3. Mutassuk meg, hogy $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.

Az **AB** mátrix — és így az $|\mathbf{AB}|$ determináns — tetszőleges c_{ij} eleme az **A** mátrix (és egyúttal az $|\mathbf{A}|$ determináns) i-edik sorának és a **B** mátrix ($|\mathbf{B}|$ determináns) j-edik oszlopának kompozíciója. De ugyanez áll az $|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$ szorzatdetermináns c_{ij} eleme helyén, ha az $|\mathbf{A}|$ és $|\mathbf{B}|$ determinánsokat sor—oszlopszorzással szorozzuk össze; így valóban

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

4. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Felhasználva, hogy $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$, mutassuk meg, hogy

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = (a_1b_1-a_2b_2)^2+(a_2b_1+a_1b_2)^2.$$

Egyrészt

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1-a_2b_2 & a_1b_2+a_2b_1 \\ -a_2b_1-a_1b_2 & -a_2b_2+a_1b_1 \end{bmatrix},$$

így

$$|\mathbf{AB}| = (a_1b_1-a_2b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2;$$

másrészt

$$|\mathbf{A}| = a_1^2+a_2^2, \qquad |\mathbf{B}| = b_1^2+b_2^2, \qquad |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}| = (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2),$$

amiből állításunk már következik.

5. Számítsuk ki a következő mátrix rangját:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

I. Megoldás:

Mivel

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+18+12-(9+4+6) = 12 \neq 0,$$

a mátrix rangja $\varrho(\mathbf{A})=3$.

II. Megoldás:

Meghatározhatjuk az előbbi mátrix rangját háromszögmátrixszá alakítással is!

Alkalmazzuk a $H_{21}(-2)$ és $H_{31}(-3)$, majd a $H_2(-\frac{1}{3})$ és $H_3(-\frac{1}{4})$, végül a $H_{32}(-1)$ elemi átalakításokat; ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

ez utóbbi mátrixról már látható, hogy rangja 3, hiszen determinánsának értéke (a főátlóban álló elemek szorzata) $1 \neq 0$.

6. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját!

Mivel

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \\ 0 & -2 & 13 \end{bmatrix} = 0,$$

és A-nak van olyan minormátrixa, pl.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

amelynek determinánsa nem 0, ezért $\varrho(\mathbf{A})=2$.

7. Mekkora az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja?

Mivel $|\mathbf{A}| = 0$ és valamennyi másodrendű minormátrixának determinánsa is 0 (hiszen vagy egyik oszlopukban minden elem zérus, vagy egyik soruk a másiknak többszöröse), de nem minden elem zérus, ezért $\varrho(\mathbf{A}) = 1$.

8. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját!

Alkalmazzuk a $K_{21}(-1)$, $K_{31}(-1)$, $K_{41}(-1)$ és $K_{51}(-1)$ elemi oszlopátalakításokat, ekkor

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Most a $H_{21}(-1)$, $H_{31}(-1)$, $H_{41}(-1)$, $H_{51}(-1)$ elemi sorátalakításokat hajtjuk végre:

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Erről az alakról már közvetlenül látható, hogy a mátrix rangja $\varrho(\mathbf{A})=2$. Ugyanis van egyetlen másodrendű nem zérus aldeterminánsa — mégpedig a bal felső sarokban álló. Viszont az összes harmadrendű aldetermináns zérus, mivel vagy van csupa zérusból álló sora, ill. oszlopa, vagy pedig (a bal felső sarokdetermináns esetében) a Sarrus-szabállyal kapott tagok mindegyike zérus.

Ha ennek a mátrixnak a rangját a definíció alapján akartuk volna kiszámolni, akkor egyetlen ötödrendű, $\binom{25}{1}=25$ negyedrendű, $\binom{5}{2}\binom{5}{2} = 100$ harmadrendű és valahány másodrendű determinánst kellett volna kiszámítanunk, ugyanis mindezekről be kellett volna látnunk, hogy értékük 0, ill. egy másodrendűről, hogy nem zérus.

Vegyük észre, hogy a csupa 0-t tartalmazó sorok és oszlopok az átalakítások során el is hagyhatók, elhagyásuk nem befolyásolja a mátrix rangját.

9. Mutassuk meg alkalmas elemi átalakításokkal, hogy $\varrho(\mathbf{A})=2$, ha

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ha rendre a $H_{41}(-2)$, $H_{31}(-2)$, $H_{32}(1)$ elemi átalakításokat végezzük el, akkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ -2 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó mátrixról már látható, hogy minden harmadrendű minormátrixának determinánsa 0, de van 0-tól különböző másodrendű aldetermináns, például

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

ezért $\varrho(\mathbf{A})=2$.

10. Alakítsuk át háromszögmátrixszá az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrixot és állapítsuk meg a rangját!

Az alábbi elemi átalakításokat hajtjuk először egyetlen lépésben végre: $H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$, $H_{41}(-6)$, majd rendre a H_{23}, $H_{42}(-1)$ és $H_{43}(-1)$ átalakításokat. Így

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó lépésben a csupa zérust tartalmazó utolsó sort hagytuk el. Az átalakítás sikerült, a mátrix rangja $\varrho(\mathbf{A})=3$, mert az utolsó (harmadrendű) háromszögmátrix főátlójában csupa zérustól különböző elem áll.

11. Legyen $\mathbf{A}$ egy harmadrendű mátrix. Milyen mátrixszal kell $\mathbf{A}$-t megszorozni, hogy elemeire a $H_{23}(-2)$ és $K_{13}(3)$ átalakítás teljesüljön? Ellenőrizzük a felírt eredményt a szorzás végrehajtása útján!

A $H_{23}(-2)$ elem átalakításnak a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal balról, a $K_{13}(3)$ átalakításnak a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal jobbról való szorzás felel meg.

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & \mathbf{A}= & & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & & & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & -2 & a_{21}-2a_{31} & a_{22}-2a_{32} & a_{23}-2a_{33} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

				1	0	0
				0	1	0
				3	0	1
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$a_{11}+3a_{13}$	a_{12}	a_{13}
A =	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$a_{21}+3a_{23}$	a_{22}	a_{23}
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$a_{31}+3a_{33}$	a_{32}	a_{33}

12. Határozzuk meg háromszögmátrixszá való átalakítással az

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}$$

mátrix rangját!

Az átalakítások sorrendje: $H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$, $K_{23}(-1)$.

			A =	1	3	2				
				2	4	3				
				3	7	4				
	1	0	0	1	3	2	1	0	0	
$H_{21}(-2)$	−2	1	0	0	2	−1	0	1	0	$K_{23}(-1)$
	0	0	1	3	7	4	0	−1	1	
	1	0	0	1	3	2	1	3	−1	
$H_{31}(-3)$	0	1	0	0	2	−1	0	3	−1	
	−3	0	1	0	−2	−2	0	0	−2	

Az utolsó háromszögmátrixról már látható, hogy $\varrho(A)=3$. Ebben az esetben a determináns kiszámítása egyszerűbb lett volna.

13. Állapítsuk meg az

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 5 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 5 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

mátrix rangját!

I. Megoldás:

A cél elérése érdekében a mátrixot háromszögmátrixszá alakítjuk át. Az elemi átalakításokat speciális mátrixok szorzásával érjük el.

					1	2	−1	2								
				A =	2	5	−2	3								
					1	2	−1	−2								
					0	5	0	3								
	1	0	0	0	1	2	−1	2								
$H_{21}(-2)$	−2	1	0	0	0	1	0	−1								
	0	0	1	0	1	2	−1	−2								
	0	0	0	1	0	5	0	3								
	1	0	0	0	1	2	−1	2								
$H_{31}(-1)$	0	1	0	0	0	1	0	−1								
	−1	0	1	0	0	0	0	−4								
	0	0	0	1	0	5	0	3		K_{34}				$K_{41}(1)$		
	1	0	0	0	1	2	−1	2	1	0	0	0	1	0	0	1
$H_{42}(-5)$	0	1	0	0	0	1	0	−1	0	1	0	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	−4	0	0	0	1	0	0	1	0
	0	−5	0	1	0	0	0	8	0	0	1	0	0	0	0	1
	1	0	0	0	1	2	−1	2	1	2	2	−1	1	2	2	0
$H_{43}(2)$	0	1	0	0	0	1	0	−1	0	1	−1	0	0	1	−1	0
	0	0	1	0	0	0	0	−4	0	0	−4	0	0	0	−4	0
	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A mátrix rangja nem változik, ha a csupa zérust tartalmazó sorát és oszlopát elhagyjuk. A megmaradó harmadrendű háromszögmátrix főátlójában nincs zérus elem, így rangja 3 és egyúttal $\varrho(A)=3$.

II. Megoldás:

A determinánsát utolsó sora szerint kifejtve,

$$\det A = 5\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix} = 0,$$

mivel mindkét harmadrendű determináns értéke 0 (két-két oszlopuk — előjeltől eltekintve — megegyezik). Viszont pl. a jobb alsó sarokbeli harmadrendű aldeterminánst tekintve:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15+20-(-15)-(-12) \neq 0,$$

tehát $\varrho(\mathbf{A})=3$.

14. Keressük meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix normálformáját!

Minél több zérus és egységelem elérése céljából rendre a következő elemi átalakításokat alkalmazzuk: $H_{21}(-1)$, $H_{31}(2)$; majd $K_{21}(-2)$, $K_{41}(1)$, ezután K_{23}, majd $H_{32}(-2)$, továbbá $K_{32}(2)$, $K_{42}(-5)$, ezt követően $K_3\left(\frac{1}{11}\right)$, $K_{43}(7)$.

Amikor lehetséges, két-két elemi átalakítást összevonunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{E}_3, \mathbf{0}].$$

15. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$

mátrix normálformáját!

A normálformájához pl. a következő átalakításokkal juthatunk el: H_{12}, $K_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $H_{31}(-2)$, majd egy lépésben $K_{21}(-3)$, $K_{31}(-5)$, $K_{41}(-4)$, utána $K_2\left(\frac{1}{2}\right)$, $K_{32}(-3)$, $K_{42}(-4)$, végül $H_{32}(-1)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

3. A négyzetes mátrix adjungáltja és inverze

1. Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix *adjungált mátrixának* vagy röviden *adjungáltjának* nevezzük az

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \operatorname{adj} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol A_{ij} az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának a_{ij} eleméhez tartozó (előjeles) aldeterminánsa. Külön kiemeljük, hogy adj $\mathbf{A}$ i-edik sorának k-adik eleme az $|\mathbf{A}|$ determináns k-adik sora i-edik eleméhez tartozó előjeles aldetermináns, vagyis adj $\mathbf{A}$ az

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{bmatrix}.$$

mátrix *transzponáltja.*

Megjegyezzük, hogy diagonális mátrix, háromszögmátrix, szimmetrikus mátrix, hermitikus mátrix adjungáltja is ugyanolyan típusú.

A műveletek elvégzésével igazolható, hogy

$$\mathbf{A} \cdot (\operatorname{adj} \mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E} \quad \text{és} \quad (\operatorname{adj} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}.$$

2. Ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, és $|\mathbf{A}| \neq 0$, akkor $\mathbf{A}$ *inverz mátrixán* vagy *reciprok mátrixán* azt az $\mathbf{A}^{-1}$ szimbólummal jelölt mátrixot értjük, amelyre

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

Az 1. alatt adott összefüggésből következik, hogy a jobb- és baloldali inverz mátrix megegyezik, és

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}.$$

Az $|\mathbf{A}| \neq 0$ feltétel azt jelenti, hogy csak reguláris mátrixnak van inverz mátrixa.

A definíció alapján könnyen belátható, hogy

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}; \quad (\mathbf{A}^{-1})^{*}=(\mathbf{A}^{*})^{-1}; \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1};$$

továbbá a szimmetrikus mártix inverze szimmetrikus, a háromszögmátrix inverze háromszögmátrix.

Az inverz mátrix kiszámítására most egy másik módszert is mutatunk.

Ha az $\mathbf{A}$ mátrixra $T_1, T_2, \ldots, T_r$ elemi sorátalakítások olyan sorozatát alkalmazzuk, amelyeknek eredménye az egységmátrix, azaz

$$(T_r \ldots T_2 T_1)\mathbf{A} = \mathbf{E},$$

akkor ugyanezeket az elemi sorátalakitásokat ugyanebben a sorrendben az egységmátrixra alkalmazva, éppen $\mathbf{A}$ inverz mátrixát kapjuk, vagyis

$$(T_r \ldots T_2 T_1)\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Ha a T átalakításokat speciális mátrixok szorzásával érjük el, akkor az inverz mátrix e speciális mátrixok ugyanolyan sorrendben vett szorzata:

$$\mathbf{T}_r \ldots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 = \mathbf{A}^{-1}.$$

Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 6 & -8 & 15 \\ 10 & -15 & 34 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét ilyen módszerrel!

A könnyebb áttekinthetőség érdekében leírjuk egymás mellé az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{E}_3$ mátrixokat, és mindig mindkettőn egyszerre végezzük el az elemi sorátalakításokat. A feladatot akkor oldottuk meg, ha az

$$[\mathbf{A}][\mathbf{E}_3] \quad \text{mátrixpárt az } [\mathbf{E}_3][\mathbf{A}^{-1}]$$

mátrixpárrá alakítottuk át, akkor ui. a jobb oldali mátrix már az inverz mátrix. Az alkalmazott elemi sorátalakítások jelét most a mátrixok alá fogjuk írni.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 6 & -8 & 15 \\ 10 & -15 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$H_{21}(3)\, H_{31}(5)$

$$\sim \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$H_1(-1)\, H_3(-1)$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$H_{13}(-7)\, H_{23}(6)$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 & 0 & 7 \\ -27 & 1 & -6 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$H_{12}(3)$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -47 & 3 & -11 \\ -27 & 1 & -6 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$H_1(\frac{1}{2})$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -23{,}5 & 1{,}5 & -5{,}5 \\ -27 & 1 & -6 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -23{,}5 & 1{,}5 & -5{,}5 \\ -27 & 1 & -6 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megfelelő gyakorlat után már felesleges az elemi sorátalakításokat részletesen kiírni, elegendő a hasonló mátrixokat egymás után leírni. További egyszerűsítés érhető el, ha az átalakítandó mátrixból azokat az oszlopokat, amelyek már az egységmátrix oszlopai, nem írjuk mindig le. Ilyenkor arra érdemes törekedni, hogy az a_{11} elem, majd az a_{22} elem helyén minél előbb 1-es álljon.

3. Az inverz mátrix segítségével *osztás* a mátrixok körében is értelmezhető. Nevezetesen az

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

egyenlőségből

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B};$$

és az $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$

egyenlőségből

$$\mathbf{Y} = \mathbf{BA}^{-1}.$$

Az osztás eredménye tehát függ az osztandó és osztó sorrendjétől.

Az inverz mátrix egyik legfontosabb alkalmazása a lineáris egyenletrendszerek megoldása során lép fel, ezzel később foglalkozunk.

4. Ha az $\mathbf{A}$ mátrixra speciálisan teljesül az

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^* = \overline{\mathbf{A}}^*\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

feltétel, akkor *unitér mátrixnak* nevezzük.

Két ugyanolyan rendű unitér mátrix szorzata szintén unitér mátrix.

Ha az $\mathbf{A}$ unitér mátrix elemei valós számok, akkor $\overline{\mathbf{A}}^* = \mathbf{A}^*$ és

$$\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrixot *ortogonális mátrixnak* nevezzük. Az ortogonális mátrix tehát az unitér mátrix speciális esete.

Egy ortogonális mátrix transzponált mátrixa, valamint inverz mátrixa szintén ortogonális; két (vagy több) ortogonális mátrix szorzata ismét ortogonális.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix adjungált mátrixát!

A szükséges aldeterminánsok:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Így **A** adjungáltja:

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix adjungáltját!

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Ellenőrizzük, hogy ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}!$$

Valóban

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ebből adj **A** már felírható:

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Győződjünk meg arról, hogy ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}!$$

Számítsuk ki a szükséges aldeterminánsokat:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{24} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{34} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{42} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{44} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10.$$

Tehát valóban

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0&-2\\2&6&0&-16\\1&0&3&-5\\-2&0&0&10\end{bmatrix}.$$

5. Az 1. Gyakorló feladat **A** mátrixára mutassuk meg, hogy $\mathbf{A}(\operatorname{adj}\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|\,\mathbf{E}_3$!

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&3&4\end{vmatrix}=-7.$$

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|l}
\cline{5-7}
\operatorname{adj}\mathbf{A}= & & & & 6 & 1 & -5 & \\
 & & & & -2 & -5 & 4 & \\
 & & & & -3 & 3 & -1 & \\
\hline
\mathbf{A}= & 1&2&3 & -7&0&0 & \\
 & 2&3&2 & 0&-7&0 & =-7\mathbf{E}_3.\\
 & 3&3&4 & 0&0&-7 & \\
\hline
 & 6&8&9 & -7&-7&-7 & \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

6. Mutassuk meg az **1.** Gyakorló feladat **A** mátrixára, hogy

$$|\mathbf{A}|\cdot|\operatorname{adj}\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^n = |\operatorname{adj}\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}|.$$

Az egyenlőségnek csupán a bal oldalára szorítkozva, sor—oszlop-szorzással

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&3&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}6&1&-5\\-2&-5&4\\-3&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&0&0\\0&-7&0\\0&0&-7\end{vmatrix}=(-7)^3.$$

Az **5.** Gyakorló feladatból viszont tudjuk, hogy $|\mathbf{A}|=-7$.

7. Igazoljuk, hogy a harmadrendű reguláris

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&3&4\end{bmatrix}$$

mátrix esetében

$$|\operatorname{adj}\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|^2.$$

Az első feladatban láttuk, hogy

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6&1&-5\\-2&-5&4\\-3&3&-1\end{bmatrix}.$$

Mivel

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&3&4\end{vmatrix}=(12+12+18)-(27+16+6)=-7,$$

és

$$|\operatorname{adj}\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}6&1&-5\\-2&-5&4\\-3&3&-1\end{vmatrix}=30-12+30-(-75+2+72)=49,$$

ezért valóban

$$|\operatorname{adj}\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|^2.$$

8. Mutassuk meg az előző feladat **A** mátrixára, hogy

$$|\operatorname{adj}(\operatorname{adj}\mathbf{A})|=|\mathbf{A}|^4.$$

Az első feladatban láttuk, hogy

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6&1&-5\\-2&-5&4\\-3&3&1\end{bmatrix},$$

így

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}\mathbf{A})=\begin{bmatrix}-7&-14&-21\\-14&-21&-14\\-21&-21&-28\end{bmatrix}$$

és

$$|\operatorname{adj}(\operatorname{adj}\mathbf{A})|=\begin{vmatrix}-7&-14&-21\\-14&-21&-14\\-21&-21&-28\end{vmatrix}=(-7)(-7)(-7)\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&3&4\end{vmatrix}=$$

$$=(-7)^4.$$

9. Mutassuk meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&-2&1\\4&1&-3\\-6&4&-2\end{bmatrix}$$

szinguláris mátrixra, hogy

$$\mathbf{A}(\operatorname{adj}\mathbf{A})=\mathbf{0}.$$

A adjungáltja:

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 26 & 0 & 13 \\ 22 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{5-7}
\multicolumn{4}{r|}{} & 10 & 0 & 5 & \\
\multicolumn{4}{r|}{\operatorname{adj}\mathbf{A} =} & 26 & 0 & 13 & \\
\multicolumn{4}{r|}{} & 22 & 0 & 11 & \\
\hline
 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
\mathbf{A} = & 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & = \mathbf{A}(\operatorname{adj}\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \\
 & -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & \\
\cline{2-7}
 & 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

10. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{adj}\mathbf{AB} = (\operatorname{adj}\mathbf{B})(\operatorname{adj}\mathbf{A}).$$

Az első, ill. második gyakorló feladatban láttuk, hogy

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \operatorname{adj}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{5-7}
\multicolumn{4}{r|}{} & 1 & 2 & 3 & \\
\multicolumn{4}{r|}{\mathbf{B} =} & 1 & 3 & 4 & \\
\multicolumn{4}{r|}{} & 1 & 4 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 6 & 20 & 20 & \\
\mathbf{A} = & 2 & 3 & 2 & 7 & 21 & 24 & = \mathbf{AB}, \\
 & 3 & 3 & 4 & 10 & 31 & 33 & \\
\cline{2-7}
 & 6 & 8 & 9 & 23 & 72 & 77 & \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

ezért

$$\operatorname{adj}\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -51 & -40 & 60 \\ 9 & -2 & -4 \\ 7 & 14 & -14 \end{bmatrix}.$$

Másrészt

$$\begin{array}{r|rrr|rrr|l}
\cline{5-7}
\multicolumn{4}{r|}{} & 6 & 1 & -5 & \\
\multicolumn{4}{r|}{\operatorname{adj}\mathbf{A} =} & -2 & -5 & 4 & \\
\multicolumn{4}{r|}{} & -3 & 3 & -1 & \\
\hline
 & -7 & 6 & -1 & -51 & -40 & 60 & \\
\operatorname{adj}\mathbf{B} = & 1 & 0 & -1 & 9 & -2 & -4 & = (\operatorname{adj}\mathbf{B})(\operatorname{adj}\mathbf{A}), \\
 & 1 & -2 & 1 & 7 & 14 & -14 & \\
\cline{2-7}
 & -5 & 4 & -1 & -35 & -28 & 42 & \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

ami állításunkat igazolja.

11. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ másodrendű négyzetes mátrix, vagyis $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, akkor adj (adj $\mathbf{A}$) $= \mathbf{A}$.

Mivel itt $A_{11} = a_{22}$; $A_{12} = -a_{21}$; $A_{21} = -a_{12}$ és $A_{22} = a_{11}$, ezért

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}, \quad \text{és így} \quad \operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -a_{22} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix},$$

tehát a főátlóban álló két elem helyet cserélt, a mellékátlóban álló két elem pedig előjelet változtatott. Ezt megismételve adj $\mathbf{A}$-ra, adódik

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

12. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix adjungáltja önmaga!

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Azt a mátrixot, amelynek adjungáltja önmaga, *önadjungált mátrixnak* nevezzük.

13. Ellenőrizzük, hogy ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

akkor adj $\mathbf{A} = 3\mathbf{A}^*$.

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{A}^*.$$

14. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

mátrix adjungáltját!

Mivel **A** szimmetrikus, így $A_{ik} = A_{ki}$, vagyis adj **A** is szimmetrikus; ezért nem szükséges pl. a főátló fölötti elemeket külön kiszámítani.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -9; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -41;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -17; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -39;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

tehát

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & -41 & -17 \\ -41 & -39 & 7 \\ -17 & 7 & -11 \end{bmatrix}.$$

15. Igazoljuk, hogy ha egy n-edrendű $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ mátrix rangja $\varrho(\mathbf{A}) < n-1$, akkor adj $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Ha $\varrho(\mathbf{A}) < n-1$, akkor az **A** mátrix elemeiből képezhető valamennyi $(n-1)$-edrendű minormátrix determinánsának értéke 0, így az adj **A** mátrixban szereplő valamennyi elem zérus, tehát valóban adj $\mathbf{A} = 0$.

16. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

Mivel

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9+8+12-(9+16+6) = -2 \neq 0,$$

az inverz mátrix létezik.

A 2. Gyakorló feladatban már láttuk, hogy

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

így az inverz mátrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3{,}5 & -3 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

17. Számítsuk ki az előbbi feladat **A** mátrixának az inverzét elemi sorátalakítások segítségével is!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$H_{21}(-1)H_{31}(-1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$H_{12}(-2)H_{32}(-2)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}\sim$$

$H_3\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\\-0,5&1&-0,5\end{bmatrix}\sim$$

$H_{23}(-1),\quad H_{13}(-1)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3,5&-3&0,5\\-0,5&0&0,5\\-0,5&1&-0,5\end{bmatrix}.$$

Így

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3,5&-3&0,5\\-0,5&0&0,5\\-0,5&0&-0,5\end{bmatrix},$$

mint azt az előbb is láttuk.

18. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4&3&2\\3&6&5&2\\2&5&2&-3\\4&5&14&14\end{bmatrix}$$

mátrix inverz mátrixát!

Az inverz mátrix meghatározása aldeterminánsokkal negyedrendű determináns esetén már nem célszerű, hiszen egy negyedrendű és 16 db harmadrendű determinánst kellene kiszámolnunk. Lényegesen gyorsabban érünk célhoz, ha az elemi sorátalakítások módszerével dolgozunk.

$$\begin{bmatrix}2&4&3&2\\3&6&5&2\\2&5&2&-3\\4&5&14&14\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\sim$$

$H_1\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&1,5&1\\3&6&5&2\\2&5&2&-3\\4&5&14&14\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0,5&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\sim$$

$H_{21}(-3)H_{31}(-2)H_{41}(-4)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&1,5&1\\0&0&0,5&-1\\0&1&-1&-5\\0&-3&8&10\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0,5&0&0&0\\-1,5&1&0&0\\-1&0&1&0\\-2&0&0&1\end{bmatrix}\sim$$

H_{23}

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&1,5&1\\0&1&-1&-5\\0&0&0,5&-1\\0&-3&8&10\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0,5&0&0&0\\-1&0&1&0\\-1,5&1&0&0\\-2&0&0&1\end{bmatrix}\sim$$

$H_{12}(-2)H_{42}(3)H_3(2)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&3,5&11\\0&1&-1&-5\\0&0&1&-2\\0&0&5&-5\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2,5&0&-2&0\\-1&0&1&0\\-3&2&0&0\\-5&0&3&1\end{bmatrix}\sim$$

$H_{13}(-3,5)H_{23}(1)H_{43}(-5)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&18\\0&1&0&-7\\0&0&1&-2\\0&0&0&5\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}13&-7&-2&0\\-4&2&1&0\\-3&2&0&0\\10&-10&3&1\end{bmatrix}\sim$$

$H_4(0,2)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&18\\0&1&0&-7\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}13&-7&-2&0\\-4&2&1&0\\-3&2&0&0\\2&-2&0,6&0,2\end{bmatrix}\sim$$

$H_{14}(-18)H_{24}(7)H_{34}(2)$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-23&29&-12,8&-3,6\\10&-12&5,2&1,4\\1&-2&1,2&0,4\\2&-2&0,6&0,2\end{bmatrix}.$$

Így

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & 29 & -12{,}8 & -3{,}6 \\ 10 & -12 & 5{,}2 & 1{,}4 \\ 1 & -2 & 1{,}2 & 0{,}4 \\ 2 & -2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

19. Keressük meg az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó mátrix bal oldali részéből már látható, hogy a kívánt átalakítás nem hajtható végre, hiszen a mátrix egyik sorában csupa zérus áll.

Valóban

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 84-18+4-(-84-18+4) = 0;$$

a mátrix szinguláris, tehát nincs inverze.

20. Győződjünk meg arról, hogy ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Elemi átalakításokkal

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

H_{12}, $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_{41}(-2)$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -9 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$H_2(-0{,}2)$, $H_{12}(-3)$, $H_{32}(-5)$, $H_{42}(-9)$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1{,}8 \\ 0 & 1 & 1 & -1{,}6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1{,}8 & 1{,}6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$H_3(-0{,}5)$, $H_{13}(1)$, $H_{23}(-1)$, $H_{43}(-4)$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$H_4\left(\frac{5}{18}\right)$, $H_{14}(0{,}2)$, $H_{24}(-0{,}4)$ $H_{34}(2)$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{2}{18} \\ -\frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{11}{18} & \frac{10}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{2}{18} & \frac{10}{18} & \frac{5}{18} \end{bmatrix}.$$

Ebből A^{-1} már leolvasható.

21. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix},\quad \text{akkor}\quad \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}.$$

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&0&-1\\3&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

ezért az inverz mátrix létezik.

Mivel **A** szimmetrikus, három — például a főátló alatti — determináns kiszámítását megtakaríthatjuk:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4&5\\5&6\end{vmatrix}=-1;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}=3;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&6\end{vmatrix}=-3;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=1;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0.$$

Így

$$\mathbf{A}^{-1}=-\begin{bmatrix}-1&3&-2\\3&-3&1\\-2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}.$$

22. Bizonyítsuk be, hogy ha **A** négyzetes reguláris mátrix, akkor az **AB**=**AC** egyenlőségből **B**=**C** következik.

Szorozzuk meg balról az egyenlet mindkét oldalát $\mathbf{A}^{-1}$-gyel ($\mathbf{A}^{-1}$ létezik, mert $|\mathbf{A}|\neq 0$); akkor

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AC};$$

$$\mathbf{EB}=\mathbf{EC};$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}.$$

23. Bizonyítsuk be, hogy ha **A** szimmetrikus mátrix, és $\mathbf{A}^{-1}$ létezik, akkor $\mathbf{A}^{-1}$ is szimmetrikus!

I. Megoldás:

Belátandó, hogy $(\mathbf{A}^{-1})^*=\mathbf{A}^{-1}$. Egyrészt

$$(\mathbf{AA}^{-1})^*=(\mathbf{A}^{-1})^*\,\mathbf{A}^*=(\mathbf{A}^{-1})^*\,\mathbf{A},$$

másrészt

$$(\mathbf{AA}^{-1})^*=(\mathbf{E})^*=\mathbf{E},$$

tehát

$$(\mathbf{A}^{-1})^*\,\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

$\mathbf{A}^{-1}$-nel jobbról szorozva:

$$(\mathbf{A}^{-1})^*=\mathbf{A}^{-1}.$$

II. Megoldás:

Ha **A** szimmetrikus, akkor $A_{ki}=A_{ik}$, ennek következtében adj **A** is szimmetrikus. Az adjungált mátrixot az $|\mathbf{A}|$ skalárral osztva, a szimmetriatulajdonság fennmarad, tehát az eredményül adódó inverz mátrix szintén szimmetrikus.

24. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+i)&\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{3+i}{2\sqrt{15}}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{4+3i}{2\sqrt{15}}\\ \frac{1}{2}&-\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{5i}{2\sqrt{15}}\end{bmatrix}$$

mátrix unitér mátrix.

Mivel

$$\overline{\mathbf{U}^*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-i)&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ -\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{3}}\\ \frac{3-i}{2\sqrt{15}}&\frac{4-3i}{2\sqrt{15}}&-\frac{5i}{2\sqrt{15}}\end{bmatrix}.$$

ezért

$$\overline{\mathbf{U}^*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-i)&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ -\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{i}{\sqrt{3}}\\ \frac{3-i}{2\sqrt{15}}&\frac{4-3i}{2\sqrt{15}}&-\frac{5i}{2\sqrt{15}}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1+i)&\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{3+i}{2\sqrt{15}}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{4+3i}{2\sqrt{15}}\\ \frac{1}{2}&-\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{5i}{2\sqrt{15}}\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{E},$$

tehát **U** valóban unitér mátrix.

25. Bizonyítsuk be, hogy ha U_1 és U_2 unitér mátrixok, akkor U_1U_2 és U_2U_1 is unitér mátrix.

Felhasználva a II. fejezet **58.** és 73. Gyakorló feladatának eredményét,

$$(U_1U_2)(\overline{U_1U_2})^* = (U_1U_2)(\overline{U}_1\overline{U}_2)^* = (U_1U_2)(\overline{U}_2^*\overline{U}_1^*) =$$

$$= U_1U_2\overline{U}_2^*\overline{U}_1^* = U_1E\overline{U}_1^* = U_1\overline{U}_1^* = E,$$

amivel állításunk első részét beláttuk. A második rész teljesen hasonlóan látható be.

26. Mutassuk meg, hogy az

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix ortogonális, és hogy determinánsának értéke 1.

Az A mátrix transzponáltja

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

és ezért valóban

$$AA^* = E,$$

tehát A ortogonális. A determinánsa pedig:

$$|A| = \frac{4}{13} - \left(-\frac{9}{13}\right) = 1.$$

27. Bizonyítsuk be, hogy az A ortogonális mátrix determinánsának értéke $+1$ vagy -1.

Bármilyen mátrix esetében $|A| = |A^*|$, így $|A|^2 = |A|\cdot|A^*| = |A\cdot A^*|$. Ha A ortogonális, akkor $AA^* = E$, így $|A|^2 = |E| = 1$, amiből $|A| = \pm 1$.

Tegyük fel, hogy a gazdaság n ágazatra bontható fel, amelyek egy bizonyos időszakban rendre

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

értéket állítanak elő. A

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^*$$

oszlopvektor az ún. *bruttó kibocsátás vektora.* Ha az ágazatok által felhasznált értékeket egy $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrixszal (az ágazati kapcsolatok mátrixával) jellemezzük, ahol az a_{ij} elem azt jelenti, hogy az i-edik ágazat termelt értékéből mennyi szükséges a j-edik ágazat egységnyi termeléséhez, akkor az

$$\mathbf{Ab}$$

szorzatmátrix a *termelői fogyasztás vektora,* melynek komponensei rendre egy-egy ágazat termelt értékéből az összes ágazat termeléséhez szükséges felhasználást adják meg. A bruttó kibocsátás és a termelői fogyasztás vektorának különbsége:

$$\mathbf{b} - \mathbf{Ab} = \mathbf{Eb} - \mathbf{Ab} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{b} = \mathbf{n},$$

a *nettó kibocsátás vektora.* Az

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{b} = \mathbf{n}$$

egyenletet az *ágazati kapcsolatok mérlegegyenletének* szokás nevezni.

Sokszor azonban nem a nettó termelésre vagyunk kíváncsiak, hanem előírt $\mathbf{n}$ nettó kibocsátáshoz kell a $\mathbf{b}$ bruttó kibocsátást meghatároznunk. Ehhez szükséges, hogy az $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ mátrix reguláris mátrix legyen, vagyis inverze létezzék. Ekkor ugyanis

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{b} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{n}$$

alapján

$$\mathbf{b} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{n}.$$

28. Tekintsünk három iparágazatot. Az egyes ágazatok összes igényét, valamint teljes termelését az egyes időszakra az alábbi táblázat tartalmazza (millió forintban):

Ágazat	1	2	3	Teljes term.
1	240	72	140	800
2	80	264	180	600
3	–	120	400	1000

Írjuk fel az ágazati kapcsolatok mátrixát! Mekkorának kell lennie a bruttó termelésnek, ha azt akarjuk, hogy a nettó kibocsátás vektora

$$\mathbf{n} = [200, 500, 800]^*$$

legyen?

Az ágazati kapcsolatok mátrixának elemeit megkapjuk, ha az egyes ágazatok szükségleteit elosztjuk az illető ágazat teljes termelésével. Így

$$a_{11} = \frac{240}{800} = 0{,}30; \quad a_{12} = \frac{72}{600} = 0{,}12; \quad a_{13} = \frac{140}{1000} = 0{,}14;$$

$$a_{21} = \frac{80}{800} = 0{,}10; \quad a_{22} = \frac{264}{600} = 0{,}44; \quad a_{23} = \frac{180}{1000} = 0{,}18;$$

$$a_{31} = \frac{0}{800} = 0; \quad a_{32} = \frac{120}{600} = 0{,}20; \quad a_{33} = \frac{400}{1000} = 0{,}40.$$

Az ágazati kapcsolatok mátrixa tehát a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}12 & 0{,}14 \\ 0{,}10 & 0{,}44 & 0{,}18 \\ 0 & 0{,}20 & 0{,}40 \end{bmatrix}.$$

A keresett $\mathbf{b}$ kiszámításához először az $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ mátrixra van szükségünk:

$$\mathbf{E}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}12 & 0{,}14 \\ 0{,}10 & 0{,}44 & 0{,}18 \\ 0 & 0{,}20 & 0{,}40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}70 & -0{,}12 & -0{,}14 \\ -0{,}10 & 0{,}56 & -0{,}18 \\ 0 & -0{,}20 & 0{,}60 \end{bmatrix}.$$

Mivel $|\mathbf{E}-\mathbf{A}| = 0{,}2 \neq 0$, ezért az $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ inverz mátrix létezik, mégpedig

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{0{,}2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0{,}56 & -0{,}18 \\ -0{,}20 & 0{,}60 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0{,}12 & -0{,}14 \\ -0{,}20 & 0{,}60 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0{,}12 & -0{,}14 \\ 0{,}56 & -0{,}18 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0{,}10 & -0{,}18 \\ 0 & 0{,}60 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0{,}70 & -0{,}14 \\ 0 & 0{,}60 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0{,}70 & -0{,}14 \\ -0{,}10 & -0{,}18 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0{,}10 & 0{,}56 \\ 0 & -0{,}20 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0{,}70 & -0{,}12 \\ 0 & -0{,}20 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0{,}70 & -0{,}12 \\ -0{,}10 & 0{,}56 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 2{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 1{,}9 \end{bmatrix}.$$

A bruttó kibocsátás vektora tehát:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 2{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 1{,}9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 950 \\ 1670 \\ 1890 \end{bmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy az első ágazatnak 950 millió, a másodiknak 1670, a harmadiknak 1890 millió forint értékű árut kell termelnie ahhoz, hogy a fogyasztásra (nettó kibocsátás) ágazatonként rendre 200, 500, 800 millió forint értékű áru jusson.

29. Legyen három népgazdasági ágazat ágazati kapcsolatainak mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}125 \\ 0{,}12 & 0{,}11 & 0{,}275 \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy az egyes ágazatok termelésükhöz rendre termelt értékük 10%-, 30%-, 25%-ának megfelelő importot használnak fel. Ha azt akarjuk, hogy az egyes ágazatok rendre 200, 100, 220 millió forint értékű árut adjanak át a lakosság fogyasztása céljára, akkor mekkora értékű importról kell gondoskodnunk?

Először a bruttó kibocsátás vektorát határozzuk meg:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{n}.$$

$$\mathbf{E}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}80 & -0{,}10 & -0{,}25 \\ -0{,}10 & 0{,}95 & -0{,}125 \\ -0{,}12 & -0{,}11 & 0{,}725 \end{bmatrix};$$

$$|\mathbf{E}-\mathbf{A}| = 0{,}2;$$

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}350 & 0{,}20 & 0{,}50 \\ 0{,}175 & 1{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}250 & 0{,}20 & 1{,}50 \end{bmatrix}.$$

A bruttó kibocsátás vektora tehát:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1{,}350 & 0{,}20 & 0{,}50 \\ 0{,}175 & 1{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}250 & 0{,}20 & 1{,}50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 200 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

Az ágazatok importszükséglete az

$$\mathbf{i} = [0{,}10,\ 0{,}30,\ 0{,}25]$$

mátrixszal adható meg, ennélfogva a szükséges import:

$$I = \mathbf{ib} = [0{,}10,\ 0{,}30,\ 0{,}25]\begin{bmatrix}400\\200\\400\end{bmatrix} = 200,$$

azaz 200 millió forint értékű importról kell gondoskodnunk.

30. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}-1 & 7\\3 & 5\end{bmatrix},$$

oldjuk meg az

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

mátrixegyenleteket!

Az első egyenletből — balról végigszorozva $\mathbf{A}^{-1}$-gyel — $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ adódik. Mivel $|\mathbf{A}|=1\neq 0$, létezik $\mathbf{A}^{-1}$, mégpedig

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}3 & -2\\-4 & 3\end{bmatrix};$$

ezért

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix}3 & -2\\-4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 7\\3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9 & 11\\13 & -13\end{bmatrix}.$$

Hasonlóképpen a második egyenletből $\mathbf{Y}=\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$, vagyis

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 7\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\-4 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-31 & 23\\-11 & 9\end{bmatrix}.$$

4. A mátrix diadikus felbontása, a mátrix nyoma

1. Válasszuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \dots a_{1m}\\a_{21} & a_{22} \dots a_{2m}\\\dots & \dots\\a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nm}\end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

nem zérusmátrix egyik zérustól különböző, mondjuk $a_{i_1 j_1}\neq 0$ elemének oszlopát és sorát, és képezzük a mátrix e kiválasztott oszlopának és sorának a következő ún. *diadikus szorzatát:*

$$\frac{1}{a_{i_1 j_1}}\begin{bmatrix}a_{1j_1}\\a_{2j_1}\\\vdots\\a_{nj_1}\end{bmatrix}\cdot[a_{i_1 1}, a_{i_1 2}, \dots, a_{i_1 m}] = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*.$$

Ha ezt a diádot kivonjuk az $\mathbf{A}$ mátrixból, az $\mathbf{A}-\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \mathbf{A}'$ különbségmátrix i_1-edik sorában és j_1-edik oszlopában csupa 0 áll, és

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'+\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*.$$

Ha a kapott $\mathbf{A}'$ mátrix nem zérusmátrix, akkor van 0-tól különböző eleme; legyen $a_{i_2 j_2}$ ilyen elem, és alkalmazzuk az előbbi eljárást erre az elemre. Így

$$\mathbf{A}'-\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \mathbf{A}''$$

adódik, amiből

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}''+\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^*,$$

és az eredeti mátrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*+\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^*+\mathbf{A}''.$$

Ha $\mathbf{A}''$ ismét nem zérusmátrix, az eljárás tovább folytatható. Általában az eljárás $r\leqq n, m$ lépés után zérusmátrixhoz vezet, és ekkor

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*+\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^*+\dots+\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*,$$

vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix r számú diád összegére bontható, amit az $\mathbf{A}$ mátrix egy *diadikus felbontásának* nevezünk.

Például először válasszuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}4 & 3 & 1 & -3\\-1 & 6 & 2 & -1\\2 & -5 & 5 & 2\\-2 & -8 & 4 & 5\\3 & 9 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

mátrix harmadik oszlopának első elemét. Ekkor

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}1\\2\\5\\4\\3\end{bmatrix}[4, 3, 1, -3] = \begin{bmatrix}4 & 3 & 1 & -3\\8 & 6 & 2 & -6\\20 & 15 & 5 & -15\\16 & 12 & 4 & -12\\12 & 9 & 3 & -9\end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{A}-\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\-9 & 0 & 0 & 5\\-18 & -20 & 0 & 17\\-18 & -20 & 0 & 17\\-9 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix} = \mathbf{A}'.$$

$\mathbf{A}' \neq 0$, legyen a másodiknak kiválasztott elem, $a_{i_2j_2}=a_{34}$, ekkor

$$\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \frac{1}{17}\begin{bmatrix}0\\5\\17\\17\\5\end{bmatrix}[-18, -20, 0, 17] =$$

$$= \begin{bmatrix}0\\5/17\\1\\1\\5/17\end{bmatrix}[-18, -20, 0, 17] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\-\frac{90}{17} & -\frac{100}{17} & 0 & 5\\-18 & -20 & 0 & 17\\-18 & -20 & 0 & 17\\-\frac{90}{17} & -\frac{100}{17} & 0 & 5\end{bmatrix}$$

(a skalár szorzóval most az első tényezőt szoroztuk, de lehetett volna a másodikat is), és így

$$\mathbf{A}'-\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\-\frac{63}{17} & \frac{100}{17} & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\-\frac{63}{17} & \frac{100}{17} & 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{A}''.$$

$\mathbf{A}''$ ismét nem zérusmátrix, az eljárás tovább folytatható. Legyen $a_{i_3j_3}=a_{21}$. Ekkor

$$\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^* = -\frac{17}{63}\begin{bmatrix}0\\-\frac{63}{17}\\0\\0\\-\frac{63}{17}\end{bmatrix}\left[-\frac{63}{17}, \frac{100}{17}, 0, 0\right] =$$

$$= \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\left[-\frac{63}{17}, \frac{100}{17}, 0, 0\right] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\-\frac{63}{17} & \frac{100}{17} & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\-\frac{63}{17} & \frac{100}{17} & 0 & 0\end{bmatrix},$$

és ezzel

$$\mathbf{A}''-\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^* = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Példánkban az eljárás nem folytatható, és **A** egy diadikus felbontása:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 6 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 5 & 2 \\ -2 & -8 & 4 & 5 \\ 3 & 9 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} [4, 3, 1, -3] +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 5/17 \\ 1 \\ 1 \\ 5/17 \end{bmatrix} [-18, -20, 0, 17] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[-\frac{63}{17}, \frac{100}{17}, 0, 0 \right].$$

A diadikus felbontás *nem egyértelmű* művelet, ugyanannak a mátrixnak többféle diadikus felbontása is létezhet. Kimutatható azonban, hogy *ez az eljárás a lehető legkevesebb diádra való felbontáshoz* vezet, mégpedig annyi diádra, amekkora a mátrix rangja: $r = \varrho(\mathbf{A})$.

A felbontás során kapott

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^* = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*$$

diádösszeg szorzatként is felírható

$$\sum_{k=1}^{r} \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^* = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix}$$

alakban, ahol $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r]$ egy r oszlopból álló mátrix, amelynek oszlopai az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ oszlopvektorok, és

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix}$$

egy r sorból álló mátrix, amelynek sorai a $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \ldots \mathbf{v}_r^*$ sorvektorok.

2. Ha speciálisan egy r-edrendű projektor (idempotens) mátrixot bontunk fel diádok összegére:

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*,$$

akkor bebizonyítható, hogy a felbontásban szereplő $\mathbf{u}_k$ és $\mathbf{v}_k^*$ vektorok kielégítik a

$$\mathbf{v}_k^*\mathbf{u}_l = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad k \neq l; \\ 1, & \text{ha} \quad k = l \end{cases}$$

összefüggéseket. Az ilyen vektorokat *biortogonális vektoroknak* nevezzük. Az is bebizonyítható, hogy a projektormátrixokat *csak* olyan diádokra lehet felbontani, amelyeknek vektortényezői biortogonálisak.

3. *A mátrix nyoma* (Spur) a mátrix főátlójában álló elemek összegével egyenlő:

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Gyakorló feladatok

1. Bontsuk fel minimális számú diád összegére az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot, és határozzuk meg ily módon a rangját!

Válasszuk az első diád meghatározásához az $a_{35} = 1 \neq 0$ elemet. Ekkor

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} [3, -2, 4, -4, 1] = \begin{bmatrix} 15 & -10 & 20 & -20 & 5 \\ -3 & 2 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -4 & 1 \\ 12 & -8 & 16 & -16 & 4 \end{bmatrix},$$

és

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} -13 & 7 & -19 & 24 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 10 & -18 & 19 & 0 \end{bmatrix}.$$

Legyen az A′-ből választott elem $a_{22} = -1 \neq 0$; most

$$\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = -\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}[5, -1, 4, -3, 0] = -\begin{bmatrix} 35 & -7 & 28 & -21 & 0 \\ -5 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & -10 & 40 & -30 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -35 & 7 & -28 & 21 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -50 & 10 & -40 & 30 & 0 \end{bmatrix}.$$

A kivonást elvégezve,

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' - \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \begin{bmatrix} 22 & 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 43 & 0 & 22 & -11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Most A″-ből pl. az $a_{14} = 3 \neq 0$ elemet választjuk további számításainkhoz; ekkor

$$\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^* = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix}[22, 0, 9, 3, 0] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 66 & 0 & 27 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -242 & 0 & -99 & -33 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{242}{3} & 0 & -33 & -11 & 0 \end{bmatrix},$$

és

$$\mathbf{A}''' = \mathbf{A}'' - \mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{371}{3} & 0 & 55 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Végül A‴-ből az $a_{43} = 55 \neq 0$ elemet választva,

$$\mathbf{u}_4\mathbf{v}_4^* = \frac{1}{55}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 55 \end{bmatrix}\left[\frac{371}{3}, 0, 55, 0, 0\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{371}{3} & 0 & 55 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

és ezzel

$$\mathbf{A}''' - \mathbf{u}_4\mathbf{v}_4^* = \mathbf{0}.$$

Az A mátrix diadikus felbontása tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}[3, -2, 4, -4, 1] + \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}[5, -1, 4, -3, 0] +$$

$$+ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix}\left[\frac{22}{3}, 0, 3, 1, 0\right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left[\frac{371}{3}, 0, 55, 0, 0\right],$$

A rangja pedig $\varrho(\mathbf{A}) = 4$.

2. Bontsuk fel a

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

projektormátrixot minimális számú diád összegére, majd mutassuk meg, hogy a kapott diádok sor- és oszlopvektorai biortogonális rendszert alkotnak.

Válasszuk az első diád kiszámításához az $a_{21} = 1 \neq 0$ elemet. Ekkor

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}[1, -3, -5] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} - \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát P felbontása:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}[1, -3, -5] = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*$$

Mivel

$$\mathbf{v}_1^*\mathbf{u}_1 = [1, -3, -5]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 - 3 + 5 = 1,$$

tehát a felbontásban szereplő vektorok valóban biortogonálisak.

3. Mutassuk meg, hogy a

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

projektormátrix diadikus felbontásában szereplő sor- és oszlopvektorok biortogonálisak.

Legyen induló elemünk $a_{31}=1 \neq 0$. Ekkor

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, -3, -4] = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -8 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}-\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}'.$$

Most $a_{22}=1$ választással

$$\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0, 1, 1] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{P}'-\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \mathbf{0},$$

tehát a felbontás

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*+\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, -3, -4]+\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0, 1. 1].$$

A felbontásban szereplő vektorok valóban biortogonálisak, mert

$$\mathbf{v}_1^*\mathbf{u}_1 = [1, -3, -4]\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2+3-4 = 1;$$

$$\mathbf{v}_1^*\mathbf{u}_2 = [1, -3, -4]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3-3 = 0;$$

$$\mathbf{v}_2^*\mathbf{u}_1 = [0, 1, 1]\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1+1 = 0;$$

$$\mathbf{v}_2^*\mathbf{u}_2 = [0, 1, 1]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

4. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját minimális számú diádra bontással. (Háromszögmátrixszá alakítással, ill. determinánsok segítségével már a 2. pont **13.** Gyakorló feladatában meghatároztuk a mátrix rangját.)

Legyen kiinduló elemünk $a_{11}=1$:

$$\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1, 2, -1, 2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}'.$$

Most a második sor második elemét választva,

$$\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} [0, 1, 0, -1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

és

$$\mathbf{A}'-\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \mathbf{A}''.$$

Az egyetlen, nullától különböző elemből indulhatunk csak ki:

$$\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^* = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} [0, 0, 0, 8] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

és

$$\mathbf{A}''-\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^* = \mathbf{0},$$

tehát az $\mathbf{A}$ mátrix rangja $\varrho(\mathbf{A})=3$, mert minimálisan három diád összegére bontható fel.

5. Ellenőrizzük, hogy az alábbi mátrixnak minimális diádokra való egyik lehetséges felbontása a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2] + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} [0,\ 1,\ -3,\ -2,\ 3] +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} [0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -2] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -2].$$

Valóban

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2] + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} [0,\ 1,\ -3,\ -2,\ 3] +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} [0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -2] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -2] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -6 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 12 & 8 & -12 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Legyen **A** és **B** két n-edrendű négyzetes mátrix. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{A})+\mathrm{Sp}(\mathbf{B})$.

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Sp}(\mathbf{A})+\mathrm{Sp}(\mathbf{B}).$$

7. Legyenek **A** és **B** n-edrendű négyzetes mátrixok. Mutassuk meg, hogy

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{BA}).$$

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right);$$

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{BA}) = \sum_{i=1}^{n} c'_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \right).$$

De

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ik},$$

ezért

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{BA}).$$

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK VIZSGÁLATA

I. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA

a) **Az egyenletrendszer általános alakja és osztályozása.** Lineáris (más szóval elsőfokú) egyenletrendszernek nevezzük az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &= b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n &= b_2;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\dots+a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

alakú — ill. rendezéssel ilyen alakra hozható — egyenletrendszert, ahol x_j $(j=1, 2, \dots, n)$ jelöli az ismeretleneket; a_{ij} $(i=1, 2, \dots, k;$ $j=1, 2, \dots, n)$ ezek együtthatóit; b_i $(i=1, 2, \dots, k)$ pedig az állandókat. Ha a b_i számok nem mind zérusok, az egyenletrendszer *inhomogén*; ha mind zérusok, akkor *homogén*.

Fogjuk fel az ismeretleneket egy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

oszlopvektor elemeinek, az együtthatókat egy $k \cdot n$ típusú

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots \\ a_{k1} & a_{k2} \dots a_{kn} \end{bmatrix}$$

mátrix elemeinek, végül az állandókat egy

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

oszlopvektor elemeinek; ezekkel az egyenletrendszer mátrix alakban:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixot *az egyenletrendszer mátrixának* nevezzük.

Mint tudjuk, az *egyenletrendszer megoldása* minden olyan $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ értékrendszer, amelynek értékeit a megfelelő ismeretlenek helyébe helyettesítve, az egyenletrendszer minden egyenletére teljesül az egyenlőség. Ha azonban az egyenletrendszer egyenletei között vannak egymásnak ellentmondók, akkor *az egyenletrendszernek nincs megoldása.* Annak vizsgálata, hogy egy adott egyenletrendszer megoldható-e vagy sem, és ha megoldható, akkor egyetlen megoldása van-e vagy pedig végtelen sok, a legtöbb esetben elég hosszadalmas. Ezért először olyan módszert mutatunk, amellyel az egyenletrendszer — ha létezik megoldása — megoldható, ha pedig nem létezik, akkor ez a számításokból kiderül.

b) **A Gauss-féle algoritmus.** Ha az egyenletrendszer inhomogén és minden együtthatója 0, akkor nem lehet megoldása, mert az állandók között van zérustól különböző, és ez ellentmondást jelent. Ha az egyenletrendszer homogén és minden együtthatója 0, akkor bármilyen értékrendszer megoldása.

Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer együtthatói között van nullától különböző, és legyen ez éppen a_{11} (ami az egyenletek felcserélésével és az ismeretlenek átszámozásával mindig elérhető). Vonjuk ki az első egyenlet $\frac{a_{21}}{a_{11}}$-szeresét a második egyenletből; $\frac{a_{31}}{a_{11}}$-szeresét a harmadik egyenletből és így tovább; végül $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$-szeresét a k-adik egyenletből. Az eredeti egyenletrendszer minden megoldása az így kapott egyenletrendszernek is megoldása és fordítva. Az új egyenletrendszer első egyenlete megegyezik az eredeti első egyenletével; ebben szerepelnek olyan ismeretlenek, amelyek a többi egyenletben már nem fordulnak elő (a szorzás és kivonás éppen azt eredményezi, hogy x_1 a többi egyenletből eltűnik, de előfordulhat, hogy ezzel több ismeretlen is kiküszöbölődik). Legyenek ezek $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$; ekkor az új egyenletrendszer a következő alakú:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r-1}x_{r-1}+a_{1r}x_r+\ldots+a_{1n}x_n &= b_1; \\ c_{2r}x_r+\ldots+c_{2n}x_n &= d_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{kr}x_r+\ldots+c_{kn}x_n &= d_k. \end{aligned}$$

Ha ennek az új egyenletrendszernek a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_r, \ldots, \xi_n)$ értékrendszer megoldása, akkor a $(\xi_r, \ldots, \xi_n)$ értékrendszer megoldása az első egyenlet elhagyása után adódó, $k-1$ számú egyenletből álló

$$\begin{aligned} c_{2r}x_r+\ldots+c_{2n}x_n &= d_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{kr}x_r+\ldots+c_{kn}x_n &= d_k \end{aligned}$$

egyenletrendszernek. Ha tehát előbb megoldjuk az utóbbi egyenletrendszert és a kapott megoldás $(\xi_r, \ldots, \xi_n)$, akkor az eredeti első egyenletből az

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r-1}x_{r-1} = b_1-a_{1r}\xi_r-\ldots-a_{1n}\xi_n$$

egyenlet adódik, amelynek összes megoldását megkapjuk, ha $x_2, x_3, \ldots, x_{r-1}$ — az ún. *szabad ismeretlenek* — helyébe tetszőleges számokat írunk, és az így adódó

$$a_{11}x_1 = b_1-a_{12}\xi_2-\ldots-a_{1n}\xi_n$$

egyenletet megoldjuk (ezt megtehetjük, hiszen $a_{11}\neq 0$). Itt $x_1, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ az ún. *kötött ismeretlenek*.

Ezzel az eljárással az egyenletrendszer megoldását olyan egyenletrendszer megoldására vezettük vissza, amelyben legalább eggyel kevesebb egyenlet szerepel. Az eljárást folytatva, végül olyan egyenletrendszert (ill. egyetlen egyenletet) kapunk, amelyről azonnal eldönthető, hogy megoldható-e vagy sem, és ha megoldható, akkor mi a megoldása; ezért ezzel a módszerrel *minden egyenletrendszer* megoldható, ha van megoldása. A most következőkben csak inhomogén egyenletrendszerek megoldására szorítkozunk, homogén egyenletrendszerek megoldásával majd ezt követően foglalkozunk.

Például

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+x_4 &= 8; \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4 &= 3; \\ x_1+2x_2+x_3-2x_4 &= 0; \\ x_1-x_2-x_3+3x_4 &= 12 \end{aligned}$$

esetén $a_{11}=1\neq 0$, ezért az egyenletek átrendezésére nincs szükség. Vonjuk ki tehát az első egyenlet kétszeresét a második egyenletből, majd az első egyenletet a harmadikból és negyedikből. Jelöljük a továbbiakban csillaggal azt az egyenletet, amelyiket változatlanul hagyunk, esetünkben az elsőt. Ekkor:

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+x_4 &= 8; \qquad (*) \\ -x_2+x_3-3x_4 &= -13; \\ x_2+2x_3-3x_4 &= -8; \\ -2x_2+2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Hagyjuk el az első egyenletet; a megmaradó három egyenlet közül az elsőt adjuk a másodikhoz, majd az első kétszeresét vonjuk le a harmadikból:

$$\begin{aligned} -x_2+x_3-3x_4 &= -13; \qquad (*) \\ 3x_3-6x_4 &= -21; \\ -2x_3+8x_4 &= 30. \end{aligned}$$

Hagyjuk el ismét az első egyenletet, a másodikat egyszerűsítsük 3-mal, a harmadikat 2-vel, ekkor

$$\begin{aligned} x_3-2x_4 &= -7; \qquad (*) \\ -x_3+4x_4 &= 15. \end{aligned}$$

Az első egyenletet hozzáadva a másodikhoz:

$$2x_4 = 8. \qquad (*)$$

Ez az egyenlet megoldható, egyetlen megoldása:

$$x_4 = 4.$$

Most visszafelé haladva, az elhagyott (és csillaggal jelölt) egyenletekbe rendre visszahelyettesítünk:

$$x_3 = -7 + 2x_4 = -7 + 8 = 1;$$

$$x_2 = 13 + x_3 - 3x_4 = 13 + 1 - 12 = 2;$$

$$x_1 = 8 - x_2 + x_3 - x_4 = 8 - 2 + 1 - 4 = 3.$$

Az egyenletrendszer egyértelmű megoldása tehát az $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$ értékrendszer.

Az ismeretlenek sokszori leírását megtakaríthatjuk, ha csupán az egyenletrendszerben szereplő együtthatók és állandók írására szorítkozunk, mátrixos írásmóddal.

Jelölje **A** az eredeti egyenletrendszer mátrixát, **B** pedig az egyenletrendszer *kibővített mátrixát*, amelyet úgy kapunk, hogy az együtthatómátrixot egy $(n+1)$-edik oszloppal, a jobb oldalon álló állandók oszlopával kibővítjük. Az egyenletrendszer soraival végzett egy-egy művelet a kibővített mátrix egy-egy elemi átalakításának felel meg. Olyan elemi átalakításokat végzünk, amelyekkel az a_{11} elemet tartalmazó főátló alá zérusokat hozhatunk be. Ha az említett főátló alatt csupa zérus van, az átalakítást befejeztük, és a kapott mátrixból az új egyenletrendszer felírható, mely megfelel az előbbiekben $(*)$-gal jelölt egyenletekből adódó egyenletrendszernek.

Előző példánk megoldását most ezzel az írásmóddal megismételjük. A kibővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 12 \end{bmatrix}.$$

A szóban forgó elemi átalakításokat elvégezve,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 15 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Az új, ún. *redukált egyenletrendszer* tehát

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8;$$

$$-x_2 + x_3 - 3x_4 = -13;$$

$$x_3 - 2x_4 = -7;$$

$$2x_4 = 8,$$

amiből az ismeretlenek értéke már könnyen kiszámítható, és ezek megegyeznek az előző megoldásban kapott értékkel.

Második példaként oldjuk meg az

$$x_1 - 8x_2 + 9x_3 = -32;$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1;$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 12$$

egyenletrendszert — most már rögtön mátrixos írásmóddal. Mivel $a_{11} \neq 0$, tehát a Gauss-féle algoritmus azonnal elkezdhető:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 0 & 15 & -15 & 63 \\ 0 & 10 & -10 & 44 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 0 & 15 & -15 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 - 8x_2 + 9x_3 &= -32; \\ 15x_2 - 15x_3 &= 63; \\ 0 &= 2. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet ellentmondást tartalmaz, ezért az egyenletrendszer nem oldható meg.

Harmadik példaként oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 - x_4 &= -1; \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 \quad &= -1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -8. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ezért a keresett redukált egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1; \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

A négy ismeretlen kiszámításához csak két egyenletünk van, ami azt jelenti, hogy két ismeretlent szabadon választunk. Ha ezek pl. x_3 és x_4, akkor a második egyenletből

$$x_2 = x_3 + x_4 - 1,$$

és ezt az első egyenletbe helyettesítve,

$$x_1 = 4(x_3 + x_4 - 1) - 2x_3 - 1 = 2x_3 + 4x_4 - 5.$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát $x_1 = 2x_3 + 4x_4 - 5$; $x_2 = x_3 + x_4 - 1$; x_3 és x_4 tetszőleges. Vagyis végtelen sok értékrendszer elégíti ki az eredeti egyenletrendszert. Egy ilyen értékrendszer pl. $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ választása esetén

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 1.$$

Példánkban x_3 és x_4 helyett másik két ismeretlen tetszőleges megválasztása mellett is dönthettünk volna.

c) **A megoldhatóság vizsgálata.** Az egyenletrendszer megoldásának megkísérlése nélkül is eldönthetjük, hogy egyáltalán megoldható-e vagy sem, ill. hogy hány megoldása van, a következő tétel alapján:

Egy lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha mátrixának és kibővített mátrixának a rangja megegyezik:

$$\varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{B}).$$

Az első példában szereplő **A** és **B** mátrixok rangja — mint azt az átalakított **B** mátrix utolsó alakjáról könnyen leolvashatjuk — egyaránt 4, így első egyenletrendszerünk megoldható.

A redukált egyenletrendszert ui. a kibővített mátrixon végzett elemi sorátalakításokkal kapjuk meg. Ily módon a **B** utolsó oszlopában álló elemek — amelyek nem elemei **A**-nak — nem kerülnek kapcsolatba **A** elemeivel, tehát nem befolyásolhatják **A** rangját sem. Az átalakított **B** mátrix utolsó oszlopát elhagyva, valóban az **A** mátrix átalakított alakja adódik.

A második példában szereplő együtthatómátrix rangja 2, hiszen determinánsa

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

de van olyan másodrendű minormátrixa, amelynek determinánsa nem 0, pl. $|\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$; a kibővített

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 12 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja pedig 3, hiszen pl. a

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -8 & -32 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -32 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 30 \neq 0;$$

mivel $\varrho(\mathbf{A}) \neq \varrho(\mathbf{B})$, ezért az egyenletrendszer nem oldható meg.

Harmadik feladatunkban a kibővített mátrixhoz hasonló utolsó mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

ennek alakjáról könnyen látható, hogy $\varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{B}) = 2$, mert pl. az **A** és **B** mátrixban egyaránt szereplő

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

másodrendű aldetermináns nem zérus, minden magasabbrendű aldetermináns viszont 0, hiszen a két utolsó sorban csupa 0 elem áll.

Egy megoldható lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van egyértelmű megoldása, ha mátrixának rangja megegyezik az ismeretlenek számával, vagyis ha

$$\varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{B}) = n.$$

Első példánkban ez a feltétel teljesül: $n = \varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{B}) = 4$, ezért az egyenletrendszernek van egyértelmű megoldása. Harmadik feladatunkban $\varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{B}) = 2$, $n = 4$ volt, ezért nincs egyértelmű megoldás.

Ha egy megoldható lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja kisebb az ismeretlenek számánál (vagyis $\varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{B}) < n$), *akkor végtelen sok megoldása van és a megoldás során $n - \varrho(\mathbf{A})$ számú ismeretlen szabadon választható meg.* Ezek a szabad ismeretlenek, a többi ismeretlen — a kötött ismeretlenek — a szabad ismeretlenekkel fejezhető ki.

Harmadik példánkban $n - \varrho(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$ volt, ezért választhattunk meg két ismeretlent szabadon.

Egy konkrét ismeretlen egyik megoldásmenet folyamán lehet kötött, másik megoldásmenetben szabad. A lényeg az, hogy van-e, ill. hogy hány szabad ismeretlen van.

Megjegyzendő, hogy *nem minden esetben választható bármelyik ismeretlen szabad ismeretlenként* — előfordulhat ui., hogy a megoldásrendszerben egyes ismeretlenek értéke egyértelműen meghatározott, és a többi ismeretlenek között is fennállhatnak olyan összefüggések, melyek valamelyikük értékének megválasztása esetén mások értékét már meghatározzák. A konkrét egyenletrendszerről általában könnyen leolvasható, hogy melyek azok az ismeretlenek, amelyek szabad ismeretlenként választhatók.

A $\varrho(\mathbf{A}) > n$ eset nem fordulhat elő, mert egy mátrix rangja nem lehet nagyobb, mint oszlopainak száma.

d) **Négyzetes mátrixú egyenletrendszerek speciális megoldási módszerei.** *Ha a lineáris egyenletrendszer egyenleteinek és ismeretleneinek a száma megegyezik ($k = n$, vagyis az egyenletrendszernek négyzetes mátrixa van), akkor az egyenletrendszer egyértelmű megoldásának szükséges és elegendő feltétele, hogy mátrixának a determinánsa ne legyen nulla.* Ha $|\mathbf{A}| \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^{-1}$ létezik, és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

A megoldás felírható determinánsok segítségével

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

alakban is, ahol $|\mathbf{A}_i|$ jelenti annak a mátrixnak a determinánsát, amely az egyenletrendszer determinánsából úgy keletkezik, hogy az i-edik ismeretlen együtthatói helyébe az egyenletek jobb oldalán álló számokat helyettesítjük. Ez az általános *Cramer-szabály.*

Megemlítjük, hogy egyes esetekben az együtthatómátrix szerkezetét vagy az egyenletrendszerben mutatkozó szimmetriát kihasználva, lényegesen rövidebb megoldások is találhatók.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert

$$x_1-x_2+x_3-3x_4=7;$$
$$x_1-2x_2+3x_3-4x_4=19;$$
$$3x_1+4x_2-x_3+2x_4=-9;$$
$$-2x_1+3x_2+2x_3+x_4=-2$$

a) Gauss-féle algoritmussal;
b) inverz mátrix segítségével;
c) Cramer-szabállyal.

a) Adjuk hozzá az első egyenlet (-1)-szeresét a második, (-3)-szorosát a harmadik, (2)-szeresét a negyedik egyenlethez, ekkor

$$x_1-x_2+x_3-3x_4=7; \qquad (*)$$
$$-x_2+2x_3-x_4=12;$$
$$7x_2-4x_3+11x_4=-30;$$
$$x_2+4x_3-5x_4=12.$$

Hagyjuk el az első egyenletet, majd adjuk hozzá a megmaradt első egyenlet 7-szeresét a másodikhoz és 1-szeresét a harmadikhoz, így

$$-x_2+2x_3-x_4=12; \qquad (*)$$
$$10x_3+4x_4=54, \text{ ill. 2-vel egyszerűsítve: } 5x_3+2x_4=27;$$
$$6x_3-6x_4=24, \text{ ill. 6-tal egyszerűsítve } \quad x_3-x_4=4.$$

Hagyjuk el ismét az első egyenletet, és a megmaradó első egyenletből kivonva a második egyenlet ötszörösét

$$7x_4=7,$$

amiből

$$x_4=1. \qquad (*)$$

Az utolsó egyenletnek egyértelmű megoldása van, így az eredeti egyenletrendszernek is, mégpedig:

$$x_4=1,$$
$$x_3=4+x_4=5;$$
$$x_2=2x_3-x_4-12=10-1-12=-3;$$
$$x_1=x_2-x_3+3x_4+7=-3-5+3+7=2.$$

b) Írjuk fel a megoldandó egyenletrendszert

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

alakban, ahol

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 3 & -4\\ 3 & 4 & -1 & 2\\ -2 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 7\\ 19\\ -9\\ -2\end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer egyenleteinek és ismeretleneinek a száma egyaránt 4, ezért az egyértelmű megoldás feltétele, hogy az egyenletrendszer mátrixának determinánsa ne legyen 0:

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 3 & -4\\ 3 & 4 & -1 & 2\\ -2 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 7 & -4 & 11\\ 0 & 1 & 4 & -5\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1\\ 7 & -4 & 11\\ 1 & 4 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1\\ 0 & 10 & 4\\ 0 & 6 & -6\end{vmatrix}=-(-60-24)=84\neq 0;$$

tehát van egyértelmű megoldás és ez

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixot elemi sorátalakítások segítségével számítjuk ki (l. a II. fejezet 1. *d)* alpontjában).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -32 & 46 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -17 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -32 & 46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -17 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -32 & 46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -17 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{8}{6} & -\frac{4}{6} & 0 & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{70}{6} & \frac{32}{6} & 1 & -\frac{10}{6} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & -\frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{8}{6} & -\frac{4}{6} & 0 & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{70}{84} & \frac{32}{84} & \frac{1}{14} & -\frac{10}{84} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{28}{84} & \frac{26}{84} & \frac{3}{14} & -\frac{16}{84} \\ \frac{42}{84} & -\frac{24}{84} & \frac{1}{14} & \frac{18}{84} \\ -\frac{56}{84} & \frac{46}{84} & \frac{1}{14} & \frac{4}{84} \\ -\frac{70}{84} & \frac{32}{84} & \frac{1}{14} & -\frac{10}{84} \end{bmatrix},$$

tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{28}{84} & \frac{26}{84} & \frac{3}{14} & -\frac{16}{84} \\ \frac{42}{84} & -\frac{24}{84} & \frac{1}{14} & \frac{18}{84} \\ -\frac{56}{84} & \frac{46}{84} & \frac{1}{14} & \frac{4}{84} \\ -\frac{70}{84} & \frac{32}{84} & \frac{1}{14} & -\frac{10}{84} \end{bmatrix}.$$

Ezért a keresett megoldás:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} -28 & 26 & 18 & -16 \\ 42 & -24 & 6 & 18 \\ -56 & 46 & 6 & 4 \\ -70 & 32 & 6 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 19 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 168 \\ -252 \\ 420 \\ 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vagyis $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 1$, mint azt az előbb is láttuk.

c) Az egyenletrendszer determinánsáról már láttuk, hogy $|A|=84\neq 0$, így egyértelmű megoldás van. A Cramer-szabály szerinti megoldáshoz még négy negyedrendű determináns kell. Ezek:

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 & -3\\ 19 & -2 & 3 & -4\\ -9 & 4 & -1 & 2\\ -2 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 & -3\\ 11 & 10 & 11 & -4\\ -5 & -2 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 7\\ 11 & 10 & 11\\ -5 & -2 & -5\end{vmatrix}=168;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & -3\\ 1 & 19 & 3 & -4\\ 3 & -9 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 1 & 7 & -3\\ -7 & 11 & 11 & -4\\ 7 & -5 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 1 & 7\\ -7 & 11 & 11\\ 7 & -5 & -5\end{vmatrix}=-252;$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & -3\\ 1 & -2 & 19 & -4\\ 3 & 4 & -9 & 2\\ -2 & 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 12 & -1\\ 3 & 7 & -30 & 11\\ -2 & 1 & 12 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 12 & -1\\ 7 & -30 & 11\\ 1 & 12 & -5\end{vmatrix}=420;$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 7\\ 1 & -2 & 3 & 19\\ 3 & 4 & -1 & -9\\ -2 & 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 12\\ 3 & 7 & -4 & -30\\ -2 & 1 & 4 & 12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 12\\ 7 & -4 & -30\\ 1 & 4 & 12\end{vmatrix}=84.$$

Így a keresett ismeretlenek

$$x_1=\frac{D_1}{84}=\frac{168}{84}=2;\qquad x_2=\frac{D_2}{84}=\frac{-252}{84}=-3;$$

$$x_3=\frac{D_3}{84}=\frac{420}{84}=5;\qquad x_4=\frac{D_4}{84}=\frac{84}{84}=1.$$

Összehasonlítva a háromféle megoldást, világosan látszik, hogy a Gauss-féle algoritmus igényli a legkevesebb számolást.

Vegyük észre, hogy ha a Gauss-féle algoritmust az egyenletrendszer kibővített mátrixán végzett fokozatos elemi átalakításokkal hajtjuk végre, akkor nem csupán a redukált egyenletrendszerhez jutunk el, hanem egyúttal az egyenletrendszer mátrixát háromszögmátrixá alakítjuk át, amelyből rangja közvetlenül leolvasható.

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=6; \qquad (*)\\ -x_1+2x_2+x_3-x_4-2x_5&=-23;\\ x_1-3x_2+5x_3-x_4-x_5&=14;\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+3x_5&=23;\\ -3x_1-4x_2-x_3-x_4-x_5&=0.\end{aligned}$$

A feladatot a Gauss-féle algoritmussal oldjuk meg. Hozzáadjuk az első egyenletet a másodikhoz, az első egyenlet (-1)-szeresét a harmadikhoz, (-2)-szeresét a negyedikhez, 3-szorosát az ötödikhez, majd elhagyjuk az első egyenletet. Ekkor

$$\begin{aligned} 3x_2+2x_3-x_5&=-17;\\ -4x_2+4x_3-2x_4-2x_5&=8;\\ -x_2-x_3-x_4+x_5&=11; \qquad (*)\\ -x_2+2x_3+2x_4+2x_5&=18.\end{aligned}$$

Most a harmadik egyenlet 3-szorosát adjuk hozzá az első, (-4)-szeresét a második és (-1)-szeresét a harmadik egyenlethez, majd elhagyjuk a harmadik egyenletet. Ily módon a

$$\begin{aligned} -x_3-3x_4+2x_5&=16; \qquad (*)\\ 8x_3+2x_4-6x_5&=-36;\\ 3x_3+3x_4+x_5&=7\end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Hozzáadjuk az első egyenlet 8-szorosát a másodikhoz, háromszorosát a harmadikhoz, majd elhagyjuk az első egyenletet. Így

$$\begin{aligned} -22x_4+10x_5&=92;\\ -6x_4+7x_5&=55. \qquad (*)\end{aligned}$$

A második egyenlet (-11)-szeresét az első egyenlet 3-szorosához adva,

$$-47x_5=-329,$$

amiből

$$x_5=7. \qquad (*)$$

Az egyenletrendszernek tehát egyértelmű megoldása van.

A többi ismeretlen az elhagyott (csillaggal jelölt) egyenletekből számítható ki fokozatosan:

$$x_4 = \frac{7x_5-55}{6} = -1;$$

$$x_3 = -3x_4+2x_5-16 = 1;$$

$$x_2 = -x_3-x_4-x_5-11 = -4;$$

$$x_1 = 6-x_2-x_3-x_4-x_5 = 3.$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x_1+3x_2+x_3- x_4 = 7; \qquad (*)$$

$$2x_1+5x_2-x_3+2x_4 = 22;$$

$$3x_1+8x_2+x_3- x_4 = 24.$$

I. Megoldás:

Vonjuk ki az első egyenlet 2-szeresét a másodikból, és 3-szorosát a harmadikból, majd hagyjuk el az első egyenletet. Ekkor

$$-x_2-3x_3+4x_4 = 8; \qquad (*)$$

$$-x_2-2x_3+2x_4 = 3.$$

Most az első egyenletet vonjuk ki a másodikból, így

$$x_3-2x_4 = -5. \qquad (*)$$

A most kapott egyenletről látható, hogy megoldható és végtelen sok megoldása van, mert az egyik ismeretlen — pl. x_4 — szabadon választható. A többi ismeretlen ekkor már egyértelműen meg van határozva, mégpedig ha $x_4=t$, akkor

$$x_3 = 2x_4-5 = 2t-5;$$

$$x_2 = -3x_3+4x_4-8 = -6t+15+4t-8 = -2t+7;$$

$$x_1 = -3x_2-x_3+x_4+7 = 6t-21-2t+5+t+7 = 5t-9.$$

Például $t=0$ értékhez az $x_1=-9$, $x_2=7$, $x_3=-5$, $x_4=0$ megoldás tartozik.

A szabadon választható ismeretlent nem fontos új betűvel jelölni, mi ezt csak a hangsúly kedvéért tettük, és tesszük a továbbiakban is.

II. Megoldás:

A második egyenletet hozzáadjuk az elsőhöz, utána a harmadikhoz, majd elhagyjuk az első egyenletet. Ekkor

$$3x_1+8x_2+x_4 = 29; \qquad (*)$$

$$5x_1+13x_2+x_4 = 46.$$

Kivonjuk az első egyenletet a másodikból, akkor

$$2x_1+5x_2 = 17, \qquad (*)$$

és ez az egyenlet megoldható, mégpedig végtelen sok megoldása van, hiszen az egyik ismeretlen — pl. x_2 — szabadon megválasztható. A többi ismeretlen akkor már egyértelműen meghatározott:

$$x_1 = \frac{17}{2}-\frac{5}{2}x_2;$$

$$3x_1+8x_2+x_4 = 29 \text{ egyenletből } x_4 = \frac{7}{2}-\frac{1}{2}x_2;$$

$$2x_1+5x_2-x_3+2x_4 = 22 \text{ egyenletből } x_3 = 2-x_2.$$

Ha pl. $x_2=7$, akkor

$$x_1=-9;\ x_2=7;\ x_3=-5;\ x_4=0,$$

és így éppen azt a megoldást kaptuk, mint az előbb az $x_4=0$ választással.

Mivel a négy ismeretlen bármelyike választható szabadon, az egyenletrendszer megoldása négyféle alakban írható fel. A megoldások egyparaméteres sokaságot alkotnak.

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$3x_1+ x_2- 6x_3- x_4- x_5 = 3; \qquad (*)$$

$$2x_1+2x_2- 4x_3+3x_4+ 6x_5 = 5;$$

$$4x_1+ x_2- 8x_3+ x_4+ x_5 = 5;$$

$$-x_1+2x_2+ 2x_3+2x_4+ 2x_5 = 1;$$

$$-5x_1+4x_2+10x_3+6x_4+12x_5 = 1.$$

A legkisebb együtthatók x_2 oszlopában szerepelnek, ezért célszerű a Gauss-féle algoritmust x_2 kiküszöbölésével kezdeni. Adjuk hozzá az első egyenlet

(-2)-szeresét a második és negyedik egyenlethez, (-1)-szeresét a harmadik, (-4)-szeresét az ötödik egyenlethez, majd az első egyenletet hagyjuk el. Ekkor

$$\begin{aligned} -4x_1+8x_3+5x_4+8x_5&=-1;\\ x_1-2x_3+2x_4+2x_5&=2;\\ -7x_1+14x_3+4x_4+4x_5&=-5;\\ -17x_1+34x_3+10x_4+16x_5&=-11.\end{aligned} \qquad (*)$$

Most a második egyenlet segítségével az x_1 ismeretlent küszöböljük ki. Adjuk hozzá a második egyenlet 4-szeresét az elsőhöz, 7-szeresét a harmadikhoz, 17-szeresét a negyedikhez, majd hagyjuk el a második egyenletet:

$$\begin{aligned} 13x_4+16x_5&=7;\\ 18x_4+18x_5&=9;\\ 44x_4+50x_5&=23.\end{aligned} \qquad (*)$$

Vegyük észre, hogy x_1-en kívül x_3 is kiküszöbölődött. Ez arra utal, hogy x_1 és x_3 nem számítható ki külön-külön, csupán a közöttük fennálló kapcsolat határozható majd meg.

Egyszerűsítjük a második egyenletet 9-cel, majd hozzáadjuk (-8)-szorosát az első, (-25)-szörösét a harmadik egyenlethez; így

$$\begin{aligned} -3x_4&=-1;\\ -6x_4&=-2.\end{aligned} \qquad (*)$$

Mivel a második egyenlet az elsőnek kétszerese, pl. a második elhagyható, és ez a megoldhatóságot nem befolyásolja. A megmaradó első egyenlet (és ezzel együtt az eredeti egyenletrendszer is) megoldható:

$$x_4=\frac{1}{3};$$

ezt a $2x_4+2x_5=1$ egyenletbe helyettesítve, $\frac{2}{3}+2x_5=1$, amiből

$$x_5=\frac{1}{6}.$$

x_4 és x_5 kiszámított értékét az előző elhagyott (és csillaggal megjelölt) egyenletbe helyettesítve, az

$$x_1-2x_3+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=2$$

egyenlethez jutunk, amiből

$$x_1-2x_3=1.$$

Láthatjuk, hogy x_1 és x_3 értékét valóban nem tudjuk külön-külön meghatározni. Annyit azonban tudunk, hogy az egyenletet olyan és csak olyan x_1 és x_3 értékpárok elégítik ki, amelyek közül az egyik szabadon választható, de amelyekre $x_1-2x_3=1$ teljesül. Ebből következik, hogy ha az egyenletrendszernek van megoldása, akkor első elhagyott (csillagos) egyenletben sem szerepelhet x_1 és x_3 külön-külön, hanem az x_1-2x_3 kifejezés valamilyen állandószorosa léphet fel csupán. Valóban: az első egyenletben a helyettesítést elvégezve a

$$3+x_2-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=3$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$x_2=\frac{1}{2}.$$

Ha pl. x_3-t választjuk szabadon, legyen pl. $x_3=t$, akkor az egyenletrendszer megoldása

$$x_1=1+2t, \qquad x_2=\frac{1}{2}, \qquad x_3=t, \qquad x_4=\frac{1}{3}, \qquad x_5=\frac{1}{6}.$$

Figyeljük meg, hogy (az előző feladattal ellentétben) itt nem függ minden ismeretlen a szabadon választható ismeretlentől, sőt x_2, x_4 és x_5 nem is választható szabadon.

Hogy szabad ismeretlenek esetében e két lehetőség melyikével állunk szemben, azt előre nem tudjuk megállapítani, ugyanis (mint az könnyen kiszámolható) feladatunkban $\varrho(\mathbf{A})=\varrho(\mathbf{B})=4$, az ismeretlenek száma 5, így csupán az derül ki, hogy $5-4=1$ ismeretlen választható szabadon.

5. Adott a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3-x_4&=4;\\ x_1-x_2+x_3+x_4&=8;\\ 3x_1+x_2+3x_3-x_4&=16.\end{aligned} \qquad (*)$$

a) Állapítsuk meg, létezik-e megoldás, ill. hány megoldás létezik. Ha végtelen sok megoldás van, akkor hány ismeretlen választható szabadon?

b) Ha létezik megoldás, akkor határozzuk meg a Gauss-féle algoritmussal!

a) Meghatározzuk az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix és a $\mathbf{B}$ kibővített mátrix rangját.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&-1&4\\1&-1&1&1&8\\3&1&3&-1&16\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&-1&4\\0&-2&0&2&4\\0&-2&0&2&4\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&1&-1&4\\0&-2&0&2&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Az utolsó mátrixról már látszik, hogy az elemeiből képezhető legmagasabbrendű nem zérus értékű determináns másodrendű, pl.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

és mert ez az **A** és **B** mátrixnak egyaránt aldeterminánsa, ezért $\varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{B}) = 2$. Ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszer megoldható. Mivel az ismeretlenek száma 4, így végtelen sok megoldás van, mégpedig a szabadon választható ismeretlenek száma $4-2=2$.

b) Adjuk hozzá az első egyenletet a másodikhoz, majd (-1)-szeresét a harmadikhoz:

$$2x_1+2x_3 = 12;$$

$$2x_1+2x_3 = 12.$$

A két azonos egyenlet közül az egyik elhagyható, a másik megoldható, mégpedig — pl. x_3-at x_1-gyel kifejezve — :

$$x_3 = 6-x_1, \qquad (*)$$

ahol x_1 szabadon választható, legyen pl. u. Visszahelyettesítve az elhagyott egyenletbe,

$$u+x_2+6-u-x_4 = 4,$$

amiből

$$x_2-x_4 = -2.$$

Itt ismét szabadon választhatunk egy változót, legyen ez pl. $x_4 = v$, ekkor $x_2 = v-2$, és így az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = u; \quad x_2 = v-2; \quad x_3 = 6-u; \quad x_4 = v,$$

ahol u és v egymástól független tetszőleges értékek.

A megoldások most kétparaméteres sokaságot alkotnak. Például az $u=1$ és $v=1$ értékhez tartozó megoldásrendszer:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 5; \quad x_4 = 1.$$

6. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$x_1-2x_2+3x_3-\ x_4+2x_5 = 2; \qquad (*)$$

$$3x_1-\ x_2+5x_3-3x_4-\ x_5 = 6;$$

$$2x_1+\ x_2+2x_3-2x_4-3x_5 = 8.$$

a) Oldjuk meg az egyenletrendszert a Gauss-féle algoritmus segítségével.
b) Vizsgáljuk a megoldások létezését, ill. számát.

a) Hozzáadjuk az első egyenlet (—3)-szorosát a másodikhoz, (—2)-szeresét a harmadikhoz, majd elhagyjuk az első egyenletet. Ekkor

$$5x_2-4x_3-7x_5 = 0;$$

$$5x_2-4x_3-7x_5 = 4.$$

Ha kivonjuk az első egyenletből a másodikat, a

$$0 = -4$$

ellentmondást kapjuk, ezért ez utóbbi és vele együtt az eredeti egyenletrendszernek nincs megoldása.

b) Átalakítjuk a kibővített mátrixot.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

B-ből képezhető harmadrendű, nem zérus determináns:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 28;$$

A-ból azonban nem képezhető harmadrendű, nem zérus determináns, csupán másodrendű, pl.:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

Tehát $\varrho(\mathbf{A}) \neq \varrho(\mathbf{B})$, vagyis az egyenletrendszernek nincs megoldása.

7. Megoldandó a következő egyenletrendszer

$$x_1+2x_2+3x_3 = 1; \qquad (*)$$

$$x_1+3x_2+5x_3 = 1;$$

$$3x_1-\ x_2-4x_3 = 1;$$

$$9x_1+2x_2-\ x_3 = 1;$$

$$5x_1+2x_2+\ x_3 = 1.$$

Kettővel több egyenletünk van, mint ahány ismeretlenünk. Ekkor vagy legalább két egyenlet felesleges, mert a többi következménye, vagy pedig az egyenletek között ellentmondók vannak. Előre megállapítani azonban, hogy melyik eset forog fenn, ill. hogy melyek a felesleges egyenletek, az sok — teljesen felesleges — számolással járhat, a Gauss-féle algoritmus végrehajtásához azonban nincs is rá szükség.

Induljunk tehát el a Gauss-féle algoritmussal. Adjuk hozzá az első egyenlet (-1)-szeresét a második, (-3)-szorosát a harmadik, (-9)-szeresét a negyedik, (-5)-szörösét az ötödik egyenlethez, majd hagyjuk el az első egyenletet. Ekkor

$$\begin{aligned} x_2+\ 2x_3 &= 0; \\ -\ 7x_2-13x_3 &= -2; \\ -16x_2-28x_3 &= -8; \\ -\ 8x_2-14x_3 &= -4. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Most az első egyenlet 7-szeresét a másodikhoz, a 16-szorosát a harmadikhoz, 8-szorosát a negyedikhez adjuk, így

$$\begin{aligned} x_3 &= -2; \\ 4x_3 &= -8; \\ 2x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenletrendszernek (amely lényegében egyetlen egyenletet jelent) egyetlen megoldása $x_3=-2$, ezért az eredeti egyenletrendszer is egyértelműen megoldható, mégpedig megoldása

$$x_3=-2;$$

az $x_2+2x_3=0$ egyenletből $x_2=4$; az $x_1+2x_2+3x_3=0$ egyenletből $x_1=-1$.

Az algoritmus második lépéséből az is látszik, hogy az eredeti egyenletrendszer első, második egyenlete és az utolsó három egyenlet egyike elegendő a megoldáshoz, a másik kettő felesleges.

8. Keressük meg az

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+\ 6x_3 &= 2; \\ 2x_1+7x_2+13x_3 &= 2; \\ -2x_1-5x_2-\ 3x_3 &= 2; \\ x_1+3x_2+\ 5x_3 &= 2; \\ 5x_1+8x_2+\ x_3 &= 2 \end{aligned} \tag{$*$}$$

egyenletrendszer megoldását!

Adjuk hozzá az első egyenlet (-2)-szeresét a másodikhoz, 2-szeresét a harmadikhoz, (-1)-szeresét a negyedikhez, (-5)-szörösét az ötödikhez. Ekkor

$$\begin{aligned} x_2+\ x_3 &= -2; \\ x_2+\ 9x_3 &= 6; \\ -\ x_3 &= 0; \\ -7x_2-29x_3 &= -8. \end{aligned}$$

A harmadik egyenlet szerint $x_3=0$. De ezt visszahelyettesítve a megmaradó három egyenletbe, az

$$\begin{aligned} x_2 &= -2, \\ x_2 &= 6, \\ -7x_2 &= -8 \end{aligned}$$

egyenletekhez jutunk, amelyek ellentmondanak egymásnak, ezért az eredeti egyenletrendszernek nincs megoldása.

Durva hibát követtünk volna el, ha arra hivatkozva, hogy több egyenletünk van, mint ahány ismeretlenünk, önkényesen elhagytunk volna két egyenletet.

Ugyanis pl. az első, második és a negyedik egyenlet mint egyenletrendszer egyértelműen megoldható ($x_1=8$, $x_2=-2$, $x_3=0$), de ez nem megoldása az eredeti egyenletrendszernek, hiszen nem elégíti ki összes egyenletét.

9. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x_1-\ x_2+\ x_3 &= 4; \\ x_1+2x_2+\ x_3 &= 13; \\ 2x_1+4x_2+2x_3 &= 26; \\ 4x_1+5x_2+4x_3 &= 43 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldását, ha ilyen létezik!

A Gauss-féle algoritmus lépéseit most már csupán a kibővített mátrixok leírásával jelezzük. Az egyes lépések a mátrixokból könnyen leolvashatók.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 26 \\ 4 & 5 & 4 & 43 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 18 \\ 0 & 9 & 0 & 27 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó mátrix alapján a redukált egyenletrendszer:

$$x_1-x_2+x_3 = 4;$$
$$3x_2 \qquad = 9.$$

Ez azt jelenti, hogy $x_2=3$ és vagy x_1, vagy x_3 szabadon választható. Legyen ez pl. x_3, akkor $x_1 = 4+x_2-x_3 = 7-x_3$, és így az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = 7-x_3, \quad x_2=3.$$

10. Keressük meg az

$$\begin{aligned} x_1+x_2 \qquad +4x_4 &= 3;\\ x_2-x_3+3x_4 &= 1;\\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4 &= 0;\\ 3x_1-x_2+4x_3 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldását!

Most is csupán a kibővített mátrix átalakításainak leírására szorítkozunk.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 3 & -5 & 0\\ 3 & -1 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 3 & -9 & -3\\ 0 & -4 & 4 & -12 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $\varrho(\mathbf{A})=\varrho(\mathbf{B})=2$, tehát az egyenletrendszer megoldható, és az ismeretlenek száma 4 lévén, $4-\varrho(\mathbf{A}) = 2$ ismeretlen szabadon választható. A kapott redukált egyenletrendszer

$$x_1+x_2+4x_4 = 3;$$
$$x_2-x_3+3x_4 = 1.$$

Ha $x_3=u$, $x_4=v$, akkor

$$x_2 = 1+x_3-3x_4 = 1+u-3v;$$
$$x_1 = 2-x_3-x_4 = 2-u-v.$$

11. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 6;\\ x_2+x_3+x_4 &= 9;\\ x_3+x_4+x_5 &= 3;\\ x_4+x_5+x_6 &= -3;\\ x_5+x_6+x_7 &= -9;\\ x_6+x_7+x_8 &= -6;\\ x_7+x_8+x_1 &= -2;\\ x_8+x_1+x_2 &= 2. \end{aligned}$$

1. Megoldás:

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa a következőképpen alakítható át:

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&6\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&9\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&3\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&-3\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&-9\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&-6\\ 1&0&0&0&0&0&1&1&-2\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&1&1&-2\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&2\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&6\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&9\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&3\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&-3\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&-9\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&-6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&1&1&-2\\ 0&1&0&0&0&0&-1&0&4\\ 0&0&1&0&0&0&0&-1&4\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&9\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&3\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&-3\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&-9\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&-6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&1&1&-2\\ 0&1&0&0&0&0&-1&0&4\\ 0&0&1&0&0&0&0&-1&4\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&-1&0&-2\\ 0&0&0&0&0&1&0&-1&-2\\ 0&0&0&0&0&0&2&1&-5\\ 0&0&0&0&0&0&0&1{,}5&-1{,}5 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó mátrixról már látszik, hogy $\varrho(\mathbf{B})=\varrho(\mathbf{A})=8$, tehát az egyenletrendszernek van megoldása, és mivel az ismeretlenek száma is 8, a megoldás egyértelmű, mégpedig az utolsó mátrix alapján felírható

$$1{,}5x_8=-1{,}5 \quad \text{egyenletből} \quad x_8=-1;$$
$$2x_7+x_8=-5 \quad \text{egyenletből} \quad x_7=-2;$$
$$x_6-x_8=-2 \quad \text{egyenletből} \quad x_6=-3;$$
$$x_5-x_7=-2 \quad \text{egyenletből} \quad x_5=-4;$$
$$x_4+x_7+x_8=1 \quad \text{egyenletből} \quad x_4=4;$$
$$x_3-x_8=4 \quad \text{egyenletből} \quad x_3=3;$$
$$x_2-x_7=4 \quad \text{egyenletből} \quad x_2=2;$$
$$x_1+x_7+x_8=-2 \quad \text{egyenletből} \quad x_1=1.$$

Érdemes megemlíteni, hogy sokszor az egyenletrendszer speciális tulajdonságait felhasználva, az egyenletrendszer egyszerűbben is megoldható.

II. Megoldás:

Esetünkben pl. vegyük észre, hogy ha az egyenleteket összeadjuk és 3-mal egyszerűsítünk, az alábbi összefüggés adódik:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=0.$$

Ha viszont kivonjuk az első, negyedik és hetedik egyenlet összegéből az ismeretlenek összegét, akkor

$$(x_1+x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6)+(x_7+x_8+x_1)-(x_1+\ldots+x_8)=1-0,$$

amiből összevonás után

$$x_1=1.$$

Hasonlóképpen a második, ötödik és nyolcadik egyenlet összegéből levonva az ismeretlenek összegét:

$$(x_2+x_3+x_4)+(x_5+x_6+x_7)+(x_8+x_1+x_2)-(x_1+\ldots+x_8)=2-0,$$

amiből

$$x_2=2.$$

Az első egyenletből most már $x_3=3$, a másodikból $x_4=4$, és így tovább

12. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 3x_1-x_2+2x_3-x_4+5x_5&=28;\\ x_1+x_3+4x_4-2x_5&=10;\\ 2x_1+7x_2-3x_3+6x_5&=37;\\ -8x_2+4x_3-5x_4+x_5&=-19 \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Először írjuk az egyenletrendszer egyenleteit alkalmasabb sorrendbe (amelyben $a_{11}=1$):

$$\begin{aligned} x_1+x_3+4x_4-2x_5&=10;\\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4+5x_5&=28;\\ 2x_1+7x_2-3x_3+6x_5&=37;\\ -8x_2+4x_3-5x_4+x_5&=-19. \end{aligned}$$

Az algoritmus egyes lépéseit ismét csak a kibővített mátrix átalakításával jelezzük:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&1&4&-2&10\\3&-1&2&-1&5&28\\2&7&-3&0&6&37\\0&-8&4&-5&1&-19\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&4&-2&10\\0&-1&-1&-13&11&-2\\0&7&-5&-8&10&17\\0&-8&4&-5&1&-19\end{bmatrix}\sim$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1&4&-2&10\\0&-1&-1&-13&11&-2\\0&0&-12&-99&87&3\\0&0&12&99&-87&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&4&-2&10\\0&-1&-1&-13&11&-2\\0&0&-12&-99&87&3\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ebből közvetlenül látható, hogy $\varrho(\mathbf{A})=\varrho(\mathbf{B})=3$; mivel $n=5$, ezért $5-3=2$ ismeretlen szabadon választható, a többi pedig az

$$\begin{aligned} x_1+x_3+4x_4+2x_5&=10;\\ -x_2-x_3-13x_4+11x_5&=-2;\\ -12x_3-99x_4+87x_5&=3 \end{aligned}$$

redukált egyenletrendszerből számítható ki. Legyen pl. $x_4=u$, $x_5=v$; ekkor a harmadik egyenletből

$$x_3=-\frac{33}{4}u+\frac{29}{4}v-\frac{1}{4},$$

a második egyenletből

$$x_2 = -\frac{19}{4}u+\frac{15}{4}v+\frac{9}{4},$$

az elsőből pedig

$$x_1 = -\frac{17}{4}u-\frac{21}{4}v+\frac{41}{4}.$$

13. Határozzuk meg c értékét úgy, hogy az

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3 &= 9;\\ x_1+2x_2+x_3 &= 12;\\ -x_1-x_2+4x_3 &= -12;\\ -2x_1+x_2+x_3 &= c \end{aligned}$$

egyenletrendszernek legyen megoldása.

Az egyenletrendszer akkor oldható meg, ha $\varrho(\mathbf{A})=\varrho(\mathbf{B})$.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9\\ 1 & 2 & 1 & 12\\ -1 & -1 & 4 & -12\\ -2 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 3 & -1 & 18+c \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -7 & 9+c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2+c \end{bmatrix}.$$

Az utolsó mátrixról leolvasható, hogy $\varrho(\mathbf{A})=3$, hiszen egy harmadrendű determináns

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$$

továbbá

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2+c \end{vmatrix} = 2+c,$$

és ha ez nem 0, akkor $\varrho(\mathbf{B})=4$, és az egyenletrendszer nem oldható meg. Az előbbi negyedrendű determináns akkor és csak akkor 0, ha $c=-2$; ekkor $\varrho(\mathbf{B})=3$, és az egyenletrendszer megoldható. Mivel $n=3=\varrho(\mathbf{A})$, $c=-2$ esetében egyértelmű megoldás van. A megoldás az

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3 &= 9;\\ x_2+2x_3 &= 3;\\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből $x_1=3$, $x_2=5$, $x_3=-1$.

14. Állapítsuk meg c értékét úgy, hogy az

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4 &= 2;\\ 2x_1+3x_2-3x_3-2x_4 &= 4;\\ -3x_1-5x_2+4x_3+x_4 &= c \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható legyen.

A kibővített mátrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -3 & -2 & 4\\ -3 & -5 & 4 & 1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6+c \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6+c \end{bmatrix}.$$

Az utolsó átalakítás után megállapítható, hogy $\varrho(\mathbf{A})=2$, továbbá hogy $\varrho(\mathbf{B})=2$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $c=-6$. Ekkor $n=4$ miatt $4-\varrho(\mathbf{A})=2$ ismeretlen szabadon választható, és a többi az

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+x_4 &= 2;\\ -x_2-x_3-4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből számítható ki. Legyen pl. $x_3=u$, $x_4=v$, ekkor $x_2=-u-4v$, és $x_1=2+3u+7v$.

A megoldás kétparaméteres értéksokaság.

15. Határozzuk meg c értékét úgy, hogy az

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3 &= c;\\ 2x_1-3x_2+x_3 &= -5;\\ 4x_1-x_2-x_3 &= 2c \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható legyen!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & c \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 2c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & -5 & 3 & -5-2c \\ 0 & -5 & 3 & -2c \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & c \\ 0 & -5 & 3 & -5-2c \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

A redukált egyenletrendszer

$$x_1 + x_2 - x_3 = c;$$
$$-5x_2 + 3x_3 = -5-2c;$$
$$0 = 5.$$

Az utolsó egyenlet ellentmondást tartalmaz, ezért nem oldható meg; így az eredeti egyenletrendszer — bármilyen értéket is adunk c-nek — sohasem oldható meg.

16. Határozzuk meg az

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0;$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = t;$$
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = u$$

egyenletrendszerből u-t mint t függvényét oly módon, hogy az egyenlet megoldható legyen!

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & t \\ 2 & -2 & 1 & u \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t \\ 0 & -4 & -3 & u \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & 1 & u \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & 0 & u+t \end{bmatrix}$$

Az utolsó alakról leolvasható, hogy $\varrho(\mathbf{A})=3$, továbbá hogy $\varrho(\mathbf{B})$ csak úgy lehet 3, ha $u+t=0$, vagyis $u=-t$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

17. Határozzuk meg a és b paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek

a) egyértelmű megoldása legyen;
b) végtelen sok megoldása legyen;
c) ne legyen megoldása:

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1;$$
$$x_1 + ax_2 + 2x_3 = 2;$$
$$x_1 + 9x_2 - 5x_3 = b.$$

Hogy a paraméterek a kibővített mátrix rangjának meghatározásakor minél később kapcsolódjanak be a számításba, rendezzük át az egyenletrendszert:

$$x_1 - 5x_3 + 9x_2 = b;$$
$$3x_1 - x_3 + 5x_2 = 1;$$
$$x_1 + 2x_3 + ax_2 = 2.$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 & b \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 & b \\ 0 & 14 & -22 & 1-3b \\ 0 & 7 & a-9 & 2-b \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 & b \\ 0 & 14 & -22 & 1-3b \\ 0 & 0 & a+2 & \frac{3}{2}+\frac{b}{2} \end{bmatrix}.$$

a) Az egyenletrendszernek akkor (és csak akkor) van egyértelmű megoldása, ha $\varrho(\mathbf{A})=\varrho(\mathbf{B})=n=3$. Esetünkben $\varrho(\mathbf{A})$ és $\varrho(\mathbf{B})$ akkor 3, ha $\det \mathbf{A} = 14(a+2)$ nem 0, ez pedig akkor áll fenn, ha $a \neq -2$. Tehát az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, ha csak $a \neq -2$.

b) Végtelen sok megoldása akkor van az egyenletrendszernek, ha $\varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{B}) < n = 3$. Ha $a=-2$, akkor $\varrho(\mathbf{A})=2$; a $\varrho(\mathbf{B})=2$ feltétel akkor teljesül, ha $a=-2$ mellett még $\frac{3}{2}+\frac{b}{2}=0$ is fennáll, vagyis ha $b=-3$. Tehát végtelen sok megoldása akkor van az egyenletrendszernek, ha $a=-2$ és $b=-3$.

c) Nincs megoldása az egyenletrendszernek, ha $\varrho(\mathbf{A}) \neq \varrho(\mathbf{B})$. Mivel esetünkben $2 \leqq \varrho(\mathbf{A}) \leqq \varrho(\mathbf{B}) \leqq 3$, ez csak úgy teljesülhet, hogy $\varrho(\mathbf{A})=2$ és $\varrho(\mathbf{B})=3$. Már láttuk, hogy $\varrho(\mathbf{A})=2$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=-2$; viszont ez esetben $\varrho(\mathbf{B})=3$ akkor és csak akkor, ha $b \neq -3$. Tehát akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek, ha $a=-2$ és $b \neq -3$.

18. Mutassuk meg, hogy az

$$x_2 + x_3 + x_4 = 1;$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 2;$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 3;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

egyenletrendszernek egyértelmű megoldása

$$x_1=\frac{7}{3},\quad x_2=\frac{4}{3},\quad x_3=\frac{1}{3},\quad x_4=-\frac{2}{3}.$$

A kibővített mátrix:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&2\\1&1&0&1&3\\1&1&1&0&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&1&-1&0&1\\0&1&0&-1&2\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&0&-2&-1&0\\0&0&1&-1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&1&1&1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&-3&2\end{bmatrix}.$$

$\varrho(\mathbf{A})=\varrho(\mathbf{B})=4$ és a redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}-3x_4&=2;\\ x_3-x_4&=1;\\ x_2+x_3+x_4&=1;\\ x_1+\quad x_3+x_4&=2,\end{aligned}$$

amiből állításunk helyessége már leolvasható.

19. Ellenőrizzük, hogy az

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=13;\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=10;\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=11;\\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5&=6;\\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5&=3\end{aligned}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása:

$$x_1=0,\quad x_2=2,\quad x_3=-2,\quad x_4=0,\quad x_5=3.$$

A kibővített mátrix:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&13\\2&1&2&3&4&10\\2&2&1&2&3&11\\2&2&2&1&2&6\\2&2&2&2&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&0&1&2&4&10\\0&-1&0&1&3&7\\0&0&-1&0&2&8\\0&0&0&-1&1&3\\2&2&2&2&1&3\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}-1&0&1&2&4&10\\0&-1&0&1&3&7\\0&0&-1&0&2&8\\0&0&0&-1&1&3\\0&0&0&8&23&69\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&0&1&2&4&10\\0&-1&0&1&3&7\\0&0&-1&0&2&8\\0&0&0&-1&1&3\\0&0&0&0&31&93\end{bmatrix}.$$

A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}-x_1+\quad x_3+2x_4+4x_5&=10;\\ -x_2+\quad x_4+3x_5&=7;\\ -x_3+\quad 2x_5&=8;\\ -x_4+x_5&=3;\\ 31x_5&=93,\end{aligned}$$

amiből visszafelé haladva:

$$x_5=3,\quad x_4=0,\quad x_3=-2,\quad x_2=2,\quad x_1=0.$$

20. Lássuk be, hogy a

$$\begin{aligned}4x_1+x_2-2x_3-x_4&=3;\\ 2x_1-2x_2-x_3+2x_4&=2;\\ 2x_1+5x_2-\quad x_4&=-1;\\ 2x_1+3x_2-x_3-3x_4&=1\end{aligned}$$

egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és egy ismeretlen választható szabadon, majd oldjuk meg az egyenletrendszert.

A kibővített mátrix:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&1&-2&-1&3\\2&-2&-1&2&2\\2&5&0&-1&-1\\2&3&-1&-3&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-2&-1&2&2\\0&5&0&-5&-1\\0&7&1&-3&-3\\0&5&0&-5&-1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}2&-2&-1&2&2\\0&5&0&-5&-1\\0&7&1&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-2&-1&2&2\\0&5&0&-5&-1\\0&0&1&4&-\frac{8}{5}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Innen már látszik, hogy $\varrho(\mathbf{A})=\varrho(\mathbf{B})=3$, mert pl.

$$\begin{vmatrix}2&-2&-1\\0&5&0\\0&0&1\end{vmatrix}=10\neq0,$$

és $n-\varrho(\mathbf{A})=1$ ismeretlen szabadon választható. A redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}2x_1-2x_2-x_3+2x_4&=2;\\5x_2\qquad-5x_4&=-1;\\x_3+4x_4&=-\frac{8}{5},\end{aligned}$$

és ebből, ha pl. x_4-et választjuk szabadon,

$$x_3=-4x_4-\frac{8}{5};\qquad x_2=x_4-\frac{1}{5};\qquad x_1=-2x_4.$$

21. Állapítsuk meg, van-e a következő egyenletű három síknak közös metszéspontja:

$$\begin{aligned}x+y-z&=4;\\2x-3y+z&=-5;\\4x-y-z&=-3.\end{aligned}$$

I. Megoldás:

A $P(x;y;z)$ pont akkor közös metszéspontja mindhárom síknak, ha koordinátái mind a három sík egyenletét kielégítik. Tehát keresendő a három egyenletből álló egyenletrendszer megoldása, **ha** ilyen van!

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&-1&4\\2&-3&1&-5\\4&-1&-1&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&&-1&4\\0&-5&3&-13\\0&-5&3&-19\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-1&4\\0&-5&3&-13\\0&0&0&-6\end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $\varrho(\mathbf{A})=2$, mert $|\mathbf{A}|=0$, de pl.

$$\begin{vmatrix}1&-1\\-5&3\end{vmatrix}=-2\neq0;$$

ezzel szemben $\varrho(\mathbf{B})=3$, mert pl.

$$\begin{vmatrix}1&-1&4\\-5&3&-13\\0&0&-6\end{vmatrix}=12\neq0;$$

tehát $\varrho(\mathbf{A})\neq\varrho(\mathbf{B})$, ezért a három síknak nincs közös metszéspontja.

II. Megoldás:

A feladatot megoldhatjuk a Cramer-szabály segítségével is. Az egyenletrendszer determinánsa

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-3&1\\4&-1&-1\end{vmatrix}=0,$$

és ez azt jelenti, hogy nincs egyértelmű megoldás. Annak eldöntésére, hogy végtelen sok megoldás van-e, vagy nincs megoldás, szerencsés esetben még egy, általában még három harmadrendű determinánst kell kiszámolnunk. Esetünkben

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&4\\2&-3&-5\\4&-1&-3\end{vmatrix}=30,$$

ezért az egyenletrendszer ellentmondó, megoldás nincs.

22. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned}x+y+z&=1;\\8x-y+2z&=0;\\25x-2y+7z&=1\end{aligned}$$

egyenletű síkok közös metszéspontját!

A közös metszéspont koordinátáit éppen az egyenletrendszer megoldása adja meg. Vizsgáljuk az egyenletrendszer kibővített mátrixát:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\8&-1&2&0\\25&-2&7&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\9&0&3&1\\27&0&9&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\9&0&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ebből leolvasható, hogy $\varrho(\mathbf{A})=\varrho(\mathbf{B})=2$, ezért az egyenletrendszer megoldható; mégpedig $n-\varrho(\mathbf{A})=3-2=1$, ezért egy ismeretlen szabadon választható. A redukált egyenletrendszer

$$\begin{aligned}x+y+z&=1,\\9x\qquad+3z&=1.\end{aligned}$$

Legyen pl. $x=t$, a szabad ismeretlen; ekkor

$$z=\frac{1}{3}-3t, \qquad y=\frac{2}{3}+2t.$$

A három síknak végtelen sok közös pontja van, ami csak úgy lehet, ha a három síknak egy közös egyenese — metszésvonala van. A megoldás mint egyparaméteres értéksokaság éppen ennek az egyenesnek paraméteres egyenletét adja meg.

24. Van-e az

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 1;\\ 2x\qquad -z &= 0;\\ 4x+2y+2z &= 1;\\ 3x+4y+6z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletű síkoknak közös pontjuk?

Oldjuk meg az adott egyenletrendszert!

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -7 & -2\\ 0 & -6 & -10 & -3\\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát $\varrho(\mathrm{A})=3$, és $\varrho(\mathrm{B})=3$, valamint $n=3$ miatt az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van, és ez az

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 1;\\ -2y-3z &= -1;\\ -z &= 0 \end{aligned}$$

redukált egyenletrenletrendszerből számítható ki; mégpedig

$$z=0, \qquad y=\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$

tehát a négy síknak egy közös pontja van, és ez a

$P(0;\tfrac{1}{2};\,0)$ pont.

II. HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA

Ha a lineáris egyenletrendszer homogén, azaz

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= 0;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &= 0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

alakú, akkor a megoldhatóság problémája nem lép fel, hiszen az

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=0$$

értékrendszer mindig megoldása az egyenletrendszernek. Ezt a megoldást *a homogén lineáris egyenletrendszer triviális megoldásának* nevezik. Ez esetben csak az a probléma vetődik fel, hogy mikor van a homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálistól különböző megoldása is.

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha mátrixának rangja kisebb, mint ismeretleneinek száma. Ha van a triviálistól különböző megoldás, akkor egyúttal végtelen sok megoldás van.

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek és az ismeretlenek száma megegyezik, akkor a triviálistól különböző megoldás létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy az egyenletrendszer mátrixának determinánsa 0 *legyen* (vö. az I. fejezet 2. pontjával).

Ha tehát tudjuk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszernek, amelyben az ismeretlenek és egyenletek száma megegyezik, van nemtriviális megoldása, akkor ebből következik, hogy mátrixának determinánsa 0.

Homogén lineáris egyenletrendszerek megoldására is legtöbbször a Gauss-féle algoritmust használjuk, azonban sokszor célszerűbb előbb megállapítani, hogy az egyenletrendszernek van-e nemtriviális megoldása.

Minden homogén lineáris egyenletrendszer megoldásában egy paraméter természetesen fellép (ha csak triviális megoldás létezik, akkor ez nem lényeges), mert ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékrendszer megoldása az egyenletrendszernek, akkor a $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$ értékrendszer is az, hiszen minden egyenlet egyszerűsíthető t-vel. Ebből is következik, hogy ha van nemtriviális megoldás, akkor végtelen sok ilyen megoldás van.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi homogén egyenletrendszert:

$$-x_1-2x_2-x_3=0;$$
$$x_1+x_2+3x_3=0;$$
$$-x_1-3x_2+x_3=0;$$
$$-x_1-4x_2+3x_3=0;$$
$$-x_1-5x_2+5x_3=0.$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&-2&-1&0\\1&1&3&0\\-1&-3&1&0\\-1&-4&3&0\\-1&-5&5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&-2&-1&0\\0&-1&2&0\\0&-1&2&0\\0&-2&4&0\\0&-3&6&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&-2&-1&0\\0&-1&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $\varrho(\mathbf{A})=2$. Mivel $n=3$, ezért $\varrho(\mathbf{A})<n$, és így triviális megoldáson kívül még végtelen sok megoldás van, amelyek a

$$-x_1-2x_2-x_3=0;$$
$$-x_2+2x_3=0$$

redukált egyenletrendszerből számíthatók ki. $n-\varrho(\mathbf{A})=3-2=1$ miatt egyetlen ismeretlent választhatunk szabadon. Legyen pl. $x_3=t$; ekkor $x_2=2x_3=2t$ és $x_1=-2x_2-x_3=-5t$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=0;$$
$$2x_1+x_2-3x_3-x_4+x_5=0;$$
$$-2x_1-x_2-x_3+x_4-x_5=0.$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&-1&1&-1&0\\2&1&-3&-1&1&0\\-2&-1&-1&1&-1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-1&1&-1&0\\0&-1&-1&-3&3&0\\0&1&-3&3&-3&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&-1&1&-1&0\\0&-1&-1&-3&3&0\\0&0&-4&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ebből látható, hogy $\varrho(\mathbf{A})=3$, hiszen

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&-1&-1\\0&0&-4\end{vmatrix}=4\neq 0;$$

Így $\varrho(\mathbf{A})=3<5=n$, tehát az egyenletrendszernek van a triviálistól különböző megoldása. Azonnal látszik, hogy $x_3=0$, és $5-3=2$ számú ismeretlen szabadon választható. Legyen például $x_4=t$, $x_5=u$. Ekkor a redukált egyenletrendszerből $x_2=-3t+3u$; $x_1=2t-2u$.

3. Megoldandó az

$$x_1-2x_2-4x_3+x_4-3x_5=0;$$
$$-x_1+x_2-2x_3-2x_4-2x_5=0;$$
$$2x_1-5x_2-14x_3+x_4-11x_5=0$$

egyenletrendszer.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-2&-4&1&-3&0\\-1&1&-2&-2&-2&0\\2&-5&-14&1&-11&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&-4&1&-3&0\\0&-1&-6&-1&-5&0\\0&-1&-6&-1&-5&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&-4&1&-3&0\\0&-1&-6&-1&-5&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Most $\varrho(\mathbf{A})=2$, mert pl.

$$\begin{vmatrix}1&-2\\0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0;$$

mivel $n=5$, így $n>\varrho(\mathbf{A})$, tehát a triviálistól különböző megoldás létezik, és ez az

$$x_1-2x_2-4x_3+x_4-3x_5=0;$$
$$-x_2-6x_3-x_4-5x_5=0$$

redukált egyenletrendszerből számítható ki. $n-\varrho(\mathbf{A})=5-2=3$, tehát három ismeretlen választható szabadon. Legyen pl. $x_3=t$, $x_4=u$, $x_5=v$; ekkor

$$x_2=-6t-u-5v;$$
$$x_1=-8t-3u-7v.$$

A megoldás háromparaméteres értéksokaság.

4. Határozzuk meg az

$$x_1+2x_2+x_3+x_4=0;$$

$$2x_1+x_2+x_3+2x_4=0;$$

$$x_1+2x_2+2x_3+x_4=0;$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

egyenletrendszer megoldását!

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&1&1&0\\2&1&1&2&0\\1&2&2&1&0\\1&1&1&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&1&0\\0&-3&-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&1&1&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&-1&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&1&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $\varrho(A)=3$, és mivel $n=4$, ezért $\varrho(A)<n$, vagyis az egyenletrendszernek van a triviálistól különböző megoldása is, amely az

$$x_1+2x_2+x_3+x_4=0;$$

$$-x_2=0;$$

$$x_3=0$$

redukált egyenletrendszerből számítható ki.

Legyen pl. $x_4=t$; akkor $x_1=-t$, ennélfogva az egyenletrendszer megoldása:

$$x_1=-t;\quad x_2=0;\quad x_3=0;\quad x_4=t.$$

Figyeljük meg itt is, hogy nem kell feltétlenül minden kötött ismeretlennek a szabad ismeretlentől függnie!

5. Megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0;$$

$$-x_1+x_2-6x_4+x_5=0;$$

$$3x_2+x_3+5x_4-x_5=0;$$

$$2x_3-7x_4+7x_5=0.$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&0\\-1&1&0&-6&1&0\\0&3&1&5&-1&0\\0&0&2&-7&7&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&0\\0&3&3&-2&6&0\\0&3&1&5&-1&0\\0&0&2&-7&7&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&0\\0&3&3&-2&6&0\\0&0&-2&7&-7&0\\0&0&2&-7&7&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&0\\0&3&3&-2&6&0\\0&0&-2&7&-7&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Tehát $\varrho(A)=3$; mivel $n=5$, ezért $\varrho(A)<n$, és az egyenletrendszernek van a triviálistól különböző megoldása is, amely az

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0;$$

$$3x_2+3x_3-2x_4+6x_5=0;$$

$$-2x_3+7x_4-7x_5=0$$

redukált egyenletrendszerből számítható ki. Mivel $n-\varrho(A)=2$, két ismeretlen szabadon választható. Legyen pl. $x_4=u$ és $x_5=v$; akkor az utolsó egyenletből

$$x_3=\frac{7}{2}u-\frac{7}{2}v,$$

továbbá

$$x_2=-\frac{17}{6}u+\frac{3}{2}v,$$

$$x_1=-\frac{53}{6}u+\frac{5}{2}v.$$

6. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0;$$

$$2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0;$$

$$x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0;$$

$$x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0.$$

A B mátrixot most alsó háromszögmátrixszá alakítjuk.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&1&-8&2&1&0\\2&-2&-3&-7&2&0\\1&11&-12&34&-5&0\\1&-5&2&-16&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&16&-14&50&-8&0\\0&8&-7&25&-4&0\\0&16&-14&50&-8&0\\1&-5&2&-16&3&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&16&-14&50&-8&0\\1&-5&2&-16&3&0\end{bmatrix}.$$

Látszik, hogy $\varrho(\mathbf{A})=2$, és mivel $2=\varrho(\mathbf{A})<n=5$, az egyenletrendszernek van a triviálistól különböző megoldása is. Ezt az

$$x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0;$$

$$16x_2-14x_3+50x_4-8x_5=0$$

redukált egyenletrendszerből számíthatjuk ki, amikor is $n-\varrho(\mathbf{A})=3$ ismeretlent szabadon választhatunk. Legyen pl.

$$x_3=t;\quad x_4=u;\quad x_5=v,$$

akkor

$$x_2=\frac{7}{8}t-\frac{25}{8}u+\frac{1}{2}v;$$

$$x_1=\frac{19}{8}t+\frac{8}{3}u-\frac{1}{2}v.$$

7. Határozzuk meg c értékét úgy, hogy az

$$5x_1+2x_2-3x_3=0;$$

$$3x_1-2x_2\qquad=0;$$

$$4x_1+3x_2+cx_3=0$$

egyenletrendszernek ne legyen a triviálistól különböző megoldása.

Mivel három egyenlet és ugyanannyi ismeretlen van, az egyenletrendszernek akkor nincs nemtriviális megoldása, ha $|\mathbf{A}|\neq 0$. Az egyenletrendszer determinánsát az utolsó oszlop szerint kifejtve.

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}5&2&-3\\3&-2&0\\4&3&c\end{vmatrix}=-3(9+8)+c(-10-6)=-51-16c.$$

$|\mathbf{A}|$ tehát nem 0, hacsak $c\neq-\dfrac{51}{16}$. Ettől az egyetlen esettől eltekintve nincs az egyenletrendszernek a triviálistól különböző megoldása.

8. Hogyan kell megválasztanunk c értékét, hogy az

$$x_1-x_2+x_3=0;$$

$$x_1+cx_2+3x_3=0;$$

$$x_1-3x_2-cx_3=0$$

egyenletrendszernek ne legyen a triviálistól különböző megoldása?

Mivel az ismeretlenek és az egyenletek száma megegyezik, a homogén egyetlenrendszernek akkor nincs a triviálistól különböző megoldása, ha $|\mathbf{A}|\neq 0$.

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&c&3\\1&-3&-c\end{vmatrix}=-c^2-2c+3.$$

A determináns értéke akkor (és csak akkor) 0, ha $c=1$ vagy $c=-3$; ettől a két esettől eltekintve minden c értékre az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

9. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x_1+x_2+2x_3-3x_4=0;$$

$$2x_1+3x_2-x_3+x_4=0;$$

$$2x_1-2x_2-x_3+4x_4=0;$$

$$x_1-4x_2-3x_3+2x_4=0$$

egyenletrendszernek csak triviális megoldása van!

Az egyenletrendszer determinánsa:

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&1&2&-3\\2&3&-1&1\\2&-2&-1&4\\1&-4&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&-3\\0&1&-5&7\\0&-4&-5&10\\0&-5&-5&5\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&7\\-4&-5&10\\-5&-5&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&7\\0&-25&38\\0&-30&40\end{vmatrix}=-1000+1140=140,$$

vagyis nem zérus, ezért állításunkat bebizonyítottuk.

10. Mutassuk meg, hogy a

$$-x_1+4x_2+3x_3-5x_4=0;$$

$$3x_1-x_2+6x_3+2x_4=0;$$

$$2x_1+3x_2+10x_3-4x_4=0;$$

$$-7x_1+6x_2-9x_3-9x_4=0$$

homogén egyenletrendszernek van a triviálistól különböző megoldása, mégpedig $x_1=\frac{30}{11}t$, $x_2=-\frac{2}{11}t$, $x_3=t$, $x_4=t$.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&4&3&-5&0\\3&-1&6&2&0\\2&3&10&-4&0\\-7&6&-9&-9&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&4&3&-5&0\\0&11&15&-13&0\\0&11&16&-14&0\\0&-22&-30&26&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}-1&4&3&-5&0\\0&11&15&-13&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\varrho(\mathrm{A})=3$, ezért egy ismeretlen szabadon választható.
A redukált egyenletrendszer

$$-x_1+4x_2+3x_3-5x_4=0;$$

$$11x_2+15x_3-13x_4=0;$$

$$x_3-x_4=0.$$

Ha $x_4=t$, akkor $x_3=t$, $x_2=-\frac{2}{11}t$, $x_1=\frac{30}{11}t$, mint azt állítottuk.

11. Ellenőrizzük, hogy a

$$-x_1+4x_2-5x_3+3x_4+6x_3=0;$$

$$-2x_1-8x_2+10x_3-6x_4-12x_3=0;$$

$$3x_1-11x_2-x_4-5x_3=0;$$

$$2x_1-7x_2-5x_3+2x_4+x_3=0;$$

$$x_1-4x_2+4x_3+x_3=0;$$

egyenletrendszernek megoldása

$$x_1=136u+339v;\qquad x_2=37u+92v;$$

$$x_3=3u+7v;\qquad x_4=u;\qquad x_5=v,$$

ahol u és v szabadon választható.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&4&-5&3&6&0\\2&-8&10&-6&-12&0\\3&-11&0&-1&-5&0\\2&-7&-5&2&1&0\\1&-4&4&0&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&4&-5&3&6&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&-15&8&13&0\\0&1&-15&8&13&0\\0&0&-1&3&7&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}-1&4&-5&3&6&0\\0&1&-15&8&13&0\\0&0&-1&3&7&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\varrho(\mathrm{A})=3$, tehát van triviálistól különböző megoldás és $5-3=2$ ismeretlen szabadon választható. A redukált egyenletrendszer

$$-x_1+4x_2-5x_3+3x_4+6x_3=0;$$

$$x_2-15x_3+8x_4+13x_3=0;$$

$$x_3+3x_4+7x_3=0.$$

Ha $x_4=u$, $x_5=v$, akkor ebből éppen a közölt megoldást kapjuk.

12. Mutassuk meg, hogy az

$$x_1+x_2+2x_3-3x_4=0;$$

$$2x_1+3x_2-x_3+x_4=0;$$

$$2x_1-2x_2-x_3+4x_4=0;$$

$$x_1-4x_2-3x_3+2x_4=0$$

egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&2&-3&0\\2&3&-1&1&0\\2&-2&-1&4&0\\1&-4&-3&2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&-3&0\\0&1&-5&7&0\\0&-4&-5&10&0\\0&-5&-5&5&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&2&-3&0\\0&1&-5&7&0\\0&0&-25&38&0\\0&0&-30&40&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&-3&0\\0&1&-5&7&0\\0&0&-25&38&0\\0&0&0&\frac{-28}{5}&0\end{bmatrix}$$

Mivel $\varrho(\mathrm{A})=4=n$, az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

1. Alapfogalmak

1. Tekintsük a valós számok halmazát és egy V halmazt. A V halmazt *vektortérnek* nevezzük a valós számok felett, ha két tetszőleges elemére — pl. **u**-ra és **v**-re — értelmezve van egy művelet, nevezzük ezt „összeadásnak", amelynek $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ eredménye ismét a V halmaz eleme, és ez az összeadás asszociatív, kommutatív, valamint megfordítható (elvégezhető a „kivonás"), továbbá, ha a V halmaz tetszőleges **u** elemét tetszőleges c valós számmal megszorozva, $c\mathbf{u}$ szintén a V halmaz eleme és ez utóbbi szorzás asszociatív, valamint az összeadással a disztributív törvény köti össze, tehát

$$c_1(c_2\mathbf{u}) = (c_1c_2)\mathbf{u};$$

$$(c_1+c_2)\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{u};$$

$$c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u}+c\mathbf{v}.$$

A V halmaz elemeit általánosabb értelemben *vektoroknak* fogjuk nevezni.

Könnyen belátható, hogy pl. a háromdimenziós, közönséges értelemben vett tér vektorai vektorteret alkotnak a valós számok felett.

Ha a valós számok helyett komplex számokat engedünk meg, akkor a komplex számok felett értelmezett vektortérhez jutunk. Megjegyezzük, hogy annak a halmaznak az elemei, amely felett a vektorteret értelmezzük, lehetnek pl. függvények is.

Mi itt legfeljebb a komplex számok felett értelmezett n-dimenziós vektortérrel foglalkozunk majd.

2. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok egy lineáris kombinációján a

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n$$

vektort értjük, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tetszőleges valós számok.

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorokat *lineárisan függetleneknek* nevezzük, ha a

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n = 0$$

egyenlet csak $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ esetében teljesül. Ha az egyenlet úgy is teljesül, hogy nem minden c_i együttható 0, akkor a vektorok *lineárisan összefüggnek.*

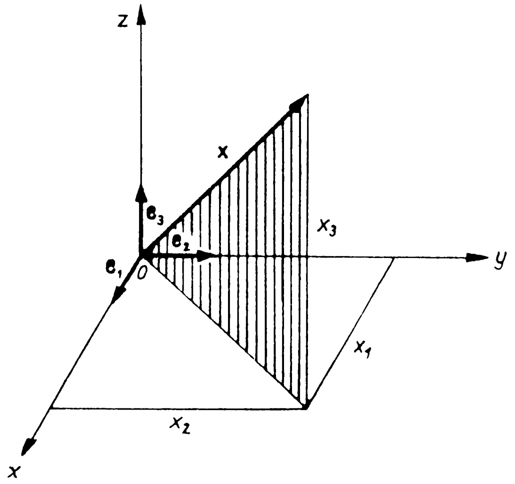
Egy vektortér *bázisának* nevezzük lineárisan független vektorok minden olyan halmazát, amelyek lineáris kombinációjaként a vektortér összes vektora egyértelműen kifejezhető. A bázist alkotó vektorok a *bázisvektorok*. Egy vektortérnek több bázisa is lehet, de ezek valamennyien ugyanannyi elemből állnak.

Ha a bázisok n-eleműek, akkor a vektorteret *n-dimenziós vektortérnek* nevezik. Az n-dimenziós térben n-nél több vektor nem lehet lineárisan független.

Ha a bázisvektorok egységvektorok, a bázist *normált bázisnak*, ha a bázisvektorok páronként egymásra merőlegesek, a bázist *ortogonális bázisnak* nevezik. Ha a két feltétel egyszerre teljesül, a bázis *ortonormált bázis.*

Például a háromdimenziós tér vektorai által alkotott vektortér ortonormált bázisát alkotja a lineárisan független

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^*; \quad \mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^*; \quad \mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^*$$



1. ábra

egységvektor-hármas, amelyekkel a háromdimenziós tér minden más vektora egyértelműen kifejezhető:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

Az x_1, x_2, x_3 valós számok az $\mathbf{x}$ vektor *koordinátái*. Az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektorokon át fektetett x-, y-, z-tengelyek a szokásos derékszögű koordináta-rendszert határozzák meg (1. ábra).

Két vektor lineáris függetlensége azt jelenti, hogy megfelelő koordinátáik aránya nem állandó; lineáris összefüggése viszont azt, hogy megfelelő koordinátáik arányosak.

3. Az n-dimenziós esetben, ha a bázisvektorok az

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^*, \quad \mathbf{e}_2 = [0, 1, \dots, 0]^*, \dots, \mathbf{e}_n = [0, 0, \dots, 1]^*$$

egységvektorok, a bázist $\mathbf{E}_n$ vagy röviden $\mathbf{E}$ bázisként jelölik, amely felfogható n-edrendű egységmátrixként:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}.$$

Segítségével tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{E}\mathbf{x}_E$$

alakban írható, ahol az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok az $\mathbf{x}$ vektor koordinátái az $\mathbf{E}$ bázisra nézve és $\mathbf{x}_E = [x_1, x_2, \dots, x_n]^*$. Ha ugyanennek az n-dimenziós térnek egy $\mathbf{Z}$ másik bázisát a $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$ lineárisan független vektorok alkotják, akkor

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 + \dots + a_n\mathbf{z}_n = \mathbf{Z}\mathbf{x}_Z$$

alakban felírható, ahol az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok az $\mathbf{x}$ vektor koordinátái a $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n]$ bázisra nézve, azaz $\mathbf{x}_Z = [a_1, a_2, \dots, a_n]^*$. Az $\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{x}_E = \mathbf{Z}\mathbf{x}_Z$ összefüggésből következik:

$$\mathbf{x}_E = \mathbf{Z}\mathbf{x}_Z; \quad \text{ill.} \quad \mathbf{x}_Z = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{x}_E.$$

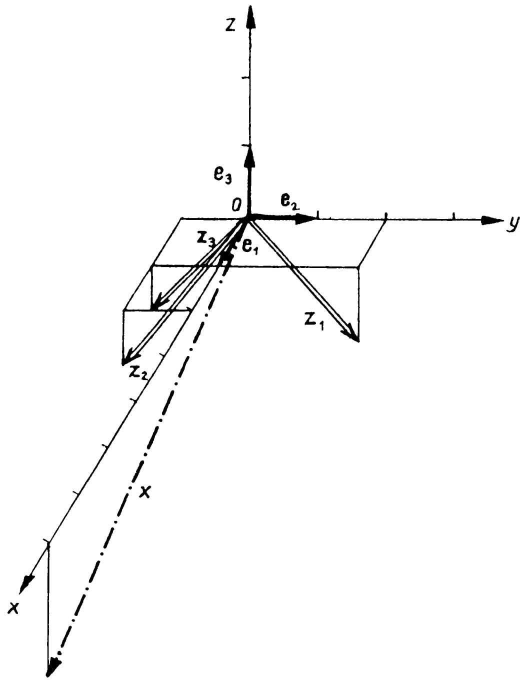
Ha pl. az $\mathbf{x}$ vektornak a

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bázisra nézve $\mathbf{x}_Z = [1, 2, 3]^*$ a koordinátái, akkor $\mathbf{x}$-nek $\mathbf{E}$ bázisbeli koordinátái

$$\mathbf{x}_E = \mathbf{Z}\mathbf{x}_Z = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3]\,\mathbf{x}_Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

vagyis $\mathbf{x}_E = [7, 0, -2]^*$ (2. ábra).



2. ábra

Fordítva: az $\mathbf{x}_E=[7, 0, -2]^*$ vektornak az előbbi $\mathbf{Z}=[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3]$ bázisra vonatkozó koordinátái

$$\mathbf{x}_Z = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [1, 2, 3]^*,$$

mert

$$|\mathbf{Z}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -15,$$

ennélfogva

$$\mathbf{Z}^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -4 & -5 & 1 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Általában: ha az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{Z}$ bázisra vonatkozó koordinátái $\mathbf{x}_Z$, $\mathbf{W}$ bázisra vonatkozó koordinátái $\mathbf{x}_W$, akkor a két bázisbeli koordináták közötti összefüggés $\mathbf{x}=\mathbf{W}\mathbf{x}_W=\mathbf{Z}\mathbf{x}_Z$, vagyis

$$\mathbf{x}_W = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{x}_Z = \mathbf{B}\mathbf{x}_Z.$$

Ha valamely bázisban adott koordinátákról egy másik bázisra akarunk áttérni, akkor azt a $\mathbf{W}$ mátrixot, amelyet az új bázisvektorok alkotnak, *áttérési mátrixnak* nevezzük, az eljárást pedig, amellyel az új koordinátákat meghatározzuk, *báziscserének*. A $\mathbf{B}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}$ mátrix a *báziscsere mátrixa.*

4. Bebizonyítható, hogy ha az n-dimenziós térben m számú vektor (azonos bázisra vonatkozó) koordinátáit m oszlopú és n sorú mátrixba rendezve (ahol egy oszlop egy vektornak felel meg), a kapott mátrix rangja $r \leqq m$, akkor az m adott vektor között r számú lineárisan független van.

Gyakorló feladatok

1. Keressünk maximális elemszámú lineárisan független rendszert a következő vektorok között:

$$\mathbf{a} = [2, -2, -4]^*; \quad \mathbf{b} = [1, 9, 3]^*; \quad \mathbf{c} = [-2, -4, 1]^*;$$

$$\mathbf{d} = [3, 7, -1]^*.$$

I. Megoldás:

Mivel a háromdimenziós térben legfeljebb három vektor lehet lineárisan független, és az adott négy vektorból négyféle módon választható ki három, négy vektorhármasról akarjuk eldönteni, van-e közöttük lineárisan független. Felírjuk rendre e vektorhármasokból képezhető mátrixokat, és kiszámítjuk rangjukat mindaddig, amíg esetleg valamelyik rangja 3-mal lesz egyenlő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 9 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{A}| = 0, \quad A_{11} = -3 \neq 0, \quad \varrho(\mathbf{A}) = 2;$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 7 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{B}| = 0, \quad B_{11} = -3 \neq 0, \quad \varrho(\mathbf{B}) = 2;$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{C}| = 0, \quad C_{11} = -30 \neq 0, \quad \varrho(\mathbf{C}) = 2;$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{D}| = 0 \quad D_{11} = 21 \neq 0, \quad \varrho(\mathbf{D}) = 2.$$

A négy vektorból tehát nem választható ki három lineárisan független, csupán kettő. Ilyen pl. a és b; ekkor — mint ez közvetlenül is észrevehető —

$$\mathbf{c} = -\frac{7}{10}\mathbf{a} - \frac{3}{5}\mathbf{b};$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

II. Megoldás:

Egyszerűbb az eljárás, ha rögtön az adott négy vektorból képzet

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját állapítjuk meg:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}2&1&-2&3\\-2&9&-4&7\\-4&3&1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&-2&3\\0&10&-6&10\\0&5&-3&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&-2&3\\0&10&-6&10\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Így látszik, hogy $\varrho(\mathbf{R})=2$, tehát a vektorok között két lineárisan független van.

2. Döntsük el, hogy az $\mathbf{x}_1=[1,2,2,1]^*$, $\mathbf{x}_2=[3,4,4,3]^*$ és $\mathbf{x}_3=[1,0,0,1]^*$ vektorok lineárisan függetlenek-e!

I. Megoldás:

A három vektor koordinátáit megfigyelve észrevehetjük, hogy mindegyiknek két belső és két külső koordinátája megegyezik, továbbá ha $\mathbf{x}_2$-ből levonjuk $\mathbf{x}_3$-at, akkor éppen $\mathbf{x}_1$ kétszeresét kapjuk, vagyis

$$\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3=2\mathbf{x}_1,$$

tehát

$$2\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3=0,$$

a három vektor nem lineárisan független. Bármelyik kettő azonban már lineárisan független, hiszen megfelelő koordinátáik nem arányosak.

Így pl. $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_3$ bázist alkothat. Ha az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_3$ vektort választjuk bázisnak, $\mathbf{x}_2$ e kettővel kifejezhető, mégpedig

$$\mathbf{x}_2=2\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_3.$$

II. Megoldás:

A vektorok koordinátáiból képezzük az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&4&0\\2&4&0\\1&3&1\end{bmatrix}$$

mátrixot és kiszámítjuk rangját!

Elemi átalakításokkal

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&4&0\\2&4&0\\1&3&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&1\\2&4&0\\2&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&1\\2&4&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

és erről a mátrixról már látható, hogy minden harmadrendű determinánsa 0, de van olyan másodrendű aldeterminánsa, amely nem 0, pl.:

$$\begin{vmatrix}3&1\\4&0\end{vmatrix}=-4\neq 0;$$

így $\varrho(\mathbf{A})=2$, ami azt jelenti, hogy a három vektor közül csak két lineárisan független van.

3. Állapítsuk meg, hogy lineárisan független-e a következő három vektor:

$$\mathbf{x}_1=[-3,2,-1]^*;\qquad \mathbf{x}_2=\left[2,-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right]^*;\qquad \mathbf{x}_3=\left[-\frac{3}{2},1,-\frac{1}{2}\right]^*.$$

I. Megoldás:

Számítsuk ki a vektorok koordinátáiból képezett

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3&2&-\frac{3}{2}\\2&-\frac{4}{3}&1\\-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

mátrix rangját! Elemi átalakításokkal

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3&2&-\frac{3}{2}\\2&-\frac{4}{3}&1\\-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

és most már látszik, hogy $\varrho(\mathbf{A})=1$, tehát a három vektor nem lineárisan független, sőt közülük nem választható ki két lineárisan független vektor sem.

II. Megoldás:

Szemrevételezve a három vektort, észrevehetjük, hogy éppen a második koordinátáit kapjuk, ha az első koordinátáit rendre $\left(-\frac{2}{3}\right)$-dal szorozzuk és a harmadikét, ha 2-vel osztjuk, tehát mindhárom vektor megfelelő koordinátái arányosak, vagyis még két független sincs közöttük.

4. Hány lineárisan független vektor van az $\mathbf{x}_1=[1,1,1,0]^*$; $\mathbf{x}_2=[4,3,2,-1]^*$; $\mathbf{x}_3=[2,1,0,-1]^*$ és $\mathbf{x}_4=[4,2,0,-2]^*$ vektorok között?

Könnyen észrevehető, hogy $\mathbf{x}_4=2\mathbf{x}_3$, és így már legfeljebb csak három vektor lehet lineárisan független. Elképzelhető, hogy ezek sem lineárisan függetlenek, de ez nem látszik első pillanatra. Számítsuk ki tehát az első három vektorból képezhető mátrix rangját! ($\mathbf{x}_4$-et elhagyhatjuk, mert már kiderült, hogy nem független $\mathbf{x}_3$-tól.)

Elemi átalakításokkal ez így alakítható át háromszögmátrixszá:

$$A=\begin{bmatrix}1&4&2\\1&3&1\\1&2&0\\0&-1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-1&-1\\0&-2&-2\\0&-1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Az utóbbi mátrixról már leolvasható, hogy rangja $\varrho=2$, hiszen a belőle képezhető valamennyi harmadrendű determináns 0, de van nem 0 másodrendű aldeterminánsa. Ezért az adott négy vektor között csupán kettő lehet lineárisan független! (Hogy nem bármely kettő az, azt már tudjuk, hiszen láttuk, hogy $\mathbf{x}_4$ és $\mathbf{x}_3$ nem függetlenek.)

Figyeljük meg, hogy ha n vektor közül $k(<n)$ számú lineárisan független van, ez nem jelenti azt, hogy *bármely* k számú lineárisan független.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy vektorrendszer vektorai között előfordul a zérusvektor, akkor ezek lineárisan összefüggnek!

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggnek, ha a

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n=0$$

egyenlőség úgy teljesül, hogy a c_i együtthatók valamelyike nem 0. Ha a $\mathbf{v}_i$ vektorok között előfordul a zérusvektor, akkor annak együtthatóját zérustól különbözőnek, az összes többit zérusnak választva, az előbbi egyenlőség úgy teljesül, hogy a c_i együtthatók valamelyike nem zérus, ezért a szóban forgó vektorok lineárisan összefüggnek.

6. Mutassuk meg, hogy a háromdimenziós térben az $\mathbf{x}_1=[1, 2, 1]^*$ és $\mathbf{x}_2=[1, 2, 3]^*$, valamint az $\mathbf{y}_1=[0, 0, 1]^*$ és $\mathbf{y}_2=[1, 2, 5]^*$ vektorok ugyanazt a síkot határozzák meg (feszítik ki) (3. ábra).

Mindkét vektorpár alkalmas egy-egy sík (kétdimenziós tér) meghatározására, hiszen rátekintéssel látható, hogy lineárisan függetlenek.

Most már csak azt kell megmutatni, hogy a tetszőleges $\mathbf{x}=m_1\mathbf{x}_1+m_2\mathbf{x}_2$ vektor kifejezhető az $\mathbf{y}_1$ és $\mathbf{y}_2$ vektorokkal és fordítva, tetszőleges $\mathbf{y}=$ $=n_1\mathbf{y}_1+n_2\mathbf{y}_2$ vektor kifejezhető az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ vektorokkal. Ez valóban lehetséges, ugyanis

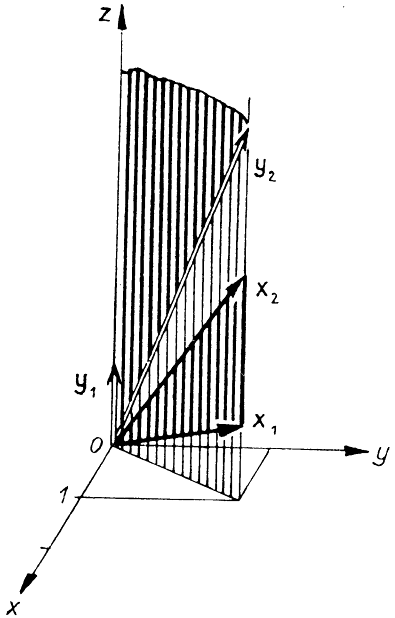
$$\mathbf{y}_1=\frac{1}{2}\mathbf{x}_2-\frac{1}{2}\mathbf{x}_1;$$

$$\mathbf{y}_2=2\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1$$

és

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{y}_2-4\mathbf{y}_1;$$

$$\mathbf{x}_2=\mathbf{y}_2-2\mathbf{y}_2$$



3. ábra

és így

$$m_1\mathbf{x}_1+m_2\mathbf{x}_2=(n_1+n_2)\mathbf{y}_1-(4n_1+2n_2)\mathbf{y}_2,$$

ill.

$$n_1\mathbf{y}_1+n_2\mathbf{y}_2=\left(\frac{1}{2}m_1+2m_2\right)\mathbf{x}_1-\left(\frac{1}{2}m_1+m_2\right)\mathbf{x}_2.$$

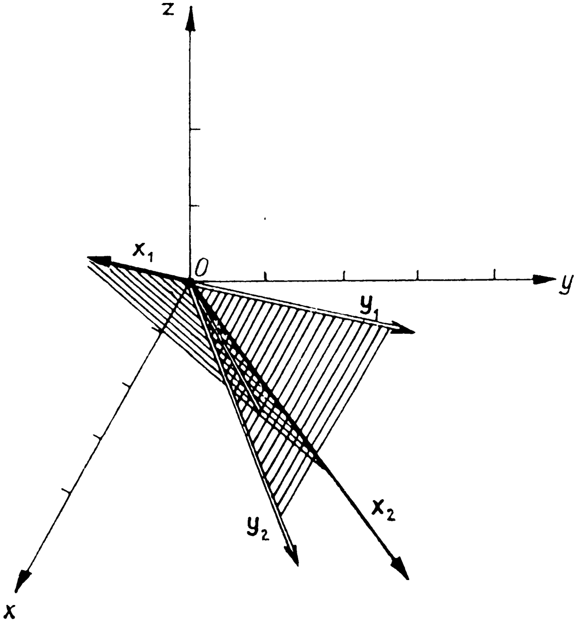
Ez geometriailag azt jelenti, hogy $\mathbf{y}_1$ és $\mathbf{y}_2$ benne vannak az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ által kifeszített síkban; ha tehát síkot feszítenek ki, akkor ez csak ugyanaz a sík lehet.

7. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{x}_1=[1, -1, 1]^*$ és $\mathbf{x}_2=[3, 4, -2]^*$ vektorok nem feszítik ki ugyanazt a síkot, mint az $\mathbf{y}_1=[-2, 2, -2]^*$ és $\mathbf{y}_2=[4, 3, 1]^*$ vektorok!

Mindkét vektorpár egy-egy síkot feszít ki a háromdimenziós térben, mert lineárisan függetlenek (4. ábra). Az általuk meghatározott síkok azonban nem lehetnek azonosak, mert ez esetben mind $\mathbf{y}_1$, mind $\mathbf{y}_2$ is kifejezhető volna az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ vektorokkal, pl. az

$$\mathbf{y}_1=m_1\mathbf{x}_1+m_2\mathbf{x}_2;$$

$$\mathbf{y}_2=n_1\mathbf{x}_1+n_2\mathbf{x}_2$$



4. ábra

alakban. Könnyű észrevenni, hogy $y_1 = -2x_1$, azonban a második egyenletből a megfelelő koordinátákra felírt

$$4 = n_1+3n_2;$$

$$3 = -n_1+4n_2;$$

$$1 = n_1-2n_2$$

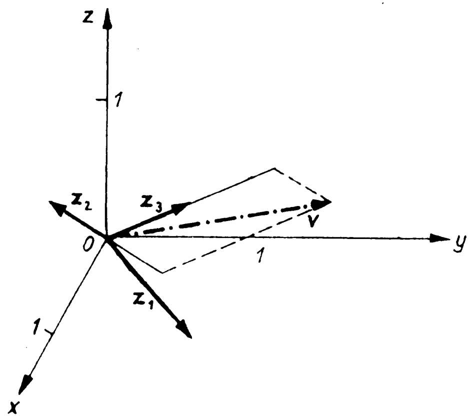
egyenletrendszer ellentmondó, ui. a két első egyenletet összeadva $n_2=1$ adódik, a két utolsót összeadva pedig $n_2=2$. Ezért $\mathbf{y}_2$ nem fejezhető ki az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ vektorokkal, vagyis a két sík nem azonos.

8. Mutassuk meg, hogy ha a 7. Gyakorló feladatban az $\mathbf{y}_1=[9, 5, -1]^*$ és $\mathbf{y}_2=[4, 3, -1]^*$ vektorokat ajduk meg, a két vektorpár ugyanazt a síkot feszíti ki!

Most kifejezhető az $\mathbf{y}_1$ és $\mathbf{y}_2$ vektor az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ vektorral, nevezetesen

$$\mathbf{y}_1 = 3\mathbf{x}_1+2\mathbf{x}_2; \qquad \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2.$$

9. Legyen $\mathbf{v}_Z=[0, -1, 2]^*$ a $\mathbf{z}_1=[1, 1, 0]^*$, $\mathbf{z}_2=[1, 0, 1]^*$, $\mathbf{z}_3=[1, 1, 1]^*$ bázisra vonatkoztatva (5. ábra). Mik $\mathbf{v}$ koordinátái az $\mathbf{E}$ bázisban?



5. ábra

Most $\mathbf{B}=\mathbf{Z}$, ezért

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{Z}\mathbf{v}_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát $\mathbf{v}_E=[1, 2, 1]^*$.

10. Legyen $\mathbf{u}_E=[1, 2, 1]^*$. Mik az $\mathbf{u}$ vektor koordinátái a $\mathbf{z}_1=[1, 1, 0]^*$, $\mathbf{z}_2=[1, 0, 1]^*$, $\mathbf{z}_3=[1, 1, 1]^*$ bázisra vonatkoztatva?

$$\mathbf{u}_Z = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{u}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

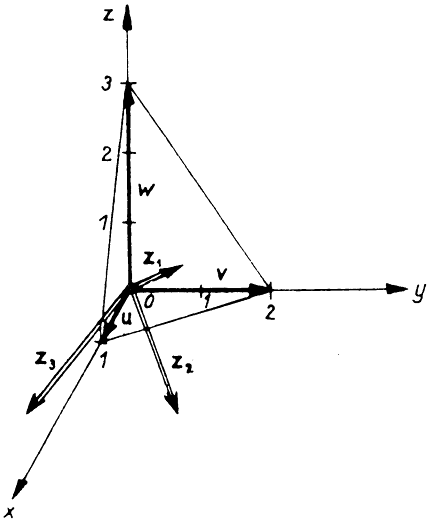
mert

$$|\mathbf{Z}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1-1 = -1 \neq 0,$$

és így létezik

$$\mathbf{Z}^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Legyen az $\mathbf{E}$ bázisban egy háromszög csúcsaiba mutató három helyvektor $\mathbf{u}=[1, 0, 0]^*$, $\mathbf{v}=[0, 2, 0]^*$, $\mathbf{w}=[0, 0, 3]^*$. Mik a három vektor koordinátái a $\mathbf{z}_1=[1, 1, 1]^*$, $\mathbf{z}_2=[1, 1, -1]^*$, $\mathbf{z}_3=[1, -1, -1]^*$ bázisra vonatkoztatva (6. ábra)?



6. ábra

A báziscsere mátrixa $\mathbf{B}=\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}=\mathbf{Z}^{-1}$. Mivel

$$|\mathbf{Z}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

ezért

$$\mathbf{Z}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

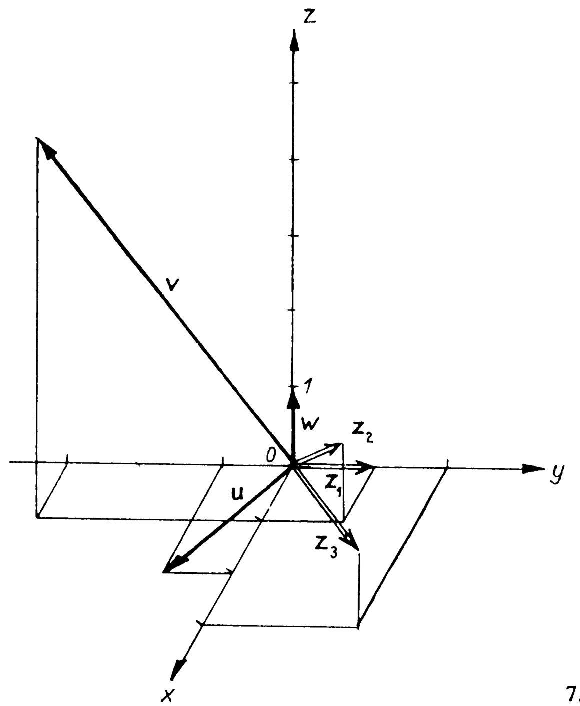
Így

$$\mathbf{u_Z} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v_Z} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{w_Z} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

12. Keressük meg a háromdimenziós $\mathbf{E}$ bázisban adott $\mathbf{u}=[2, -1, 0]^*$, $\mathbf{v}=[1, -3, 5]^*$, $\mathbf{w}=[0, 0, 1]^*$ vektorok koordinátáit a $\mathbf{z}_1=[0, 1, 0]^*$, $\mathbf{z}_2=[1, 1, 1]^*$ és $\mathbf{z}_3=[3, 2, 1]^*$ bázisra vonatkoztatva (7. ábra)!



7. ábra

A báziscsere mátrixa $\mathbf{B}=\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}=\mathbf{Z}^{-1}$. Mivel

$$|\mathbf{Z}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-1 = 2 \neq 0,$$

ezért

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

és így

$$\mathbf{u}_Z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}_Z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -12 \\ 14 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{w}_Z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

13. Jelölje $\mathbf{x}_Z$ az $\mathbf{x}$ háromdimenziós vektornak a $\mathbf{z}_1=[1, 1, 0]^*$, $\mathbf{z}_2=[1, 0, 1]^*$, $\mathbf{z}_3=[1, 1, 1]^*$ bázisra vonatkozó koordinátáit, $\mathbf{x}_W$ ugyanennek a vektornak a $\mathbf{w}_1=[1, 1, 2]^*$, $\mathbf{w}_2=[2, 2, 1]^*$, $\mathbf{w}_3=[1, 2, 2]^*$ bázisra vonatkozó koordinátáit. Keressük meg azt a $\mathbf{B}$ mátrixot, amelyre

$$\mathbf{x}_W = \mathbf{B}\mathbf{x}_Z,$$

vagyis hajtsuk végre az előírt báziscserét!

A keresett $\mathbf{B}$ mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z},$$

ahol

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$|\mathbf{W}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+8+1-(4+4+2) = 3 \neq 0,$$

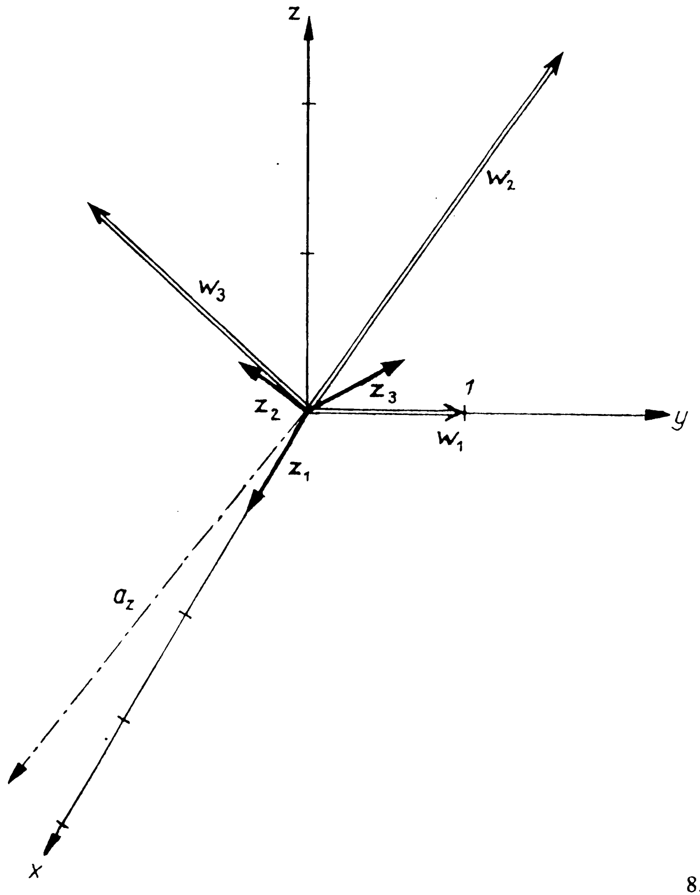
ezért létezik $\mathbf{W}^{-1}$, mégpedig

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Így

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Legyen két háromdimenziós bázisunk $\mathbf{z}_1=[1, 0, 0]^*$, $\mathbf{z}_2=[1, 0, 1]^*$, $\mathbf{z}_3=[1, 1, 1]^*$, valamint $\mathbf{w}_1=[0, 1, 0]^*$, $\mathbf{w}_2=[1, 2, 3]^*$, $\mathbf{w}_3=[1, -1, 1]^*$. Ha $\mathbf{a}_Z=[1, -2, -4]^*$ (8. ábra), határozzuk meg $\mathbf{a}_W$-t!



8. ábra

A báziscsere mátrixa

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}$$

és ezzel

$$\mathbf{a}_W = \mathbf{B}\mathbf{a}_Z.$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$|\mathbf{W}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3-1 = 2 \neq 0,$$

ezért létezik

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

így

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Végül

$$\mathbf{a}_W = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}5 \\ -0{,}5 \\ -4{,}5 \end{bmatrix}.$$

2. Lineáris transzformációk

1. Legyen $\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^*$ és $\mathbf{y} = [y_1, y_2, ..., y_n]^*$ az $\mathbf{E}_n$ bázis által meghatározott n-dimenziós vektortér egy-egy vektora. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ ($\mathbf{E}_n$-re vonatkozó) koordinátái között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

vagy röviden

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

ahol $\mathbf{A} = [a_{ik}]$. Az előbbi egyenletrendszer egy *transzformációt (leképezést)* fejez ki, amely az n-dimenziós vektortér $\mathbf{x}$ vektorát $\mathbf{y}$ vektorába, az $\mathbf{x}$ vektor ún. *képébe* viszi át. A transzformáció megadható az *együtthatók* $\mathbf{A}$ *mátrixával.*

Ha ez a transzformáció az $\mathbf{x}_1$ vektort az $\mathbf{y}_1$ vektorba, az $\mathbf{x}_2$ vektort pedig az $\mathbf{y}_2$ vektorba viszi át, akkor tetszőleges a, b valós számok esetén az $a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$ vektort az $a\mathbf{y}_1 + b\mathbf{y}_2$ vektorba viszi át, ezért *lineáris transzformációnak* nevezzük.

A lineáris transzformációt *regulárisnak* vagy *nemszingulárisnak* nevezzük, ha *különböző* $\mathbf{x}$ *vektorok képe mindig különböző*; egyébként a lineáris transzformáció *szinguláris.* Belátható, hogy a lineáris transzformáció akkor nemszinguláris, ha a transzformáció együtthatómátrixa (röviden: mátrixa) nemszinguláris. Egy nemszinguláris lineáris transzformáció lineárisan független vektorokat lineárisan független vektorokba visz át és lineárisan összefüggőket lineárisan összefüggőkbe.

Ha az n-dimenziós vektortérben az $\mathbf{A}$ mátrixszal megadott lineáris transzformáció az $\mathbf{x}$ vektort az $\mathbf{y}$ vektorba, a $\mathbf{B}$ lineáris transzformáció az $\mathbf{y}$ vektort a $\mathbf{z}$ vektorba, a $\mathbf{C}$ lineáris transzformáció pedig a $\mathbf{z}$ vektort a $\mathbf{v}$ vektorba viszi át, és így tovább, akkor

$$(\mathbf{BA})\mathbf{x} = \mathbf{z};$$

$$(\mathbf{CBA})\mathbf{x} = \mathbf{v},$$

vagyis több lineáris transzformáció egymás utáni végrehajtása egyetlen lineáris transzformációval pótolható, amelynek mátrixa az egyes transzformációk mátrixának olyan szorzata, amelyben a következő transzformáció mátrixával mindig balról szorzódik a megelőző transzformáció mátrixa.

Ha az $\mathbf{A}$ mátrixszal adott lineáris transzformáció nemszinguláris, akkor létezik az egyértelműen meghatározott

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

inverz transzformáció, és ez az $\mathbf{y}$ képvektorhoz az eredeti $\mathbf{x}$ vektort rendeli. A tárgy- és képvektorok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn.

2. A fejezet elején felírt egyenletrendszer felfogható nemcsak úgy, mint két vektornak azonos bázisra vonatkozó koordinátái közötti összefüggés, hanem úgy is, mint ugyanazon vektornak két különböző bázisra vonatkozó koordinátái közötti összefüggés. Ilyenkor a lineáris transzformáció *koordinátarendszer-transzformációt*, azaz báziscserét jelent, mégpedig $\mathbf{A}$ az áttérési mátrix arra az új bázisra, mely $\mathbf{x}$-et $\mathbf{y}$-ba viszi át, és $\mathbf{A}^{-1}$ az az áttérési mátrix, mely $\mathbf{y}$-t visszatranszformálja $\mathbf{x}$-be.

3. Legyen a $\mathbf{Z}$ bázisban adott $\mathbf{x}_Z$ vektornak az $\mathbf{A}$ mátrixszal megadott lineáris transzformáció végrehajtása utáni képe $\mathbf{y}_Z$, azaz $\mathbf{y}_Z = \mathbf{A}\mathbf{x}_Z$. Hajtsunk végre báziscserét, és legyenek $\mathbf{x}_Z$ és $\mathbf{y}_Z$

új **W** bázisra vonatkoztatott koordinátái $\mathbf{x}_W$ és $\mathbf{y}_W$. Ekkor létezik egy olyan **B** mátrix, mégpedig $\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}$, hogy $\mathbf{x}_W = \mathbf{B}\mathbf{x}_z$ és $\mathbf{y}_W \mathbf{B}\mathbf{y}_z$, továbbá

$$\mathbf{x}_Z = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_W \quad \text{és} \quad \mathbf{y}_Z = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{y}_W.$$

Az utóbbit felhasználva:

$$\mathbf{y}_W = \mathbf{B}\mathbf{y}_Z = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}_Z = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_W = \mathbf{C}\mathbf{x}_W,$$

így az új rendszerben az $\mathbf{y}_Z = \mathbf{A}\mathbf{x}_Z$ transzformációnak az

$$\mathbf{y}_W = \mathbf{C}\mathbf{x}_W$$

transzformáció felel meg, ahol

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}.$$

Az **A** és **C** mátrixokat, amelyekre

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$$

és ahol **B** nemszinguláris, *hasonló mátrixoknak*, az **A** és **C** transzformációkat *hasonló transzformációknak* nevezzük.

Be lehet bizonyítani, hogy két mátrix hasonlóságának ez a definíciója egyenértékű a 157. oldalon adott definícióval.

Tekintsük pl. a **E** bázisban az $\mathbf{x}_E = [3, 0, 2]^*$ vektort és az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixszal adott lineáris transzformációt. Legyen a vektortér egy új bázisa a $\mathbf{w}_1 = [1, 2, 1]^*$, $\mathbf{w}_2 = [1, -1, 2]^*$ és $\mathbf{w}_3 = [1, -1, -1]^*$ vektorokkal adott. *a)* Határozzuk meg az **x** vektor képének koordinátáit a **W** bázisra vonatkoztatva! *b)* Keressük meg az $\mathbf{y}_E = \mathbf{A}\mathbf{x}_E$ transzformációnak megfelelő $\mathbf{y}_W = \mathbf{C}\mathbf{x}_W$ transzformációt! *c)* Ezt az eredményünket felhasználva keressük meg $\mathbf{x}_W$ képét: $\mathbf{y}_W$-t!

a) Az **E** bázisról a **W** bázisra áttérve, a báziscsere mátrixa $\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1}$, ahol az áttérési mátrix,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

nemszinguláris, mert determinánsa $|\mathbf{W}| = 9$, így

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Az **x** vektor képe $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ alapján:

$$\mathbf{y}_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

ill. a **W** bázisra vonatkoztatva:

$$\mathbf{y}_W = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}_E = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42 \\ 20 \\ 19 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_W = \left[\frac{14}{3}, \ \frac{20}{9}, \ \frac{19}{9}\right]^*.$$

b) Az új **W** bázisbeli transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{C} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}.$$

				1	1	3	1	1	1	
			$\mathbf{A} =$	1	2	1	2	−1	−1	$= \mathbf{W}$
				1	3	2	1	2	−1	
	3	3	0	6	9	12	36	21	−15	
$9\mathbf{W}^{-1} =$	1	−2	3	2	6	7	21	10	−11	$= 9\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}$.
	5	−1	−3	1	−6	8	−3	23	−1	
	9	0	0	9	9	27	54	54	−27	

Ebből

$$\mathbf{C} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Mivel

$$\mathbf{y}_W = \mathbf{C}\mathbf{x}_W,$$

határozzuk meg előbb $\mathbf{x}_W$-t!

$$\mathbf{x}_W = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}_E = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így

$$\mathbf{y}_W = \mathbf{C}\mathbf{x}_W = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42 \\ 20 \\ 19 \end{bmatrix},$$

vagyis

$$\mathbf{y}_W = \left[\frac{14}{3}, \ \frac{20}{9}, \ \frac{19}{9}\right]^*,$$

mint az előbb már láttuk!

Eredményünk azt is mutatja, hogy a báziscsere és a lineáris transzformáció műveletei felcserélhetők.

Több speciális lineáris transzformáció mátrixa a Gyakorló feladatok között szerepel.

Gyakorló feladatok

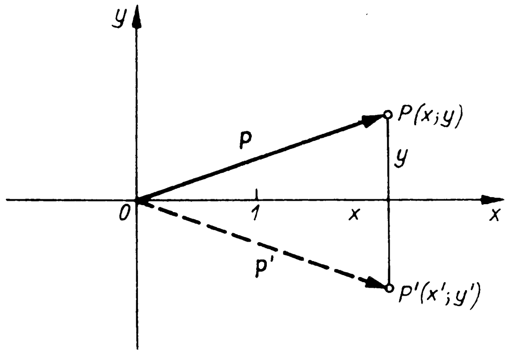
1. Tekintsük az (x, y) sík egy tetszőleges $P(x; y)$ pontját. Tükrözzük ezt a pontot az x-tengelyre. Mik a tükörkép koordinátái? Írjuk fel a *tükrözést* jelentő utasítást mátrix alakban!

I. Megoldás:

$P(x; y)$-nak az x-tengelyre vett tükörképe $P'(x; -y)$; más jelöléssel $\mathbf{p} = [x, y]^*$-nak az x-tengelyre vett tükörképe $\mathbf{p}' = [x', y']^* = [x, -y]^*$ (9. ábra); ez azt jelenti, hogy

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y;$$

$$y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y$$



9. ábra

kell legyen, amiből a transzformáció mátrixa leolvasható:

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Valóban

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{T}_x$-et az x-tengelyre *tükröző mátrixnak* szokás nevezni.

Világos, hogy kétszer egymás után tükrözve a P pontot az x-tengelyre, az eredeti pontba jutunk, ami a

$$\mathbf{T}_x \cdot \mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

mátrixból is látszik.

II. Megoldás:

A feladat megfogalmazható így is: Tekintsük a $P(x; y)$ pontot az $\mathbf{e}_1 = [1, 0]^*$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1]^*$ síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben (bázisban), majd fordítsuk meg az y-tengely irányítását, azaz térjünk át az $\mathbf{e}_1' = [1, 0]^*$, $\mathbf{e}_2' = [0, -1]^*$ koordinátarendszerre (bázisra) és határozzuk meg P koordinátáit ez új rendszerre vonatkoztatva!

Az áttérési mátrix

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

nemszinguláris, mert $|W| = -1$; így a báziscsere mátrixa

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

és ezzel

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix},$$

mint előbb is láttuk.

A transzformáció (báziscsere) mátrixa és az áttérési mátrix most megegyezik ($\mathbf{T}_x = \mathbf{W}$), mert $(\mathbf{T}_x)^2 = \mathbf{E}$, és így $\mathbf{W} = \mathbf{T}_x^{-1} = \mathbf{T}_x^{-1}\cdot(\mathbf{T}_x)^2 = \mathbf{T}_x$.

2. Mutassuk meg, hogy ha a $P(x; y)$ pontot az y-tengelyre tükrözzük, a transzformáció mátrixa

$$\mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és ugyanez a báziscsere mátrixa is.

Ha $P(x; y)$ tükörképe $P'(x'; y')$, a transzformációs egyenletek

$$x' = -1\cdot x + 0\cdot y;$$

$$y' = 0\cdot x + 1\cdot y,$$

és ebből $\mathbf{T}_y$ már leolvasható.

Az áttérési mátrix

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és a báziscsere mátrixa

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

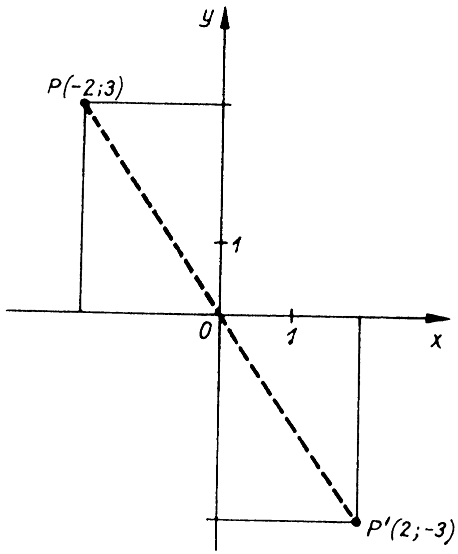
3. Tükrözzük a $P(-2; 3)$ pontot az origóra (10. ábra).

P-nek az origóra való tükrözését pl. úgy állíthatjuk elő, hogy előbb az x-, majd az y-tengelyre tükrözzük. A transzformáció mátrixa tehát — az előző két feladat eredményét felhasználva —

$$\mathbf{T}_O = \mathbf{T}_y\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

és ennek segítségével

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$



10. ábra

4. Tükrözzük a $P(x; y)$ pontot az $y = x$ szögfelező egyenesre! Írjuk fel a tükrözőmátrixot és a báziscsere mátrixát!

Az $y = x$ egyenesre tükrözés azt jelenti, hogy a koordináták szerepet cserélnek (11. ábra), azaz

$$x' = 0\cdot x + 1\cdot y;$$

$$y' = 1\cdot x + 0\cdot y,$$

tehát

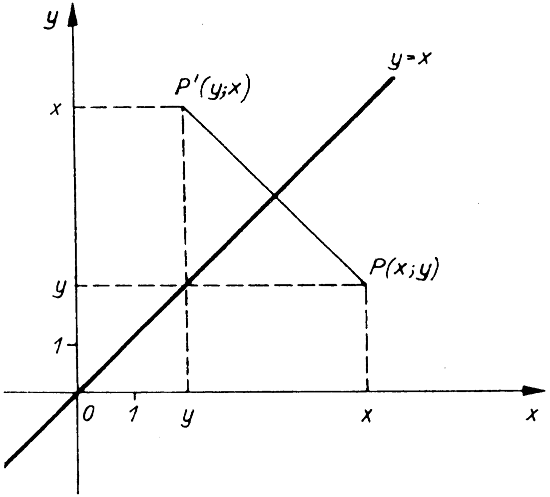
$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Valóban

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}_1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

A koordinátarendszer-transzformáció most a koordinátarendszer tengelyeinek megcserélését jelenti, tehát az új bázis az $\mathbf{e}_1' = [0, 1]^*$ és $\mathbf{e}_2' = [1, 0]^*$ egységvektorból áll. Így

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



11. ábra

$|\mathbf{W}| = -1 \neq 0$, így

$$\mathbf{W}^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B},$$

és ezzel

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{Bp} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix},$$

mint azt már láttuk.

A báziscsere **B** mátrixa $\mathbf{T}_1$ alapján azonnal felírható, hiszen $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}$.

5. Mutassuk meg, hogy az $y = -x$ szögfelezőre való tükrözés $\mathbf{T}_2$ mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

alakú, és hogy ilyen alakú a báziscsere **B** mátrixa is!

Ha $P(x; y)$ tükörképe $P'(x'; y')$, akkor a transzformáció egyenletei most

$$x' = 0 \cdot x - 1 \cdot y;$$

$$y' = -1 \cdot x + 0 \cdot y,$$

tehát

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

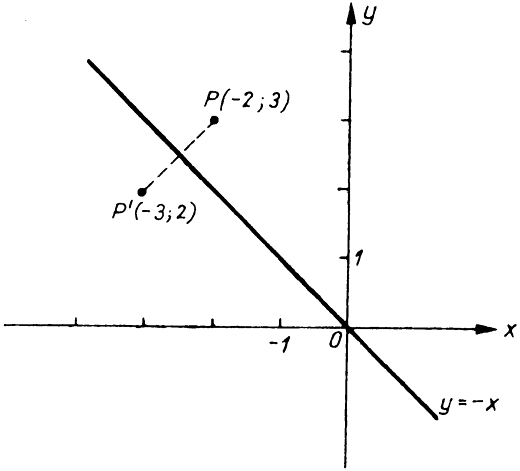
Az áttérési mátrix most:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{inverze} \quad \mathbf{W}^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

így

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Tükrözzük a $P(-2; 3)$ pontot az $y = -x$ egyenesre, és írjuk fel a tükörkép koordinátáit!



12. ábra

Ha a P' tükörkép koordinátáit $(x'; y')$ jelöli (12. ábra), akkor

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tehát $P'(-3; 2)$.

A $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^*$ irányvektorú egyenesre való tükrözés mátrixa

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^* - \mathbf{E},$$

ahol $\mathbf{v}_0$ a $\mathbf{v}$ irányú egységvektort jelenti.

Ha ui. az $\mathbf{x}$ vektornak a $\mathbf{v}_0$ egységvektor egyenesére vett tükörképe $\mathbf{x}'$, akkor az $\mathbf{x}$ vektornak a $\mathbf{v}_0$ irányvektorra eső vetületét kétféle módon felírva:

$$\mathbf{x}+\mathbf{x}' = 2\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^*\mathbf{x},$$

és ebből a tükörkép:

$$\mathbf{x}' = 2\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^*\mathbf{x}-\mathbf{x} = (2\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^*-\mathbf{E})\mathbf{x}.$$

A zárójelből pedig a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixa leolvasható.

A kétdimenziós esetben, ha $\mathbf{v}_0=[v_1, v_2]^*$, akkor

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^*-\mathbf{E} = 2\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}[v_1, v_2]-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2v_1^2 & 2v_1v_2 \\ 2v_1v_2 & 2v_2^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^2-v_2^2 & 2v_1v_2 \\ 2v_1v_2 & v_2^2-v_1^2 \end{bmatrix},$$

mert $v_1^2+v_2^2 = 1$.

A háromdimenziós esetben, ha $\mathbf{v}_0=[v_1, v_2, v_3]^*$, akkor

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0^*-\mathbf{E} = 2\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}[v_1, v_2, v_3]-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2v_1^2 & 2v_1v_2 & 2v_1v_3 \\ 2v_2v_1 & 2v_2^2 & 2v_2v_3 \\ 2v_3v_1 & 2v_3v_2 & 2v_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} v_1^2-v_2^2-v_3^2 & 2v_1v_2 & 2v_1v_3 \\ 2v_2v_1 & v_2^2-v_3^2-v_1^2 & 2v_2v_3 \\ 2v_3v_1 & 2v_3v_2 & v_3^2-v_1^2-v_2^2 \end{bmatrix},$$

mert $v_1^2+v_2^2+v_3^2 = 1$.

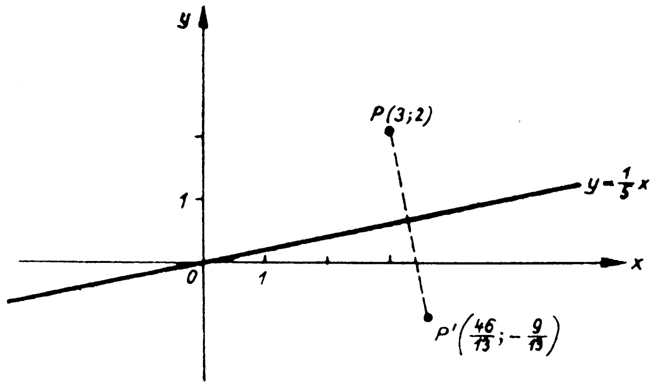
7. Tükrözzük a $P(3;2)$ pontot az $y=\frac{1}{5}x$ egyenesre (13. ábra), és írjuk fel a tükörkép koordinátáit!

Feladatunkban $\mathbf{v} = [5, \quad 1]^*$, és mivel $\mathbf{v}$ abszolút értéke

$$|v| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26},$$

ezért

$$\mathbf{v}_0 = \left[\frac{5}{\sqrt{26}}, \quad \frac{1}{\sqrt{26}}\right]^*$$



13. ábra

Így

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2 & 2\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} \\ 2\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} & \left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2-\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{bmatrix}.$$

A tükörkép koordinátái tehát:

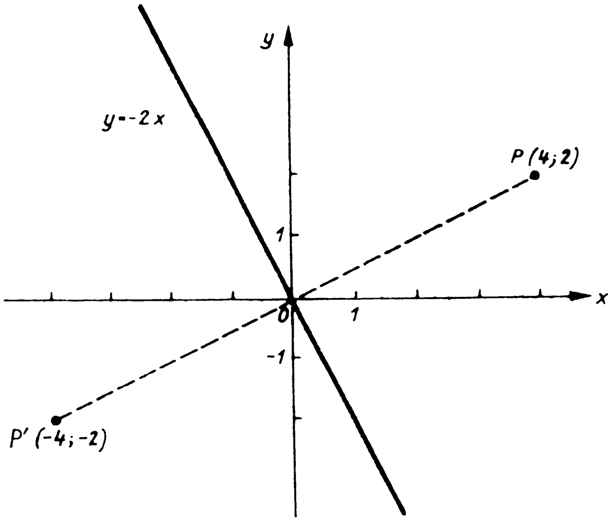
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{46}{13} \\ -\frac{9}{13} \end{bmatrix}$$

alapján

$$P'\left(\frac{46}{13}; \quad -\frac{9}{13}\right)$$

Figyeljük meg, hogy a **T** tükrözőmátrix determinánsának értéke -1, csakúgy, mint az előző tükrözőmátrixoké.

8. Egy P pontnak az $y=-2x$ egyenesre vett tükörképe a $P'(-4;\,-2)$ pont (14. ábra). Mik az eredeti pont koordinátái?



14. ábra

Az $y=-2x$ egyenes $\mathbf{v}_0=\left[-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right]^*$ egységnyi irányvektorára való tükrözés mátrixa

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}-\frac{4}{5} & 2\left(-\frac{2}{5}\right)\\ 2\left(-\frac{2}{5}\right) & \frac{4}{5}-\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

Nyilvánvaló, hogy P' tükörképe P, vagyis $(P')'=P$, ezért

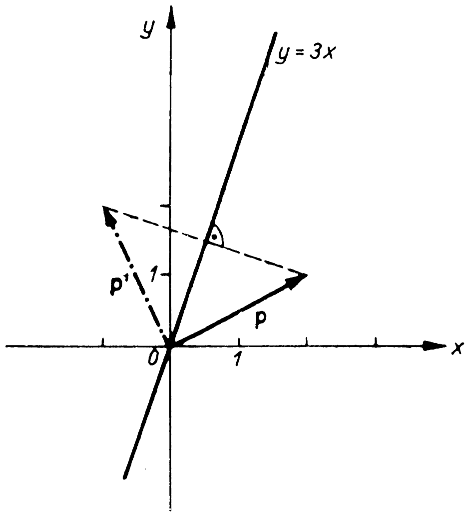
$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}$$

alapján $P(4;\,2)$.

Eljárhattunk volna úgy is, hogy a **T** transzformáció inverzét határozzuk meg, de tükrözés esetében világos, hogy $\mathbf{T}=\mathbf{T}^{-1}$. Valóban

$$\mathbf{T}^{-1}=-1\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}=\mathbf{T}.$$

9. Tükrözzük az $y=3x$ egyenesre a $\mathbf{p}=[2,\,1]^*$ vektort (15. ábra). Írjuk fel a tükörkép koordinátáit!



15. ábra

Az $y=3x$ egyenes egységnyi hosszúságú irányvektora $\mathbf{v}_0=\left[\frac{1}{\sqrt{10}},\ \frac{3}{\sqrt{10}}\right]^4$; a tükrözés mátrixa tehát:

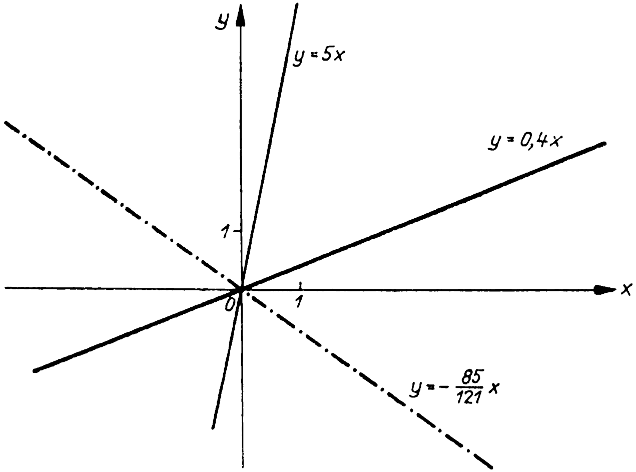
$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}-\frac{9}{10} & 2\cdot\frac{3}{10}\\ 2\cdot\frac{3}{10} & \frac{9}{10}-\frac{1}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}.$$

Az adott vektor tükörképe:

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Tehát $\mathbf{p}=[2, 1]^*$, tükörképe $\mathbf{p}'=[-1, 2]^*$.

10. Tükrözzük az $y=0{,}4x$ egyenesre az $y=5x$ egyenest (16. ábra). Írjuk fel a tükörkép egyenletét!



16. ábra

Mivel a tükörkép ugyancsak az origón áthaladó egyenes, elegendő irányvektorát meghatároznunk. Az $y=0{,}4x$ egyenes irányvektora $\mathbf{v}=\left[1, \dfrac{2}{5}\right]^*$, ennek egységvektora $\mathbf{v}_0=\left[\dfrac{5}{\sqrt{29}}, \dfrac{2}{\sqrt{29}}\right]^*$, így a tükrözés mátrixa:

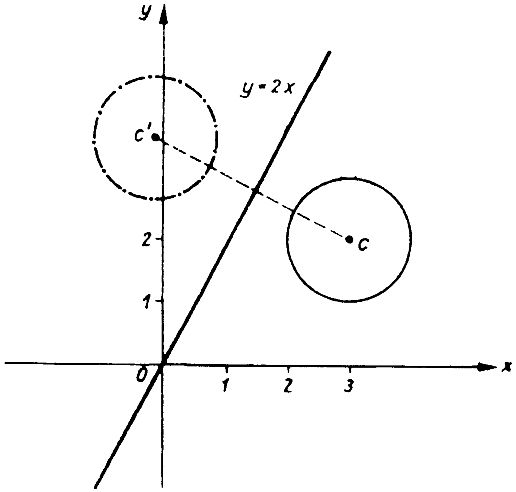
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{25}{29}-\dfrac{4}{29} & 2\cdot\dfrac{10}{29} \\ 2\cdot\dfrac{10}{29} & \dfrac{4}{29}-\dfrac{25}{29} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{21}{29} & \dfrac{20}{29} \\ \dfrac{20}{29} & -\dfrac{21}{29} \end{bmatrix}.$$

A tükrözendő egyenes irányvektora $\mathbf{u}=[1, \quad 5]^*$, ennek tükörképe pedig

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} \dfrac{21}{29} & \dfrac{20}{29} \\ \dfrac{20}{29} & -\dfrac{21}{29} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{121}{29} \\ -\dfrac{85}{29} \end{bmatrix}.$$

Így a tükörkép egyenlete $y = -\dfrac{85}{121}x$.

11. Tükrözzük az $y=2x$ egyenesre az $(x-3)^2+(y-2)^2 = 1$ egyenletű kört (17. ábra), és határozzuk meg a tükörkép egyenletét!



17. ábra

A tükröző egyenes irányvektora $\mathbf{v}=[1, \quad 2]^*$, egységvektora

$$\mathbf{v}_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}}\right]^*;$$

a tükrözőmátrix:

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{5}-\dfrac{4}{5} & 2\cdot\dfrac{2}{5} \\ 2\cdot\dfrac{2}{5} & \dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

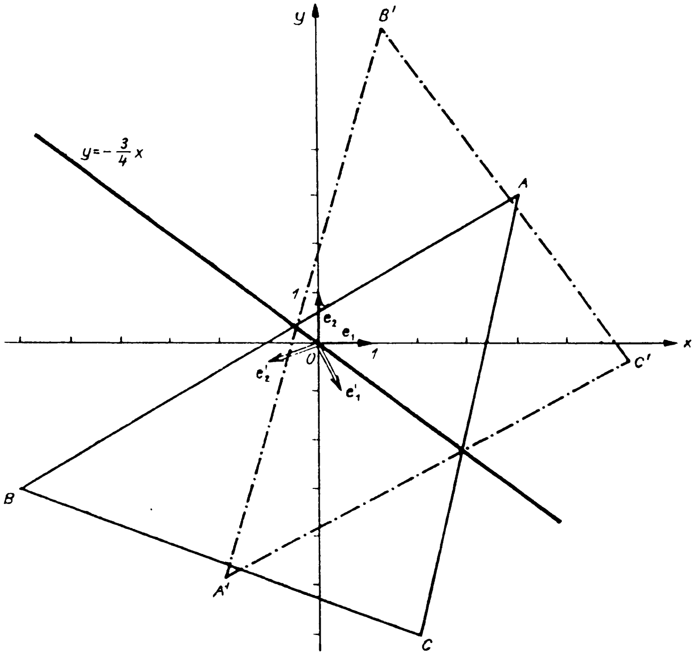
Mivel az eredeti kör és tükörképe egybevágó, elegendő a tükörkép középpontjának koordinátáit meghatározni. Az eredeti kör középpontja $C(3;2)$, a középpont C' tükörképének koordinátái

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{18}{5} \end{bmatrix},$$

ezért a tükörkép egyenlete

$$\left(x'+\frac{1}{5}\right)^2+\left(y'-\frac{18}{5}\right)^2=1.$$

12. Tükrözzük az $y=-\frac{3}{4}x$ egyenesre az $A(4;3)$, $B(-6;-3)$, $C(2;-6)$ csúcspontú háromszöget (18. ábra). Határozzuk meg a tükörkép csúcspontjainak koordinátáit!



18. ábra

A tükröző egyenes irányvektora $\mathbf{v}=[-4,\ 3]^*$, ennek egységvektora $\mathbf{v}_0=\left[-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right]^*$. A tükrözés mátrixa tehát:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \frac{16}{25}-\frac{9}{25} & 2\left(-\frac{12}{25}\right) \\ 2\left(-\frac{12}{25}\right) & \frac{9}{25}-\frac{16}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}.$$

A háromszög csúcsainak tükörképe rendre:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -44 \\ -117 \end{bmatrix};\quad A'\left(-\frac{44}{25};\ -\frac{117}{25}\right);$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 30 \\ 165 \end{bmatrix};\quad B'\left(\frac{30}{25};\ \frac{33}{5}\right);$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 158 \\ -6 \end{bmatrix};\quad C'\left(\frac{158}{25};\ -\frac{6}{25}\right).$$

13. Milyen új bázisra való áttéréssel érhető el, hogy az előbbi feladat $A(4;3)$, $B(-6;-3)$, $C(2;-6)$ pontjainak az $y=-\frac{3}{4}x$ egyenesre való tükörképét kapjuk meg?

Az áttérési mátrix:

$$\mathbf{W}=\mathbf{T}^{-1}=-1\begin{bmatrix} -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix},$$

tehát az új bázis bázisvektorai — a régi bázisra vonatkozó koordinátákkal kifejezve —

$$\mathbf{e}_1'=\left[\frac{7}{25},\quad -\frac{24}{25}\right]^*$$

és

$$\mathbf{e}_2'=\left[-\frac{24}{25},\quad -\frac{7}{25}\right]^*.$$

Vagyis ha az $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ bázis által meghatározott koordinátarendszerben ábrázoljuk (18. ábra) az $A(4;3)$; $B(-6;-3)$; $C(2;-6)$ csúcspontok által meghatározott háromszöget, akkor ez éppen tükörképe lesz az eredeti háromszögnek.

14. Tükrözzük a $P(x; y; z)$ pontot, ill. a $\mathbf{p}=[x, y, z]^*$ vektort *a)* az (x, y) síkra, *b)* az (y, z) síkra, *c)* az (x, z) síkra! Írjuk fel a transzformációk mátrixát!

a) I. Megoldás:

Ha a tükörkép jelölése $P'(x'; y'; z')$, akkor a térbeli derékszögű koordinátarendszerben

$$x'=x; \quad y'=y; \quad z'=-z,$$

tehát az előírt transzformáció (tükrözés az (x, y) síkra) mátrixa

$$\mathbf{T}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

II. Megoldás:

Ha a transzformációt báziscserével akarjuk megoldani, akkor az $\mathbf{e}_1=[1, 0, 0]^*$, $\mathbf{e}_2=[0, 1, 0]^*$, $\mathbf{e}_3=[0, 0, 1]^*$ bázisról az $\mathbf{e}_1'=[1, 0, 0]^*$, $\mathbf{e}_2'=[0, 1, 0]^*$, $\mathbf{e}_3'=[0, 0, -1]^*$ bázisra kell áttérnünk. Felhasználva ui., hogy $|\mathbf{T}_{xy}| = -1$,

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}_{xy}^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{B},$$

és ebből az új bázis vektorai már leolvashatók.

b) Az (y, z) síkra való tükrözéskor $x' = -x$; $y'=y$; $z'=z$, ezért az (y, z) síkra való tükrözés mátrixa

$$\mathbf{T}_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Az (x, z) síkra való tükrözéskor $x'=x$; $y'=-y$; $z'=z$, ezért az (x, z) síkra való tükrözés mátrixa

$$\mathbf{T}_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Tükrözzük a $P(1; 2; 1)$ pontot előbb az (x, y), majd az (x, z) síkra! Írjuk fel a tükörkép koordinátáit!

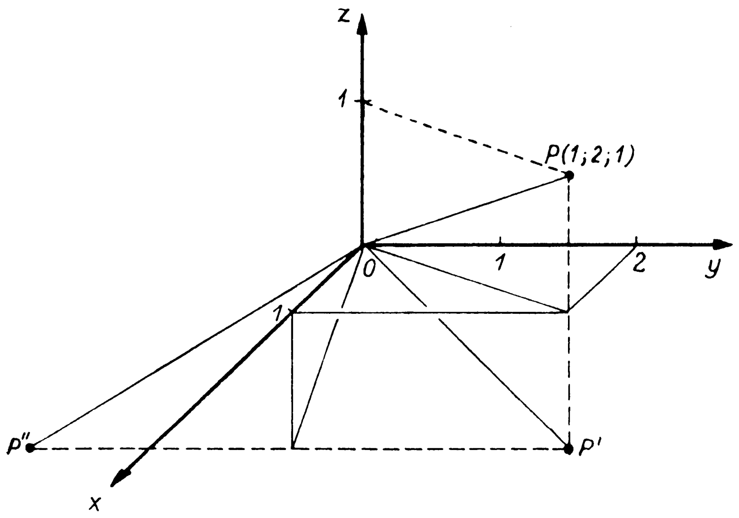
Az (x, y) síkra való tükrözés után:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

az (x, z) síkra való tükrözés után:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

a keresett tükörkép tehát $P''(1; -2; -1)$ (19. ábra).



19. ábra

16. Tükrözzük a $P(x; y; z)$ pontot *a)* az x-tengelyre, *b)* az y-tengelyre, *c)* a z-tengelyre. Írjuk fel a transzformációk mátrixát és a tükörképek koordinátáit!

a) Az x-tengelyre való tükrözés (az x-tengely körüli 180°-os elforgatás) két síkra való tükrözéssel is elérhető, mégpedig előbb az (x, y), majd az (x, z) síkra való tükrözéssel, vagy fordítva (19. ábra). A két, egymás után végrehajtott síkra való tükrözés mátrixának szorzata adja a tengelyre való tükrözés mátrixát:

$$\mathbf{T}_{xy}\cdot\mathbf{T}_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_x.$$

Ha a tükörkép koordinátái $P'(x'; y'; z')$, akkor

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}.$$

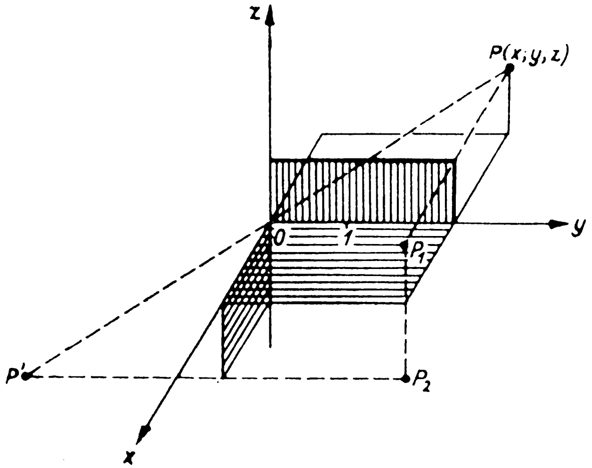
b) Az y-tengelyre való tükrözés mátrixa az előzőkhöz hasonlóan

$$\mathbf{T}_y = \mathbf{T}_{xy} \cdot \mathbf{T}_{yz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

c) a z-tengelyre való tükrözés mátrixa pedig:

$$\mathbf{T}_z = \mathbf{T}_{xz} \cdot \mathbf{T}_{yz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. Írjuk fel a $P(x; y; z)$ pont origóra vett tükörképének koordinátáit!



20. ábra

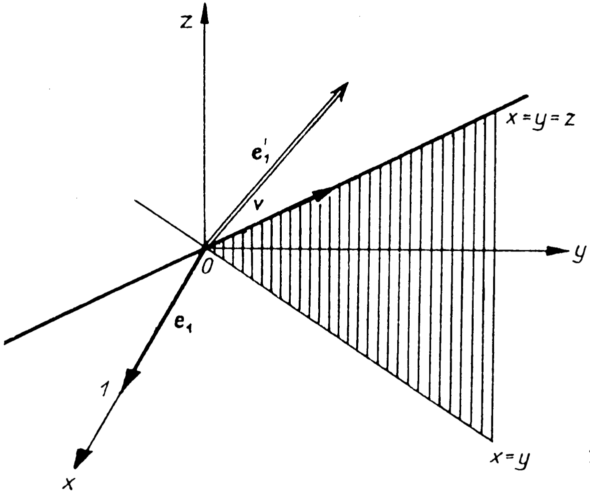
Mivel az origóra való tükrözés a három koordinátasíkra vett tükrözés egymás utáni végrehajtásával állítható elő (20. ábra), az origóra tükrözés mátrixa

$$\mathbf{T}_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

és így P' koordinátái

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}.$$

18. Tükrözzük az $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^*$ vektort az $x = y = z$ egyenesre (21. ábra), és írjuk fel a tükörkép koordinátáit!



21. ábra

Az adott egyenes irányvektora $\mathbf{v} = [1, 1, 1]^*$; ennek egységvektora $\mathbf{v}_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^*$. A tükrözést leíró mátrix

$$\mathbf{T} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 1, 1] - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

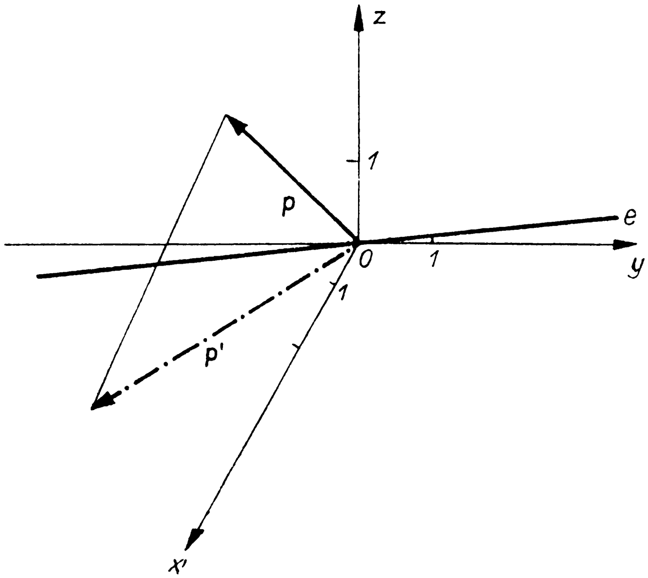
Az $\mathbf{e}_1$ vektor képe tehát:

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{T}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{e}_1' = \left[-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right]^*.$$

19. Tükrözzük a $\mathbf{p} = [2, -1, 3]^*$ vektort az $x = 2t$; $y = -3t$; $z = t$ egyenletrendszerrel adott egyenesre (22. ábra)! Határozzuk meg a tükörkép koordinátáit!



22. ábra

Az adott egyenes irányvektora $\mathbf{v} = [2, -3, 1]^*$, ennek egységvektora $\mathbf{v}_0 = \left[\frac{2}{\sqrt{14}},\ -\frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}}\right]^*$. Így a tükörzés mátrixa

$$\mathbf{T} = \frac{2}{14}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}[2, -3, 1] - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{p}$ vektor képének koordinátái ezért:

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{23}{7} \\ -\frac{11}{7} \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{p}' = \left[\frac{6}{7},\ -\frac{23}{7},\ -\frac{11}{7}\right]^*.$$

Figyeljük meg, hogy valamennyi tükrözőmátrix determinánsának értéke -1!

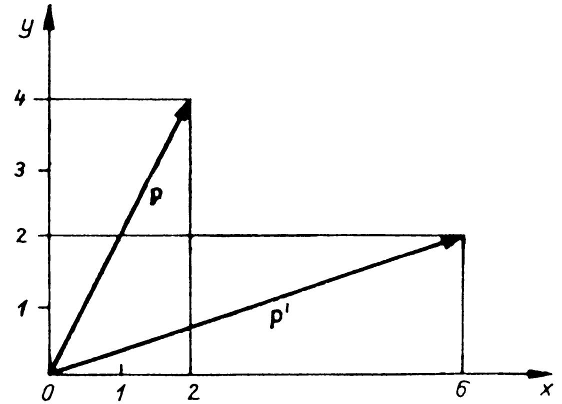
20. Nyújtsuk meg a $\mathbf{p} = [2, 4]^*$ vektor első koordinátáját háromszorosára, második koordinátáját pedig zsugorítsuk a felére (23. ábra). Írjuk fel a koordináták tetszőleges *nyújtását (zsugorítását)* jelentő transzformáció mátrixát!

I. Megoldás:

Ha a $\mathbf{p}$ vektor képe a $\mathbf{p}' = [x', y']^*$ vektor, a transzformáció az

$$x' = 3x + 0 \cdot y;$$

$$y' = 0 \cdot x + \frac{1}{2}y$$



23. ábra

egyenletek teljesülését jelenti. A transzformáció mátrixa

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Valóban

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

II. Megoldás:

Ha a feladatot báziscserével óhajtjuk megoldani, a $\mathbf{W}=\mathbf{N}^{-1}$ áttérési mátrixot kell meghatároznunk. Mivel $|\mathbf{N}|=\frac{3}{2}\neq 0$, létezik $\mathbf{N}^{-1}$, mégpedig

$$\mathbf{N}^{-1} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{W}.$$

Az új bázis vektorai tehát $\mathbf{e}_1'=[\frac{1}{3},\ 0]^*$ és $\mathbf{e}_2'=[0,\ 2]^*$. Ebben a rendszerben $\mathbf{p}=[2,\ 4]^*$ koordinátái valóban $\mathbf{p}'=[6,\ 2]^*$, mert a

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrixszal

$$\mathbf{p}' = \mathbf{B}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképpen belátható, hogy két dimenzióban az

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix},$$

ill. három dimenzióban az

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

mátrixszal olyan transzformáció írható le, amely az eredeti vektor koordinátáit az x-, y-, z-tengely irányában rendre k_1-, k_2-, k_3-szorosára nyújtja (zsugorítja).

Ha $k_i>1$ $(i=1, 2, 3)$, akkor a megfelelő koordináta nyújtásáról, ha $0<k_i<1$, akkor zsugorításáról van szó.

Külön felhívjuk a figyelmet arra, hogy az ilyen — általunk koordinátanyújtásnak nevezett — speciális lineáris transzformáció nem jelenti a vektor (szokott értelemben vett) nyújtását (kivéve, ha $k_1=k_2=k_3$), hiszen a vektor hosszán kívül annak irányát is megváltoztatja.

Figyeljük meg, hogy a nyújtást (zsugorítást) kifejező mátrix determinánsának értéke általában nem 1, vagy -1.

21. Keressünk olyan koordinátanyújtást leíró mátrixot, amely a $\mathbf{p}=[-2,\ -2,\ 1]^*$ vektort a $\mathbf{p}'=[3,\ 1,\ 3]^*$ vektorba viszi át. Mibe viszi át ez a transzformáció a $\mathbf{q}=[1,\ 4,\ -2]^*$ vektort?

Azt követeljük tehát, hogy $-2k_1=3$, $-2k_2=1$, $k_3=3$ legyen.

Ebből

$$k_1=-\frac{3}{2}; \qquad k_2=-\frac{1}{2}, \qquad k_3=3,$$

és így a transzformáció mátrixa

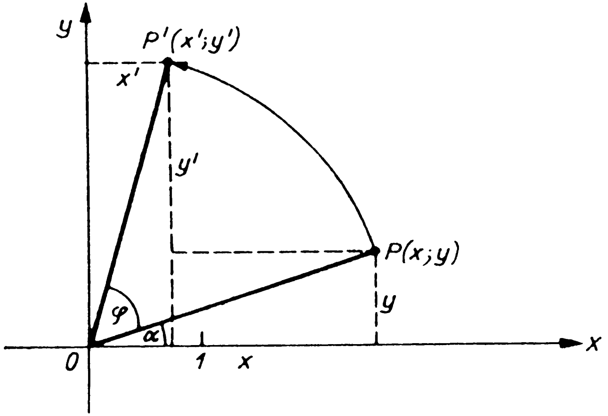
$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ez az adott $\mathbf{q}$ vektort a

$$\mathbf{q}'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

vektorba viszi át.

22. Forgassuk el a $P(x;y)$ pontot az origó körül φ, majd $(-\varphi)$ szöggel. Határozzuk meg a transzformációk mátrixát! Legyen φ hegyesszög!



24. ábra

Jelölje az elforgatott pont koordinátáit $P'(x';y')$; akkor a 24. ábrán látható derékszögű háromszögekből $OP=OP'$ miatt

$$x'=OP'\cos(\alpha+\varphi)=OP(\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi)=x\cos\varphi-y\sin\varphi;$$

$$y'=OP'\sin(\alpha+\varphi)=OP(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=y\cos\varphi+x\sin\varphi.$$

Belátható, hogy ugyanezt kapjuk, ha φ tetszőleges szög.

A φ szöggel való forgatás transzformációs mátrixa tehát

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{F}$ mátrixot *síkbeli forgatómátrixnak* szokás nevezni. Érdemes megfigyelni, hogy $|\mathbf{F}|=1$.

A $(-\varphi)$-szöggel való elforgatás mátrixa ennek megfelelően

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

ami — mint egyszerűen belátható — éppen $\mathbf{F}^{-1}$. Ez összhangban van azzal, hogy a φ szöggel való elforgatás inverz művelete a $-\varphi$ szöggel való forgatás, vagyis a visszaforgatás.

23. Forgassuk el a $P(-3;2)$ pontot $\varphi=30°$-kal az origó körül, és írjuk fel az elforgatott pont koordinátáit!

A transzformáció mátrixa most

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{2}{1} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

és ezzel

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2}-1 \\ -\frac{3}{2}+\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

vagyis $P'\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}-1;\ \sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$.

24. Írjuk fel a 180°-kal való elforgatás mátrixát!

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy ez megegyezik az origóra való tükrözés mátrixával. Nyilvánvaló, hogy a két művelet ugyanazt eredményezi.

Eddigi feladataink megoldását áttekintve figyeljük meg, hogy a területtartó transzformációk (tükrözés, forgatás) mátrixai determinánsának abszolút értéke 1. Belátható, hogy ez általában is igaz.

25. Forgassunk el egy tetszőleges $P(x; y)$ pontot egyszer előbb α, majd β szöggel, másszor meg egyszerre $\alpha+\beta$ szöggel! Írjuk fel a leképezések mátrixát!
Az első esetben a transzformáció mátrixa a két transzformáció mátrixának a szorzata:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}.$$

A második esetben:

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ ugyanazt a transzformációt jelenti, ezért a két mátrix egyenlő, és így adódnak az alábbi ismert összefüggések:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

26. Forgassuk el a sík tetszőleges $\mathbf{p}=[x, \ y]^*$ vektorát az origó körül 120°-kal, majd nyújtsuk meg a kapott vektort kétszeresére. Írjuk fel a transzformáció *(forgatva nyújtás)* mátrixát!
A 120°-kal való forgatást leíró mátrix:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos 120° & -\sin 120° \\ \sin 120° & \cos 120° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

a kétszeres nyújtást leíró mátrix:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az egymás után végrehajtott két transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{NF} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix},$$

vagy fordított sorrendben

$$\mathbf{FN} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix},$$

ami azt jelenti, hogy ebben az esetben mindegy, hogy előbb forgatunk és azután nyújtunk, vagy fordítva. A sorrend nem cserélhető meg akkor, ha a nyújtás az egyes tengelyek mentén nem azonos mértékű.

Bebizonyítható, hogy a $\mathbf{v}_0=[v_1, \ v_2, \ v_3]^*$ irányvektorú egyenes mint tengely körüli α szöggel történő elforgatás mátrixa:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \sin\alpha +$$

$$+ \begin{bmatrix} -v_2^2 - v_3^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & -v_1^2 - v_3^2 & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & -v_1^2 - v_2^2 \end{bmatrix} (1-\cos\alpha).$$

27. Forgassuk el a $P(-2; 1; 3)$pontot az $x=-t$, $y=2t$, $z=-2t$ egyenletű tengely körül 60°-kal. Írjuk fel az elforgatott P' pont koordinátáit!
Feladatunkban $\mathrm{v} = [-1, 2, -2]^*$; ennek megfelelően

$$\mathbf{v}_0 = \left[-\frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}, \ -\frac{2}{3}\right]^*;$$

Így

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}\sin 60°+$$

$$+\begin{bmatrix}-\frac{4}{9}-\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}\\\frac{2}{9}&-\frac{4}{9}&-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}\end{bmatrix}(1-\cos 60°)=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{3}}{6}&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{4}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{1}{9}&-\frac{5}{18}&-\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{5}{18}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{5}{9}&\frac{3\sqrt{3}-1}{9}&\frac{3\sqrt{3}+1}{9}\\-\frac{3\sqrt{3}+1}{9}&\frac{13}{18}&\frac{3\sqrt{3}-4}{18}\\\frac{1-3\sqrt{3}}{9}&-\frac{3\sqrt{3}+4}{18}&\frac{13}{18}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}10&6\sqrt{3}-2&6\sqrt{3}+2\\-6\sqrt{3}-2&13&3\sqrt{3}-4\\2-6\sqrt{3}&-3\sqrt{3}-4&13\end{bmatrix}.$$

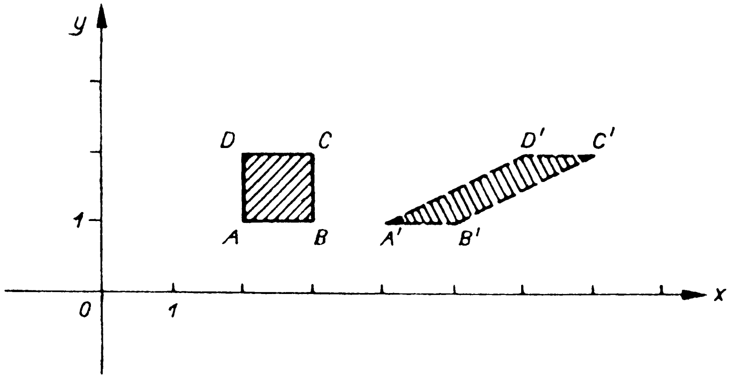
Az elforgatott pont koordinátái:

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}10&6\sqrt{3}-2&6\sqrt{3}+2\\-6\sqrt{3}-2&13&3\sqrt{3}-4\\2-6\sqrt{3}&-3\sqrt{3}-4&13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\sqrt{3}-16\\-3\sqrt{3}+5\\9\sqrt{3}+31\end{bmatrix}$$

28. Mi lesz az $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 1)$, $C(3;\ 2)$, $D(2;\ 2)$ csúcspontokkal megadott négyzet képe (25. ábra), ha rá az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

mátrixszal adott transzformációt alkalmazzuk?



25. ábra

A négyzet négy csúcsának képe:

$$\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix},\quad \text{vagyis}\quad A'(4;\ 1);$$

$$\begin{bmatrix}b_1'\\b_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix},\quad \text{vagyis}\quad B'(5;\ 1);$$

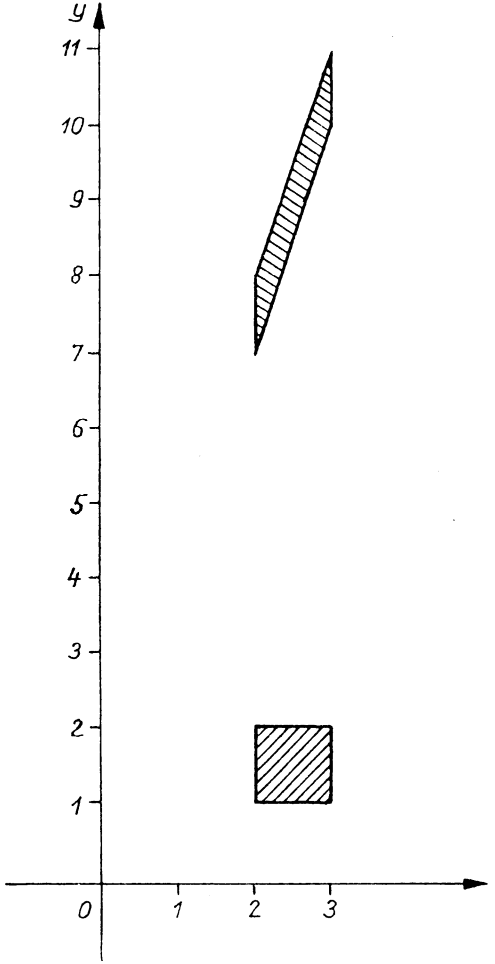
$$\begin{bmatrix}c_1'\\c_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix},\quad \text{vagyis}\quad C'(7;\ 2);$$

$$\begin{bmatrix}d_1'\\d_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix},\quad \text{vagyis}\quad D'(6;\ 2).$$

A transzformáció: a síknak az x-tengely mentén történő *nyírása*, amely a sík pontjainak ordinátáit nem, abszcisszájukat pedig a pont helyzetétől függően változtatja.

29. Mutassuk meg, hogy pl. az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$$



26. ábra

mátrix a síknak egy az y-tengely mentén való nyírását írja le. Számítással ellenőrizzük, hogy a 26. ábrán látható négyzet képe valóban az ábrán látható paralelogramma.

30. Mibe viszi át az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal adott lineáris transzformáció az $A(1; 1)$, $B(2; 1)$, $C(2; 2)$ és $D(1; 2)$ csúcspontú négyzetet?

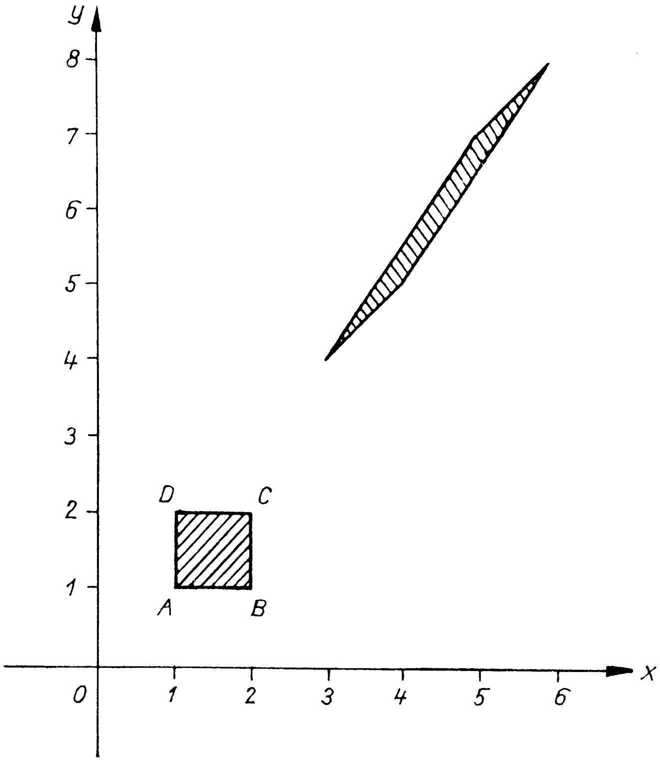
$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{így} \quad A'(3; 4);$$

$$\begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \text{így} \quad B'(5; 7);$$

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \text{így} \quad C'(6; 8);$$

$$\begin{bmatrix} d_1' \\ d_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \text{így} \quad D'(4; 5).$$

A 27. ábrán látható, hogy az $ABCD$ négyzet képe paralelogramma.



27. ábra

Az **a** vektornak az **u** vektorra eső merőleges vetületét (mint vektort) megadó

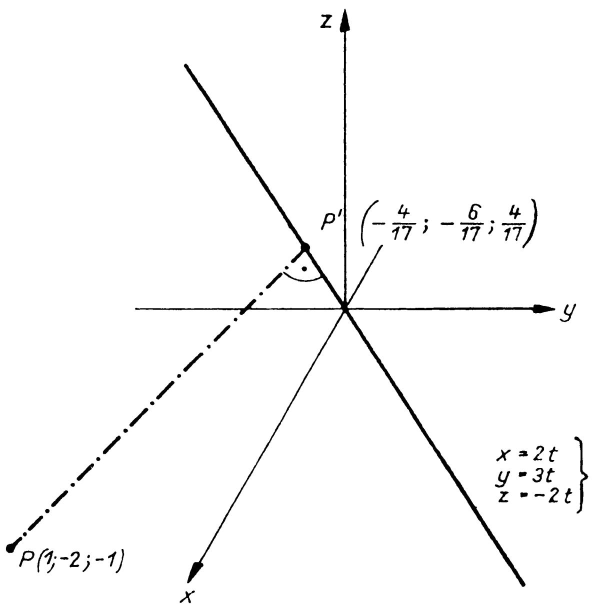
$$\mathbf{a}_u = (\mathbf{a}\mathbf{u}_0)\mathbf{u}_0$$

képletet átalakítva belátható, hogy az $\mathbf{u}=[u_1,\ u_2,\ u_3]^*$ *vektorra merőlegesen vetítő* **P** *projektormátrix*

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^*\mathbf{u})^{-1}\mathbf{u}^*$$

alakú.

31. Vetítsük a $P(1;\ -2;\ -1)$ pontot merőlegesen az $x=2t$, $y=3t$, $z=-2t$ egyenesre (28. ábra). Írjuk fel a P' vetület koordinátáit!



28. ábra

Feladatunkban az adott egyenes irányvektora $\mathbf{u}=[2,\ 3,\ -2]^*$, így

$$\mathbf{u}^*\mathbf{u} = [2,\ 3,\ -2]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 17; \qquad (\mathbf{u}^*\mathbf{u})^{-1} = \frac{1}{17};$$

ezért

$$\mathbf{P} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}[2,\ 3,\ -2] = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ -4 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

A P pont vetületének koordinátái tehát

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ -4 & -6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

alapján $P'\left(-\frac{4}{17};\ -\frac{6}{17};\ \frac{4}{17}\right)$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy **P** valóban projektormátrix, hiszen

$$\mathbf{P}^2 = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ -4 & -6 & 4 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ -4 & -6 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{17^2}\begin{bmatrix} 68 & 102 & -68 \\ 102 & 153 & -102 \\ -68 & -102 & 68 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 9 & -6 \\ -4 & -6 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{P},$$

továbbá a P' pont valóban rajta van az adott egyenesen, és $\overline{PP'}$ merőleges az adott egyenesre.

Az **u** és **v** *vektorok síkjára merőlegesen vetítő* **P** *projektormátrix*

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u},\mathbf{v}]\begin{bmatrix} \mathbf{u}^*\mathbf{u} & \mathbf{u}^*\mathbf{v} \\ \mathbf{u}^*\mathbf{v} & \mathbf{v}^*\mathbf{v} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{v}^* \end{bmatrix}.$$

Hasonlítsuk össze ezt a projektormátrixot a vektorra merőlegesen vetítő projektormátrixszal!

32. Vetítsük a $P(2;\ -1;\ 3)$ pontot merőlegesen az $\mathbf{u}=[1,\ 2,\ -1]^*$ és $\mathbf{v}=[-2,\ 1,\ 3]^*$ vektorok által kifeszített síkra! Írjuk fel a vetület koordinátáit!

Feladatunkban

$$\mathbf{u}^*\mathbf{u} = [1,\ 2,\ -1]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 6;$$

$$\mathbf{u}^*\mathbf{v} = -3; \qquad \mathbf{v}^*\mathbf{v} = 14.$$

Az ezekből az értékekből alkotott

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}$$

mátrix inverze létezik, hiszen

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 14 \end{vmatrix} = 75 \neq 0,$$

és az inverz mátrix

$$\frac{1}{75}\begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tehát a projektormátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 31 & 12 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 26 & 7 & -35 \\ 7 & 74 & 5 \\ -35 & 5 & 50 \end{bmatrix}$$

A P pont vetületének koordinátái:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 26 & 7 & -35 \\ 7 & 74 & 5 \\ -35 & 5 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -60 \\ -45 \\ 75 \end{bmatrix}$$

alapján $P'\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5};\ 1\right)$.

Figyeljük meg, hogy a projektormátrixok determinánsa 0. Ez természetes, hiszen különböző vektoroknak lehet azonos vetülete, a vetítés ezért szinguláris transzformáció.

33. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrixszal adott lineáris transzformáció szinguláris. Igazoljuk, hogy a lineárisan független $\mathbf{v}_1=[1,\ 1,\ 1]^*$, $\mathbf{v}_2=[2,\ 1,\ 2]^*$ és $\mathbf{v}_3=[1,\ 2,\ 3]^*$ vektorok képvektorai lineárisan összefüggnek.

Az adott vektorok valóban lineárisan függetlenek, mert a belőlük képezhető

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja 3, hiszen

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

A szóban forgó transzformáció mátrixának determinánsa

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 15-2-10-3 = 0,$$

tehát a transzformáció valóban szinguláris.

Az adott vektorok képe:

$$\mathbf{v}_1' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v}_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}_3' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Azonnal látszik, hogy $\mathbf{v}_2'$ a $\mathbf{v}_1'$ vektornak $\frac{3}{2}$-szerese, tehát a két vektor nem lineárisan független.

34. Vizsgáljuk meg hogy

$$y_1 = 2x_1 - x_3;$$

$$y_2 = x_1 + x_2;$$

$$y_3 = -x_2 + x_3$$

lineáris transzformáció az $A(4;3;3)$, $B(4;5;3)$, $C(2;5;3)$, $D(2;3;3)$, $E(4;3;5)$, $F(4;5;5)$, $G(2;5;5)$, $H(2;3;5)$ csúcspontú kockát mibe viszi át!

A transzformáció nemszinguláris, mert

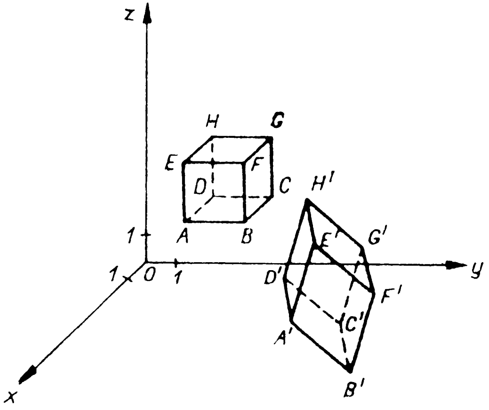
$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0.$$

Az

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

egyenletből A képének, A'-nek koordinátái

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$



29. ábra

alapján $A'(5;7;0)$, és hasonló számítással: $B'(5;9;-2)$, $C'(1;7;-2)$, $D'(1;5;0)$, $E'(3;7;2)$, $F'(3;9;0)$, $G'(-1;7;0)$, $H'(-1;5;2)$.

Mindkét testet l. a 29. ábrán.

35. Írjuk fel az előző feladatban szereplő transzformáció áttérési mátrixát, majd annak az $\mathbf{E}'$ bázisnak a bázisvektorait, amelyben az $\mathbf{E}$ bázisban adott (vesszőtlen) pontok koordinátái éppen a megfelelő vesszős pontok koordinátáival egyenlők!

Az áttérési mátrix $|\mathbf{A}| = 3$ miatt

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az új $\mathbf{E}'$ bázis bázisvektorai tehát:

$$\mathbf{e}_1 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right]^*;$$

$$\mathbf{e}_2' = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]^*;$$

$$\mathbf{e}_3' = \left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^*.$$

Például az $\mathbf{E}'$ bázisban adott $A'(5;7;0)$ pontnak az $\mathbf{E}$ bázisban az

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

alapján valóban az $A(4;3;3)$ pont felel meg.

36. Legyenek a $\mathbf{Z}$ bázis bázisvektorai: $\mathbf{z}_1 = [0, -1, 2]^*$; $\mathbf{z}_2 = [4, 1, 0]^*$; $\mathbf{z}_3 = [-2, 0, -4]^*$, és valamely erre a bázisra vonatkozó lineáris transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel annak a lineáris transzformációnak a $\mathbf{C}$ mátrixát, amely a $\mathbf{w}_1 = [1, -1, 1]^*$; $\mathbf{w}_2 = [1, 0, -1]^*$; $\mathbf{w}_3 = [1, 2, 1]^*$ új bázisban az $\mathbf{A}$ mátrixszal adott lineáris transzformációnak felel meg!

Jelölje $\mathbf{B}$ a báziscserének, tehát annak a lineáris transzformációnak a mátrixát, amellyel a $\mathbf{Z}$ bázisban felírt tetszőleges $\mathbf{x}$ vektornak a $\mathbf{W}$ bázisra vonatkoztatott koordinátái kiszámíthatók. Ez

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z},$$

ahol

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

$|\mathbf{W}| = 6$, és így létezik

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek segítségével

$$\begin{array}{rccc|ccc|l}
 & & & & 0 & 4 & -2 & \\
 & & & \mathbf{Z} = & -1 & 1 & 0 & \\
 & & & & 2 & 0 & -4 & \\ \hline
 & 2 & -2 & 2 & 6 & 6 & -12 & \\
6\mathbf{W}^{-1} = & 3 & 0 & -3 & -6 & 12 & 6 & = 6\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}, \\
 & 1 & 2 & 1 & 0 & 6 & -6 & \\ \hline
 & 6 & 0 & 0 & 0 & 24 & -12 &
\end{array}$$

és így a báziscsere mátrixa:

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ennek inverz mátrixa (felhasználva, hogy $|\mathbf{B}| = -2$):

$$\mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A két utóbbi mátrix segítségével a keresett $\mathbf{C}$ mátrix már felírható, ui. $\mathbf{C} = \mathbf{BAB}^{-1}$. A számítást elvégezve

$$\begin{array}{rccc|ccc|ccc|l}
 & & & & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & -5 & \\
 & & & \mathbf{A} = & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & = 2\mathbf{B}^{-1} \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & \\ \hline
 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & \\
\mathbf{B} = & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & -7 & = 2\cdot\mathbf{BAB}^{-1}, \\
 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & \\ \hline
 & 0 & 4 & -2 & -2 & 4 & 4 & 2 & 6 & -6 &
\end{array}$$

tehát a keresett mátrix

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzésképpen a $\mathbf{v} = [1, 1, 1]^*$ vektorra előbb alkalmazzuk az $\mathbf{A}$ transzformációt a $\mathbf{Z}$ bázisban és utána áttérünk a $\mathbf{W}$ bázisra; majd előbb áttérünk a $\mathbf{W}$

bázisra és utána ott alkalmazzuk a $\mathbf{C}$ transzformációt. Nyilvánvalóan ugyanarra a vektorra kell jutnunk.

Egyrészt

$$\mathbf{v}'_Z = \mathbf{A}\mathbf{v}_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}'_W = \mathbf{B}\mathbf{v}'_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Másrészt

$$\mathbf{v}_W = \mathbf{B}\mathbf{v}_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}'_W = \mathbf{C}\mathbf{v}_W = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

és a kétféle módon kapott vektor valóban megegyezik.

37. Határozzuk meg azt a lineáris transzformációt, amely a (z_1, z_2, z_3) koordinátákat közvetlenül az (x_1, x_2, x_3) koordinátákba viszi át és egyenértékű a következő két transzformáció egymás utáni végrehajtásával; ellenőrizzük az eredményt a $(z_1=1,\ z_2=2,\ z_3=3)$ koordinátákon:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2z_1 + z_3 \\ y_2 &= z_2 - 5z_3 \\ y_3 &= 2z_2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= 5y_1 - y_2 + 3y_3 \\ x_2 &= y_1 - 2y_2 \\ x_3 &= 7y_2 - y_3 \end{aligned}\right\}.$$

Az első, ill. második transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

A keresett transzformáció a $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$ mátrixszal írható le, ez

$$\begin{array}{rccc|ccc|l}
 & & & & 2 & 0 & 1 & \\
 & & & \mathbf{A} = & 0 & 1 & -5 & \\
 & & & & 0 & 2 & 0 & \\ \hline
 & 5 & -1 & 3 & 10 & 5 & 10 & \\
\mathbf{B} = & 1 & -2 & 0 & 2 & -2 & 11 & = \mathbf{C}. \\
 & 0 & 7 & -1 & 0 & 5 & -35 &
\end{array}$$

A keresett transzformáció tehát

$$x_1 = 10z_1+5z_2+10z_3;$$

$$x_2 = 2z_1-2z_2+11z_3;$$

$$x_3 = 5z_2-35z_3.$$

Ellenőrizzük az eredményt:

ha $z_1=1$, $z_2=2$; $z_3=3$, akkor ezekkel

$$y_1 = 2+3 = 5; \qquad x_1 = 25+13+12 = 50;$$

$$y_2 = 2-15 = -13; \qquad x_2 = 5+26 = 31;$$

$$y_3 = 4; \qquad x_3 = -91-4 = -95.$$

A kapott transzformációval számolva

$$x_1 = 10+10+30 = 50;$$

$$x_2 = 2-4+33 = 31;$$

$$x_3 = 10-105 = -95,$$

és ez valóban megegyezik az előbbi eredménnyel.

38. Tekintsük az alábbi lineáris összefüggéseket:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u_1-u_2 \\ x_2 &= u_2-u_3 \\ x_3 &= u_3-u_1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} u_1 &= y_1 \\ u_2 &= y_2+y_3 \\ u_3 &= y_3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y_1 &= z_1+z_2+z_3 \\ y_2 &= 2z_1-3z_3 \\ y_3 &= z_1-z_2+z_3 \end{aligned}\right\}.$$

Milyen összefüggés áll fenn x_i és z_k között $(i, k=1, 2, 3)$?

A három lineáris összefüggéscsoport egy-egy lineáris transzformációnak tekinthető, amelyeknek mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ha az x_i-ket a z_k-kal, ill. a z_k-kat az x_i-kel akarjuk kifejezni, akkor a keresett összefüggéseket a

$$\mathbf{D}=\mathbf{ABC}, \text{ ill. a } \mathbf{D}^{-1}$$

mátrixok írják le.

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|ccc|l}
\cline{5-10}
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\mathbf{B}= & & & & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -3 & =\mathbf{C} \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 2 & 3 & \\
\mathbf{A}= & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & =\mathbf{D}. \\
 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

Így egyrészt

$$x_1 = -2z_1+2z_2+3z_3;$$

$$x_2 = 2z_1-3z_3;$$

$$x_3 = -2z_2,$$

másrészt $|\mathbf{D}|=0$ miatt a z_k-k nem fejezhetők ki egyértelműen az x_i-kel.

39. Írjuk fel annak a háromdimenziós vektortérben értelmezett lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az $\mathbf{e}_1=[1, 0, 0]^*$, $\mathbf{e}_2=[0, 1, 0]^*$, $\mathbf{e}_3=[0, 0, 1]^*$ vektorokat az $\mathbf{x}_1=[3, 4, -1]^*$, $\mathbf{x}_2=[1, 0, -3]^*$, $\mathbf{x}_3=[0, 1, 4]^*$ vektorokba viszi át!

Az E bázis vektorait az

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a képüket pedig az

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

alakban írhatjuk fel, és legyen a keresett transzformáció mátrixa **A**. Feladatunk értelmében

$$\mathbf{X}=\mathbf{AE}=\mathbf{A},$$

a keresett mátrix tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

40. Határozzuk meg annak a transzformációnak a mátrixát, amely az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázist a $\mathbf{g}_1=[0, 2, 0]^*$, $\mathbf{g}_2=[0, 0, 2]^*$, $\mathbf{g}_3=[2, 0, 0]^*$ bázisba viszi át. Határozzuk meg az $\mathbf{a}=[1, 2, 2]^*$ vektor transzformáltjának a hosszát!

A keresett transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

Az a vektor képe

$$\mathbf{a}'=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 2\\ 4\end{bmatrix},$$

ennek hossza $|\mathbf{a}| = \sqrt{16+4+16} = 6.$

41. Keressük meg annak a lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az $A(1;-2;3)$, $B(2;-1;5)$, $C(-3;3;-4)$ pontokat az $A'(-12;4;9)$, $B'(-15;13;11)$, $C'(15;-1;-16)$ pontokba viszi át!

Jelölje a keresett transzformáció $3\cdot 3$ típusú mátrixát $\mathbf{A}$. Ha a tárgypontokat a

$$\mathbf{Z}=[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]^*=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 3\\ 3 & 5 & -4\end{bmatrix}$$

mátrixszal, a képpontokat a

$$\mathbf{W}=[\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{c}']^*=\begin{bmatrix}-12 & -15 & 15\\ 4 & 13 & -1\\ 9 & 11 & -16\end{bmatrix}$$

mátrixszal jellemezzük, a feladat megoldása az

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}=\mathbf{W}$$

mátrixegyenlet megoldását jelenti. Mivel $|\mathbf{Z}|=12$, létezik $\mathbf{Z}^{-1}$ és a feladat megoldható, mégpedig

$$\mathbf{A}=\mathbf{W}\mathbf{Z}^{-1}.$$

$$\mathbf{Z}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-11 & -7 & 3\\ 1 & 5 & 3\\ -7 & 1 & 3\end{bmatrix},$$

és így

$$\begin{array}{r|ccc|}
 & -11 & -7 & 3\\
12\mathbf{Z}^{-1}= & 1 & 5 & 3\\
 & -7 & 1 & 3\\
\hline
\end{array}$$

$$\mathbf{W}=\begin{array}{|ccc|ccc|}
-12 & -15 & 15 & 12 & 24 & -36\\
4 & 13 & -1 & -24 & 36 & 48\\
9 & 11 & -16 & 24 & -24 & 12
\end{array}=12\mathbf{W}\mathbf{Z}^{-1}=12\mathbf{A}.$$

Ebből

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Valóban pl.

$$\mathbf{A}\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 4\\ 9\end{bmatrix}=\mathbf{a}'.$$

3. Sajátértékszámítás

Az előző fejezetben láttuk, hogy az n-edrendű $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ mátrix az $\mathbf{E}_n$ vektortér egy lineáris transzformációját adja meg, amely az $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^*$ tárgyvektorhoz az

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$$

képvektort rendeli. A gyakorlatban fontosak azok a vektorok (ha ilyenek vannak), amelyeknek az iránya a transzformáció során nem változik meg, azaz amelyekre

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$$

áll fenn valamilyen λ számmal. Az ilyen vektorokat a transzformáció, ill. az $\mathbf{A}$ mátrix *sajátvektorainak*, a λ számokat az $\mathbf{A}$ mátrix *sajátértékeinek* nevezzük.

Ha egy $\mathbf{x}$ vektor sajátvektor, akkor nyilván tetszőleges α-szorosa (α valós) szintén sajátvektor, amely ugyanazon λ sajátértékhez tartozik. Az ilyen sajátvektorokat nem tekintjük lényegében különbözőknek.

A sajátvektorok meghatározásához meg kell oldanunk a

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

mátrixegyenletet, ill. az ennek megfelelő alábbi homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
(\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots \quad - a_{1n}x_n &= 0;\\
-a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n &= 0;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (\lambda - a_{nn})x_n &= 0.
\end{aligned}$$

Ennek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha determinánsa zérus:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0.$$

Ezt a determinánst — amelyet az **A** mátrix *karakterisztikus determinánsának* nevezünk — kifejtve, λ-ra egy pontosan n-edfokú polinomot, az **A** mátrix *karakterisztikus polinomját* kapjuk. A $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ egyenletet az **A** mátrix *karakterisztikus egyenletének* nevezik, ennek gyökei a sajátértékek. Bebizonyítható, hogy a komplex számok felett értelmezett vektortérben minden lineáris transzformációnak *van sajátértéke*. Ez a valós számok felett értelmezett vektortérben azért nem teljesül, mert általánosságban nem biztos, hogy a karakterisztikus egyenletnek van valós gyöke, be lehet azonban látni, hogy a *szimmetrikus* és a *hermitikus mátrixok valamennyi sajátértéke valós.*

A $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}|$ determináns kifejtésével kapott karakterisztikus polinom közvetlenül is felírható a következő alakban:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda^n + (-1)d_1\lambda^{n-1} + (-1)^2 d_2 \lambda^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} d_{n-1}\lambda + (-1)^n |\mathbf{A}|,$$

ahol d_m ($m = 1, 2, \ldots, n-1$) az **A** determináns *m-edrendű átlós aldeterminánsainak* az összegét jelöli. m-edrendű átlós aldeterminánsnak nevezzük azt az aldeterminánst, amelynek m számú sorát és oszlopát úgy választottuk ki, hogy a főátlójába kerülő elemek az eredeti determinánsban is a főátló elemei voltak. Könnyen látható, hogy pl. $d_1 = \mathrm{Sp}(\mathbf{A})$, vagyis az **A** mátrix nyoma. A karakterisztikus polinom kiszámításának ez utóbbi módszere magasabbrendű mátrixok esetében valamivel kevesebb számolással jár.

Minden sajátértékhez tartozik sajátvektor, amelynek koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy a kiszámított λ értéket a homogén lineáris egyenletrendszerbe visszahelyettesítjük, majd az egyenletrendszert megoldjuk. Tekintettel arra, hogy egy homogén egyenletrendszer nemtriviális megoldása csupán az ismeretlenek arányát szabja meg, csak a sajátvektorok iránya van egyértelműen meghatározva (nagyságuk nem).

Belátható, hogy a szimmetrikus mátrixok különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

Határozzuk meg pl. az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixszal adott lineáris transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait!

A karakterisztikus egyenlet a karakterisztikus determinánsból

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 1 \\ -7 & \lambda - 8 & 1 \\ 4 & 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 8)(\lambda - 3) - 8 - 28 - 4(\lambda - 8) - 14(\lambda - 3) -$$

$$-4(\lambda - 3) = \lambda^3 - 14\lambda^2 + 35\lambda - 22 = 0\,.$$

A karakterisztikus egyenlet közvetlen felírásához ki kell számolnunk a

$$d_1 = 3+8+3 = 14;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 10+5+20 = 35;$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 72+8+28-(32+42+12) = 22$$

értékeket, és ezekkel is

$$\lambda^3 - 14\lambda^2 + 35\lambda - 22 = 0.$$

Könnyű észrevenni, hogy $\lambda_1 = 1$ gyöke az egyenletnek. A $(\lambda-1)$ gyöktényezővel elosztva az egyenletet és a kapott másodfokú egyenletet megoldva, a két hiányzó gyököt is megkapjuk, ezek

$$\lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 11.$$

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1 = [s_{11}, s_{12}, s_{13}]^*$ sajátvektor koordinátái az $(1 \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$ egyenletből, ill. részletesen leírva, a

$$\begin{aligned} -2s_{11} - 2s_{12} + s_{13} &= 0; \\ -7s_{11} - 7s_{12} + s_{13} &= 0; \\ 4s_{11} + 4s_{12} - 2s_{13} &= 0 \end{aligned}$$

homogén egyenletrendszerből számíthatók ki. A kibővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ -7 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből láthatóan $\varrho(\mathbf{B}) = 2 < 3 = n$, így az egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása — amit előre tudtunk, hiszen $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ — és ami az

$$\begin{aligned} s_{11} + s_{12} &= 0; \\ 2s_{11} + 2s_{12} - s_{13} &= 0 \end{aligned}$$

redukált egyenletrendszerből számítható ki, miközben egy ismeretlen szabadon választható. Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a második egyenletből, $s_{13} = 0$ adódik, tehát s_{13} nem választható szabadon. Legyen pl. $s_{11} = t$; akkor $s_{12} = -t$. Ha $t = 1$, akkor a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor

$$\mathbf{s}_1 = [1, \ -1, \ 0]^*.$$

Válasszuk meg t értékét úgy, hogy a sajátvektor egyúttal egységvektor is legyen, azaz *normáljuk* a sajátvektort; akkor

$$\mathbf{s}_1^0 = \frac{\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 0\right]^*.$$

Hasonló számítással kapható, hogy a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez az

$$\mathbf{s}_2 = [-2, \ 3, \ 4,]^*, \quad \text{ill. az} \quad \mathbf{s}_2^0 = \left[-\frac{2}{\sqrt{29}}, \ \frac{3}{\sqrt{29}}, \ \frac{4}{\sqrt{29}}\right]^*,$$

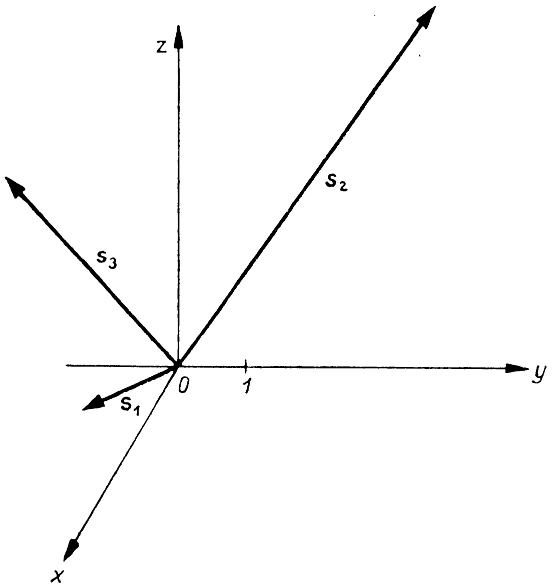
a $\lambda_3 = 11$ sajátértékhez az $\mathbf{s}_3 = [-1, \ -3, \ 2]^*$,

$$\text{ill. az} \quad \mathbf{s}_3^0 = \left[-\frac{1}{\sqrt{14}}, \ -\frac{3}{\sqrt{14}}, \ \frac{2}{\sqrt{14}}\right]^*$$

sajátvektor, ill. normált sajátvektor tartozik (30. ábra).

Különböző sajátértékekhez nyilván különböző sajátvektorok tartoznak, hiszen ugyanaz a transzformáció egy vektort nem vihet át két különböző skalárszorosába. Bebizonyítható, hogy a *különböző sajátvektorok lineárisan függetlenek*. Előfordulhat, hogy egy többszörös gyökhöz több lineárisan független sajátvektor tartozik, ezek száma azonban nem lehet nagyobb, mint az azonos gyöktényezők száma.

Ha az n-dimenziós térre vonatkozó, $\mathbf{A}$ mátrixszal adott lineáris transzformációnak n számú különböző sajátértéke van, akkor ezekhez n számú sajátvektor tartozik, amelyek lineárisan függetlenek, tehát bázist alkotnak. Számos gyakorlati probléma megoldása során ez a bázis előnyösen használható. A sajátvektorok iránya által meghatározott koordinátarendszert *sajátrendszernek*, a tengelyeket *sajáttengelyeknek*, ezek irányát *sajátiránynak* szokás nevezni.



30. ábra

Legyen az n-edrendű **A** mátrix n számú különböző sajátértéke $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, az ezekhez tartozó n számú sajátvektora $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$. Ekkor

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_1 = \lambda_1 \mathbf{s}_1;$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_2 = \lambda_2 \mathbf{s}_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_n = \lambda_n \mathbf{s}_n.$$

Az

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n]^*$$

és

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 \ldots \lambda_n \end{bmatrix}$$

mátrixok bevezetésével ez az egyenletrendszer röviden így is írható:

$$\mathbf{AS} = \mathbf{SL}.$$

$|\mathbf{S}| \neq 0$, ezért $\mathbf{S}^{-1}$ létezik, és ezzel

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{L}. \qquad (*)$$

Látható, hogy a $(*)$-gal jelölt egyenlet bal oldala az **S** bázisban, vagyis az **A** mátrix sajátvektorai által alkotott bázisban ír le az **A**-hoz hasonló lineáris transzformációt. Ez tehát azt jelenti, hogy *az* **A** *mátrixot a sajátvektoraiból álló* **S** *bázisra való áttérés az* **L** *diagonálmátrixba viszi át*, amelynek főátlójában éppen a sajátértékek állnak. Ez módszert ad mátrixoknak diagonálmátrixokká való transzformálására, ha ez egyáltalában elvégezhető.

A mátrixszámítás egyik fontos tétele (Cayley—Hamilton-tétel) kimondja, hogy *bármely kvadratikus mátrix kielégíti a hozzá tartozó karakterisztikus egyenletet*, vagyis ha **A** karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^n + (-1)d_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}d_{n-1}\lambda + (-1)^n|\mathbf{A}| = 0, \quad (**)$$

akkor

$$\mathbf{A}^n + (-1)d_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}d_{n-1}\mathbf{A} + (-1)^n|\mathbf{A}|\,\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-3)^3 + 1 + 1 - 3(\lambda-3) =$$

$$= \lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 16 = (\lambda-1)(\lambda-4)^2.$$

A kielégíti a

$$\lambda^3-9\lambda^2+24\lambda-16 = 0$$

karakterisztikus egyenletet, mert

$$\begin{array}{cc|c|c|}
\cline{3-4}
 & & \begin{matrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{matrix} & \leftarrow \mathbf{A} = \\
\hline
\mathbf{A} = & \multicolumn{1}{|c|}{\begin{matrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{matrix} & \begin{matrix} 43 & -21 & -21 \\ -21 & 43 & -21 \\ -21 & -21 & 43 \end{matrix} & = \mathbf{A}^3, \\
\hline
 & & \| & & \\
 & & \mathbf{A}^2 & &
\end{array}$$

és könnyen látható, hogy valóban

$$\begin{bmatrix} 43 & -21 & -21 \\ -21 & 43 & -21 \\ -21 & -21 & 43 \end{bmatrix} - 9 \begin{bmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{bmatrix} +$$

$$+24 \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Azt a legalacsonyabb fokú egyenletet, amit az **A** mátrix kielégít, *minimálegyenletnek* nevezzük. A 0-ra redukált minimálegyenlet bal oldala a *minimálpolinom.*

Bebizonyítható, hogy a minimálpolinom vagy azonos a karakterisztikus polinommal, vagy pedig olyan valódi osztója a karakterisztikus polinomnak, amelyben *a karakterisztikus polinom minden különböző gyöktényezője legalább egyszer előfordul.*

Az előbbi **A** mátrixhoz tartozó minimálpolinom tehát vagy megegyezik a karakterisztikus polinommal, vagy annak a különböző gyököket tartalmazó valódi osztója. Utóbbi csak egy van:

$$m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-4) = \lambda^2-5\lambda+4.$$

A kielégíti a $\lambda^2-5\lambda+4 = 0$ egyenletet, mert

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

tehát $m(\lambda)$ valóban minimálpolinom.

A minimálpolinomnak is lehetnek többszörös gyökei. Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = |\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2,$$

amelynek tehát kétszeres gyöke $\lambda = 0$; ezért a minimálpolinom csak λ vagy λ^2 lehet. De a minimálpolinom nem $m(\lambda) = \lambda$, mert $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ lévén, ezt nem elégíti ki. Viszont **A** valóban kielégíti a $p(\lambda) = \lambda^2 = 0$ karakterisztikus egyenletet, mert

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0};$$

tehát $m(\lambda) = \lambda^2$.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix minimálegyenletét!

A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)-(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

A minimálpolinom, amely a karakterisztikus polinom minden zérushelyét tartalmazó osztója, esetünkben vagy

$$m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1) = \lambda^2-1,$$

vagy maga a karakterisztikus polinom lehet. Valóban **A** kielégíti az $m(\lambda)=0$ egyenletet, mert

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és így $\mathbf{A}^2-\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Ezért a $\lambda^2-1 = 0$ egyenlet a minimálegyenlet.

2. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix minimálegyenletét!

A karakterisztikus egyenlet

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3-1 = 0.$$

Mivel a karakterisztikus egyenlet minden gyöke egyszeres, hiszen

$$\lambda_1=1; \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

a karakterisztikus és a minimálegyenlet megegyezik.

3. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, sajátértékeit, sajátvektorait, és mutassuk meg, hogy a sajátértékek lineárisan függetlenek!

Az adott mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)+2+2(\lambda-2)-2(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1).$$

Ennek zérushelyei: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$, ezek a sajátértékek.

Mivel a karakterisztikus polinomnak csupa egyszeres zérushelye van, a karakterisztikus és a minimálpolinom megegyezik.

A $\lambda_1=3$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1=[s_{11}, s_{12}, s_{13}]^*$ sajátvektor koordinátái a

$$(3\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$$

mátrixegyenletből, ill a vele egyenlő

$$\begin{aligned} 2s_{11} \qquad\quad + s_{13} &= 0; \\ -s_{11} + s_{12} - s_{13} &= 0; \\ -2s_{11} - 2s_{12} \qquad &= 0 \end{aligned}$$

egyenletből számíthatók ki:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\varrho(\mathbf{B}) = 2$, $n = 3$, így az egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, amely a

$$\begin{aligned} 2s_{11} + \qquad s_{13} &= 0; \\ s_{12} - \frac{1}{2}s_{13} &= 0 \end{aligned}$$

redukált egyenletrendszerből számítható ki, ahol egy ismeretlen szabadon választható. Ha $s_{13}=2t$, akkor $s_{12}=t$ és $s_{11}= -t$. Ezért minden

$$\mathbf{s}_1=[-t, t, 2t]^*$$

alakú vektor a $\lambda_1=3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Legyen pl. $t=1$, akkor

$$\mathbf{s}_1 = [-1, 1, 2]^*, \quad \text{és normálva} \quad \mathbf{s}_1^0 = \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]^*.$$

A $\lambda_2=2$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_2=[s_{21}, s_{22}, s_{23}]^*$ sajátvektort a

$$(2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{s}_2 = 0,$$

ill. az

$$\begin{aligned} s_{11} \qquad +s_{13} &= 0; \\ -s_{11} \qquad -s_{13} &= 0; \\ -2s_{11}-2s_{12}-s_{13} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből számíthatjuk ki. Az első egyenletből $s_{11}=-s_{13}$; ezt a harmadik egyenletbe helyettesítve; $s_{13}=2s_{12}$; így a három koordináta aránya

$$s_{11}:s_{12}:s_{13} = -2:1:2,$$

ezért pl.

$$\mathbf{s}_2 = [-2, 1, 2]^*, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{s}_2^0 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^*$$

a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

A $\lambda_3 = 1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_3 = [s_{31}, s_{32}, s_{33}]^*$ sajátvektort az

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{s}_3 = 0,$$

ill. az

$$\begin{aligned} s_{33} &= 0; \\ -s_{31}- s_{32}- s_{33} &= 0; \\ -2s_{31}-2s_{32}-2s_{33} &= 0 \end{aligned}$$

homogén egyenletrendszerből számíthatjuk ki. A harmadik egyenlet felesleges, mivel az előzőnek kétszerese; $s_{33}=0$-t a másodikba helyettesítve, $s_{31} = -s_{32}$. Így minden $\mathbf{s}_3=[-t, t, 0]^*$ alakú vektor a λ_3—1 sajátértékhez tartozó sajátvektor.

Ha pl. $t=1$, akkor

$$\mathbf{s}_3 = [-1, 1, 0]^*, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{s}_3^0 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^*.$$

A három sajátvektor lineárisan független, mert az

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja $\varrho(\mathbf{S})=3$, hiszen $|\mathbf{S}| = -2 \neq 0$, ezért a három sajátvektor bázist alkothat.

4. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és mutassuk meg, hogy valóban sajátértékek!

A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 8 & 12 \\ -1 & \lambda-4 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3-3\lambda^2+2\lambda =$$

$$= \lambda(\lambda^2-3\lambda+2) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0;$$

ennek $\lambda_1=0$, $\lambda_3=1$, $\lambda_2=2$ gyökei a sajátértékek.

A $\lambda_1=0$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1=[s_{11}, s_{12}, s_{13}]^*$ sajátvektort a

$$\begin{aligned} 2s_{11}+8s_{12}+12s_{13} &= 0; \\ -s_{11}-4s_{12}- 4s_{13} &= 0; \\ - \quad s_{13} &= 0 \end{aligned}$$

homogén egyenletrendszerből számíthatjuk ki. A harmadik egyenletből $s_{13}=0$; ezt felhasználva csupán a

$$-s_{11}-4s_{12} = 0$$

egyenletünk marad, amelyben az egyik ismeretlen értéke szabadon választható. Ha $s_{12}=t$, akkor $s_{11} = -4t$, tehát minden

$$\mathbf{s}_1=[-4t, t, 0]^*$$

alakú vektor sajátvektor. Legyen pl. $t=1$, akkor

$$\mathbf{s}_1=[-4, 1, 0]^*.$$

A $\lambda_2=1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_2=[s_{21}, s_{22}, s_{23}]^*$ sajátvektor a

$$\begin{aligned} 3s_{21}+8s_{22}+12s_{23} &= 0; \\ -s_{21}-3s_{22}- 4s_{23} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből számítható ki. A második egyenlet háromszorosát az elsőhöz adva, $s_{22}=0$ adódik, és ezt felhasználva, bármelyik egyenletből

$$s_{21} = -4s_{23}.$$

Ha $s_{23}=t$, akkor $s_{21} = -4t$ és minden

$$\mathbf{s}_2=[-4t, 0, t]^*$$

alakú vektor sajátvektor. Legyen $t=1$; ekkor

$$\mathbf{s}_2=[-4, 0, 1]^*.$$

A $\lambda_3=2$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_3[s_{31}, s_{32}, s_{33}]^*$ sajátvektort a

$$4s_{31}+8s_{32}+12s_{33} = 0;$$

$$-s_{31}-2s_{32}- 4s_{33} = 0;$$

$$s_{33} = 0$$

homogén egyenletrendszerből számítjuk ki. A harmadik egyenletet felhasználva, az első két egyenlet bármelyikéből

$$s_{31} = -2s_{32}.$$

Ha $s_{32}=t$, akkor $s_{31} = -2t$ és minden

$$\mathbf{s}_3=[-2t, t, 0]^*$$

alakú vektor sajátvektor. Legyen $t=1$, ekkor

$$\mathbf{s}_3=[-2, 1, 0]^*.$$

$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ valóban sajátvektor, hiszen

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\cdot\mathbf{s}_1 = \lambda_1\mathbf{s}_1;$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\mathbf{s}_2 = \lambda_2\mathbf{s}_2;$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\cdot\mathbf{s}_3 = \lambda_3\mathbf{s}_3.$$

5. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátvektorait!

A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5 = 0$$

és ennek gyökei $\lambda_1=5$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=1$.

A $\lambda_1=5$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1$ sajátvektort a

$$3s_{11}-2s_{12}- s_{13} = 0;$$

$$-s_{11}+2s_{12}- s_{13} = 0;$$

$$s_{11}-2s_{12}+3s_{13} = 0$$

egyenletrendszerből számítjuk ki. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{B}$ utolsó alakjáról látható, hogy $\varrho(\mathbf{B})=2<3=n$, ezért létezik nemtriviális megoldás; mégpedig egy ismeretlen szabadon választható, a többi pedig a

$$-s_{11}+2s_{12}- s_{13} = 0;$$

$$4s_{12}-4s_{13} = 0$$

redukált egyenletrendszerből számítható ki. Legyen pl. $s_{13}=t$, akkor $s_{12}=t$ és $s_{11}=t$. Az $\mathbf{s}_1$ sajátvektor tehát

$$\mathbf{s}_1=[t, t, t]^*$$

alakú, ill. ha pl. $t=1$, akkor

$$\mathbf{s}_1=[1, 1, 1]^*.$$

A $\lambda_2=\lambda_3=1$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_2$ sajátvektor a

$$-s_{21}-2s_{22}-s_{23} = 0;$$

$$-s_{21}-2s_{22}-s_{23} = 0;$$

$$-s_{21}-2s_{22}-s_{23} = 0$$

egyenletrendszerből számítható. Ez egyetlen egyenletet jelent csupán, az $s_{21}+2s_{22}+s_{23} = 0$ egyenletet. Most tehát két ismeretlen választható szabadon. Ez azt jelenti, hogy a $\lambda_2=\lambda_3=1$ sajátértékhez két lineáris független sajátvektor is található, ilyen pl. az $\mathbf{s}_2=[2, -1, 0]^*$, amikor s_{22}-t -1-nek és s_{23}-at 0-nak választottuk, és az $\mathbf{s}_3=[1, 0, -1]^*$, amikor s_{21}-et 1-nek és s_{22}-t 0-nak választottuk. Továbbá minden

$$h\mathbf{s}_2+k\mathbf{s}_3 = [2h+k, -h, -k]^*$$

alakú vektor sajátvektora az A mátrixnak, ahol h és k tetszőleges valós számok.

Az $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ sajátértékek lineárisan függetlenek, hiszen az

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja $\varrho(\mathbf{S})=3$, ui. $|\mathbf{S}|=4\neq 0$.

6. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját és sajátvektorait.

A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3)-1+3\lambda = \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 = (\lambda-1)^3,$$

és ez egyúttal a minimálpolinom is, mert A sem a $\lambda-1 = 0$, sem a $(\lambda-1)^2 = 0$ egyenletet nem elégíti ki. Ugyanis

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

és felhasználva, hogy

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

A $\lambda=1$ egyetlen sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}=[s_1, s_2, s_3]^*$ sajátvektor koordinátáit az

$$s_1 - s_2 \qquad = 0;$$

$$s_2 - s_3 = 0;$$

$$-s_1+3s_2-2s_3 = 0$$

egyenletrendszerből határozzuk meg. Az első két egyenletből $s_1=s_2=s_3$, és ez nem mond ellent a harmadik egyenletnek sem. Legyen pl. $s_3=1$; akkor

$$\mathbf{s}=[1, 1, 1]^*.$$

7. Keressük meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal adott transzformáció sajátvektorait!

A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda-1) = 0.$$

Ennek $\lambda_1=0$ háromszoros, $\lambda_2=1$ egyszeres gyöke, tehát ezek a sajátértékek.

A $\lambda_1=0$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1=[s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}]^*$ sajátvektorra fennálló egyenletrendszer

$$-s_{13}+s_{14} = 0;$$

$$-s_{11}-s_{13}+s_{14} = 0;$$

$$-s_{14} = 0.$$

Mivel s_{12} egyáltalán nem fordul elő az egyenletrendszerben, ezért tetszőleges lehet. Az utolsó egyenletből $s_{14}=0$; ezt felhasználva, az elsőből $s_{13}=0$; majd a második egyenletből $s_{11}=0$. Minden

$$\mathbf{s}_1=[0, \ t, \ 0, \ 0]^*$$

alakú vektor tehát sajátvektor.

A $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó $s_2 = [s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}]^*$ sajátvektort az alábbi egyenletrendszerből számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} s_{11} - \quad\; s_{12} + s_{14} &= 0; \\ -s_{11} + s_{12} - s_{13} + s_{14} &= 0; \\ s_{13} \quad\quad &= 0. \end{aligned}$$

A harmadik egyenletet felhasználva, $s_{13}=0$-ból

$$\begin{aligned} s_{11} + \quad\; s_{14} &= 0; \\ -s_{11} + s_{12} + s_{14} &= 0. \end{aligned}$$

E két egyenletet összeadva,

$$s_{12} + 2s_{14} = 0.$$

Ez az egyenlet megoldható és az egyik ismeretlen szabadon választható. Legyen $s_{14} = t$, ekkor $s_{12} = -2t$ és az első egyenletből $s_{11} = -t$. Minden

$$\mathbf{s}_2 = [-t, \; -2t, \; 0, \; t]^*$$

alakú vektor a $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

8. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátvektorait!

A $p(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ karakterisztikus polinomot most közvetlenül írjuk fel. Ehhez ki kell számítani a következő értékeket:

$$d_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 - 3 + 2 - 5 + 16 - 9 = 9;$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 + 16 - 8 + 2 = 7;$$

$$|\mathbf{A}| = 2.$$

Ezekkel az értékekkel

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (-1)5\lambda^3 + (-1)^2 9\lambda^2 + (-1)^3 7\lambda + 2 =$$

$$= \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2.$$

Könnyen észrevehető, hogy $\lambda_1 = 1$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek. Ezért oszthatunk a $(\lambda - 1)$ gyöktényezővel. Így a

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ennek ismét gyöke $\lambda_2 = 1$; az eljárást megismételve a

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek gyökei

$$\lambda_3 = 1, \qquad \lambda_4 = 2.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei közül tehát $\lambda_1 = 1$ háromszoros, $\lambda_4 = 2$ egyszeres gyök.

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor koordinátáit az

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{s}_1 = \mathbf{0};$$

1 1. részletesen felírva, a

$$\begin{aligned} 4s_{12} + \; s_{13} + 4s_{14} &= 0; \\ -2s_{11} + \; s_{12} - 5s_{13} + 4s_{14} &= 0; \\ s_{11} - \; s_{12} + 3s_{13} - 3s_{14} &= 0; \\ s_{11} - 4s_{12} + \; s_{13} - 5s_{14} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből számíthatjuk ki.

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó alakból látható, hogy $\varrho(\mathbf{B})=3$, hiszen pl.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

tehát létezik nemtriviális megoldás.

Mivel $n-\varrho(\mathbf{B}) = 4-3 = 1$, egy ismeretlen szabadon választható, a többi pedig az

$$s_{11}-s_{12}+3s_{13}-3s_{14} = 0;$$

$$-s_{12}+ s_{13}-2s_{14} = 0;$$

$$5s_{13}-4s_{14} = 0$$

redukált egyenletrendszerből számítható ki. Legyen pl. $s_{14}=t$; akkor $s_{13} = \frac{4}{5}t$; $s_{12} = -\frac{6}{5}t$; $s_{11} = -\frac{3}{5}t$. Ha pl. $t=5$, akkor a sajátvektor $\mathbf{s}_1 = [-3, -6, 4, 5]^*$, a normált sajátvektor pedig

$$\mathbf{s}_1^0 = \left[-\frac{3}{\sqrt{86}}, -\frac{6}{\sqrt{86}}, \frac{4}{\sqrt{86}}, \frac{5}{\sqrt{86}}\right]^*.$$

Hasonló számolással a $\lambda_4=2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor

$$\mathbf{s}_2 = [-2, -3, 2, 3]^*, \text{ ill. } \mathbf{s}_2^0 = \left[-\frac{2}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}\right]^*.$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix három különböző sajátértéke $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ sajátvektorok lineárisan függetlenek!

I. Megoldás:

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ és $\mathbf{s}_3$ lineárisan összefüggők, azaz léteznek olyan a_1, a_2, a_3 skalár számok, amelyek nem mind zérusok, és amelyekkel

$$a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2+a_3\mathbf{s}_3 = 0. \qquad (*)$$

Szorozzuk meg az előbbi egyenlet mindkét oldalát A-val, majd használjuk fel, hogy $\mathbf{A}\mathbf{s}_i=\lambda_i\mathbf{s}_i$ $(i=1, 2, 3)$. Ekkor

$$a_1\mathbf{A}\mathbf{s}_1+a_2\mathbf{A}\mathbf{s}_2+a_3\mathbf{A}\mathbf{s}_3 = 0,$$

ill.

$$a_1\lambda_1\mathbf{s}_1+a_2\lambda_2\mathbf{s}_2+a_3\lambda_3\mathbf{s}_3 = 0. \qquad (*)$$

Szorozzuk meg az utóbbi egyenletet ismét A-val, és használjuk fel újra, hogy $\mathbf{A}\mathbf{s}_i=\lambda_i\mathbf{s}_i$. Így adódik

$$a_1\lambda_1^2\mathbf{s}_1+a_2\lambda_2^2\mathbf{s}_2+a_3\lambda_3^2\mathbf{s}_3 = 0. \qquad (*)$$

A $(*)$-gal jelölt három egyenletből álló egyenletrendszer így foglalható össze mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1\mathbf{s}_1 \\ a_2\mathbf{s}_2 \\ a_3\mathbf{s}_3 \end{bmatrix} = 0$$

Az egyenlet bal oldalán álló harmadrendű mátrix determinánsa Vandermonde-féle determináns, amelynek értéke különböző λ értékek esetén nem zérus, tehát ekkor létezik a mátrix inverze. Szorozzuk meg a mátrixegyenletet balról ezzel az inverz mátrixszal. Ekkor

$$\begin{bmatrix} a_1\mathbf{s}_1 \\ a_2\mathbf{s}_2 \\ a_3\mathbf{s}_3 \end{bmatrix} = 0$$

adódik, ami csak úgy lehetséges, hogy $a_1=a_2=a_3=0$. Ezzel ellentmondásba kerültünk feltételünkkel, így $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ lineárisan független.

II. Megoldás:

Mivel a sajátértékek különbözők, mindegyik nem lehet 0; legyen pl. $\lambda_3\neq 0$.

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ és $\mathbf{s}_3$ lineárisan összefüggők, vagyis léteznek olyan α és β skalár számok, hogy α és β közül legalább az egyik nem nulla, és

$$\mathbf{s}_3 = \alpha\mathbf{s}_1+\beta\mathbf{s}_2.$$

Ekkor egyrészt

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_3=\lambda_3\mathbf{s}_3,$$

másrészt

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{s}_1+\beta\mathbf{s}_2) = \alpha\lambda_1\mathbf{s}_1+\beta\lambda_2\mathbf{s}_2.$$

A két jobb oldal egyenlőségéből $\lambda_3\neq 0$-val való osztás után

$$\mathbf{s}_3 = \alpha\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\mathbf{s}_1+\beta\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\mathbf{s}_2.$$

Mivel $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\neq 1$ és $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\neq 1$, $\mathbf{s}_3$ egy másik felbontását kaptuk, de ez ellentmond az egyértelmű felbontásnak, így kiinduló feltételünk nem lehet igaz, vagyis $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ lineárisan függetlenek.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha A n-edrendű négyzetes mátrix, amelynek sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, és $a\neq 0$, akkor $a\mathbf{A}$ sajátértékei $a\lambda_1, a\lambda_2, \ldots, a\lambda_n$.

Az $a\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$|\lambda\mathbf{E}-a\mathbf{A}| = 0.$$

Legyen λ^* az $a\mathbf{A}$ mátrix egyik sajátértéke. Helyettesítsük a karakterisztikus egyenletbe és emeljük ki a determinánsból az a számot, így

$$a\left|\frac{\lambda^*}{a}\mathbf{E}-\mathbf{A}\right| = 0.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy $\frac{\lambda^*}{a}$ sajátértéke az $\mathbf{A}$ mátrixnak, vagyis

$$\frac{\lambda^*}{a} = \lambda_i,$$

amiből $\lambda^* = a\lambda_i$.

11. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

szimmetrikus mátrix sajátvektorai ortogonálisak!

A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-4)-4(\lambda-2)-4(\lambda-4) =$$

$$= \lambda^3-9\lambda^2+18\lambda = \lambda(\lambda^2-9\lambda+18).$$

Az egyenlet gyökei $\lambda_1=0$; $\lambda_2=3$; $\lambda_3=6$.

A $\lambda_1=0$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1$ sajátvektort az alábbi egyenletrendszerből számíthatjuk ki:

$$-3s_{11}-2s_{12}-2s_{13} = 0;$$

$$-2s_{11}-2s_{12} = 0;$$

$$-2s_{11} - 4s_{13} = 0.$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Látszik, hogy $\varrho(\mathbf{B})=2$, és mivel $\varrho(\mathbf{B})=2<3=n$, az egyenletrendszernek van a triviálistól különböző megoldása, amelyben $n-\varrho(\mathbf{B}) = 3-2 = 1$ ismeretlen szabadon választható. A redukált egyenletrendszer

$$-2s_{11}-4s_{13} = 0;$$

$$-2s_{12}+4s_{13} = 0.$$

Legyen $s_{13}=t$, akkor $s_{12}=2t$, $s_{11} = -2t$. Az első sajátvektor tehát

$$\mathbf{s}_1=[-2t, 2t, t]^*;$$

ill.

$$\mathbf{s}_1=[-2, 2, 1]^*$$

$t=1$ esetén.

A $\lambda_2=3$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_2$ sajátvektorra vonatkozó egyenletrendszer:

$$-2s_{22}-2s_{23} = 0;$$

$$-2s_{21}+s_{22} = 0;$$

$$-2s_{21} - s_{23} = 0.$$

Most

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ismét $\varrho(\mathbf{B})=2$ és a redukált egyenletrendszer

$$-2s_{21}-s_{23} = 0;$$

$$s_{22}+s_{23} = 0,$$

ahol egy ismeretlen szabadon választható. Ha $s_{23}=u$, akkor $s_{22} = -u$, $s_{21} = -\frac{1}{2}u$, így a második sajátvektor $u=2$-vel

$$\mathbf{s}_2=[-1, -2, 2]^*.$$

A $\lambda_3=6$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_3$ sajátvektort meghatározó egyenletrendszer

$$3s_{31}-2s_{32}-2s_{33} = 0;$$

$$-2s_{31}+4s_{32} = 0;$$

$$-2s_{31}+2s_{33} = 0.$$

Itt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\varrho(\mathbf{B})=2$, a redukált egyenletrendszer pedig

$$-2s_{31}+2s_{33} = 0;$$

$$4s_{32}-2s_{33} = 0,$$

amelynek nemtriviális megoldása $s_{32}=v$, $s_{33}=2v$, $s_{31}=2v$; így a harmadik sajátvektor ($v=1$)

$$\mathbf{s}_3=[2,1,2]^*.$$

Könnyen belátható, hogy az $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ sajátvektorok ortogonálisak, hiszen bármelyik kettőnek a skaláris szorzata 0. Például

$$\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_3 = -4+2+2 = 0.$$

12. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$$

mátrix sajátvektorai ortogonálisak!

A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} \lambda-2+i & 0 & -i \\ 0 & \lambda-1-i & 0 \\ -i & 0 & \lambda-2+i \end{vmatrix} = (\lambda-2+i)^2(\lambda-1-i)-i^2(\lambda-1-i) =$$

$$= (\lambda-1-i)[(\lambda-2+i)^2+1] = 0.$$

A $\lambda-1-i=0$ egyenletből

$$\lambda_1=1+i.$$

A $(\lambda-2+i)^2+1 = \lambda^2+2(i-2)\lambda+4(1-i)=0$ egyenletből

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2(i-2)\pm\sqrt{4(i-2)^2-16(1-i)}}{2} = \frac{-2i+4\pm 2i}{2},$$

így

$$\lambda_2=2, \qquad \lambda_3=2-2i.$$

A $\lambda_1=1+i$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_1=[s_{11}, s_{12}, s_{13}]^*$ sajátvektor koordinátáit a

$$\begin{aligned} (-1+2i)s_{11}- \qquad is_{13} &= 0; \\ -s_{11}+(-1+2i)s_{13} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből számíthatjuk ki. Ebben s_{12} nem szerepel, tehát tetszőlegesen választható. A homogén egyenletrendszer determinánsa nem 0, így csak az $s_{11}=s_{13}=0$ triviális megoldás létezik. Ha $s_{12}=1$-et választunk, a $\lambda_1=1+i$ sajátértékhez tartozó sajátvektor

$$\mathbf{s}_1=[0,1,0]^*.$$

A $\lambda_2=2$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_2=[s_{21}, s_{22}, s_{23}]^*$ sajátvektort az

$$\begin{aligned} is_{21}-is_{23} &= 0; \\ (1-i)s_{22} &= 0; \\ -is_{21}+is_{23} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből számítjuk ki. A harmadik egyenlet felesleges (ui. az első -1-szerese). A második egyenletből $s_{22}=0$, az első egyenletből $s_{21}=s_{23}$. Legyen pl. $s_{21}=1$, ekkor

$$\mathbf{s}_2=[1,0,1]^*.$$

A $\lambda_3=2-2i$ sajátértékhez tartozó $\mathbf{s}_3=[s_{31}, s_{32}, s_{33}]^*$ sajátvektor az

$$\begin{aligned} -is_{31}-is_{33} &= 0; \\ (1-3i)s_{32} &= 0; \\ -is_{31}-is_{33} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből számítható. A harmadik egyenlet felesleges (megegyezik az elsővel), a második egyenletből $s_{32}=0$, az első egyenletből $s_{31}=-s_{33}$. Ha pl. $s_{31}=1$, akkor

$$\mathbf{s}_3=[1,0,-1]^*.$$

Könnyen látható, hogy $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3=\mathbf{s}_1\mathbf{s}_3=0$, azaz a sajátvektorok ortogonálisak.

13. Mutassuk meg, hogy a harmadrendű A mátrix karakterisztikus polinomja felírható a következő alakban:

$$p(\lambda) = p(0)+\frac{p'(0)}{1!}\lambda+\frac{p''(0)}{2!}\lambda^2+\frac{p'''(0)}{3!}\lambda^3.$$

A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix};$$

$$p'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} \end{vmatrix};$$

még egyszer differenciálva:

$$p''(\lambda)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{22} & -a_{23}\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ -a_{31} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{13}\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=2[(\lambda-a_{11})+(\lambda-a_{22})+(\lambda-a_{33}];$$

végül

$$p'''(\lambda)=2(1+1+1)=3!$$

Vegyük észre, hogy

$$p(0)=\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33}\end{vmatrix}=(-1)^3|\mathbf{A}|;$$

$p'(0)$ egyenlő a másodrendű átlós aldeterminánsok összegének $(-1)^2$-szeresével, $(-1)^2 d_2$-vel;

$p''(0)$ egyenlő az elsőrendű átlós aldeterminánsok összegének $(-1)2$-szeresével, $2!(-1)d_1$-gyel; végül

$p'''(0)=3!$

A most kapott értékeket a 315. oldalon levő (∗ ∗) egyenletbe helyettesítve,

$$p(\lambda)=(-1)^3|\mathbf{A}|+(-1)^2 d_2\lambda+\frac{2!(-1)d_1}{2!}\lambda^2+\frac{3!}{3!}\lambda^3=$$

$$=\lambda^3+(-1)d_1\lambda^2+(-1)^2 d_2\lambda+(-1)^3|\mathbf{A}|,$$

és ez valóban a harmadrendű mátrix karakterisztikus polinomja.

14. Írjuk fel az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\ldots 0 & 0\\ 1 & a & 0\ldots 0 & 0\\ 0 & 1 & a\ldots 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0\ldots 1 & a\end{bmatrix}$$

n-edrendű mátrix karakterisztikus polinomját!

A karakterisztikus polinom:

$$p(\lambda)=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & 0\ \ldots & 0 & 0\\ -1 & \lambda-a & 0\ \ldots & 0 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-a\ldots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0\ \ldots & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

alakú. Fejtsük ki az n-edrendű determinánst első sora szerint, majd a kapott egyetlen aldeterminánst ismét első sora szerint, és így tovább. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$p(\lambda)=(\lambda-a)^n.$$

15. Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét!

A karakterisztikus egyenlet

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ -4 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)-4=\lambda^2-5\lambda+2=0.$$

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{bmatrix}.$$

A valóban kielégíti a $\lambda^2-5\lambda+2=0$ egyenletet, mert

$$\begin{bmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

16. A 3. Gyakorló feladatban láttuk, hogy az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékei 1, 2, 3. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{A}^{-1}$ inverz mátrix sajátértékei 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, vagyis az eredeti mátrix sajátértékeinek a reciprokai!

$\mathbf{A}^{-1}$ létezik, mert $|\mathbf{A}|=6$; mégpedig

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & -2 & 2\\ -1 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

A^{-1} karakterisztikus egyenlete:

$$|\lambda E - A^{-1}| = \begin{vmatrix} \lambda-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \lambda-\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \lambda-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

vagy mindkét oldalt 3·6·3-mal szorozva,

$$\begin{vmatrix} 3\lambda-2 & 1 & -1 \\ 1 & 6\lambda-5 & 2 \\ 1 & 1 & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$, $\lambda_3=\frac{1}{3}$ értékeket behelyettesítve, a determináns értéke valóban zérus; pl. a második esetben a

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

determináns második sora az első sornak a (-2)-szerese, így a determináns valóban 0.

17. Igazoljuk, hogy ha **A** sajátértéke λ, akkor $\mathbf{A}^{-1}$ sajátértéke $\frac{1}{\lambda}$.

Legyen az **A** mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora **s**, vagyis $\mathbf{As}=\lambda\mathbf{s}$. Ekkor azonban felírható, hogy

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{s}) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{s}) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{s},$$

ami — a két szélső lépés egybevetésével láthatóan — éppen azt jelenti, hogy $\mathbf{A}^{-1}$ sajátértéke $\frac{1}{\lambda}$.

18. Keressük meg azt a mátrixot, amelynek segítségével az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix diagonális mátrixszá transzformálható.

Az 5. Gyakorló feladatban láttuk, hogy az **A** sajátvektoraiból alkotott **S** mátrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ennek segítségével a keresett transzformáció

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$$

alakban írható fel.

$|\mathbf{S}|=4$, így $\mathbf{S}^{-1}$ létezik, mégpedig

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ezzel a $4\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$ szorzatot kiszámítva,

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|ccc|l}
 & & & & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & \\
 & & & \mathbf{A}= & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & =\mathbf{S} \\
 & & & & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 5 & 10 & 5 & 20 & 0 & 0 & \\
4\mathbf{S}^{-1}= & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 4 & 0 & =4\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}. \\
 & 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 4 &
\end{array}$$

Ebből

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{L},$$

hiszen már láttuk, hogy **A** sajátértékei valóban 5, 1, 1 voltak.

19. Legyen az **E** bázisban egy transzformáció mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Hozzuk a transzformáció mátrixát diagonális alakra!

A diagonális alak felírásához szükségünk van az **A** mátrix sajátértékeire. A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \lambda-7 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-10 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda^3-24\lambda^2-180\lambda-432 = 0.$$

Az egyenlet gyökei 6, 6, 12, tehát az **A** mátrixot az

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

mátrixszá lehet transzformálni.

20. Alakítsuk át az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot diagonálmátrixszá!

A keresett transzformáció — ha létezik — $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ alakú, ahol az $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$ sajátvektorokkal

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy **S**-t már ismerjük és

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

ekkor **S**-sel balról szorozva (mivel $\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{E}$),

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

vagyis

$$\begin{bmatrix} s_{12} & s_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 s_{11} & \lambda_2 s_{21} \\ \lambda_1 s_{12} & \lambda_2 s_{22} \end{bmatrix}.$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha

$$s_{12}=\lambda_1 s_{11}; \quad s_{22}=\lambda_2 s_{21};$$

$$\lambda_1 s_{12} = \lambda_2 s_{22} = 0.$$

λ_1 és λ_2 nem lehet 0, ezért az utolsó egyenletből $s_{12}=s_{22}=0$, de akkor az első két egyenletből $s_{11}=s_{21}=0$. Mivel így

$$|\mathbf{S}| = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$\mathbf{S}^{-1}$ nem létezik, tehát **A** nem transzformálható diagonálmátrixszá.

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató

Felelős szerkesztő: Szokol Ágnes
Műszaki vezető: Abonyi Ferenc
Műszaki szerkesztő: Ihász Viktória
A borítót tervezte: Kováts Tibor
A könyv formátuma: Fr/5
Ívterjedelem: 17,0 (A/5)
Ábrák száma: 30
Azonossági szám: 10375/7
Készült az MSZ 5601:1983 és 5602:1983 szerint

Nyomta és kötötte az Oláh Nyomdaipari Kft.
Felelős vezető: Oláh Miklós

Mátrix rangja:

$\varrho(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqq \varrho(\mathbf{A})+\varrho(\mathbf{B})$; $\quad \varrho(\mathbf{AB}) \leqq \varrho(\mathbf{A})$ és $\varrho(\mathbf{AB}) \leqq \varrho(\mathbf{B})$

Mátrix diadikus felbontása:

$\mathbf{A} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^* + \ldots + \mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*$

Mátrix transzponáltja:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} \\ \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} \ldots a_{nm} \end{bmatrix}$$

Mátrix adjungáltja:

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \operatorname{adj}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots A_{nn} \end{bmatrix}$$

Mátrix inverze:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{-\det\mathbf{A}} = T_r \ldots T_2 T_1$$

Mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} \ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$$

Lineáris egyenletrendszer megoldása:

Ax=B akkor és csak akkor oldható meg, ha $\rho(\mathbf{A})=\rho(\mathbf{B})$

a megoldás egyértelmű, ha $\rho(\mathbf{A})=\rho(\mathbf{B})=n$

$n=m$ esetén $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}} = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \textit{(Cramer-szabály)}$$

Báziscsere mátrixa:

$\mathbf{x}_W = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{x}_Z = \mathbf{B}\mathbf{x}_Z$