OKTATÁSI HIVATAL

NAT 2020

9

Matematika

tankönyv

A kiadvány 2020. 06. 05-től tankönyvi engedélyt kapott a TKV/3154-6/2020. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról megnevezésű jogszabály alapján készült Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára és a Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyamára megnevezésű kerettantervek matematika tantárgy előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Lipovits Ágnes
Tananyagfejlesztők: Juhász István, Orosz Gyula
Kerettantervi szakértő: dr. Hoffmann Miklós, dr. Kosztolányi József, dr. Vancsó Ödön
Szaktanácsadó: dr. Csapodi Csaba
Szerkesztette: dr. Wintsche Gergely
Lektorok: dr. Jelitai Árpád, Pálmay Lóránt, Tamás Beáta
Szakábra: Szalóki Dezső
Illusztráció: Urmai László, Létai Márton
Fedélterv és tipográfia: Bajtai Zoltán, Bánáti János, Orosz Adél
Fotó: © Dreamstime, Pixabay, © Shutterstock, Tananyagfejlesztők, © ThinkStock

A tankönyv szerkesztői ezúton is köszönetet mondanak azoknak az íróknak, költőknek, képzőművészeknek, akiknek alkotásai tankönyveinket gazdagítják.

A könyvben felhasználtuk Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit Matematika 9. tankönyv c. művét. Raktári szám: NT-17112.

ISBN 978-615-6178-41-1

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: dr. Gloviczki Zoltán elnök • Raktári szám: OH-MAT09TB
Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos • Műszaki szerkesztő: Orlai Márton, Marcsek Ildikó
Grafikai szerkesztő: Görög Istvánné, Mikes Vivien, Bosznai Gábor • Nyomdai előkészítés: WOW (GL)
Terjedelem: 40,17 (A/5) ív • Tömeg: 780 gramm • 1. kiadás, 2020

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

magyar nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001 számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelel tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

TARTALOM

TARTALOM

FONTOSABB JELÖLÉSEK

Az A pont és az e egyenes távolsága: $d(A; e)$ vagy Ae vagy $\overline{Ae}$

Az A és B pont távolsága: AB vagy $\overline{AB}$ vagy $d(A; B)$

Az A és B pont összekötő egyenese: $e(A; B)$ vagy AB

Az f_1 és f_2 egyenesek szöge: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ vagy $(f_1; f_2)\sphericalangle$

A B csúcspontú szög, melynek egyik szárán az A, másik szárán a C pont található: $ABC\sphericalangle$

A C csúcspontú szög: $C\sphericalangle$

Szög jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Az A, B és C csúcsokkal rendelkező háromszög: $ABC\triangle$

Az $ABC\triangle$ területe: $T(ABC)$ vagy T_{ABC}

Az a, b és c oldalú háromszög fél kerülete: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

A derékszög jele: ⊾

Az e egyenes merőleges az f egyenesre: $e \perp f$

Az e egyenes párhuzamos az f egyenessel: $e \parallel f$

Egybevágóság: $\cong$; $ABC_\triangle \cong A'B'C'_\triangle$

Az A pontból a B pontba mutató vektor: $\overrightarrow{AB}$

A v vektor: $\underline{v}$ vagy $\mathbf{v}$ vagy $\vec{v}$

Egyenlő, nem egyenlő: $=, \neq$; $a = 2$, $b \neq 5$

Azonosan egyenlő: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Közelítőleg egyenlő: $\approx$; $a \approx 2{,}3$; $8{,}54 \approx 8{,}5$

Kisebb, kisebb vagy egyenlő: $<, \leq$; $2 < 3$, $5 \leq x$

Nagyobb, nagyobb vagy egyenlő: $>, \geq$; $6 > 4$, $a \geq 2$

A természetes számok halmaza: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \ldots\}$

Az egész számok halmaza: $\mathbf{Z}$ $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

A pozitív, a negatív egész számok halmaza: $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$ $\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$

A racionális, az irracionális számok halmaza: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$

A pozitív, a negatív racionális számok halmaza: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

A valós számok halmaza: $\mathbf{R}$

A pozitív, a negatív valós számok halmaza: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Eleme, nem eleme a halmaznak: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Részhalmaz, valódi részhalmaz: $\subseteq, \subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Nem részhalmaza a halmaznak: $\not\subset$; $\mathbf{Z} \not\subset \mathbf{Q}^+$

Halmazok uniója, metszete: $\cup, \cap$; $A \cup B$, $A \cap B$

Halmazok különbsége: $\setminus$; $A \setminus B$

Üres halmaz: $\varnothing$, $\{\}$

Az A halmaz komplementere: $\overline{A}$

Az A halmaz elemszáma: $|A|$; $|\{0; 1; 2\}| = 3$

Zárt intervallum: $[a; b]$

Balról zárt, jobbról nyílt intervallum: $[a; b[$

Balról nyílt, jobbról zárt intervallum: $]a; b]$

Nyílt intervallum: $]a; b[$

Az x szám abszolút értéke: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Az x szám egész része, tört része: $[x]$, $\{x\}$; $[2{,}3] = 2$, $\{2{,}3\} = 0{,}3$

Az a osztója b-nek, b többszöröse a-nak: $a \mid b$; $2 \mid 8$

Az a és b legnagyobb közös osztója: (a, b); $(4, 6) = 2$

Az a és b legkisebb közös többszöröse: $[a, b]$; $[4, 6] = 12$

Az f függvény hozzárendelési szabálya: $f\colon x \mapsto$; $f\colon x \mapsto 2x + 3$

Az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen: $f(x_0)$; $f(5)$, ha $x_0 = 5$

n faktoriális: $n!$; $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Az X sokaság átlaga: $\overline{X}$

A TANKÖNYV HASZNÁLATÁRÓL

A tankönyv elsősorban a *középszintű érettségi vizsga* tananyagát tartalmazza, de megtalálhatóak benne olyan témakörök is, amelyek az *emelt szintű érettségi vizsga* követelményrendszeréhez tartoznak, és a 9. évfolyamon eredményesen tárgyalhatók. A tankönyv a definíciókhoz és a fogalmakhoz kapcsolódó tananyagelemek kidolgozásával segíti a matematikai szemlélet fejlesztését. A matematika megértéséhez, sikeres tanulásához feltétlenül hozzátartozik a *bizonyítási készség* kialakítása és fejlesztése. Minden lecke végén összegyűjtöttük a fontosabb új **fogalmakat**. Kiegészítő anyagként ajánljuk az olvasmányok és matematikatörténeti ismertetések, érdekességek elolvasását.

A tankönyvben **Emelt szint**-tel (és apró betűvel), jól elkülönítve **az emelt szintű érettségi vizsgán** előforduló tananyagokat jelöltük.

Számos kidolgozott példa található a könyv minden leckéjében, amelyek fokozatosan vezetik be a tanulókat az elsajátítandó tananyagba. A tananyag gyakorlását, elmélyítését, az otthoni tanulást és az érettségi vizsgára való felkészülést a leckék végén kitűzött feladatok segítik. Ezeket a nehézségi szintjük szerint is csoportosítottuk:

- **K1** = középszint, könnyebb;
- **K2** = középszint, nehezebb;
- **E1** = emelt szint, könnyebb;
- **E2** = emelt szint, nehezebb feladat.

A leckék végén lévő feladatok részletes megoldása megtalálható az **interneten,** a tankonyvkatalogus.hu weboldalon.

Az érdeklődők vagy gyakorolni vágyók számára a leckék végén még **további feladatokat** is ajánlunk, amelyeket a *MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjteményből* jelöltünk ki.

Segíteni kívánjuk a diákok pályaorientációját, ezért néhány **pályaképpel** szeretnénk felhívni a figyelmet a matematikatanulás hasznosságára. A pályaképekben megjelenő fiataloktól megtudhatjuk, hogy jelenlegi munkájuk során hogyan hasznosítják, amit korábban a középiskolában megtanultak.

Pálmay Lóránt
Jelitai Árpád

A felkészüléshez ajánlott példatárak:

Gerőcs László – Orosz Gyula – Paróczay József – Szászné dr. Simon Judit:

NT-16125/I (+CD-n a megoldások)	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.
NT-16125/II	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I., Megoldások
NT-16126/I (+CD-n a megoldások)	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.
NT-12126/II	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II., Megoldások

Czapáry Endre – Czapáry Endréné – Csete Lajos – Hegyi Györgyné – Iványiné Harró Ágota – Morvai Éva – Reiman István:

NT-16127/I (+CD-n a megoldások)	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III., Geometriai feladatok gyűjteménye
NT-16127/II	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III., Geometriai feladatok gyűjteménye, Megoldások

I. HALMAZOK, KOMBINATORIKA

Ebben a részben áttekintjük a legfontosabb számhalmazokat és ponthalmazokat, valamint egyszerű kombinatorikai feladatokat tárgyalunk.

A halmazelmélet viszonylag fiatal része a matematikának. A tudományág vizsgálata a XIX. század második felétől kapott nagyobb hangsúlyt; elsősorban azért, mert a halmazelméleti fogalmakkal, szimbólumokkal a matematika többi területe is sikeresen modellezhető.

A kombinatorika területéről egyszerű összeszámolási feladatokat oldunk meg. Hasonló feladatokat már a középkori kínai matematikusok is vizsgáltak, bár a kombinatorika mai értelemben vett, önálló tudományágnak csak a XVII. század közepe óta tekinthető. A mai elnevezéssel diszkrét (vagy véges) matematikai problémák a XX. század közepe óta állnak a kutatások középpontjában. A gazdasági élet több területén is jelentős az alkalmazási lehetőségük: említhetjük például a modern közgazdaságtant, vagy a műszaki tudományterületekről az elméleti fizikai kutatásokat.

Végül említsük meg a kombinatorika egyik legfiatalabb ágát, a gráfelméletet. A gráfok gyakorlati alkalmazása sokrétű: például az egyes sportversenyek sorsolása és a logisztikai problémák mellett (gazdaságos úthálózat tervezése, szállítási költségek minimalizálása) idesorolhatjuk az informatikai rendszerek és hálózatok matematikai alapú modellezését is.

1. SZÁMOK ÉS ALAKZATOK

Hosszú volt a nyár, jólesett a kikapcsolódás. A pihenés után, ráhangolódásképpen nézzünk meg néhány ismétlő feladatot! (Egy részüket a nehezebb felvételi és kompetenciamérési feladatok közül válogattuk.)

1. példa

Egy bűvész megkér egy nézőt, hogy gondoljon egy 1 és 100 közötti egész számra. Ezután a következőt tegye a néző (használhat papírt és ceruzát is, ha szükséges):

– A számhoz adjon hozzá 3-at; az így kapott számot szorozza meg 2-vel; a kapott számot növelje meg 10-zel; az így kapott számot ismét szorozza meg 2-vel; az eredményből vonjon ki 12-t; végül a kapott számot ossza el 2-vel.

Ezután a bűvész megkérdezi, milyen számot kapott a néző, és „kapásból” megmondja, hogy mire gondolt eredetileg. Például ha a néző azt mondja, az eredmény 42, akkor rávágja: „A gondolt szám a 16 volt.” Ha pedig egy másik néző a 14-et kapta, akkor „a gondolt szám a 2”.

Hogyan okoskodhatott a bűvész?

Megoldás

Ha a néző által gondolt szám x, akkor a műveletek után az $\frac{((x+3)\cdot 2+10)\cdot 2-12}{2}$ számot kapják a nézők. A kifejezést egyszerűbb alakra hozzuk: $\frac{((x+3)\cdot 2+10)\cdot 2-12}{2}=\frac{(2x+16)\cdot 2-12}{2}=$ $=\frac{4x+20}{2}=2x+10$. Ha ebből a számból kivonunk 10-et és osztjuk 2-vel, akkor megkapjuk a gondolt x számot.

A műveletek fejben is gyorsan elvégezhetők: $\frac{42-10}{2}=16$ és $\frac{14-10}{2}=2$.

2. példa

Adottak az $A = 675$ és $B = 360$ számok.

Melyik számnak van több (pozitív) osztója?

Megoldás

Elkészítjük a számok prímtényezős felbontását: $675 = 3^3 \cdot 5^2$ és $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Az A osztóit érdemes rendezetten, osztópáronként felsorolnunk. Ezek: (1, 675), (3, 225), (5, 135), (9, 75), (15, 45), (25, 27). A 675-nek tehát 12 darab pozitív osztója van.

Hasonlóan felsorolhatnánk B társosztóit, de ügyesebben is eljárhatunk. A B 5-ös prímtényezője nélkül a két számnak ugyanannyi osztója lenne, mert a $3^3 \leftrightarrow 2^3$ és $5^2 \leftrightarrow 3^2$ tényezők szimmetrikus szerepűek. Mivel B-ben még további osztókat állíthatunk elő az 5-ös prímtényezővel, ezért B-nek van több osztója.

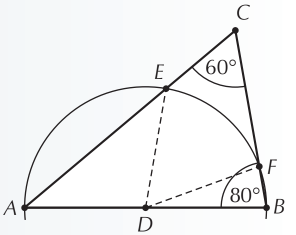
(Érdekes, hogy nem kellett megszámolnunk B osztóit. A több osztó megállapításához elegendő volt az osztók összehasonlítása, párba állítása. Sőt azt is megkaptuk, hogy B-nek pontosan kétszer annyi osztója van, mint A-nak, ugyanis $2^3 \cdot 3^2$ minden osztójához vagy hozzávesszük az 5-ös tényezőt szorzónak, vagy nem. A B pozitív osztóinak a száma tehát 24.)

3. példa

Az ABC háromszögben B-nél 80°-os, C-nél 60°-os szög van, az AB oldal hossza 6 cm. Ennek az oldalnak a D felezőpontjából 3 cm-es sugárral kört rajzolunk. A kör az E pontban metszi az AC és az F pontban a BC oldalt.

a) Számold ki az EDF szöget!

b) Milyen messze vannak egymástól az E és az F pontok?



Megoldás

a) Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 180° - (80° + 60°) = 40°$. ADE egyenlő szárú háromszög, ezért $DEA\sphericalangle = 40°$ szintén, és $ADE\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$.
Hasonlóan BDF is egyenlő szárú háromszög, ezért $DFB\sphericalangle = 80°$, és $BDF\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 80° = 20°$.
$EDF\sphericalangle = 180° - ADE\sphericalangle - BDF\sphericalangle = 60°$.

b) EDF egyenlő szárú háromszög ($DE = DF$), melyben a szárak által bezárt szög 60°. Ezért az EDF háromszög minden szöge 60°-os, a háromszög egyenlő oldalú is. EF hossza tehát a kör sugarával egyenlő, azaz 3 cm.

4. példa

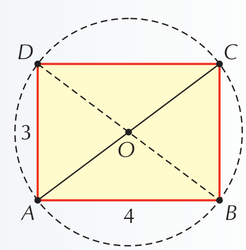
Egy $ABCD$ téglalap oldalai 3 cm és 4 cm hosszúak.

a) Milyen hosszú a téglalap átlója?

b) Igaz-e, hogy a téglalapok köré mindig írható olyan kör, amely átmegy a négy csúcson? Ha igen, mekkora az $ABCD$ téglalap köré írt kör sugara?

c) A téglalap rövidebbik oldalait harmadrészükkel, a hosszabbik oldalait 25%-kal megnöveljük, így egy újabb téglalapot kapunk. Mennyi annak a négyzetnek az oldala, amelyik egyenlő területű az új téglalappal?

Megoldás



a) A téglalap minden szöge 90°-os, ezért az ábrán látható ABC háromszög derékszögű. Pitagorasz tételét alkalmazzuk: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. A számadatokkal $AC^2 = 3^2 + 4^2$, azaz $AC^2 = 25$.
Innen az átló hossza $AC = \sqrt{25} = 5$ cm.

b) A téglalap átlói egyenlő hosszúak, és kölcsönösen felezik egymást. Az átlók O metszéspontja egyenlő távol van a csúcsoktól: $OA = OB = OC = OD$. Így viszont mindig található megfelelő kör: ennek középpontja az átlók metszéspontja, és sugara az átló fele. (Ez a kör átmegy mind a négy csúcson.)
Az $ABCD$ téglalap köré írt kör sugara $\frac{AC}{2} = 2{,}5$ cm.

c) Az új téglalap oldalai $\frac{4}{3} \cdot 3 = 4$ cm és $4 \cdot 1{,}25 = 5$ cm hosszúak, területe $4 \cdot 5 = 20\ \text{cm}^2$. Olyan x oldalú négyzetet keresünk tehát, amelyre $x^2 = 20$, azaz $x = \sqrt{20}$ cm.
A 20 azonban nem négyzetszám. Hogyan tudnánk meghatározni a 20 négyzetgyökét? Egyáltalán van ilyen szám?

A 20 NÉGYZETGYÖKE

Olyan számot keresünk, amelyet négyzetre emelve 20-at kapunk. Megpróbáljuk több lépésben, becslésekkel közelíteni a $\sqrt{20}$ számot.

1. lépés: $4^2 = 16$ és $5^2 = 25$, ezért azt mondhatjuk, hogy $4 < \sqrt{20} < 5$.

2. lépés: Egy tizedesjegy pontossággal becsülve $4{,}4^2 = 19{,}36$ és $4{,}5^2 = 20{,}25$, ezért $4{,}4 < \sqrt{20} < 4{,}5$.

3. lépés: Két tizedesjeggyel dolgozva $4{,}47^2 = 19{,}9809$ és $4{,}48^2 = 20{,}0704$, ezért $4{,}47 < \sqrt{20} < 4{,}48$.

Látható, hogy az eljárást folytatva egyre pontosabban megközelíthetjük $\sqrt{20}$ értékét. Ha például a feladat két tizedesjegy pontosságot kér, akkor még egy közelítő lépést elvégzünk:

4. lépés: Három tizedesjeggyel számolva $4{,}472^2 = 19{,}998784$ és $4{,}473^2 = 20{,}007729$, ezért $4{,}472 < \sqrt{20} < 4{,}473$.

Most már válaszolhatunk: két tizedesjegy pontossággal $\sqrt{20} \approx 4{,}47$.

A manapság forgalomban lévő **zsebszámológépek** többsége ki tudja számolni a nemnegatív számok négyzetgyökét, általában 9-10 tizedesjegy pontossággal. A mi gépünkön $\sqrt{20} = 4{,}472135955$ a kiírt érték. Ne becsüljük le azonban a fenti becsléses eljárást! Minél többjegyű a közelítés, annál időigényesebb a számolásunk, de ezzel a módszerrel *tetszőleges pontossággal* meghatározhatjuk a számok négyzetgyökét – akár még a számológépünknél is pontosabban. (A gyakorlatban általában elegendő természetesen néhány tizedesjegy pontosság.)

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Lehetséges persze, hogy nincs szükség hosszadalmas közelítő számításokra, elképzelhető, hogy az eljárás egyszer csak véget ér. Például $\sqrt{6{,}25}$ becslésekor $2{,}4^2 = 5{,}76 < 6{,}25$, de $2{,}5^2 = 6{,}25$ már pontos értéket ad. Vajon lehetséges, hogy $\sqrt{20}$ tizedes tört alakja is véges?

Sajnos nem.

A 8. osztályban tanultuk, hogy véges tizedestört alakja egyes racionális számoknak van, pl. a $\frac{3}{4} = 0{,}75$. Vannak olyan racionális számok is, amelyeknek végtelen, de szakaszos a tizedestört alakjuk, ilyen pl. az $\frac{1}{7} = 0{,}\dot{1}4285\dot{7}$. Be lehet bizonyítani, hogy a $\sqrt{20}$ irracionális szám – ebből viszont az következik, hogy végtelen, nem szakaszos tizedestört az alakja. Tetszőleges pontossággal közelíthetjük az értékét, de tizedes törttel, teljesen pontosan nem tudjuk felírni a $\sqrt{20}$-at.

Vannak más ismert irracionális számok is, ilyenek például a $\sqrt{2}$ vagy a π. Ez utóbbival a kör kerületének és az átmérőjének a hányadosát jelöljük, ami minden körnél ugyanakkora érték.

Nevezetes összefüggések:
Az r sugarú kör kerülete $k = 2r\pi$. Az is igazolható, hogy a kör területe $t = r^2\pi$.

Fogalmak
kör kerülete,
területe

A racionális és irracionális számokkal a későbbiekben többször is találkozunk még.

FELADATOK

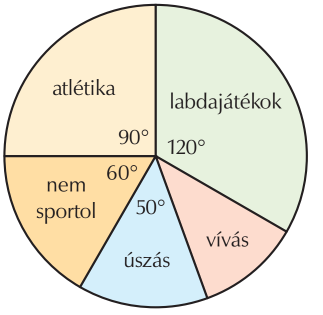
1. K1 Aladárnak 4500 Ft megtakarított pénze van, ez Béla pénzének 18%-a. Mindketten minden hónapban 500 Ft zsebpénzt kapnak szüleiktől, amiből semmit nem költenek el. Mennyi idő múlva lesz Aladárnak feleannyi pénze, mint Bélának?

2. K1 A kördiagram egy nyolcadik évfolyam tanulóinak sportolási szokásait szemlélteti. Mindegyik diák legfeljebb egy sportágat űz.

a) Hány fős az évfolyam, ha 16-an vívnak?

b) Hány százaléka az úszni járók számának az atletizálók száma?

c) A labdajátékokat űzők közül néhányan átiratkoztak úszásra. Hány fő iratkozott át, ha ezután az úszók száma éppen 70%-a a labdajátékokat űzők számának?



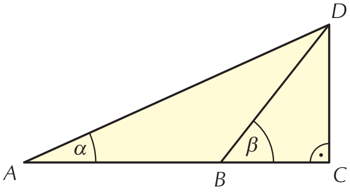
3. K1 Az ábrán látható ACD háromszögben a C csúcsnál derékszög van, $\alpha = 15°$, $\beta = 30°$, $DB = 6$ cm.

a) Mekkora az ADB szög?

b) Hány cm az AB szakasz?

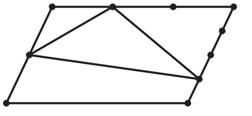
c) Hány cm a DC szakasz?

d) Hány cm hosszúságú a BC szakasz, ha az ACD háromszög területe egy tizedesjegyre kerekítve 16,8 cm^2?



4. K1 Az 1, 2, 3, 4 és még egy szabadon választott számjegy felhasználásával írjuk fel azt a legnagyobb ötjegyű számot, amelyik osztható 36-tal!

5. K1 Egy paralelogrammát az ábrán látható módon négy részre vágunk. Mekkora a részalakzatok területe, ha a paralelogramma területe 144 cm^2? (Az egyes pontok az oldalakat rendre felezik, harmadolják, ill. negyedelik.)



6. K1 Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül? Válaszaidat indokold!

a) Van olyan szám, amit 2-vel megszorozva, nála kisebb számot kapunk eredményül.

b) Van olyan szám, melynek ellentettje 6-tal kisebb, mint az abszolút értéke.

c) Egy háromszögnek legalább két külső szöge hegyesszög.

d) Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozik a legrövidebb magasság.

e) Az első 12 prímszám összege páratlan.

f) Ha egy 18 jegyű szám minden jegye azonos, akkor a szám osztható hárommal.

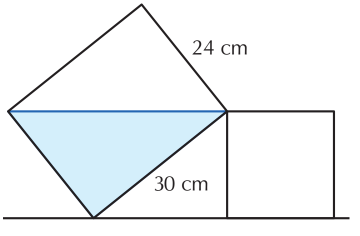
g) A $10^{2012} - 1$ szám osztható hárommal.

7. Egy téglatest alakú, felül nyitott akvárium egyik alapéle 30 cm, magassága 24 cm. A víz kezdetben 5 cm magasan áll benne.

K1 *a)* Beleöntünk 18 liter vizet az akváriumba, és ekkor a vízszint 20 cm-re emelkedik. Mekkora az akvárium másik alapéle?

K1 *b)* Hány liter víz van most az akváriumban?

K2 *c)* Az akvárium 30 cm-es élre merőleges egyik alapélét olyan magasra emeljük, hogy a megemelt él éppen a víz szintjével azonos magasságba kerüljön, majd ebben a helyzetben alátámasztjuk az



ábra szerint. Eközben az alaplap szemközti párhuzamos éle az asztalon marad. Mennyi víz folyik ki az akváriumból?

K2 *d)* Ebben a megemelt helyzetben mekkora azoknak az üvegfelületeknek a területe, melyek az edényben lévő vízzel érintkeznek?

8. K1 Annának 8 különböző szoknyája van. Egyik héten hétfőtől csütörtökig minden nap ezekből választ egyet.

a) Hányféleképpen állíthatja össze négy napon át a felveendő szoknyák sorozatát, ha az első és az utolsó napon ugyanazt a szoknyát szeretné felvenni, de a többi napokon ettől és egymástól különbözőket?

b) Hányféleképpen veheti föl a szoknyákat, ha csak azt tudjuk, hogy a négy napból kettőn ugyanazt a szoknyát veszi föl, de a többi napokon ettől és egymástól különbözőket?

ÚTMUTATÁSOK

A megoldásokon érdemes először önállóan gondolkodnod, és csak akkor keress segítséget, ha megakadtál.

1. t hónap múlva Aladár pénze $4500 + t \cdot 500$, Béla pénze $\frac{100}{18} \cdot 4500 + t \cdot 500$ forint lesz.

2. *a)* A vívás körcikkhez $360° - (120° + 90° + 60° + 50°) = 40°$ tartozik, ennek feleltethető meg a 16 fő.

b) $\frac{90}{50} = 1{,}8$.

c) Kezdetben $144 \cdot \frac{120}{360} = 48$ a labdajátékot játszók száma, és $144 \cdot \frac{50}{360} = 20$ fő az úszók száma. Ha x fő iratkozott át úszásra, akkor $48 - x$ és $20 + x$ az új létszámok, és így $\frac{20 + x}{48 - x} = 0{,}7$.

3. Igazolható, hogy *ABD* egyenlő szárú háromszög, és *BCD* „félszabályos" háromszög (azaz egy szabályos háromszögnek a fele).

$\frac{AC \cdot CD}{2} = 16{,}8$, innen $AC = \frac{2 \cdot 16{,}8}{CD}$ és $BC = AC - AB$.

Megjegyzés:

A korábban kiszámított értékekkel $CD = 3$ és $AB = 6$, így $BC = 5{,}2$ cm. Azonban mindig problémás a kerekített értékekkel való „visszafelé" számolás, azaz amikor a végeredményből következtetünk az eredeti értékekre. Most $16{,}75 < \frac{AC \cdot CD}{2} < 16{,}85$ az ismert adat, ebből pontos értékekkel számolva $\frac{67}{6} \le AC < \frac{337}{30}$, azaz $\frac{31}{6} \le BC < \frac{157}{30}$ adódik. Egy tizedesjegyre kerekítve valóban $BC = 5{,}2$ cm.

A megoldás során persze nem várják el tőlünk a fenti gondolatmenetet, ezzel inkább csak a problémát jeleztük.

4. Egy pozitív egész szám pontosan akkor osztható 36-tal, ha osztható 4-gyel és 9-cel. A 9-es oszthatóságot csak a 8-as számjeggyel érhetjük el; tehát az 1, 2, 3, 4, 8 számjegyekből kell a lehető legnagyobb, 4-gyel osztható számot előállítani.

5. Érdemes először a három külső alakzat területét meghatározni, ekkor a belső háromszög területe a paralelogramma területéből kivonással számítható. A külső alakzatok területét pedig kiszámíthatjuk, ha felhasználjuk, hogy a háromszögek területe arányos az alapjukkal és a hozzájuk tartozó magassággal. (Egy

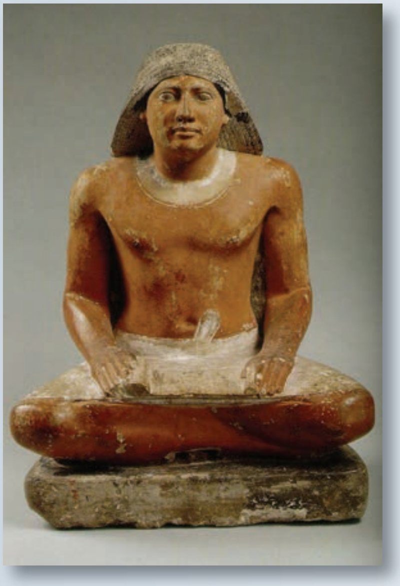
másik lehetőség, hogy az oldalak osztópontjain keresztül párhuzamosakat húzunk a paralelogramma oldalaival, és így kisebb részparalelogrammákra bontjuk fel.)

6. *a)* Érdemes a negatív számokra is gondolnunk.
   b) Itt csak pozitív lehet a keresett szám.
   c) Egy belső szög és egy külső szög összege 180°.
   d) Írjuk fel kétféleképpen a háromszög területét!
   e) Mit tudunk a prímszámok paritásáról?
   f) A 3-mal való oszthatósági szabályból már következik a válasz.
   g) Próbáljuk felírni, hogyan nézhet ki ez a sokjegyű szám!

7. *a)* Ha a másik alapél hossza *x* deciméter, akkor $3 \cdot x \cdot 1{,}5 = 18$.
   b) $3 \cdot x \cdot 2$ (liter)
   c) Ekkor az akvárium éppen félig lesz vízzel.
   d) A terület megegyezik az alaplap, egy oldallap és két fél oldallap területével.

8. *a)* *ABCA* típusú az öltözködés: az *A* szoknya 8-, a *B* 7-, a *C* pedig 6-féle lehet.
   b) *AABC* típusú az öltözködés, de a két azonos szoknyát nem feltétlenül az első két napon veszi föl Anna. Ennek a két napnak a megválasztására 6 lehetősége van.

2. A SZÁMOK ÁTTEKINTÉSE – BEVEZETÉS



Egyiptomi írnok szobra

Az emberiség történetében a számok „felfedezése”, a számfogalom kialakulása igen hosszú folyamat eredménye volt. Egyes nyelvészek szerint vadászó-halászó őseink beszédjükben valószínűleg használták az „egy”, „kettő”, esetleg a „három”; valamint a „sok”, „kevés”, „több” számneveket, de sok időnek kellett eltelnie, míg az igazi, az elvont számfogalom kialakult. A termelőerők fejlődése, a terjedő mezőgazdaság, állattenyésztés, és főleg a kialakuló kereskedelem meggyorsította a folyamatot. A termelt javakat számon kellett tartani, a cserekereskedelem kialakulásával a termékekhez egyfajta értéket kellett rendelni – ezek a feladatok megoldhatatlanok *számok* használata nélkül. Amikor felmerült az igény a termelési javak összeírására, az adatok rögzítésére, nyilvántartására, akkor a már meglévő írásbeliség kiegészült a *számírással*. A kereskedelmi élet fejlődése azt eredményezte, hogy a számokat kezdték nagyobb egységekbe, csoportokba foglalni. Így kialakultak a *számrendszerek*, melyek ősi emlékei a legtöbb nép nyelvében megtalálhatók. (A babiloniak öröksége például az időmérésben használt 60-as számrendszer, vagy említhetjük az ősi magyar 7-es számrendszert, amelyet leginkább a mesék világa őrzött meg számunkra.)

Egyes ókori kultúrák már több ezer évvel ezelőtt rendelkeztek fejlett matematikai ismeretekkel, elsősorban az aritmetika, a terület-, a térfogatszámítás és a csillagászati mérések területén. A legrégibb írásos emlékek kb. négyezer évesek, az ókori egyiptomi és mezopotámiai kultúrák területéről származnak. Mégis az ókor legjelentősebb matematikai eredményeit a görög matematikusoknak köszönhetjük. A Kr. e. VI. századtól számíthatjuk tevékenységüket, s bár a görög matematika a virágkorát Kr. e. 350–200 között élte, munkásságuk a mai napig érezteti a hatását.

A számok, a számokkal végzett tevékenységek mindennapi életünk részét képezik.

András egy átlagos munkanapja a reggel *fél hétkor* csipogó ébresztőórával kezdődik. *Negyed nyolckor* indul az iskolába az Otthon utca *52. számú* házból, s *ötperces* (*400 méteres*) gyaloglás után felszáll a *6-os* villamosra. A járművön még átolvassa az *első* tanítási óra házi feladatát (irodalomtankönyv *162–164. oldal*); a sarki büfében esetleg *tízórait* vásárol magának (*10 dkg* felvágott, *két* zsömle, *fél liter* tej; fizet *350 Ft-ot*). A *III.* emeleti *314-es* osztályterembe a *32* fős osztályból *huszadiknak* érkezik. Reméli, felel magyar irodalomból: félévkor csak *4-ese* volt, év végén *5-öst* szeretne.

Manapság nehéz elképzelni akár csak egyetlen olyan napot is, amikor a példában szereplő András nem találkozik számokkal. Pedig ez nem mindig volt így: a „szám” nehéz, elvont fogalom. A történelem előtti korok beszélni tudó emberének nyelvétől egészen a mai, modern műszaki nyelvezetig – a számfogalom hatalmas fejlődésen ment át.

A továbbiakban áttekintjük a középiskolában használt számköröket, valamint a számhalmazokon értelmezett műveleteket.

TERMÉSZETES SZÁMOK, EGÉSZ SZÁMOK

Általános iskolás tanulmányainkból már tudjuk, hogy a számolási igény megjelenésének az eredménye – „természetes” módon – a **természetes számok halmaza:** 0, 1, 2, 3, … A számok közül, elhagyva a 0-t, a **pozitív egész számokat** kapjuk: 1, 2, 3, …; s a pozitív egész számok **ellentettjeiként** bevezethetjük a **negatív egész számokat** is: –1, –2, –3, …

A pozitív egész számokat, a negatív egész számokat és a 0-t együttesen **egész számoknak** nevezzük.

Az egész számok körében elvégezhető az **összeadás,** a **kivonás** és a **szorzás** művelete. Ez azt jelenti, hogy ha egész számokat összeadunk, kivonunk vagy szorzunk, az eredmény is egész szám lesz:

$$2 + 5 = 7, \quad 2 - 16 = -14, \quad 5 + (-2) = 3, \quad 3 \cdot (-2) = -6, \quad (-1) \cdot (-13) = 13.$$

Más a helyzet a negyedik alapművelettel, az osztással: két egész szám hányadosa nem biztos, hogy egész szám.

TÖRTSZÁMOK, RACIONÁLIS SZÁMOK

Ahhoz, hogy értelmezni tudjuk két egész szám hányadosát (az osztást), be kell vezetnünk a **törtszámok** fogalmát. Ezek ismeretében már írhatjuk, hogy

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{-6}{9}, \quad \frac{1,23}{-2,7}, \quad \frac{0}{11}, \quad \frac{5}{1}, \quad \frac{-5}{-1}.$$

A törtvonal az osztás műveletét jelzi, így a tört nevezőjében nem állhat 0: a $\frac{3}{0}$, $\frac{-2}{0}$, $\frac{0}{0}$ stb. kifejezések *értelmetlenek*. (0-val nem oszthatunk, 0 részre nem lehet szétosztani valamit.)

A törtek körében elvégezhető a négy alapművelet: törtszámok összege, különbsége, szorzata és hányadosa is törtszám. (A 0-val való osztást természetesen nem értelmezzük.) Az általános iskolában az alapműveletek mellett részletesen gyakoroltuk a törtek **egyszerűsítését** és **bővítését** is. Emlékeztetőül: a tört értéke nem változik meg, ha a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a nemzérus számmal szorozzuk (vagy osztjuk). Ezért a

$$\frac{4}{20},\quad \frac{6}{30},\quad \frac{-8}{-40},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{0,5}{2,5},\quad \frac{4000}{20\,000},\quad \frac{-10\,000}{-50\,000}$$

törtek egyenlőek: mindegyik értéke 0,2.

Definíció

Azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, **racionális számoknak** nevezzük. A definíciót algebrai úton is megadhatjuk: a racionális számok felírhatók $\frac{a}{b}$ alakban, ahol a és b egész szám ($b \neq 0$).

1. példa

Igaz-e, hogy az alábbi számok mind racionálisak?

$$a = \frac{12}{30};\quad b = \frac{-18}{-45};\quad c = -\frac{7}{5};\quad d = 6;\quad e = 0;\quad f = 3,6;\quad g = \frac{1,23}{5,4}.$$

Megoldás

A példában az $a = \frac{12}{30}$ és a $b = \frac{-18}{-45}$ szám biztosan racionális, hiszen – a definíciónak megfelelően – két egész szám hányadosaként írhatók fel. Továbbá a számok egyenlőek is, hiszen ha az első törtet 6-tal, a másodikat pedig –9-cel egyszerűsítjük, alakjuk egyaránt $\frac{2}{5}$ lesz.

A $c = -\frac{7}{5}$ tört negatív szám, írhatjuk $\frac{-7}{5}$ vagy $\frac{7}{-5}$ alakba is, értéke nem változik; így c is racionális.

A $d = 6$, egész: a $6 = \frac{6}{1} = \frac{-12}{-2}$ stb. átalakításhoz hasonlót bármely egész számmal elvégezhetünk, így igaz, hogy *minden egész szám egyúttal racionális szám is*.

Az e = 0 szintén racionális szám: $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{-3}$ stb.

Az $f = 3,6$ tizedes törtet könnyen felírhatjuk **közönséges törtként,** például $3,6 = \frac{36}{10}$; vagyis f is racionális szám.

A $g = \frac{1,23}{5,4}$ tört látszólag nem racionális szám, hiszen sem a számlálója, sem a nevezője nem egész szám. Azonban például 100-zal bővítve $g = \frac{1,23}{5,4} = \frac{123}{540}$ adódik, s ezért g is racionális.

A fenti példában szereplő összes szám racionális volt. Felmerül a kérdés: van-e egyáltalán olyan szám, ami nem racionális? Van-e olyan szám, ami nem írható fel két egész szám hányadosaként? A kérdésre a lecke végén kapjuk meg a választ. (Előzetesen annyit megjegyzünk, hogy a kérdés már az ókori görög matematikusokat is sokat foglalkoztatta, s mintegy 2500 évvel ezelőtt sikerült megválaszolniuk.)

2. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $-\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{2}:\frac{3}{5}\right)$; *b)* $-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{5}\right)$; *c)* $-\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{2}\right):\frac{3}{5}$.

Megoldás

Törtek összeadása és kivonása a közös nevezőre hozás segítségével történhet; szorzás esetén a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel szorozzuk; végül törttel úgy osztunk, hogy az osztó **reciprokával** szorzunk.

$\frac{3}{2}:\frac{3}{5}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

a) $-\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{2}:\frac{3}{5}\right)=-\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{2}\right)=-\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{15}{6}\right)=-\frac{2}{3}-\left(-\frac{10}{6}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{10}{6}=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{3}{3}=1$;

b) $-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{5}\right)=-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\frac{5}{2}=-\frac{4}{6}-\frac{5}{6}-\frac{15}{6}=-\frac{24}{6}=-4$;

c) $-\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{2}\right):\frac{3}{5}=-\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{9}{6}\right):\frac{3}{5}=-\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{6}\right):\frac{3}{5}=-\frac{2}{3}+\frac{4}{6}:\frac{3}{5}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}=$

$=-\frac{2}{3}+\frac{10}{9}=-\frac{6}{9}+\frac{10}{9}=\frac{4}{9}$.

Látható, hogy a *b)* kifejezésben a zárójel használata felesleges: első lépésként az osztást kell elvégeznünk, mert **magasabb rendű művelet**, mint a kivonás. Azt is észrevehetjük, hogy ha először a zárójelet bontjuk fel, akkor az *a)* és *b)* kifejezések csak egyetlen tag előjelében különböznek:

a) $-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}:\frac{3}{5}$; *b)* $-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\frac{3}{2}:\frac{3}{5}$.

TIZEDES TÖRTEK

Speciális törtszámok a **tizedes törtek**.

A mindennapi életben általában véges tizedes törtekkel számolunk, például:

– 52,6 m^3 a havi gázfogyasztás,
– 1283,34 kWh a villanyóra állása,
– a személygépkocsi átlagos benzinfogyasztása 100 km-enként 7,6 liter.

Ekkor a tizedes tört olyan közönséges törtként értelmezhető, amelynek a nevezője 10 valamely hatványa:

$52,6=\frac{526}{10}$; $-3,84=-\frac{384}{100}$; $0,001=\frac{1}{1000}$; $-2,1013=-\frac{21\,013}{10\,000}$.

De találkozunk végtelen tizedes törtekkel is:

– az osztály egyik csoportja matematikából $\frac{59}{18}=3,2777\ldots=3,2\dot{7}$ átlagú dolgozatot írt;
– vagy például ha egy csokifajtából 30 dkg 400 Ft-ba kerül, akkor kiszámítható, hogy 1 kg ára $\frac{100}{30}\cdot 400=1333,3\ldots=1333,\dot{3}$ (Ft).

Érdemes megvizsgálnunk a racionális számok és a tizedes törtek kapcsolatát. (A fenti példák alapján úgy tűnik, hogy bármely racionális szám felírható tizedes tört alakban.)

3. példa

Adjuk meg az alábbi racionális számok tizedes tört alakját!

a) $\frac{11}{40}$; *b)* $\frac{1}{3}$; *c)* $\frac{8}{7}$; *d)* $\frac{7}{18}$.

Megoldás

Az írásbeli osztás művelete alapján:

a)		1	1	:	4	0	=	0,	2	7	5
		1	1	0							
			3	0	0						
				2	0	0					

b)		1	:	3	=	0,	3	3	3	…
		1	0							
			1	0						
				1	0					

c)		8	:	7	=	1,	1	4	2	8	5	7	1	4	…
		1	0												
			3	0											
				2	0										
					6	0									
						4	0								
							5	0							
								1	0						
									3	0					
										2					

d)		7	:	1	8	=	0,	3	8	8	…
		7	0								
		1	6	0							
			1	6	0						
				1	6						

Értelmezzük a kapott eredményeket! Két egész szám hányadosa az *a)* esetben véges tizedes tört, a *b)* – *d)* esetekben pedig végtelen, szakaszos tizedes tört lett:

$$\frac{11}{40} = 0,275; \qquad \underbrace{\frac{1}{3} = 0,\dot{3}; \qquad \frac{8}{7} = 1,\overline{142857}; \qquad \frac{7}{18} = 0,3\dot{8}.}_{\textbf{végtelen szakaszos tizedes tört}}$$

véges tizedes tört **végtelen szakaszos tizedes tört**

Az ismétlődésnek a *b)* tört esetén az az oka, hogy az osztási maradék mindig 1; a *c)* esetben az 1, 3, 2, 6, 4, 5 maradékok ismétlődnek; végül a *d)* pontban a maradékok 7, 16, 16, …

Tetszőleges $\frac{a}{b}$ alakú tört esetén is (*a* és *b* pozitív egész számok) hasonló megállapításokat tehetünk. Egyik eshetőség, hogy a *b*-vel való osztás során valamikor fellép a 0 maradék; ekkor az $\frac{a}{b}$ közönséges tört átírásakor véges tizedes törtet kapunk. A másik lehetőség, hogy az osztási maradékok rendre az 1, 2, 3, …, (*b* – 1) számok közül kerülnek ki. Ekkor a tizedes tört alak nem véges, a tizedesvessző leírása után legkésőbb a *b*. lépésben az osztási maradék ismétlődni fog, és innentől kezdve a hányados számjegyei periodikusan ismétlődnek.

Tétel

A gondolatmenetünkből következik, hogy bármely racionális szám felírható
– vagy véges,
– vagy végtelen, de szakaszos tizedes tört alakban.

IRRACIONÁLIS SZÁMOK, VALÓS SZÁMOK

Vizsgáljuk meg az $x = 1{,}2122122212222\ldots$ végtelen tizedes tört alakban megadott számot! (x jegyeit úgy képezzük, hogy az 1-esek után mindig eggyel több 2-es számjegy áll.) Könnyen látható, hogy az így megadott szám nem lehet szakaszos tizedes tört: akármilyen hosszú ismétlődő periódust tételezünk fel, előbb-utóbb több szomszédos 2-es található a számjegyek között, tehát „elromlik" a periodicitás. Vagyis ez a szám *nem lehet racionális*. (Ha racionális lenne, akkor végtelen szakaszos tizedes tört alakja lenne.)

Fogalmak
természetes szám;
pozitív, negatív egész szám;
racionális szám;
irracionális szám;
valós szám;
törtszám;
reciprok;
egyszerűsítés, bővítés;
közönséges tört;
tizedes tört;
műveleti sorrend;
ellentett.

Definíció

Azokat a számokat, amelyek nem racionálisak, **irracionális** számoknak nevezzük.
Az irracionális számok tehát olyan számok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.

A fenti x tizedes törthöz hasonló módon tetszőleges számú irracionális számot megadhatunk. További irracionális számok például $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ (sőt általában minden $\sqrt{k}$ alakú szám, ahol a k pozitív egész szám nem négyzetszám); vagy nevezetes irracionális szám a π is, amivel több mint 300 éve a kör kerületének és átmérőjének a hányadosát jelöljük[1].

Definíció

A racionális és az irracionális számok együtt a **valós számok**.

A középiskolai tanulmányaink alatt ebben a számkörben dolgozunk; tehát a „szám" fogalma – ha az ettől való eltérést külön nem jelezzük – mindig valós számot jelent.

FELADATOK

1. K1 Az alábbi kifejezések értékét próbáljuk „fejben" (azaz íróeszköz és számológép nélkül) meghatározni!

a) $A = 32 + 87 - 26 + 68 - 97 + 36$;

b) $B = 439 + 243 - 437 - 1057 - 244 + 2999$;

c) $C = \frac{1}{6} + \frac{5}{9} - \frac{5}{12} + \frac{2}{12} - \frac{19}{12} + \frac{4}{9} + \frac{2}{3}$;

d) $D = \frac{2}{9} + \frac{6}{11} - \frac{5}{9} + \frac{6}{16} - \frac{3}{22} - \frac{3}{8} + \frac{1}{3}$;

e) $E = 67 \cdot 518 + 518 \cdot 33$;

f) $F = 67 \cdot 318 - 19 \cdot 318 - 28 \cdot 318$.

2. K1 A 2. példa *a)–c)* feladataiban háromféleképpen zárójeleztük a kifejezést, s három különböző eredményt kaptunk. Számítsuk ki az alábbi *d)–g)* kifejezések értékét, s a kapott értékeket hasonlítsuk össze a korábbi *a)–c)* eredményekkel!

d) $-\frac{2}{3} - \frac{5}{6} - \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$; *e)* $\left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) - \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$; *f)* $-\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) - \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$; *g)* $\left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{6} - \frac{3}{2}\right) : \frac{3}{5}$.

[1] A 10. évfolyamon kerül sor annak bizonyítására, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.

3. K1 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $-\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)$; *b)* $\left(\frac{-14}{4}-\frac{-3}{8}\right):\left(\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{25}\right)\right)$; *c)* $-\frac{2}{5}+2\cdot\left(\frac{5}{12}:\frac{10}{3}\right)$.

4. K1 Az alábbi állítások melyik igaz, melyik hamis? (Indokoljunk!)

a) Bármely szám kétszerese kisebb, mint a háromszorosa.
b) Bármely szám fele kisebb, mint maga a szám.
c) Bármely szám négyzete nagyobb, mint maga a szám.
d) Bármely szám reciproka kisebb, mint maga a szám.
e) Nagyobb számnak kisebb a reciproka.
f) Minden számhoz található olyan szám, hogy a két szám összege 0.
g) Minden számhoz található olyan tőle különböző szám, hogy összegük éppen 1.
h) Van olyan egész szám, amelynek a reciproka is egész szám.

5. K1 Rendezzük növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$A=-2{,}8$; $B=-\frac{59}{21}$; $C=\frac{7}{3}$; $D=2{,}33$; $E=-\frac{17}{6}$; $F=\frac{25{,}4}{11}$; $G=\sqrt{5{,}44}$.

6. K2 Figyeljük meg az alábbi sorozatok tagjait! Mit állíthatunk az egymást követő tagok nagyságrendi viszonyairól?

a) $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\ldots$ *b)* $\frac{4}{6};\frac{5}{7};\frac{6}{8};\frac{7}{9};\ldots$ *c)* $\frac{3}{2};\frac{5}{3};\frac{7}{4};\frac{9}{5};\ldots$

7. K1 Adjuk meg az alábbi racionális számokat tizedes tört alakban (számológépet ne használjunk)!

$A=-\frac{7}{4}$; $B=\frac{17}{20}$; $C=\frac{17}{7}$; $D=\frac{17}{9}$; $E=\frac{37}{30}$; $F=\frac{433}{330}$.

Megjegyzés: A számológépes megoldás nem adhat minden esetben pontos értéket, hiszen általában csak 10 számjegyet ír ki a gép.[2]

8. K2 Adjunk meg olyan közönséges törtet, amelynek egész számú többszöröse

a) 3 és 7; *b)* 2 és $\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{2}{3}$ és $\frac{4}{5}$!

9. E1 A racionális számoknak sok érdekes tulajdonsága van. Néhány ezek közül:

a) alakjuk nem egyértelmű;
b) a pozitív racionális számok között nincs legkisebb;
c) bármely két különböző racionális szám között található további racionális szám;
d) bármely két különböző racionális szám között végtelen sok további racionális szám található.

Bizonyítsuk be a fenti állításokat!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **698; 704.** *a)–g);* **713; 726.** *a)–b);* **727.** *a), c);* **732; 743; 750; 751; 752; 753; 756.** *a)–c);* **757; 760; 762; 765.**

[2] Hasonló problémákról részletes anyag található *A számológépek számábrázolása* c. olvasmányban.

3. HALMAZOK, RÉSZHALMAZOK

Általános iskolai tanulmányaink során már megismerkedtünk a halmazokkal: az egyforma tulajdonságú objektumokat egy-egy csoportba soroltuk, s ezeket a csoportokat halmazoknak neveztük. A **halmaz** alapfogalom, általában az azonos tulajdonságú elemek együttesét, összességét jelenti.

A halmazok elemei a legkülönfélébb „dolgok" lehetnek. A matematikában általában számhalmazokkal és ponthalmazokkal dolgozunk, melyek természetesen számokból, illetve pontokból állnak. De találkozhatunk olyan halmazokkal is, melyek elemei geometriai objektumok (például különféle négyszögek), fogalmak, tételek, vagy akár személynevek is lehetnek (például adott időszak magyar minisztereinek a halmaza).

A mindennapi életünkben lépten-nyomon „halmazokba botlunk" – csak legfeljebb ezt a tényt nem tudatosítjuk. Amikor az előző fejezetben példaként említett András felszáll a 6-os villamosra, akkor a városban közlekedő villamosok *halmazából* száll fel az egyikre; az utazás során ő is a villamoson utazó emberek *halmazának* egyik eleme lesz; de beletartozik a saját osztálya tanulóinak a *halmazába* is; és ha felel magyar irodalomból, akkor azon tanulók *halmazába* kerül, akik éppen aznap feleltek.

Látjuk, hogy gyakorlatilag bármilyen objektumokból (élőlényekből, tárgyakból, fogalmakból) készíthetünk halmazt, ha közös tulajdonságuk alapján, vagy valamilyen indokkal azonos csoportba soroljuk őket. Ezzel kapcsolatban egyetlen – szigorú – megkötés van: a halmaz megadásának egyértelműnek kell lennie. Azaz: bármely objektumról egyértelműen el kell tudni dönteni, hogy hozzátartozik a halmazhoz, vagy sem.

(Persze elképzelhető, hogy a halmazba sorolás technikailag nehézséget okoz. Például egy több ezer jegyű számról nehéz lehet eldönteni, hogy a prímszámok halmazába tartozik, vagy sem.)

HALMAZOK MEGADÁSA, JELÖLÉSEK

A halmazokat általában nagybetűkkel jelöljük, és ha felsoroljuk az elemeiket, akkor azokat kapcsos zárójel közé tesszük. A leggyakrabban használt számhalmazok jelölése az egész világon ugyanaz:

a természetes számok halmazát **N**, az egész számok halmazát **Z**,
a racionális számok halmazát **Q** és a valós számok halmazát **R** betűvel jelöljük.
(Ezek általában a megfelelő nemzetközi elnevezések kezdőbetűi.)

A halmazokat megadhatjuk az elemek **közös tulajdonság**ával.

Például: A = {pozitív páros számok}; vagy B = {az Európai Unió tagállamai}; vagy C = {Ady Endre versei}.

Egy másik megadási lehetőség a halmaz elemeinek a **felsorolása**.

Például: $D = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$; vagy $E = \left\{1{,}2; -3{,}6; \frac{5}{7}; 5\pi\right\}$; vagy F = {Szent István, Péter, Aba Sámuel}.

A végtelen elemszámú halmazokat is megadhatjuk „felsorolással": $G = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$;
$H = \{\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$ vagy $H = \{0;\ 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ \ldots\}$; $I = \{10;\ 12;\ 14;\ 16;\ \ldots\}$. Ekkor vigyáznunk kell arra, hogy a három pont (…) által jelzett folytatás egyértelmű legyen.

Megállapodás szerint a halmazok minden elemét csak egyszer soroljuk fel. Tekintsük az 1; 1; 1; 2; 2; 3 számokat (gondoljunk például mérési eredményekre). Ha a felsorolásban szereplő mérések számértékét soroljuk halmazba, akkor ez helyesen {1; 2; 3}. De ha a konkrét értékekre van szükségünk – például a mért számok átlagának a kiszámításakor –, akkor nem halmazról, hanem ún. *adatsokaságról*, vagy a hat szám *sorozatáról* beszélünk.

Gyakori megadási mód valamilyen **szabály, formula, képlet** alkalmazása. Ha a halmazt elemeire vonatkozó feltétellel vagy tulajdonsággal adjuk meg, akkor

– a függőleges vonal elé írjuk a változót, amivel a halmaz elemét jelöljük;
– a függőleges vonal után pedig megadjuk azt a feltételt vagy tulajdonságot, amely a halmaz elemeire vonatkozik.

Az $\{x \mid t(x)\}$ halmaz tehát olyan x elemekből áll, amelyekre teljesül a $t(x)$ tulajdonság.

Például

$J = \{x \mid 7 < x < 15\}$ olyan x számokból álló halmaz, melynek elemei 7-nél nagyobbak és 15-nél kisebbek.

$K = \{n \mid n = k^2,\ k = 0, 1, 2, 3\}$ az egyjegyű négyzetszámok halmaza. (Vagy kissé rövidebben: $K = \{k^2 \mid k = 0, 1, 2, 3\}$).

$L = \{x \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$ olyan x számokból álló halmaz, amelyekre teljesül az $(x - 1)(x + 2) = 0$ feltétel. Az egyenlet megoldásai 1 és –2, így $L = \{1; -2\}$.

$M = \{k \mid k = 2n,\ n$ egész szám$\}$ azon k számok M halmazát jelenti, amelyek felírhatók $2n$ alakban, ahol n egész szám. Ezt röviden úgy mondanánk, hogy M a páros számok halmaza, ami egyúttal a halmaz tulajdonsággal, körülírással történő megadása.

A halmazok megadásakor előfordulhat, hogy a függőleges vonal előtt azt is megadjuk, hogy milyen alaphalmazra vonatkozik a feltétel. Az $\{x \in H \mid t(x)\}$ tehát olyan halmaz, melynek elemei hozzátartoznak a H halmazhoz, és rendelkeznek a $t(x)$ tulajdonsággal.

Például

$O = \{x \in \mathbf{R} \mid 7 < x < 15\}$ olyan valós számokból álló halmaz, melynek elemei 7-nél nagyobbak és 15-nél kisebbek. (Tehát $O = J$.)

De a $P = \{x \in \mathbf{Q} \mid 7 < x < 15\}$ halmaz elemei racionális számok, így $P \neq J$.

$S = \{x \in \mathbf{N} \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$ olyan természetes számokból álló halmaz, melyek gyökei (megoldásai) az $(x - 1)(x + 2) = 0$ egyenletnek. Az 1 és –2 gyökök közül csak az 1 természetes szám, így $S = \{1\}$.

A szakirodalomban a függőleges vonal helyett a kettőspontot is alkalmazzák jelölésként.

Definíció

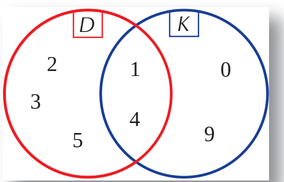
Speciális halmaz az **üres halmaz**, amelynek egyetlen eleme sincs. Jelölése ∅ vagy { }.

Figyeljünk arra, hogy többféle halmazmegadás is vezethet az üres halmazhoz, például a {negatív négyzetszámok halmaza} = ∅, hiszen negatív négyzetszám nem létezik.

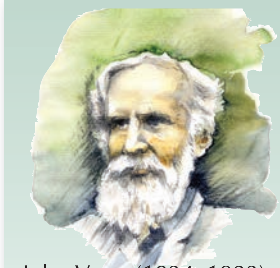
Mikor, melyik megadási módot célszerű használni? Általában azt mondhatjuk, a konkrét példától függ, hogy melyik módszer a leginkább áttekinthető, esetleg az ízlésünknek megfelelő, vagy egyáltalán melyik használható. Például az A = {pozitív páros számok} halmazt megadhatjuk felsorolással is: $A = \{2; 4; 6; \ldots\}$, s ez a megoldás sem bonyolultabb, mint a körülírás. Ugyanakkor a képlettel történő megadás: $A = \{x \mid x = 2k, k = 1, 2, 3, \ldots\}$ már elvontabb megoldásnak tűnik.

Az F = {első három magyar király} megadás esetleg precízebb, mint az F = {Szent István, Péter, Aba Sámuel} megadás, s a G elemeinek a felsorolása helyett $G = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ a természetes számokra alkalmazott **N** jelölés az egységesen elfogadott.

Nem mindig van választási lehetőségünk. A C = {Ady Endre versei} halmaz megadása felsorolással nem gyakorlatias, a legtöbb esetben haszontalannak tűnik; arra pedig, hogy C elemeit valamilyen képlettel adjuk meg, esélyünk sincs.



A halmazok *szemléltetése, szemléletes megadása* történhet táblázattal, grafikonnal, különböző diagramokkal. Az általános iskolában általában a Venn-diagramot alkalmaztuk. Az ábrán a D és K halmazok Venn-diagramja látható.



John Venn (1834–1923) angol matematikus. Elsőként ő ábrázolta körökkel a logikai állítások kapcsolatait. A Symbolic Logic (Szimbolikus logika) című 1881-es munkájában vezette be a később róla elnevezett Venn-diagram fogalmát.

TARTALMAZÁS, ELEM, RÉSZHALMAZ

Említettük, hogy bármely objektumról el kell tudnunk dönteni, hogy az adott halmazhoz hozzátartozik, vagy sem. Ezek jelölésére az $\in$, illetve $\notin$ szimbólumokat használjuk. Például $10 \in J$, $10 \notin K$ ('10 eleme J-nek, 10 nem eleme K-nak'); vagy Magyarország $\in B$.

Előfordulhat, hogy egy halmaz minden eleme beletartozik egy másik halmazba. Ilyen kapcsolat áll fenn a példákban szereplő A és H, vagy a D és H, vagy a K és **N** halmazok között. A halmazok közötti tartalmazásra külön fogalmat és jelölést vezetünk be.

Definíció

Az A halmaz **részhalmaza** (vagy **része**) a H halmaznak, ha A minden eleme egyúttal a H halmaznak is eleme. Ezt a kapcsolatot az $A \subseteq H$ szimbólummal jelöljük.

A korábbi példában a jelölés tehát: $D \subseteq H$, $K \subseteq$ **N**.

Például

$\{2; 4; 6\} \subseteq A$, {Magyarország, Ausztria} $\subseteq B$.

Helytelen lenne a Magyarország $\subseteq B$ jelölés, mert példánkban Magyarország nem halmaz. Helyesen: {Magyarország} $\subseteq B$, azaz a Magyarországot tartalmazó halmaz részhalmaza B-nek.

A részhalmaz definíciójából több állítás is levezethető:
– minden halmaz része önmagának;
– az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza;
– ha $H_1 \subseteq H_2$ és $H_2 \subseteq H_3$, akkor $H_1 \subseteq H_3$ is teljesül.

(Az állítások bizonyítását a lecke végén emelt szintű feladatként tűzzük ki.)

1. példa

Az alábbi táblázatban egy település önkormányzati testületének a szavazatait soroltuk fel. A tíz képviselő (jelölésük: A, B, C, …, J) három kérdésre szavazott, az „igen, nem, tartózkodom” szavazatokat a táblázatban i, n, t betűkkel jelöltük.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1. kérdés	i	i	n	i	t	i	n	t	i	i
2. kérdés	i	n	i	i	n	t	t	i	n	i
3. kérdés	i	n	n	t	n	t	n	n	i	n

a) Legyen H_1 azon képviselők halmaza, akik az 1. kérdésre „igen”-nel szavaztak. Adjuk meg a H_1 halmazt felsorolással!
b) Legyen H_2 azon képviselők halmaza, akik az első két kérdésre „igen”-nel szavaztak. Adjuk meg a H_2 halmazt felsorolással!
c) Legyen H_3 azon képviselők halmaza, akik az első két kérdés egyikére sem szavaztak „nem”-mel. Soroljuk fel a H_3 halmaz elemeit!
d) Milyen kapcsolat áll fenn a H_1, H_2 és H_3 halmazok között?
e) Mi volt a szavazások eredménye? (Az előterjesztés elfogadásához – a tartózkodásokat nem számítva – egyszerű többségre van szükség.)
f) Van olyan képviselő, aki mindhárom kérdésre a többséggel egyetértésben szavazott?

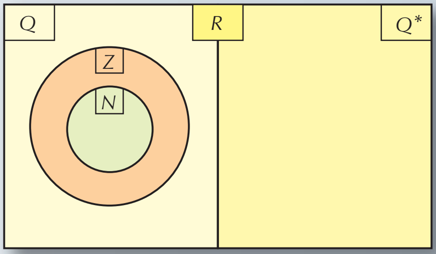
Megoldás

a) $H_1 = \{A, B, D, F, I, J\}$.
b) $H_2 = \{A, D, J\}$.
c) A H_3 halmazba azok a képviselők tartoznak, akik az első két kérdésre az „igen” vagy „tartózkodom” válaszokat adták: $H_3 = \{A, D, F, H, J\}$.
d) $H_2 \subseteq H_1$, hiszen minden olyan képviselő, aki az első két kérdésre „igen”-nel szavazott, szükségképpen „igen”-nel szavazott az első kérdésre is.
H_3 nem része sem H_1-nek, sem H_2-nek, mert van olyan képviselő, aki a második kérdésnél igennel szavazott, de az első kérdésnél tartózkodott (H). Igaz viszont, hogy $H_2 \subset H_3$: ha valaki az első két kérdésre „igen”-nel szavazott, akkor nem szavazott „nem”-mel.
e) A testület az első két előterjesztést elfogadta, a harmadikat nem.
f) Van ilyen, a J képviselő.

A halmazokkal kapcsolatos problémák közül a mindennapi életünkben leggyakrabban előforduló esetekre láttunk példákat, ezek: az osztályba sorolás (kategorizálás, tipizálás), illetve a szűrés (valamilyen feltételrendszer szerint). A halmazműveletekkel a következő leckében részletesen foglalkozunk.

2. példa

Ábrázoljuk Venn-diagramon **N, Z, Q, R** és az irracionális számok **Q*** halmazát!



Megoldás

A halmazok kapcsolatát a mellékelt Venn-diagram szemlélteti.

Az ábráról leolvasható az $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ és $\mathbf{Q}^* \subseteq \mathbf{R}$ tartalmazás (minden természetes szám egyúttal egész szám is stb.). A valós számok a racionális és irracionális számokból állnak, s minden szám csak egyfajta lehet: vagy racionális, vagy irracionális.

3. példa

Tekintsük az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ és $C = \{4; 5; 6; 7; A\}$ halmazokat. (A C halmaz egyik eleme az A halmaz.) Melyik igaz az alábbi állítások közül?

a) $1 \in A$; *b)* $1 \notin B$; *c)* $1 \in C$; *d)* $\{1\} \in A$; *e)* $1; 2; 3 \subseteq A$;
f) $\{1\} \subseteq A$; *g)* $\{1; 2; 3\} \subseteq A$; *h)* $A \in C$; *i)* $A \subseteq C$; *j)* $\{A\} \in C$;
k) $\{A\} \subseteq C$.

Megoldás

Definíció szerint az *a)* és *b)* állítások igazak, a *c)* hamis.

A *d)* állítás hamis, mert az 1-et tartalmazó $\{1\}$ halmaz nincs felsorolva A elemei között.

Az *e)* állítás értelmetlen, hiszen csak halmaz lehet egy másik halmaz részhalmaza. A helyes forma a *g)* állításban látható, s ez igaz is.

Hasonlóan igaz definíció szerint *f)*: az $\{1\}$ halmaz minden eleme (azaz az 1-es) egyúttal eleme A-nak is.

A *h)* állítás igaz, mert az A halmazt felsoroltuk C elemei között.

Az *i)* hamis. Van olyan eleme az A halmaznak, ami nincs benne C-ben: például az 1.

A *j)* állítás hamis. Az A halmazt tartalmazó halmaz nem eleme C-nek (csak $A \in C$ igaz, a *h)* állításnak megfelelően).

A *k)* igaz. Az A halmazt tartalmazó halmaz minden eleme (azaz A) egyúttal eleme C-nek is.

Definíció

Két halmaz, ***A* és *B* egyenlő**, ha elemeik ugyanazok.

4. példa

Fogalmazzuk meg ezt a definíciót az
a) „eleme”, illetve
b) „részhalmaza”
szimbólumok segítségével!

Megoldás

a) $A = B$, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül; és fordítva, ha minden $x \in B$ esetén $x \in A$ is igaz.

b) $A = B$, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

Az *a)* megoldásban a „minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül" feltétel azt jelenti, hogy az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme. Észrevehetjük, hogy ekkor éppen az $A \subseteq B$ kapcsolatot fogalmaztuk meg.

Kissé zavaró, hogy $A \subseteq B$ esetén $A = B$ is megengedett. A köznyelvben „B része" alatt általában B egy összetevőjét, kisebb egységét értjük. S valóban, a köznyelv számára például az $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$ tartalmazás nem tűnik „igazi" résznek.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az A halmaz **valódi részhalmaza** (vagy **valódi része**) a B halmaznak, ha A része B-nek, de a két halmaz nem egyenlő. Jelölés: $A \subset B$. (A két halmaz kapcsolatát formulákkal is megadhatjuk: $A \subseteq B$, de $A \neq B$.)

Általában az $A \subseteq B$ jelölést használjuk, mert ez a valódi tartalmazást is magában foglalja. Az $A \subset B$ jelölést csak akkor – és csak ritkán – alkalmazzuk, amikor hangsúlyozni kívánjuk, hogy $A \neq B$.

5. példa

Soroljuk fel az alábbi halmazok összes részhalmazát! Ezek közül melyek valódi részhalmazok?

a) $H_0 = \{\ \}$; *b)* $H_1 = \{a\}$; *c)* $H_2 = \{a, b\}$; *d)* $H_3 = \{a, b, c\}$.

Megoldás

Fogalmak, név
halmaz;
üres halmaz;
részhalmaz;
halmazok egyenlősége;
valódi részhalmaz;
Venn-diagram;
Venn.

a) Az üres halmaznak egyetlen részhalmaza van, az üres halmaz: $\emptyset$ valódi részhalmaza nincs.
b) H_1-nek két részhalmaza van: $\emptyset$, $\{a\}$. Valódi részhalmaz: $\emptyset$.
c) Négy részhalmazt találunk: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$. Valódi részhalmazok: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$.
d) H_3-nak nyolc részhalmaza van: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. Nem valódi részhalmaz: $\{a, b, c\}$.

A részhalmazok száma az egyes feladatokban 1, 2, 4, 8. Ez alapján vajon milyen sejtést fogalmazhatunk meg?[3]

FELADATOK

1. K1 Az alábbi meghatározások egy adott osztály tanulóira vonatkoznak. A definíciók közül melyek határoznak meg egyértelműen egy halmazt?

a) az osztályba járó fiúk;
b) a magas tanulók;
c) a barna hajú lányok;
d) a budapesti lakosok;
e) akiknek tavaly év végén 5-ös matematikaosztályzatuk volt;
f) akik szeretnek iskolába járni.

2. K1 Az alábbi A, B és C halmazokat megadhatjuk felsorolással, közös tulajdonsággal és képlettel is. Pótoljuk a hiányzó megadásokat, és ábrázoljuk a halmazokat a Venn-diagramon!

halmaz	felsorolás	közös tulajdonság	képlet
A	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$		
B		egyjegyű, pozitív prímszámok	
C			$C = \{x \mid 4 \leq x \leq 9 \text{ és } x \in \mathbf{N}\}$

[3] A sejtés megfogalmazása és bizonyítása megtalálható a *10. Halmazokról és számokról* c. leckében.

3. K2 Az alábbi táblázatban egy osztály tanulóit két-két csoportra osztottuk a nemük szerint, valamint attól függően, hogy év végi matematikaeredményük „jó” (4-es vagy 5-ös), illetve „gyenge” (2-es vagy 3-as) volt. A táblázat mezőibe írt számok a megfelelő tulajdonságú tanulók számát jelentik.

	jók (4-es, 5-ös érdemjegy)	gyengék (2-es, 3-as érdemjegy)
F (fiúk)	8	7
L (lányok)	10	7

Értelmezzük a táblázat adatait!
a) Mennyi az osztálylétszám?
b) Az összes tanuló hány százaléka „jó” matematikából?
c) Az összes fiú hanyadrésze „gyenge” matematikából?
d) Ábrázoljuk az adatokat az F (fiúk) és J („jók”) halmazok Venn-diagramján! (Az alaphalmaz az osztály tanulóinak a halmaza, az egyes tartományokba a megfelelő elemszámot írjuk.)

4. K1 Legyen A = {egyjegyű páros természetes számok}, B = {egyjegyű négyzetszámok}. Adjuk meg az A halmaz egy lehetséges X és a B halmaz egy lehetséges Y részhalmazát úgy, hogy
a) $Y \subset X$; *b)* $Y \subseteq X$; *c)* $X \subset A$ és $Y \subset X$; *d)* $X \subset A$ és $Y \subseteq X$; *e)* $Y = X$!

5. K1 Fogalmazzuk meg, mit jelent, hogy
a) az A halmaz *nem* üres halmaz;
b) az A halmaz *nem* részhalmaza B-nek (jelölés: $A \not\subset B$);
c) az A halmaz *nem* egyenlő B-vel!

A matematikai irodalomban gyakran találkozhatunk az $\mathbf{N}^+$, $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$, $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$ jelölésekkel. Jelentésük sorban: *pozitív természetes számok, pozitív egész számok, negatív egész számok, pozitív racionális számok, negatív racionális számok, pozitív valós számok, negatív valós számok* halmaza. A $\mathbf{Q}_0^+$ jelölés a pozitív racionális számokat és a 0-t tartalmazó halmazt jelenti, s hasonlóan jelölhetjük a $\mathbf{Z}_0^+$, $\mathbf{R}_0^+$ stb. halmazokat is.

6. K1 Fogalmazzunk meg a fenti számhalmazok között néhány tartalmazáskapcsolatot (melyik halmaz melyiknek részhalmaza, valódi részhalmaza, vagy nem része)!
Például igaz-e, hogy:
a) $\mathbf{N}^+ \subseteq \mathbf{Z}^+$; *b)* $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{Z}^+$; *c)* $\mathbf{Q}_0^+ \subseteq \mathbf{R}^+$; *d)* $\mathbf{R}^- \not\subset \mathbf{Q}$ stb.?

7. K2 Tekintsük az A = {3-mal osztható egész számok}, $B = \{x \mid x = 10k - 3,\ k \in \mathbf{Z}^+\}$, C = {négyzetszámok} halmazokat. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?
a) Az A halmaznak négy olyan eleme van, amelyik egyjegyű szám.
b) Van olyan egyjegyű szám, amelyik mindhárom halmaznak eleme.
c) Van olyan kétjegyű szám, amelyik két halmaznak is eleme.
d) Van olyan kétjegyű szám, amelyik mindhárom halmaznak eleme.
e) Van olyan 2-esre végződő szám, amelyik két halmaznak is eleme.
f) Van olyan 4-esre végződő szám, amelyik két halmaznak is eleme.
g) $0 \in A$. *h)* $0 \notin C$. *i)* $\{0; 576; 1296\} \subseteq C$. *j)* $\{0; 576; 1296\} \subset A$.
k) $\{0; 576; 1296\} \not\subset B$. *l)* $0 \subseteq A$. *m)* $\{0\} \subseteq A$. *n)* $\varnothing \subset B$.
o) $\{\ \} \subseteq C$. *p)* $A \subseteq A$. *q)* $B \subset B$.

8. K2 Az alábbi állításokban A és B tetszőleges halmazok. Melyik igaz az állítások közül?
(1) Ha $1 \in A$, akkor $\{1\} \subseteq A$.
(2) Ha $A \subset B$, akkor $A \subseteq B$.
(3) Ha $1 \in A$, akkor $1 \not\subset A$.

9. K2 Ugyanazt jelenti-e az alábbi két állítás?
a) Az A halmaz minden x eleméhez van a B halmaznak olyan b eleme, hogy $x < b$.
b) A B halmaznak van olyan b eleme, hogy az A halmaz minden x elemére $x < b$.
(Melyik állításból következik a másik?)

10. E1 Igazoljuk a következő állításokat!
a) Minden halmaz része önmagának.
b) Ha $H_1 \subseteq H_2$ és $H_2 \subseteq H_3$, akkor $H_1 \subseteq H_3$ is teljesül.
c) Ha $H_1 \subseteq H_2$ és $H_2 \subset H_3$, akkor $H_1 \subset H_3$ is teljesül.
d) Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.
e) Egyetlen üres halmaz van.

11. K2 $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
a) Hány részhalmaza van A-nak?
b) Hány valódi részhalmaza van A-nak?
c) Hány 2 elemű részhalmaza van B-nek?
d) Hány 4 elemű részhalmaza van B-nek?
e) Hány olyan halmaz van, amelyik A-nak és B-nek is részhalmaza?

12. E1 Az a és b különböző számok elemei az A véges elemszámú számhalmaznak. Tudjuk, hogy A-nak eleme bármely két (különböző) elemének
a) összege is;
b) szorzata is.
Mennyi lehet A elemszáma az *a)* és a *b)* esetben?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.:
145; 148; 150; 151. *a)–j);* **152; 153; 155; 161; 164.**

4. MŰVELETEK HALMAZOKKAL

1. példa

A táblázatban egy adott osztályból azon tanulókat soroltuk fel, akik az iskola komplex természettudományos versenyén a három tantárgy (biológia, fizika, kémia) valamelyikéből elindultak. Az első oszlopban a diákokat nevük kezdőbetűivel jelöltük, a másik három oszlopban pedig a tantárgyi versenyen elért pontszámuk látható. (Mindegyik tantárgyból legfeljebb 30 pontot lehetett elérni.)

név	biológia	fizika	kémia
A. K.		22	26
C. R.	30	24	
D. Cs.	23	12	14
G. B.	29		18
H. H.			25
K. M.	25	25	
M. Gy.	25	11	12
N. G.		19	18
O. G.	21		
P. Zs.	29	29	25
R. A.	18	20	
S. E.	16	16	12
Sz. K.	30	22	
T. E.	17	22	23
V. B.	27	21	16
Z. M.		28	27

Biológiából azok a tanulók jutottak tovább a második fordulóba, akik legalább 21 pontot elértek. Ilyen tanuló kilenc van (elegendő a vezetéknevük kezdőbetűit használni): C, D, G, K, M, O, P, Sz, V.

Ugyanez a továbbjutási ponthatár fizikából 20 pont volt. Ebből a tantárgyból a második fordulóba jutott versenyzők névsora: A, C, K, P, R, Sz, T, V, Z.

Ha a tanulók eredményességét vizsgáljuk, különböző kérdéseket tehetünk fel. Például:

Hány olyan tanuló van, aki
– mindkét tantárgyból bejutott a második fordulóba;
– biológia tantárgyból továbbjutott, fizikából nem;
– egyik tantárgyból sem jutott tovább?

És persze a kapott válaszokat összevethetjük a kémiaverseny eredményeivel. Például:

A második fordulóba kémiából a legalább 18 pontot elért versenyzők jutottak. Hány tanuló van, aki mindhárom tantárgyból továbbjutott? Hány olyan, aki kettőből jutott tovább? És így tovább.

A mindennapi életben hasonló feladatokkal gyakran találkozunk. A köznyelvben ezeket a „műveleteket” kategorizálásnak (csoportosításnak) és szűrésnek (kiválogatásnak) nevezzük.

A problémát matematikailag is modellezhetjük. Az adatok egyszerű és egységes kezelése érdekében a tanulókat egy-egy halmazba soroljuk; például a biológiából továbbjutott diákok halmazát jelölje B, a fizikából továbbjutottak halmazát F. Ekkor $B = \{C, D, G, K, M, O, P, Sz, V\}$, $F = \{A, C, K, P, R, Sz, T, V, Z\}$.

Ekkor a matematika nyelvén megfogalmazott kérdések a következők:

Hány olyan tanuló van, aki
– a B és F halmaznak is „eleme”;
– a B halmaznak eleme, de az F halmaznak nem;
– sem a B, sem az F halmaznak nem eleme (pedig elindult a versenyen)?

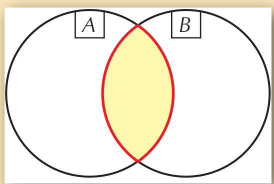
Hasonló kérdéseket három halmaz esetén is feltehetünk, például: hány olyan tanuló van, aki a B, F, K halmazok mindegyikének eleme? (Természetesen K a kémia tantárgyból továbbjutott versenyzők halmazát jelenti: $K = \{A, G, H, N, P, T, Z\}$.)

A válaszok minden esetben a tanulók egy-egy csoportját, azaz egy-egy *halmazát* adják meg. Ez alapján úgy tűnik tehát, hogy érdemes a halmazok között ható műveleteket definiálnunk. Ezek eredménye ismét halmaz lesz, s a fenti példákhoz hasonló gyakorlati eljárásokat (szűrések, kiválogatások) írják le a matematika nyelvén.

METSZET, UNIÓ (EGYESÍTÉS), KÜLÖNBSÉG

A leggyakrabban használt halmazműveletekkel már az általános iskolában megismerkedtünk.

Definíció



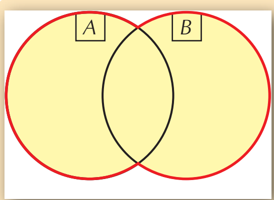
$A \cap B$

Két halmaz **metszete** *(közös része)* azon elemek halmaza, amelyek mindkét halmaznak elemei. A művelet jele: ∩. Az *A* és *B* halmazok metszetét szemléltethetjük Venn-diagrammal, vagy megadhatjuk képlettel is.

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ és $x \in B\}$. (Tehát az $A \cap B$ halmaz azon x elemekből áll, amelyek elemei az *A és* a *B* halmaznak is.)

Az 1. példa $B = \{C, D, G, K, M, O, P, Sz, V\}$ és $F = \{A, C, K, P, R, Sz, T, V, Z\}$ halmazának metszete: $B \cap F = \{C, K, P, Sz, V\}$. A metszet azon tanulókból áll, akik biológiából *és* fizikából is továbbjutottak a versenyen.

Definíció



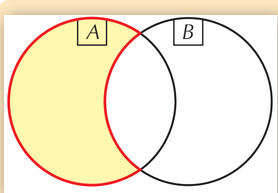
$A \cup B$

Két halmaz **uniója** *(egyesítése)* azon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei. A művelet jele: ∪.

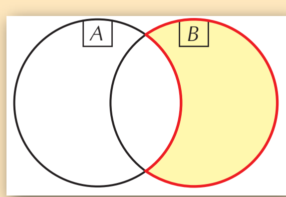
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ vagy $x \in B\}$. (Tehát az $A \cup B$ halmaz azon x elemekből áll, amelyek elemei az *A vagy* a *B* halmaznak.)

A példában a *B* és *F* halmazok uniója: $B \cup F = \{A, C, D, G, K, M, O, P, R, Sz, T, V, Z\}$. Az unió azon tanulókból áll, akik biológiából *vagy* fizikából továbbjutottak.

Definíció



$A \setminus B$



$B \setminus A$

Az *A* és *B* halmazok **különbsége** az *A* halmaz azon elemeinek halmaza, amelyek a *B* halmaznak nem elemei. A művelet jelölése: \.

Képlettel: $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ és $x \notin B\}$. (Az $A \setminus B$ halmaz azon x elemekből áll, amelyek elemei az *A* halmaznak, *de* nem elemei *B*-nek.) Hasonlóan $B \setminus A = \{x \mid x \in B$ és $x \notin A\}$.

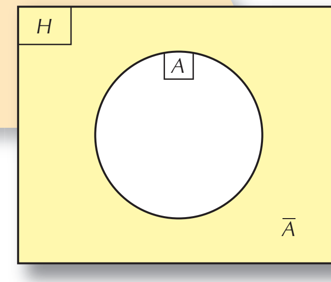
A definícióból következik, hogy az *A* és *B* halmazok sorrendje lényeges: $A \setminus B$ és $B \setminus A$ általában különböző halmazok, hiszen a $B \setminus A$ halmaz elemei benne vannak a *B* halmazban, de az *A* halmazban nem.

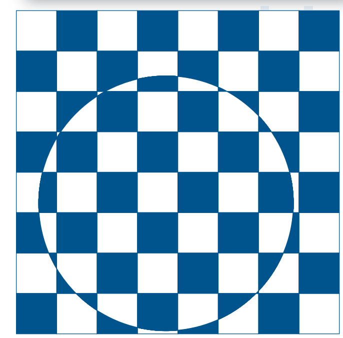
A *B* és *F* halmazok különbsége: $B \setminus F = \{D, G, M, O\}$; az *F* és *B* halmazok különbsége: $F \setminus B = \{A, R, T, Z\}$. Szöveggel megfogalmazva például a *B* és *F* halmazok különbsége azon tanulókból áll, akik biológiából továbbjutottak, *de* fizikából nem.

KOMPLEMENTER HALMAZ

Definíció

Ha $A \subseteq H$, akkor az A halmaz H alaphalmazra vonatkozó **komplementer halmazának** (komplementerének, kiegészítő halmazának) nevezzük a $H \setminus A$ halmazt. Jelölés: $\overline{A}$.





$\overline{A}$ (’A komplementer halmaza’) tehát a H halmaz azon elemeinek halmaza, amelyek az A halmaznak nem elemei: $\overline{A} = \{x \in H \mid x \notin A\}$. Például ha H azon tanulók halmaza, akik elindultak a biológiaversenyen, akkor $H = \{$C, D, G, K, M, O, P, R, S, Sz, T, V$\}$, és $\overline{B} = \{$R, S, T$\}$. Ha viszont a H alaphalmaz a természettudományos verseny valamelyik tantárgyán (biológia, fizika, kémia) elindult tanulókat jelenti, akkor $H = \{$A, C, D, G, H, K, M, N, O, P, R, S, Sz, T, V, Z$\}$, és $\overline{B} = \{$A, H, N, R, S, T, Z$\}$.

A metszet, unió és különbség művelete *két* halmazhoz, A-hoz és B-hez rendelt egy újabb halmazt, $A \cap B$-t, $A \cup B$-t vagy $A \setminus B$-t. A komplementerképzés más jellegű művelet: *egyetlen* halmazhoz, A-hoz rendel egy újabb halmazt, $\overline{A}$-t. Ugyanakkor az is igaz, hogy a művelet eredménye egy másik halmaztól, a H alaphalmaztól is függ.

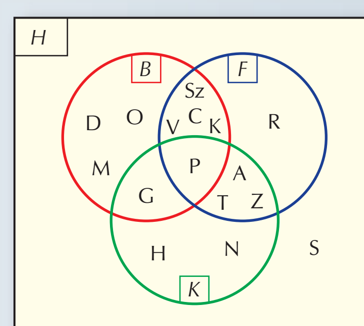
További kétváltozós halmazműveletek is megadhatók, de ezek az eddigi műveleteinkkel kifejezhetők. Például két halmaz ún. *szimmetrikus differenciája* $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ alakú. (Kiolvasva: ’A delta B’.)

2. példa

Ábrázoljuk az 1. példában szereplő B, F, K halmazokat egy Venn-diagramon (a H alaphalmaz legyen azon tanulók halmaza, akik valamelyik tantárgy versenyén elindultak). Határozzuk meg a következő halmazokat:

a) $F \cap K$; *b)* $B \cup K$; *c)* $K \setminus F$;
d) $F \setminus K$; *e)* $\overline{K}$ (a H alaphalmazra vonatkozóan); *f)* $(B \cap F) \cap K$;
g) $B \cup (F \cup K)$; *h)* $B \setminus (F \setminus K)$; *i)* $B \setminus F \setminus K$.

Megoldás



a) $F \cap K = \{$A, P, T, Z$\}$;
b) $B \cup K = \{$A, C, D, G, H, K, M, N, O, P, Sz, T, V, Z$\}$;
c) $K \setminus F = \{$G, H, N$\}$;
d) $F \setminus K = \{$C, K, R, Sz, V$\}$;
e) $\overline{K} = \{$C, D, K, M, O, R, S, Sz, V$\}$;
f) $(B \cap F) \cap K = \{$P$\}$;
g) $B \cup (F \cup K) = \{$A, C, D, G, H, K, M, N, O, P, R, Sz, T, V, Z$\}$;
h) $B \setminus (F \setminus K) = B \setminus \{C, K, R, Sz, V\} = \{D, G, M, O, P\}$.
i) A $B \setminus F \setminus K$ kifejezésben egyforma rendű (egyforma „erősségű”) műveletek szerepelnek, ezért a kiértékelésekor balról jobbra haladunk.
$B \setminus F \setminus K = (B \setminus F) \setminus K = \{D, G, M, O\} \setminus K = \{D, M, O\}$.

A MŰVELETEK TULAJDONSÁGAI

Fogalmak, név
metszet;
unió;
különbség;
komplementer halmaz;
de Morgan.

A definíciók segítségével tetszőleges *A*, *B*, *C* halmazokra igazolhatók a következő **tulajdonságok**:

$A \cap B = B \cap A$, $\quad A \cup B = B \cup A$,

(a metszet-, illetve unióképzés **kommutatív** művelet, azaz felcserélhető a halmazok sorrendje);

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

(a metszet-, illetve unióképzés **asszociatív** művelet, azaz szabadon zárójelezhető);

$A \cap A = A$, $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$,
$A \cup A = A$, $\quad A \cup \varnothing = A$,
$A \setminus A = \varnothing$, $\quad A \setminus \varnothing = A$, $\quad \varnothing \setminus A = \varnothing$,
$\overline{\overline{A}} = A$, $\quad \overline{\varnothing} = H$, $\quad \overline{H} = \varnothing$.

FELADATOK

1. K1 Legyen A = {egyjegyű páros természetes számok}, B = {5-nél nem nagyobb természetes számok}, s a H alaphalmaznak tekintsük az egyjegyű természetes számok halmazát.

a) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal!

Adjuk meg – például felsorolással – az alábbi halmazokat!

b) $A \cap B$; *c)* $B \cap A$; *d)* $A \cup B$; *e)* $B \cup A$; *f)* $A \setminus B$; *g)* $B \setminus A$;
h) $\overline{A}$; *i)* $\overline{B}$; *j)* $\overline{A \cap B}$; *k)* $\overline{A \cup B}$; *l)* $\overline{A \setminus B}$; *m)* $\overline{B \setminus A}$;
n) $\overline{A} \cap B$; *o)* $\overline{A} \cap \overline{B}$; *p)* $A \cup \overline{B}$; *q)* $\overline{A} \cup \overline{B}$.

A kapott eredmények között vannak-e egyenlők?

2. K2 Legyen A = {15-nél nem nagyobb, 2-vel osztható természetes számok}, B = {15-nél nem nagyobb, 3-mal osztható természetes számok}, C = {15-nél nem nagyobb, 5-tel osztható természetes számok}, s a H alaphalmaznak tekintsük a 15-nél nem nagyobb természetes számok halmazát.

a) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal!

Adjuk meg – például felsorolással – az alábbi halmazokat!

b) $(A \cap B) \cap C$; *c)* $A \cap (B \cap C)$; *d)* $(A \cup B) \cup C$; *e)* $A \cup (B \cup C)$;
f) $(A \setminus B) \setminus C$; *g)* $A \setminus (B \setminus C)$; *h)* $(A \cup B) \cap C$; *i)* $A \cup (B \cap C)$;
j) $(A \cup B) \setminus C$; *k)* $A \cup (B \setminus C)$; *l)* $(A \cap B) \setminus C$; *m)* $A \cap (B \setminus C)$;
n) $A \setminus (B \cup C)$; *o)* $A \setminus (B \cap C)$; *p)* $\overline{B}$; *q)* $\overline{B \cap C}$;
r) $\overline{B \cup C}$; *s)* $\overline{B \setminus C}$; *t)* $\overline{B} \cap C$; *u)* $\overline{B} \cap \overline{C}$;
v) $\overline{B} \cup C$; *z)* $\overline{B} \cup \overline{C}$.

A kapott eredmények között vannak-e egyenlők?

3. K2 Adjuk meg – például felsorolással vagy egyszerűbb műveletek segítségével – az alábbi halmazokat (*A*, *B*, *C*, *H* az előző feladatban definiált halmazok)!

a) $\overline{(A\cup B)\cap C}$; *b)* $\overline{A\cup(B\cap C)}$; *c)* $\overline{(B\cap C)}\setminus A$; *d)* $B\cap\overline{(C\setminus A)}$;
e) $\overline{A\setminus(B\cup C)}$; *f)* $\overline{(A\setminus B)}\cup C$; *g)* $\overline{A}\cap(B\setminus C)$; *h)* $\overline{B\cup C}\cap A$;
i) $A\cap(B\setminus\overline{C})$; *j)* $A\setminus(\overline{B}\setminus C)$; *k)* $(A\cup B)\setminus(A\cup C)$;
l) $(A\cap B)\cup(A\setminus C)$; *m)* $(A\cap B)\cup(B\setminus C)$; *n)* $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)$.

4. K1 A *H* alaphalmazon adott az *A* és *B* halmaz (azaz $A\subseteq H$, $B\subseteq H$). Határozzuk meg az alábbi halmazokat!

a) $A\cap B$, ha $A=\varnothing$; *b)* $A\cup B$, ha $A=\varnothing$; *c)* $A\setminus B$, ha $A=\varnothing$; *d)* $B\setminus A$, ha $A=\varnothing$;
e) $\overline{A}$, ha $A=\varnothing$; *f)* $A\cap B$, ha $A\subseteq B$; *g)* $A\cup B$, ha $A\subseteq B$; *h)* $A\setminus B$, ha $A\subseteq B$;
i) $\overline{B}\setminus\overline{A}$, ha $A\subseteq B$; *j)* $\overline{\overline{A}}$; *k)* $\overline{\overline{\overline{A}}}$.

5. K2 Az $A\not\subset B$ kapcsolatot fogalmazzuk meg a metszet, illetve a különbség művelete segítségével!

6. K1 Mivel egyenlők az alábbi halmazok?

a) $\overline{\mathbf{Z}^+}$ a $\mathbf{Z}$ alaphalmazon; *b)* $\overline{\mathbf{Z}^-}$ a $\mathbf{Z}$ alaphalmazon; *c)* $\overline{\mathbf{N}}$ a $\mathbf{Z}$ alaphalmazon;
d) $\overline{\mathbf{Z}}$ a $\mathbf{Q}$ alaphalmazon; *e)* $\overline{\mathbf{Q}}$ az $\mathbf{R}$ alaphalmazon; *f)* $\overline{\mathbf{R}_0^+}$ az $\mathbf{R}$ alaphalmazon.

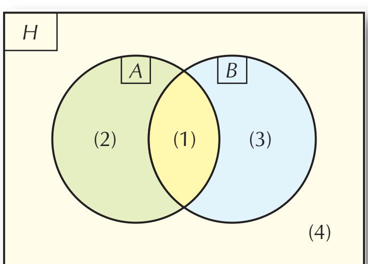
7. E1 Az 1. és 2. feladat megoldása alapján megsejthetjük az alábbi összefüggéseket (az *a)* és *b)* az ún. de Morgan-azonosságok):

a) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; *c)* $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;
b) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; *d)* $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

A Venn-diagram segítségével bizonyítsuk be a sejtéseket!

Augustus de Morgan (1806–1871) Indiában született angol matematikus, 1828-ban lett az University College első matematikaprofesszora. Kezdeményezte az algebra formális megközelítésének a kidolgozását, foglalkozott a szimbolikus logika megalapozásával. 1838-ban tisztázta a teljes indukció elvét.

8. K2



Adott a *H* alaphalmaz, valamint két halmaz, *A* és *B*. Venn-diagramjukon (1), (2), (3), illetve (4)-gyel jelöltük az egyes tartományokat. (Például (2) jelenti az $A\setminus B$ részhalmazt.)

Az alábbi, logikai kötőszókat tartalmazó megfogalmazások az egyes tartományok elemeire vonatkoznak. Állapítsuk meg, hogy az *a)–p)* meghatározások mely részhalmazok elemeire igazak, azaz a feladatokban megadott *x* elemek mely tartományokat határozzák meg!

Például: az „*x* eleme *A*-nak *és x* eleme *B*-nek” meghatározás az $A\cap B$ részhalmazra vonatkozik (ennek *x* elemeire teljesül), tehát az (1) tartományt határozza meg.

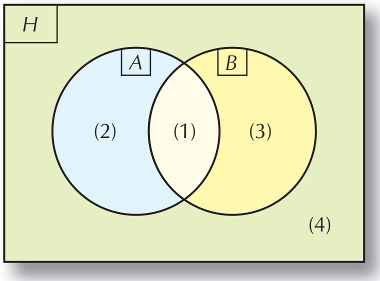
a) *x* eleme *A*-nak *vagy x* eleme *B*-nek;
b) *x* (*A* és *B* közül) *legalább az egyik* halmaznak eleme;
c) *x legfeljebb az egyik* halmaznak eleme;
d) *x pontosan az egyik* halmaznak eleme;
e) *x legalább* az *A* halmaznak az eleme;
f) *x legfeljebb* az *A* halmaznak az eleme;
g) *x nem* eleme *A*-nak;
h) *x sem A*-nak, *sem B*-nek nem eleme;
i) *x egyik* halmaznak *sem* eleme;

j) *x csak az egyik* halmaznak eleme;
k) *x csak A*-nak eleme;
l) *x* eleme *A*-nak, *de B*-nek nem;
m) *x* eleme az *egyik* halmaznak, de a másiknak nem;
n) *x vagy A*-nak, *vagy B*-nek eleme *(de csak az egyiknek);*
o) *ha x* eleme *A*-nak, *akkor x* eleme *B*-nek is;
p) *ha x* eleme az egyik halmaznak, akkor eleme a másik halmaznak is.

9. K2 Tekintsük az A = {egyjegyű páros természetes számok} és B = {egyjegyű (pozitív) prímszámok} halmazokat, s a H alaphalmaznak tekintsük az egyjegyű természetes számok halmazát.

Fogalmazzuk meg, hogy mi jellemzi az alább felsorolt tartományok elemeit, s ezeket adjuk meg az unió és kivonás halmazműveleteivel is!

a) (1); *b)* (2); *c)* (4); *d)* (2), (3);
e) (2), (4); *f)* (1), (4); *g)* (1), (3), (4); *h)* (2), (3), (4).



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **171; 172; 177; 185; 186; 191; 192; 195; 200; 210; 216; 220; 225; 227; 229.**

5. EGYSZERŰ ÖSSZESZÁMOLÁSI FELADATOK

A tanító a kisdiákról jelentést tett elöljáróinak, s ennek hatására a braunschweigi herceg vállalta a csodagyermek neveltetését. Karl Friedrich Gauss (1777–1855) korának legnagyobb matematikusa, fizikusa, csillagásza lett, s már életében kiérdemelte kortársaitól a „princeps mathematicorum” (a matematikusok fejedelme) címet.

1783-ban a braunschweigi iskola tanítója – az akkori szokásoknak megfelelően – egyszerre több különböző osztállyal is foglalkozott. Négy évfolyam diákjai tanultak párhuzamosan, ugyanabban a tanteremben. A tanító a legkisebb, hatéves gyerekeknek önállóan megoldandó feladatot tűzött ki, hogy míg ők dolgoznak, addig az idősebbekkel is foglalkozhasson. A feladat a természetes számok összeadása volt, 1-től 40-ig. Azonban alig hangzott el a feladat, néhány pillanattal később már a szegény nyergesmester fia, a kicsi Gauss vitte is ki a palatábláját, rajta néhány számolással. (Képzelhetjük, mennyire örült ennek a tanító, aki már ment volna az idősebbekhez, s úgy gondolta, hogy egy elkapkodott s hibás megoldásról van szó.) De az eredmény helyes volt, a gondolatmenet pedig – egy hatéves gyerektől – zseniális: $1 + 40 = 41$, $2 + 39 = 41$ stb. Húsz ilyen pár van, a keresett összeg tehát $20 \cdot 41 = 820$.

Ma úgy mondanánk, hogy a kisfiú a *párosítás*, a *párba állítás* módszerét alkalmazta. A tanító a „frontális” műveletvégzéssel 39 összeadást várt a tanulóktól, ehelyett Gauss egy összeadással, egy osztással ($40 : 2 = 20$) és egy szorzással, azaz összesen 3 művelettel (és persze a párosítás lehetőségének a felismerésével) oldotta meg a feladatot. A módszer „erejét” akkor érthetjük meg igazán, ha például 1-től egymillióig kell összeadnunk a számokat. Ekkor a számok sorban történő összeadása 999 999, míg Gauss módszere továbbra is 3 (igaz, kissé bonyolultabb) műveletet igényel.

1. példa

Bergengócia fővárosában az Alsóvárosból a Centrumba három út vezet (ebből kettő betonút, egy macskaköves), a Centrumból a Felsővárosba öt út (három betonút, két macskaköves út).

a) Hányféle úton juthatunk el Alsóvárosból a Centrumon keresztül a Felsővárosba?

b) Ebből hány útvonal halad teljes egészében betonúton?

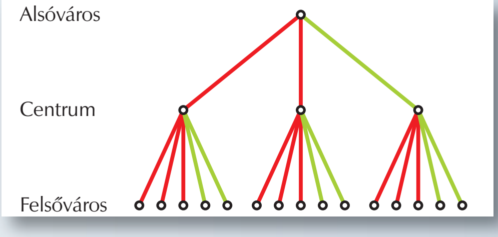
Megoldás

a) El kell jutnunk Alsóvárosból a Centrumba, *és* ettől függetlenül a Centrumból a Felsővárosba. Alsóvárosból a Centrumba három út vezet (legyenek ezek a_1, a_2, a_3), s ezen utak bármelyikéhez csatlakozhat a Centrumból a Felsővárosba vezető öt út (jelölés: c_1, c_2, c_3, c_4, c_5). Az a_1 útszakasz választása esetén öt lehetőség adódik (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 bármelyike); az a_2 választása esetén a lehetőségek száma szintén öt; végül az a_3 útszakaszhoz is öt csatlakozás lehetséges. Összesen $3 \cdot 5 = 15$ az útvonalak száma, ezek:

a_1c_1, a_1c_2, a_1c_3, a_1c_4, a_1c_5; a_2c_1, a_2c_2, a_2c_3, a_2c_4, a_2c_5; a_3c_1, a_3c_2, a_3c_3, a_3c_4, a_3c_5.

b) Alsóvárosból a Centrumba 2-féle betonutat választhatunk, *és* ettől függetlenül, a Centrumból a Felsővárosba 3-féle betonutat. Bármelyik 2 alsóvárosi betonúthoz bármely 3 Felsővárosba tartó betonút választható, a lehetőségek száma $2 \cdot 3 = 6$.

A lehetséges útvonalakat egy hálózattal (ún. gráffal) is szemléltethetjük:



A megoldás struktúrája szerint először kiválasztottuk az Alsóvárosból a Centrumba vezető utakat (3-féle lehetőség), *és* ettől függetlenül hozzájuk kiválasztottuk a Centrumból a Felsővárosba vezető utakat (5-féle lehetőség). Jegyezzük meg, hogy az ÉS kötőszó használatakor általában a kombinatorika *szorzási szabályát* alkalmazzuk:

Ha egy bizonyos *A* objektumot *m*-féleképpen, egy másik független *B* objektumot *n*-féleképpen lehet kiválasztani, akkor a *szorzási szabály* azt jelenti, hogy az (*A*, *B*) pár kiválasztása („*A* és *B*”) $m \cdot n$-féleképpen lehetséges.

2. példa

A 0, 1, 2, 3 számjegyekből hány darab négyjegyű természetes számot készíthetünk, ha a keletkezett számban

a) minden számjegy különböző;

b) lehetnek egyforma számjegyek is?

Megoldás

a) Az első (az ezres) helyi értéken 3-féle számjegy szerepelhet (a 0 nem, mert akkor a szám nem lenne négyjegyű). A második helyiértéken a maradék 3 számjegy bármelyike állhat, a harmadik helyre már csak 2-féle számjegy kerülhet, s ekkor az utolsó helyre írt szám egyértelműen adódik. A lehetőségek száma $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.

b) Az első helyen 3-féle számjegy állhat (a 0 nem), a további helyekre – a korábbi számjegyektől függetlenül – mindig 4-féle számjegy kerülhet. A lehetőségek száma $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$.

3. példa

A 0, 1, 2, 3, 5 számjegyekből hány darab 5 jegyű, 5-tel osztható természetes szám készíthető, ha
a) minden számjegyet fel kell használni;
b) egy-egy számjegy többször is szerepelhet?

Megoldás

a) Ha az utolsó (legkisebb) helyiértéken álló számjegy 5, akkor $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$-féle szám készíthető, mert 0-val nem kezdődhet a szám. Ha az utolsó helyi értéken álló számjegy 0, akkor $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle szám lehetséges. Az utolsó helyiértéken *vagy* 0, *vagy* 5 szerepel; összesen $18 + 24 = 42$ lehetőségünk van, mert a két esetben minden számot pontosan egyszer számoltunk.

b) Az első helyi értékre 4-féle számjegy kerülhet (a 0 nem). A következő három helyre mindig 5-féle számjegy kerülhet, hiszen lehet ismétlődés; végül az utolsó helyre 2-féle számjegy írható (0 vagy 5). A lehetőségek száma $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 1000$.

Az *a)* feladatban a megvizsgálandó eseteket két részre osztottuk („a szám végén *vagy* 5, *vagy* 0 áll”), s a két eset lehetőségeinek összege adta a megoldást. A két eset között nincs „átfedés”; nincs olyan szám, amely mindkét feltételnek megfelelne. Ennek alapján megfogalmazhatjuk a kombinatorika **összeadási szabályát:**

Ha egy bizonyos A objektumot m-féleképpen, egy másik független B objektumot n-féleképpen lehet kiválasztani, akkor az *összeadási szabály* azt jelenti, hogy a „vagy A, vagy B” kiválasztás $(m + n)$-féleképpen történhet.

4. példa

Hány háromjegyű természetes szám van, amelyben szerepel az 1-es számjegy?

Megoldások

„Első megoldás (hibás)”:

Ha az első helyen szerepel az 1-es, akkor a második és harmadik helyre bármilyen számjegyet írhatunk 0-tól 9-ig. Ez összesen $10 \cdot 10 = 100$ eset.

Ha a második helyen szerepel az 1-es, akkor az első helyre 9-féle számjegy kerülhet (a 0 nem), az utolsóra 10-féle. Innen $9 \cdot 10 = 90$ lehetőséget kapunk.

Végül ha az utolsó helyen szerepel az 1-es, akkor az első helyre 9, a második helyre 10 számjegy kerülhet; az esetek száma $9 \cdot 10 = 90$ (éppúgy, mint a második esetben).

Összesen $100 + 90 + 90 = 280$ megfelelő szám van.

Ez a megoldás hibás. Mi lehet a hiba?

Második megoldás:

Az előző megoldásban többször számoltuk azokat az eseteket, amelyekben több 1-es szerepel (például 131), így a helyes végeredmény 280-nál kevesebb lesz. A problémát úgy küszöbölhetjük ki, hogy kizárjuk az átfedéseket. Az esetszétválasztást megvalósíthatjuk például úgy, hogy azt vizsgáljuk, hogy a háromjegyű számban *balról* (a legnagyobb helyi érték felől) *számítva* melyik helyi értéken áll az első 1-es.

Ha az első helyen szerepel az első 1-es, akkor a második és harmadik helyre bármilyen számjegyet írhatunk 0-tól 9-ig. Ez összesen $10 \cdot 10 = 100$ eset.

Ha balról számítva a második helyen szerepel az első 1-es, akkor az első helyre 8-féle számjegy kerülhet (a 0 és az 1 nem), az utolsóra 10-féle. Innen $8 \cdot 10 = 80$ a lehetőségek száma.

Végül ha az utolsó helyen szerepel balról az első 1-es, akkor az első helyre 8 (0 és 1-es nem), a második helyre 9 számjegy kerülhet (ide 1-es nem). Az esetek száma $8 \cdot 9 = 72$.

Összesen $100 + 80 + 72 = 252$ megfelelő szám van.

A második megoldásban az összeadási szabályt alkalmaztuk: a balról első 1-es *vagy* az első, *vagy* a második, *vagy* a harmadik helyiértéken áll. Az első (hibás) megoldás pedig arra mutat példát, hogy mikor, illetve milyen módon nem használhatjuk a szabályt.

5. példa

n számú különböző objektumot sorba rendezünk. Hányféle sorrend lehetséges?

Megoldás

Az első helyre n-féle objektumot helyezhetünk; a második helyen $(n-1)$-féle tárgy állhat; a harmadik helyre már csak $(n-2)$-féle objektum kerülhet és így tovább. A gondolatmenetet folytatva az utolsó előtti helyen 2-féle tárgy lehetséges, s ekkor az utolsó helyen lévő objektum már egyértelműen adódik. A szorzási szabályt alkalmazva a lehetőségek száma $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$; ennyiféle módon rendezhetünk sorba n számú különböző elemet.

Definíció

***n* faktoriális**

Az $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ szorzat gyakran szerepel a különböző összeszámolási feladatokban, ezért a matematikusoktól külön jelölést és elnevezést kapott: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (kiejtés: *'n faktoriális'*).

Például: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

A KOMPLEMENTER LESZÁMOLÁS MÓDSZERE

Természetes gondolat, hogy a kedvező esetek számát meghatározhatjuk úgy, hogy az összes lehetőségből kivonjuk a „rossz” (kedvezőtlen) esetek számát. A „jó = összes – rossz” módszert *komplementer leszámlálásnak* nevezzük. (Az elnevezés is arra utal, hogy a „jó” helyett ennek komplementerét, a „rossz” eseteket számoljuk meg.)

6. példa

Oldjuk meg a 4. példa feladatát a komplementer leszámlálás módszerével!

Megoldás

Összes eset: háromjegyű természetes szám $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ van.

Rossz esetek száma: azon háromjegyű természetes számok száma, amelyekben nincs 1-es, $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. (Az első helyre nem kerülhet 0 és 1; a többi helyre nem kerülhet 1.)

„Jó esetek száma = összes – rossz”: $900 - 648 = 252$. Ez az eredmény.

Látható, hogy az eredeti esetszétválasztásos megoldásnál lényegesen gyorsabban értünk célt. Ez persze nem szükségszerű. Oldjuk meg a 3. példa feladatait a komplementer leszámlálás módszerével, s hasonlítsuk össze, melyik megoldási út volt a gyorsabb (egyszerűbb, hatékonyabb, szimpatikusabb)! (Lásd a 11. kitűzött feladatot!)

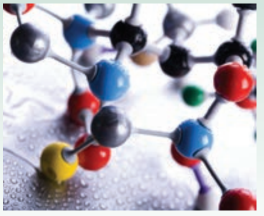
AZ ÖSSZES ESET ÁTTEKINTÉSE

Láttuk, hogy az egyszerű összeszámolási feladatokban a problémát *az összes eset áttekintése* jelenti. Bár a legősibb megoldás, a próbálgatás, elvileg mindig célhoz vezet, technikailag azonban egyáltalán nem biztos, hogy megvalósítható. Ennek az az oka, hogy a kombinatorikai feladatokban alkalmanként irdatlan nagy számokkal kell dolgoznunk. Ha például arra vagyunk kíváncsiak, hogy 10 különböző színű üveggolyóból hányféle láncot készíthetünk, a válasz $10! = 3\,628\,800$; ennyi esetet – valamilyen rendszer szerint – egyesével végignézni teljesen reménytelen, erre legfeljebb egy számítógép képes. (De még a jelenleg leggyorsabb számítógépet használva sem várhatjuk, hogy $n > 20$ esetén $n!$ számú eset végignézése egy nap alatt befejeződjön.)

A nagy számok előfordulására a mindennapi életünkből is számtalan példát említhetünk.

A hagyományos lottójátékban (90 számból 5-öt húznak ki) 43 949 268-féleképpen tölthetők ki a szelvények.

Rubik Ernő nevezetes $3\times3\times3$-as bűvös kockáján a kockalapok forgatásakor 43 252 003 274 489 856 000 különböző minta rajzolódhat ki.[4]



Az emberi szervezet egyik legegyszerűbb építőkövei, a fehérjék, mindössze 20-féle aminosavból épülnek fel. Egy átlagos fehérjemolekulában 150 aminosav-molekula van megfelelő sorrendbe rendeződve, vagyis egy átlagos fehérjelánc 20^{150}-féle lehet. Ez a szám borzasztóan nagy (196 jegyű), hétköznapi szókinccsel ki sem ejthető, meg sem nevezhető.

Fogalmak, nevek
szorzási szabály;
összeadási szabály;
n faktoriális;
Gauss.

Nem elég tehát az összeszámolási feladatokat „csak" megoldani – arra is törekednünk kell, hogy minél ügyesebben, gyorsabban célt érjünk. Ebben lesznek segítségünkre az eddig látott módszerek (párosítás, összeadási és szorzási szabály, esetszétválasztás, faktoriális fogalma, komplementer, leszámlálás, ...), illetve a későbbiekben megismert módszerek, eljárások.

FELADATOK

1. K1 A Magyar Értelmező Kéziszótár (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972) címszavakat tartalmazó oldalai 1-től 1550-ig számozottak. Az oldalak sorszámozása közben összesen hány számjegyet nyomtattak a lexikon lapjaira?

2. K1 Az A vagy B összeg a nagyobb?

a) $A = 101 + 103 + 105 + \ldots + 801$, $\quad B = 100 + 102 + 104 + \ldots + 800$;

b) $A = 201 + 204 + 207 + \ldots + 801$, $\quad B = 200 + 203 + 206 + \ldots + 800 + 803$.

3. K2 Egy televíziós vetélkedőn hangzott el a következő kérdés: „Egy körvonalon felvettünk öt kék és egy piros pontot. A pontok által meghatározott háromszögek közül melyikből van több: amelyiknek van piros csúcsa, vagy amelyiknek nincs?" Nos?

[4] Rubik Ernő: *A bűvös kocka.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981

4. K1 Egy ismeretlen halott fogazatát azonosítás céljából összehasonlítják az egykori fogászati kartotékokkal. Hányféle különböző emberi fogazat lehetséges, ha
a) azt vizsgálják, hogy az egyes fogak hiányoznak valakinél vagy sem;
b) egy pontosabb vizsgálatban a fogak állapota háromféle lehet: vagy hiányzik, vagy megvan, de kezelt (tömött), vagy megvan és egészséges?
(32 foggal számoljunk!)

5. K1 Adott két párhuzamos egyenes, *a* és *b*. Kijelölünk az *a* egyenesen 3, a *b* egyenesen 4 pontot, és összekötjük mindegyik pontot mindegyik ponttal. Hány új összekötő egyenes keletkezett?

6. K2 Adott az $A = \{1; 2; 3; \dots ; 100\}$ halmaz.
a) Az *A* halmaznak hány kételemű részhalmaza van?
b) Az *A* halmaznak hány 98 elemű részhalmaza van?
c) Az *A* halmaz melyik fajta részhalmazaiból van több: amelyek 33, vagy amelyek 67 eleműek?

7. K1 Egy összejövetelen 5 fiú és 5 lány vesz részt. A táncoló pároknak hányféle összetétele lehetséges, ha mindenki táncol, és a lányok egymással, illetve a fiúk egymással nem táncolnak?

8. K2 Feldobunk egyszerre egy piros és egy fehér dobókockát.
a) Hányféle eredménye lehet a dobásnak?
b) Hány esetben kaphatunk legalább egy hatost?
c) Hány esetben lesz a dobott számok összege legalább 10?
d) Hány esetben lesz a két dobott szám összege páratlan?
e) Hány esetben lesz a két dobott szám szorzata páros?
f) Hány esetben lesz a két dobott szám szorzata 3-mal osztható?

9. K1 Hányféle különbözően kitöltött, hagyományos totószelvény van? (A klasszikus totószelvényen 13 + 1 mérkőzés végeredményére tippelhetünk, mindegyik tipp lehet 1, 2 vagy X.)

10. K2 A 0 és 1 számjegyeket felhasználva hány
a) legfeljebb 6 jegyű; *b)* pontosan 6 jegyű
természetes számot írhatunk fel?

11. K2 Oldjuk meg a 3. példát a komplementer leszámlálás módszerével!
A feladat: A 0, 1, 2, 3, 5 számjegyekből hány darab 5-jegyű, 5-tel osztható természetes szám készíthető, ha
a) minden számjegyet fel kell használni;
b) egy-egy számjegy többször is szerepelhet?

12. K2 Jancsi a padláson egy régi, poros füzetben találta az alábbi feladatot.
„Két teljesen egyforma, külsőre megkülönböztethetetlen kockát feldobunk, a dobott számok összegét tekintjük. Hány esetben fordul elő, hogy a dobott számok összege 7? Az összes lehetséges kimenetel hányadrészében fordul elő ez az esemény?”

Az elsárgult papírlapokon három, réges-régen leírt megoldási gondolatmenetet is olvasott. Mi a véleményünk ezekről?

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) korának egyik legsokoldalúbb tudósa volt, matematikai és filozófusi munkássága a legmaradandóbb. Eredetileg jogot tanult, de foglalkozott még biológiával, geológiával, teológiával, összehasonlító nyelvészettel. Jelentős a történetírói és politikusi tevékenysége is. Tőle származik a kombinatorika első módszeres felépítése. 1674-ben olyan mechanikus számológépet szerkesztett, amely képes volt a négy alapművelet elvégzésére. Legfontosabb eredménye a differenciál- és integrálszámítás felfedezése.

„*Első gondolatmenet:* Mivel a kockák teljesen egyformák, 11-féle lehetséges összeg van: 2, 3, ..., 12. Ebből egy eset kedvező, a keresett arány $\frac{1}{11}$.

Második gondolatmenet (ez a megoldási javaslat Leibniztől, a híres német matematikustól származik): Az egyes összegek többféleképpen is előállhatnak:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1+1	1+2	1+3 2+2	1+4 2+3	1+5 2+4 3+3	1+6 2+5 3+4	2+6 3+5 4+4	3+6 4+5	4+6 5+5	5+6	6+6
db	1	1	2	2	3	3	3	2	2	1	1

A 21 lehetséges összegből 3 állítja elő a 7-et, így a keresett arány $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

Harmadik gondolatmenet: Hiába egyforma külsőre a két kocka, azért csak különböznek egymástól. Így az előző táblázat módosul:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1+1	1+2 2+1	1+3 2+2 3+1	1+4 2+3 3+2 4+1	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	3+6 4+5 5+4 6+3	4+6 5+5 6+4	5+6 6+5	6+6
db	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

A keresett arány $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$."

13. Hány szám készíthető az alábbi számjegyekből? (Minden megadott számjegyet fel kell használni.)

K1 *a)* 1, 1, 2;
K1 *b)* 1, 1, 2, 3;
K1 *c)* 1, 1, 2, 3, 4;
K1 *d)* 1, 1, 1, 2, 3, 4;
K2 *e)* 1, 1, 2, 2, 3, 4;
K2 *f)* 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4;
E1 *g)* 0, 1, 1, 2, 2, 3;
E1 *h)* 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2.

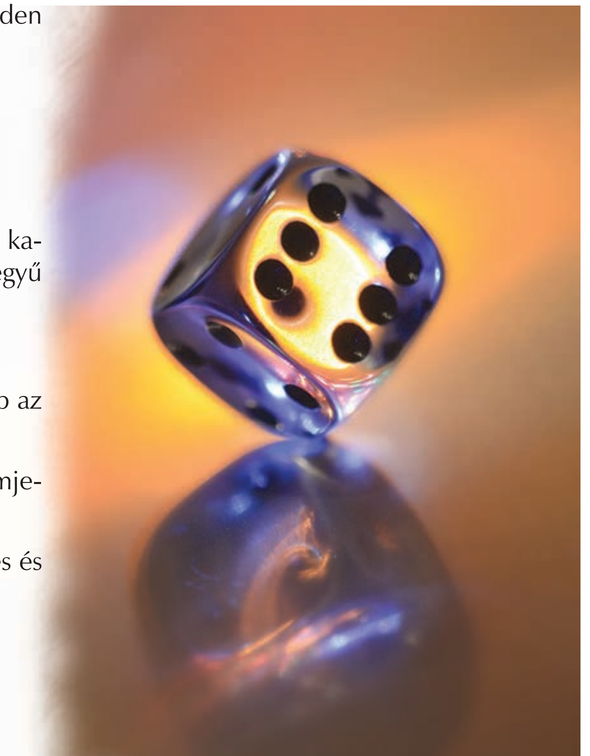
14. Egy szabályos játékkockával három dobást végzünk, a kapott számokat egymás mellé írjuk, s így egy háromjegyű számot kapunk.

K2 *a)* Hányféle számot kaphatunk?

K2 *b)* Hányféle számot kaphatunk, amelyben legalább az egyik számjegy 6-os?

K2 *c)* Hányféle számot kaphatunk, amelyben a számjegyek szorzata páros?

E1 *d)* Hányféle számot kaphatunk, amelyben van 1-es és 6-os számjegy is?



15. K2 1990-ben újfajta rendszámtáblákat vezettek be. A régi típusú rendszámtáblán két betűt és négy számjegyet lehetett felhasználni, például XC 45–67. Az újabb rendszámtáblákon három betű és három számjegy használható fel, például HEP-982.

a) Hány különböző rendszámtábla készíthető az egyes típusokból?

b) Melyik fajta rendszámtáblából van több: amelyikben nem ismétlődik számjegy, vagy amelyikben igen? (A kérdésre mindkét típus esetén válaszoljunk.)

(A rendszámtáblán összesen 26-féle betű és 10-féle számjegy szerepelhet.)

16. K2 Tíz diák között szeretnénk két jutalomtárgyat kiosztani. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha

a) a tárgyak egyformák, és egy diák csak egy tárgyat kaphat;

b) a tárgyak egyformák, és egy diák két tárgyat is kaphat;

c) a tárgyak különbözők, és egy diák csak egy tárgyat kaphat;

d) a tárgyak különbözők, és egy diák két tárgyat is kaphat?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **3; 4; 5; 8; 12; 17; 20; 26; 32; 56; 62; 65; 75; 80; 90; 96; 109; 116; 134.**
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **285.**

6. HALMAZOK ELEMSZÁMA

Definíció

A halmazokat – elemszámuk szerint – két csoportra oszthatjuk: beszélhetünk véges vagy végtelen elemszámú halmazokról.

A **véges elemszámú** (vagy röviden: *véges*) halmazok elemszámát megadhatjuk egy természetes számmal. Például az $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; \ldots ; 100\}$, $C = \{-2{,}1; 3{,}3; \{0; 1; 2\}; 5\}$, $D =$ {kétjegyű természetes számok} és $E = \varnothing$ halmazok elemszáma rendre 3, 100, 4, 90, 0. Az elemszám jelölésére a $|\ |$ szimbólumot használjuk, ez alapján írhatjuk: $|A| = 3$, $|B| = 100$, $|C| = 4$, $|D| = 90$, $|E| = 0$. (Alkalmazható az $|\{1; 2; 3\}| = 3$, $|\{1; 2; 3; \ldots ; 100\}| = 100$ stb. jelölés is.)

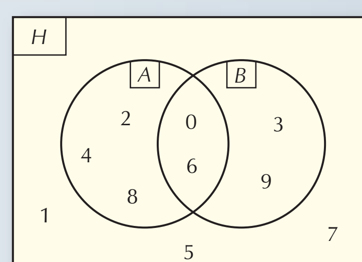
1. példa

Legyen A = {egyjegyű páros természetes számok}, B = {egyjegyű, 3-mal osztható természetes számok}, az alaphalmaz pedig legyen H = {egyjegyű természetes számok}. Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát!

a) $|A|$; *b)* $|B|$; *c)* $|A \cap B|$; *d)* $|A \cup B|$; *e)* $|A \setminus B|$; *f)* $|B \setminus A|$; *g)* $|\overline{A}|$; *h)* $|\overline{B}|$.

Megoldás

Készítsük el az A, B, H halmazok Venn-diagramját!



Ez alapján:

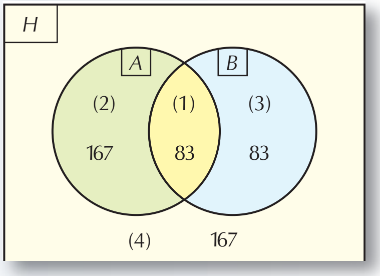
a) $|A| = 5$; *b)* $|B| = 4$; *c)* $|A \cap B| = 2$; *d)* $|A \cup B| = 7$;

e) $|A \setminus B| = 3$; *f)* $|B \setminus A| = 2$; *g)* $|\overline{A}| = 5$; *h)* $|\overline{B}| = 6$.

2. példa

Az 500-nál nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amelyik
a) osztható 2-vel;
b) nem osztható 3-mal;
c) osztható 2-vel és 3-mal;
d) osztható 2-vel vagy 3-mal;
e) nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal?

Megoldás



Legyen A és B az 500-nál nem nagyobb, 2-vel, illetve 3-mal osztható számok halmaza. A $H = \{1, 2, 3, \ldots, 500\}$ számok közül minden második osztható 2-vel, és minden harmadik osztható 3-mal, így $|A| = 250$, $|B| = 166$. A 2-vel és 3-mal osztható számok másképpen a 6-tal osztható számok, ezért $|A \cap B| = 83$. A Venn-diagramon az egyes tartományokat (1), (2), (3), (4)-gyel jelöltük, s ebben a sorrendben, az $A \cap B$ részhalmazból kiindulva meghatároztuk az elemszámaikat.

$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 250 - 83 = 167$; $|B \setminus A| = 166 - 83 = 83$; $|A \cup B| = 167 + 83 + 83 = 333$; $|\overline{A \cup B}| = 500 - 333 = 167$.

a) $|A| = 250$.

b) $|\overline{B}| = 167 + 167 = 334$.

Másképpen:

Alkalmazhatjuk az előző leckében megismert komplementer leszámlálás módszerét is: $|\overline{B}| = |H| - |B| = 500 - 166 = 334$.

c) $|A \cap B| = 83$.

d) $|A \cup B| = 167 + 83 + 83 = 333$.

Másképpen:

Az $A \cup B$ halmaz elemei az A vagy B halmaz elemei közül kerülnek ki. Az $A = \{2; 4; 6; 8; \ldots\}$ és $B = \{3; 6; 9; 12; \ldots\}$ halmazok egyesítésekor a közös elemeket csak egyszer soroljuk fel: $A \cup B = \{2; 3; 4; 6; \cancel{6}; 8; 9; 10; 12; \cancel{12}; 14; \ldots\}$. Tehát $A \cup B$ elemszáma az A és B elemszámok összegénél kevesebb; anynyival kevesebb, ahány közös eleme van A-nak és B-nek. (Hiszen ezeket a számokat az $|A| + |B|$ összegben kétszer soroltuk fel.) Így tehát $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 250 + 166 - 83 = 333$. A módszer neve *logikai szitaformula* (az elnevezés arra utal, hogy a többször számolt eseteket „kiszitáljuk”).

e) $|\overline{A \cup B}| = 167$.

A VÉGTELEN HALMAZOK NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

Definíció

A **végtelen elemszámú** (vagy röviden: *végtelen*) halmazok elemeinek a száma nem adható meg egy természetes számmal. Például az A = {páros számok}, $B = \{10; 13; 16; 19; \ldots\}$, $C = \mathbf{Q}$, D = {egy adott egyenes pontjai} végtelen halmazok. A végtelen halmazok elemszámának a jelölése: ∞. Így a felsorolt halmazok esetén írhatjuk: $|A| = \infty$, $|\{10;13;16;19;\ldots\}| = \infty$, $|\mathbf{Q}| = \infty$ stb.


Az Erzsébet híd Budapesten

Mondhatjuk például, hogy Magyarországon egy adott évben végtelen sok búzaszem termett? Nem, ezt nem állíthatjuk. Tudjuk, hogy abban az évben hány tonna volt a búzatermés; rendelkezünk adatokkal, hogy egy kilogrammnyi búza átlagosan hány szemből áll; ezek alapján pedig megbecsülhető az éves búzatermés „darabszáma”. Persze a kapott eredmény nem lesz pontos (és a pontos eredményt soha, senki nem is tudja meg), de – a lehetséges hibahatárt is figyelembe véve – akármilyen nagy számot is kaptunk, ez mégiscsak egy *véges* szám. Az export, a hazai állattartás és növénytermesztés, a lakosság élelmezése – ezek a tényezők mind-mind folyamatosan csökkentik a termés darabszámát, és egészen biztos, hogy előbb-utóbb elfogynak az abban az évben termett búzaszemek.

Egy másik példában tegyük fel, hogy valaki Budapest egyik szélső kerületéből el akar sétálni az Erzsébet hídhoz. A távolság igen nagy, és sokan vannak, akik számára ez a séta elképzelhetetlen. De akármilyen nagy is a távolság – kb. 15 km –, ez mégiscsak *véges* távolság. Megbecsülhetjük a lépések darabszámát: például az átlagos lépéshossz 75 cm; vagy becsülhetjük a séta idejét, például 3 km/h átlagos gyaloglási sebességet számolva. De egy biztos: ha elindulunk, minden lépéssel közelebb érünk a célunkhoz.

Az emberiség legtöbb hétköznapi tapasztalatát a véges halmazok körében gyűjtötte, ezért nagyon nehéz elképzelni – megérteni, elhinni – a végtelen halmazok néhány váratlan tulajdonságát.

Például tegyük fel, hogy valaki egy sorba végtelen sok kavicsot helyezett. Ha most úgy akarjuk megszámolni a kavicsokat, hogy sorban egyesével mindig elveszünk egyet, akkor *soha nem érünk a sor végére*. Nehéz elképzelni, de ha elveszünk 1, 2, 10, 100, akár 1 000 000, vagy akárhány, de véges számú kavicsot, attól még ugyanúgy végtelen számú kavics maradt a sorban. És ha például minden második kavicsot vesszük el? Ekkor végtelen sok kavicsot vettünk el, és mégis – továbbra is – végtelen sok kavicsunk maradt.

A fenti búzaszemes példa esetén képzeljük el (ha tudjuk), hogy egy évben végtelen sok búza terem. Ekkor bármennyit is etetnénk meg az állatokkal, bármennyi kenyeret sütnének a pékek – továbbra is végtelen sok búzánk maradna. És ha minden második búzaszemet a szomszédos országoknak adnánk, akkor nekik is, nekünk is végtelen sok búzánk lenne.

A **végtelen** nem „igazi szám”, nem érvényesek rá a megszokott műveleti szabályok. A végtelen halmazok sajátosságai miatt néhány műveletet és halmazelméleti fogalmat tehát pontosítanunk kell. Van-e értelme például – végtelen halmazok körében – annak a kérdésnek, hogy melyik halmaznak van *több* eleme? Vagy mondhatjuk-e azt, hogy két végtelen halmaznak *ugyanannyi* eleme van?

Véges halmazok esetén könnyű eldönteni, hogy két halmaz elemszáma egyenlő-e, mert egyszerűen megszámolhatjuk az elemeiket. Egy másik lehetőség az elemek párba állítása: ha a két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk, akkor elemszámuk egyenlő. Mivel a párosítás esetén nincs szükség számlálásra, ezért a végtelen halmazok körében ezt a módszert próbáljuk alkalmazni.

Tekintsük az $A = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$, $B = \{4; 5; 6; 7; \ldots\}$ és $C = \{2; 4; 6; 8; \ldots\}$ végtelen halmazokat.

Első gondolatunk az lehetne, hogy mivel $B \subset A$, így az A halmazban „több” elem van (a $4 \leftrightarrow 4$, $5 \leftrightarrow 5$, $6 \leftrightarrow 6$, $7 \leftrightarrow 7$ stb. párosítás alapján éppen „3-mal több”).

A fenti példákban A, B és C számossága megegyezett. Érdekes – és nagyon nehéz – kérdés, hogy minden végtelen halmaz számossága ugyanannyi-e? Azaz vajon csak egyfajta végtelen létezik? A kérdéssel először Georg Ferdinand Cantor (1845–1918) német matematikus foglalkozott behatóan.

De az elemek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést is létesíthetünk: $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 5$, $3 \leftrightarrow 6$, $4 \leftrightarrow 7$ stb., általában $x \in A \leftrightarrow x + 3 \in B$ (ahol $x = 1, 2, 3, \ldots$). Ez alapján a két halmaz elemszáma „egyenlő”.

Végül egészen furcsa eredményeket is kaphatunk. Például az $1 \leftrightarrow 8$, $2 \leftrightarrow 9$, $3 \leftrightarrow 10$, $4 \leftrightarrow 11$ stb. párba állítást alkalmazva kimutathatjuk, hogy B-ben „4-gyel több” elem van.

Hasonló a helyzet az A és C halmazok elemszámával is. „Megmutathatjuk”, hogy C-ben „feleannyi” elem van, vagy azt, hogy a két halmazban „ugyanannyi” szám található, de akár azt is, hogy B-nek „4-gyel több” eleme van.

Végtelen halmazok esetében tehát az „elemszám” fogalma a hagyományos értelemben nem használható, ellentmondásra vezet.

Definíció **Emelt szint**

A halmazok elemszámának a jellemzésére bevezetjük a **számosság** fogalmát.

Két végtelen halmaz számossága megegyezik, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk. Például az A és B halmazok számossága egyenlő, mert az $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 5$, $3 \leftrightarrow 6$, $4 \leftrightarrow 7$ stb. megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Hasonlóan megegyezik A és C számossága is, az $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 4$, $3 \leftrightarrow 6$, $4 \leftrightarrow 8$ stb. megfeleltetés miatt. (Azt pedig már nem nehéz megmutatni, hogy ha A és B, valamint A és C számossága egyenlő, akkor B és C számossága is ugyanaz.)

Véges halmaz számossága megegyezik az elemszámával, tehát egy természetes szám. Ha két véges halmaz számossága (elemszáma) egyenlő, akkor – a számosság definíciójának megfelelően – elemeik között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, ezért a számosság az „elemszám” fogalmának egyfajta általánosítása.

Véges halmazok körében megszoktuk, hogy ha A valódi részhalmaza B-nek, akkor A számossága kisebb, mint B számossága. Jegyezzük meg: a végtelen halmazok körében ez nincs így.

emelt szint **3. példa**

Az alább felsorolt halmazok közül melyek elemszáma végtelen? Melyek számossága azonos?

a) $A = \mathbf{N} \setminus \mathbf{Z}^+$; *b)* $B = \mathbf{Z} \setminus \mathbf{Z}^-$; *c)* $C = \{\text{négyzetszámok}\}$;

d) $D = \mathbf{Z}^+ \setminus \{1; 2; 3; \ldots; 100\,000\}$; *e)* $E = \left\{\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \ldots\right\}$; *f)* $F = \mathbf{N} \setminus \mathbf{Z}$.

Megoldás

$A = \{0\}$, $|A| = 1$. $B = \{0; 1; 2; 3; \ldots\} = \mathbf{N}$; $|B| = \infty$. $C = \{0; 1; 4; 9; 16; \ldots\}$; $|C| = \infty$. $D = \{100\,001; 100\,002; 100\,003; 100\,004; \ldots\}$; $|D| = \infty$. $|E| = \infty$. $F = \varnothing$, $|F| = 0$.

A B, C, D és E halmazok elemszáma végtelen. Megmutatjuk, hogy ezen halmazok számossága egyenlő. Mivel $B = \mathbf{N}$, elég megmutatni, hogy C, D és E, valamint $\mathbf{N}$ számossága megegyezik.

A C és $\mathbf{N}$ halmazok elemei között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat létesíthető: $0 \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow 2$, $9 \leftrightarrow 3$ stb. (általában $k^2 \leftrightarrow k$, ahol $k \in \mathbf{N}$).

Hasonlóan a D és $\mathbf{N}$ halmazok elemeire: $100\,001 \leftrightarrow 0$, $100\,002 \leftrightarrow 1$, $100\,003 \leftrightarrow 2$, $100\,004 \leftrightarrow 3$ stb.; általában $100\,001 + k \leftrightarrow k$, ahol $k \in \mathbf{N}$.

Az E és $\mathbf{N}$ halmazok esetén: $\frac{1}{5} \leftrightarrow 0$, $\frac{1}{6} \leftrightarrow 1$, $\frac{1}{7} \leftrightarrow 2$, $\frac{1}{8} \leftrightarrow 3$, …; általában $\frac{1}{k+5} \leftrightarrow k$, ahol $k \in \mathbf{N}$.

Tehát a B, C, D és E halmazok elemei között kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesítettünk, így mondhatjuk, hogy ezen halmazok számossága egyenlő.

Fogalmak, név
véges halmaz;
végtelen halmaz;
számosság;
logikai szitaformula;
Cantor;
megszámlálhatóan végtelen.

emelt szint

A végtelen halmazok számosságával kapcsolatos kutatások a XX. század elején váratlan eredményekre vezettek. Georg Cantor kimutatta, hogy több különböző végtelen számosság is létezik (azaz „többféle végtelen” van).

Mivel a természetes számok elemei sorozatba rendezhetők, ezt a számosságot *megszámlálhatóan végtelennek* nevezzük. Az eddigi példáink ilyen halmazok voltak, és ilyen – bármily meglepő – például a racionális számok halmaza is. Ugyanakkor *nem megszámlálhatóan végtelen* halmaz az irracionális számok vagy a valós számok halmaza, ennek valamely $[a; b]$ intervalluma, vagy egy négyzet pontjainak halmaza stb.

FELADATOK

1. Legyen a $H = \{1; 2; 3; \dots; 50\}$ alaphalmaz három részhalmaza $A = \{\text{páros számok}\}$, $B = \{\text{3-mal osztható számok}\}$, $C = \{\text{négyzetszámok}\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazok elemszámait!

K1 *a)* $\overline{C}$; **K1** *b)* $B \cap C$; **K1** *c)* $A \cup C$; **K1** *d)* $A \setminus C$;

K2 *e)* $\overline{B \cup C}$; **K2** *f)* $\overline{B \setminus C}$; **K2** *g)* $\overline{C \cap A}$; **K2** *h)* $\overline{C \setminus A}$.

2. K1 $|A| = 10$, $|B| = 8$. Mennyi a legkisebb és legnagyobb érték, amit felvehet

a) $|A \setminus B|$; *b)* $|A \cap B|$; *c)* $|A \cup B|$?

3. K2 A, B véges halmazok. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?

a) Ha $|A| = |A \cup B|$, akkor $B \subseteq A$.
b) Ha $|A| = |A \cup B|$, akkor $B \subset A$.
c) Ha $|A| = |A \cap B|$, akkor $A \subseteq B$.
d) Ha $|A| = |A \cap B|$, akkor $|A \setminus B| = 0$.
e) Ha $|A| = |A \setminus B|$, akkor $B \subseteq A$.

4. E1 Melyik igaz az előző feladat állításai közül, ha A, B végtelen halmazok, és az állításokban az elemszámok helyett halmazok számossága szerepel?

5. K2 A, B, C véges halmazok, H az alaphalmaz. Milyen feltételek esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek, egyenlőtlenségek?

a) $|A \cup B| = |A| + |B|$; *b)* $|A \setminus B| = |A| - |B|$; *c)* $|\overline{B}| = |H| - |B|$;

d) $|A \cap B| = \dfrac{|A| + |B|}{2}$; *e)* $|A| + |B| + |C| > |A \cup B \cup C|$; *f)* $|A \cap B \cap C| = \dfrac{|A| + |B| + |C|}{3}$.

6. K1 A $H = \{a, b, c, \dots, g\}$ alaphalmaz A, B, C, D részhalmazait az alábbi táblázattal adtuk meg:

H	a	b	c	d	e	f	g
A	1	0	1	0	1	1	0
B	0	0	0	1	1	1	0
C	1	0	1	1	0	1	1
D	0	0	1	0	0	1	0

Az első sorban a H halmaz elemeit tüntettük fel; a következő sorokban az egyes halmazoknál 1-est írtunk, ha az aktuális elem benne van a halmazban, 0-t, ha nincs. Például $a \in A$, de $a \notin B$. Szemléltesd táblázat segítségével az alábbi halmazokat, és határozd meg minden esetben az elemszámokat!

a) $(A \cup B) \cup C$; *b)* $A \cap (B \cap C)$; *c)* $(A \cap B) \cup C$; *d)* $A \cup (C \setminus D)$;
e) $A \cup (C \setminus B)$; *f)* $(A \cup C) \setminus (B \cup D)$; *g)* $\overline{A \cup B}$; *h)* $\overline{A \cup (C \setminus B)}$;
i) $\overline{A} \cap \overline{C}$; *j)* $\overline{(C \setminus B) \setminus D}$; *k)* $\overline{C \setminus (B \setminus D)}$.

7. K2 A 600-nál nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amelyik
a) osztható 4-gyel;
b) osztható 5-tel;
c) osztható 4-gyel és 5-tel;
d) osztható 4-gyel vagy 5-tel;
e) osztható vagy 4-gyel, vagy 5-tel (de csak az egyikkel);
f) a 4 és 5 közül legalább az egyikkel osztható;
g) a 4 és 5 közül legfeljebb az egyikkel osztható;
h) a 4 és 5 közül pontosan az egyikkel osztható;
i) ha osztható 4-gyel, akkor osztható 5-tel is;
j) a 4 és 5 számok közül ha osztható az egyikkel, akkor osztható a másikkal is;
k) nem osztható sem 4-gyel, sem 5-tel?

8. (Játék) Anna a pozitív egész számokat háromfelé osztotta, így az A, B, C közös elem nélküli, végtelen halmazokat kapta. Ezután Béla gondol az egyik halmaz három elemére, és ezek összegét elárulja Annának, ő pedig ebből kitalálja, melyik halmazra gondolt Béla. Hogyan oszthatta szét Anna a számokat?

9. K2 Hány elemű lehet az A és B halmaz, ha
a) $|A \cap B| = 10$ és $|A \cup B| = 13$;
b) $|A \cup B| = 13$ és $|A \setminus B| = 8$?

10. K2 Az A, B, C halmazokról tudjuk, hogy $|A \setminus B| = 8$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B| = 21$, $|C \setminus A| = 11$, $|A \cap B \cap C| = 1$, $|C| = 15$, $|B \cup C| = 23$. Határozzuk meg az A és B halmazok elemszámát!

11. E1 *a)* Adjál meg három olyan A, B, C halmazt, amelyek közül bármely kettőnek végtelen sok közös eleme van, de a három halmaz közös része üres!
b) Az előző feladat további megkötése, hogy $A \cup B \cup C = \mathbf{N}$ is teljesüljön.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **231; 232; 239; 240; 244; 246; 250; 253; 260; 264; 267; 268.**

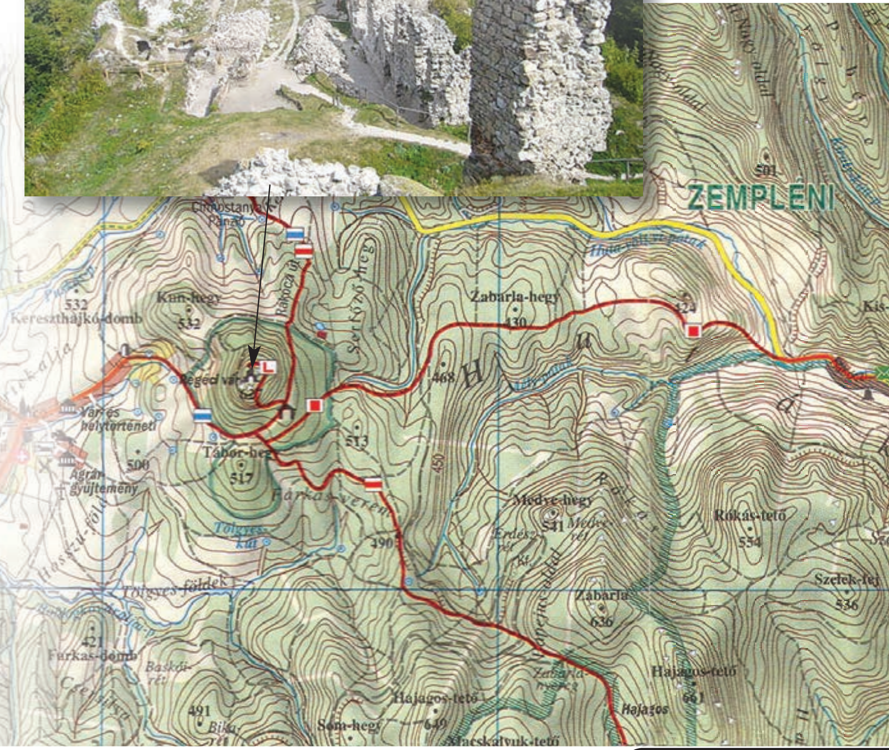
7. PONTHALMAZOK

A tankönyv korábbi leckéiben elsősorban számhalmazokat vizsgáltunk. A matematika egyik terjedelmes ága, a geometria foglalkozik a méréssel, a szerkesztésekkel, a különböző geometriai transzformációkkal, a síkbeli és térbeli alakzatok tulajdonságaival. Természetesen halmaz eleme bármilyen objektum lehet: például osztályozhatjuk a négyszögeket az oldalaik és szögeik nagysága, valamint a közöttük lévő kapcsolatok alapján; vagy csoportosíthatjuk a geometriai transzformációkat változatlan (invariáns) tulajdonságaik szerint. Mégis, tanulmányaink során leggyakrabban a sík és tér pontjaiból alkotott halmazokkal találkozunk majd.

Ezek a ponthalmazok nagyon sokfélék lehetnek. Beszélhetünk a geometria legegyszerűbb építőelemeiről, a sík és a tér pontjairól, egyeneseiről; vagy egyes síkidomok, térbeli alakzatok által meghatározott ponthalmazokról is.

A minket körülvevő természetben, a mindennapi életünkben is találkozunk ponthalmazokkal.
Néhány példa:

A Regéci vár a Zempléni-hegységben



Egy kórházi beteg hőmérsékletét rendszeres időközönként mérik. A mért értékeket grafikonon pontok segítségével ábrázolják, s a pontokat összekötve kapják az ún. *lázgörbét*.

A turistatérképen a különböző, jellegzetes tereptárgyakat egy-egy ponttal jelzik. Ponthalmazt alkotnak az azonos tengerszint feletti magasságú pontokat összekötő *szintvonalak* is.

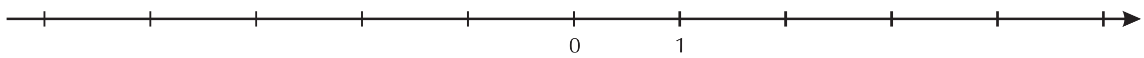
Természetesen ezek a példák a valóság leszűkített modelljei, s így csak közelítő érvényességűek. A „**pont**” idealizált matematikai alapfogalom, kiterjedés nélküli objektumot jelöl; ilyen pedig a valóságban nincs. Az azonos tengerszint feletti magasságban elhelyezkedő, valós tereptárgyaknak van kiterjedésük; éppúgy, mint a térképen ezeket modellező szintvonalak pontjainak is – bár ezek lényegesen kisebb méretűek.

A harmadik példában a Földet 6370 km sugarú gömbnek tekinthetjük. Ebben a modellben a városokat a gömb felszínén elhelyezkedő egy-egy pont azonosítja, s helyük a szélességi és hosszúsági fokok segítségével adható meg. (Például Budapest koordinátái: északi szélesség 47° 30′, keleti hosszúság 19° 2′.) Bár a városoknak van kiterjedésük, adott esetben – például megfelelő magasságból szemlélve – pontszerűeknek tekinthetők; ugyanígy adott helyzetben akár a város utcáin sétáló embereket is modellezhetjük egy ponthalmazzal.

SZÁMOK, SZÁMHALMAZOK ÁBRÁZOLÁSA SZÁMEGYENESEN

Mi is az a számegyenes? A számegyenes egy olyan egyenes, amit a számok megjelenítésére használunk. Segítségével jól érzékeltethetjük a számok nagyságát, „távolságukat”, egymáshoz való viszonyukat.

Számegyenest akkor kapunk, ha rajzolunk egy szakaszt és azon kijelöljük a „0” és az „1” helyét. Szokás ez alapján nyíllal is jelölni a pozitív irányt. A „0” és az „1” által jelölt pontok távolságát 1 egységnek tekintjük.



Ezután már minden szám helye egyértelmű a számegyenesen. Fordítva: az is egyértelmű, hogy melyik ponthoz melyik szám tartozik. (Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk a valós számok és az egyenes pontjai között.)

Nem feltétlenül szükséges a „0” és az „1” helyét kijelölni. Ha bármely két szám helyét rögzítjük, az egyértelműen meghatározza a többi szám helyét.

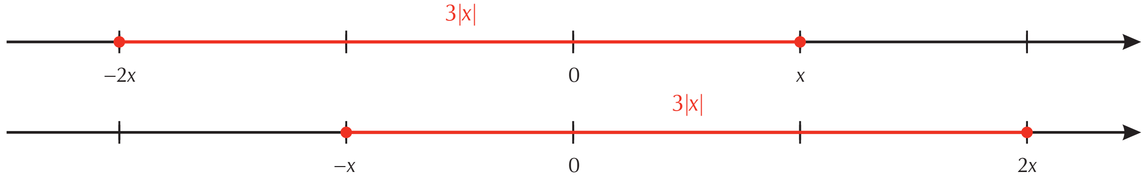
A nulla kitüntetett szerepet játszik a számok világában, hiszen elválasztja a pozitív és negatív számokat. Segítségével határoztuk meg a számok abszolút értékét, ami a számegyenesen a számhoz rendelt pontnak a nullától való távolsága. (Ezt a definíciót a későbbiekben még pontosítani fogjuk.)

1. példa

Keressük meg a számegyenesen azokat a számokat, amelyek az ellentettjük kétszeresétől 18 egység távolságra vannak!

Megoldás

Ha x-szel jelöljük a keresett szám távolságát a nullától, akkor az ellentettje is x távolságra, az ellentettjének a kétszerese pedig $2x$ távolságra van a nullától, a nulla másik oldalán. Így a két pont távolsága $3x$ lesz.



$3x = 18 \quad /:3$
$x = 6.$

Tehát a keresett szám távolsága a nullától 6 egység. Két ilyen szám van a számegyenesen, a 6 és a −6.
Könnyen ellenőrizhetjük is, hogy a kapott számok megfelelnek a feladat követelményeinek.
Tehát a feladat követelményeinek két szám felel meg: $M = \{-6; 6\}$.

2. példa

Keressük meg a $\frac{7}{5}$ és a $\frac{9}{5}$ helyét a számegyenesen!

Ezután berajzoljuk azokat a pontokat, amelyek a két szám által meghatározott szakaszt három egyenlő részre bontják. Mely számok tartoznak ezekhez a pontokhoz?

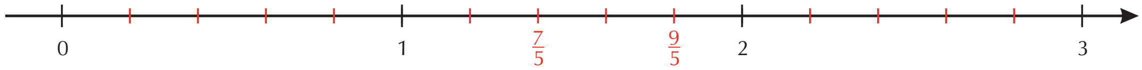
Megoldás

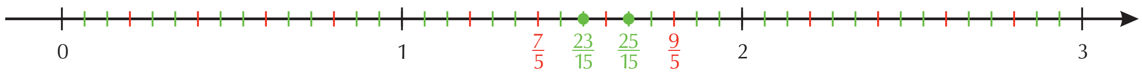
Első megoldás:

Ha a számegyenesünket úgy rajzoljuk fel, hogy $\frac{1}{5}$-önként haladunk előre a nulláról indulva, akkor hamar eljutunk mindkét megadott ponthoz. Sajnos a két pont között lévő szakasz harmadolópontjai nincsenek rajta az általunk megrajzolt pontokon. Tulajdonképen egy $\frac{2}{5}$ hosszúságú szakaszt szeretnénk három egyenlő részre osztani. Ha minden $\frac{1}{5}$ hosszú szakaszt még három egyenlő részre osztunk, vagyis $\frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{15}$-önként lépünk előre, akkor a megfelelő pontok láthatóvá válnak. Hiszen a megadott két pont távolságát most már hat egyenlő részre osztottuk. Ha $\frac{7}{5}$-nek megfelelő pontból indulunk, akkor minden második bejelölt pont megfelel a feladat feltételeinek.

$$\frac{7}{5} + \frac{2}{15} = \frac{21}{15} + \frac{2}{15} = \frac{23}{15}, \qquad \frac{23}{15} + \frac{2}{15} = \frac{25}{15}, \qquad \frac{25}{15} + \frac{2}{15} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5}.$$

Tehát $M = \left\{\frac{23}{15}; \frac{25}{15}\right\}$.





Második megoldás:

Ha csak a számok világában gondolkodunk, akkor világos, hogy az első harmadolópontnak megfelelő számot úgy kapjuk, hogy a kisebbik számhoz hozzáadjuk a két szám különbségének a harmadát.

$$\frac{7}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{5} - \frac{7}{5}\right) = \frac{21}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{21}{15} + \frac{2}{15} = \frac{23}{15}$$

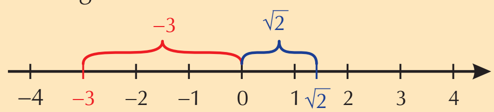
A második harmadolópont estén a két szám különbségének a kétharmadát kell hozzáadni.

$$\frac{7}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{9}{5} - \frac{7}{5}\right) = \frac{21}{15} + \frac{2}{3}\left(\frac{9}{5} - \frac{7}{5}\right) = \frac{25}{15}$$

Jól látható, hogy ezzel a módszerrel is az előző két pontot kapjuk.

SZÁMEGYENES, INTERVALLUMOK

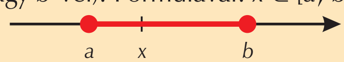
Minden valós számot megadhatunk a **számegyenes** egy pontjával, s fordítva, a számegyenes bármely pontja egy valós számot határoz meg.



A számegyenes összefüggő részhalmazai az **intervallumok**.

Definíció

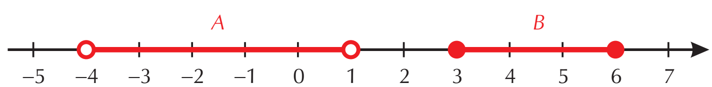
Az $[a; b]$ **zárt intervallumba** ($a \leq b$) olyan valós számok tartoznak, amelyek az a és b számok közé esnek (lehetnek egyenlők is a-val vagy b-vel). Formulával: $x \in [a; b], \Leftrightarrow a \leq x \leq b$.



A definícióból következik, hogy $a \leq b$. Ha $a = b$, akkor az intervallum egyetlen számból áll.

Definíció

Hasonlóan értelmezhetjük az $]a; b[$ **nyílt intervallumot**, ($a < b$) csak itt a határpontok nem tartoznak a halmazhoz: $x \in \,]a; b[, \Leftrightarrow a < x < b$.

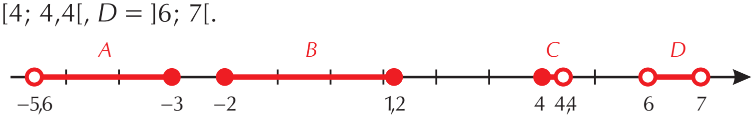


Az intervallumok végpontjaihoz tartozó számok jelölése a hagyományos módon „üres” vagy „teli” ponttal történhet. Az ábrán az $A = \,]-4; 1[$ és $B = [3; 6]$ intervallumokat jelöltük. Az üres pont („karika”) mutatja, hogy a -4 és 1 pontok nem tartoznak az A intervallumhoz.

Az intervallumokkal kapcsolatban további jelölések is alkalmazhatók.

A $C = [a; b[$ intervallum értelemszerűen olyan x valós számokat tartalmaz, amelyekre $a \leq x < b$, s hasonlóan értelmezhető $D = \,]a; b]$ is: ha $x \in D$, akkor $a < x \leq b$. Az ilyen típusú intervallumokat **félig nyílt** vagy **félig zárt intervallumoknak** nevezzük, például C esetén az alulról zárt, felülről nyitott (vagy balról zárt, jobbról nyílt) elnevezéseket használjuk.

A következő ábrán a négyféle intervallumtípus ábrázolására láthatunk példát: $A = \,]-5{,}6; -3]$, $B = [-2; 1{,}2]$, $C = [4; 4{,}4[$, $D = \,]6; 7[$.



A sokfajta jelölés és elnevezés bevezetése nem felesleges, a későbbi tanulmányainkban rendszeresen használjuk majd ezeket a fogalmakat.

1. példa

Adott az $A = [-6; -1]$ és a $B =]-3; 4[$ intervallum. Határozd meg az alábbi halmazokat!

a) $A \cap B$; *b)* $A \cup B$; *c)* $A \setminus B$; *d)* $B \setminus A$; *e)* $\overline{A}$; *f)* $\overline{B}$; *g)* $\overline{A \cup B}$.

Megoldás

a) $]-3;-1]$; *b)* $[-6; 4[$; *c)* $[-6; -3[$; *d)* $]-1; 4[$; *e)* $\overline{A} = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -6 \text{ vagy } -1 < x\}$;

f) $\overline{B} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq -3 \text{ vagy } 4 \leq x\}$; *g)* $\overline{A \cup B} = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -6 \text{ vagy } 4 \leq x\}$.

Az *e)*, *f)* és *g)* feladat alapján érdemes – kényelmi szempontból – további jelöléseket bevezetnünk. A *végtelen intervallumokat* például az $[a; \infty[$ módon jelölhetjük, s értelmezésük: ha $x \in [a; \infty[$, akkor $a \leq x$. Ezzel a jelöléssel az utolsó három feladat megoldása másképpen is megadható:

e) $\overline{A} =]-\infty; -6[\cup]-1; \infty[$;

f) $\overline{B} =]-\infty; -3] \cup [4; \infty[$;

g) $\overline{A \cup B} =]-\infty; -6[\cup [4; \infty[$.

A DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

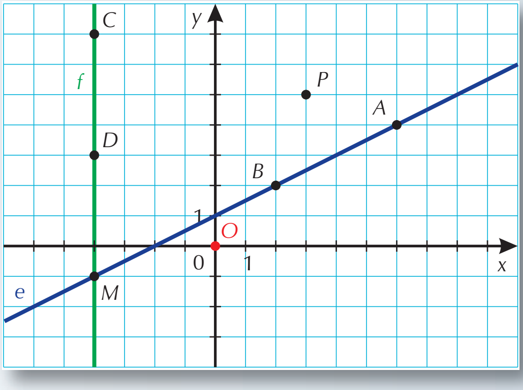
A sík pontjait egyszerűen ábrázolhatjuk a **derékszögű koordináta-rendszerben**. A korábban tanult módon tetszőleges *P* pont helyzetét egyértelműen jellemezhetjük a **koordinátáival**. A *P* pont első koordinátája *P*-nek az *y* tengelytől vett előjeles távolsága, míg második koordinátája az *x* tengelytől vett előjeles távolsága.

A derékszögű koordináta-rendszert nevezik Descartes-féle koordináta-rendszernek is. Az elnevezés René Descartes (1596–1650) francia matematikus, fizikus és filozófus nevét őrzi.

2. példa

Az ábráról leolvashatjuk az egyes pontok koordinátáit:

$A(6; 4)$, $B(2; 2)$, $C(-4; 7)$, $D(-4; 3)$, $M(-4; -1)$, $P(3; 5)$, $O(0; 0)$. (Ez utóbbi pont az **origó**.)



A derékszögű koordináta-rendszerben nemcsak pontokat adhatunk meg, hanem egyszerűbb alakzatokat is jellemezhetünk. Például az ábrán látható *e* egyenes egyenlete $y = \frac{1}{2}x + 1$. (Vagyis az egyenesen pontosan azok a pontok helyezkednek el, amelyek koordinátáira az $y = \frac{1}{2}x + 1$ összefüggés teljesül.) Hasonlóan az *f* egyenes egyenlete $x = -4$.

Fogalmak, név
pont;
origó;
számegyenes;
koordináta;
koordináta-rendszer;
intervallum
(zárt, nyílt);
Descartes.

FELADATOK

1. K1 Berajzoltuk a számegyenesen a 3 nevezőjű törteket. Melyik van legközelebb a $\frac{13}{19}$-hez?

Először tippeljétek meg az eredményt és csak utána kezdjetek el számolni! Adjatok fel egymásnak hasonló feladatot! Akár versenyezni is lehet, ki találja meg gyorsabban a keresett számot.

2. K1 Az $\frac{5}{4}$ és a $\frac{9}{4}$ közé eső szakaszt hét egyenlő részre osztjuk, hat további pont beiktatásával. Melyik számnak felel meg ezek közül a $\frac{7}{5}$-höz legközelebbi pont?

3. K2 Keressük meg a számegyenesen azt a számot, aminek a –2-től, az 5-től és a 9-től mért távolságainak az összege a lehető legkisebb!

4. K1 Ábrázoljuk az $A =]-\infty; -6]$, $B = [-4; -3]$, $C =]-1; 1[$, $D =]2; 3]$, $E = [4; 6[$ és $F = [7; \infty[$ intervallumokat a számegyenesen!

5. K2 Tekintsünk három intervallumot: $A = [-50; 55]$, $B =]-13; 77[$, $C = [22; 82[$. Hány egész szám van a $\{-100; -99; -98; \dots; 100\}$ halmazban, amely az intervallumok közül

a) csak *A*-nak eleme;
b) pontosan egynek az eleme;
c) legfeljebb kettőnek az eleme;
d) legalább kettőnek az eleme;
e) *B*-nek nem eleme;
f) *B*-nek nem eleme (de valamelyik másik intervallumnak igen);
g) eleme *B*-nek és *C*-nek, de *A*-nak nem?

6. K1 Határozzuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat, ha:

a) $A = [1; 5]$, $B = \{1; 3; 7\}$;
b) $A =]-3; 4[$, $B = \{-4; -3; -2\}$!

7. K1 Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak!

a) $x = 2, y = 3$; *b)* $x = 0$; *c)* $y \le 4$; *d)* $x > 0$ és $y > 0$; *e)* $x \ge 0$ vagy $y \ge 0$.

8. K2 Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak!

a) $-5 \le x < -1$; *b)* $4 < x < 7$ és $2 \le y \le 10$; *c)* $x + y = 0$; *d)* $y = 2x - 1$;
e) $y < 2x - 1$; *f)* $y = 2x - 1$ és $-2 < x < 3$; *g)* $x \cdot y \ge 0$; *h)* $x^2 - y^2 = 0$.

9. E1 Adjunk meg három olyan ponthalmazt, amelyekre teljesül az alábbi feltételek mindegyike!

1. A halmazok elemszáma végtelen.
2. Bármely két halmaznak végtelen sok közös eleme van.
3. A három halmaz metszete üres halmaz.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **163; 196–204; 206.**

Idézet

„Gondolkozzék a végtelenről, borzongjon meg tőle, s hajtson fejet előtte."

(Bartók Béla)

8. NEVEZETES PONTHALMAZOK

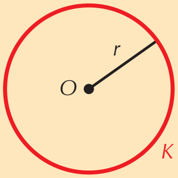
Az alábbiakban néhány nevezetes ponthalmaz fogalmát ismételjük át. Ezekkel a ponthalmazokkal a gyakorlatban gyakran találkozhatunk, erre a későbbiekben több példát is mutatunk.

ADOTT PONTTÓL MEGADOTT TÁVOLSÁGRA LÉVŐ PONTOK HALMAZA

Karcsi kecske 10 méteres kötéllel van kikötve az udvaron. Zsuzsi tudni szeretné, hova ültetheti a virágait, ha nem akarja, hogy Karcsi azokat lelegelje.

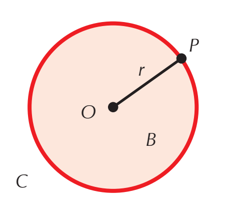
Világos, hogy bármelyik irányba ültethet, csak 10 méternél nagyobb legyen a távolság a rúd, ahova Karcsit kikötötték, és a virág között.

Egy megadott ponttól megadott távolságra levő pontok halmazát a síkon körvonalnak (vagy egyszerűen körnek) nevezzük. A körön belüli pontok az adott távolságnál kisebb távolságra (közelebb), a körön kívüli pontok az adott távolságnál nagyobb távolságra (messzebb) vannak a megadott ponttól.



A K körvonal pontjait megadhatjuk halmazelméleti jelölésekkel is. Ha az S síkban lévő, r sugarú kör középpontja O, akkor a P pont pontosan akkor van rajta a körvonalon, ha $OP = r$, azaz $K = \{P \in S | OP = r\}$.

A körlemez B pontjainak halmaza $\{B \in S | OB \le r\}$; a körön kívül lévő C pontok halmaza pedig $\{C \in S | OC > r\}$. A definíció térbeli általánosítása: a térben adott ponttól ugyanakkora távolságra lévő pontok halmazát gömbfelületnek (vagy egyszerűen gömbnek) nevezzük.

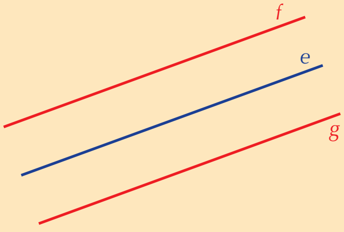


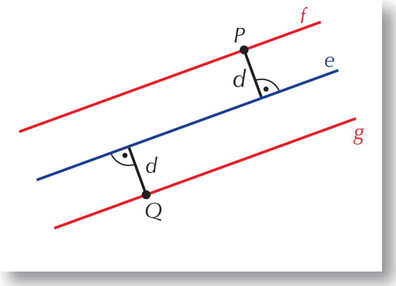
ADOTT EGYENESTŐL MEGADOTT TÁVOLSÁGRA LÉVŐ PONTOK HALMAZA

Bundás kutya 4 méteres póráza a kerítés mellett rögzített módon csúszkálhat, így végigszaladhat az egyenes kerítés mellett. Zsuzsi nem szeretné, ha a kutya összeugrálná a virágait.

Ebben az esetben arra kell vigyáznia, hogy a virágok sehol ne legyenek közelebb a kerítéshez 4 méternél. Ha a kerítés nem akadályozná meg, hogy a kutya kinn is szaladgáljon, a túloldalon is eltávolodhatna 4 métert. Ennek geometriai megfogalmazása:

Egy megadott egyenestől megadott távolságra levő pontok halmaza a síkon egy, az adott egyenessel **párhuzamos egyenespár**.





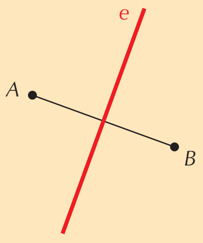
Halmazelméleti jelölésekkel:

A síkban az e egyenestől ugyanakkora, d távolságra lévő pontok halmaza az e-vel párhuzamos f és g egyenes. Ha P és e távolsága d, akkor $P \in (f \cup g)$.

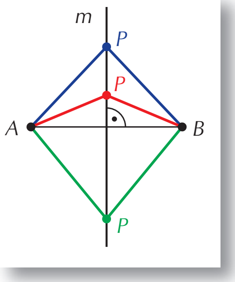
A keresett pontok halmaza a térben az e tengelyű (végtelen) hengerfelület.

KÉT ADOTT PONTTÓL EGYENLŐ TÁVOLSÁGRA LÉVŐ PONTOK HALMAZA

Szerkesszünk két ponton – melyek távolsága 6 cm – átmenő 2 cm; 3 cm; 4 cm; R sugarú kört! Hány megoldás van? Hol lehet a középpont? Az első esetben nincs ilyen kör, a másodikban egy kör van, és ha $R > 3$ cm, akkor két kör van. Világos, hogy a középpont egyenlő távolságra van a két megadott ponttól.



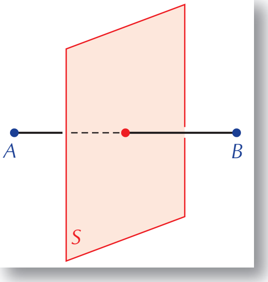
Két adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két pont által meghatározott **szakasz felezőmerőlegese**.



Halmazelméleti jelölésekkel:

Ha az S síkban lévő AB szakasz felezőmerőlegese m, akkor a P pont pontosan akkor van rajta az m egyenesen, ha $PA = PB$. Azaz: $m = \{P \in S \mid PA = PB\}$.

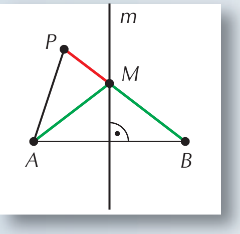
A tétel térbeli általánosítása: a térben az A és B pontoktól ugyanakkora távolságra lévő pontok halmaza az AB szakaszt merőlegesen felező sík.



1. példa

Bizonyítsuk be, hogy az m által meghatározott két félsíkra igaz, hogy az A-t tartalmazó félsík pontjai A-hoz, a B-t tartalmazó félsík pontjai B-hez vannak közelebb!

Megoldás

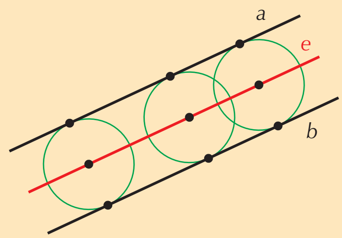


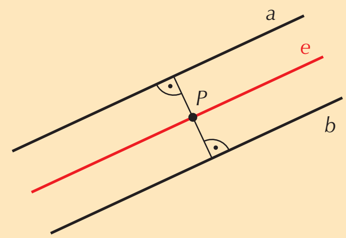
Vegyünk fel egy P pontot az A-t tartalmazó félsíkban. Ekkor PB metszi a szakaszfelező merőlegest, jelöljük a metszéspontot M-mel. $PB = PM + MB = PM + MA$, mivel A és B egyenlő távol van M-től. A háromszög-egyenlőtlenség miatt azonban $PM + MA > PA$, és ezt akartuk bizonyítani.

KÉT ADOTT EGYENESTŐL EGYENLŐ TÁVOLSÁGRA LÉVŐ PONTOK HALMAZA

a) Vegyünk fel **két párhuzamos egyenest**. Mi azon körök középpontjainak halmaza, amelyek mindkét egyenest érintik? Ezek a középpontok egyenlő távolságra vannak a két egyenestől.

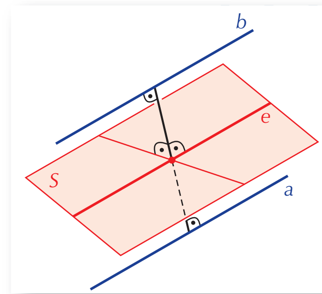
Két adott párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a **két egyenes középpárhuzamosa**.





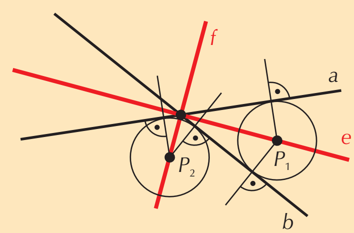
Halmazokkal: Az *a* és *b* párhuzamos egyenesektől ugyanakkora távolságra lévő *P* pontok halmaza a síkban az e **középpárhuzamos**. Ha tehát $Pa = Pb$, akkor $P \in e$.

A megfelelő térbeli ponthalmaz az e egyenesre illeszkedő, az *a* és *b* síkjára merőleges sík.



b) Nézzük azt az esetet, ha a **két egyenes metszi egymást**. Szerkesszünk olyan kört, aminek a sugara 3 cm, és mindkét egyenest érinti. Hány megoldás van?

Két adott metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két egyenes két **szögfelező egyenese**.



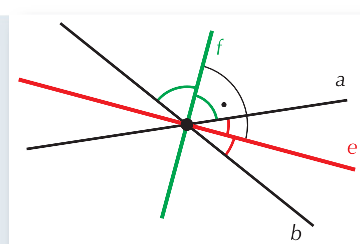
Hasonlóan az e és *f* egyenesre illeszkedő, az *a* és *b* síkjára merőleges síkok pontjai adják a megfelelő térbeli ponthalmazt.

A halmazok körében használt jelölésekkel:

Az *a* és *b* metsző egyenesektől ugyanakkora távolságra lévő *P* pontok halmaza az e és *f* **szögfelező** egyenesek. Ha tehát $Pa = Pb$, akkor $P \in (e \cup f)$.

2. példa

Bizonyítsuk be, hogy a két szögfelező egyenes merőleges egymásra!



Megoldás

Mivel az egyik szögfelező az egyik szöget, a másik pedig a mellékszögét felezi, ezért az általuk bezárt két félszög összege valóban 90°.

Fogalmak
kör;
gömb;
felezőmerőleges;
szögfelező;
középpárhuzamos;
szükséges, elégséges feltétel.

Fontos megjegyeznünk, hogy a ponthalmazokat meghatározó **feltételek** egyszerre **szükségesek és elégségesek** is. Például az 1. esetben a kétirányú állítás:

a) Ha egy P pont az O ponttól r távolságra van, akkor P rajta van a K (O középpontú, r sugarú) körön.

Fordítva:

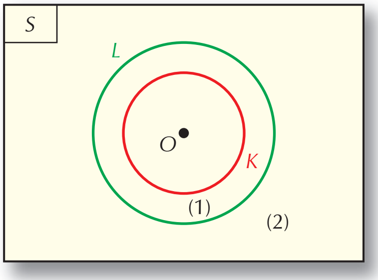
b) Ha egy P pont a K (O középpontú, r sugarú) körön van, akkor a PO távolság r.

Valójában két halmaz egyenlőségét állítjuk. Az A = {az O ponttól r távolságra lévő pontok} és B = {az O középpontú, r sugarú kör pontjai} halmazok egyenlősége az *a)* és *b)* állítások $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ tartalmából következik.

FELADATOK

1. K1 A síkon adott az O pont. Határozzuk meg a síkon azon P pontok halmazát, amelyekre
a) $OP \leq 12$ cm; *b)* 8 cm $< OP \leq 10$ cm; *c)* $OP > 16$ cm!

2. K1

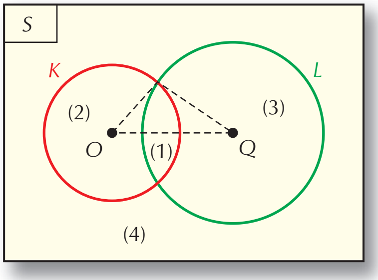


Az S síkon felvett K és L koncentrikus körök középpontja O. Megadjuk a körlemezek pontjait: $K = \{P \in S |\ OP \leq 10 \text{ cm}\}$ és $L = \{P \in S |\ OP \leq 15 \text{ cm}\}$.

a) Határozzuk meg a $K \cap L$, $K \cup L$, $K \setminus L$, $L \setminus K$, $\overline{K}$ halmazokat!

b) Határozzuk meg az ábrán (1)-gyel és (2)-vel jelölt ponthalmazokat! (A határvonal a ponthalmazokhoz tartozik.)

3. K1



Az S síkon felvett K kör középpontja O, sugara 12 cm; az L kör középpontja Q, sugara 16 cm; az OQ távolság 24 cm. Határozzuk meg az ábrán látható (1), (2), (3), (4) tartományokat! (A határvonal nem tartozik a halmazokhoz.)

4. K1 Adott egy P pont és egy rá nem illeszkedő e egyenes. Szerkesszünk olyan pontokat a síkon, amelyek az egyenestől 2 cm-re, a ponttól 3 cm-re vannak!

5. K1 Adott két egyenes, a és b, valamint egy P pont. Szerkesszünk olyan pontokat a síkon, amelyek egyenlő távolságra vannak a két egyenestől és 4 cm-re a ponttól!

6. K1 Adott két pont, A és B, és egy e egyenes. Szerkesszünk olyan pontokat a síkon, amelyek egyenlő távolságra vannak a két ponttól és 4 cm-re az egyenestől!

7. K1 Adott két pont, A és B, és egy e egyenes. Szerkesszünk olyan pontokat a síkon, amelyek az A ponttól 3 cm-re, a B-től 4 cm-re, az egyenestől pedig 5 cm-re vannak!

8. K1 Az ABC háromszög AB oldalán szerkesszünk olyan pontot, amelyik a másik két oldalegyenestől egyenlő távolságra van!

9. K2 Az ABC háromszög síkjában szerkesszünk olyan pontot, amelyik az AC és BC oldalegyenesektől, valamint az A és B pontoktól is egyenlő távolságra van!

10. K2 Adott két szakasz, AB és CD. Szerkesszünk olyan P pontot, amelyikre az ABP és a CDP egyenlő szárú háromszögek alapjai AB és CD!

11. K1 Szerkesszünk két adott ponton, A-n és B-n átmenő, adott r sugarú kört!

12. K2 Vegyünk fel egy 5 cm sugarú kört. Szerkesszük meg azoknak a köröknek a középpontjait, amelyek érintik a megadott kört, és a sugaruk 1 cm; 4 cm; 6 cm!

13. K2 Határozzuk meg egy négyzet belsejében azon P pontok halmazát, amelyek közelebb vannak a négyzet középpontjához, mint a csúcsaihoz!

14. E1 Egy P pont és egy H alakzat távolsága megegyezik a P és H pontjainak távolságai közül a legkisebbel, amennyiben létezik. Hol vannak azok a pontok a síkon, amelyek adott távolságra vannak
a) egy A kezdőpontú félegyenestől;
b) egy adott AB szakasztól?

15. K2 Vegyük fel a síkon az A és B pontokat úgy, hogy távolságuk 12 cm legyen, s jelöljük az AB szakasz felezőmerőlegesét f-fel. Hány olyan P pont van a síkon, amelyre
a) $PA = 10$ cm, $PB = 4$ cm; *b)* $PA = 8$ cm, $PB = 4$ cm; *c)* $PA = 16$ cm, $PB = 4$ cm;
d) $PA = 16$ cm, $Pf = 8$ cm; *e)* $PA = 14$ cm, $Pf = 8$ cm; *f)* $PA = 3$ cm, $Pf = 8$ cm;
g) $PA = 1$ cm, $Pf = 8$ cm; *h)* $PA = 8$ cm, $Pf = 3$ cm; *i)* $PA = 3$ cm, $Pf = 3$ cm?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **172–222.**

Pályakép

Név: Kinga
Lakhely: Budapest
Végzettség: vegyészmérnöki BSc (Bachelor of Science, alapdiploma)
Jelenlegi beosztás: BSc hallgató
Milyen tantárgyakból felvételizett, tanult emelt szinten? Matematika, kémia, angol.

Sziasztok!

Harmadéves vegyészmérnök-hallgatóként elengedhetetlen volt számomra a gimnáziumi matematika-tananyag ismerete. Az egyetemi kurzusok ugyanis erre építve tárgyalják a magasabb szintű ismereteket. A matematikafeladatok megoldása kitartást, kreativitást és precizitást kíván, fejleszti a logikus gondolkodást. Ezek pedig a mérnöki tanulmányok és munka során nagyon fontos készségek.

A pálya, amit választottam, nagyon sokszínű. A vegyészmérnököknek köszönhetjük az új motorhajtóanyagokat, melyek forradalmasították a közlekedést, és így lehetővé vált az űrutazás is. Az anyagtudományi kutatások során a vegyészek különleges anyagokat állítanak elő: a fényre sötétedő üvegtől, a hatóanyagát megfelelő idő alatt leadó gyógyszerkapszulán át, a mágnessel mozgatható polimergélekig. Tevékenykednek vegyészmérnökök a kémiai analitika területén is, például rákkeltő és egyéb mérgező anyagokat mutatnak ki környezeti, vagy élelmiszer-ipari mintákban. Szinte hihetetlen, hogy a kémiai és matematikai ismeretek alkalmazásával milyen sokféle probléma oldható meg!

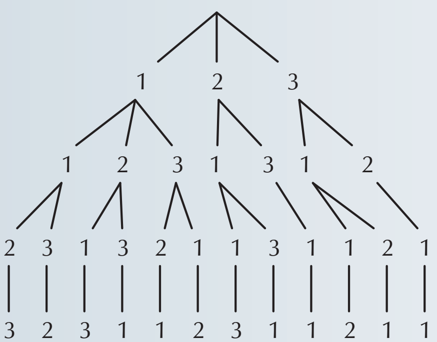
9. KOMBINATORIKAI ALKALMAZÁSOK, GRÁFOK

Az összeszámolási feladatokat gyakran szemléltethetjük táblázattal, halmazokkal, gráfokkal vagy egyéb módon, erre már korábban is láttunk példákat. A leckében néhány további példát mutatunk a kombinatorika alkalmazásaira és a szemléltetési lehetőségekre.

1. példa

Az 1, 1, 2, 3 számkártyákból hány négyjegyű számot készíthetünk?

Megoldás



A lehetséges eseteket egyszerű gráffal adhatjuk meg. Erről leolvashatjuk, hogy 12 darab megfelelő szám van.

2. példa

„Sokszor” feldobunk két dobókockát. A dobások kb. hányadrészében lesz a két dobott szám összege 4-gyel osztható?

Megoldás

A lehetséges dobáspárokat egy 6×6-os táblázattal szemléltethetjük. Ebben minden dobáspárnak megfeleltetünk egy cellát, például amikor az első dobás 2-es és a második 3-as, ahhoz a 2. sor 3. cellája tartozik.

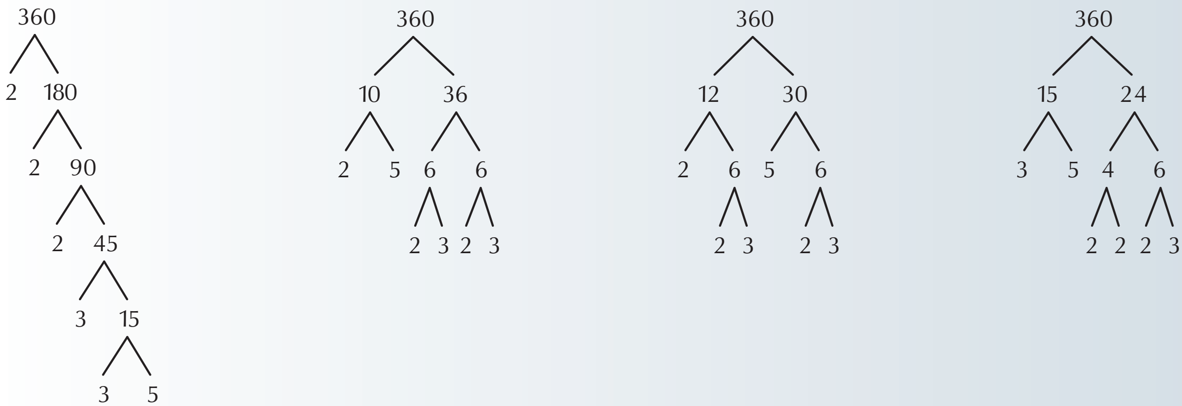
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

A táblázatból látható, hogy 36 kimeneteli lehetőség van, és közülük 9 esetben lesz a dobott számok összege 4-gyel osztható. Mivel mindegyik dobáspár egyforma eséllyel következik be, a keresett arány $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

3. példa

A pozitív egész számok prímtényezős felbontását gyakran szemléltetjük egy egyszerű gráffal. Készítsük el a 360 néhány prímtényezős felbontásának a gráfját!

Megoldás



Látható, hogy a felbontást többféleképpen is elvégezhetjük. Azonban akármilyen sorrendben is írjuk fel az osztókat, észrevehetjük, hogy mindegyik ábrának van egy közös tulajdonsága. Vajon mi lehet ez?

4. példa

Egy összejövetelen hét személy találkozik. Mindegyiküktől megkérdeztük, hány ismerőse van a többiek között. Lehetséges-e, hogy az alábbi válaszokat kaptuk? (Minden ismeretség kölcsönös.)

a) 6, 5, 3, 2, 2, 2, 0;
b) 6, 6, 4, 3, 2, 2, 1;
c) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5;
d) 6, 5, 3, 2, 2, 2, 2.
e) Ha mindenki ismer mindenkit, akkor mennyi az ismeretségek száma?

Megoldás

Az adatokat modellezhetjük egy hétpontú gráffal. Ekkor a személyeknek a gráf csúcsai felelnek meg, amelyben két csúcsot akkor kötünk össze éllel, ha a megfelelő személyek ismerik egymást.

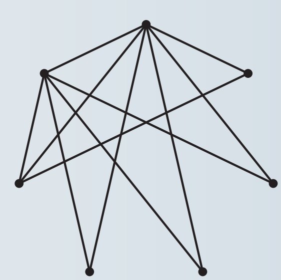
Az *a)–d)* válaszok közül csak a *d)* eset lehetséges. Indoklások:

a) Nem lehet egyszerre 6 és 0 ismeretség is a társaságban. (Ha valaki mindenkit ismer, akkor mindenkinek van ismerőse.)

b) Ha 2 személy ismer mindenkit, akkor mindenkinek legalább 2 ismerőse van.

c) A gráfban az egyes csúcsokból kiinduló élek összege $7 \cdot 5 = 35$. Ekkor minden élt kétszer számoltunk, így az élek száma $\frac{35}{2}$ lenne, de ez nem lehetséges.

d) Ez az eset már lehetséges, egy megfelelő gráf látható az ábrán.



e) A gráf éleit számoljuk meg a *c)* megoldás módszerével. Minden csúcsból 6 él indul ki, az egyes csúcsokból kiinduló élek összege $7 \cdot 6 = 42$. De így minden élt kétszer számoltunk, ezért az élek (és az ismeretségek) száma $\frac{42}{2} = 21$.

5. példa

Bergengóciában 3 és 5 petákos pénzérmék vannak forgalomban, ezek segítségével azonban sajnos nem minden érték fizethető ki. (Például nem fizethető ki az 1, 2 vagy 4 peták sem, ha nem engedjük meg a nagyobb pénzösszegből történő visszaadást.) Vajon melyik az a legnagyobb érték, ami nem fizethető ki?

Megoldás

Látható, hogy a 3 többszörösei mind kifizethetők, ezért a pozitív egész számok halmazát három részre bontjuk attól függően, hogy a számok 3-mal osztva mennyi maradékot adnak.

Ha az n szám maradéka 0, akkor felírható $n = 3k$ alakban (k pozitív egész szám), és ekkor k darab 3 petákos érmével kifizethető ez az érték.

Ha az n szám maradéka 1, akkor $n = 3k + 1$ alakba írható. Ezen számok halmaza $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$ A legkisebb kifizethető érték a 10 $(= 5 + 5)$ peták. A halmaz ennél nagyobb elemei már mind kifizethetők, mert 10-nél 3 többszörösével nagyobbak.

Végül ha az n szám maradéka 2, akkor $n = 3k + 2$ alakú. Ekkor a számok halmaza $\{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}$. Innen a legkisebb kifizethető érték az 5 peták. A halmaz ennél nagyobb elemei már szintén mind kifizethetők, mert 3 többszörösével nagyobbak 5-nél.

A legnagyobb nem kifizethető érték tehát a 7 peták. (Azt is megkaptuk, hogy az 1, 2, 4, 7 értékeken kívül minden más kifizethető.)

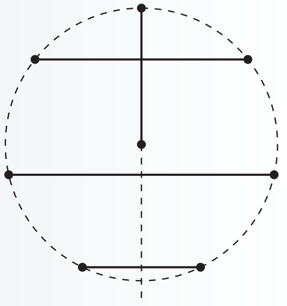
6. példa

Egy középiskolás labdarúgó bajnokságban nyolc csapat vesz részt. A bajnokságot körmérkőzéses formában bonyolítják le, mindenki mindenkivel egyszer játszik. A fordulókat hétvégén rendezik, és minden hétvégén minden csapat legfeljebb egy mérkőzést játszhat.

Meg lehet-e szervezni a bajnokságot úgy, hogy csak 7 hétvégén legyen mérkőzés?

Megoldás

Összesen $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ mérkőzésre kerül sor. Mivel egy-egy hétvégére legfeljebb 4 mérkőzés szervezhető, legalább 7 hétvégére szükség van. Akkor lehet tehát 7 hétvégére megszervezni a fordulókat, ha minden hétvégén mind a nyolc csapat játszik egymással.



Ismét alkalmazhatjuk a gráfmodellt. Egy szabályos hétszög csúcsait és középpontját feleltetjük meg a csapatoknak, a csúcsok közötti szakaszokat pedig a mérkőzéseknek. Mivel a szabályos hétszögnek hét szimmetriatengelye van, az egyes fordulókat a tengelyek segítségével állapíthatjuk meg.

Egy fordulóban a „középső” csapat valamelyik „kerületi” csapattal játszik (ez a mérkőzés felel meg a tükörtengelynek), a másik három mérkőzést pedig az erre az egyenesre merőleges átlók adják meg (ábra). Ezt a tengelyt még hatszor elforgatva egy megfelelő lebonyolítást kapunk: minden csapat mindegyikkel játszik, és pontosan egyszer.

FELADATOK

1. K2 Egy zászló három vízszintes sávból áll. Hányféleképpen színezhető ki a három sáv négy színnel (piros, fehér, kék, sárga), ha egy-egy szín többször is használható, és
a) a szomszédos sávok különböző színűek;
b) legalább egy sáv sárga;
c) az alsó vagy felső sáv sárga;
d) a két szélső sáv különböző színű?
(Egy-egy sávot egyszerre csak egy színnel színezünk.)

2. K2 A koordinátasíkon az x tengelyen felvettünk 4 pontot, az y tengelyen 5 pontot, végül felvettünk a síkon 6 pontot úgy, hogy a pontok közül semelyik három nincs egy egyenesen. Legfeljebb hány egyenest kapunk, ha összekötünk minden pontot minden ponttal?

3. K2 Legfeljebb hány metszéspontja lehet 10 egyenesnek, ha közülük 4 párhuzamos?

4. K2 Kijelölünk két párhuzamos egyenes egyikén 10, a másikon 8 darab pontot. Hány háromszög van, melynek csúcsai az adott pontok közül valók?

5. K2 A kockapóker játékban egyszerre 5 dobókockával dobunk. Hányféleképpen sikerülhet „pókert” dobnunk? (Ekkor négy kockán azonos érték van, az ötödik dobás ezektől különbözik.)

6. E1 A 6. példa bajnokságán most 9 csapat vesz részt. Legalább hány hétvégére van szükség a bajnokság lebonyolítására?

7. K2 Az 5. példa feltételeit (kifizetések Bergengóciában) annyiban módosítjuk, hogy fizetéskor visszaadás is lehetséges. (Ha például $5 + 5 + 5 = 15$ petákkal fizetünk, és visszakapunk 3-at, akkor összességében $15 - 3 = 12$ peták a kifizetés.) Igaz-e, hogy így már minden (pozitív egész) érték kifizethető?

8. E2 Módosították Bergengóciában az érméket, most csak 5 és 7 petákos érmék vannak forgalomban. Elemezzük a kifizetési lehetőségeket! (Milyen értékek fizethetők ki; módosulnak-e ezek, ha lehetséges visszaadás is stb.)

9. E1 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Hány négyjegyű pozitív egész szám van, amely 3-mal osztható, és van benne 6-os számjegy?

„Megoldás” (hibás): A háromjegyű, 3-mal osztható számokat kipótoljuk egy 6-ossal.
Esetszétválasztást végzünk:

A nem 0-val kezdődő háromjegyű, 3-mal osztható számok száma $\frac{9 \cdot 10^2}{3} = 300$. Most a félretett 6-ost 4 helyre írhatjuk, így innen $4 \cdot 300 = 1200$ esetet kapunk.

Ha 0-val kezdődik a „háromjegyű” szám, akkor 000-tól 099-ig 100 darab szám van, ezek közül 34 osztható 3-mal. Itt kötelező az első helyre írni a 6-ost.

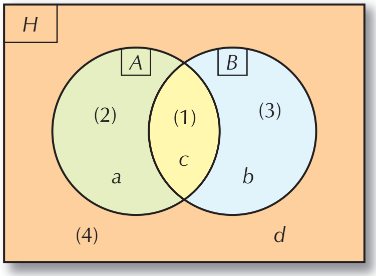
Összesen tehát $1200 + 34 = 1234$ megfelelő szám van.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 86; 119; 349; 364; 369; 371.

10. HALMAZOKRÓL ÉS SZÁMOKRÓL

A LOGIKAI SZITAFORMULA



A 6. lecke 2. példájában említettük a logikai szitaformulát. Ezzel az eljárással az összeszámolási feladatokban mintegy „kiszitáljuk” a többször számolt eseteket.

Jelöljük az ábra szerinti (1), (2), (3), (4) tartományok elemszámát rendre *c*, *a*, *b*, *d* betűkkel. Ekkor $|A \cup B| = a + b + c$, $|A| = a + c$, $|B| = b + c$, $|A \cap B| = c$. A kétváltozós logikai szitaformula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ alakú, s ez helyes eredményt ad: $(a + b + c) = (a + c) + (b + c) - c$ valóban igaz.

(A módszer egy másik alkalmazása az alábbi példa második megoldása.)

1. példa

Hány olyan négyjegyű természetes szám van, amely tartalmaz 1-es és 2-es számjegyet is?

Megoldás

Első megoldás:

Legyen *H* a négyjegyű természetes számok halmaza, s ezen belül *A* = {1-est tartalmazó négyjegyű természetes számok}, *B* = {2-est tartalmazó négyjegyű természetes számok}. Az előző Venn-diagramot tekintve a feladat $|A \cap B| = c$ meghatározása.

Amit tudunk:

1. Négyjegyű természetes szám 9999 – 999 = 9000 darab van.

2. 1-es számjegyet nem tartalmazó négyjegyű természetes szám $8 \cdot 9^3 = 5832$ darab van. (Egyik helyiértékre sem írhatunk 1-est, és az első számjegy 0 sem lehet.)

3. 2-est nem tartalmazó négyjegyű természetes szám ugyanennyi van: $8 \cdot 9^3 = 5832$ darab.

4. Sem 1-es, sem 2-es számjegyet nem tartalmazó négyjegyű természetes szám $7 \cdot 8^3 = 3584$ darab van. (Egyik helyiértékre sem írhatunk 1-est és 2-est, s az első számjegy 0 sem lehet.)

A négy információ algebrai alakja a következő:

1. $a + b + c + d = 9000$, 2. $b + d = 5832$, 3. $a + d = 5832$, 4. $d = 3584$.

Ezekből az egyenletekből kell *c* értékét meghatározni.

Mivel négy egyenlet adott négy ismeretlennel, a megoldás a „hagyományos” úton is történhet. A 4. egyenletből ismerjük *d*-t, ezt visszahelyettesítve a 2. és 3. egyenletbe, meghatározható *b* és *a* értéke, s végül az 1. egyenletből megkapjuk *c*-t.

Második megoldás:

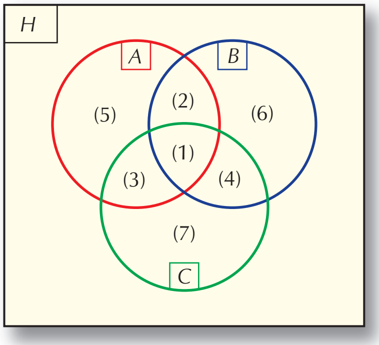
Egy másik elegáns megoldási lehetőség a komplementer leszámlálása és a szitaformula alkalmazása.

Ha az összes négyjegyű természetes számból kivonjuk az 1-est nem tartalmazó számokat, majd kivonjuk a 2-est nem tartalmazókat is, akkor azokat, amelyek sem 1-est, sem 2-est nem tartalmaznak, kétszer vontuk ki. Az így kapott különbséghez ezek számát egyszer hozzá kell adni, s ekkor a sem 1-est, sem 2-est nem tartalmazó számokat is pontosan egyszer számoltuk. Képlettel: $|H| - |\overline{A}| - |\overline{B}| + |\overline{A} \cap \overline{B}| = |A \cap B|$, vagy az egyes tartományok elemszámaival: $(a + b + c + d) - (b + d) - (a + d) + d = c$ valóban.

Eredmény: 9000 – 5832 – 5832 + 3584 = 920.

Három változó esetén bonyolultabb a szitaformula felírása. Ha a feladat $|A \cup B \cup C|$ meghatározása, akkor az $|A|+|B|+|C|$ összegben a közös részek elemszámait kétszer, illetve háromszor számoltuk.

Vizsgáljuk meg az $|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|$ összeget!



Az (5), (6), (7) tartományok elemszámát egyszer számoltuk, ez rendben van.

A (2) tartomány elemszámát $|A|+|B|$ miatt kétszer hozzáadtuk az összeghez, $|A \cap B|$ miatt egyszer levontuk az összegből. Vagyis egyszer számoltuk, éppúgy, mint a (3) és (4) tartományokat.

Az (1) tartomány elemszámát háromszor számoltuk, és háromszor vontuk le; tehát még egyszer hozzá kell adnunk az összeghez.

Az így kapott formula:

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|,$$

a háromváltozós logikai szitaformula.

Hasonlóan adhatjuk meg a szitaformulát háromnál több változó esetén is.

AZ *n* ELEMŰ HALMAZ RÉSZHALMAZAINAK A SZÁMA

Kiegészítő anyag

A 3. lecke 5. példájában láttuk, hogy a $H_0 = \{\ \}$, $H_1 = \{a\}$, $H_2 = \{a, b\}$, $H_3 = \{a, b, c\}$ halmazoknak rendre 1, 2, 4, 8 részhalmazuk van. Az eredmények alapján azt a sejtést fogalmazhatjuk meg, hogy ha egy H halmaz elemszáma n, akkor H részhalmazainak a száma 2^n ($n \in \mathbf{N}$). Hogyan tudnánk igazolni ezt a sejtést?

Egy egyszerű bizonyítás alapja a „kódolási technika”.

Legyen $H = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, s készítsünk egy táblázatot, amelyben felsoroljuk H részhalmazait. Az első sorba felírjuk az $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ elemeket, a következő sorokban pedig megadjuk a részhalmazokat. Minden egyes sorban a megfelelő elem alá 1-est írunk, ha az elem az adott részhalmazhoz tartozik, és 0-t, ha nem.

Például ebben a táblázatban $n = 5$ esetén négy részhalmazt soroltunk fel: $A = \{a_1, a_3, a_4\}$, $B = \{a_3\}$, $C = \{a_2, a_3, a_5\}$, $D = \{a_1, a_3\}$.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
A	1	0	1	1	0
B	0	0	1	0	0
C	0	1	1	0	1
D	1	0	1	0	0

A H halmaz esetén minden 0-1 jelsorozat meghatároz egy részhalmazt, s minden részhalmazt egyetlen jelsorozattal (kóddal) adhatunk meg. A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, a H halmaznak tehát pontosan annyi részhalmaza van, ahány különböző n hosszúságú, 0 és 1 számjegyekből álló kód készíthető.

A kódok számát pedig már könnyű meghatározni. A kód első számjegye 2-féle lehet (0 vagy 1), a második számjegy ettől függetlenül ismét 2-féle, a harmadik szintén 2-féle és így tovább. A szorzási szabály miatt n hosszú, 0-1 számjegyekből álló számsorozat összesen 2^n-féle készíthető, s ezzel igazoltuk a sejtést.

Tétel

Az n elemű halmaz részhalmazainak a száma 2^n.

(A képlet az üres halmaz esetén is helyes eredményt ad: az üres halmaz részhalmazainak a száma $2^0 = 1$.)

AZ IRRACIONÁLIS SZÁMOK FELFEDEZÉSE (Olvasmány)

Az irracionális számok elméletével az ókorban legmélyebben a görög matematikusok foglalkoztak, a Kr. e. V. században. (Vannak hasonló korú mezopotámiai és indiai írásos emlékek is.) Felfedezték, hogy a négyzet átlója és oldala nem összemérhető mennyiségek, azaz ha a négyzet oldala a, az átlója d hosszúságú, akkor nincs olyan egység, amelynek a és d is egész számú többszöröse lenne. (Mai szóhasználattal úgy mondanánk, hogy a és $d = \sqrt{2}a$ legalább egyike irracionális szám.)

Ez az észrevétel ugyanis éppen azt jelenti, hogy ha a racionális szám, akkor d nem az. Ha ugyanis a és d egyaránt racionális szám lenne, akkor találnánk olyan (racionális) számot, amelynek a és b is egész számú többszöröse volna. (Lásd a 2. lecke 8. feladatát.)

A felfedezés megdöbbentette a görögöket, akik szilárdan hittek a számok mindenhatóságában.

A **racionális** szó olyan számokat jelöl, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként. A *'ráció'* két mennyiség viszonyát, arányát jelenti. Az **irracionális** jelentése tehát 'nem racionális', azaz két olyan mennyiségről van szó, amelyek aránya *nem* másik két egész szám egymáshoz való viszonya.

A racionális szó másik – ma is használt – jelentése 'észszerű, valószerű'. Egyes kutatók szerint az összemérhetetlen arány felfedezésekor a görögök annyira hitetlenkedtek, annyira nem akarták elfogadni ezen számok létezését, hogy az irracionális szót ebben az 'észszerűtlen' jelentésben is használták. Számukra az irracionális számok tehát értelmezhetetlenek, felfoghatatlanok voltak. (Ez a legenda nem bizonyítható.)

TIZEDES TÖRTEK ÉS RACIONÁLIS SZÁMOK (Olvasmány)

A tankönyv 2. leckéjében megmutattuk, hogy minden racionális szám felírható vagy véges, vagy végtelen, de szakaszos tizedes tört alakban. Vajon igaz a tétel megfordítása is? Azaz igaz-e, hogy minden véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört racionális szám? (És ha az állítás igaz, hogyan állíthatjuk elő a tizedes törtből a közönséges tört alakot?)

A véges tizedes törtek nem okoznak nagy problémát, mert a 10 megfelelő hatványával bővítve közönséges törtet kapunk. Például $1,234 = \frac{1234}{10^3}$, $-3,25301 = -\frac{325\,301}{10^5}$ stb.

A végtelen szakaszos tizedes törtek is felírhatók két egész szám hányadosaként. Az eljárást egy konkrét példa segítségével illusztráljuk.

Tekintsük az $x = 8,65123123123\ldots = 8,65\overline{123}$ végtelen szakaszos tizedes törtet. A szakasz hossza (azaz az ismétlődő számjegyek száma) 3. Észrevehetjük, hogy ha x-et 10^3-nal szorozzuk, akkor az így kapott szám, $1000x$ „vége” ugyanaz, mint x végződése. Ha tehát képezzük az $1000x - x$ különbséget, kivonáskor „kiesnek” a végtelen sokszor szereplő, egyforma szakaszok.

$1000x - x = 8651,23\overline{123} - 8,65\overline{123} = 8642,58$. Mivel $1000x - x = 999x$, innen $999x = 8642,58$, és így $x = \frac{8642,58}{999} = \frac{864\,258}{99\,900}$.

Sikerült felírnunk az $x = 8,65\overline{123}$ számot két egész szám hányadosaként (persze a kapott tört egyszerűsíthető). Hasonlóan járhatunk el tetszőleges x végtelen szakaszos tizedes tört esetén is: ha a periódus hossza k, akkor 10^k-nal szorozva $10^k x - x$ véges tizedes tört lesz.

A $8,65\overline{123}$ szám így is írható: $\frac{865}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{2}{10\,000} + \frac{3}{100\,000} + \frac{1}{1\,000\,000} + \ldots$ A fenti eljárás során valójában végtelen sok tagból álló összegekkel végeztünk műveleteket. Egyáltalán nem biztos, hogy ezt megtehetjük: a valós számokkal végzett műveleti szabályokat eddig mindig csak véges sok szám esetén alkalmaztuk. Hogy a fenti algoritmus matematikailag helyes eredményt ad (azaz végrehajtható), azt majd a későbbi tanulmányaink során igazoljuk.

„Elrettentésül” álljon itt egy egyszerű példa. Az $x = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ végtelen összeget kétféleképpen határozzuk meg.

Az első zárójelezés eredménye nyilvánvaló: $x = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$.

Szintén nyilvánvaló a második számolás eredménye is: $x = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1$.

A kapott ellentmondás azt mutatja, hogy a véges sok tagra vonatkozó számolási szabályok nem mindig érvényesek, ha végtelen sok taggal dolgozunk. (Ebben a példában az összeg nem zárójelezhető szabadon, a kapott eredmény függ a műveletek elvégzésének a sorrendjétől.)

2. példa

Adjuk meg az $x = 0{,}999\ldots$ számot közönséges tört alakban!

Megoldások

Az előző algoritmust követjük.

$x = 0{,}\dot{9}$; a periódus hossza 1, így $10x = 9{,}\dot{9}$, s $10x - x = 9$. Azaz $9x = 9$, innen $x = 1$. Furcsa eredményt kaptunk: egyszerre teljesül $x = 0{,}\dot{9}$ és $x = 1$. Nincs itt valami ellentmondás?

Nos, az eredmény egyrészt várható volt: $\frac{1}{3} = 0{,}\dot{3}$, így a $3 \cdot 0{,}\dot{3} = 0{,}\dot{9}$ szám értéke valóban 1 kell, hogy legyen. Másrészt észrevehetjük, hogy – bármennyire is igyekszünk – nem tudunk olyan számot megadni, amelyik a $0{,}\dot{9}$ és az 1 közé esik. Márpedig két különböző szám között mindig kell lennie további számnak – ez a valós számok egyik alaptulajdonsága. Egyetlen lehetőségünk maradt: a $0{,}\dot{9} = 1$ egyenlőség elfogadása.

Már eddig is tudtuk, hogy a racionális számok közönséges tört alakja nem egyértelmű: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{-3}{-9}$ stb. Most azt is megállapíthatjuk, hogy a véges tizedes tört alakban felírható racionális számok tizedes tört alakja sem egyértelmű: például $1{,}\dot{9} = 2$ vagy $2{,}34\dot{9} = 2{,}35$.

FELADATOK

1. K2 Egy osztály 27 tanulója közül 16-an beszélnek angolul, 15-en németül és 3-an egyik nyelvet sem beszélik. Hányan beszélik mindkét nyelvet?

2. K2 Egy osztály az iskolai évben három kirándulást szervezett. Az elsőn a tanulók 60%-a, a másodikon 75%-a, a harmadikon pedig 90%-a vett részt. Így 10 tanuló háromszor, a többi pedig kétszer kirándult. Hányan voltak az osztályban?

3. E1 Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely
a) páros vagy 5-tel kezdődik;
b) van benne 0 és 1 számjegy is?

4. E1 Egy városi fizikaversenyen három feladatot tűztek ki. A 77 induló közül az első feladatot 32-en, a másodikat 33-an, a harmadikat 40-en oldották meg hibátlanul. Az első és második feladatra 9, a második és harmadik feladatra 16, az első és harmadik feladatra 13 tanuló adott helyes megoldást. Mindhárom feladat megoldása 5 diáknak sikerült. Hányan nem tudtak egyetlen feladatot sem megoldani?

5. E1 Hány valódi részhalmaza van a következő halmazoknak?
A = {legfeljebb kétjegyű, 20-szal osztható természetes számok};
$B = \{1; 2; 7; 11; 12; 15; -3{,}2; a\}$;
$C = \{23; 25; 27; \ldots; 77\}$.

6. E1 A $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelynek eleme
a) az 1 és a 2;
b) az 1 vagy a 2?

7. E1 Adjuk meg a következő számokat közönséges tört alakban!
a) $A = 3{,}4\dot{2}$; *b)* $B = 5{,}8\overline{23}$; *c)* $C = 1{,}15\overline{854}$; *d)* $D = 1{,}32\dot{7}$; *e)* $E = 2{,}\dot{9}$.

8. K2 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?
Feladat: Egy osztály az iskolai évben három kirándulást szervezett. Az elsőn a tanulók 65%-a, a másodikon 75%-a, a harmadikon pedig 80%-a vett részt. Így 5 tanuló háromszor, a többi pedig kétszer kirándult. Hányan voltak az osztályban?
„Megoldás" (hibás): Az összes kirándulás az osztálylétszám 65% + 75% + 80% = 220%-a, ezért az 5 fő az osztálylétszám 20%-ának felel meg. Az osztálylétszám így $5 \cdot 5 = 25$ fő.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **140–144; 242; 244; 245; 280; 281; 296; 766.**

TUDÁSPRÓBA (Tananyagon kívüli, nem kötelező rész)

Az alábbi feladatok az I. fejezet témaköréhez sorolhatók, végeredményük minden esetben egy vagy több szám. A feladatsor után rövid útmutatást, segítséget is találsz a megoldáshoz. A végeredményeket a 79. oldalon találod meg.

1. Adott két intervallum: $A =]-90; 40]$ és $B =]-30; 70]$.
a) Hány egész számot tartalmaz az $A \cap B$ halmaz?
b) Hány olyan egész szám van, amely legalább az egyik intervallumnak eleme?

2. Adottak az $A = \frac{1}{2}$ és $B = \frac{8}{5}$ pontok a számegyenesen. Hol lehet a C pont a számegyenesen, ha a CB távolság kétszerese a CA távolságnak?

3. Hány olyan legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám van, amely a 3 és 5 közül
a) pontosan az egyik számmal osztható;
b) legfeljebb az egyik számmal osztható?

4. A $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van,
a) ami tartalmaz prímszámot;
b) ami csak prímszámot tartalmaz;
c) amiben a számok szorzata páros? (Az egyelemű halmazok is lehetnek megfelelők, pl. $\{2\}$.)

5. Hány olyan pont van a derékszögű koordináta-rendszerben, amely ugyanakkora távolságra van az x és az y tengelytől, és 4 egység távolságra van az $E(3; 1)$ ponttól?

6. Egy dobókocka 6 lapja közül háromra 1, 2, illetve 3 pöttyöt teszünk, a másik három lapját fehérre, pirosra, illetve kék színűre festjük.
a) Hány olyan hat dobásból álló sorozat van, amelyben először 2-est és ötödszörre fehéret vagy kéket dobunk?
b) Hány olyan hat dobásból álló sorozat van, amelyben először 2-est, ötödszörre fehéret vagy kéket dobunk, és a dobókocka nem esik kétszer ugyanarra a lapjára?

7. Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a teniszpályára, mindegyik fiú kezet fog a többiekkel.
a) Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt?
b) Legutóbb Dani és Ernő együtt érkezett a pályára, a többiek különböző időpontokban érkeztek. Hány különböző sorrendben érkezhettek ezen alkalommal?
c) A fiúk mindig páros mérkőzéseket játszanak, ketten kettő ellen. (Egy páron belül a játékosok sorrendjét nem vesszük figyelembe, és a pálya két térfelét nem különböztetjük meg.) Hány különböző mérkőzés lehetséges?

8. Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy négyszögnek és hat egyenesnek, ha az egyenesek a négyszög egyetlen oldalára sem illeszkednek?

9. Az *ABCD* négyzet csúcsait négy színnel kiszínezzük.
a) Hányféle színezés lehetséges, ha a szomszédos csúcsok különböző színűek? (A színezéshez nem kell minden színt felhasználni.)
b) Hány olyan egyenes van a négyzet síkjában, amelyik az *A*, *B* és *C* csúcsoktól azonos távolságra halad?

10. Hány négyjegyű természetes szám van, amelyben legalább egy páros és legalább egy páratlan számjegy szerepel?

ÚTMUTATÁSOK

1. *a)* Érdemes először az $A \cap B$ halmazt meghatározni.
b) Itt észrevehetjük, hogy a kérdés az $A \cap B$ halmazra vonatkozik.

2. Ilyen pont kettő van, az egyik az *AB* szakasz belsejében, a másik azon kívül.

3. Meghatározhatjuk a megfelelő 3-mal, 5-tel és $3 \cdot 5 = 15$-tel osztható számok számát, és ezeket ábrázolhatjuk Venn-diagramon.

4. *a)* Alkalmazzuk a komplementer leszámlálás módszerét!
b) Tehát (pontosan) a prímszámokból kell részhalmazokat készítenünk.
c) Ismét a komplementer gondolat a javasolt: mikor páratlan az egész számok szorzata?

5. Két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza szintén két (metsző) egyenes.

6. *a)* A sorrend számít, alkalmazhatjuk a szorzási szabályt.
b) Itt is hasonlóan járhatunk el, de érdemes a speciális dobásokkal kezdeni (első, ill. ötödik).

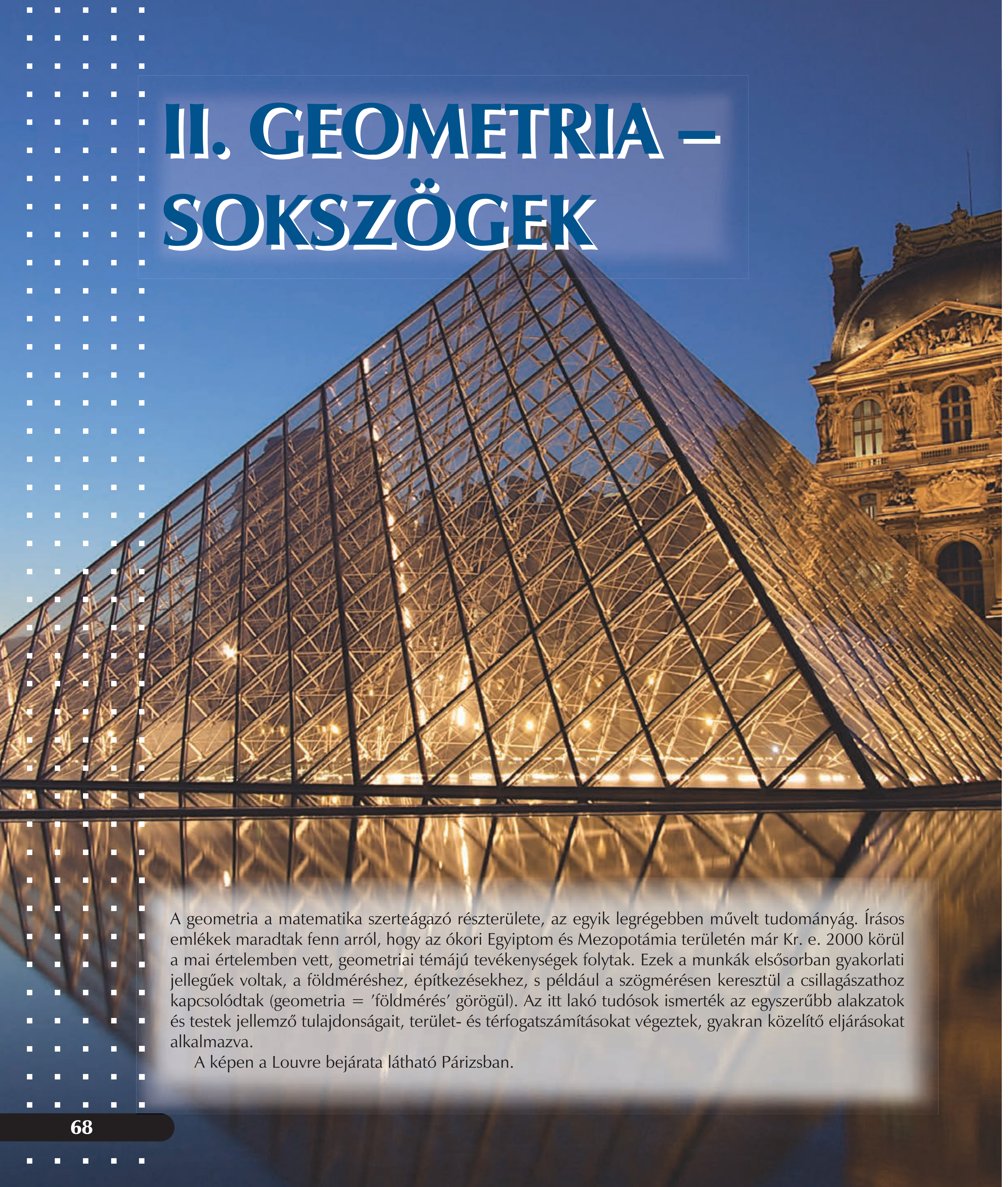
7. *a)* Ha a gráfmodellt alkalmazzuk, akkor egy ötszög oldalainak és átlóinak a számát kell meghatároznunk.
b) Danit és Ernőt együtt tekintve már csak 4 érkező maradt.
c) Érdemes rendezetten összeszámolni az egyes eseteket, például Aladárral kezdve.

8. Ne felejtsük el: konkáv négyszögek is vannak, és az egyenesek egymást is metszik.

9. *a)* Ha például az *A* csúccsal kezdjük a színezést, akkor érdemes esetszétválasztást végezni az alapján, hogy a *B* és *D* csúcs azonos vagy különböző színű.
b) Először azt vizsgáljuk meg, hogyan helyezkednek el azok az egyenesek, amelyek például az *A* és *B* csúcsoktól vannak ugyanakkora távolságra.

10. Nem megfelelők azok a számok, amelyeknek minden számjegye vagy páros, vagy páratlan.

II. GEOMETRIA – SOKSZÖGEK



A geometria a matematika szerteágazó részterülete, az egyik legrégebben művelt tudományág. Írásos emlékek maradtak fenn arról, hogy az ókori Egyiptom és Mezopotámia területén már Kr. e. 2000 körül a mai értelemben vett, geometriai témájú tevékenységek folytak. Ezek a munkák elsősorban gyakorlati jellegűek voltak, a földméréshez, építkezésekhez, s például a szögmérésen keresztül a csillagászathoz kapcsolódtak (geometria = 'földmérés' görögül). Az itt lakó tudósok ismerték az egyszerűbb alakzatok és testek jellemző tulajdonságait, terület- és térfogatszámításokat végeztek, gyakran közelítő eljárásokat alkalmazva.

A képen a Louvre bejárata látható Párizsban.

Az ókori görög matematikusok (Kr. e. V. sz.–Kr. u. V. sz.) tudományos alapossággal és rendszerességgel foglalkoztak a geometriával. Munkáikban jelent meg a bizonyítási és általánosítási igény, kifejlődött a síkmértan, a szerkesztéselmélet. Pontos terület- és térfogat-számítási módszereket dolgoztak ki, foglalkoztak a szabályos sokszögekkel és testekkel stb. Eukleidész híres műve, a Sztoikheia („Elemek") páratlan munka; tartalma, felépítése, tárgyalásmódja a mai napig mintaértékű. (Ez a könyv érte meg a világon a második legtöbb kiadást.) A korszak leghíresebb matematikusainak nevével (Thalész, Püthagorasz, Arkhimédész, Héron) a későbbi tanulmányaink során rendszeresen fogunk találkozni.

Amikor I. Ptolemaiosz (Kr. e. 306–283) egyiptomi uralkodó megkérdezte, hogy a geometria elsajátításának nincs-e rövidebb és könnyebb módja, mint amit az „Elemek" mutatnak, Eukleidész így válaszolt: „A geometriához nem vezet királyi út."

Nagy általánosságban azt mondhatjuk, hogy a geometria a síkbeli és térbeli alakzatok tulajdonságaival, mérésével foglalkozik. Természetesen a geometriai objektumok elvonatkoztatás útján nyert absztrakt, idealizált alakzatok. A valóságban nincs pont (azaz kiterjedés nélküli test), nincs egyenes (azaz végtelen hosszú vonal), nem létezik gömb (csak legfeljebb olyan modell, amelyben a vizsgált test jó közelítéssel gömbnek tekinthető) stb.

Az egyiptomi papok NEM az épülő piramis térfogatát számolták ki, hanem a piramist egy négyzet alapú egyenes gúlával *modellezték*, s ennek az idealizált testnek határozták meg a méreteit, térfogatát.

Eukleidész művében deduktív[1] tárgyalási módszerrel építette fel a geometriát. Bizonyos alapfogalmakat és axiómákat ismertnek tételezett fel; definíciók segítségével új fogalmakat vezetett be; majd ezek és az axiómák segítségével állításokat, tételeket mondott ki és bizonyított. Műve annyira sikeresnek és időtállónak bizonyult, hogy módszere a mai napig a geometria, sőt az egész matematika tanulmányozásának az alapja.

Korábbi tanulmányaink során már megismerkedtünk a geometria alapfogalmaival (például a pont, egyenes, sík, tér a legegyszerűbb építőelemek), axiómáival (például a térelemek illeszkedésével kapcsolatban bizonyítás nélkül elfogadott állítások), a mérés értelmezésével (távolság, szög, terület, térfogat), az egyszerűbb alakzatok tulajdonságaival, speciális geometriai transzformációkkal és így tovább. A középiskolában egyrészt korábbi tudásunkat mélyítjük, másrészt új módszerekkel ismerkedünk meg (trigonometria, koordinátageometria).

Eukleidész (Kr. e. 300 körül) görög matematikus foglalkozott csillagászattal és zeneelmélettel is. Életéről nem sokat tudunk. Az „Elemek" az első görög mű, amely teljes egészében az utókorra maradt. A szerző ebben – más tudósok eredményeit is felhasználva – összefoglalja az akkori matematikai ismereteket.

Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij

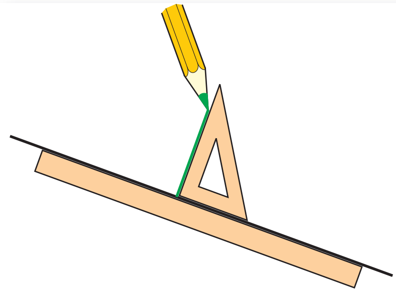
Geometriai módszereket rendszeresen alkalmaznak a matematika más ágazataiban, s a tudomány és kultúra egyéb területein is. (Előbbire példa az ábrázoló geometria alkalmazása az építészetben, az utóbbira C. M. Escher művészete.) A geometria alapjaival, a tér szerkezetével, leírásával foglalkozó modern gondolatok megjelentek a nagy magyar matematikus, Bolyai János, valamint C. F. Gauss, Ny. I. Lobacsevszkij (1792–1856) munkáiban is.

Bolyai János (1802–1860) az egyik legnagyobb magyar matematikus. Kolozsváron született, a bécsi katonai mérnökakadémián tanult. Apja hatására – aki szintén tekintélyes matematikus volt – kezdett foglalkozni a geometria alapjaival, az abszolút geometria egyik felfedezője. Korát megelőzve adta meg a komplex számok aritmetikai megalapozását, de elgondolásait értetlenség fogadta, s művei a várt tudományos elismerést csak halála után hozták meg számára.

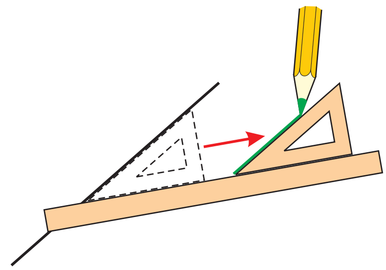
Bolyai János

[1] Dedukció, azaz levezetés, bizonyítás.

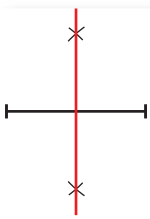
BESZÉDES ÁBRÁK



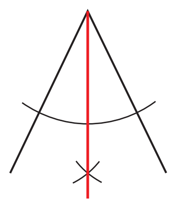
merőleges rajzolása



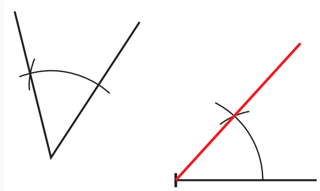
párhuzamos rajzolása



szakaszfelezés

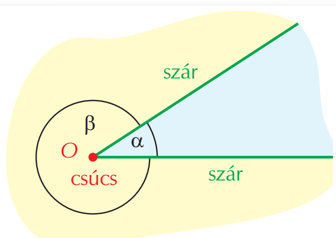


szögfelezés

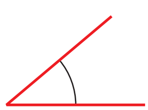


szögmásolás

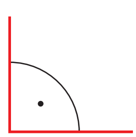
Szögek



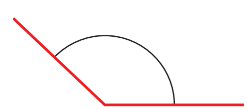
Szög
Egy pontból kiinduló két félegyenes a síkot két részre bontja.
Egy-egy ilyen részt **szögnek (szögtartománynak)** nevezünk.



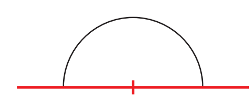
hegyesszög
(0° és 90°
közé eső szög)



derékszög
(90°)

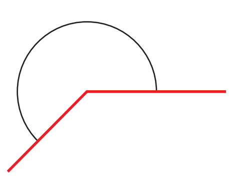


tompaszög
(90° és 180° közé
eső szög)

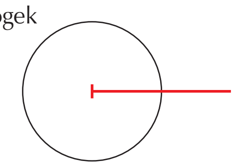


egyenesszög
(180°)

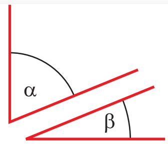
konvex (domború) szögek



konkáv (homorú) szög
(180° és 360° közé eső szög)

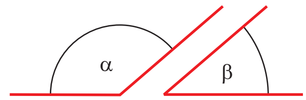


teljesszög (360°)
(a szögtartomány a teljes sík)



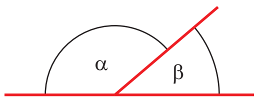
$\alpha + \beta = 90°$

Pótszögeknek mondunk két szöget, ha összegük 90°.



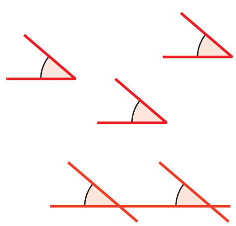
$\alpha + \beta = 180°$

Kiegészítő szögnek mondunk két szöget, ha összegük 180°.

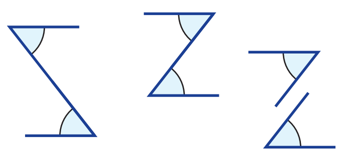


$\alpha + \beta = 180°$

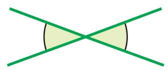
Mellékszögnek mondunk két szöget, ha egy-egy száruk közös, és a másik kettő egy egyenest alkot. A mellékszögek összege 180°.



Egyállású szögek egyenlők.

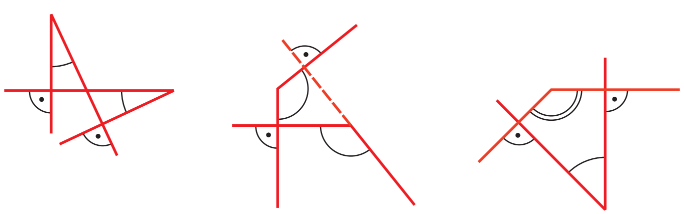


Váltószögek egyenlők.

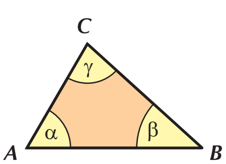


Csúcsszögek egyenlők.

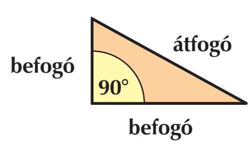
Merőleges szárú szögeknek mondunk két szöget, ha száraik páronként merőlegesek. Ha a merőleges szárú szögek mindegyike hegyesszög vagy mindegyike tompaszög, akkor egyenlők; ha közülük az egyik hegyesszög, a másik tompaszög, akkor kiegészítő szögek.



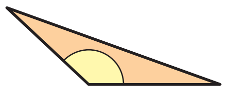
Háromszögek



A **hegyesszögű** háromszög minden szöge hegyesszög.

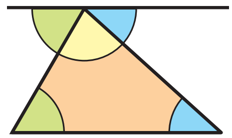


A **derékszögű** háromszögnek van derékszöge (a többi hegyesszög).

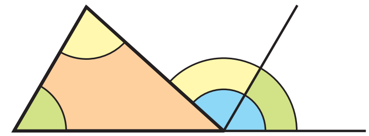


A **tompaszögű** háromszögnek van tompaszöge (a többi hegyesszög).

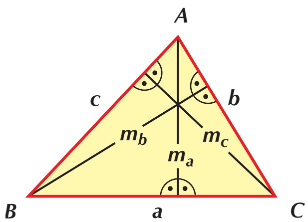
Háromszögek



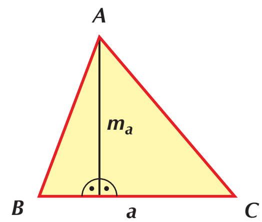
A háromszög szögeinek összege 180°.



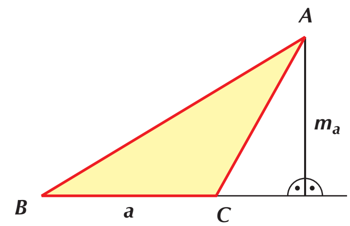
Egy **külső szög** két nem szomszédos belső szög összegével egyenlő.



A **magasságok** a csúcsokból a szemközti oldalegyenesekre bocsátott merőlegesek.

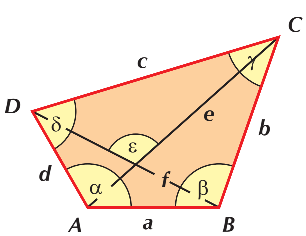


m_a a háromszög a oldalához tartozó magassága.

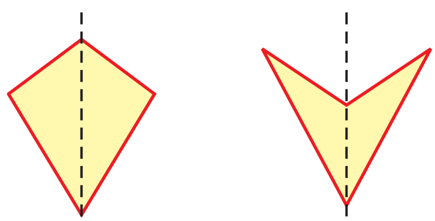


Ha **tompaszögű** a háromszög, akkor a két magasság a háromszögön kívül halad.

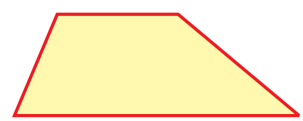
Négyszögek



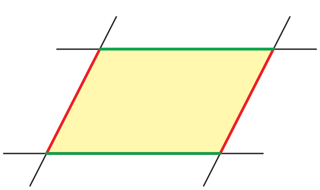
Így jelöljük a **négyszög** alkotórészeit.



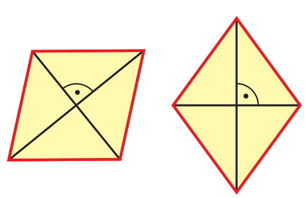
A **deltoidnak** van szimmetriatengelye.



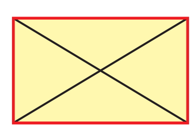
A **trapéznak** van párhuzamos oldalpárja.



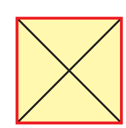
A **paralelogramma** szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.



A **rombusznak** mind a négy oldala egyenlő. (Átlói felezik egymást, merőlegesek egymásra és felezik a szögeket.)



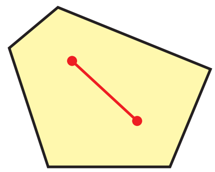
A **téglalap** átlói egyenlők és felezik egymást.



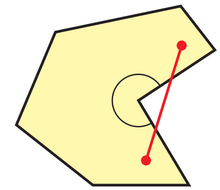
A **négyzet** minden oldala és szöge egyenlő. (Átlói egyenlők, és merőlegesen felezik egymást.)

Sokszögek

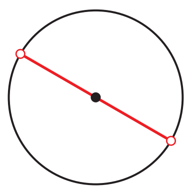
Konvex sokszög. (Tetszőleges két pontját összekötő szakasz a sokszögben van. Minden szöge konvex.)



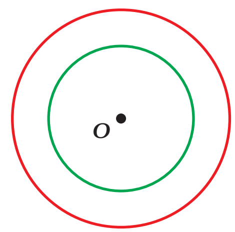
Konkáv sokszög. (Van olyan két pontja, amelyeket összekötő szakasz nincs teljesen a sokszögben. Van konkáv szöge.)



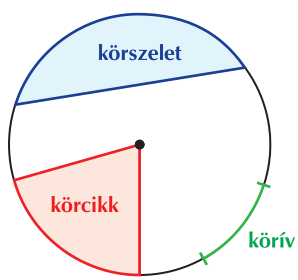
Körök

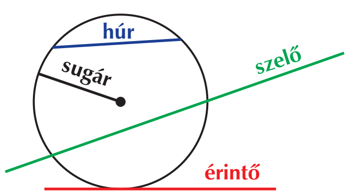


Átmérő. A végpontjai átellenes pontok.

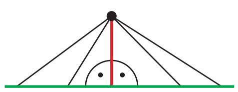


Koncentrikus (közös középpontú) körök.

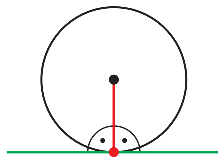




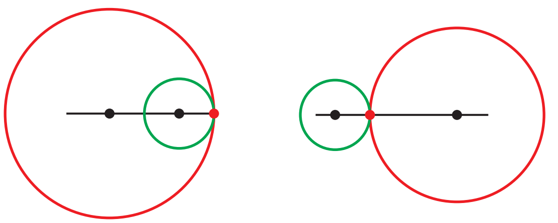
Egy pont és egy egyenes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza. Ez a legrövidebb a pontot az egyenes pontjaival összekötő szakaszok közül.



Az érintési pontba vezető sugár merőleges az érintőre.



Az **érintkező körök** érintési pontja és a középpontok egy egyenesen vannak.



Emelt szint

A GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEKRŐL (Olvasmány)

Őskori barlangrajz az Altamira-barlangban, Spanyolországban

A szerkesztés nagyon régi emberi tevékenység. Segédeszközök – például vonalzó – használatára már az őskori barlangrajzokon és falfestményeken is találhatunk nyomokat. Írásos emlékek utalnak arra, hogy egy kötél segítségével hogyan „szerkesztettek” az egyiptomiak derékszöget, vagy a rómaiak ellipszis alakú boltíveket.

A középiskolában tanult, ún. **euklideszi szerkesztés** elméletének a kidolgozása, azaz matematikai tárgyalása az ókori görögöktől származik. (A továbbiakban „szerkesztés” alatt mindig az euklideszi szerkesztést értjük.) Először Platón, a híres filozófus rögzítette, hogy a szerkesztésekhez csak egyélű vonalzó és körző használható, s ezekkel az eszközökkel a következő szerkesztési műveletek végezhetők:
1. két adott ponton át egyenes rajzolása;
2. adott szakasz körzőnyílásba vétele;
3. adott pont körül, adott körzőnyílással körív rajzolása;
4. két egyenes metszéspontjának a kijelölése;
5. kör és egyenes metszéspontjainak a kijelölése;
6. két kör metszéspontjainak a kijelölése.
(**7.** A fenti lépések véges sokszori alkalmazása.)

Platón (Kr. e. 429–347) idealista görög filozófus, aki a filozófiai ismeretek alapjának a geometriát tekintette. A tudományos igényű bizonyítás módszerének ő az egyik megalapozója, először adott definíciókat alapvető geometriai fogalmakra.

Ezekkel az egyszerű műveletekkel meglepően nagyszámú szerkesztési feladat végezhető el. A középiskolában leggyakoribb típusfeladatok:
– adott pontból adott egyenessel párhuzamos vagy adott egyenesre merőleges egyenes szerkesztése;
– szakaszt adott arányban osztó pont szerkesztése;
– háromszög szerkesztése három független adatból;
– egyenes és néhány síkbeli alakzat metszéspontjának a szerkesztése;
– egyenes és néhány síkbeli alakzat érintési pontjának a szerkesztése;
– egyes alakzatok metszéspontjainak szerkesztése.

Ugyanakkor sajnos néhány gyakorlati feladat szerkesztése nem oldható meg euklideszi módon. Például adott parabola vagy ellipszis tetszőleges számú pontját megszerkeszthetjük, de magát a görbét nem (nyilván, hiszen nincs megengedett eszközünk arra, hogy ívet rajzoljunk).

A szerkesztési feladatok teljes értékű megoldásai általában hosszadalmasak, s az alábbi lépésekből állnak:
1. Elemzés: A feladatot megoldottnak tekintjük, felvázoljuk a szerkesztendő *X* alakzatot, és innen visszafelé haladva próbálunk olyan *Y* alakzatot keresni, amely az adatokból megszerkeszthető.
2. Szerkesztés: *Y*-ból próbálunk eljutni *X*-hez az előző úton ellentétes irányban haladva, az egyes szerkesztési lépéseket végrehajtva. (Idetartozik a szerkesztés menetének a leírása is.)
3. Bizonyítás: Igazolnunk kell, hogy a szerkesztés helyes volt. (Azaz valóban megkapjuk *Y*-ból *X*-et, és valóban *X*-et kapjuk meg.)
4. Diszkusszió: Ezt a lépést régen *taglalásnak* nevezték. Ekkor vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett van megoldása a feladatnak, és hogy hány megoldása van.

A legritkább esetben van lehetőség arra, hogy a szerkesztési feladatokat teljes részletességükben oldjuk meg. Általában megelégszünk útmutatásokkal, „nagyvonalú” utalásokkal. Azonban jó, ha tudjuk: bár a teljes megoldáshoz sok idő és sok papírmunka kell, és ez a munka gyakran feleslegesnek vagy túlzónak tűnik („nem éri meg a fáradságot”) – a matematikailag pontos megoldás a szerkesztési lépések precíz és részletes végrehajtása lenne.

Az euklideszi szerkesztésen kívül más szerkesztési eljárások is léteznek, s egy részüket már az ókori görög matematikusok is felfedezték. Folytak kutatások a segédeszközök korlátozhatóságának irányában is. Két érdekes tételt említünk meg.

A **Mohr–Mascheroni-tétel** kimondja, hogy minden euklideszi szerkesztés elvégezhető *csak körző* használatával is. (Körzővel természetesen nem lehet egyenest rajzolni. A tétel úgy értendő, hogy a 2., 3. és 6. szerkesztési lépéseken kívül a 4. és 5. művelet csak körzővel is végrehajtható, s egy egyenest akkor tekintünk meghatározottnak, ha ismert két pontja.)

A **Steiner-féle szerkesztési tétel** pedig úgy szól, hogy minden euklideszi szerkesztés elvégezhető *csak vonalzó* használatával is, ha a síkon adott egy kör, a középpontjával együtt.

(Persze vonalzóval nem lehet kört rajzolni. A tétel azt mondja ki, hogy az 1. és 4. szerkesztési lépésen kívül az 5. és 6. művelet csak vonalzó alkalmazásával is elvégezhető.)

Az euklideszi szerkesztéseknek fontosabb gyakorlati alkalmazásuk nincs. Elvi jelentőségű a pontosságuk, de ez a pontosság a gyakorlatban – a segédeszközök (körző, vonalzó) alkalmazása miatt – úgyis csak közelítő érvényű. A műszaki gyakorlatban olyan közelítő szerkesztési eljárásokat alkalmaznak, amelyekkel a kívánt tervezési-gyártási pontosság elérhető.

Az ókorból ismerünk három nevezetes szerkesztési problémát. Ezek:

– a szögharmadolás (adott szög harmadának a szerkesztése);

– a kör négyszögesítése (adott körrel azonos területű négyzet szerkesztése);

– a kocka kettőzése (adott kocka esetén kétszer akkora térfogatú kocka élének a szerkesztése).

A három híres problémával matematikusok és amatőr kutatók hada próbált megbirkózni – több mint kétezer éven keresztül sikertelenül. 1796-ban sikerült az akkor 19 éves Gaussnak bebizonyítania, hogy a három szerkesztési feladat nem oldható meg, azaz általános esetben a szögharmadolás, a kör négyszögesítése és a kocka kettőzése az euklideszi szerkesztés keretein belül nem végezhető el. (Gauss „pozitív” eredménye, hogy – algebrai módszereket alkalmazva – pontosan meghatározta, melyek azok a szabályos sokszögek, amelyek szerkeszthetők.)

Georg Mohr (1640–1697) dán matematikus, tanulmányait Hollandiában, Franciaországban és Angliában folytatta. A róla elnevezett tételt 1672-ben megjelent munkájában bizonyította, de műve feledésbe merült.

Jacob Steiner (1796–1863), a svájci származású pásztorfiú tanítója Pestalozzi, a híres pedagógus volt. Különleges matematikai tehetsége hamar megmutatkozott, tanulmányai befejezése után a berlini egyetem professzora lett. Nagyszerű eredményeket ért el a geometriában, a szerkesztési tételét 1833-ban publikálta.

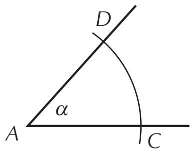
Lorenzo Mascheroni (1750–1800) itáliai matematikus, 17 éves korától felszentelt pap volt. Eredetileg görög nyelvet és költészetet tanított, retorikát, majd fizikát és matematikát oktatott. 1786-ban nevezték ki a paviai egyetem algebra- és geometriaprofesszorává. Mohr tételét 1797-ben fedezte fel újra.

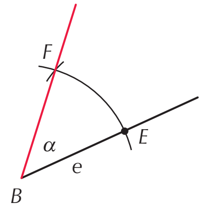
Fogalmak, nevek
euklideszi szerkesztés;
diszkusszió;
Mohr;
Mascheroni;
Steiner;
Platón.

11. ALAPSZERKESZTÉSEK

Ismételjük át az általános iskolában tanult fontosabb alapszerkesztéseket!

1. Szögmásolás





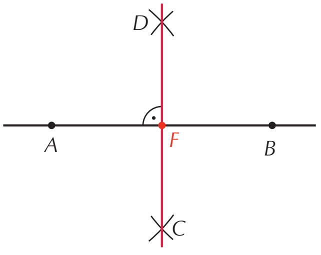
Adott az *A* csúcsú, két félegyenessel határolt α szögtartomány. Másoljuk át ezt a szöget egy *B* kezdőpontú e félegyenesre!

A szerkesztés menete: Egy *A* középpontú, tetszőleges sugarú kör az adott szögszárakat a *C* és a *D* pontokban metszi. Ugyanezzel a sugárral egy *B* középpontú körívet rajzolunk, amely az e félegyenest *E*-ben metszi. Erre a körívre *E*-ből felmérjük *CD*-t, így kapjuk *F*-et, és a keresett szög előállt: $EBF\sphericalangle = \alpha$.

Ugyanis a *CAD* és *EBF* egyenlő szárú háromszögek oldalainak hossza megegyezik, tehát fedésbe hozhatók.

A szerkesztés konkáv (homorú) szögek esetén is hasonlóan hajtható végre. (Észrevehetjük, hogy a szöget az e félegyenes mindkét oldalára átmásolhatjuk.)

2. Szakaszfelező merőleges

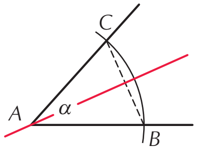


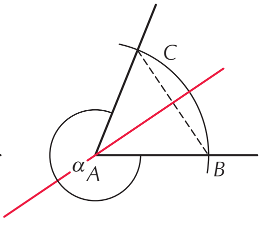
Adott az *AB* szakasz. Szerkesszük meg a szakasz felezőmerőlegesét!

A szerkesztés menete: A szakasz mindkét végpontjából egy-egy azonos sugarú kört rajzolunk úgy, hogy a sugár a szakasz felénél hosszabb legyen. A két kör a *C* és *D* pontokban metszi egymást, és *CD* a keresett egyenes.

Indoklás: ACBD rombusz, mert oldalai egyenlők. A rombusz átlói pedig merőlegesen felezik egymást. (Egyúttal megkaptuk az *AB* szakasz *F* felezőpontját is.)

3. Szögfelező



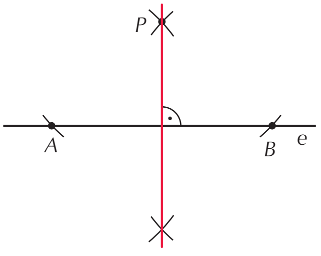


Adott az *A* csúcsú, két félegyenessel határolt a szögtartomány. Szerkesszük meg a szögfelező egyenest!

A szerkesztés menete: Egy *A* középpontú, tetszőleges sugarú kör az adott szögszárakat a *B* és a *C* pontokban metszi. Az így kapott *ABC* háromszög egyenlő szárú, *BC* az alapja. Megszerkesztjük a *BC* szakasz felezőmerőlegesét, ez lesz a keresett szögfelező egyenes, ami illeszkedik *A*-ra is.

Ugyanis az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye egyúttal oldalfelező merőleges és szögfelező is.

4. Merőleges egyenes



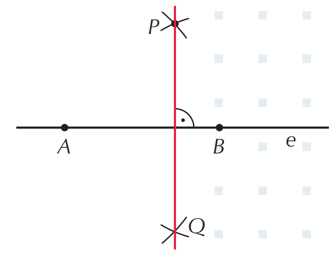
Adott egy e egyenes és egy rajta kívül fekvő *P* pont. Szerkesszünk *P*-ből e-re merőleges egyenest!

A szerkesztés menete: Egy *P* középpontú kört rajzolunk úgy, hogy ez az *A* és *B* pontokban metssze az e egyenest. Megszerkesztjük az *AB* szakasz felezőmerőlegesét, ez lesz a keresett egyenes.

Indoklás: Mivel a *PAB* háromszög egyenlő szárú, és *AB* az alapja, ezért az alap felezőmerőlegese átmegy a *P* ponton.

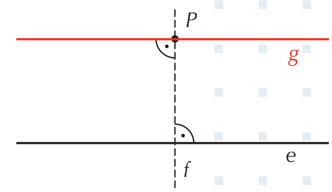
Lényegében ugyanígy történik a szerkesztés akkor is, ha *P* az e egyenesen van. Ekkor a kör által kimetszett *AB* szakasz felezőpontja *P*, és *AB* szakaszfelező merőlegese átmegy *P*-n.

Megjegyzés:
Most a szerkesztést visszavezettük már ismert feladat megoldására, de másképpen is eljárhatunk, az ábrán egy másik megoldás látható. Ekkor kijelölünk két tetszőleges *A* és *B* pontot az egyenesen, és megrajzoljuk az *A* középpontú, *AP* sugarú és *B* középpontú, *BP* sugarú köröket. Ha ezek második metszéspontja *Q*, akkor *PQ* a keresett egyenes. Ugyanis *AQBP* deltoid (két-két szomszédos oldala egyenlő), ennek átlói pedig merőlegesek egymásra.
(Azt is megkaptuk, hogy *P*-nek az *AB* egyenesre tengelyesen szimmetrikus képe *Q*.)



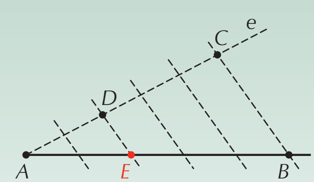
5. Párhuzamos egyenes

Adott egy e egyenes és egy rajta kívül fekvő *P* pont. Szerkesszünk *P*-n keresztül e-vel párhuzamos egyenest!
A szerkesztés menete: Először *P*-ből merőlegest állítunk e-re, legyen ez az *f* egyenes, majd *P*-ből merőlegest állítunk *f*-re. Az így kapott *g* egyenes párhuzamos e-vel, hiszen mindketten merőlegesek *f*-re.



Érdekesség

Szakasz felezőpontját könnyen megszerkeszthetjük, de vajon más, adott arányú osztópontok is szerkeszthetők? Hogyan szerkesztenénk meg például egy *AB* szakasz $\frac{2}{5}$ részét?
Az ábrán látható módon felveszünk egy *A* pontból kiinduló e félegyenest, és erre – *A*-ból kiindulva – egy tetszőleges szakaszt felmérünk 5-ször, így kapjuk a *C* pontot. Ha a félegyenesen a második osztópontot *D* jelöli, akkor *D*-n keresztül párhuzamost húzunk *BC*-vel. Ez az egyenes az *AB* szakaszt az *E* pontban metszi, ami éppen a keresett osztópont: $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{5}$.



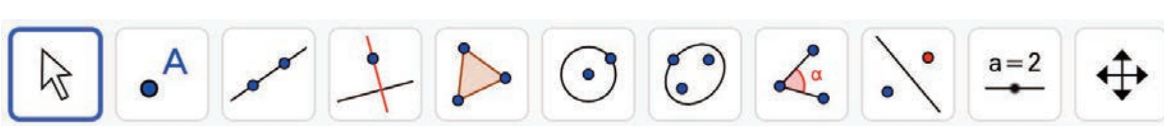
Hasonló módszerrel adott szakasz tetszőleges $\frac{k}{n}$ arányú részét (tehát racionális arányú osztópontját) is megszerkeszthetjük (*k*, *n* pozitív egész számok).

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

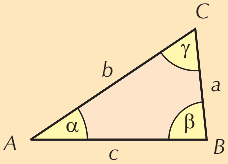
Az eddigiek alapján az egyszerűbb geometriai transzformációk is elvégezhetők.
Egy pont középpontos tükörképét könnyen megszerkeszthetjük: ha az *A* pont *B*-re vonatkozó tükörképét keressük, akkor azt az *AB* egyenesből a *B* középpontú, *BA* sugarú kör metszi ki.
P pont tükrözése az e egyenesre: *P*-ből merőlegest bocsátunk e-re, legyen ez az *f* egyenes, a két egyenes metszéspontja pedig *M*. Ezután *P*-t tükrözve *M*-re kapjuk a keresett pontot. (Másképpen is eljárhatunk, például a merőleges egyenes szerkesztésekor láttunk egy másik eljárást.)

FELADAT

A GeoGebra alkalmazásban több további elemi szerkesztést használhatunk. Gyűjtsük össze ezeket!



12–13. A HÁROMSZÖGEKRE VONATKOZÓ ISMERETEK



A **háromszög oldalai, szögei közötti kapcsolatokat** már megismertük. Ezeket most újból összefoglaljuk.

a) A háromszög belső szögeinek összege 180°.

b) A háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

c) A háromszögben bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál:

$$a + b > c;\ b + c > a;\ a + c > b.$$

Más megfogalmazásban:
Bármely oldal nagyobb, mint a másik két oldal különbségének abszolút értéke:

$$a > |b - c|; \qquad b > |a - c|; \qquad c > |a - b|.$$

Összefoglalva:

Ha egy háromszög két oldalának hosszát ismerjük, akkor a harmadik oldal hosszára teljesülnie kell, hogy $a + b > c > |a - b|$.

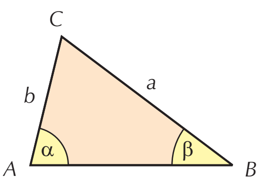
d) Egy háromszögben két oldal akkor és csak akkor egyenlő, ha az adott oldalakkal szemközti két szög is egyenlő. **Szabályos háromszög** mindhárom oldala és mindhárom szöge egyenlő.

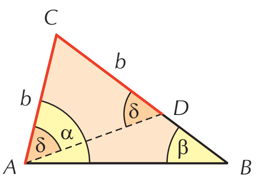
e) Egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, és fordítva, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

Emelt szint **Bizonyítás**

Jelöljük például a háromszög két különböző oldala közül a nagyobbikat a-val, a kisebbiket b-vel, a szemközti szögeket pedig α-val, illetve β-val. Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy $\alpha > \beta$.

Ezt az állítást a következőképpen igazolhatjuk: Mérjük fel a b oldalt a C csúcspontból a BC oldalra. Jelöljük ezt a pontot D-vel. Tehát





$CD = CA.$

Így az ACD háromszög egyenlő szárú. A δ szög része az α szögnek, így

$\alpha > \delta.$

Minthogy δ az ABD háromszög külső szöge, ezért

$\delta > \beta.$

Tehát

$\alpha > \beta.$

Fogalmak
háromszög-egyenlőtlenség;
egyenlő szárú háromszög;
szabályos háromszög;
külső szög;
szögösszeg;
háromszög oldalai és szögei közötti kapcsolat.

Azt, hogy a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, ami az előző állítás megfordítása, a következő módon igazolhatjuk. Három eset lehetséges a és b nagysági viszonyára. Lehet $a > b$ vagy $a = b$ vagy $a < b$. Ha $\alpha > \beta$, akkor nem lehet $a = b$, mert abból $\alpha = \beta$ következne, ami ellentmondás. Hasonlóan ha $\alpha > \beta$, akkor nem lehet $a < b$, mert abból $\alpha < \beta$ következne, ami ellentmondás. Valamelyik esetnek azonban fenn kell állnia, tehát $a > b$.

FELADATOK

1. K1 Létezik-e olyan háromszög, amelyben az oldalak
a) 33, 66, 35;
b) 33, 66, 30;
c) 2008, 2010, 3;
d) x, $2x$, $3x$ $(x > 0)$;
e) $2a$, $3a$, $4a$ $(a > 0)$?

2. K1 Mekkora lehet a háromszög harmadik oldala, ha két oldala
a) 10 cm és 25 cm;
b) 0,5 m és 150 mm;
c) 10 dm és 100 cm?

3. E1 Bizonyítsuk be, hogy minden konvex négyszögben az átlók hosszának összege nagyobb, mint a négyszög kerületének fele, de kisebb, mint a négyszög kerülete!

4. K1 Létezik-e olyan háromszög, amelyben az oldalak aránya
a) 2 : 3 : 4;
b) 2 : 4 : 6?

5. K1 Létezik-e olyan háromszög, amelyben a szögek aránya
a) 2 : 3 : 4;
b) 2 : 4 : 6;
c) 2 : 7 : 27?
Ha igen, határozzuk meg a háromszög szögeit!

6. K1 Mekkorák a derékszögű háromszög szögei, ha egyik külső szöge
a) 120°-os;
b) 108°-os;
c) 90°-os;
d) 60°-os?

7. K2 Egy egyenlő szárú háromszög egyik belső és egyik külső szögének összege 108°. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei?

8. E1 Jelölje P az ABC háromszög tetszőleges belső pontját. Igaz-e, hogy a PBC háromszög kerülete kisebb, mint az ABC háromszög kerülete?

9. (Gyűjtőmunka) A mindennapi életben, a televízióban és az interneten meglepően sokszor találkozunk a háromszögek különböző megjelenési formájával. Gyűjtsünk össze ezekből néhány érdekességet!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **137–171.**

A 66. oldalon kezdődő feladatok eredményei:

1. *a)* 70; *b)* 160
2. $C = \frac{13}{15}$ vagy $D = -\frac{3}{5}$
3. *a)* 201; *b)* 833
4. *a)* 240; *b)* 15; *c)* 240
5. 4
6. *a)* 2592; *b)* 48
7. *a)* 10; *b)* 24; *c)* 12
8. 39
9. *a)* 84; *b)* 3
10. 7875

14–15. A PITAGORASZ-TÉTEL

Püthagorasz (mai átírással Pitagorasz) (Kr. e. VI. sz.)
Püthagorasz a Milétoszhoz közeli Szamosz szigetén született. Thalész is tanította, és az ő tanácsára Egyiptomba utazott. Hazájába visszatérve egy vallásos jellegű, politikai célokért is küzdő, ugyanakkor a matematikai tudományokkal (aritmetika, geometria, zene, csillagászat) is foglalkozó, félig-meddig titkos társulatot alapított, amelynek azonban Szamosz szigetéről el kellett távoznia, mert összeütközésbe került az ott uralkodó Polükratosz türannosszal. Dél-Itáliába menekült, Krotónba, második hazájába. Püthagorasz maga semmit nem írt le tanításaiból és esetleges felfedezéseiből. Tanai, tudományos eredményei elválaszthatatlanul összekeveredtek tanítványai munkáival. A Pitagorasz-tételt, amely leginkább ismertté tette Püthagorasz nevét, nem ő fedezte fel; Babilonban, Egyiptomban, Kínában már előtte is ismerték. A püthagoreusok magát a geometriát nem is értékelték annyira, mint a számok tudományát. Ez megnyilvánult az elnevezésben is. A számelméletet mathémának, tanulmánynak hívták, ebből származik a matematika szó. A geometria pedig kimondottan tapasztalati tudomány volt.

Bábel tornya Babilonban (Abel Grimmer (1570–1619) festménye)

1. példa

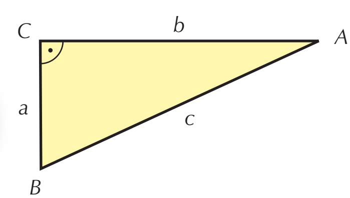
Budapesten az Andrássy út 2 km hosszú. Ha egy 2001 m hosszú kötelet leszúrnánk a két végén, és a közepén az Oktogonnál megemelnénk, átférne-e a kötél alatt a villamos?

Megoldás

Tanultuk az általános iskolában a Pitagorasz-tételt, amit most segítségül hívunk a példa megoldásához. Először azonban idézzük fel!

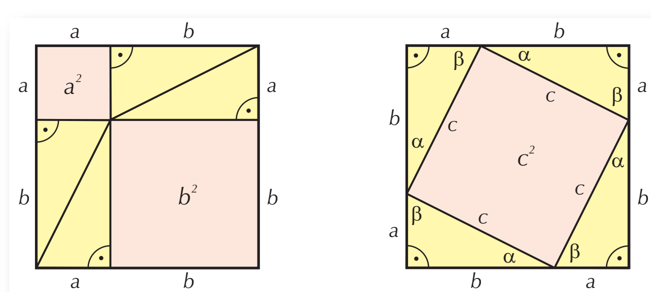
Tétel

Pitagorasz-tétel: Derékszögű háromszög befogói hosszának négyzetösszege egyenlő az átfogó hosszának négyzetével.



Bizonyítás

Vegyünk fel két $a+b$ oldalú négyzetet! Mérjük fel az egyik négyzet egyik csúcsából mindkét oldalra az a szakaszt, és ezek végpontjából húzzunk párhuzamost az oldalakkal. Így egy a és egy b oldalú négyzetet és az első ábra szerint négy darab háromszöget kapunk, amelyek az eredeti háromszöggel

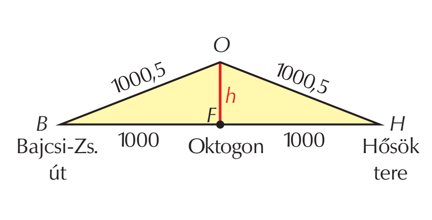


fedésbe hozhatók. A másik négyzetet úgy osszuk fel, hogy az ábra szerint ciklikusan mérünk az oldalakra a-t és b-t. Így a négyzet négy csúcsánál megkaptuk az előző ábra négy háromszögét. A kérdés az, milyen négyszög maradt belül. Mivel a csúcsoknál lévő háromszögek fedésbe hozhatók, átfogójuk ezért egyenlő c-vel. Ebből már annyit tudunk, hogy a belső négyszög rombusz, mert minden oldala egyenlő. A négyszög csúcsánál azonban a derékszögű háromszög egyik hegyesszöge van az egyik oldalon, másik hegyesszöge van a másik oldalon. A két hegyesszög összege viszont 90°, tehát a négyszög belső szöge 180° – 90° = 90°-os. A derékszögű rombusz a négyzet, tehát a belső négyszög egy c oldalú négyzet.

A két $a+b$ oldalú négyzet területének egyenlőségéből adódik, hogy $4 \cdot T(ABC) + a^2 + b^2 = 4 \cdot T(ABC) + c^2$.

Levonva $4 \cdot T(ABC)$-et mindkét oldalból, azt kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$, amit állítottunk.

Most térjünk vissza a példa megoldásához. Az egyenlő szárú $BOH\Delta$ BH oldalának felezőmerőlegese átmegy O-n, így az $FOH\Delta$-re felírhatjuk a Pitagorasz-tételt. Először persze az oldalakat átszámítottuk méterbe.



$1000{,}5^2 = 1000^2 + h^2$, ahol h jelöli azt a magasságot, amennyire meg lehet emelni a kötelet középen. Ebből $h^2 = 1000{,}25$; ahonnan $h \approx 31{,}6$. Ez azt jelenti, hogy nemcsak a villamos tud átmenni, hanem a téren álló bármelyik házat is át lehetne tolni alatta.

Megjegyzés

Ez a hatalmas magasság hogy jöhetett ki? A kétszeres szorzat – amit algebrában tanultunk az összeg négyzetre emelésekor – itt $2 \cdot 1000 \cdot 0{,}5 = 1000$, és ennek négyzetgyöke lett több mint 30. Íme egy gyakorlati példa a kétszeres szorzat jelentőségére.

A **Pitagorasz-tétel megfordítása** is igaz, tehát bizonyítható:

Ha egy háromszögben két oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a harmadik oldallal szemközt derékszög van.

A **tételt és megfordítását** összevonva is kimondhatjuk a következőképpen:

Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével.

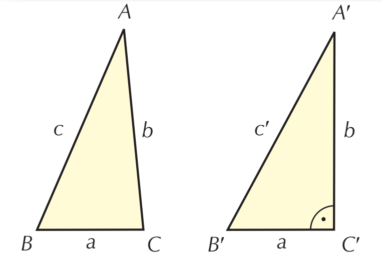
A Pitagorasz-tétel megfordításának bizonyítása

Emelt szint

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Ennek a módszernek az a lényege, hogy feltesszük, az állítás tagadása igaz, és ennek következménye ellentmondásra vezet. Ebből természetesen az következik, hogy az eredeti állítás igaz.

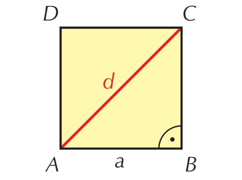
Legyen tehát az ABC háromszögben $a^2 + b^2 = c^2$, és (indirekt módon) tegyük fel, hogy $C\sphericalangle \neq 90°$. Vegyük fel az a és b befogójú $A'B'C'$ derékszögű háromszöget, átfogóját jelölje c'. Pitagorasz tétele teljesül: $a^2 + b^2 = c'^2$. A két egyenlőség összevetéséből $c = c'$ adódik, hiszen mindkét szám pozitív, tehát a két háromszög fedésbe hozható (megegyezik három oldaluk). Ellentmondást kaptunk: ha a két háromszög fedésbe hozható, akkor szükségképpen $C\sphericalangle = C'\sphericalangle = 90°$.

Vagyis a Pitagorasz-tétel megfordítása is igaz.



2. példa

Mekkora az a oldalú négyzet átlója?

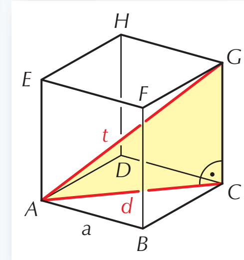


Megoldás

A négyzetet az átlója két derékszögű háromszögre osztja. Mindkét háromszög befogói a és a, ezért a Pitagorasz-tételt felírva $a^2 + a^2 = d^2$, ahonnan $d = a \cdot \sqrt{2}$.

3. példa

Mekkora az *a* élű kocka testátlója?



Megoldás

A kocka alaplapja egy *a* oldalú négyzet, amelynek átlója az előbbiek szerint $d = a \cdot \sqrt{2}$. Erre merőleges a *CG* él. Felírva a Pitagorasz-tételt az *ACG* derékszögű háromszögre, $\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = t^2$, tehát $2a^2 + a^2 = t^2$, ahonnan $t = a \cdot \sqrt{3}$.

Fogalmak, nevek
Püthagorasz;
Pitagorasz-tétel és megfordítása;
indirekt bizonyítás.

FELADATOK

1. K1 A következő három szám lehet-e egy derékszögű háromszög három oldala hosszának a mérőszáma?

a) $4, 8, \sqrt{80}$;
b) $\sqrt{3}, \sqrt{8}, \sqrt{5}$;
c) 7, 24, 25;
d) 12, 16, 21;
e) $a\sqrt{2}, a, a$ $(a > 0)$.

2. K2 Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alapja 2 cm-rel hosszabb a száránál. Mekkora a kerülete?

3. K2 Az egyenlő oldalú háromszög kerülete 6 cm. Mekkora a területe?

4. K1 Egy 60°-os szög szárait érinti egy 5 cm sugarú kör. Milyen távol van a szög csúcsától az érintési pont? A kör a szögfelezőt két pontban metszi. Milyen távol van a szög csúcsától a két metszéspont?

5. K2 Egy téglalap egyik oldala $AB = 8$ cm, a másik oldala $BC = 4$ cm. Az *AB* oldalon az *A* ponttól milyen messze van az a pont, amelyik egyenlő távol van *A*-tól és *C*-től?

6. K2 Egy téglalap egyik oldalánál a másik oldala 3 cm-rel kisebb, az átlója 3 cm-rel nagyobb. Mekkorák az oldalak?

7. K2 Határozzuk meg az 5 cm sugarú körbe írt szabályos háromszög oldalának hosszát!

8. K1 Határozzuk meg az 5 cm sugarú kör köré írt szabályos háromszög oldalának hosszát!

9. K1 Az egységnyi területű rombusz egyik szöge 120°-os. Mekkora az oldala?

10. K2 Mekkora távolságra lehet egymástól egy 6 cm-es és egy 8 cm-es párhuzamos húr egy 5 cm sugarú körben?

11. E1 Egységsugarú körbe írjunk három egyenlő sugarú kört, amelyek egymást és az egységkört is érintik! Mekkora a beírt körök sugara?

12. E2 Bizonyítsuk be, hogy ha egy téglatest egy csúcsba futó éleinek aránya 2 : 5 : 14, akkor a testátló és az élek hosszának aránya racionális!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **1330–1455.**

16–17. A HÁROMSZÖGEK NEVEZETES PONTJAI, VONALAI

1. példa

Három település közös bevásárlóközpont építését tervezi. A viták elkerülése céljából olyan helyet keresnek, amelyik mindhárom főtértől egyenlő távolságra van. Lehet-e ilyen helyet találni? Azonnal látjuk, hogy ha a három település egy egyenes mentén helyezkedik el, akkor nincs ilyen pont.

Megoldás

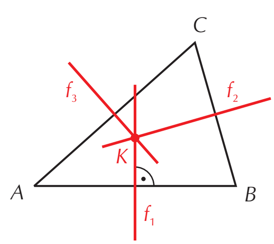
Nézzük, mit jelent a feladat geometriailag! Olyan pontot kell találni, ami egy háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra van. Tudjuk, hogy két ponttól egyenlő távol lévő pontok a két pont által megadott szakasz oldalfelező merőlegesén vannak. Vajon létezik-e olyan pont, ami mindhárom csúcstól ugyanakkora távolságra van?

Tétel

A háromszög oldalfelező merőlegesei egy ponton mennek át, ez a pont a háromszög köré írt kör középpontja.

Bizonyítás

Vegyünk fel két oldalfelező merőlegest, f_1-t és f_2-t. Ezek metszéspontját jelölje K. Mivel K rajta van AB felezőmerőlegesén, ezért $KA = KB$. A K azonban rajta van BC felezőmerőlegesén is, így $KB = KC$. Láthatjuk, hogy $KB = KA = KC$, tehát K illeszkedik AC oldal felezőmerőlegesére is, és így a K középpontú KA sugarú kör átmegy mindhárom csúcson.



A háromszög köré írt kör középpontja a háromszögön belül van, ha a háromszög hegyesszögű, a háromszögön kívül van, ha a háromszög tompaszögű, és az átfogó felezőpontja derékszögű háromszög esetén.

A bevásárlóközpontot tehát a települések által meghatározott háromszög köré írt kör középpontjába kell építeni.

2. példa

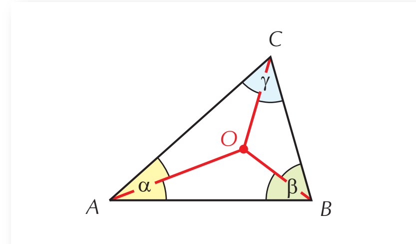
Az új, háromszög alakú dohányzóasztalra olyan kör alakú terítőt keresünk, ami a lehető legnagyobb, de egyik oldalon se nyúlik túl az asztalon, nehogy lehúzza Pincsi Piri, a család kedvence. Geometriailag ez tehát azt jelenti, hogy lehet-e minden háromszögbe olyan kört írni, ami mindhárom oldalát érinti. Két oldalt érintő kört tudnánk írni, hiszen a szögfelező pontjai körül lehet ilyet rajzolni. Vajon létezik-e olyan kör, ami mindhárom oldalt érinti?

Tétel

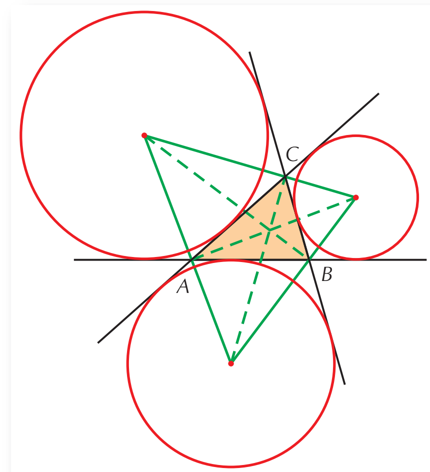
A háromszög belső szögfelezői egy ponton mennek át, ez a pont a háromszögbe írt kör középpontja.

Bizonyítás

Vegyük fel az ABC háromszögben két szög, α és β belső szögfelező egyenesét! Ezek metszéspontja legyen O. Az O pont rajta van α szögfelező egyenesén, ezért egyenlő távolságra van az AC és AB egyenestől, de egyenlő távol van az AB és BC egyenestől is, mert β szögfelezőjére is illeszkedik. Tehát O egyenlő távolságra van az AC és BC egyenestől, így illeszkedik γ szögfelezőjére is. O tehát egyenlő távol van a háromszög mindhárom oldalától, ezért lehet O középponttal olyan kört írni, ami a háromszög minden oldalát érinti.



Olyan kör alakú terítőre van tehát szükségünk, aminek sugara egyenlő a beírt kör sugarával, de azt se lehet akárhová letenni. Vigyázni kell, hogy a terítő középpontja az asztal beírt körének középpontja felett legyen.



Fogalmak
háromszög köré írt köre;
háromszög beírt köre;
háromszög hozzáírt körei.

Megjegyzés
Hasonlóan bizonyítható, hogy a háromszög bármely két külső szögfelező egyenese és a harmadik csúcsból induló belső szögfelező egyenese is egy ponton megy át, ezek körül a pontok körül olyan köröket lehet rajzolni, amelyek a háromszög egyik oldalát és másik két oldalának meghosszabbítását érintik. Ezeket a köröket a háromszög hozzáírt köreinek nevezik.

FELADATOK

1. K1 Válasszuk ki az alábbi állítások közül az igazakat! Válaszunkat indokoljuk!
A háromszög köré írt kör középpontja
a) mindig rajta van egy magasságon;
b) mindig a háromszög belső pontja;
c) van olyan háromszög, amiben rajta van valamelyik oldalfelező merőlegesen.

2. K2 Szerkesszünk háromszöget, ha adott két oldala és a körülírt kör sugara! Hány megoldás van?

3. K1 Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a hozzá tartozó magassága és a körülírt kör sugara!

4. K1 Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a körülírt kör sugara és az adott oldalon fekvő egyik szög!

5. E1 Bontsunk fel egy háromszöget három egyenlő szárú háromszögre!

6. K2 Az ABC háromszög beírt körének középpontja O. Az $AOB \sphericalangle = 150°$. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög tompaszögű!

7. K1 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a beírt kör sugara!

8. K1 Válasszuk ki az alábbi állítások közül az igazakat! Válaszunkat indokoljuk!
A háromszögbe írt kör középpontja
a) mindig rajta van egy magasságon;
b) mindig a háromszög belső pontja;
c) nincs olyan háromszög, ahol egybeesik a háromszög köré írt kör középpontjával.

9. E1 Mekkorák a háromszög külső szögfelezői által alkotott háromszög szögei?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **554–574; 587; 588; 598.**

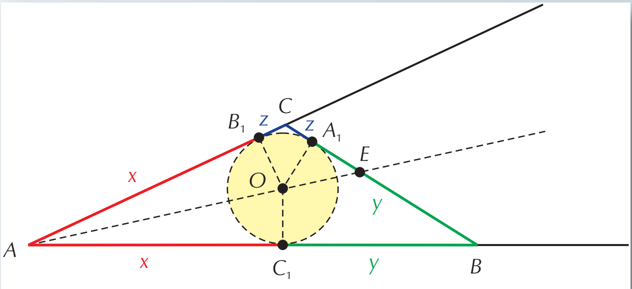
A HÁROMSZÖG OLDALAIT ÉRINTŐ KÖRÖK (Olvasmány)

Emelt szint

A továbbiakban az *ABC* háromszög oldalait a hagyományos módon jelöljük: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

1. példa

Jelölje az *ABC* háromszög oldalainak és beírt körének érintési pontjait rendre A_1, B_1, C_1. Fejezzük ki az AC_1, C_1B, BA_1 stb. érintőszakaszok hosszát a háromszög oldalai segítségével!



Megoldás

Adott körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza megegyezik, így bevezethetjük az $AC_1 = AB_1 = x$, $BC_1 = BA_1 = y$ és $CA_1 = CB_1 = z$ jelöléseket (ábra). Az új ismeretlenekkel három egyenletet írhatunk fel:

(1) $y + z = a$,
(2) $x + z = b$,
(3) $x + y = c$.

Adjuk össze az egyenleteket! Azt kapjuk, hogy $2(x + y + z) = a + b + c$. A félkerület s jelölésével $x + y + z = s$ adódik, és innen az (1) – (3) egyenletekből x, y és z kifejezhető:

$x = s - a$; $y = s - b$; $z = s - c$.

Az eredmény szemléletes, a szimmetria miatt könnyen megjegyezhető: az *A* csúcsból kiinduló érintőszakasz hossza $s - a$, a *B* csúcsból kiindulóé $s - b$, a *C*-ből kiindulóé $s - c$.

Kísérlet

Szerkessz egy A4-es papírlapra adott oldalakkal egy háromszöget, és szerkeszd meg a beírt kör és az oldalak érintési pontjait! Mérd meg az érintőszakaszok hosszát, és ennek eredményét hasonlítsd össze a számolás eredményével!

2. példa

Jelölje az ABC háromszög oldalegyenesei és a BC oldalához hozzáírt kör érintési pontjait rendre A_2, B_2, C_2. Fejezzük ki az AC_2, C_2B, BA_2 stb. érintőszakaszok hosszát a háromszög oldalai segítségével!

Megoldás

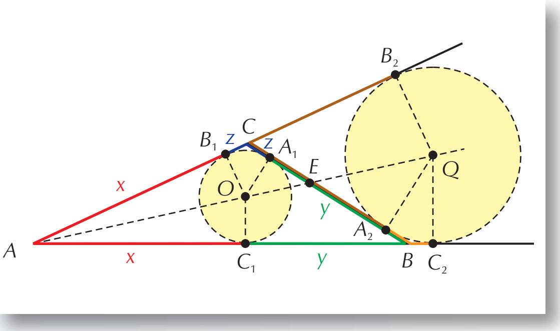
Adott körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza megegyezik, így $AC_2 = AB_2$, $BC_2 = BA_2$ és $CA_2 = CB_2$. Az

(1) $AB_2 = AC + CA_2$ és
(2) $AC_2 = AB + BA_2$

egyenleteket összeadva

$$AB_2 + AC_2 = AC + AB + CA_2 + BA_2 = a + b + c$$

adódik, s mivel $AB_2 = AC_2$, így $AB_2 = AC_2 = \frac{a+b+c}{2}$.



Az $\frac{a+b+c}{2} = s$ jelölést alkalmazva a keresett szakaszok hossza:

$$AC_2 = AB_2 = s; \quad BC_2 = BA_2 = s - c; \quad \text{és} \quad CA_2 = CB_2 = s - b.$$

(Itt például BC_2 az $AC_2 - AB$ különbségből számítható.)

Megjegyzések

A háromszög AE szögfelező egyenesén természetesen rajta van a beírt kör O, valamint a BC oldalhoz hozzáírt kör Q középpontja. (Szimmetriaokok miatt hasonlót állíthatunk a BO és CO szögfelezők, valamint az AC és AB oldalakhoz írt körök középpontjairól is.) Az ábrán $AB > AC$, így az A_1 pont a CE, az A_2 pont a BE szakasz pontja.

Ha $AB = AC$ teljesülne, vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú lenne, akkor az A_1, A_2, E pontok egybeesnének. Ha pedig $AB < AC$, az A_1 és A_2 pontok helyzete megváltozik: A_2 kerül a CE, és A_1 a BE szakaszra.

A levezetett összefüggések érdekes következménye, hogy – a háromszög konkrét adataitól függetlenül – $CA_1 = BA_2$. Vagyis a BC oldalt érintő körökhöz egy-egy csúcsból azonos hosszúságú érintőszakaszok húzhatók.

Meghatározhatjuk az A_1A_2 szakasz hosszát is: $A_1A_2 = BC - CA_1 - BA_2 = a - 2(s - c) = c - b$. (Ha $AB = AC$, akkor $A_1A_2 = 0$, ha pedig $AB < AC$, akkor $A_1A_2 = b - c$. A három esetet egybefoglalva írhatjuk, hogy $A_1A_2 = |c - b|$, azaz a háromszög két közrefogó oldalának a különbsége.)

Végezetül megemlíthetjük, hogy az AB, illetve AC oldalakhoz írt körök esetén az érintőszakaszok hosszaira kapott eredmények a megfelelő szimmetrikus kifejezések lesznek.

FELADATOK

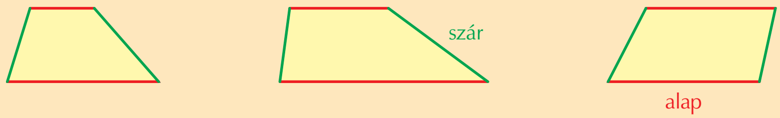
1. E1 Határozzuk meg a háromszögbe írt kör sugarát az oldalak segítségével!
(Segítség: Írjuk fel az ABC háromszög területét az AOB, BOC, AOC területek összegeként!)

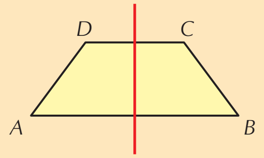
2. E1 Határozzuk meg a háromszög oldalaihoz írt körök sugarát az oldalak segítségével!
(Hasonlóan: $T_{ABC} = T_{ABQ} + T_{ACQ} - T_{BCQ}$).

18. A NÉGYSZÖGEK ÁTTEKINTÉSE, OSZTÁLYOZÁSA

A négyszögeket célszerű oldalaik párhuzamossága, illetve meghatározó adataik közötti egyenlőségek szerint osztályozni.

Azokat a négyszögeket, amelyeknek van két párhuzamos oldaluk, **trapézoknak** nevezzük. E két párhuzamos oldal a trapéz **alapja**, a másik kettő a két **szára**.

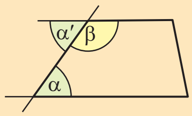




Közülük azokat, amelyeknek a párhuzamos oldalakra merőleges szimmetriatengelyük van, **húrtrapézoknak** hívjuk.

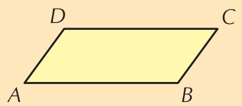
A trapéz egy száron levő két szögének összege 180°, mert a jelölésének megfelelően

$\alpha + \beta = \alpha' + \beta = 180°$.



Ha egy trapézban a szárak egyenlők, akkor **egyenlő szárú trapézról** beszélünk. Az egyenlő szárú trapéz lehet húrtrapéz vagy paralelogramma. Húrtrapézokban bármelyik alapon fekvő két szög egyenlő.

Ha egy négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos, **paralelogrammának** nevezzük. A paralelogramma tehát olyan trapéz, amelynek bármely két szemközti oldala tekinthető alapnak.



Gyűjtsük össze a paralelogramma tulajdonságait, fajtáit, azok speciális jellemzőit!

Az a négyszög paralelogramma, amelynek

- szemközti oldalai párhuzamosak;
- szemközti szögei egyenlők;
- bármely két szomszédos belső szögének összege 180°;
- szemközti oldalai egyenlők;
- két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszúságú;
- két átlója felezi egymást;
- van szimmetria-középpontja.

Ha egy négyszögben a felsorolt tulajdonságok bármelyike teljesül, akkor a négyszög paralelogramma.

Ha egy paralelogramma két szomszédos szöge egyenlő, akkor mind a négy szöge derékszög. A derékszögű paralelogrammát **téglalapnak** mondjuk.

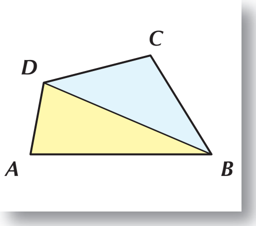
A téglalap is szimmetrikus trapéz. Átlói egyenlők.

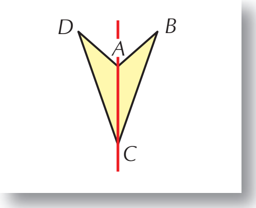
Ha egy négyszög mindegyik szöge derékszög, akkor szemközti oldalpárjai párhuzamosak, tehát paralelogramma, s így az előbbiek szerint téglalap.

Ha egy paralelogramma szomszédos oldalai is egyenlők, akkor mind a négy oldala egyenlő. Az egyenlő oldalú paralelogrammát **rombusznak** nevezzük.

A rombusz átlói merőlegesek egymásra, és felezik a rombusz szögeit. Ha egy négyszög minden oldala egyenlő, akkor két-két szemközti oldala is egyenlő, s így paralelogramma, az előbbiek szerint tehát rombusz.

Ha egy négyszögnek az oldalai és a szögei is egyenlők, **négyzetnek** nevezzük. A négyzet téglalap is és rombusz is.





Valamennyi négyszög belső szögeinek összege 360°. Ez azonnal belátható, ha egy négyszöget egyik átlójával két háromszögre bontunk.

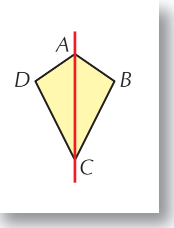
Azok a négyszögek, amelyeknek van egyik átlójukra illeszkedő szimmetriatengelyük, a deltoidok.

A deltoid következő tulajdonságait olvashatjuk le:

a) két-két szomszédos oldala egyenlő *(AB = AD, BC = CD)*;

b) a szimmetriatengely merőlegesen felezi a másik átlót;

c) a szimmetriatengely felezi a deltoid két szemközti szögét.

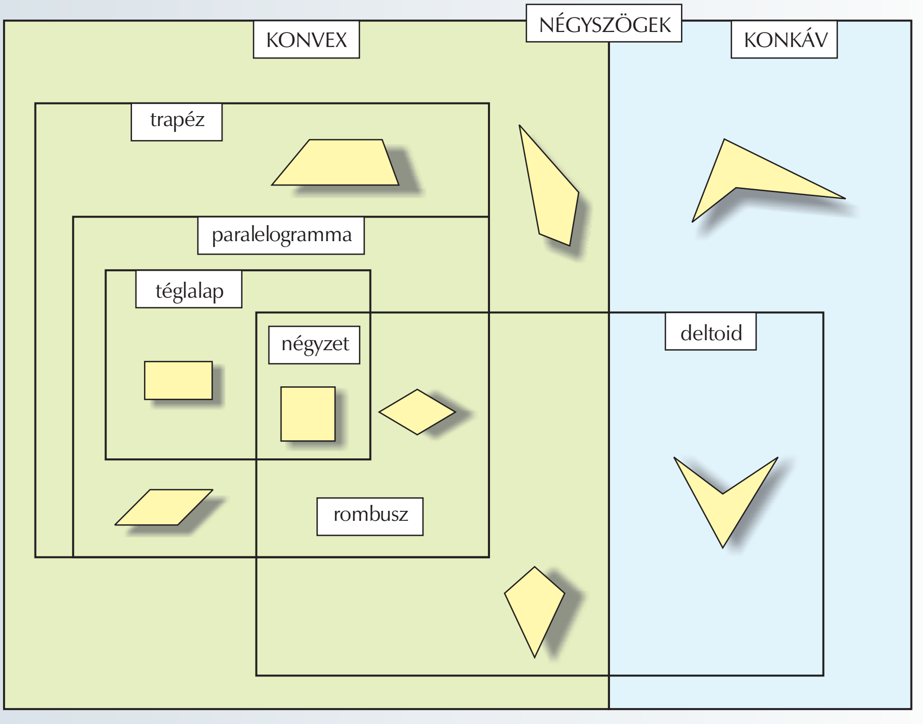


Deltoidnak kell tekintenünk a rombuszt (négyzetet) is. Ezeknek mind a két átlója szimmetriatengely. A deltoidnak lehet konkáv szöge is. A *deltoidnak van* két szemközti szöge, amelyek egyenlők *(B ∢ = D ∢)*.

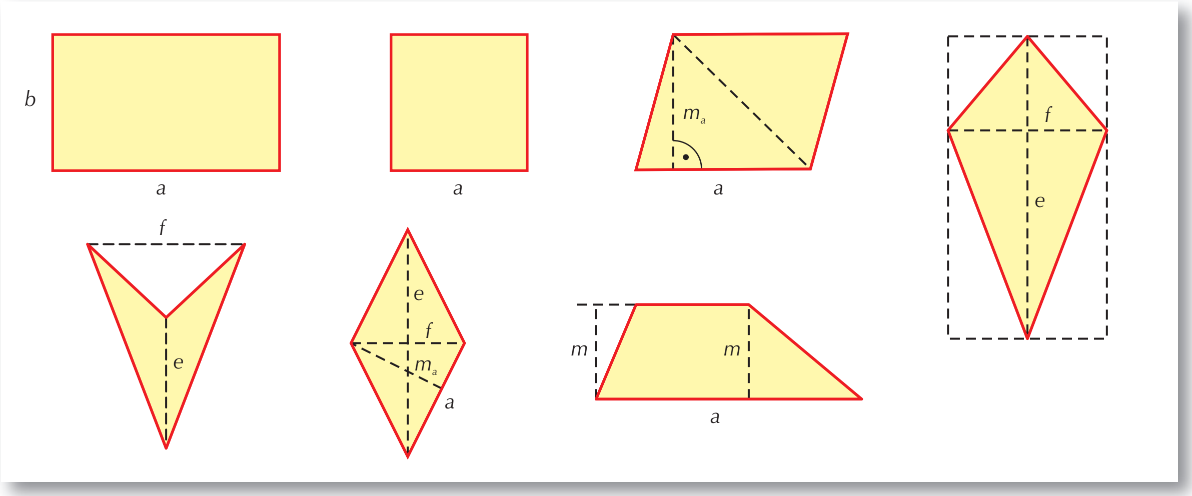
1. példa

Ábrázoljuk Venn-diagramon a négyszögek különböző fajtáit!

Megoldás



SPECIÁLIS NÉGYSZÖGEK TERÜLETEI



Az általános iskolában már megismerkedtünk a speciális négyszögek területének kiszámításával, az alábbiakban összefoglaljuk ezeket a tudnivalókat.

Az a és b oldalú **téglalap** területe ab.
Az a oldalú **négyzet** speciális téglalap, területe a^2.
Ha egy **paralelogramma** a oldalához tartozó magassága m_a, akkor a területe am_a.

Indoklásul például azt mondhatjuk, hogy az egyik átlót behúzva a paralelogramma két középpontosan szimmetrikus helyzetű háromszögre bontható, amelyek területe $\frac{am_a}{2}$. (Természetesen ha a paralelogramma b oldalához tartozó magassága m_b, akkor a területe bm_b módon is felírható.)

Ha a **deltoid** két átlója e és f, akkor a területe $\frac{ef}{2}$.

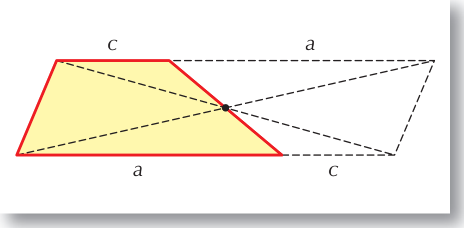
Ugyanis a deltoidot a tükörtengelye két tengelyesen szimmetrikus helyzetű háromszögre bontja, és egy háromszög területe $\frac{e\frac{f}{2}}{2} = \frac{ef}{4}$.

A konvex deltoid területképletére egy másik bizonyítást kapunk, ha a deltoidot az ábra szerint egy e és f oldalú téglalapba foglaljuk be. Ekkor a kapott 4-4 részháromszög egymás középpontos vagy tengelyes tükörképe, és közülük 2-2 tartozik a deltoidhoz. Vagyis a deltoid területe a téglalap területének éppen a fele, azaz $\frac{ef}{2}$.

A **rombusz** paralelogramma és deltoid is, ezért mindkét négyszög területképlete érvényes rá: $\frac{am_a}{2}$, illetve $\frac{ef}{2}$ módon is kiszámolhatjuk a területét. (Az oldala a, a hozzá tartozó magasság m_a, a két átló e és f.)

Ha a **trapéz** párhuzamos oldalai a és c, a hozzájuk tartozó magassága m, akkor a területe $\frac{(a+c)m}{2}$.

Indoklás: a trapéz egyik átlóját behúzva két háromszögre bontható. Ezek területe $\frac{am}{2}$ és $\frac{cm}{2}$, és az összegük valóban $\frac{(a+c)m}{2}$.



(**Másképpen** is eljárhatunk (útmutatás): ha a trapéz egyik szárának felezőpontjára tükrözzük a másik szárát, akkor egy olyan $a + c$ oldalú és m magasságú paralelogrammát kapunk, amely éppen két, egymásra középpontosan tükrös trapézból áll.)

Fogalmak
trapéz;
húrtrapéz;
paralelogramma;
rombusz;
téglalap;
négyzet;
deltoid;
konkáv deltoid
területe.

FELADATOK

1. K1 Az alábbi állítások közül melyek igazak és miért?
a) Minden téglalap trapéz.
b) Van olyan deltoid, ami paralelogramma.
c) Minden trapéz konvex.
d) Ha egy négyszögben van két egyenlő szög, akkor paralelogramma.
e) Ha egy paralelogrammának van szimmetriatengelye, akkor az téglalap.
f) Ha egy négyszögben van két derékszög, akkor az még lehet, hogy nem trapéz.

2. K2 Egy derékszögű trapéz három oldalának hossza x, x és $2x$. Mekkorák lehetnek a szögei és a negyedik oldala? ($x > 0$)

3. E1 Egy derékszögű trapézt az egyik átlója két egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja. Fejezzük ki a trapéz oldalainak hosszát a derékszögű szár hosszának függvényében!

4. K2 *a)* Mennyi annak a négyzetnek a területe, amelynek az átlója x cm hosszú?
b) Mennyi annak a téglalapnak a területe, amelynek egyik átlója 26 cm és egyik oldala 10 cm hosszú?
E1 *c)* Mennyi annak a deltoidnak a területe, amelynek egy csúcsából kiinduló oldalainak és átlójának hossza $a = 13$ cm, $b = 20$ cm és $e = 24$ cm?

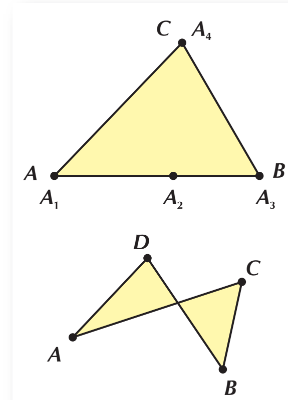
5. K2 Egy paralelogramma oldalai 10 és 4 egység hosszúak, és területének a mérőszáma is egész szám. Hányféle értéket vehet fel a paralelogramma területe?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **635–714; 736–765.**

19. A SOKSZÖGEKRŐL

A sokszögek közül a háromszögekkel, négyszögekkel már foglalkoztunk, fogalmuk ismert.



A sokszögek általános definíciójának megfogalmazásánál gondolnunk kell arra, hogy két szomszédos szakasz egyenesszöget is alkothat. Az ábra A_1A_2; A_2A_3; A_3A_4; A_4A_1 egymáshoz csatlakozó négy darab szakasza az ABC háromszöget határozza meg.

Arra is gondolnunk kell, hogy az egymáshoz csatlakozó szakaszoknak a végpontokon kívül is lehetnek közös pontjaik, ezeket hurkolt sokszögeknek nevezik. Ilyen sokszögekkel mi nem foglalkozunk.

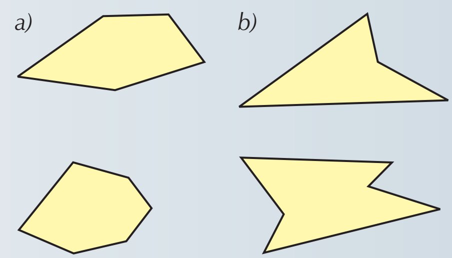
Az olyan sokszögeknek a fogalmát, amelyekkel mi dolgozunk, az alábbiakban fogalmazzuk meg:

Az n-oldalú sokszög a síknak egymáshoz csatlakozó A_1A_2; A_2A_3; …; $A_{n-1}A_n$; A_nA_1 szakaszok által határolt korlátos része, ahol az A_1; A_2; …; A_n a sík különböző pontjai, és a szakaszok között nincs olyan két szomszédos, amelyek egyenesszöget zárnának be, a szakaszoknak nincsenek közös pontjaik a végpontjaikon kívül.

Az A_1; A_2; …; A_n pontok a sokszög csúcspontjai; az A_1A_2; A_2A_3; …; A_nA_1 szakaszok a sokszög oldalai.

1. példa

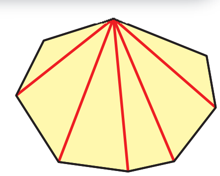
Az ábrán látható sokszögek között feltűnő különbségeket látunk: az *a)* alatti sokszög bármely két pontját összekötő szakasznak minden pontja a sokszöghöz tartozik; a *b)* alatti sokszögnek ez a tulajdonsága nincs meg.



Azokat a sokszögeket (általánosabban alakzatokat), amelyek bármely két pontjukkal együtt azok összekötő szakaszát is tartalmazzák, *konvex sokszögeknek* (konvex alakzatoknak) nevezzük. Azt a sokszöget (alakzatot), amely nem konvex, *konkávnak* mondjuk. Egy konvex sokszög minden belső szöge kisebb, mint 180°. Konkáv sokszögnek van konkáv szöge.

KONVEX SOKSZÖG ÁTLÓINAK SZÁMA

Az n-oldalú konvex sokszög **egy csúcsából húzható átlóinak a száma** $n - 3$.



Nyilvánvaló, hogy az n-oldalú konvex sokszög A csúcsából saját magához és a két szomszédos csúcshoz nem húzhatunk átlót, de minden más csúcshoz húzható átló.

Az n-oldalú konvex sokszögben húzható **összes átló száma** $\frac{n(n-3)}{2}$.

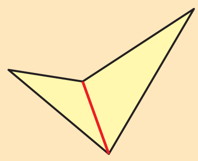
Az n csúcs mindegyikéből $(n - 3)$ átlót húzhatunk. Így azonban minden átlót, mindkét végpontjából kiindulva, tehát kétszer vettünk számításba. Ezért az $n(n - 3)$ szorzat fele adja az átlók számát.

KONVEX SOKSZÖG BELSŐ SZÖGEINEK ÖSSZEGE

Az n-oldalú konvex sokszög **belső szögeinek összege** $(n-2)\cdot 180°$.

Bizonyítás

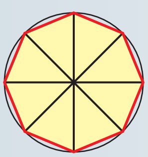
Konvex n-oldalú sokszög egy csúcsából $n-3$ átló húzható. Ezek a sokszöget $n-2$ darab háromszögre bontják. Ezek belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$, azonos az n-oldalú konvex sokszög belső szögeinek összegével.



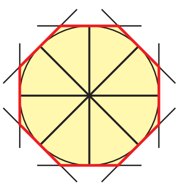
A konkáv négyszög belső szögeinek összege is 360°. Bizonyítás nélkül közöljük, hogy **bármely n-oldalú konkáv sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$**.

Ha egy sokszög minden oldala egyenlő hosszúságú és minden szöge egyenlő nagyságú, akkor azt *szabályos sokszögnek* nevezzük. Az n oldalú szabályos sokszög minden belső szöge $\frac{(n-2)}{n}\cdot 180°$.

2. példa



Osszunk fel egy kör középpontjánál levő teljesszöget sugarakkal n egyenlő szögre! A sugarak végpontjait összekötő sokszög szabályos n-szög, hiszen ha a sokszöget a kör középpontja körül $\frac{360°}{n}$ szöggel elforgatjuk, a sokszög önmagába megy át. Ebből következik, hogy szögei és oldalai egyenlő nagyságúak.



Szabályos n-szöghöz jutunk akkor is, ha a kör középpontjánál levő teljesszöget sugarakkal n egyenlő részre osztjuk, és a sugarak végpontjaiban a körhöz érintőket húzunk. Ez megint a kör középpontja körüli forgatás segítségével látható be.

Leírtuk a szabályos sokszög származtatását a körülírt, illetve beírt köre segítségével. Szabályos sokszöget lehet másképpen is származtatni. (Gondoljunk például a szabályos háromszögre vagy a négyzetre. Definíciójukban nem szerepel kör.) Igazolható, hogy egy szabályos sokszögbe, illetve köré mindig írható kör.

A szabályos sokszög bármelyik oldalfelező merőlegesére és szögfelezőjére szimmetrikus.

Egy n oldalú szabályos sokszögnek pontosan n szimmetriatengelye van. Minden oldalfelező merőleges és minden szögfelező szimmetriatengely. Ez összesen $2n$ egyenes lenne, de páratlan oldalszámú szabályos sokszögekben a szögfelező és a szemközti oldal felezőmerőlegese esik egybe, míg páros oldalszámú szabályos sokszögek esetén két szemközti csúcs szögfelezője azonos és két szemközti oldal felezőmerőlegese azonos.

Szimmetria-középponttal azonban csak a páros oldalúszámú szabályos sokszögek rendelkeznek.

3. példa

Hány átlója van annak a sokszögnek, amelyben a szögek összege 1800°?

Megoldás

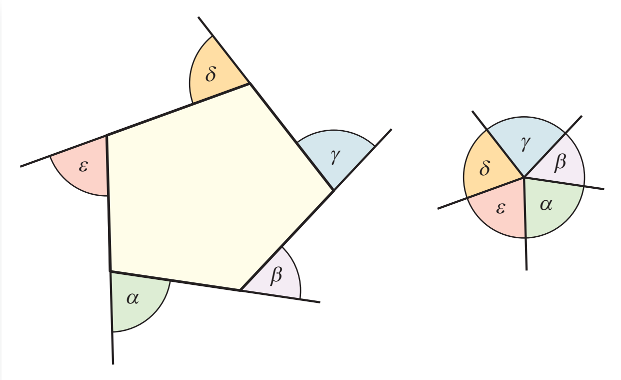
Mivel a sokszög szögösszege $(n-2)\cdot 180°$, az $(n-2)\cdot 180° = 1800°$-ból adódik, hogy a sokszög 12 oldalú. Egy $n = 12$ oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2} = 54$.

KONVEX SOKSZÖG KÜLSŐ SZÖGEINEK ÖSSZEGE

Jelöljük meg egy konvex sokszög külső szögeit valamely körüljárási irány szerint! Ha most a sokszög megjelölt külső szögtartományait egy közös kezdőpontból mérjük fel, akkor érdekes összefüggést vehetünk észre: a külső szögek összege éppen a teljes szög.

Az ábrán egy ötszöget látunk, ennek megfelelő külső szögei rendre α, β, γ, δ, ε. A külső szögek csúcsait közös kezdőpontba mozgattuk, és valóban, $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon =$ $= 360°$ adódott.

Az eljárás bármely konvex sokszögre végrehajtható, így szemléletesen kaptuk a tételt:



Tétel

Konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.

Bizonyítás

Jelölje a konvex n-szög belső szögeit α_1, α_2, α_3, … α_n. Akkor a külső szögek rendre $180° - \alpha_1$, $180° - \alpha_2$, $180° - \alpha_3$, … $180° - \alpha_n$, és ezek összegét kell meghatároznunk. A tagokat csoportosítjuk:

$180° - \alpha_1 + 180° - \alpha_2 + 180° - \alpha_3 + \ldots + 180° - \alpha_n = n \cdot 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)$.

Zárójelen belül éppen a belső szögek összege szerepel, amiről korábban beláttuk, hogy $(n - 2) \cdot 180°$. Így a külső szögek összege $n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 360°$. Ezzel az állítást beláttuk.

4. példa

Hány hegyesszöge lehet egy konvex sokszögnek?

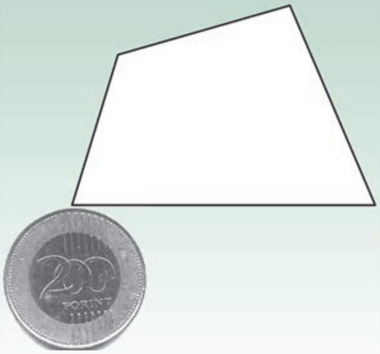
Megoldás

A külső szögek összege 360°. Egy belső hegyesszög külső szöge mindig nagyobb, mint 90°, ezért négy hegyesszög külső szöge több mint 360° lenne. Tehát akárhány oldalú is a konvex sokszög, nem lehet 3-nál több hegyesszöge. (Ennyi hegyesszöge pedig egy háromszögnek is lehet.)

Fogalmak
konvex sokszög;
konkáv sokszög;
sokszög szögösszege;
átlók;
átlók száma;
szabályos sokszög.

Érdekesség

Házi méréseink alapján egy 200 Ft-os érme kerülete jó közelítéssel 88 mm. (Ellenőrizd!) Szerkessz egy olyan négyszöget, amelynek kerülete 35,2 cm, és próbálj meg egy 200 Ft-os érmét a sokszög határán végiggörgetni! (Vigyázat, egyáltalán nem olyan könnyű a „csúszásmentes” görgetés!)
Hányszor fordult körbe az érme, míg a sokszög határán végiggördült?



FELADATOK

1. K1 Hány átlója van egy konvex
a) 5-szögnek; *b)* 12-szögnek; *c)* 29-szögnek?

Számítsuk ki a sokszögek belső szögeinek összegét is!

2. K1 Egy szabályos hatszög csúcsai közül hagyjunk el kettőt. Milyen négyszögek keletkezhetnek? Határozzuk meg a keletkező négyszögek szögeit!

3. K2 Mekkora szöget zárnak be egy szabályos nyolcszög egy csúcsból induló átlói?

4. K2 Egy szabályos sokszögnek 54 átlója van. Mekkora a sokszög egy szöge? Van-e a sokszögnek szimmetria-középpontja?

5. K2 Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, amelyre igaz, hogy belső szögei összegéhez hozzáadva egyik külső szögét 1500°-ot kapunk?

Ajánlott feladatok

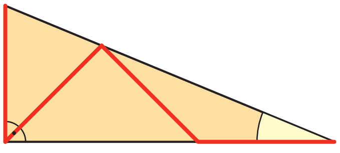
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **64–81.**

TUDÁSPRÓBA (Tananyagon kívüli, nem kötelező rész)

A következő feladatok a II. fejezet témaköréhez sorolhatók, végeredményük minden esetben egy vagy több szám. A végeredményeket a 107. oldalon találod meg.

1. Egy háromszögben $a = 70$ cm és $b = 84$ cm. Hányféle értéket vehet fel a harmadik c oldal, ha a hossza egész cm?

2. Hány fokos a derékszögű háromszög jelölt hegyesszöge? (A vastag piros szakaszok egyenlők.)



3. Hány olyan derékszögű háromszög van, amelyek befogói hosszának mérőszáma egyjegyű egész szám, és területük mérőszáma is egész szám?

4. Egy háromszögben $a : b = 2 : 3$. Mekkora m_a, ha $m_b = 6$? (m_a és m_b az a, illetve b oldalhoz tartozó magasság.)

5. Az ABC derékszögű háromszög két befogója $a = 12$ cm és $b = 16$ cm hosszú. Milyen hosszú
a) az A csúcsból a BC oldal felezőpontjába húzott szakasz (az ún. súlyvonal);
b) a C csúcshoz tartozó magasság?
c) Próbáld meg kiszámítani a B csúcshoz tartozó szögfelező hosszát is!

6. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = 20$ cm, $AC = BC = 26$ cm.
a) Milyen távol van a körülírt kör középpontja az AB egyenestől?
b) Próbáld meg kiszámítani a beírt kör középpontja és az AB egyenes távolságát!

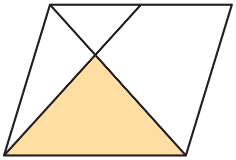
7. Három, egymást kívülről érintő kör sugarának hossza 1 m, 2 m és 3 m. Mekkora a középpontjaik által meghatározott háromszög területe?

8. Egy deltoid egyik belső szöge 70°-os, egy másik külső szöge 80°-os. Mekkorák lehetnek a deltoid belső szögei?

9. Hány oldalú az a konvex sokszög, melynek 100-szor annyi átlója van, mint ahány csúcsa?

10. 30 pont közül semelyik három nincs egy egyenesen. A pontokat pirossal vagy kékkel kiszíneztük, majd a kék pontokat kék szakaszokkal összekötöttük. Hány piros pont van, ha 91 kék szakasz keletkezett?

11. Az ábrán látható paralelogramma területe 30 cm². Mennyi a satírozott háromszög területe? (Az egyik csúccsal az oldal felezőpontját kötöttük össze.)

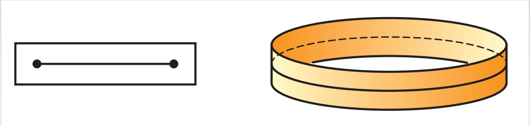


Érdekesség (gyakorlati feladat)

A Möbius-szalagról

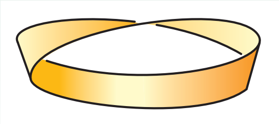
A geometria tudományága nagyon sokszínű. Egy érdekes *topológiai* kísérletet otthon is megcsinálhatsz, csak papír, ceruza, olló és ragasztó kell hozzá.

Vágj ki egy papírcsíkot! Ha a ceruzádat ráteszed az egyik széléhez közel a papír egy pontjára, és a másik széle felé haladsz, akkor egy olyan vonalat tudsz húzni, amely a papír egyik oldalát majdnem végigéri. (A papír széle nem érinthető.)



Ragaszd össze egy hasonló papírcsík két végét úgy, hogy egy papírgyűrűt kapj! Ha most az előző módon vonalat húzol, akkor a vonal a papírgyűrű egyik felét teljesen körbeéri.

Most ragassz össze egy hasonló papírcsíkot úgy, hogy előtte egyet „tekersz” az egyik végén (180°-os fordítás)! Ugyanaz a papír, ugyanaz a ceruza, mint az előbb. Mégis: ha most is meghúzod a vonalat, egészen váratlan eredményt kapsz. A lap alján egy kétszer megtekert és összeragasztott szalag képe van. Készítsd el, ennek is húzz vonalat a közepére, és aztán vágd végig a vonal mentén. Most is hihetetlen eredményt fogsz kapni…



III. ALGEBRA

Az algebra a matematika egyik legrégebbi területe. Nem véletlen, hogy például az indiai matematika dicshimnusszal adózik az algebra előtt: olyan tudomány ez, amely nélkül a matematikai problémák megoldása szinte lehetetlen. A szimbólumok használata az algebrában lényeges, ám elsősorban nem ez különbözteti meg az aritmetikától. „Az ismeretlenekkel számolás tana az ismert mennyiségekkel való számolás forrása… az algebra a számolás olyan formája, amelyet bizonyítás kísér; ellenkező esetben nem volna különbség aritmetika és algebra között.” [Bhászkara (1114–1185) indiai matematikus]

A képen London jellegzetes új irodaháza látható – The Gherkin/Az uborka. Az épület a korábbi Balti Tőzsde helyén épült. Ma biztosítótársaság működik benne.

20. MŰVELETEK RACIONÁLIS SZÁMKÖRBEN

Az előző években megtanultuk, hogyan lehet műveleteket (összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás) végezni a racionális számok között.

A következő példákon keresztül elevenítsük fel ismereteinket!

A MŰVELETVÉGZÉSEK SORRENDJE

Ha több művelet is szerepel a műveletsorban, akkor célszerű a következő sorrendet betartani:

1. Végezzük el a zárójelekben levő műveleteket.
2. Végezzük el a hatványozásokat.
3. Végezzük el a szorzásokat, osztásokat. Ha ezek szerepelnek csak, akkor haladjunk a műveletvégzésben balról jobbra.
4. Végezzük el az összeadásokat, kivonásokat. Ha ezek szerepelnek csak, akkor haladjunk a műveletvégzésben balról jobbra.

1. példa

$$[(7-3)-2\cdot(2+5)]^2=[4-2\cdot 7]^2=[4-14]^2=[-10]^2=100.$$

$$12:3\cdot\left(4^2-1^3\right)-10=12:3\cdot(16-1)-10=12:3\cdot 15-10=4\cdot 15-10=60-10=50.$$

TÖRTSZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA, HA A SZÁMLÁLÓ ÉS A NEVEZŐ EGÉSZ SZÁM

Bővítésnek nevezzük azt az átalakítást, amikor a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk.

Egyszerűsítésnek nevezzük azt az átalakítást, amikor a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk.

Bővítéskor és egyszerűsítéskor a tört értéke nem változik.

2. példa

Bővítés: $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}=\frac{6}{9}=\frac{40}{60}=\ldots$

Egyszerűsítés: $\frac{75}{100}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

3. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-2\frac{7}{8}=$$

A különböző nevezőjű törteket összeadás és kivonás esetén általában célszerű közös nevezőre hozni. Közös nevező mindig lehet a nevezők szorzata, esetenként találhatunk a szorzatnál kisebb közös nevezőt is. Ez lehet a nevezők legkisebb közös többszöröse.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-2\frac{7}{8}=\frac{16}{24}+\frac{6}{24}-\left(\frac{48}{24}+\frac{21}{24}\right)=\frac{16+6-(48+21)}{24}=-\frac{47}{24}.$$

TÖRTSZÁMOK SZORZÁSA, OSZTÁSA, HA A SZÁMLÁLÓ ÉS A NEVEZŐ EGÉSZ SZÁM

Egész számmal törtet úgy is szorozhatunk, hogy a számlálót megszorozzuk az egész számmal, a nevezőt változatlanul hagyjuk.

Egész számmal törtet úgy is szorozhatunk, hogy a nevezőt elosztjuk az egész számmal, a számlálót változatlanul hagyjuk.

4. példa

$$\frac{7}{9}\cdot 3=\frac{7\cdot 3}{9}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3} \quad \text{vagy} \quad \frac{7}{9}\cdot 3=\frac{7}{9:3}=\frac{7}{3}.$$

Törtet egész számmal úgy is oszthatunk, hogy a számlálót elosztjuk az egész számmal, a nevezőt változatlanul hagyjuk.

Törtet egész számmal úgy is oszthatunk, hogy a nevezőt megszorozzuk az egész számmal, a számlálót változatlanul hagyjuk.

5. példa

$$\frac{4}{11}:2=\frac{4:2}{11}=\frac{2}{11} \quad \text{vagy} \quad \frac{4}{11}:2=\frac{4}{11\cdot 2}=\frac{4}{22}=\frac{2}{11}.$$

Törtszámot törtszámmal úgy szorozhatunk, hogy a számlálók szorzatát elosztjuk a nevezők szorzatával.

6. példa

$$\frac{6}{13}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6\cdot 2}{13\cdot 5}=\frac{12}{65}; \qquad -\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{5\cdot 2}{7\cdot 3}=-\frac{10}{21}.$$

Törtszámot törtszámmal úgy oszthatunk, hogy az osztás helyett az osztó reciprok értékével szorzunk.

7. példa

$$\frac{7}{9}:\frac{2}{3}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{18}=\frac{7}{6};\qquad -\frac{3}{5}:\frac{7}{4}=-\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=-\frac{12}{35}.$$

MŰVELETEK VÉGES TIZEDES TÖRTEKKEL

1. lehetőség

A véges tizedes törteket felírhatjuk közönséges tört alakban, majd így végezzük el a műveleteket.

8. példa

$$(4,2+3,08-0,25)\cdot 0,75=\left(\frac{42}{10}+\frac{308}{100}-\frac{25}{100}\right)\cdot\frac{75}{100}=\frac{703}{100}\cdot\frac{75}{100}=\frac{52\,725}{10\,000}=5,2725.$$

2. lehetőség

Tizedes törtekkel hasonlóan végezhetünk műveleteket, mint az egész számokkal. Azonban figyelnünk kell, hogy a műveleteket a megfelelő helyiértékeken levő számjegyekkel végezzük, majd a tizedesvessző helyét helyesen állapítsuk meg.

9. példa

$$(4,2+3,08-0,25)\cdot 0,75=7,03\cdot 0,75=5,2725.$$

Ha a műveletsorban közönséges és tizedes törtek is szerepelnek, általában célszerű a tizedes törteket közönséges tört alakba átírni és így számolni. Ha fordítva alakítjuk át őket, akkor előfordulhat, hogy csak közelítően pontos eredményeink lesznek.

Fogalmak
bővítés;
egyszerűsítés.

FELADATOK

1. K1 Számítsuk ki az alábbi műveletsorok eredményét!

a) $5+3\cdot 8-4:2$;
b) $3-24:8+25\cdot 4-10^2$;
c) $0,24:2^3-0,03+2,5\cdot 0,4+3^2$;
d) $(4126-794)\cdot 3$;
e) $76+24:4$;
f) $(76+24):4$;
g) $126+58-12:4$;
h) $56-123+(4+28):(-20)$.

2. K1 Keressünk a különbözőképpen megadott számok között egyenlőket!

a) $(3\cdot 2)^2$;
b) $3\cdot 9-3^2$;
c) $(2^4-2^3:2)\cdot(4^2-2^4)$;
d) $3\cdot(9-3^2)$;
e) $3^2\cdot 2$;
f) $(2^3+3-2\cdot 4)\cdot(2\cdot 2)^2$;
g) $3\cdot 2^2$;
h) $3^2\cdot 2-3\cdot 2$;
i) $3\cdot(3\cdot 2-2)$;
j) $10(11-8)^2\cdot(1+3)^2$.

3. K2 Műveletsort úgy készítettünk, hogy leírtuk a pozitív egész számokat 1-től 2008-ig egymás mellé, majd bármely két szomszédos szám közé +, vagy – jelet írtunk.
Számítsuk ki a műveletsor eredményét, ha
– mindenhova + jelet írtunk;
– váltakozva írtunk + és – jelet, az első + jel volt;
– váltakozva írtunk + és – jelet, az első – jel volt;
– váltakozva írtunk kettő + és egy – jelet, az első és második + jel volt!

4. K1 Az alábbi törtek bővítése vagy egyszerűsítése során hibákat vétettünk. Keressük meg és jelöljük a helyesen elvégzett törtbővítést, illetve -egyszerűsítést. A rosszakat javítsuk ki!

Például $\frac{3}{4}=\frac{5}{6}$ rossz (mert ha 2-vel bővítünk, akkor $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$-ot kapunk).

a) $\frac{11}{44}=\frac{121}{1396}$;
b) $\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$;
c) $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$;
d) $\frac{7}{5}=\frac{49}{25}$.

5. Zsebszámológép használata nélkül döntsük el, hogy az alábbi két szám közül melyik nagyobb!

K2 *a)* $A=\frac{7}{9}$, $B=\frac{9}{11}$;
K2 *b)* $C=\frac{99}{100}$, $D=\frac{100}{101}$;
E1 *c)* $E=\frac{2009}{2010}$, $F=\frac{2010}{2011}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **742–754; 758; 759; 760.**

21. ÖSSZETETT MŰVELETEK RACIONÁLIS SZÁMKÖRBEN

Alkalmazzuk összetettebb műveletsorok esetén az átismételteket! Minden esetben figyeljünk a műveletvégzés sorrendjére!

A bemutatott példákat követve fogalmazzuk meg, mely műveletet végeztük el és milyen módszerrel! A feladatmegoldásokban célszerű használni a bemutatott lépésenkénti átalakítássorozat típusú leírást.

1. példa

$$1\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{7}{8}-\frac{2}{3}\right):\frac{9}{5}\right]=\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{25}{16}-\frac{5}{24}\cdot\frac{5}{9}\right]=\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{25}{16}-\frac{25}{216}\right]=\frac{3}{2}\cdot\frac{675-50}{432}=\frac{3}{2}\cdot\frac{625}{432}=\frac{625}{288}=2\frac{49}{288}.$$

2. példa

$$\frac{\frac{1}{2}-3\cdot\frac{4}{5}}{2\frac{3}{8}+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{12}{5}}{\frac{19}{8}+\frac{6}{8}}=\frac{\frac{5}{10}-\frac{24}{10}}{\frac{25}{8}}=-\frac{19}{10}\cdot\frac{8}{25}=-\frac{76}{125}.$$

3. példa

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}=1+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}.$$

4. példa

$$\frac{1,2-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}:(4,5-3,26)}=\frac{\frac{12}{10}-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}:1,24}=\frac{\frac{12}{10}-\frac{6}{10}}{\frac{2}{3}:\frac{124}{100}}=\frac{\frac{6}{10}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{100}{124}}=\frac{6}{10}\cdot\frac{372}{200}=\frac{1116}{1000}=1\frac{116}{1000}=1,116.$$

5. példa

$$\left(4,1-\frac{7}{5}\right)^3-\left(2,06+\frac{7}{8}\right)^2=(4,1-1,4)^3-(2,06+0,875)^2=2,7^3-2,935^2=19,683-8,614225=11,068775.$$

FELADATOK

1. K2 Számítsuk ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\frac{23}{4}\cdot\left(\frac{8}{12}-\frac{5}{6}+\frac{3}{18}\right):\frac{13}{7}=$;

b) $\left(\frac{3}{4}-2\right)^2-\frac{18}{32}=$;

c) $\left(\frac{3}{4}+7,5-\frac{5}{2}+0,25\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+4,3+\frac{3}{2}+\frac{7}{10}\right)=$;

d) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}+\frac{15}{4}\right)\cdot 8}{22-3\cdot 5}=$.

2. K2 Határozzuk meg, hogy az alábbi műveletsorok eredménye melyik esetben lesz negatív egész szám!

a) $\left(\frac{3}{8}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right):\left(2\frac{1}{3}-\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\right)=$;

b) $\dfrac{3-\frac{1}{5}}{2+\frac{1}{3}}:\dfrac{\left(3\frac{1}{2}\right)^2-((-3)^2+1)}{\left(\frac{-3}{2}\right)^2}=$;

c) $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0,1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0,1+\frac{1}{15}\right)}{\left(0,5+\frac{1}{3}-0,25\right):\left(0,25-\frac{1}{6}\right)}=$;

d) $\left[\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{2}{5}}{-\frac{7}{3}}:\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}\right]\cdot(-5)^2=$;

e) $\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)=$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **754; 755; 756; 757; 762–767; 774; 782.**

22. SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

A mindennapi életben gyakran találkozunk a százalék fogalmával. A banki műveletek és a kamatszámítás során ez az egyik legfontosabb fogalom, de gyakran használjuk a statisztikai kimutatásokban, és kedvelt az esélyek százalékos megadása is. Más tudományterületeken is nélkülözhetetlen az alkalmazása (például a populációbiológiában, vagy kémiában a keverékek készítésekor). A matematikában általában a rész és az egész viszonyát, arányát fejezzük ki a fogalom segítségével. (Az általános iskolában tanultuk, hogy valamely mennyiség 1 százaléka a mennyiség 1 századrészét jelenti.)

1. példa

Egy 1600 Ft-os termék árát a kereskedő 25%-kal felemelte, majd bizonyos idő múlva az új árat 25%-kal csökkentette.

a) Mennyi lett a termék ára a kétszeri árváltoztatás után?

b) Hány százalékkal kell csökkenteni az új árat ahhoz, hogy a végső ár megegyezzen az eredeti árral?

Megoldás

a) Hajlamosak vagyunk arra gondolni, hogy a termék ára összességében nem változott, de ez nem így van. A 25%-os emelés után az új ár $1{,}25 \cdot 1600 = 2000$ Ft lett. A 25%-os csökkentés után az aktuális ár 75%-át kapjuk, azaz $0{,}75 \cdot 2000 = 1500$ Ft-ot. Ennyi lett a végső ár.

Megjegyzés

Mi az oka annak, hogy a termék ára csökkent a kétszeri árváltoztatás után?

Az eredeti ár 25%-a 400 Ft volt, ennyivel történt az áremelés. A megemelt ár 2000 Ft-volt, ennek a 25%-a 500 Ft, ennyivel csökkent a megemelt ár. Vagyis a megemelt ár 25%-a (és így a csökkentés mértéke) nagyobb, mint az eredeti ár 25%-a, az emelés mértéke.

b) Az 1600 a 2000-nek $\frac{1600}{2000} = 0{,}8$ része, azaz 80%-a. Az új árat 20%-kal kell csökkenteni.

2. példa

Egy 8000 Ft árú termékre igen nagy a kereslet, ezért az eladó úgy dönt, hogy két lépésben áremelést hajt végre: először 25%-kal, majd bizonyos idő múlva az új árat további 15%-kal növeli. Úgy tervezi, hogy így összességében 40%-os árnövelést ér el.

a) Igaza van az eladónak?

b) A kétszeri áremelés fordított sorrendben is elvégezhető, ekkor először 15%-os, majd 25%-os emelést hajtunk végre. Melyik esetben lesz olcsóbb a végső ár?

c) Ha az eladó először 25%-kal emeli meg az árat, és a következő áremeléssel összesen 40%-ot akar emelni az eredeti áron, akkor hány százalékos legyen a második emelés?

Megoldás

a) Az első emelés utáni ár $1,25 \cdot 8000$, a második emelés utáni pedig $1,15 \cdot 1,25 \cdot 8000 = 1,4375 \cdot 8000$ Ft. Az eladó téved, a két áremelés után összesen 43,75%-kal lett drágább a termék. ($1,4375 \cdot 8000 = 11\,500$ Ft a végső ár.)

b) A második esetben a végső ár $1,25 \cdot 1,15 \cdot 8000 = 1,4375 \cdot 8000$ Ft, vagyis ugyanannyi, mint az első esetben. A növelés mértékének sorrendje nem számít.

c) Felírhatjuk, hogy $x \cdot 1,25 \cdot 8000 = 1,4 \cdot 8000$, innen $x = \frac{1,4}{1,25} = 1,12$. Vagyis a második emelésnek 12%-osnak kell lennie.

Megjegyzés

A kapott eredmény nem függ a termék kezdeti árától. Ha ezt például A jelöli, akkor a két esetben a végső ár egyenlő: $1,15 \cdot 1,25 \cdot A = 1,4375A$ és $1,25 \cdot 1,15 \cdot A = 1,4375A$. Ugyanez igaz az 1. *a)* példában is: ha a termék kezdeti ára B, akkor az áremelés után $1,25B$, majd a csökkentés után $0,75 \cdot 1,25 \cdot B = 0,9375B$ a végső ár. Ez mindig kevesebb az eredeti árnál (annak 93,75%-a).

3. példa

A tervek szerint a reggel 8 órakor induló kamion éppen délben érkezik meg a célállomásra. Hány órakor érkezik meg a kamion akkor, ha az átlagsebességét 10%-kal növelni tudja?

Megoldás

Első megoldás: Jelölje a kamion tervezett átlagsebességét v km/h, ekkor a megtett út $4v$ km. Tegyük fel, hogy a menetideje t óra, ha az átlagsebessége $1,1v$. A megtett út ugyanakkora, így $4v = 1,1v \cdot t$, innen $t = \frac{4}{1,1} \approx 3,64$ óra a menetidő. Az érkezési idő kb. 11 óra 38 perc.

Második megoldás: Az idő és a sebesség szorzata állandó (a megtett út). Ha tehát a sebességet 1,1-szeresére növeljük, akkor a menetidő 1,1 részére csökken. $\frac{1}{1,1} \approx 0,91$, és $0,91 \cdot 4 = 3,64$ óra a menetidő.

4. példa

Mennyi vizet kell önteni 54 liter 70%-os alkoholhoz, hogy 42%-os alkoholt kapjunk?

Megoldás

Az oldott anyag (a tiszta alkohol) mennyisége $54 \cdot 0,7 = 37,8$ liter.

Első megoldás (következtetéssel): A hozzáöntés után ez a teljes folyadékmennyiség 42%-a, így a folyadék térfogata $\frac{100}{42} \cdot 37,8 = 90$ liter. Tehát $90 - 54 = 36$ liter vizet kell hozzáöntenünk.

Második megoldás (egyenlettel): Jelölje x a hozzáöntött víz térfogatát! Az oldott anyag térfogata nem változik, így $(x + 54) \cdot 0,42 = 37,8$, innen $x = 36$ liter adódik.

Definíció

Az x mennyiség p százalékát jelölje y, ezt $y = x \cdot \frac{p}{100}$ módon számítjuk ki. A képletben szereplő változók elnevezései: x a **százalékalap** (vagy alapérték), y a **százalékérték**, p a **százalékláb**. A százalékban kifejezett adatok különbségét gyakran (főként pénzügyi, banki számításoknál) **százalékpontban** adják meg.

Példák

70 méternek a 40%-a 28 méter. Ekkor a százalékalap 70 (méter), a százalékérték 28 (méter), a százalékláb pedig 40.

Ha a 4%-os kamat 3 százalékponttal emelkedett, akkor 7% lett az új érték.

(A százalékpont fogalmát egyértelműsítő szándékkal vezették be. Amikor például a 4%-os kamat 3%-os növekedéséről beszélünk, kétféleképpen is értelmezhetjük a növekedést: nem egyértelmű, hogy $4 \cdot 1{,}03 = 4{,}12$%-ra vagy $4 + 3 = 7$%-ra gondolunk. A 3 százalékpontos növelés viszont egyértelművé teszi, hogy az utóbbi esetről van szó.)

Fogalmak, nevek
százalékalap;
százalékérték;
százalékláb;
százalékpont.

FELADATOK

1. K1 Egy téglalap oldalai 8 cm, illetve 15 cm hosszúak. A 8 cm-es oldalakat 15%-kal, a 15 cm-es oldalakat pedig 20%-kal növelve egy új téglalapot kapunk. Hány százalékkal nőtt meg a téglalap kerülete, illetve területe?

2. K2 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?
Feladat: Egy csoportban 40% a lányok aránya. Ha még 6 lány jönne a csoportba, akkor a lányok aránya 50% lenne. Mennyi a csoport létszáma?
„Megoldás" következtetéssel (hibás): A 6 érkező lány 10%-os növekedésnek felel meg. A csoport létszáma (a 100%) ezért ennek tízszerese, $10 \cdot 6 = 60$ fő.

3. K2 Az ábrán az Excel táblázatkezelő egy részletét látjuk. A számítógép a B1 cellába A1-nek a 80%-át írja, B2-be a B1-nél 300-zal kisebb számot; D1-be A1-nek a 70%-át, míg D2-be a D1-nél 500-zal nagyobb számot.

	A	B	C	D
1	2500	2000		1750
2		1700		2250
3				

a) Milyen szám kerül B2-be és D2-be, ha A1-be 3000-et írunk?
b) Milyen számot írjunk A1-be, hogy B2 és D2 új értékei megegyezzenek?

4. (Gyűjtőmunka) A mindennapi életben, az újságokban, televízióban, rádióban és az interneten a százalékszámítás számtalan alkalmazásával és megjelenési formájával találkozunk. Gyűjtsünk össze ezekből néhány érdekességet!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. 1112, 1114–1116, 1140, 1166, 1176.

23. A HATVÁNYOZÁS FOGALMÁNAK KITERJESZTÉSE

Előző tanulmányaink során láttuk, hogy az azonos tényezőjű szorzatokat hatvány alakban is felírhatjuk.

1. példa

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$; $\quad \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$; $\quad (-4,1) \cdot (-4,1) = (-4,1)^2$.

Definíció

Pozitív egész kitevős hatvány: Jelöljön ***a*** tetszőleges valós számot, legyen $n > 1$ egész szám. Ekkor az $\boldsymbol{a^n}$ kifejezés jelöli azt az ***n*** tényezős szorzatot, melynek minden tényezője az ***a*** szám.

Az ***a*** számot a hatvány alapjának, az ***n*** számot kitevőnek nevezzük.

$\boldsymbol{a^n}$ kitevő
alap

2. példa

$6^8 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$, a hatvány alapja: 6, kitevője: 8.

$(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$, a hatvány alapja (-1), kitevője: 5.

$\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}$, a hatvány alapja: $\frac{4}{7}$, kitevője: 2.

$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0$, a hatvány alapja: 0, kitevője: 3.

Természetes a kérdés: Értelmezhetünk-e olyan hatvány alakú számot, melynek a kitevője nem 1-nél nagyobb egész szám? Az ilyen alakú számokat nem tudjuk többtényezős szorzat alakban felírni, ezért ezekre más definíciót kell alkotnunk.

Definíció

$\boldsymbol{a^1 = a}$, tetszőleges a valós szám esetén.

3. példa

$9^1 = 9$; $\quad \left(\frac{4}{11}\right)^1 = \frac{4}{11}$; $\quad (-4,6)^1 = -4,6$; $0^1 = 0$.

Definíció

$\boldsymbol{a^0 = 1}$, ha $a \neq 0$ tetszőleges valós szám. (A 0^0-t nem értelmezzük.)

4. példa

$$13^0 = 1; \qquad (-8,5)^0 = 1; \qquad \left(\frac{2}{19}\right)^0 = 1; \qquad (-1)^0 = 1.$$

Definíció

$\boldsymbol{a^{-k} = \frac{1}{a^k}}$, ha $a \neq 0$ tetszőleges valós szám, k pozitív egész szám. (Ebben az esetben $(-k)$, a k szám ellentettje, tehát negatív egész szám.)

5. példa

$$8^{-1} = \frac{1}{8^1} = \frac{1}{8}; \qquad 100^{-3} = \frac{1}{100^3} = \frac{1}{1\,000\,000}; \qquad (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16};$$

$$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125};$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^1} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}; \qquad \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{7}\right)^3} = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = \left(\frac{2}{1}\right)^{10} = 2^{10} = 1024; \qquad \left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}.$$

Fogalmak
hatvány;
alap;
kitevő.

Megjegyzés

Olyan hatványokat értelmeztünk az előzőekben, amelyeknek a kitevője egész szám. Ha a kitevőben nem egész szám áll, akkor a hatványt egyelőre nem definiáltuk. Az ilyen hatványokkal felsőbb évfolyamokon fogunk megismerkedni.

FELADATOK

1. K1 Írjuk fel egyetlen szám hatványaként!

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} =$; *c)* $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) =$; *e)* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 =$.

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} =$; *d)* $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$;

2. K1 Írjuk fel az alábbi hatványokat szorzat alakban, és számítsuk ki a hatványértékeket!

a) 3^3; 4^4; 5^3.

b) $(5-8)^4$; $(2^3 + 5^2)^2$; $(2^4 - 2 \cdot 7^0 \cdot 3)^5$.

3. K2 Mi az utolsó számjegye az alábbi hatványértékeknek?

a) 2^5; 2^6; 2^7; 2^8; 2^{15}; 2^{28}; 2^{100}; 2^{2222}.

b) 3^{55}; 3^{200}; 3^{2010}; 23^{23}; 123^{251}.

c) 27^{27}.

4. K1 Számítsuk ki következő kifejezések értékét!

a) 2^{-5}; 4^{-3}; 5^{-2}; 10^{-1}; 10^{-4}.

b) $\frac{1}{2^{-6}}$; $\frac{5}{5^{-4}}$; $\frac{8}{5^{-3}}$; $\frac{7}{4^{-2}}$.

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-5}$; $0{,}2^{-2}$; $0{,}1^{-5}$.

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; $\left(\frac{16}{25}\right)^{-4}$; $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}$.

e) $\left(-\frac{6}{5}\right)^{-2}$; $-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; $-\frac{5^{-3}}{10}$; $\frac{\frac{2}{10^{-3}}}{\frac{10^{-2}}{4}}$; $\frac{5^{-4}}{4}$.

5. K1 Írjuk fel negatív kitevőjű hatványként az alábbi számokat!

a) $\frac{1}{2^5}$; $\frac{1}{3^8}$; $25 \cdot \frac{1}{5^5}$.

b) $\frac{2}{32}$; $\frac{2}{250}$; $\frac{6}{162}$; $\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-5}}$.

c) 0,01; 0,00001; 0,0000001.

6. K2 Alakítsuk át a következő kifejezéseket úgy, hogy ne tartalmazzanak negatív kitevőt!

a) $(2x)^{-5}$; $\frac{1}{3}x^{-2}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$; $\frac{1}{y^{-4}}$; $5x^{-3}$; $\frac{y^{-7}}{5^{-2}}$.

b) $5a^{-2} \cdot a^5$; $9^2 \cdot b^5 \cdot \left(\frac{3}{b}\right)^{-4}$; $\frac{16}{125} \cdot c^7 \cdot \frac{(2 \cdot c)^{-4}}{(5 \cdot c)^{-3}}$.

c) $x \cdot (2x^{-2} + 4x^{-1})$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.:
334; 335; 336; 337; 338; 816–821.

A 94. oldalon kezdődő feladatok eredményei:

1. 139
2. 22,5°
3. 30
4. 9
5. *a)* $\sqrt{292} \approx 17{,}09$ cm;
b) 9,6 cm;
c) $\sqrt{180} \approx 13{,}42$ cm
6. *a)* $\frac{119}{12} \approx 9{,}92$ cm;
b) $\frac{20}{3} \approx 6{,}67$ cm
7. 6 m^2
8. {70°, 70°, 100°, 120°}, {100°, 100°, 70°, 90°}, {95°, 95°, 70°, 100°}
9. 203
10. 16
11. 10 cm^2

24. A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI, A PERMANENCIAELV

Tetszőleges alapú, 1-nél nagyobb, pozitív egész kitevőjű hatványokkal műveleteket végezve az előző években megismerkedtünk már néhány azonossággal. A hatványozás fogalmának kiterjesztésétől azt várjuk el, hogy az eddig megismert tulajdonságok továbbra is érvényben maradjanak. Ezt az igényt **permanenciaelvnek** nevezzük. A permanencia szó latin eredetű, jelentése állandóság, folytonosság.

1. példa

$4^2 \cdot 4^3 = 4^5$; $(-5)^6 \cdot (-5)^7 = (-5)^{13}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^6 = \left(\frac{2}{7}\right)^{14}$;

$1{,}4^3 \cdot 1{,}4^4 = 1{,}4^7$; $\left(-\frac{8}{9}\right)^4 \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)^{11} = \left(-\frac{8}{9}\right)^{15}$; $0^7 \cdot 0^3 = 0^{10} = 0$.

Általánosan megfogalmazva (I. azonosság):
Azonos alapú, egész kitevőjű hatványok szorzata azzal a hatvánnyal egyenlő, melynél a változatlan alapot a kitevők összegére hatványozzuk.
$\boldsymbol{a^k \cdot a^l = a^{k+l}}$, ahol $a \in \mathbf{R}$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

2. példa

$4^5 : 4^2 = \frac{4^5}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 4^{5-2} = 4^3$; $(-8)^{10} : (-8)^7 = (-8)^{10-7} = (-8)^3$;

$\left(\frac{9}{11}\right)^7 : \left(\frac{9}{11}\right)^3 = \left(\frac{9}{11}\right)^{7-3} = \left(\frac{9}{11}\right)^4$.

Általánosan megfogalmazva (II. azonosság):
Azonos, 0-tól különböző alapú, egész kitevőjű hatványok hányadosa azzal a hatvánnyal egyenlő, melynél a változatlan alapot a számláló és a nevező kitevőjének a különbségére hatványozzuk.
$\boldsymbol{a^k : a^l = a^{k-l}}$, ahol $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ $k, l \in \mathbf{Z}$.

3. példa

$(9 \cdot 6)^4 = (9 \cdot 6) \cdot (9 \cdot 6) \cdot (9 \cdot 6) \cdot (9 \cdot 6) = 9^4 \cdot 6^4$; $(-1{,}5 \cdot 7{,}8)^3 = (-1{,}5)^3 \cdot 7{,}8^3$;

$(5 \cdot 4)^7 = 5^7 \cdot 4^7$; $\left(\frac{3}{4} \cdot 0{,}5\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 0{,}5^2$.

Általánosan megfogalmazva (III. azonosság):
Szorzat hatványa egyenlő a tényezők hatványának szorzatával.
$\boldsymbol{(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. példa

$(60:5)^4 = \left(\frac{60}{5}\right)^4 = \frac{60}{5} \cdot \frac{60}{5} \cdot \frac{60}{5} \cdot \frac{60}{5} = \frac{60^4}{5^4}$; $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5^3}{2^3}$;

$\left(\frac{12}{7}\right)^9 = \frac{12^9}{7^9}$; $\left(\frac{0}{17}\right)^2 = \frac{0^2}{17^2} = 0.$

Általánosan megfogalmazva (IV. azonosság):
Tört (hányados) hatványa egyenlő a számláló és a nevező hatványának hányadosával.
$\left(\boldsymbol{\frac{a}{b}}\right)^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\frac{a^k}{b^k}}, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad b \neq 0, \quad k \in \mathbf{Z}.$

5. példa

$(2^3)^2 = (2^3) \cdot (2^3) = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$; $\left((5{,}9)^5\right)^4 = 5{,}9^{5 \cdot 4} = 5{,}9^{20}$;

$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^5\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{5 \cdot 3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{15}$; $(0^9)^7 = 0^{9 \cdot 7} = 0^{63} = 0.$

Általánosan megfogalmazva (V. azonosság):
Hatvány hatványa azzal a hatvánnyal egyenlő, amelyben a változatlan alapot a kitevők szorzatára hatványozzuk.
$(\boldsymbol{a^k})^{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{a^{kl}}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad k, l \in \mathbf{Z}.$

Az előző azonosságok könnyedén bizonyíthatók a definíciók és az ismert műveleti tulajdonságok alapján. A definíciók és az azonosságok alapján egy-egy műveletsorban átalakításokat végezhetünk:

6. példa

$$\frac{3^4 \cdot 3^{-1}}{3^5} = \frac{3^{4-1}}{3^5} = \frac{3^3}{3^5} = 3^{3-5} = 3^{-2} = \frac{1}{9};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : 2^3 + 2^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 : 2^3 + \frac{1}{2^1} = \frac{2^2}{2^3} + \frac{1}{2} = 2^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

$$\frac{5^7 + 5^{-2}}{5^3} = \frac{5^7}{5^3} + \frac{5^{-2}}{5^3} = 5^{7-3} + 5^{-2-3} = 5^4 + 5^{-5} = 625 + \frac{1}{3125} = 625{,}00032.$$

Példaként bizonyítsuk be a II. azonosságot!

7. példa

II. azonosság:

Azonos, 0-tól különböző alapú, egész kitevőjű hatványok hányadosa azzal a hatvánnyal egyenlő, melynél a változatlan alapot az osztandó és osztó kitevőjének különbségére hatványozzuk.

Vagyis:

$a^k : a^l = a^{k-l}$, ahol $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

Bizonyítás

1. eset: Ha $k > l \geq 1$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

$a^k : a^l = \frac{a^k}{a^l}$. A számláló k tényezős szorzat, a nevező l tényezős, a tényezők megegyeznek: a. Egyszerűsítés után a nevező 1, a számláló $(k - l)$ tényezős szorzat, minden tényező: a. Ezért $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$ teljesül.

2. eset: Ha $k = l > 0$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

$a^k : a^l = \frac{a^k}{a^l} = 1$, mert a tört számlálója és nevezője megegyezik.

3. eset: Ha $0 < k < l$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

$a^k : a^l = \frac{a^k}{a^l} = \frac{1}{a^{l-k}} = \frac{1}{a^{-(k-l)}} = a^{k-l}$. Figyelembe vettük a negatív kitevős hatvány definícióját.

(Az állítás $0 > k > l$ esetén is igaz.)

Fogalmak
permanenciaelv.

FELADATOK

1. K1 Végezzük el a következő műveleteket, és a végeredményt adjuk meg egyetlen szám hatványaként!

a) $3^5 \cdot (3^2)^4 \cdot 3^3$; *b)* $\frac{(11^5)^3}{11^{18}}$; *c)* $\frac{(2^7)^4}{2^{12} \cdot 2^8 \cdot 2^9}$; *d)* $\frac{2^{21}}{4^9}$; *e)* $\frac{3^{22} \cdot 9^3}{(9^2)^4 \cdot 3^{-7}}$.

2. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!

K1 *a)* $2^4 \cdot 5^3$; **K1** *b)* $\frac{27^{11}}{9^{16}}$; **K1** *c)* $\frac{5^7 + 5^6}{5^7}$;

K1 *d)* $\frac{3^{12} + 3^{13}}{9^5 + 3^{11}}$; **K2** *e)* $\frac{2^{10} \cdot 5^{12} + 2^{12} \cdot 5^{10}}{10^{12}}$; **K2** *f)* $\left(\frac{4}{3}\right)^{105} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{110} \cdot \frac{1}{2^{108}}$.

3. K2 Egyszerűsítsük az alábbi törteket!

a) $\frac{66^{50}}{11^{50} + (5^2 \cdot 121)^{25}} =$; *b)* $\frac{5 \cdot 3^{81} + (3^5)^{16}}{(2^5 - 2^4) \cdot \frac{27^{27}}{3}} =$.

4. Tegyük ki a <; >; = jelek valamelyikét úgy, hogy igaz állítások legyenek!

K2 *a)* 8^{25} $\quad 2^{34} \cdot 4^{13}$; **K2** *b)* $7^{15} \cdot 7^{10}$ $\quad 7^{150}$;

K2 *c)* $3^5 \cdot 3^8$ $\quad 3^2 \cdot 3^{10} + 2 \cdot 3^{12}$; **K2** *d)* $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ $\quad \frac{2^6}{5}$;

E1 *e)* 24^{46} $\quad \frac{36^{36}}{4^{13}}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **822; 830; 832; 833; 837.**

25. SZÁMOK NORMÁLALAKJA

Az egész kitevőjű hatványok ismerete lehetőséget ad arra, hogy nagyon nagy, illetve nagyon kicsi abszolút értékű számokat könnyebben írjunk le.

Ezek segítségével nem csak 10 hatványait írhatjuk fel rövidebben. Nagyon sok esetben a számológépbe csak bizonyos számú karaktert tudunk beírni.

Definíció

A számok olyan kéttényezős szorzat alakját, ahol az egyik tényező abszolút értéke 1 és 10 közé eső szám, a másik tényező 10 megfelelő hatványa, a szám **normálalakjának** nevezzük.

Legyen $x \in \mathbf{R}$, ekkor $x = p \cdot 10^k$, ahol $1 \leq |p| < 10$ és $k \in \mathbf{Z}$.

A normálalakban szereplő k egész számot az x szám **karakterisztikájának** nevezzük.

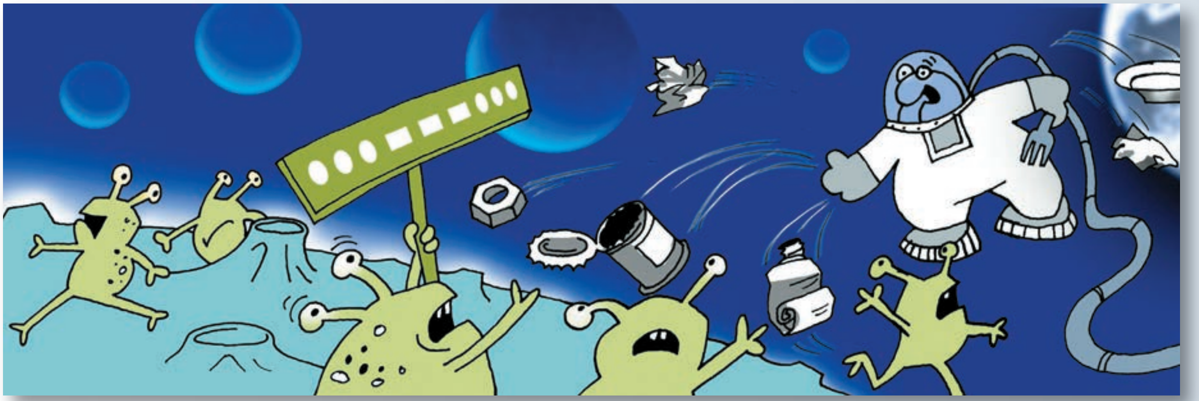
(Karakterisztika: jellemző vonás, jellegzetesség; az x szám nagyságrendjét jelzi.)

A 0 normálalakja 0.

10 hatványai közül néhány:
1 millió = 1 000 000 = 10^6;
1 milliárd = 1 000 000 000 = 10^9;
1 billió = 1 000 000 000 000 = 10^{12};
1 trillió = 1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18};
1 kvadrillió = 1 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{24};
1 ezred = 0,001 = 10^{-3};
1 milliomod = 0,000 001 = 10^{-6};
1 milliárdod = 0,000 000 001 = 10^{-9};
1 billiomod = 0,000 000 000 001 = 10^{-12}.

1. példa

Naprendszerünk néhány bolygójának a Naptól mért átlagos távolságai közelítőleg:
Merkúr: 58 000 000 km = $5,80 \cdot 10^7$ km;
Vénusz: 108 000 000 km = $1,08 \cdot 10^8$ km;
Föld: 150 000 000 km = $1,50 \cdot 10^8$ km;
Mars: 228 000 000 km = $2,28 \cdot 10^8$ km;
Jupiter: 778 000 000 km = $7,78 \cdot 10^8$ km;
Szaturnusz: 1 426 000 000 km = $1,43 \cdot 10^9$ km.



2. példa

Negatív számok normálalakját a következőképpen határozhatjuk meg:
$-126 = -1{,}26 \cdot 10^2$;
$-0{,}00405 = -4{,}05 \cdot 10^{-3}$;
$-1\,000\,000 = -10^6$, vigyázat: nem egyenlő $(-10)^6$-nal.

3. példa

Egyes számológépeken is gyakran jelennek meg normálalakban kiírt számolási eredmények:

$4500 \cdot 28\,000$ eredményeként ez olvasható: $1{,}26^{08}$, melyet így kell értelmeznünk: $4500 \cdot 28\,000 = 1{,}26 \cdot 10^8$.

$4 : 25\,000\,000$ eredményeként ez olvasható: $1{,}6^{-07}$, melyet így kell értelmeznünk: $4 : 25\,000\,000 = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$.

Normálalakú számokkal természetesen műveleteket is végezhetünk. Minden esetben az eredményt szintén normálalakban adjuk meg.

4. példa

Fogalmak
normálalak;
karakterisztika.

$$\frac{3{,}2 \cdot 10^7}{4 \cdot 10^4} = \frac{3{,}2}{4} \cdot \frac{10^7}{10^4} = 0{,}8 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^2;$$

$$(5{,}3 \cdot 10^{-4}) \cdot (1{,}6 \cdot 10^3) = (5{,}3 \cdot 1{,}6) \cdot (10^{-4} \cdot 10^3) = 8{,}48 \cdot 10^{-1};$$

$$3{,}02 \cdot 10^7 + 1{,}18 \cdot 10^6 = 30\,200\,000 + 1\,180\,000 = 31\,380\,000 = 3{,}138 \cdot 10^7.$$

FELADATOK

1. K1 Írjuk fel a következő számokat normálalakban!

a) 618; 5437; 1008; –456 000; 1 000 000.

b) 0,235; 0,0087; –0,000 301; 0,000 000 01; –0,0002.

c) $\frac{60}{8}$; $\frac{4000}{25}$; $-\frac{6}{150}$; $\frac{1400}{3}$.

2. K2 A hatványozás azonosságainak felhasználásával végezzük el az alábbi műveleteket, a végeredményt normálalakban adjuk meg!

a) $630\,000 \cdot (-120\,000\,000) =$

b) $24\,000\,000^2 \cdot 480\,000\,000\,000 =$

c) $\dfrac{5\,600\,000\,000^3}{700\,000\,000\,000^2} =$

d) $0{,}000\,000\,022\,41 \cdot 645\,000\,000\,000 =$

e) $0{,}000\,000\,455 \cdot 0{,}000\,000\,642 \cdot 3{,}650\,000\,000 =$

3. Végezzük el a kijelölt műveleteket, és a végeredményt adjuk meg normálalakban!

K2 *a)* $3{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{5} \cdot 4 \cdot 10^{3}$;

K2 *b)* $6{,}25 \cdot 10^{13} \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-8}$;

K2 *c)* $(1{,}8 \cdot 10^{5})^{2} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3})^{2}$;

K2 *d)* $\dfrac{6{,}3 \cdot 10^{7} \cdot 8{,}4 \cdot 10^{6}}{(2{,}1 \cdot 10^{-10})^{2}}$;

K2 *e)* $\dfrac{4{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{3}}{2{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-2}}$;

K1 *f)* $10^{5} + 10^{4} + 10^{3}$;

K1 *g)* $2{,}5 \cdot 10^{6} + 4{,}3 \cdot 10^{5} - 2 \cdot 10^{3}$;

K2 *h)* $6{,}8 \cdot 10^{-4} + 3{,}2 \cdot 10^{-5} - 3 \cdot 10^{-3}$.

Ellenőrizzük az eredményeket számológéppel!

4. K1 Hány molekula van 23,56 mol oxigénben, ha egy mol $6{,}02 \cdot 10^{23}$ db részecskét tartalmaz?

5. K2 A fény sebessége 300 000 km/s. Számítsuk ki, hogy a fény mennyi idő alatt ér el a Naptól a lecke 1. példájában megadott bolygókig!

6. K2 A fényév az a távolság, amelyet a fény egy év alatt tesz meg. Vigyázat, a neve beugrató, mert a fényév nem idő-, hanem távolságegység!
Egy fényév hány km?

7. K2 A Szíriusz a legfényesebb csillag az égbolton.
a) Hány km-re van a Földtől a Szíriusz, ha 1 085 000-szer távolabb áll tőlünk, mint a Nap?
b) Hány év alatt ér ide a fény a Szíriuszról?
c) Hány fényévnyi távolságra van tőlünk a Szíriusz?

8. K2 Négy darab 2-es számjegy és a hatványozás segítségével felírtunk kilenc számot. Próbáljuk növekvő sorrendbe rendezni a számokat úgy, hogy számológépet ne használjunk! (Nagy számok esetén érdemes becsléseket alkalmazni, jól használható például a $2^{10} \approx 10^{3}$ közelítés.)
$A = 22^{22}$, $B = 2^{222}$, $C = 222^{2}$, $D = 2^{2^{22}}$, $E = 2^{22^{2}}$, $F = 22^{2^{2}}$, $G = (2^{2})^{22}$, $H = (2^{22})^{2}$, $I = (22^{2})^{2}$.

9. K2 Az Amazonas átlagos vízhozama világelső, másodpercenként 220 millió liter vizet szállít.
a) Hány liter vizet szállít az Amazonas egy év alatt?
b) Hasonlítsuk össze, egy év alatt hányszor több vizet szállít az Amazonas, mint a Tisza! A Tisza vízhozama 4000 m^{3} másodpercenként.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **107–111.**

A SZÁMOLÓGÉPEK SZÁMÁBRÁZOLÁSA (Olvasmány)

Az utóbbi évtizedekben a technikai fejlődés soha nem látott méreteket ért el, s ennek hatása az oktatásban is érződik. A sokat forgatott *Négyjegyű függvénytáblázatok* a középiskolai matematika-tananyag jelentős részét összefoglalja, de a zsebszámológépek megjelenésével egyes fejezetei (számok négyzete, négyzetgyöke, reciproka; a logaritmus- és szögfüggvénytáblák stb.) elavulttá váltak, ahogyan a képen látható logarléc is. A mai számológépek a tucatnyi matematikai művelet és függvény alkalmazása mellett **véletlenszámokat** kezelnek, gyakran statisztikai számításokra is alkalmasak, nemritkán programozhatók; sőt, a grafikus kalkulátorokkal szöveges adatok is megjeleníthetők, ábrázolhatunk függvényeket stb. Ugyanakkor a számológépek adattárolása – konstrukciójukból adódóan – speciális, és a műveleteket sem a hagyományos módon végzik. A gyanútlan felhasználót komoly meglepetések érhetik, ha nincs tisztában a kalkulátorok működési elvével, ha nem ismeri a saját gépe „lelkivilágát". Az alábbiakban ezért röviden, néhány példa segítségével áttekintjük a gépi számábrázolás sajátosságait.

A SZÁMOLÓGÉP KORLÁTAI

1. példa

a) Vizsgáljuk meg számológépünkkel az $A_5 = \dfrac{222224}{333335}$ és a $B_5 = \dfrac{444446}{666667}$ törteket! Melyik a nagyobb? (Az 5-ös index a számlálókban és nevezőkben szereplő, egyforma kezdő számjegyek számára utal.)

Eredmény:

A zsebszámológép által kiírt értékek általában: $A_5 = .666668667$; $B_5 = .666668667$. Úgy tűnik, a két tört egyenlő.

A számológépek nem egységesen írják ki a számokat. A jelenleg forgalomban lévő gépek döntő többsége a kijelzőn 10 számjegyet jelenít meg, a továbbiakban mi is ennyivel dolgozunk. (Később látni fogjuk, hogy a számábrázolási problémák szempontjából lényegtelen a kiírható jegyek száma.) A fenti eredmények esetében a tizedespont előtti, kezdő 0-t „megspórolják" egyes gépek, mások viszont kiírják.

b) Hasonlóan: Írassuk ki a géppel az $A_6 = \dfrac{2222224}{3333335}$ és a $B_6 = \dfrac{4444446}{6666667}$, valamint az $A_7 = \dfrac{22222224}{33333335}$ és a $B_7 = \dfrac{44444446}{66666667}$ törtek értékét is!

Eredmény:

$A_6 = B_6 = .666666867$; $A_7 = B_7 = .666666687$.

Most már A_8 és B_8, valamint A_9 és B_9 értékére sejtéseket fogalmazhatunk meg. Úgy tűnik, hogy az azonos indexű A és B törtek egyenlők egymással, és tizedes tört alakjukban a 6-osok utáni 8-as számjegy „egyre később következik".

c) Írassuk ki a géppel az $A_8 = \frac{222222224}{333333335}$ és a $B_8 = \frac{444444446}{666666667}$, valamint az $A_9 = \frac{2222222224}{3333333335}$ és a $B_9 = \frac{4444444446}{6666666667}$ törtek értékét! (Nem biztos, hogy a kiíratás sikerül; vannak olyan számológépek, amelyek ezeket az utasításokat már nem tudják végrehajtani.)

Eredmény:

$A_8 = B_8 = .666666669$; $A_9 = B_9 = .666666667$.

Elképzelhető, hogy a 8-as számjegy „vándorlásával” kapcsolatos sejtésünk helyes. Ehhez azt kell feltételeznünk, hogy a gép az utolsó, tizedik helyen kerekített számjegyet ír ki. (Így lesz 87-ből 9(0).) Megjósolhatjuk A_{10} és B_{10}, s a sorban következő törtek tizedes tört alakját is: valószínűleg számológépünk ettől kezdve mindig a .666666667 alakot írja ki.

De éppen ez a kerekítés a probléma. Ha a gép kerekített értékeket ír ki, akkor *honnan tudhatjuk biztosan,* hogy a korábbi A_5 és B_5, A_6 és B_6 stb. értékek valóban egyenlők? Hiszen lehet, hogy a gép ezek kijelzésekor a különböző értékeket egyformára kerekítve jelenítette meg!

d) Írassuk ki a géppel az $A_5 - B_5 = \frac{222224}{333335} - \frac{444446}{666667}$ különbséget!

A meglepő **eredmény**: $\frac{222224}{333335} - \frac{444446}{666667} = -9.0000000E-12$. (Ez a normálalakban kiírt szám $-9 \cdot 10^{-12}$-t jelöl, azaz értéke tizedes tört alakban –0,000000000009.) A gépünk szerint tehát $A_5 < B_5$ (bár a két tört esetén a kijelzett érték megegyezett).

e) Írassuk ki a géppel az $A_6 - B_6 = \frac{2222224}{3333335} - \frac{4444446}{6666667}$ különbséget!

Eredmény: 0.000000000.

Egyes gépek egyszerűen 0-t írnak ki.

S a továbbiakban már az $A_7 - B_7$, $A_8 - B_8$ stb. különbségek is 0-t adnak eredményül.

Vajon ez azt jelenti, hogy bár $A_5 < B_5$, de $A_6 = B_6$, $A_7 = B_7$, $A_8 = B_8$ stb. teljesül?

AZ EREDMÉNYEK ELEMZÉSE

A kapott eredmények megmutatják a számológépek korlátait: segítségükkel a konkrét feladatban az A_6 és B_6, A_7 és B_7 stb. törtek nagyságrendi összehasonlítását nem tudjuk elvégezni. Vajon magyarázhatjuk úgy a tapasztalt jelenséget, hogy a gép által kijelzett szám – a kerekítés miatt – különbözik attól az értéktől, amit a gép valójában a memóriájában tárol (vagyis amellyel ténylegesen számol)?

Kis túlzással úgy is fogalmazhatunk, hogy gépünk szerint egyszer $A_5 = B_5$, másszor pedig $A_5 < B_5$. Ez nagy baj. Ha egy gép megbízhatatlan, vagy pontatlanul működik, akkor gyakorlatilag nem használható.

Felvetődik egy elvi jelentőségű kérdés is: ha a gép számunkra pontatlan (kerekített) értékeket jelenít meg, hogyan lehetünk biztosak abban, hogy a memóriájában pontosan tárolt értékekkel számol?

Látható, hogy még a legegyszerűbb feladatok számológépes megoldása folyamán is gyakorlati problémákba ütközhetünk. Ezért fontos, hogy ismerjük ezen problémák keletkezésének hátterét, kialakulásuk okát; s fontos, hogy – ha szükséges – el tudjuk kerülni őket.

Érdemes tudatosítanunk: a számológépünk kiszámíthatóan, megbízhatóan és – saját keretei között – pontosan működik. (Nincs olyan, hogy „egyszer így, másszor úgy”.) Nem a gép működése rossz, csak legfeljebb a felhasználó tudása hiányos.

A fellépő jelenségek („pontatlanságok”) hátterében a gépi számábrázolás sajátosságai állnak.

A GÉPI SZÁMÁBRÁZOLÁS

Minden számológép (és minden számítógép is) szerkezeti konstrukciója következtében véges sok helyiértéken, 2-es számrendszerben tárolja a számokat. Ebből következik a gépi számhalmaz néhány különleges tulajdonsága:

– A 2-es számrendszerbeli racionális számok egy speciális részhalmazáról van szó.

– A gépi számhalmaz diszkrét (azaz nem igaz, hogy bármely két szám között található egy újabb szám).

– Az ábrázolt számok között létezik maximális és minimális ($\neq 0$) abszolút értékű (jelölésük: *Max*, *Min*).

– A *Min* értéknél kisebb m pozitív számot (például $m = Min/2$) a gép már nem tudja tárolni, számára ez a szám zérus: $m = 0$. (Ennek a jelenségnek **alulcsordulás** a neve.)

– A *Max* értéknél nagyobb M számot (például $M = Max + 1$) a gép szintén nem tudja tárolni. (A jelenség neve **túlcsordulás**; felléptekor általában a gép hibajelzéssel leáll.)

– Az alapműveletek nem zártak, nem érvényesek a megszokott műveleti szabályok [például: $(Max + 1) - 2 \neq$ $\neq Max + (1 - 2)$].

Feltétlenül tisztában kell lennünk azzal, hogy a gép működése közben *a „szám”* fogalma *háromféleképpen is megjelenik*:

1. amire mi gondolunk (például $\sqrt{2}$);

2. amit a gép tárol ($\sqrt{2}$ egy közelítő értéke);

3. amit a gép számunkra kiír (a mi zsebszámológépünk 10 jegyet írt ki, az utolsót kerekítve; ebben az esetben 9 jegy pontossággal dolgozik a gép).

Természetes, hogy $\sqrt{2}$ véges sok memóriahelyen nem tárolható pontosan, hiszen irracionális szám; s ugyanígy természetes, hogy 10 jegynél hosszabb szám 10 karakterhelyen pontosan nem jeleníthető meg.

Sajnos azt is meg kell jegyeznünk, hogy a forgalomban lévő számológépek között jelenleg is van olyan, amelyik az általa tárolt szám utolsó számjegyét kerekítés nélkül írja ki.

Hangsúlyozzuk, hogy a gépi számábrázolásból eredő hibák *elvi jellegűek*, vagyis *nem küszöbölhetők ki*. Ugyanúgy megjelennek ezek a hibák a több értékes jegy kiírására képes, nagyobb kapacitású és teljesítményű számítógépek használatakor is (legfeljebb mások a hibahatárok).

Visszatérve az eredeti problémára: Hogyan tudnánk eldönteni A_6 és B_6 nagyságrendi viszonyát?

OKOSABBAK VAGYUNK, MINT A SZÁMOLÓGÉPÜNK?

A törtek közös nevezőre hozása után látható, hogy az $A_6 = \dfrac{2222224 \cdot 6666667}{3333335 \cdot 6666667}$ és $B_6 = \dfrac{4444446 \cdot 3333335}{6666667 \cdot 3333335}$ törtek nem lehetnek egyenlők, hiszen számlálójuk különbözik: A_6 számlálója 8-ra, míg B_6 számlálója 0-ra végződik. Hasonlót állíthatunk a további A_7 és B_7, A_8 és B_8 stb. törtekről is. Általános módszerre lenne szükségünk, amellyel akár A_{1000} és B_{1000} értékeit is összehasonlíthatnánk. A trükk: új változó bevezetése.

Jelöljük x-szel az 111…1 (1001 darab 1-esből álló) számot! Ekkor $A_{1000} = \dfrac{2x+2}{3x+2}$, $B_{1000} = \dfrac{4x+2}{6x+1}$, mindkét törtet bővítve $A_{1000} = \dfrac{(2x+2)(6x+1)}{(3x+2)(6x+1)}$, illetve $B_{1000} = \dfrac{(4x+2)(3x+2)}{(6x+1)(3x+2)}$. A szorzások elvégzése után a két számláló $12x^2 + 14x + 2$, valamint $12x^2 + 14x + 4$ alakú. Ekkor tehát $B_{1000} - A_{1000} = \dfrac{2}{(3x+2)(6x+1)}$, tehát $B_{1000} > A_{1000}$.

A gondolatmenetünk tetszőleges A_i és B_i törtek esetén alkalmazható ($i \geq 1$ természetes szám).

További hasonló feladatokat is könnyen „gyárthatunk”, csak arra kell vigyázni, hogy a közös nevezőre hozás után a két számlálóban megegyezzenek az elsőfokú tagok együtthatói.

A kitűzött feladatban:

– Az egymáshoz közeli A_5 és B_5 értékek kerekítés után megegyeztek, s ezeket a megegyező értékeket írta ki a gépünk.

– A memóriában tárolt A_5 és B_5 értékek különböztek, ezt mutatja az $A_5 - B_5 \neq 0$ kiírása.

– Az $A_6 - B_6$ értékre a gép 0-t írt ki (és annyit is tárolt el), holott tudjuk, hogy $A_6 \neq B_6$. Ennek oka a fent említett alulcsordulás jelensége. $A_6 - B_6 < Min$; a legkisebb, pozitív abszolút értékű, a gép által még ábrázolni tudott *Min* számnál kisebb számot a gép 0-nak tekintette.

– A túlcsordulás jelenségével az igen nagy számlálójú és nevezőjű törtek kiíratásakor találkozhatunk. (Például A_{100} számlálójának tárolásakor a számológép hibát jelez.)

Jelenleg a 10 pontos számjeggyel dolgozó tudományos zsebszámológépek a legfejlettebbek a magyar piacon. Ezek $A_6 - B_6 = -9.E-14$, $A_7 - B_7 = -1.E-15$, $A_8 - B_8 = 0$, $A_9 - B_9 = 0$ stb. értékeket írják ki. Vagyis a tárgyalt probléma ezeknél is fellép, csak legfeljebb később, a 6-os helyett a 8-as indextől kezdődően.

Tanulságok:

1. A gép hatékony segédeszköz lehet, de nem mindenható: vannak korlátai.

2. A gép használata közben fontos ismernünk gépünk korlátait is; csak ekkor alkalmazhatjuk megbízhatóan.

3. A feladatmegoldás folyamatában nem nélkülözhetjük a matematikai gondolkodásmódot, és ezt a gépünk sem pótolhatja.

Fogalmak
alulcsordulás;
túlcsordulás;
véletlenszámok.

FELADATOK

1. K2 Melyik nagyobb, A_5 vagy B_5, ha $A_5 = \frac{222221}{222223}$ és $B_5 = \frac{333331}{333334}$?
Hasonlítsuk össze a megfelelő A_6 és B_6, A_7 és B_7, …, A_{1000} és B_{1000} értékeket is!

2. K2 Gépünk szerint $\frac{1}{7} = .142857143$. Írassuk ki a $.142857143 - \frac{1}{7}$ értéket! Milyen eredményt kapunk, s ezt hogyan magyarázhatjuk?

3. K2 Anna gépének kijelzőjén a .333333333 érték szerepel. Ezt szorozza 3-mal, mire a gép válaszul kiírja az 1-et. Anna ezután beírja a .333333333 számot, s ezt újfent 3-mal szorozza. Most viszont eredményül a .999999999 számot kapja. Hogy lehetséges ez? A gép rossz, vagy Anna egy bűvészmutatványát láttuk?

26. SZÁMÍTÁSOK PONTOSSÁGA

A KEREKÍTÉSI SZABÁLY

Említettük korábban, hogy ha a közönséges törteket tizedes tört alakba írjuk át, akkor gyakran csak közelítő pontosságú eredményeket kapunk. Például $\frac{10}{7} = 1{,}\dot{4}2857\dot{1}$ végtelen szakaszos tizedes tört. Ezt a számot tehát véges sok helyiértéken csak kerekítve tudjuk megadni. Az általános iskolában megtanultuk a kerekítési szabályokat is. A tört értéke

– egészekre kerekítve: $\frac{10}{7} \approx 1$; – századokra kerekítve: $\frac{10}{7} \approx 1{,}43$;

– tizedekre kerekítve: $\frac{10}{7} \approx 1{,}4$; – ezredekre kerekítve: $\frac{10}{7} \approx 1{,}429$

és így tovább.

y közelítő értéke	y lehetséges értéke
1	$0{,}5 \le y < 1{,}5$
2,3	$2{,}25 \le y < 2{,}35$
4,56	$4{,}555 \le y < 4{,}565$
7,0	$6{,}95 \le y < 7{,}05$
7,00	$6{,}995 \le y < 7{,}005$
7,000	$6{,}9995 \le y < 7{,}0005$
8,90	$8{,}895 \le y < 8{,}905$
8,900	$8{,}8995 \le y < 8{,}9005$

A kör kerületének és átmérőjének a hányadosa irracionális szám, közelítő értéke $\pi \approx 3{,}141592654$. Általában felesleges ennyi tizedesjegyet „magunkkal cipelnünk”, a számítások során megelégszünk a π két vagy négy tizedesjegyre kerekített értékével: $\pi \approx 3{,}14$, $\pi \approx 3{,}1416$.

Az $x = 2{,}9796$ szám egészekre, tizedekre, századokra és ezredekre kerekített értékei rendre $x \approx 3$; $x \approx 3{,}0$; $x \approx 2{,}98$; $x \approx 2{,}980$.

Jegyezzük meg, hogy a kerekítés során ügyelni kell az egyes helyiértékek közötti **átvitelre**. A **kerekítési szabály** eljárása ugyanis a következő: a közelítő érték utolsó számjegyét

– változatlanul hagyjuk, ha az ettől jobbra eső, szomszédos helyiértéken lévő számjegy 5-nél kisebb;

– 1-gyel növeljük, ha az ettől jobbra eső, szomszédos helyiértéken lévő számjegy 5-nél nem kisebb.

Ez utóbbi növelés a 9 számjegy esetén a megelőző helyiértékekre is hatással van. Például 6,798 századokra kerekítve $\approx 6{,}80$; 6,998 századokra kerekítve $\approx 7{,}00$.

Fordítva is eljárhatunk. A táblázatban az y szám közelítő (kerekített) értékeiből következtetünk a valós értékére.

A zsebszámológépek elterjedésével a legtöbb számolási feladatban találkozunk a kerekítés problémájával. Például a $z = \frac{19}{17}$ tört értéke gépünk szerint $\frac{19}{17} = 1{,}117647059$. Tudjuk, hogy a gép az utolsó, 10. számjegyet kerekítve írja ki, így biztosan csak annyit állíthatunk, hogy $1{,}1176470585 \le z < 1{,}1176470595$. (A pontos érték $z = 19:17 = 1{,}\overline{1176470588235294}$.)

Sajnos, ritkán, de előfordul, hogy a zsebszámológép az általa tárolt szám utolsó számjegyét kerekítés nélkül írja ki.

GYAKORLATI FELADATOK

A jelenlegi matematika-tananyagban a korábbinál nagyobb hangsúllyal szerepelnek a valós helyzeten alapuló, életközeli feladatok.

A gyakorlatban a pontos adatok helyett gyakran azok *közelítő értékeivel* dolgozunk.

Ennek több oka is lehet:

– az adatokat könnyebben megjegyezhetjük;

– az adatok összehasonlítására, hozzávetőleges jellemzésére a közelítő értékek is elegendőek;

– a számolási feladatokban fáradságos a felesleges számjegyek „cipelése”;

– végül módszertani szempontból fontosabb lehet egy feladat elvi megoldása, mint hogy az aprólékos, végletekig precíz számolással sok időt töltsünk.

Példák

1. Magyarország területe kb. 93 ezer km^2. A pontos 93 036 km^2 értéket kevesen tudják „fejből”, s nincs is rá szükség: a lexikonokban megtalálható.

2. Hány cm annak a körnek a sugara, melynek 12,5 cm a kerülete?

Megoldás

2. $2r\pi = 12{,}5$, innen $r = \dfrac{12{,}5}{2\pi} \approx 1{,}99$ (cm). Itt a $\pi \approx 3{,}14$ értékkel számoltunk, a pontosabb közelítő értékre nem volt szükség. (Ha az elérhető legpontosabb π értékkel dolgozunk, a kapott eredmény $r \approx 1{,}989436789$ cm, ami két tizedesjegyre kerekítve megegyezik az általunk számolttal. Látható, hogy a közelítő értékek használata gyakran *felesleges munkától* óv meg minket.)

Mikor szükséges a közelítő adatok használata?

Példák

1. Az adatokat nem számíthatjuk ki pontosan. (Például $\sqrt{2}$ irracionális szám, s így alakja végtelen, nem szakaszos tizedes tört.)

2. A mérőeszközeinkkel nem állapíthatunk meg pontos értéket. (Ha a mm beosztású vonalzóval egy szakasz x hosszát 2,7 cm-nek mérjük, akkor csak abban lehetünk biztosak, hogy $2{,}65\text{ cm} \le x < 2{,}75\text{ cm}$.)

3. Ugyanarra az adatra több mérési eredményünk van. (Ha egy osztály tanulói cm pontossággal megmérik a tanterem szélességét, több különböző eredményt kapnak. Ekkor – valamilyen módszer szerint – az eredményeket átlagolni kell.)

A 2. példával kapcsolatban jegyezzük meg: a gyakorlatban a mérések eredménye soha nem egy szám, hanem mindig egy *számköz,* s ezt az intervallumot *kettős egyenlőtlenséggel* jellemezhetjük.

Mikor ne alkalmazzunk közelítő értékeket?

Vannak olyan feladatok, amelyek eredménye pontos, vagy a hagyományos értelemben nem kerekíthető szám. Ha például egy adott árumennyiség elszállításához szükséges teherautók számát határozzuk meg, akkor az eredményül kapott 13,28 teherautót nem kerekíthetjük 13,3-re (nincs 0,3 teherautó), sem 13-ra (hiszen a szállításhoz legalább 14 autó kell). Fordított a helyzet akkor, ha például egy lift teherbíró képességét számítjuk ki. Az eredményül kapott 6,6 embert 7-re kerekíteni súlyos hiba volna: a lift teherbírása 6 ember.

Szigorúan tilos a kerekített érték *további kerekítése*. Ha egy x mennyiség mért értéke $x_0 = 3{,}448$, akkor $3{,}4475 \le x_0 < 3{,}4485$. A századokra kerekített érték $x_1 \approx 3{,}45$, vagyis ekkor $3{,}445 \le x_1 < 3{,}455$. (Ez matematikailag helyes eljárás, a tényleges x_0 érték benne van a közrefogó intervallumban. Persze az intervallum hosszabb, azaz a szám pontatlanabb lett.) Ha most x_1 értékét – helytelenül – tovább kerekítjük tizedekre, akkor $x_2 \approx 3{,}5$, s ez hibás eredményre vezet: a $3{,}45 \le x_2 < 3{,}55$ intervallumban már nincs benne x_0. (Ha x_2 értékét tovább kerekítjük egészekre, akkor $x_3 \approx 4$, azaz $3{,}5 \le x_3 < 4{,}5$, a hiba még nagyobb lesz.)

MEKKORA A GYAKORLATBAN (VAGY EGY-EGY KONKRÉT FELADATBAN) A SZÜKSÉGES PONTOSSÁG?

Erre vonatkozóan nincs egységes előírás. Általában azt mondhatjuk, hogy olyan pontossággal dolgozzunk, amit „az adatok igényelnek”, és „a kapott eredmény reális legyen”.

Az alábbiakban példák segítségével néhány fogódzót sorolunk fel.

1. Segíthet a feladat szövegezése, a közölt adatok pontosságának a vizsgálata.

„Egy egyenlő szárú háromszög alapja $a = 10{,}2$ m, szárai $b = c = 12{,}3$ m hosszúak. Mekkora a háromszög alapjához tartozó magassága?”

Ebben a példában nyilván a magasságot is elegendő dm pontossággal megadni. (Nyomatékosítja az igényelt pontosságot, ha például $b = 12{,}0$ m.)

2. Találhatunk konkrét utalásokat a közelítő értékekre.

„Egy város lakossága 110 ezer fő.” A 110 000 alak helyett alkalmazott forma arra utal, hogy a lakosság számát ezresekre kerekítették. (Természetesen értelmetlen olyan kérdést feltenni, hogy mennyi lett ezen város lakossága, ha egy frissen épült ötlakásos társasházba 12 új lakó költözött be.)

Hasonló utalások lehetnek: „egy földterület nagysága kb. 20 hektár”; „a csomag tartalma 40 dkg ± 3 dkg” és így tovább.

3. Támaszkodhatunk a gyakorlatban alkalmazott mértékegységekre.

Nem vásárolunk kenyeret grammokban mérve; egy háztartásban a fűtéshez szükséges éves tüzelőanyag mennyiségét nem kg-ban számolják, hanem mázsában; egy hosszú séta időtartamát sem másodpercekben becsüljük meg.

4. Fontos a „józan ész”, a realitásérzék.

„Milyen magas a hegy?”-típusú kérdésre az „1143,32 m” válasz, a centiméteres pontosság komikusan hat. (Egy sétáló turista a hegy csúcsára elhelyez egy 5 cm-es kavicsot, s a hegy magassága máris megváltozik?)

5. Elemezhetjük a feladatban felállított modellt.

Fontos tudnunk, hogy a legtöbb életközeli feladat a valóság modellezése, s ezért – természetesen – számításaink sosem lehetnek abszolút pontosak. Ez persze nem baj, ha a kapott eredmény az elfogadhatónak tartott hibahatáron belül van.

„Adott földterületet egy traktor 30 óra alatt szánt fel. Mennyi ideig tartana a szántás 17 traktornak?” Eredmény: $\frac{30}{17} \approx 1{,}764705882$ óra, amit nyilván kerekítenünk kell. Az 1,76 óra, vagy még inkább az 1,8 óra a reális, a modell természetének megfelelő válasz. Azonban tudjuk, hogy 17 traktorral nem lehet úgy szervezni a munkát, hogy azok egymással párhuzamosan dolgozzanak, hiszen egyszerre nem férnek hozzá a földterülethez. Tehát a kapott eredmény csak azzal az egyszerűsítő feltevéssel helyes, hogy „mindegyik traktor az adott ideig folyamatosan dolgozik”, s így is csak közelítő pontosságú.

6. Előfordulhat, hogy a feladat szövegezése „pontos érték” meghatározását kéri; vagy hangsúlyozza, hogy az eredményt „közelítő értékek (azaz számológép vagy függvénytáblázat) alkalmazása nélkül” állapítsuk meg. Ekkor általában matematikai módszereket alkalmazunk, egyszerűsítjük a kifejezéseket, vagy a keresett mennyiségeket nem tizedes tört alakban adjuk meg. Például:

$\frac{2}{7} + \frac{7}{13} = \frac{26}{91} + \frac{49}{91} = \frac{75}{91}$ pontos érték; míg két tizedesjeggyel számolva $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$, $\frac{7}{13} \approx 0{,}54$, s innen $\frac{2}{7} + \frac{7}{13} \approx 0{,}83$, ami csak közelítő érték. ($\frac{75}{91} \approx 0{,}82$; az eltérés a két felfelé kerekítésből adódott.)

Egy másik példa: $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) \approx 2{,}41 \cdot 0{,}41 \approx 0{,}99$ a kerekített érték; míg a kijelölt szorzásokat elvégezve pontos eredményként 1-et kapunk.

A pontos érték megállapításának elvi jelentősége is lehet. Legyen a feladat egy háromszög α szögének a meghatározása, s ez alapján annak eldöntése, hogy a háromszög hegyesszögű, tompaszögű vagy derékszögű. Ekkor α értékét pontosan kell meghatároznunk. Tegyük fel, hogy hosszas számolás után a kalkulátor az $\alpha = 90°$ értéket írja ki. A kerekített kijelzés miatt fogalmunk sincs arról, hogy milyen típusú a háromszög.

HIBASZÁMÍTÁS (Olvasmány)

Mérni pontosan nem lehet. Ennek több oka is van, amelyek elemzésére fizika- vagy kémiaórán részletesen sor kerül. Néhány hibaforrást felsorolunk:

– a mérőeszközeink sosem tökéletesek;
– számolni kell a mérést végző személy szubjektivitásával;
– végül a nagyon finom méréseknél maga a mérés (eszközei, folyamata, hatása) is befolyásolhatja a vizsgált rendszer állapotát, viselkedését.

Ebben a fejezetben a *hiba* szót matematikai értelemben használjuk, azaz valamely mennyiség számítás útján kapott és elméleti (pontos) értéke közötti eltérést jelenti. A hiba szó köznapi értelemben mást jelent: hiba = ’tévedés’; hibás megoldás = ’rossz megoldás’.

Minden mérésnek és sok numerikus számolásnak van tehát *hibája*.

Például $\sqrt{2}$ két tizedesjegyre kerekített értéke $\sqrt{2} \approx 1{,}41$. Mivel a kerekítési szabály miatt $1{,}405 \leq \sqrt{2} < 1{,}415$, ekkor megállapíthatjuk, hogy a közelítés miatt fellépett hiba kisebb mint 0,005.

Egy másik példában tegyük fel, hogy az x és y szakaszok hosszát mm-es pontossággal 12,3 cm-nek és 8,4 cm-nek mértük. Ekkor a szakaszok pontos (általunk ismeretlen) hossza 1 mm-es intervallumban van, s a mérési hiba is legfeljebb 1 mm lehet: $x = 12{,}3 \pm 0{,}05$ cm és $y = 8{,}4 \pm 0{,}05$ cm. A két szakasz hosszának összege $x + y = 20{,}7 \pm 0{,}1$ cm, vagyis most a hiba legfeljebb 2 mm lehet. Láthatjuk, hogy a két mennyiség összeadásakor a hibák is összeadódtak.

Általában is igaz, hogy a számolások során a hibák továbbterjednek. (Ennek részleteivel most nem foglalkozunk.) Előfordulhat, hogy nagyszámú műveletvégzés után olyan méretű a keletkezett hiba, amely az egész eljárás hitelességét, az eredmény értelmezhetőségét is megkérdőjelezi. Ezért az összetett számolási feladatokban szabályként fogalmazhatjuk meg, hogy közelítő értékek használata esetén, ha lehetséges, érdemes

– csökkenteni az elvégzendő műveletek számát (az egyszerűbb alak alkalmazására fentebb már mutattunk példát);
– a közbülső számításokat nagyobb pontossággal végezni;
– (és néha maga a mérés is nagyobb pontossággal hajtható végre).

A hibák csökkentésére egy másik (ritkán használt) eljárás a váltakozó kerekítés alkalmazása.

Az alábbi táblázatban öt város lakosságát, illetve a lakosság egymáshoz viszonyított százalékos arányát tüntettük fel. (A könnyebb számolás kedvéért lett „szép” kerek szám az összlakosság.)

városok	lakosság	kerekített érték (ezer fő)	százalék	kerekített százalék
A	21 518	21,5	21,5	22
B	12 603	12,6	12,6	13
C	27 507	27,5	27,5	28
D	18 623	18,6	18,6	19
E	19 749	19,7	19,7	20
összesen:	100 000	99,9	99,9	102

A kerekítések miatt az utolsó három oszlop összesített adatai pontatlanok. A hasonló, feltűnő ellentmondások elkerülése érdekében ha sokszor kellene „felfelé” kerekíteni, akkor az adatok egy részét valamilyen stratégia szerint (pl.

minden másodikat) „lefelé” kerekítik. (Ezt a módszer ritkán alkalmazzák, hiszen ekkor az adatok egy része a hibahatáron túl válik pontatlanná.)

A hibaszámítás egy másik gyakran használt kifejezése az **értékes számjegyek** *száma*.

Egy közelítő szám első értékes számjegyének nevezzük a (balról számított) első, nullától különböző számjegyet. Ha egy számnál csak kerekítési hiba van, akkor az utolsó értékes számjegy megegyezik a tizedes tört utolsó kiírt számjegyével. (Ez 0 is lehet!)

Ezzel kapcsolatban azt is fontos tudnunk, hogy nem biztos, hogy az értékes számjegy egyúttal helyes (azaz pontos) számjegy is.

Példák:

szám	kerekített érték	értékes számjegyek száma	helyes számjegyek száma
12,583	12,58 (századokra kerekítve)	4	4
12,586	12,59	4	3
12,996	13,00	4	1
19,996	20,00	4	0
128 216	128 ezer (pl. egy város lakossága)	3	3
128 612	129 ezer	3	2
99 823	100 ezer	3	0

szám	kerekített érték	értékes számjegyek száma	helyes számjegyek száma
5,2341 vagy 5,2337	5,234	4	3 vagy 4
0,0052343 vagy 0,0052337	0,005234	4	3 vagy 4
0,5203401 vagy 0,5203396	0,520340	6	4 vagy 6
52,034003 vagy 52,033996	52,03400	7	4 vagy 7
52,30002 vagy 52,29998	52,3000	6	2 vagy 6
$\sqrt{2}$	1,414	4	4
$\sqrt{9,06}$	3,010	4	2
$\sqrt{9,62}$	3,102	4	3

Az utóbbi három értéket a *Négyjegyű függvénytáblázatok* c. könyvből választottuk. A *négyjegyű* jelző éppen arra utal, hogy az adatok 4 értékes számjegyet tartalmaznak. (De nem feltétlenül 4 helyes jegyet: több számjegyet kiírva $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$, $\sqrt{9{,}06} \approx 3{,}009983389$ és $\sqrt{9{,}62} \approx 3{,}101612484$.)

A jelenlegi számológépek 8-10 számjegyet írnak ki, ezek mindegyike értékes számjegy (az utolsó kerekített). A számolás során ügyelnünk kell a lehetséges hibák nagyságrendjére. Például elvileg hibás (helytelen) az a megoldás, mikor a részeredményekkel 2-3 tizedesjegy pontossággal számolunk, majd az eredményt 8 jegy pontossággal adjuk meg; ekkor ugyanis az utolsó számjegyek értéktelenek, kiírásuk félrevezető.

Fogalmak
kerekítés;
hiba;
kerekítési szabály;
átvitel;
közelítő érték;
értékes számjegy;
helyes számjegy.

A számológép használatakor

– a számolás előtt érdemes egy előzetes nagyságrendi becslést végezni (kb. mekkora a várható eredmény);

– szintén a számolás előtt döntsük el, hogy hány tizedesjegy pontosságot szeretnénk elérni;

– a számolás során egy-két tartalék jeggyel dolgozzunk (így a pontosság a hibahatáron belül marad);

– összetett feladatokban, ha lehetséges, matematikai módszerekkel csökkentsük a műveletek számát (így kisebb lesz a hiba);

– végül utólag ellenőrizzük a kapott eredmény reális voltát (hiszen könnyen előfordulhat, hogy a jó gomb vagy billentyű mellé ütünk).

Pályakép

Név: Dávid
Lakhely: Budapest
Végzettség: közgazdász, vállalatfinanszírozás és számvitel szakirányon
Jelenlegi beosztás: HR vezető (human resources = emberi erőforrás, angol kifejezés)
Milyen tantárgyakból felvételizett, tanult emelt szinten?
matematika, történelem.

Helló.

Dávidnak hívnak. HR vezetőként dolgozom egy nemzetközi étteremlánc-üzemeltető cég magyarországi leányvállalatánál. Az emberi erőforrás menedzsmentben a legnagyobb szükség a matematikára a javadalmazás és kompenzáció területén van, ami azt a csomagot (bér, bónusz, díjak és juttatások) határozza meg, amit a munkavállalók kapnak. Ez a kedvenc részem a HR sok területe közül (toborzás, kiválasztás, kommunikáció stb.), mert itt a matematika által leegyszerűsödnek a dolgok és könnyen kezelhetővé válnak a feladatok.

27. EGY- ÉS TÖBBVÁLTOZÓS ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK, HELYETTESÍTÉSI ÉRTÉK

Matematikaórákon gyakran találkozunk az alábbi kifejezésekkel. Általában akkor, ha egy talált összefüggést próbáltunk meg általánosítva megfogalmazni. A kifejezésekben szereplő betűk konkrét számok helyett szerepelnek.

abc; $100a + 10b + c$; kc; $4k + 3$; $r^2\pi m$; $2a + 2b$;

$\frac{x+y}{2}$; $\frac{1}{a+b+c}$; $\frac{s}{t}$; a^{2k+1}; $a_1 + (n-1)d$.

A kifejezésekben szereplő betűket számoknak, **változóknak, ismeretleneknek** vagy **határozatlanoknak** nevezzük, attól függően, hogy milyen probléma kapcsán merültek fel.

Azt a számhalmazt, amelynek elemeit helyettesítik a betűk, *a* **kifejezés alaphalmazának** nevezzük.

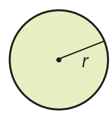
Az alaphalmaznak azt a részhalmazát, melyekkel a jelölt műveletek elvégezhetők, a *kifejezés* **értelmezési tartományának** nevezzük. (Természetesen a részhalmaz nem feltétlenül jelöl valódi részhalmazt.)

Algebrai kifejezésről akkor beszélünk, ha a betűket, számokat az eddig tanult műveletekkel, esetleg zárójelek használatával kapcsoljuk össze.

Például az $\frac{abc}{4r}$ kifejezést értelmezhetjük a valós számok halmazán, ez a halmaz az alaphalmaz. A kifejezés értelmezési tartománya: $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}$, $r \neq 0$.

Ha egy algebrai kifejezésben a változók helyére konkrét számokat helyettesítünk, majd elvégezzük a műveleteket, akkor a műveletsor eredményét a kifejezés **helyettesítési értékének** tekintjük.

Például az $(a-b)^2+(a+b)^2$ kifejezés értéke 68, ha $a=5$ és $b=3$, de 4, ha $a=1$ és $b=1$.

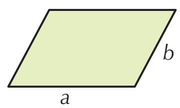


$T = r^2 \cdot \pi$

Osztályozzuk az algebrai kifejezéseket!
Egyik szempont lehet a *bennük szereplő különböző betűk száma szerint*.

Egyváltozós kifejezés:

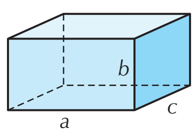
Például $3a$; $17k-3$; $\frac{m+1}{2}$; $-\frac{3x}{7}$; $r^2\pi$.



$K = 2 \cdot (a+b)$

Kétváltozós kifejezés:

Például $\frac{m+n}{2}$; k^{l+2}; $2(a+b)$; ab; $7t^2-5r$.

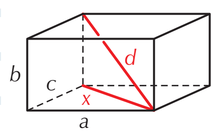


$V = a \cdot b \cdot c$

Háromváltozós kifejezés:

Például abc; $\frac{p+q+r}{3}$; $a^2+b^2+c^2$; $(m+n)(-2)+3k$.

Hasonlóan értelmezhetünk háromnál többváltozós kifejezéseket is.
Másik szempont lehet, hogy *szerepel-e a kifejezésben tört*, avagy nem.



$x^2 = a^2 + c^2$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Algebrai egész kifejezésről *akkor beszélünk, ha a kifejezésben nincs tört, melynek nevezőjében változó is szerepel.*

Például $3kl$; $4(a+b+c)^2$; $r(s-2t)$; $e+f-3g$.

Fogalmak
változó;
ismeretlen;
határozatlan;
algebrai kifejezés;
értelmezési tartomány;
helyettesítési érték.

Algebrai törtkifejezésről akkor beszélünk, ha a kifejezésben szereplő tört nevezőjében szerepel változó.

Például $\frac{s}{t}$; $\frac{a+b}{c}$; $\frac{4a}{b^2}+\frac{b^2}{c}$; $\frac{7x-1}{4x+3}$; $\frac{8}{y}$; $\frac{3m-2n}{m+n}$.

FELADATOK

1. K1 Matematikai tanulmányaink során hol találkoztunk a fejezet elején szereplő algebrai kifejezésekkel? Mit határozhatnak meg ezek a kifejezések? A betűk mely számhalmaz elemeit helyettesíthetik?

2. K1 Értelmezzük a kifejezéseket a valós számok lehető legbővebb halmazán! Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

a) $(a - b + c)^3$; *b)* $\frac{ax}{(b-2)(b+3)}$; *c)* $\frac{s}{t}$; *d)* $3k + 1$; *e)* $(e - f)^m$.

3. K1 Számítsuk ki a kifejezések helyettesítési értékét! Mely számok nem tartoznak az értelmezési tartományba?

a) $a^2 - b^2$, ha $a = 15$, $b = 14$; *b)* $\frac{2(x^2 - y^2)}{x + y}$, ha $x = 2007$, $y = 7002$.

4. K1 Írjunk fel egy-egy algebrai kifejezést a szövegnek megfelelően!
a) Havonta c Ft jövedelemből mennyi marad meg év végén, ha havi kiadásom k Ft?
b) Az n szám 7-tel osztva 5-öt ad maradékul.
c) Az f számnál 15-tel kisebb szám négyzetének harmada.
d) A p és q számok összegének reciproka.
e) A r és s számok reciprokának összege.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **624–627; 629.**

28. EGYNEMŰ KIFEJEZÉSEK SZORZÁSA, ÖSSZEVONÁSA, POLINOMOK

A továbbiakban a kifejezéseket a valós számok halmazán értelmezzük, csak akkor jelöljük külön az értelmezési tartományt, ha ettől eltérő.

1. példa

Tekintsük a következő két egytagú kifejezést: $3xy$; $-2xy^2z$.
Szorozzuk össze az egytagú kifejezéseket!

$(3xy) \cdot (-2xy^2z)$

Mivel a műveletsorban csak szorzások (a hatványok is azok) szerepelnek, ezért az azonos betűket és a konstans számokat összeszorozva a szorzat:

$(3xy) \cdot (-2xy^2z) = (-2 \cdot 3)(x \cdot x)(y \cdot y^2) \cdot z = -6x^2y^3z$.

2. példa

$\left(\frac{2}{3}abc\right)\cdot(-a^3c^2d)=-\frac{2}{3}a^4bc^3d$; $(0,1fg)\cdot(0,2ag^2)\cdot(10f^5gh) = 0,2f^6g^4ah$.

$(0,5p^2q^3)\cdot(2pq^5) = p^3q^8$;

Egytagú kifejezések szorzása esetén a tényezőket a legcélszerűbb csoportosítás után összeszorozzuk. Figyeljünk a hatványozás azonosságainak megfelelő használatára!

3. példa

Figyeljük meg az alábbi egytagú algebrai kifejezéseket!

$3ab$; $-8ab$; $\frac{2ba}{7}$; ab; $-\frac{a5b}{9}$; $-ab$.

Ezek a kifejezések csak egy konkrét, szám szorzótényezőben különböznek egymástól, a „betűs tényezők” (ab) megegyeznek. A számokat az (ab) kifejezés **együtthatóinak** nevezzük.

$3ab = 3\cdot(ab)$; együttható: 3.

$-8ab = -8\cdot(ab)$; együttható: –8.

$\frac{2ba}{7}=\frac{2}{7}\cdot(ab)$; együttható: $\frac{2}{7}$.

$ab = 1\cdot(ab)$; együttható: 1.

$-\frac{a5b}{9}=-\frac{5}{9}\cdot(ab)$; együttható: $-\frac{5}{9}$.

$-ab = -(1)\cdot(ab)$; együttható: –1.

Két egytagú algebrai egész kifejezést egyneműnek nevezünk, ha legfeljebb együtthatójukban különböznek egymástól.

Tehát az előző kifejezések mind egyneműek egymással.

4. példa

A $3xy^2$ és az $5x^2y$ *nem egynemű* kifejezések, mert a benne szereplő, betűkből álló szorzatok nem pontosan ugyanazok ($x\cdot y\cdot y$, illetve $x\cdot x\cdot y$).

5. példa

A $-\frac{5xyz}{11}$ és a $-\frac{5axy}{11}$ kifejezések nem egyneműek, de együtthatóik megegyeznek.

6. példa

Az $5,3x$, a $4x^2$ és az $\frac{x^4}{2}$ nem egynemű kifejezések, az együtthatók is különbözők. Az együtthatók rendre: $5,3$; 4; $\frac{1}{2}$.

A következő példákban többtagú kifejezéseket látunk, amelyekben a tagok egyneműek. Ezeket a többtagú kifejezéseket rövidebb alakban úgy írhatjuk, ha összevonjuk az egynemű kifejezéseket.

Fogalmak
egynemű algebrai kifejezés;
együttható;
polinom.

7. példa

$8x - 5x + 3{,}2x - 6x = 0{,}2x;$

$$\frac{2a^3}{3} - \frac{a^3}{6} + \frac{5a^3}{2} = \frac{4a^3 - a^3 + 15a^3}{6} = \frac{18a^3}{6} = 3a^3;$$

$$0{,}8p^2q + \frac{p^2q}{2} - 1{,}9p^2q = -0{,}6p^2q.$$

A többtagú algebrai egész kifejezéseket **polinomoknak** nevezzük. (polinom = többtagú)
Polinomokat úgy írhatunk rövidebb alakban, ha az egynemű kifejezéseket összevonjuk.

8. példa

$3x - 5x + 0{,}2x + 8 = -1{,}8x + 8;$

$5xy + x^2 - 7yx + 3{,}5x^2 + 0{,}75xy = 4{,}5x^2 - 1{,}25xy;$

$3a^2b + 8b^2a - 10 + 3ba^2 - 9ab^2 + 7 - 5a^2b = a^2b - ab^2 - 3.$

FELADATOK

1. K1 Melyek az egynemű kifejezések a következő egytagú kifejezések között?

a) $-2ab^2$; $3{,}2ab$; $\frac{5}{6}a^2b$; $17ab$; $9a^2b$; $-7ab$; $\frac{9}{13}ab^2$; $-5a^2b$.

b) $3x^2yz$; $-4xy^2z$; $5{,}3xyz$; $\frac{2{,}4xz^2z}{5}$; $7^2 \cdot x^2yz$; $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot xyz^2$; $-15x^2yz$; $3xyz$; $\frac{-xyz^2}{3}$; $5xy^2z$; $-3{,}6xy^2z$.

2. K1 Válasszuk ki az alábbi kifejezések közül az egytagúakat! Határozzuk meg az egytagú kifejezések együtthatóját!

a) $2a + b$; $-5x^3$; $0{,}6x \cdot x$; $-\frac{1}{3} + y$; $a^2 - b^2$.

b) $3a^2 + b \cdot b$; $\frac{10}{4}xcyy$; $-x^3 + y$; $-xyxy$; $5xy$.

c) $ab + c$; $\frac{e \cdot f}{2}$; $2a + 2b$; $3xxb + c^2$; $-3ab^2c$.

3. Végezzük el az alábbi egytagú kifejezések szorzását!

K1 *a)* $x^3 \cdot x^5$;

K1 *b)* $5a^3 \cdot 2a^2$;

K1 *c)* $\frac{5}{3}y \cdot 3y^4$;

K1 *d)* $\frac{24}{5}x^8 \cdot \frac{5}{3}x^0$;

K2 *e)* $(-4x^5) \cdot (-7x^4)(3x^3)$;

K2 *f)* $(6a^2b) \cdot (-3a^3b^5)$;

K2 *g)* $(-5bc^2) \cdot (+4b^2c)$;

K2 *h)* $\frac{21}{11}x^8y^4 \cdot \frac{132}{9}x^5y^8$;

K2 *i)* $-2a^6 \cdot 6a^4 \cdot \left(-\frac{5}{24}a^3\right)$;

K2 *j)* $4d^2e^3 \cdot (-8e^2d^5)$;

K2 *k)* $(-5x^n) \cdot \left(-\frac{2}{5}x^{n+3}\right)$;

K2 *l)* $(x^{2n-1}) \cdot \left(-\frac{3}{4}x^{n+1}\right)$.

4. K1 Végezzük el az összevonásokat a következő kifejezésekben!

a) $5x - 4x - 9x$;

b) $6a - (-12a) + 21a - 7a$;

c) $11y^2 - (-5y^2) - 25y^2$;

d) $8xy - 5xy + 12xy$;

e) $1{,}4x^2z - 3{,}6x^2z + 5{,}7x^2z - (-6{,}4x^2z)$;

f) $15abaa - 17a^3b - 5a^2ab + 21ba^3$;

g) $5a^3b^2 + 7b^2a^3 - 4a^2b^2a + 3ab^2a^2 + 175ba^2ab$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **630–635.**

29. POLINOMOK FOKSZÁMA, EGYENLŐSÉGE, ZÉRUSHELYE

Egyváltozós polinom fokszáma a legmagasabb fokú tagjának fokszámával egyezik meg.

1. példa

Elsőfokú polinomok például:	$3x$;	$5a - 7$;	$\frac{2}{3}b + 1$;	$7(p - 4) + 2$.
Másodfokú polinomok például:	$6x^2 - 2x + 5$;	$p + p^2$;	$\frac{a^2}{5}$.	
Ötödfokú polinomok például:	$-y^5 + 3y - 107$;	$p + p^2 + p^3 - p^5$.		

Megjegyzés

Az

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

polinomot, ahol $n \in \mathbf{N}^+$ és minden együttható $\left(a_i\ (i = 0; 1; 2; 3; \ldots; n)\right)$ valós szám, $a_n \neq 0$, x változójú, n-edfokú polinomnak nevezzük.

Néha indokolt, hogy az együtthatókra megszorítást tegyünk, például egész együtthatós, egyváltozós polinom általános alakja megegyezik az előző polinommal, ha minden $a_i \in \mathbf{Z}$ teljesül.

Többváltozós, egytagú kifejezés fokszáma a benne szereplő határozatlanok hatványkitevőinek összegével egyezik meg.

2. példa

Másodfokú kifejezések például:	mn;	$\frac{5xy}{3}$;	$-\frac{a}{7} \cdot \frac{b}{8}$,	$5{,}06pq$.
Harmadfokú kifejezések például:	abc;	$\frac{4}{7}x^2y$;	$-\frac{p}{3} \cdot \frac{q^2}{4}$.	
Hatodfokú kifejezések például:	a^4b^2;	$-8xy^3z^2$;	$4{,}3p \cdot 6q \cdot r^4$.	

Többváltozós, többtagú polinom fokszáma a legmagasabb fokú tag fokszámával egyezik meg.

3. példa

$3a - 4b + c - 2$	Elsőfokú, háromváltozós polinom.
$4xy + 6x - y + 2$	Másodfokú, kétváltozós polinom.
$0{,}7p - q^2 + 3pq + r$	Másodfokú, háromváltozós polinom.
$k^4 - 3k^3l^4 + 1$	Hetedfokú, kétváltozós polinom.

Definíció

Polinomok egyenlősége

Két polinomot akkor tekintünk egyenlőnek, ha bármely valós számot behelyettesítve a két polinom értéke egyenlő.

Ez a definíció nehézkesen alkalmazható számunkra, hiszen végtelen sok helyen számolnunk kellene a helyettesítési értékeket, így keressünk olyan meghatározást, mely nem ennyire precíz, de a lényeget nem befolyásolja.

Két polinom egyenlőségét például úgy dönthetjük el, hogy a bennük szereplő tagokat a fokszámuk szerint csökkenő vagy növekvő rendezett alakban írjuk. Ha ekkor a tagokat sorban összehasonlítva azok rendre megegyeznek, akkor a két polinom egyenlő.

Megjegyzés

Polinomok egyenlőségét néhány helyen ≡ jellel jelölik. (A ≡ jel azonosan egyenlőt jelent.)

4. példa

Egyenlő polinomok például:

$3x^5 + x^3 - 2x^2 + 1$ és $-2x^2 + x^3 + 1 + 3x^5$;

$p - pq + q^3$ és $q^3 - pq + p$.

Nem egyenlő polinomok például:

$y^6 + y^5 - 2y^2 + 1$ és $y^6 - 2y^6 + y + 1$;

$pqr - r^2 + p$ és $p^2qr - r^2 + p$.

Az **egyváltozós polinomokat** rövidebben is jelölhetjük: egy kisbetű után zárójelben tüntetjük fel a változó betűjelét.

5. példa

$p(a) = a^3 + a - 8$; $k(x) = 4x^7 - 5x^6 + x^2 - x + 9$.

Definíció

Azt a valós számot, amely esetén a polinom helyettesítési értéke 0, a **polinom zérushelyének** nevezzük.

6. példa

A $p(x) = 5x - 8$ polinomnak van zérushelye, az $x = \frac{8}{5}$, ekkor $p\left(\frac{8}{5}\right) = 0$.

A $k(p) = p^2 - 6p + 5$ polinomnak zérushelye a $p = 5$, mert $k(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 0$. A polinomnak nem csak egy zérushelye van, mivel $k(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$, ezért a $p = 1$ is zérushelye.

Megjegyzés
Bizonyítható, hogy egy egyváltozós, n-edfokú polinomnak legfeljebb n valós zérushelye van.
A polinom nagyon fontos algebrai fogalom, az előzőekben történt bevezetése során az érthetőségre, a fogalmak pontos kialakítására helyeztük a hangsúlyt.
A polinomok eddiginél igényesebb tárgyalása a felsőbb évfolyamokon folytatódik, egyes fogalmakat precízebben, más módon definiálunk majd.

Fogalmak
polinom fokszáma;
zérushely.

FELADATOK

1. K1 Határozzuk meg a polinomok fokszámát!

a) $\frac{1}{7}a$; *b)* $\frac{4x^3}{5}$; *c)* $14a^5 + 7a^4 - a$; *d)* $p^3q^4 + 3p^5 - 4q^2$.

2. K1 Keressük meg a polinomok zérushelyeit!

a) $a(x) = 4 - 3x$; *b)* $b(x) = \frac{2}{5}x$; *c)* $c(x) = x^2 - 1$.

3. K1 Határozzuk meg az alábbi polinomokban a hiányzó együtthatókat úgy, hogy a két polinom egyenlő legyen!
a) $x^2 + 3x - 5 = 3x - 5 - ax^2$; $a =$;
b) $-3x^4 + 6x^3 - 4x + 1 = 6x^3 - ax^4 + bx^2 - 4x + 1$; $a =$; $b =$.

4. K2 Számítsuk ki az alábbi polinomok helyettesítési értékét a megadott helyeken!
a) $\left(5x^2 - 3y^2\right) + \left[-\left(x^2 - 2xy + y^2\right) + \left(5x^2 - 5xy + 2y^2\right)\right]$; $x = 1$; $y = 2$.
b) $\left(-\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{5}{6}x^2y^2 + 2\right) - \left(x^2y^2 - \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{1}{12}xy - 4\right)$; $x = -4$; $y = \frac{1}{2}$.

5. K1 Döntsük el, hogy az alábbi polinomoknak a megadott számok közül melyik zérushelye!
a) $p(x) = x^2 - 5x + 6$; $x = 0$; 2; 4; 3;
b) $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 6x - 6$; $x = -3$; -1; 0; 1; 2;
c) $p(x) = x^3 - 2x - 3 - (2x - 4x^2 + 13)$; $x = 0$; 2; -2; 3; -4.

6. K1 Tekintsük a $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 20$ polinomot.
Igaz-e a következő állítás? A $p(x)$ polinom bármely pozitív valós számra pozitív értéket vesz fel.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **630–635.**

Rejtvény

Egy szórakoztató magazinban találtuk a következő (tíz) feladatot.
Adott 10 darab 2-es számjegy. Közéjük kell beírni a négy alapművelet jelét, illetve – ha szükséges – a megfelelő zárójeleket úgy, hogy rendre megkapjuk az 1, 2, 3, … , 10 összeget.
Egy példa: $(2 \cdot (2 + 2) : 2) + 2 \cdot (2 - 2) + 2 \cdot 2 + 2 = 10$.
(A feladat nehezíthető, ha az osztás legfeljebb csak egyszer használható.)

(A rejtvény megoldása a 137. oldalon található. Megpróbálkozhatsz a többi 3, 4, … , 9 számjegyes előállításokkal is, az 1–10 összegek mindegyikkel előállíthatók. A 2 mellett megadjuk még az 5-ösök és 6-osok egy-egy 1–10-es megoldását is.)

30. MŰVELETEK POLINOMOKKAL

Polinom: többtagú algebrai egész kifejezés.

A polinomok és a számok között sok hasonlóság van. Polinomok között is értelmezhetünk műveleteket, ezeket a valós számoknál megszokott módon, a tanult műveleti szabályok betartásával végezhetjük el.

Egyváltozós polinomok között is értelmezhető a maradékos osztás, a legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös stb.

Először a polinomok összeadásával, kivonásával, szorzásával ismerkedünk meg.

1. példa

Polinomok összevonása

$p(x) = 3x^2 - 5x + 7; \qquad q(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 2.$

$p(x) + q(x) = (3x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3x + 2) = 4x^3 - 2x^2 - 2x + 9.$

$p(x) - q(x) = (3x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3x + 2) = -4x^3 + 8x^2 - 8x + 5.$

Mint látható, a tanult műveletvégzések alapján, a polinomok összevonása a bennük szereplő egynemű kifejezések összevonását jelenti.

Többtagú polinomok szorzása esetén a valós számoknál használt disztributív tulajdonságot alkalmazzuk.

Emlékeztető

A szorzás, az osztás disztributív az összeadásra és a kivonásra nézve (disztributivitás, latin: szétválasztás), azaz: $a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac.$

$(b \pm c) : a = b : a \pm c : a.$

Példák

$4 \cdot (5 + 17) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 17 \qquad /= 20 + 68 = 88/;$

$10 \cdot (8,7 - 5,24) = 10 \cdot 8,7 - 10 \cdot 5,24 \qquad /= 87 - 52,4 = 34,6/;$

$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \qquad /= \frac{8}{15} - \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}/;$

$3 \cdot \left(4 + \frac{5}{3} - 2,5\right) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{5}{3} - 3 \cdot 2,5 \qquad /= 12 + 5 - 7,5 = 9,5/;$

$(12 + 21) : 3 = 12 : 3 + 21 : 3 = 4 + 7 = 11.$

Többtagú összegek esetén:

$(4 + 7)(5 - 2) = 4 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + 7 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = 20 - 8 + 35 - 14 = 33.$

(*Fontos:* figyeljünk a részletszorzatok előjelére!)

Polinomok szorzása

Polinomok esetén hasonlóan dolgozhatunk. Célszerű a végén a szorzatot rendezni a tagok fokszáma szerint a könnyebb áttekinthetőség kedvéért.

(Tanulóktól gyakran halljuk: „Polinomot polinommal úgy szorzunk, hogy az egyik polinom minden tagját megszorozzuk a másik polinom minden tagjával." Úgy gondoljuk, ez elég ügyesen fogalmazza meg a lényeget.)

2. példa

$a(x) = 2x + 1;\quad b(x) = 5 - 4x.$

$a(x) \cdot b(x) = (2x + 1)(5 - 4x) = 10x - 8x^2 + 5 - 4x = -8x^2 + 6x + 5.$

3. példa

$(2x + 4)(5 - x^3 - x) = 10x - 2x^4 - 2x^2 + 20 - 4x^3 - 4x = -2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 6x + 20;$

$(a - b^2)(b - a) = ab - a^2 - b^3 + ab^2 = -b^3 + ab^2 + ab - a^2.$

4. példa

Legyen $r(x) = 3x^2 - 2x + 8$ és $s(x) = x^2 + 7x$!
Adjuk meg a $q(x) = 2 \cdot r(x) - 5 \cdot s(x)$ polinomot!

Megoldás

$2r(x) = 6x^2 - 4x + 16.$
$-5s(x) = -5x^2 - 35x.$
$q(x) = (6x^2 - 4x + 16) + (-5x^2 - 35x) = x^2 - 39x + 16.$

Fogalom
disztributivitás.

5. példa

Határozzuk meg a $(p(x))^2$ polinomot, ha $p(x) = 5x^3 - 4x$!

Megoldás

$(p(x))^2 = p(x) \cdot p(x) = (5x^3 - 4x)(5x^3 - 4x) = 25x^6 - 20x^4 - 20x^4 + 16x^2 = 25x^6 - 40x^4 + 16x^2.$

FELADATOK

1. K1 Végezzük el a következő összevonásokat!

a) $32a - (17a + 22b)$; *b)* $12x - (8y + 5x)$; *c)* $(23a + 45b) - (18a - 7b)$; *d)* $(9a^2 - 5a) - (11a^2 - 7a)$.

2. Bontsuk fel a zárójelet, és végezzük el a lehetséges összevonásokat!

K1 *a)* $(1{,}1xy - 2x^2y + 7{,}5xy^2) - (1{,}8xxy - 5{,}7y^2x + 2{,}5xy)$;

K1 *b)* $(3a^3b - 13b^2) - (7a^3b + 6b^2)$;

K1 *c)* $(2xy - 31xz - 23yz) - (7yz - 16xy + 12xz)$;

K2 *d)* $(4r^2s + 8rs^2 - 13rs) + (3r^2s - 6sr^2) - (-7sr + 5r^2s - 11rs^2)$;

K1 *e)* $(8x - 3y) - 5(4x - 3y) + 2(3y - 7x)$;

K2 *f)* $(3x^3 - 2x^2 + 4x - 3) + 2(-3x^3 + 5x^2 - 9x + 7) - 3(2x^3 - 5x^2 + 8x - 1)$.

Ajánlott feladatok

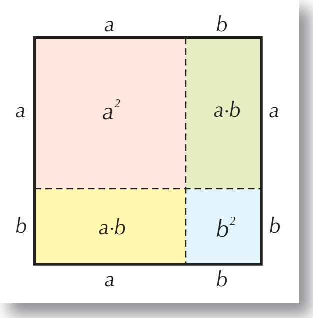
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **634–644; 649–652.**

31. NÉHÁNY NEVEZETES SZORZAT

Polinomot polinommal már tudunk szorozni. Néhány speciális polinom szorzata olyan egyszerű alakú, hogy ezeket célszerű megtanulni ahelyett, hogy mindig elvégeznénk a szorzásokat.

Két tag összegének négyzete: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Rendezve: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Megfogalmazva:
Két tag összegének a négyzete olyan háromtagú összeg, melynek tagjai:
- *az első tag négyzete;*
- *az első és második tag szorzatának kétszerese,*
- *a második tag négyzete.*



Az $(a+b)^2$ (ha $a > b > 0$) tekinthető egy $(a+b)$ oldalhosszúságú négyzet területének. Az azonosságot szemlélteti a következő ábra.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1. példa

$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$, mert
- *az első tag négyzete:* x^2;
- *az első és második tag szorzatának kétszerese:* $14x$;
- *a második tag négyzete:* 49.

2. példa

$(2x+8)^2 = 4x^2 + 32x + 64$, mert
- *az első tag négyzete:* $4x^2$;
- *az első és második tag szorzatának kétszerese:* $32x$;
- *a második tag négyzete:* 64.

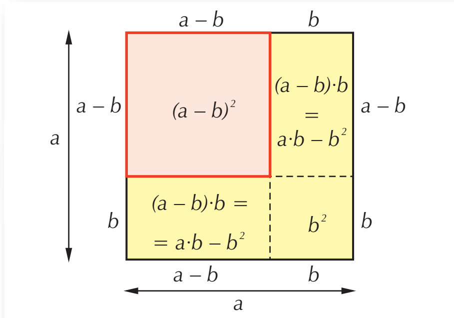
3. példa

a) $(a+10)^2 = a^2 + 20a + 100$;
b) $(2b+6)^2 = 4b^2 + 24b + 36$;
c) $(2c+5d)^2 = 4c^2 + 20cd + 25d^2$;
d) $(8x+7y)^2 = 64x^2 + 112xy + 49y^2$.

Két tag különbségének négyzete: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Rendezve: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Az $(a-b)^2$ (ha $a > b > 0$) tekinthető egy $(a-b)$ oldalhosszúságú négyzet területének. Az azonosságot szemlélteti a következő ábra.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



4. példa

$(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$;

$(2x-8)^2 = 4x^2 - 32x + 64$;

$(a-10)^2 = a^2 - 20a + 100$;

$(2b-6)^2 = 4b^2 - 24b + 36$;

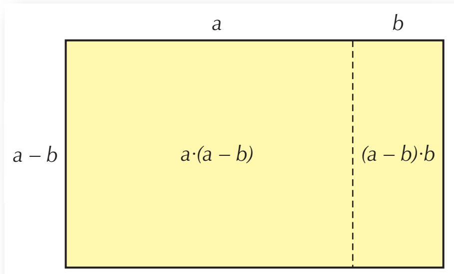
$(2c-5d)^2 = 4c^2 - 20cd + 25d^2$;

$(8x-7y)^2 = 64x^2 - 112xy + 49y^2$.

Két tag összegének és különbségének szorzata: $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.
Rendezve: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
Megfogalmazva:
Két tag összegének és különbségének szorzata olyan kéttagú kifejezés, mely az első tag négyzetének és a második tag négyzetének a különbsége.

Az $(a+b)(a-b)$ (ha $a > b > 0$) tekinthető egy $(a+b)$ és $(a-b)$ oldalhosszúságú téglalap területének.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$



5. példa

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$;

$(5a-3)(5a+3) = 25a^2 - 9$;

$(3b-4c)(3b+4c) = 9b^2 - 16c^2$;

$\left(\frac{2}{3}e - \frac{5}{7}f\right)\left(\frac{2}{3}e + \frac{5}{7}f\right) = \frac{4}{9}e^2 - \frac{25}{49}f^2$.

Két köbszám összegének, különbségének szorzat alakja:
$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.
Rendezve:
$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Általában a nehézséget az okozza, ha az összeg alakból kell felismernünk a szorzat alakot.

6. példa

Keressük $x^2 + 4x + 4$ teljes négyzet alakját!

Megoldás

Mivel ez egy háromtagú összeg, így a teljes négyzet kéttagú összeg négyzete lehet. Az első tag, az x^2 nyilván az x négyzete. Ha a második tag, a $4x$ a keresett első és második tag szorzatának kétszerese, akkor a fele a két tag szorzata, így a második tag a 2. Ennek a négyzete valóban 4, így:

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

7. példa

Keressük $a^2 - 2a + 1$ teljes négyzet alakját!

Megoldás

Az előző gondolatmenethez hasonlóan kaphatjuk:

$a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$.

8. példa

$25x^2 - 20x + 4 = (5x - 2)^2$;

$9p^2 - 36pq + 36q^2 = (3p - 6q)^2$;

$121 - 66s + 9s^2 = (11 - 3s)^2$.

9. példa

Írjuk fel szorzat alakban a $100 - a^2$ kifejezést. Mivel kéttagú a vizsgált kifejezés, és mindkét tag teljes négyzet, így a tanultak alapján:

$100 - a^2 = (10 + a)(10 - a)$.

10. példa

$25 - 4b^2 = (5 + 2b)(5 - 2b)$;

$16c^2 - 49d^2 = (4c + 7d)(4c - 7d)$;

$$\frac{100p^2}{9} - \frac{25}{144}q^2 = \left(\frac{10}{3}p + \frac{5}{12}q\right)\left(\frac{10}{3}p - \frac{5}{12}q\right).$$

Fogalom
nevezetes szorzat.

FELADATOK

1. K1 Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(x+y)^2$; *b)* $(a+3)^2$; *c)* $(y-1)^2$; *d)* $(2b-3)^2$;

e) $(5d+1)^2$; *f)* $\left(\frac{a}{2}-2\right)^2$; *g)* $(-x-2)^2$;

h) $(3a^2-5)^2$; *i)* $(4b^2+3b)^2$; *j)* $(5x^2y-1)^2$;

k) $(7m^2n-5mn^2)^2$; *l)* $\left(\frac{5}{3}x^3y+\frac{3}{5}xy^2\right)^2$; *m)* $\left(\frac{11}{7}z^4s^2-\frac{14}{3}z^2s^3\right)^2$.

2. Alakítsuk át az alábbi háromtagú összegeket kéttagú összeg vagy különbség négyzetévé!

K1 *a)* x^2-2x+1;

K1 *b)* y^2+6y+9;

K1 *c)* $m^2-20m+100$;

K1 *d)* $9z^2-48z+64$;

K1 *e)* $25j^2+20\,ij+4i^2$;

K2 *f)* $\frac{36}{49}a^2-\frac{9}{7}ab+\frac{9}{16}b^2$;

K1 *g)* y^4-8y^2+16;

K2 *h)* $x^6+x^3+\frac{1}{4}$;

K2 *i)* $\frac{9}{4}n^2-\frac{6}{5}n\cdot m+\frac{4}{25}m^2$.

3. Alakítsuk teljes négyzet és egy konstans tag összegére az alábbi kifejezéseket!

K1 *a)* $x^2-8x+16$;

K2 *b)* $x^2-8x+13$;

K2 *c)* $x^2-6x+11$;

K2 *d)* $x^2-14x+40$;

K2 *e)* x^2-3x+2;

K2 *f)* $x^2-11x+16$;

K2 *g)* x^2+7x+5;

K2 *h)* $x^2+\frac{4}{3}x+2$;

K2 *i)* $x^2-\frac{7}{5}x+1$.

4. K1 A tanult nevezetes azonosságok felhasználásával bontsuk fel a zárójeleket!

a) $(x-1)(x+1)$;

b) $(y+5)(y-5)$;

c) $(2a-3)(2a+3)$;

d) $(2x-5y)(2x+5y)$;

e) $(7m^2-2)(7m^2+2)$;

f) $\left(\frac{4}{3}y+\frac{3}{5}y^2\right)\left(\frac{4}{3}y-\frac{3}{5}y^2\right)$;

g) $(4x^3-5x)(4x^3+5x)$;

h) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{7}b\right)\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{7}b\right)$;

i) $(2{,}5+a^2)(2{,}5-a^2)$;

j) $(6x^2y+1)(6x^2y-1)$.

A 131. oldalon lévő rejtvény megoldásai:

$2:2+2-2+2-2+2-2+2-2 = 1$
$(2-2)\cdot 2+2-2+2-2+2+2-2 = 2$
$(2+2+2):2+2-2+2-2+2-2 = 3$
$2-2+2-2+2-2+2-2+2+2 = 4$
$2:2+2-2+2-2+2-2+2+2 = 5$
$2+2+2-2+2+2-2-(2-2)\cdot 2 = 6$
$(2+2+2):2+2-2+2-2+2+2 = 7$
$2-2+2-2+2-2+2+2+2+2 = 8$
$2-2+2-2+2:2+2+2+2+2 = 9$
$2+2+2+(2-2+2-2)\cdot 2+2+2 = 10$

$5:5+5-5+5-5+5-5+5-5 = 1$
$5+5-5-5+(5+5+5+5):(5+5) = 2$
$5-5+(5+5+5):5+(5-5)\cdot(5-5) = 3$
$(5+5+5+5+5+5+5+5):(5+5) = 4$
$-5+5+5\cdot(5-5)+5-5-5+5+5 = 5$
$5\cdot 5-5-5-5-5+5:5+5-5 = 6$
$(5+5):5+5-5+5+5-5+5-5 = 7$
$5+(5-5)\cdot 5+(5+5+5):5+5-5 = 8$
$5+5-5:5+5-5+5-5+5-5 = 9$
$5+5+5-5+5-5+5-5+5-5 = 10$

$6:6+6-6+6-6+6-6+6-6 = 1$
$6+6+(6+6):6-6+(6-6)\cdot 6-6 = 2$
$6-6+(6+6+6):6+6-6-6+6 = 3$
$(6+6+6+6+6+6+6+6):(6+6) = 4$
$-6+6+6-6+(6+6+6+6+6):6 = 5$
$(6-6)\cdot 6-(6-6)\cdot 6+6-(6-6)\cdot 6 = 6$
$(6+6+6+6+6+6+6):6+6-6 = 7$
$(6+6):6+6-6+6-6+6-6+6 = 8$
$(6-6)\cdot 6+(6+6+6):6+6-6+6 = 9$
$6-6+(6+6+6+6):6+6-6+6 = 10$

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **653–659; 664.**

32. AZ AZONOSSÁGOK ALKALMAZÁSA

Nézzünk néhány példát az előző lecke anyagában szereplő azonosságok összetettebb feladatokban való alkalmazására !

1. példa

Számítsuk ki a következő speciális szorzásokat „fejben”!
$95 \cdot 105$; $370 \cdot 430$; $993 \cdot 1007$.

Megoldás

Vegyük észre, hogy mindegyik példában szereplő két-két tényező az átlaguknál ugyanannyival kisebb, illetve nagyobb. Ezt felhasználva:
$95 \cdot 105 = (100 - 5)(100 + 5) = 100^2 - 5^2 = 9975$;
$370 \cdot 430 = (400 - 30)(400 + 30) = 400^2 - 30^2 = 160\,000 - 900 = 159\,100$;
$993 \cdot 1007 = (1000 - 7)(1000 + 7) = 1000^2 - 7^2 = 1\,000\,000 - 49 = 999\,951$.

2. példa

Milyen *a, b, c* valós számokra lesz a következő egyenlőség azonosság?
$(2m + 3)^2 - (5 - m)^2 - (5m + 7 - m^2) = am^2 + bm + c$.

Megoldás

Alkalmazzuk a tanult azonosságokat a bal oldali összegre, majd zárójelfelbontás után végezzünk összevonást!
$(2m + 3)^2 - (5 - m)^2 - (5m + 7 - m^2) = (4m^2 + 12m + 9) - (25 - 10m + m^2) - (5m + 7 - m^2) =$
$= 4m^2 + 12m + 9 - 25 + 10m - m^2 - 5m - 7 + m^2 = 4m^2 + 17m - 23$.
A polinomok egyenlősége alapján akkor lesz azonosság az egyenlőség, ha
$a = 4$, $b = 17$, $c = -23$.

3. példa

Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőségek azonosságok!
$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$;
$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

Megoldás

Alkalmazzuk a tanult azonosságokat a bal oldali összegekre:
$(a + b)^2 + (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = 2a^2 + 2b^2$;
$(a + b)^2 - (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$.

4. példa

Számítsuk ki a kifejezés értékét az $x = \frac{1}{22}$ helyettesítés esetén!

$2(x + 3)^2 - (5 - x)^2 + (6 + x)(6 - x)$.

Megoldás

Írjuk fel egyszerűbb alakban a kifejezést a helyettesítés előtt!
Nevezetes szorzatokat látunk a tagokban, ezekre alkalmazzuk azonosságainkat:
$2(x+3)^2-(5-x)^2+(6+x)(6-x)=2(x^2+6x+9)-(25-10x+x^2)+(36-x^2)=$
$=2x^2+12x+18-25+10x-x^2+36-x^2=22x+29.$
A kifejezés értékét már egyszerűbben számolhatjuk:

$$22\cdot\frac{1}{22}+29=30.$$

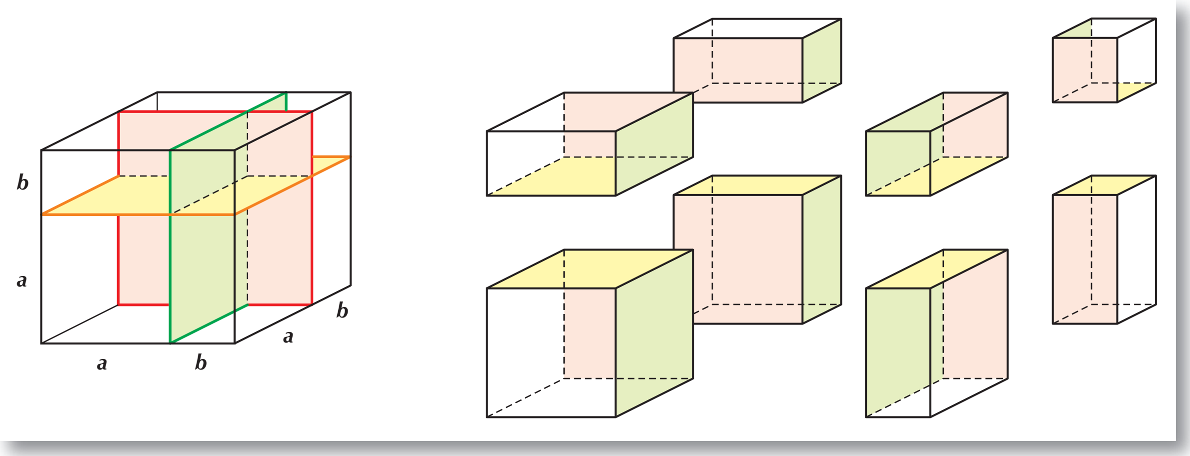
Két újabb, gyakran használt azonosság

Határozzuk meg kéttagú összeg, illetve különbség harmadik hatványának legegyszerűbb alakját, azaz
$(a+b)^3=$
$(a-b)^3=$

Használjuk eddigi ismereteinket:
$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$
$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

Érdemes a kapott alakot megjegyezni:
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

Az $(a+b)^3$ (ha a és b pozitív) tekinthető egy $(a+b)$ élhosszúságú kocka térfogatának. Az azonosságot szemlélteti a következő ábra.



Hasonló módon kereshetjük meg kéttagú kifejezések tetszőleges pozitív egész kitevős hatványának összeg alakját.

5. példa

$(a + b)^5 = (a + b)^3(a + b)^2 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$;
$(a - b)^6 = (a - b)^3(a - b)^3 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$.

Megjegyzés

Az ilyen típusú hatványok összeg alakjának meghatározására egyszerűbb módszert is ismerünk, ennek tárgyalására a későbbiekben térünk majd vissza.

6. példa

Határozzuk meg háromtagú összeg második hatványának legegyszerűbb alakját, azaz
$(a+ b+ c)^2 = (a+ b+ c)(a+ b+ c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 +bc + ca + cb + c^2 =$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

Érdemes a kapott alakot megjegyezni, ezért rövidebben: $(a+ b+ c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

FELADATOK

1. Számítsuk ki a tanult azonosságok felhasználásával a következő műveletek eredményét!

K1 *a)* $98 \cdot 102$; $75 \cdot 65$; $51 \cdot 49$.

K1 *b)* $0,8 \cdot 1,2$; $307 \cdot 293$; $9,9 \cdot 10,1$.

K1 *c)* $48^2 - 38^2$; $165^2 - 35^2$.

K2 *d)* $\dfrac{31^2 - 29^2}{43^2 - 41^2}$; $\dfrac{768^2 - 542^2}{458^2 - 232^2}$.

2. E1 Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(x + y + z)^2$;
b) $(x + 2y + z)^2$;
c) $(x + b + 5)^2$;
d) $\left(ay - bx + \dfrac{1}{2}\right)^2$;
e) $(2m - 3n + 1)^2$;
f) $(6a + 5b - c)^2$;
g) $(x^2 + x + 1)^2$;
h) $\left(\dfrac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 9\right)^2$.

3. K1 Egészítsük ki az alábbi egyenlőségeket úgy, hogy igazak legyenek!

a) $(x - y)^2 + \square = (x + y)^2$;
b) $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - \square$;
c) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - \square$;
d) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 - \square$;
e) $x^2 + 1 = (x + 1)^2 - \square$.

4. K1 Két szám összege 10, szorzatuk 21. Mennyi a két szám négyzetének az összege?

5. K1 Két szám összege 4, szorzata $\dfrac{15}{4}$. Mennyi a két szám négyzetének az összege?

6. K1 Két szám szorzata 12, különbsége $\dfrac{16}{3}$. Mennyi a két szám összegének négyzete?

7. K2 A zárójelek felbontása után írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket!

a) $(3-x)^2+(3-x)(3+x)+6(x+1)^2$;

b) $(2y-3)(2y+3)-4(y-2)^2$;

c) $3(2-x)^2+4(x-5)^2$;

d) $5(1-y)(1+y)-8(1-y)^2-(2-y)^2$;

e) $(2x+5y)^2-(5y-2x)^2-8x(5y-1)$;

f) $(a+2)(a-2)(4+a^2)+(1-a)(1+a)(1+a^2)$;

g) $5a(a-3)^2-5(a-1)^3+15(a+2)(a-2)$;

h) $(y+2)^3-y(3y+1)^2+(2y+1)(4y^2-2y+1)$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **660–663; 692–694.**

33. POLINOMOK SZORZATTÁ ALAKÍTÁSÁNAK MÓDSZEREI

SZORZATTÁ ALAKÍTÁS KIEMELÉSSEL

1. példa

Négyosztályos gimnáziumi felvételi feladat volt a következő:
Oldjuk meg az egyenletet a racionális számok halmazán!
$(3x+1)\cdot x\cdot(5-2x)=0$.

Megoldás

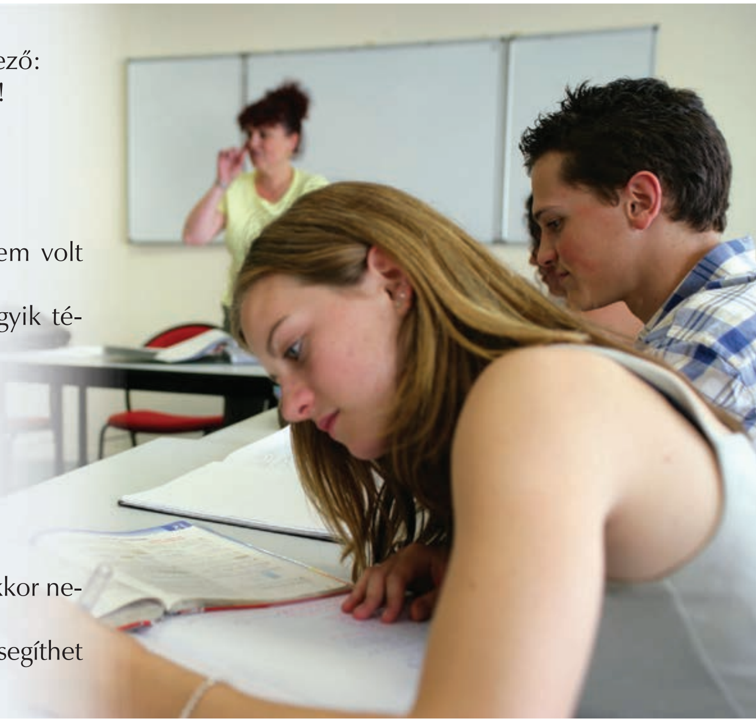
Mivel a bal oldalon egy szorzat áll, így a megoldás nem volt nehéz.

Egy szorzat pontosan akkor lehet 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Ezért a lehetőségek:

$(3x+1)=0$ vagy $x=0$ vagy $5-2x=0$.

Tehát az egyenletet három racionális szám teszi igazzá:

$x_1=-\frac{1}{3}$; $x_2=0$; $x_3=\frac{5}{2}$.



Ha a kitűzött feladat bal oldalán nem szorzat szerepel, akkor nehezebb lett volna megoldani.

Mint láttuk, a kifejezések szorzat alakjának megtalálása segíthet a feladatok megoldásában.

2. példa

Alakítsuk szorzattá a kifejezéseket!

$3xy + 5x$; $2ab - 3b$; $5pq + 15ab$; $4mn - 8m^2n + 6mn^3$.

Megoldás

Megfigyelhetjük, hogy az összes tagban szerepel azonos szorzótényező. Ezért ezeket fel tudjuk írni szorzat alakban:

$3xy + 5x = x(3y + 5)$;

$2ab - 3b = b(2a - 3)$;

$5pq + 15ab = 5(pq + 3ab)$;

$4mn - 8m^2n + 6mn^3 = 2mn(2 - 4m + 3n^2)$.

Az átalakítások helyességéről beszorzással győződhetünk meg.

A szorzattá alakításnak ezt a módját **kiemelésnek** nevezzük.

Kiemeléskor először megállapítjuk a tagokban szereplő összes közös tényezőt, ezt emeljük ki az összegből. A kiemelés utáni tagokat a kiemelt résszel történő osztással kapjuk meg.

Általában kiemeléskor konstans értéket, illetve egész típusú, egész együtthatójú, 1-től különböző kifejezést emeljünk ki szorzótényezőnek, a kiemelés után megmaradt tagok is legyenek ilyen típusúak.

Példák

Nincs értelme a kiemelésnek: $3x + 5xy = 1 \cdot (3x + 5xy)$, mivel 1-et emeltünk ki.

Nincs értelme a kiemelésnek: $4a + 5b = 4\left(a + \frac{5}{4}b\right)$, mert $\frac{5}{4}b$ nem egész együtthatós kifejezés.

Nincs értelme a kiemelésnek: $9a - 3xy = a\left(9 - \frac{3xy}{a}\right)$, mert megváltozott a kifejezés értelmezési tartománya. (Az a értéke nem lehet 0 a „kiemelés” után.) A $\frac{3xy}{a}$ nem egész típusú kifejezés.

3. példa

Ellenőrizzük a következő kiemeléseket!

$12mn - 16n = 4n(3m - 4)$;

$20ab + 5a^2 - 15ab^2 = 5a(4b + a - 3b^2)$;

$4(a + b) - x(a + b) = (a + b)(4 - x)$;

$c(x - 2y) + 6(x - 2y) - 3k(x - 2y) = (x - 2y)(c + 6 - 3k)$;

$p(m + n) - q(n + m) - (m + n) = (m + n)(p - q - 1)$.

SZORZATTÁ ALAKÍTÁS A TAGOK CSOPORTOSÍTÁSÁVAL

Összetettebb feladatokban nehezebb észrevenni a kiemelés lehetőségét. Gyakran célszerű előbb a tagokat csoportosítani, majd elvégezni a kiemeléseket.

4. példa

Alakítsuk szorzattá!
$ax + by + ay + bx =$

Megoldás

Először csoportosítsuk a tagokat:
$ax + by + ay + bx = (ax + ay) + (bx + by)$.
Ki tudunk emelni a-t, illetve b-t (ez még nem szorzat alak):
$ax + by + ay + bx = (ax + ay) + (bx + by) = a(x + y) + b(x + y)$.
Ki tudunk emelni $(x + y)$-t, így a szorzat alak:
$ax + by + ay + bx = (ax + ay) + (bx + by) = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$.

5. példa

$ab - 2a + 3b - 6 = (ab - 2a) + (3b - 6) = a(b - 2) + 3(b - 2) = (b - 2)(a + 3)$;
$x - xy + 5 - 5y = x(1 - y) + 5(1 - y) = (1 - y)(x + 5)$;
$8k(k + 3) - 7(3 + k) = (k + 3)(8k - 7)$;
$m^2 - mn + mk - nk = m(m - n) + k(m - n) = (m - n)(m + k)$;
$7x(y - z) + y - z = 7x(y - z) + (y - z) = (y - z)(7x + 1)$.

Fogalom
csoportosítás;
kiemelés.

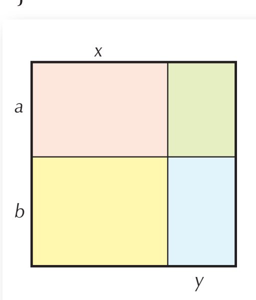
FELADATOK

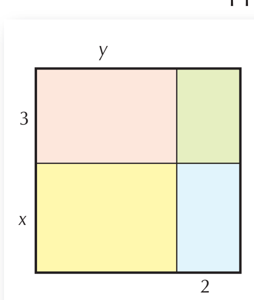
1. K1 Milyen műveleti sorrendet kell figyelembe venni az alábbi műveletek elvégzésekor? Ennek segítségével határozzuk meg, melyik összeg és melyik szorzat az alábbi kifejezések közül!

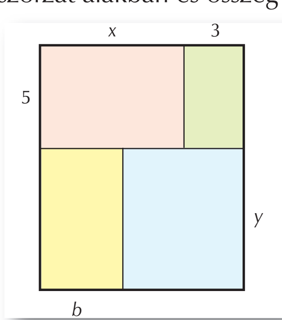
a) $2xy + z$; $\quad \frac{d^2}{5}$; $\quad -\frac{7}{5}x(x + y)$; $\quad c^5d^2$; $\quad aaxayy$; $\quad 3 + xx + \frac{yyy}{3}$.

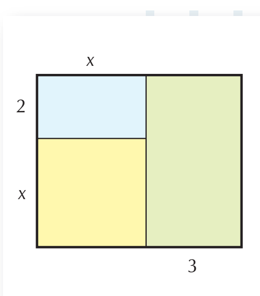
b) $\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)$; $\quad (x^2 + 2)y^3$; $\quad 2x(1 - x)$; $\quad -\frac{5}{3}a^4$; $\quad 25b^2 - 16a^2$.

2. K1 Írjuk fel a színezett alakzatok területét kétféleképpen: szorzat alakban és összeg alakban!









3. Kiemeléssel alakítsuk szorzattá az alábbi összegeket!

K1 *a)* $12a - 3c$;
K1 *b)* $ab + bc$;
K1 *c)* $15ax - 27ay$;
K1 *d)* $x^2y - xzy$;
K1 *e)* $6 - 12x$;
K1 *f)* $24a^3 - 54a$;
K1 *g)* $a^3b^4 - ab^2$;
K1 *h)* $x^k + x^{k+1}$;
K2 *i)* $14z^n - 21z^{n-2}$;
K2 *j)* $5x^3y^{k+3} + 15x^2y^{k+1}$;
K1 *k)* $ay + by + cy$;
K2 *l)* $2x^4 - 8x^2 - 4x$;
K2 *m)* $6a^2b + 15ab - 3ab^2$;
K2 *n)* $14x^2y^2z - 21xy^2z^2 + 35xyz^2$.

4. A következő kifejezéseket kéttagú összeg kiemelésével alakítsuk szorzattá!

K1 *a)* $y(x-1) + x(x-1)$;
K1 *b)* $7a(a-b) + 3b(a-b)$;
K1 *c)* $2n(x+2) - (x+2)$;
K2 *d)* $3x(x+5) - x - 5$;
K2 *e)* $2a(a-2) - a + 2$;
K2 *f)* $8ab + 3ac + 8cb + 3c^2$.

5. A következő kifejezéseket alakítsuk szorzattá! (Útmutatás: a megfelelő tagot, tagokat bontsuk ketté.)

K2 *a)* $x^2 + 5x + 4$;
K2 *b)* $x^2 + 8x + 12$;
E1 *c)* $x^2 - 8x + 15$;
E1 *d)* $x^2 - 3x + 2$;
E1 *e)* $x^2 - x - 12$;
E1 *f)* $x^2 - 3x - 8$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **665–670.**

34. SZORZATTÁ ALAKÍTÁS NEVEZETES SZORZATOK FELHASZNÁLÁSÁVAL

Ismételjük át eddigi nevezetes szorzatainkat!

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$;

2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$;

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

4. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

5. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

6. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$;

7. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$;

8. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$.

Nem könnyű az összeg alakból felismerni a szorzat alakokat, ehhez alaposan kell ismerni az azonosságokat.

1. példa

Alakítsuk szorzattá!

$4x^2 - 4xy + y^2$.

Megoldás

Az összeg háromtagú, az első és a harmadik tag teljes négyzet: $4x^2 = (2x)^2$, illetve y^2. Ezért a *2.* azonossággal célszerű próbálkozni:

$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$.

A zárójel felbontásával ellenőrizhetjük az átalakítás helyességét.

2. példa

Alakítsuk szorzattá!

$9a^2 + 12ab + 4b^2$.

Megoldás

Az összeg ismét háromtagú, az első és a harmadik tag teljes négyzet, $(3a)^2$, $(2b)^2$ a középső tag pedig pontosan a $3a$ és $2b$ szorzatának a kétszerese, ezért:

$9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a + 2b)^2$.

A zárójel felbontásával ellenőrizhetjük az átalakítás helyességét.

3. példa

Alakítsuk szorzattá!

$25p^2 - 16q^2$.

Megoldás

Kéttagú különbség, mindkét tag teljes négyzet: $25p^2 = (5p)^2$, $16q^2 = (4q)^2$, ezért a *3.* azonosságot használhatjuk:

$25p^2 - 16q^2 = (5p + 4q)(5p - 4q)$.

A zárójel felbontásával ellenőrizhetjük az átalakítás helyességét.

4. példa

$a^4 - a^3 - a^2 + a = a^3(a - 1) - a(a - 1) = (a - 1)(a^3 - a) = (a - 1)a(a^2 - 1) = (a - 1)^2a(a + 1)$.

MÁSODFOKÚ KIFEJEZÉSEK SZORZAT ALAKJA

Alakítsuk szorzattá az $x^2 + 8x + 12$ kifejezést!

1. módszer

Próbáljuk meg két elsőfokú kifejezés szorzataként felírni: $x^2 + 8x + 12 = (x + a)(x + b)$.

$x^2 + 8x + 12 = (x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$.

Hasonlítsuk össze: $x^2 + 8x + 12 = x^2 + (a + b)x + ab$.
Keressünk két számot, a-t és b-t, melyek összege 8, szorzatuk 12.

Ezek a számok az $a = 2$ és a $b = 6$. Tehát a keresett szorzat alak:

$x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$.

5. példa

A példákban az előző feladat jelöléseit alkalmazva:
$x^2 + 12x + 35 = (x + 5)(x + 7)$, mert $a = 5$ és $b = 7$ esetén lesz $a + b = 12$ és $ab = 35$.
$a^2 - 4a - 21 = (a - 7)(a + 3)$, mert $a = -7$ és $b = 3$ esetén lesz $a + b = -4$ és $ab = -21$.
$x^2 + 9x - 10 = (x + 10)(x - 1)$ mert $a = 10$ és $b = -1$ esetén lesz $a + b = 9$ és $ab = -10$.

2. módszer

$x^2 + 8x + 12 = (x + p)^2 + q = x^2 + 2px + p^2 + q$.

Ekkor $2p = 8$, $p = 4$ behelyettesítve: $p^2 + q = 12$, $q = -4$.

Fogalom
teljes négyzet.

$x^2 + 8x + 12 = (x + 4)^2 - 4 = [(x +4) + 2][(x + 4) - 2] = (x + 6)(x + 2)$.

Nézzünk néhány példát a szorzattá alakításra!

6. példa

$x^2 + 14x + 40 = (x + 7)^2 - 49 + 40 = (x + 7)^2 - 9 = (x + 7 + 3)(x + 7 - 3) = (x +10)(x + 4)$.

7. példa

$x^2 + 22x + 105 = (x + 11)^2 - 11^2 + 105 = (x + 11)^2 - 16 = [(x + 11) + 4][(x + 11) - 4] = (x +15)(x + 7)$.

8. példa

$$x^2 + x - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}\right]\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}\right] = (x + 3)(x - 2).$$

FELADATOK

Alakítsunk szorzattá a tanult módszerek együttes alkalmazásával (kiemelés, nevezetes azonosságok felhasználása)!

1. K1

a) $2a^2 - 2b^2$; *b)* $10x^2 - 10$; *c)* $3x^2 - 3x$; *d)* $m^3n - mn^3$; *e)* $18a^2 - 50b^2$; *f)* $8a^4b^2 - 98a^2b^4$; *g)* $\frac{8}{25}x^5y^3 - \frac{2}{49}xy^3$.

2. K1

a) $3a^2 - 6ab + 3b^2$; *b)* $7c^2 + 14cd + 7d^2$; *c)* $15ab^2 - 30ab + 15a$; *d)* $-x^2 - 2x - 1$; *e)* $-y^2 + 4y - 4$.

3. K2

a) $a^2 + 2ab + b^2 - 1$;
b) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$;
c) $36 - x^2 - 2xy - y^2$;
d) $4y^2 - 20yx + 25x^2 - 121$;
e) $a^2 - b^2 + a - b$;
f) $m^2 - n^2 - 2m - 2n$;
g) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$;
h) $x^2 - 4xy + 4y^2 - xz + 2yz$.

4. K2

Alakítsuk teljes négyzetté, majd ennek felhasználásával szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a) $a^2 + 6a + 8$;
b) $a^2 - 5a + 6$;
c) $a^2 - 7a + 12$;
d) $a^2 + 2a - 15$;
e) $a^2 - 3a - 10$;
f) $a^2 + 8a + 12$;
g) $2a^2 + 10a + 8$;
h) $-a^2 - 8a - 15$;
i) $2a^2 - 6a + 4$;
j) $-2a^2 + 2a + 24$;
k) $3a^2 - 6a - 24$.

5. E1

A megismert azonosságok alkalmazásával alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x$; b) $x^3 - 1 + 6x^2 - 6$; c) $x^3 - 6x^2 + 5$; d) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **672–690.**

35. ALGEBRAI TÖRTKIFEJEZÉSEK EGYSZERŰSÍTÉSE, SZORZÁSA, OSZTÁSA

Polinomoknál értelmeztük a helyettesítési érték fogalmát. Ezt algebrai törtek esetén is megtehetjük.

1. példa

Határozzuk meg a $\frac{2x}{x+3}$ tört értékét $x = 3$-nál, $x = \frac{1}{2}$-nél!

Megoldás

Ha $x = 3$, akkor $\frac{2 \cdot 3}{3 + 3} = 1$.

Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor $\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$.

Mi lesz a helyettesítési érték $x = -3$ esetén?

Ha $x = -3$, akkor a nevező értéke 0, így a tört nem értelmezhető. Ekkor természetesen nincs helyettesítési értéke sem.

A **nevezőben levő polinom zérushelyeinél** a törtnek nincs helyettesítési értéke, hiszen ekkor 0-val kellene osztanunk. A nevező zérushelyei nem elemei a kifejezés értelmezési tartományának.

AZ EGYSZERŰSÍTÉS

Törtek egyszerűsítésekor a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk. Ilyenkor a tört értéke nem változik.

Vizsgáljuk meg, hogyan lehet törtkifejezéseket egyszerűsíteni!

2. példa

Egyszerűsítsük a következő törtet! $\frac{2x-8}{2x+6}$, ha $x \neq -3$. (Ekkor lenne a nevező értéke 0.)

Megoldás

$$\frac{2x-8}{2x+6} = \frac{2(x-4)}{2(x+3)} = \frac{x-4}{x+3}, \quad \text{ha} \quad x \neq -3.$$

Mivel a számlálót és a nevezőt kiemeléssel úgy tudtuk szorzattá alakítani, hogy kaptunk közös tényezőt, így ezzel a tényezővel lehetett egyszerűsíteni.

Még azt kell végiggondolni, nem változott-e a kifejezés értelmezési tartománya. Mivel 2-vel egyszerűsítettünk, így nem változott, tehát

$$\frac{2x-8}{2x+6} = \frac{x-4}{x+3}, \quad \text{ha} \quad x \neq -3.$$

3. példa

Egyszerűsítsük a következő törtet! $\frac{2a^2-6a}{a^2-9}$.

Megoldás

Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt!

$$\frac{2a^2-6a}{a^2-9} = \frac{2a(a-3)}{(a+3)(a-3)}.$$

A szorzat alakból jól látható, hogy a kifejezés akkor értelmezhető, ha $a \neq 3$ és $a \neq -3$. Közös szorzótényező az $(a-3)$, ezzel egyszerűsíthetünk:

$$\frac{2a^2-6a}{a^2-9} = \frac{2a(a-3)}{(a+3)(a-3)} = \frac{2a}{a+3}, \quad \text{ha} \quad a \neq 3 \text{ és } a \neq -3.$$

Egyszerűsítéskor megváltozhat a kifejezés értelmezési tartománya, így azt az egyszerűsítés elvégzése előtt kell megállapítani.

Egyszerűsíteni csak a közös szorzótényezővel lehet.

Példák

$$\frac{5ab+15a}{6b+18} = \frac{5a(b+3)}{6(b+3)} = \frac{5a}{6}, \quad \text{ha} \quad b \neq -3.$$

$$\frac{3p^2-3}{9p+9} = \frac{3(p^2-1)}{9(p+1)} = \frac{3(p-1)(p+1)}{9(p+1)} = \frac{p-1}{3}, \quad \text{ha} \quad p \neq -1.$$

$$\frac{a^3+8}{3a+6}=\frac{a^3+2^3}{3(a+2)}=\frac{(a+2)(a^2-2a+4)}{3(a+2)}=\frac{a^2-2a+4}{3}, \qquad \text{ha} \qquad a \neq -2.$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-3)}=\frac{x+1}{x+2}, \qquad \text{ha} \qquad x \neq -2, \quad \text{és} \quad x \neq 3.$$

A SZORZÁS

Törtek szorzásakor a számlálók szorzatát osztjuk a nevezők szorzatával (ha az nem 0). Vizsgáljuk meg, hogyan lehet törtkifejezéseket szorozni!

Figyelnünk kell, hogy a törtkifejezések hol vannak értelmezve. Ez az értelmezési tartomány az egyszerűsítés után sem változhat!

4. példa

$\frac{k}{10}\cdot\frac{5}{k}=\frac{5k}{10k}$, $5k$-val egyszerűsítve: $\frac{k}{10}\cdot\frac{5}{k}=\frac{5k}{10k}=\frac{1}{2}$, ha $k \neq 0$.

5. példa

$$\frac{a-b}{8b^2}\cdot\frac{4b^3}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)4b^3}{8b^2(a^2-b^2)}=\frac{4b^3(a-b)}{8b^2(a+b)(a-b)}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy lehet-e egyszerűsíteni, előtte állapítsuk meg az értelmezési tartományt!
A törtek értelmezhetők, ha $b \neq 0$, $a \neq -b$, $a \neq b$. Egyszerűsítés után:

$$\frac{a-b}{8b^2}\cdot\frac{4b^3}{a^2-b^2}=\frac{4b^3(a-b)}{8b^2(a+b)(a-b)}=\frac{b}{2(a+b)}.$$

AZ OSZTÁS

Egy szám reciproka az a szám, mellyel megszorozva 1-et kapunk. $\left(\text{Például } \frac{2}{3} \text{ reciproka } \frac{3}{2}.\right)$ Minden számnak, a 0 kivételével, létezik reciproka.

Egy tetszőleges számot törtszámmal úgy oszthatunk, hogy a tetszőleges számot az osztó reciprok értékével szorozzuk.

6. példa

Mivel kell megszorozni az $\frac{a-b}{a}$ kifejezést, hogy a szorzat értéke 1 legyen?

Megoldás

A kifejezés akkor értelmezhető, ha $a \neq 0$. Ha a tört értéke 0, akkor nincs olyan szám, amellyel megszorozva 1-et kapunk, ezért $a - b \neq 0$, vagyis $a \neq b$.

A keresett tényező az $\frac{a-b}{a}$ reciproka, vagyis $\frac{a}{a-b}$.

Ekkor $\frac{a-b}{a} \cdot \frac{a}{a-b} = 1$, ahol $a \neq 0$ és $a \neq b$.

7. példa

Határozzuk meg a kifejezések reciprokát!

k reciproka: $\frac{1}{k}$, ha $k \neq 0$.

$\frac{m+n}{m-n}$ reciproka: $\frac{m-n}{m+n}$, ahol $m \neq n$ és $m \neq -n$.

8. példa

Végezzük el az osztást!

$\left(\frac{4a^2bc}{9d^3} : \frac{2ac}{3d}\right) : \frac{4ab}{3} = \frac{4a^2bc \cdot 3d \cdot 3}{9d^3 \cdot 2ac \cdot 4ab} = \frac{1}{2d^2}$, ahol $d \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

9. példa

Végezzük el az osztást!

$$\frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2+ab}{2a^2-2b^2}.$$

Először alakítsuk szorzattá a számlálókat, illetve a nevezőket!

$$\frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2+ab}{2a^2-2b^2} = \frac{a+b}{a-b} : \frac{a(a+b)}{2(a+b)(a-b)}.$$

A törtek akkor értelmezhetők, ha $a \neq b$, $a \neq -b$.
Az osztás akkor értelmezhető, ha $a(a+b) \neq 0$, ezért $a \neq 0$.
Szorozzunk az osztó reciprokával, majd egyszerűsítsünk:

$$\frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2+ab}{2a^2-2b^2} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{2(a+b)(a-b)}{a(a+b)} = \frac{2(a+b)}{a}.$$

FELADATOK

1. K1 Mely számok esetén értelmezhetjük az alábbi törteket?

a) $\frac{x-8}{12}$; b) $\frac{y(y-7)}{y}$; c) $\frac{5x-5}{6x+3}$; d) $\frac{6x}{x^2+1}$.

2. K1 Egyszerűsítsük a következő törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\frac{28a^2b^3}{49b^4}$; b) $\frac{5x^3}{30ax^2}$; c) $\frac{72a^4b^6}{108b^5a}$; d) $\frac{132x^4y^8}{22x^5y^3}$.

3. K1 Alakítsuk szorzattá az alábbi törtek számlálóját, illetve nevezőjét, majd egyszerűsítsük a törteket!

a) $\frac{13x(x-y)}{26xy-26y^2}$; c) $\frac{ab}{a+ab}$; e) $\frac{a^2-a}{ab-b}$;

b) $\frac{ax-bx}{x^2+xa}$; d) $\frac{x^2-y^2}{xy+y^2}$; f) $\frac{a^2-6a+9}{5a-15}$.

4. Egyszerűsítsük a következő törteket!

K2 a) $\frac{6x^2-12xy+6y^2}{15x^2-15y^2}$; **K2** c) $\frac{3x-3y+cx-cy}{4c+12}$; **E1** e) $\frac{2x^2-12x+18}{x^2-7x+12}$.

K2 b) $\frac{3a^2-27}{7a^2+42a+63}$; **E1** d) $\frac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$;

5. Végezzük el a kijelölt műveleteket, és írjuk a törteket a lehető legegyszerűbb alakba!

K1 a) $\frac{12x^2y^4}{7x^2y}\cdot\frac{9x^2y^3}{15xy^2}$; **K2** c) $\frac{a-b}{b}\cdot\frac{ab^2}{a^2-ab}$; **K2** e) $\frac{a^2b+ab^2}{ab}\cdot\frac{a^3-a^2b}{a^2+ab}$;

K1 b) $\frac{12ab}{25c}:8a^2$; **K2** d) $\frac{a^2+ab}{a}:\frac{ab-b^2}{b}$; **K2** f) $\frac{2a^2-2b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{5a+5b}{4a-4b}$.

6. E1 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{5x^3-5y^3}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{10x^2-10y^2}{2x+2y}$; b) $\frac{7x^2-7y^2}{2x^3+2y^3}:\frac{x^3-x^2y}{4x^2+4xy}$; c) $\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}\cdot\frac{2x^2-4x}{x^2-6x+9}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **698–712; 725–727.**

Érdekesség

Hogyan oldotta meg Descartes az $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$ negyedfokú egyenletet?

Először a tagokat kettesével csoportosította, és kiemelt $(x-4)$-et: $x^3(x-4)-19x(x-4)+30(x-4)=0$. Kiemelhető $(x-4)$: $(x-4)(x^3-19x+30)=0$. Ezután a második tényezőt alakította át:
$x^3-19x+30=x^3-3x^2+3x^2-9x-10x+30=x^2(x-3)+3x(x-3)-10(x-3)=(x-3)(x^2+3x-10)$.

Végül $x^2+3x-10=x^2+5x-2x-10=x(x+5)-2(x+5)=(x-2)(x+5)$.

Eredmény: $(x-4)(x-3)(x-2)(x+5)=0$, a gyökök pedig: {4; 3; 2; –5}.

Forrás: Dr. Lévárdi – Sain: Matematikatörténeti feladatok, Tankönyvkiadó, 1982

36. ALGEBRAI TÖRTKIFEJEZÉSEK ÖSSZEVONÁSA, MŰVELETEK TÖRTKIFEJEZÉSEKKEL

Az eddig megismert azonosságainkat jól használhatjuk az algebrai törtekkel végzendő műveletek esetén.

1. példa

Végezzük el az összeadásokat!

$\frac{2a}{3b} + \frac{1}{2b} - \frac{3}{b}$, ha $b \neq 0$.

Megoldás

Hozzunk közös nevezőre, majd végezzük el a műveleteket!

$$\frac{2a}{3b} + \frac{1}{2b} - \frac{3}{b} = \frac{4a + 3 - 18}{6b} = \frac{4a - 15}{6b}, \text{ ha } b \neq 0.$$

2. példa

Írjuk fel egyszerűbb alakban a $\frac{3}{2x + 6} + \frac{x - 2}{x^2 + 6x + 9}$ összeget!

Megoldás

Célszerű a következő algoritmust követni:
- alakítsunk szorzattá, ahol lehet;
- állapítsuk meg az értelmezési tartományt;
- keressünk közös nevezőt, majd bővítsünk, ha szükséges;
- végezzük el az összevonásokat;
- végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket.

$$\frac{3}{2x + 6} + \frac{x - 2}{x^2 + 6x + 9} = \frac{3}{2(x + 3)} + \frac{x - 2}{(x + 3)^2} = \frac{3(x + 3) + 2(x - 2)}{2(x + 3)^2} = \frac{5x + 5}{2(x + 3)^2} = \frac{5(x + 1)}{2(x + 3)^2}, \text{ ahol } x \neq -3.$$

3. példa

Végezzük el a műveleteket!

$\frac{t - 5}{t + 5} - \frac{t - 1}{t - 5} + \frac{6t}{t^2 - 25}$, ahol $t \neq 5$, $t \neq -5$.

Megoldás

Hozzunk közös nevezőre, majd végezzük el az összevonásokat!

$$\frac{t - 5}{t + 5} - \frac{t - 1}{t - 5} + \frac{6t}{t^2 - 25} = \frac{(t - 5)^2 - (t - 1)(t + 5) + 6t}{(t + 5)(t - 5)} =$$

$$= \frac{t^2 - 10t + 25 - t^2 - 4t + 5 + 6t}{(t + 5)(t - 5)} = \frac{-8t + 30}{(t + 5)(t - 5)} = \frac{2(15 - 4t)}{(t + 5)(t - 5)}, \text{ ahol } t \neq 5,\ t \neq -5.$$

4. példa

Végezzük el a műveleteket!

$$\left(\frac{k}{k+1}+1\right):\left(1-\frac{3k^2}{1-k^2}\right)=\frac{k+(k+1)}{k+1}:\frac{(1-k^2)-3k^2}{1-k^2}=\frac{2k+1}{k+1}\cdot\frac{(1+k)(1-k)}{(1+2k)(1-2k)}=\frac{1-k}{1-2k}.$$

A műveletek akkor értelmezhetők, ha $k \neq -1$, $k \neq 1$, $k \neq \frac{1}{2}$, $k \neq -\frac{1}{2}$.

FELADATOK

1. K1 Végezzük el a következő törtek összevonását!

a) $\frac{4a-3}{4}-\frac{5a-7}{15}$; *b)* $\frac{2a+3b}{3}-5\cdot\frac{a-7b}{2}+2\cdot\frac{a-b}{5}$; *c)* $\frac{2a-5}{7}-a-\frac{4a-3}{4}$.

2. K1 Vizsgáljuk meg, a változók mely értékénél értelmezhetők az alábbi műveletek, majd végezzük el a törtek összeadását, kivonását!

a) $\frac{11x-2y}{x}+\frac{3x-7y}{y}$; *b)* $\frac{3x}{xy^2}-\frac{4y}{x^2y}$; *c)* $\frac{6x-2y}{x^2y}-\frac{5x-4y}{xy^2}$.

3. K1 Végezzük el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{5}{x}-\frac{4}{x-1}$; *b)* $\frac{x}{x-5}-\frac{9}{x+5}$; *c)* $\frac{x+5}{x(x-1)}-\frac{3x+7}{2(x-1)(x+1)}$.

4. A következő törtek összeadásakor először keressük meg a közös nevezőt!

K1 *a)* $\frac{5}{a+1}-\frac{3}{a-1}+\frac{7}{a^2-1}$; **K2** *c)* $\frac{7a-1}{3a^2-6a}+\frac{2a+3}{a^2-4}$;

K1 *b)* $\frac{2}{3a-3b}+\frac{5}{6a+6b}$; **K2** *d)* $\frac{5}{a^2+4a+4}+\frac{2a+1}{a^2-4}-\frac{3a-2}{a^2-4a+4}$.

5. E1 Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezések értéke független *x*-től!

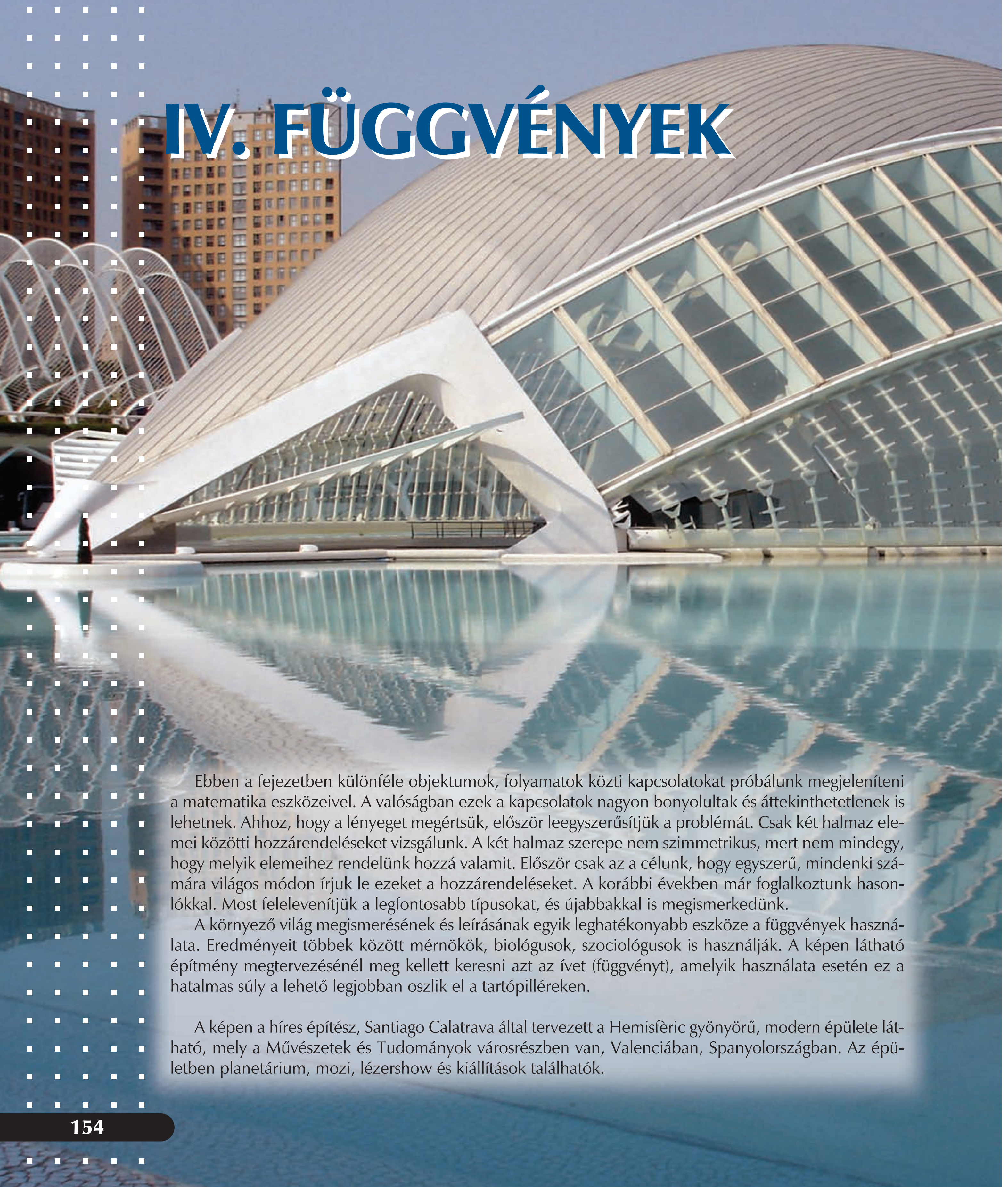
a) $\left(1-\frac{2x-1}{3x-2}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{1-x}\right)$; *b)* $\left(\frac{2x+3}{3x-1}-\frac{2x+7}{3x+1}\right):\frac{10-8x}{9x^2-1}$.

6. (Játék) Anna és Béla egy-egy kifejezés helyettesítési értékeit vizsgálja, és ezzel kapcsolatban különböző állításokat fogalmaznak meg.

Anna kifejezése $A(x)=\frac{4x^3-7x+3}{4x^2+4x-3}$, Béláé $B(x)=\frac{2x+6}{2}$.

a) Anna és Béla is azt állítja, hogy a saját kifejezésük minden *x* egész szám esetén egész értéket vesz fel.
b) Anna szerint az egész helyeken vizsgálva $B(x)$ mindig 4-gyel nagyobb, mint $A(x)$.
c) Béla szerint a *b)* állítás akkor is igaz marad, ha *x* tetszőleges valós szám.
Melyik igaz, melyik hamis az állítások közül?
(Segítség: $A(x)$ számlálója $4x^3-4x-3x+3$, nevezője $4x^2+6x-2x-3$ alakban is írható.)

IV. FÜGGVÉNYEK



Ebben a fejezetben különféle objektumok, folyamatok közti kapcsolatokat próbálunk megjeleníteni a matematika eszközeivel. A valóságban ezek a kapcsolatok nagyon bonyolultak és áttekinthetetlenek is lehetnek. Ahhoz, hogy a lényeget megértsük, először leegyszerűsítjük a problémát. Csak két halmaz elemei közötti hozzárendeléseket vizsgálunk. A két halmaz szerepe nem szimmetrikus, mert nem mindegy, hogy melyik elemeihez rendelünk hozzá valamit. Először csak az a célunk, hogy egyszerű, mindenki számára világos módon írjuk le ezeket a hozzárendeléseket. A korábbi években már foglalkoztunk hasonlókkal. Most felelevenítjük a legfontosabb típusokat, és újabbakkal is megismerkedünk.

A környező világ megismerésének és leírásának egyik leghatékonyabb eszköze a függvények használata. Eredményeit többek között mérnökök, biológusok, szociológusok is használják. A képen látható építmény megtervezésénél meg kellett keresni azt az ívet (függvényt), amelyik használata esetén ez a hatalmas súly a lehető legjobban oszlik el a tartópilléreken.

A képen a híres építész, Santiago Calatrava által tervezett a Hemisfèric gyönyörű, modern épülete látható, mely a Művészetek és Tudományok városrészben van, Valenciában, Spanyolországban. Az épületben planetárium, mozi, lézershow és kiállítások találhatók.

37. BEVEZETŐ FELADATOK A FÜGGVÉNYEKHEZ

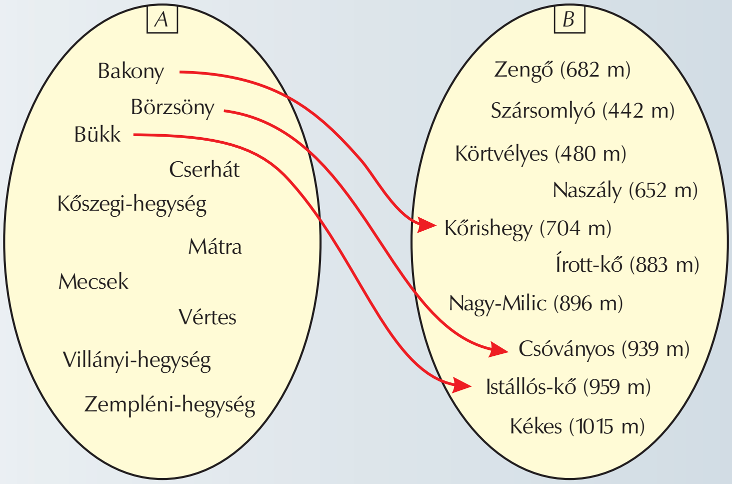
Nézzünk néhány példát halmazok közötti hozzárendelésekre!

1. példa

Milyen hozzárendeléseket jelentenek a nyilak? Folytassuk a munkát!

hegység
Bakony
Börzsöny
Bükk
Cserhát
Kőszegi-hegység
Mátra
Mecsek
Vértes
Villányi-hegység
Zempléni-hegység

hegycsúcs
Szársomlyó (442 m)
Körtvélyes (480 m)
Naszály (652 m)
Zengő (682 m)
Kőrishegy (704 m)
Írott-kő (883 m)
Nagy-Milic (896 m)
Csóványos (939 m)
Istállós-kő (959 m)
Kékes (1015 m)



Határozzuk meg a két halmazt, amelyek között kapcsolatot létesítettünk!

Fogalmazzuk meg a **hozzárendelés szabályát**!

A táblázat bal oldali oszlopában néhány magyarországi hegységet, a jobb oldaliban pedig a legmagasabb csúcsaikat soroltuk fel valamilyen sorrendben. (Nincsenek egymás mellett az összetartozók.) Ezután könnyen kitalálhatjuk a hozzárendelési szabályt. Minden hegységhez a legmagasabb csúcsát rendeltük.

Kékes (Magyarország)

2. példa

A következő táblázatot egy elárusítópult belsejében lehetett látni.

tömeg (dkg)	10	15	20	25	30	35	40	45	50
tökmag	80 Ft	120 Ft			240 Ft	280 Ft	320 Ft	360 Ft	400 Ft
szotyi	50 Ft	75 Ft	100 Ft					225 Ft	250 Ft
ananász	120 Ft	180 Ft							600 Ft
sós mogyi			120 Ft					270 Ft	

Az üres helyeken is voltak számok, csak elmosódtak. Töltsük ki az üres helyeket!
Milyen képlet segítségével számíthatjuk ki az egyes termékek árait?

Megoldás

Ha csak egy adatot is ismerünk, abból könnyedén kiszámíthatjuk 1 dkg termék árát. Ezután már csak ezt kell megszoroznunk a termék tömegével és megkapjuk az árát, hiszen az árnak egyenes arányban kell állnia a tömeggel. Például 10 dkg tökmag 80 Ft $\Rightarrow$ 1 dkg = 8 Ft $\Rightarrow$ 20 dkg = 160 Ft stb. A táblázat minden sora egy-egy hozzárendelést ad meg, mégpedig az adott áru tömege és ára között.

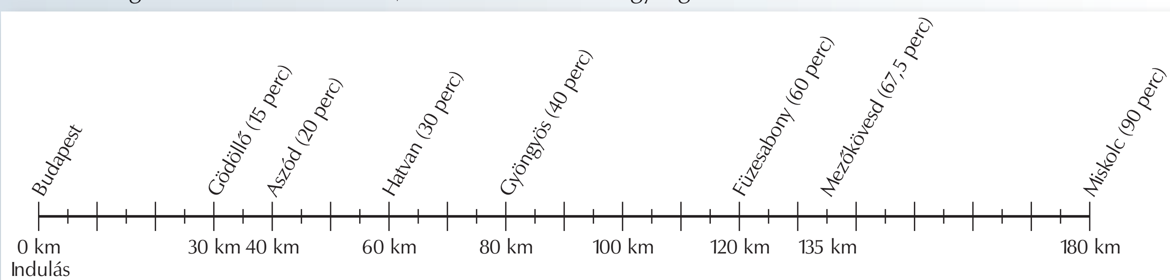
Ha két változó mennyiség összetartozó értékeinek hányadosa állandó ($\neq 0$), akkor **egyenes arányosságról** beszélünk.

3. példa

Az M3-as autópályán egyenletes sebességgel utazunk Budapestről Miskolcra (180 km). Utunk során elhaladunk Gödöllő (30 km), Aszód (40 km), Hatvan (60 km), Gyöngyös (80 km), Füzesabony (120 km), Mezőkövesd (135 km) mellett. Másfél óra alatt érünk Miskolcra. Az indulás után hány perccel haladunk el a megadott városok mellett? Készítsünk vázlatrajzot a négyzethálós füzetbe! Ügyesen válasszuk meg az egységet! Keressünk egyszerű összefüggést az eltelt idő és a megtett távolság között!

Megoldás

180 km-t 90 perc alatt tettünk meg. Ez azt jelenti, hogy percenként 2 km-t tettünk meg, vagyis félpercenként 1 km-t. Ezután a távolságot 0,5-tel szorozva kapjuk a megfelelő időket. Mivel minden távolság az 5 km-nek egész számú többszöröse, ezért érdemes ezt egységnek választani.

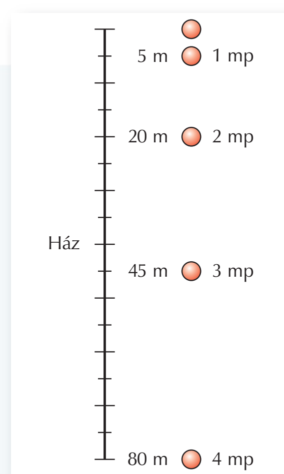


A rajz egy hozzárendelést határoz meg a városok és az eltelt idő között.

4. példa

Egy magas ház tetejéről leejtettünk egy golyót. Az egyes emeletek magasságának ismeretében meghatároztuk a szabadon eső test megtett útját az első néhány másodpercben. A következő táblázatban ezt láthatjuk.

idő	1 mp	2 mp	3 mp	4 mp
út	5 m	20 m	45 m	80 m



Vajon

a) mennyit zuhanna a test az 5. mp végéig?
b) mennyit zuhanna 4,5 mp alatt?
c) mikor ér földet egy 500 m magasból leejtett golyó?

Keressünk összefüggést az eltelt idő és a megtett út között!

Megoldás

Az időt „t”-vel, az utat pedig „s”-sel jelöljük. Fizikaórán tanultuk, hogy $s \sim t^2$. Rövid próbálkozás után azt találjuk, hogy $s = 5 \cdot t^2$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a képlet megfelelő. Ezután már válaszolhatunk a kérdésekre.

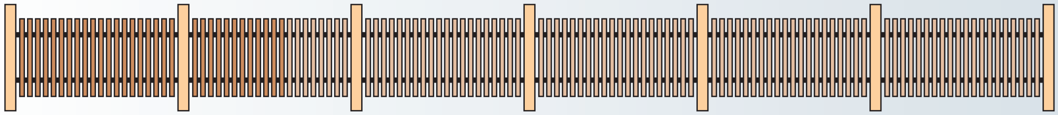
a) $s = 5 \cdot 5^2 = 125$ m.

b) $s = 5 \cdot 4{,}5^2 = 101{,}25$ m.

c) $500 = 5 \cdot t^2 \Rightarrow 100 = t^2 \Rightarrow 10 = t$ vagy $t = -10$, de ez utóbbi megoldásnak nincs értelme. Tehát 10 másodperc alatt esik le a golyó 500 m magasból.

5. példa

Egy kerítés 120 db palánkból áll. Ezeket kell lefestenünk. A munka megtervezésekor meg szeretnénk határozni, hogy mennyi ideig tart majd a festés. Ha tudjuk, hogy óránként hány palánkot tudunk lefesteni, akkor kiszámíthatjuk, mennyi időre lesz szükségünk.



A következő táblázat a teljesítmény függvényében mutatja a szükséges időtartamot.

p (db/óra)	10	15	20	30	40	50	60
idő (óra)	12	8	6	4	?	2,4	?

Milyen összefüggést találunk a két mennyiség között?
Hogyan függ a munka elvégzéséhez szükséges idő a teljesítménytől?

Megoldás

A fizikából jól ismert fogalmakat használva a teljesítmény és az idő szorzata állandó, ebben az esetben éppen 120. A két mennyiség **fordítottan arányos**.

Ha két változó mennyiség összetartozó értékpárjainak szorzata állandó, akkor a mennyiségeket **fordítottan arányosnak** nevezzük.

Az elnevezés jogosnak tekinthető, hiszen ha az egyik változót valahányszorosára növeljük, akkor a másik ugyanannyiad részére csökken. Ezután kitölthetjük a hiányzó helyeket: $\frac{120}{40} = 3$ és $\frac{120}{60} = 2$.

A táblázatban egy hozzárendelést adtunk meg a teljesítmény és a munka elvégzéséhez szükséges idő között.

A következő példákban a **hozzárendelési szabályok** keresésével foglalkozunk.

6. példa

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	8	6	4	2	0	–2	–4	–6	–8	–10

Milyen kapcsolat van a táblázat első és második sorában lévő számok között?

Megoldás

Ha 10-ből kivonjuk az első sorban lévő szám kétszeresét, akkor kapjuk meg a második sorban lévő számot. $y = 10 - 2x$.

7. példa

Folytassuk a táblázatot!

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–1	0	1	?	?	?	?

Megoldás

A dolog elég egyszerűnek tűnik.

a) Minden számhoz hozzárendeljük önmagát:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–1	0	1	2	3	4	5

b) Minden számhoz rendeljük hozzá a köbét:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–1	0	1	8	27	64	125

Fogalmak
hozzárendelés;
hozzárendelési szabály;
egyenes arányosság;
fordított arányosság.

Az első három érték mindkét táblázatban megegyezik. Utána viszont másképpen folytatódnak a sorok.

Vigyáznunk kell az ilyen problémákkal! Ha egy hozzárendelés néhány elempárját ismerjük csak, akkor még nem tudjuk egyértelműen megmondani a szabályt, ahhoz még néhány további információra is szükség van. Ebben a példában, ha még azt is kikötöttük volna, hogy a hozzárendelési szabály egy elsőfokú algebrai kifejezés, akkor már egyértelmű lett volna a megoldás.

FELADATOK

1. K1 Keressünk olyan mennyiségeket, amelyek fordítottan arányosak!

2. K1 Adjunk meg egy olyan hozzárendelést, ami az egyjegyű egész számokhoz negatív egészeket rendel!

3. K1 Adjunk meg olyan hozzárendelést, ami a sík pontjaihoz a sík pontjait rendeli! Hány ilyet tanultunk már?

4. K2 Milyen hozzárendeléseket valósítanak meg a következők:
a) a bizonyítvány; *b)* egy menza menüje; *c)* az órarend?

5. K2 Keress a környezetedben olyan információkat, amelyeket hozzárendelések formájában adunk meg!

6. E1 Tudunk-e mondani olyan hozzárendelést, ami bármely két egész számhoz egyértelműen rendel egy harmadikat?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **593; 594; 595; 596; 600.**

38. MIT NEVEZÜNK FÜGGVÉNYNEK?

Leonhardt Euler

A függvény fogalma az egyik leghasznosabb azok közül, amit a matematikusok bevezettek. Rengeteg, a gyakorlatban felmerülő probléma megoldását kaphatjuk meg a függvények tulajdonságainak tanulmányozásával. Azt nem mondhatjuk, hogy már a görögök is használták ezt a fogalmat a mai formájában. Egy ilyen definíció megalkotása hosszú folyamat. Az első komoly lépéseket Descartes (1596–1650) tette meg a róla elnevezett koordináta-rendszer elterjesztésével és azzal, hogy a függvényeket hozzárendeléseknek tekintette egyszerű táblázatok helyett. Euler (1707–1783) vezette be az „f” betűt függvények jelölésére. A mai értelemben is használatos meghatározást Dirichlet (1805–1859) írta le 1839-ben: „Ha az *y* és *x* változók olyan viszonyban vannak egymással, hogy *x* valamely számértékéhez bármilyen törvény hozzárendeli *y*-nak egy értékét, akkor azt mondjuk, hogy *y* az *x* független változó függvénye.”

Lejeune Dirichlet

Nézzünk két egyszerű példát!

1. példa

Legyen az alaphalmaz $A = \{$az osztály 5 legjobb tanulója$\}$.

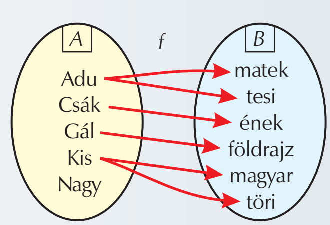
A hozzárendeléseket kisbetűkkel fogjuk jelölni.

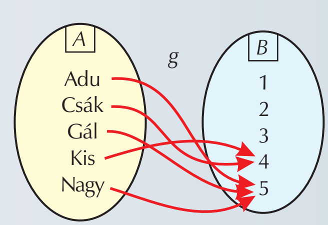
Mindenkihez rendeljük hozzá
- *f*: a kedvenc tantárgyait;
- *g*: az év végi matematikaosztályzatát;
- *h*: a naplóbeli sorszámát;
- *i*: a szeptemberi matekjegyeit;
- *j*: a hajszínét!

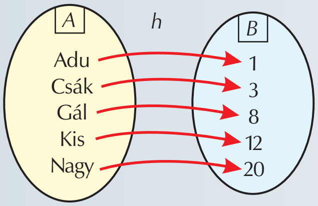
Az alábbi táblázat egy lehetséges hozzárendelést tartalmaz:

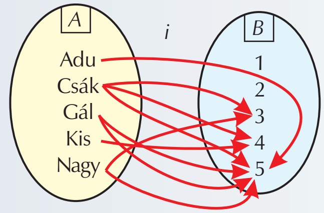
x	Adu Ádám	Csák Máté	Gál Rozi	Kis Éva	Nagy Gyula
f	matek, tesi	ének	földrajz	magyar, töri	–
g	5	4	5	4	5
h	1	3	8	12	20
i	5	4, 5, 3	5, 5	4	3, 5
j	barna	szőke	fekete	szőke	barna

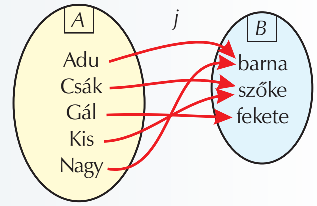
Rajzoljuk le halmazábrák segítségével mind az öt hozzárendelést külön-külön! A hozzárendeléseket nyilakkal fogjuk jelezni.









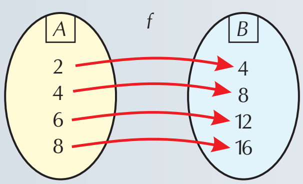


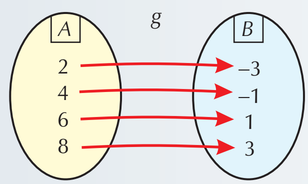
2. példa

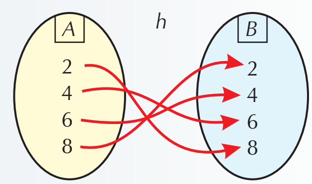
Tekintsük az A = {egyjegyű pozitív páros számok} halmazát. Adjuk meg táblázat, majd halmazábra segítségével a következő hozzárendeléseket!

f: minden $x \in A$-ra $x \mapsto 2x$ (minden számhoz a kétszeresét rendeljük);
g: $x \mapsto x - 5$;
h: $x \mapsto 10 - x$.

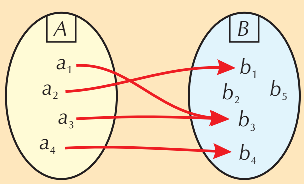
x	2	4	6	8
$2x$	4	8	12	16
$x - 5$	–3	–1	1	3
$10 - x$	8	6	4	2







Definíció



Legyen adott két nem üres halmaz, A és B.

Ha az *A* halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzárendeljük a *B* egy-egy elemét, akkor ezzel egy függvényt határozunk meg.

Az A halmazt a függvény **értelmezési tartományának** hívjuk, és ÉT-vel vagy D_f-fel jelöljük (a jobb alsó index a függvény betűjele, nem feltétlenül f).

A B-t pedig képhalmaznak nevezzük. A képhalmaznak a hozzárendelésben részt vevő elemei alkotják az **értékkészletet,** amit ÉK-val vagy R_f-fel jelölünk.

Megjegyzés

A hozzárendelések közül **csak az egyértelműeket** nevezzük függvénynek.

Ez nem jelent feltétlenül kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Előfordulhat, hogy az A halmaz két különböző eleméhez is ugyanazt az elemet rendeljük a B halmazból. A B halmaznak nem kell pontosan megegyeznie a hozzárendelésben részt vevő elemekkel. Megadhatunk ezeknél egy bővebb halmazt is. Ha pontosan szeretnénk tudni, hogy mely elemekről van szó, akkor ezt külön hangsúlyozzuk. Az $R_f \subseteq B$.

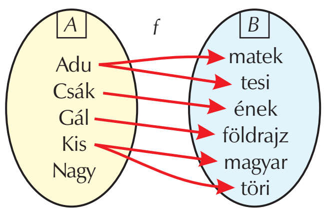
A függvényeket az *ábécé* kisbetűivel jelöljük. Ha az f függvényt szeretnénk megadni, a következő módon járhatunk el:

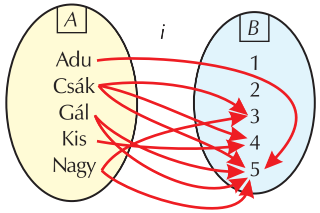
$\boxed{f\colon A \to B,\ x \mapsto f(x).}$

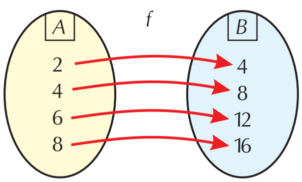
A jelölés első része $f\colon A \to B$ azt fejezi ki, hogy az f az A halmazon értelmezett, B-beli értékeket felvevő függvény. Gyakran mondjuk azt is, hogy f az A-t B-be leképező függvény.

A jelölés második része $x \mapsto f(x)$ a hozzárendelés szabályát adja meg, ami legtöbbször egy képlettel történik, de lehet valamilyen előírás vagy utasítás is.

A függvénnyel kapcsolatos érték szó szimbolikus jelentésű, hiszen mind az A, mind a B elemei tetszőleges dolgok lehetnek.







Ezek után vizsgáljuk meg az első két példában szereplő hozzárendeléseket!

Az **1. példában** az ***f*** semmiképpen nem függvény. Először is az A-nak nem minden eleméhez rendeltünk valamit. Másodszor például Adu Ádámhoz két tárgyat is rendeltünk.

Ugyanígy ***i*** sem függvény, hiszen ez sem egyértelmű hozzárendelés, például Csák Mátéhoz három elemet is rendeltünk.

A másik három ***g***, ***h***, ***j*** mindegyike egyértelmű hozzárendelés, tehát függvény.

A **2. példában** ***f***, ***g*** és ***h*** egyértelműek, tehát függvénykapcsolatot határoznak meg.

Itt mindhárom példában az ÉT és az ÉK is egy számhalmaz. Ezeket valós függvényeknek nevezzük. A továbbiakban csak ilyenekkel foglalkozunk.

A **2. példában** az ***f*** jelű hozzárendelés függvény, amelyet a következő módon adhatunk meg:

$f\colon \{2,4,6,8\} \to \{4,8,12,16\},\ x \mapsto 2x$ (először megadjuk a függvény betűjelét, rögtön utána az értelmezési tartományt és a képhalmazt, majd a hozzárendelési szabályt, amit 'x talpas nyíl két x'-nek olvasunk).

Az $x \mapsto 2x$ jelölés helyett az $f(x) = 2x$-et is használhatjuk, ami az f függvény x helyen vett helyettesítési értékét jelenti. Például: $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ és általában $f(x) = 2x$.

A függvényeket megadhatjuk más módon is, például táblázattal, grafikonjukkal (erre még visszatérünk), vagy akár **rendezett számpárokkal** is. Ha rendezett párokkal adjuk meg a függvényt, akkor az első tag mindig az ÉT egyik eleme, a második pedig a hozzárendelt függvényérték. Nyilvánvalóan ahány eleme van az ÉT-nak, annyi számpárt kell megadnunk.

Az f-et **rendezett számpárokkal** a következő módon adhatjuk meg:

f: (2; 4), (4; 8), (6; 12), (8 ; 16).

Rendezett számpáron két, pontosvesszővel vagy vesszővel elválasztott, zárójelbe tett számot értünk, mint például (2; 3). A 2 a számpár első, a 3 pedig a második tagja. Természetesen $(2; 3) \neq (3; 2)$, mert két rendezett számpárt akkor tekintünk egyenlőnek, ha az első és a második tag is megegyezik. Tehát $(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow$ ha $a = c$ és $b = d$.

Ha megváltoztatjuk az értelmezési tartományt, akkor azzal egy új függvényt adunk meg. Legyen f az előbb meghatározott függvény, vagyis $f\colon \{2, 4, 6, 8\} \to \{4, 8, 12, 16\},\ x \mapsto 2x$, a g pedig: $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 2x$ ('a g valós-valós függvény hozzárendelési szabálya, x talpas nyíl két x'), most $\mathbf{R}$ a valós számok halmazát jelöli. Az f és g függvényeknek csak a hozzárendelési szabálya egyezik meg, az értelmezési tartományuk nem.

Két függvényt akkor és csak akkor tekintünk **azonosnak,** ha értelmezési tartományuk és a hozzárendelési szabályuk is megegyezik.

Fogalmak
egyértelmű hozzárendelés;
függvény;
függvények egyenlősége;
értelmezési tartomány;
értékkészlet;
képhalmaz;
rendezett számpár.

Megállapodás:

Ha a függvények megadásakor nem adunk meg értelmezési tartományt, akkor ez azt jelenti, hogy a lehető legbővebb halmazra gondolunk.

Ha az értelmezési tartomány az összes valós szám, akkor azt nem szoktuk külön jelezni.

Például az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek az értelmezési tartománya $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Természetesen ha más értelmezési tartományt akarunk, akkor azt jelezni kell. Például ha csak a pozitív számokon akarjuk értelmezni a függvényt, akkor g: $]0, \infty[\to R$, $f(x) = \frac{1}{x}$ egy lehetséges megadás. Gyakran használjuk az $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, vagy $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ meghatározást is.

FELADATOK

1. K1 Határozzuk meg a következő függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!
f: (1; 2), (3; 4), (4; 5), (6; 5), (7; 7), (8; 7).

2. K1 Legyen $D_f = \{1, 2, 3\}$ és $R_f = \{5, 6, 7\}$. Adjuk meg az összes ilyen függvényt rendezett számpárokkal! Hány megoldást kapnánk, ha {5, 6, 7} a képhalmaz lenne?

3. K1 Határozzuk meg a következő függvények értékkészletét!

a) f: {pozitív páros számok} $\to \mathbf{Z}$, $f(x) = \frac{x}{2}$;

b) g: $[0; 10] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x}{2}$;

c) h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{x}{2}$;

d) i: $[-1; 5] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x + 3$;

e) j: $\{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \mathbf{R}$, $j(x) = 1$;

f) k: $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \to \mathbf{R}$, $k(x) = -x$.

4. K1 Adjuk meg a táblázattal megadott függvények hozzárendelési szabályát, értelmezési tartományát és értékkészletét!

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	4	7	10	13	16	19	22	25

b)

x	2	4	6	8	10	12	14	16
$g(x)$	3	1	–1	–3	–5	–7	–9	–11

5. K1 Adjunk meg egy olyan függvényt, aminek az értelmezési tartománya {1, 2, 3, 4}, és értékkészlete az {1, 2, 3, 4, 5} halmaz!

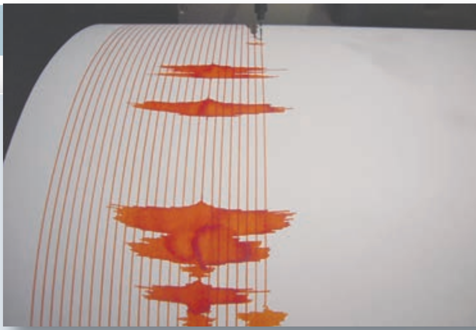
Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **571; 572; 574; 578; 579; 580; 581; 583; 601.**

39–40. PONTHALMAZOK ÉS FÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZERBEN

A KOORDINÁTA-RENDSZER

A legtöbbször olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyeknek az értelmezési tartománya és az értékkészlete is a valós számok egy részhalmaza. Ezeket valós függvényeknek nevezzük. A valós függvények jól szemléltethetőek a derékszögű koordináta-rendszerben. Mindenekelőtt érdemes tisztáznunk, hogy mi is az a koordináta-rendszer.

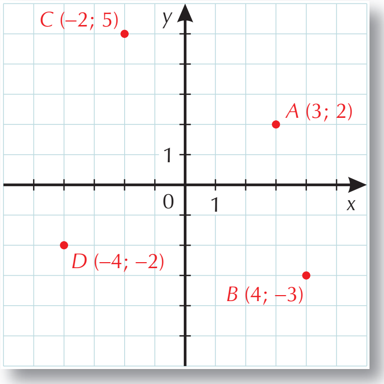


Szeizmográf

Vegyünk fel a síkon két közös kezdőpontú, egymásra merőleges számegyenest, ezek segítségével egyértelműen megadhatjuk egy pont helyzetét a síkon.

A két számegyenest **tengelynek** nevezzük, a közös kezdőpontot pedig **origónak**. A tengelyeket *vízszintesen* és *függőlegesen* szokás elhelyezni. **A vízszintes tengelyt *x* tengelynek vagy első tengelynek, a függőlegest pedig *y* tengelynek vagy második tengelynek nevezzük.**

Ha meg akarjuk határozni egy pont helyzetét, akkor először párhuzamost húzunk a ponton keresztül a tengelyekkel, a metszéspontoknak megfelelő számértékek alkotják a pont koordinátáit.

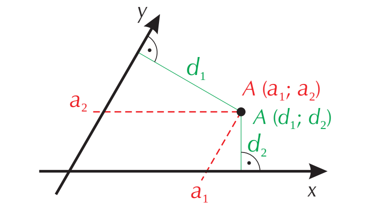


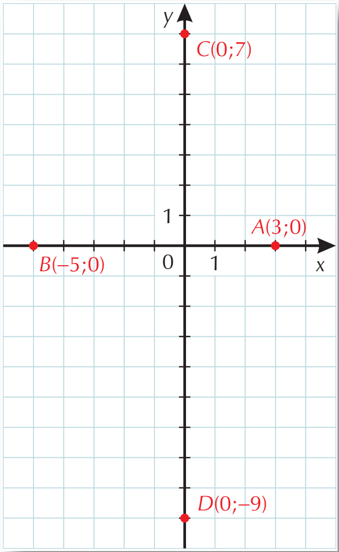
Az *x* tengelyen lévő számot **első koordinátának** vagy **abszcisszának,** az *y* tengelyen lévőt pedig **második koordinátának** vagy **ordinátának** nevezzük. Ez a két szám ebben a sorrendben egy **rendezett számpárt** alkot, ezekkel a pont megjelölésére szolgáló nagybetű mellé írva adjuk meg a pont helyét a koordináta-rendszerünkben.

Példák: *A* (3; 2), *B* (4; –3), *C* (–2; 5), *D* (–4; –2) stb.

Így **függvénykapcsolatot** határoztunk meg a **sík pontjai** és a **rendezett számpárok** között. A sík minden pontjához egyértelműen hozzárendeltünk egy számpárt. A hozzárendelés legfontosabb tulajdonsága, hogy minden számpár csak egyetlen ponthoz tartozik. Ez azt jelenti, hogy a pont koordinátáinak ismeretében egyértelműen meg tudjuk mondani, hogy melyik pontról van szó.

A két számegyenesnek nem kell feltétlenül merőlegesnek lennie, bizonyos esetekben szerencsésebb úgynevezett **ferde szögű koordináta-rendszert** használni. Egy pont koordinátáit kétféle módon is meghatározhatjuk, vagy úgy, mint fentebb, vagyis párhuzamost húzva a tengelyekkel, vagy pedig merőlegest állítva rájuk, és ezzel meghatározva a pontok előjeles távolságát a tengelyektől.





A derékszögű vagy Descartes-féle koordináta-rendszerben a két meghatározás ugyanarra a végeredményre vezet. Ez azt jelenti, hogy a pont koordinátáinak ismeretében megadható a pont tengelyektől mért előjeles távolsága is.

Az origót mindig *O*-val jelöljük, koordinátái *O*(0; 0).

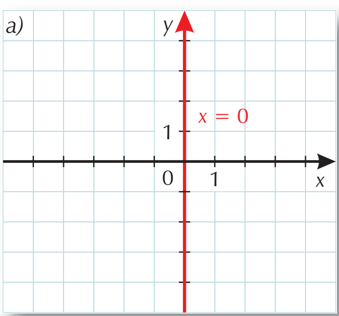
Az *x* tengelyen lévő pontok második koordinátája, az *y* tengelyen lévőknek pedig az első koordinátája nulla.

Legyen: *A*(3; 0), *B*(–5; 0), *C*(0; 7), *D*(0; –9).

Egy tetszőleges pontot *P*(*x*; *y*)-nal jelölhetünk. Ha megadunk egy összefüggést *x* és *y* között, ezzel egy ponthalmazt határozunk meg a koordinátasíkon. Azok és csak azok a pontok tartoznak a halmazhoz, amelyeknek első koordinátáját *x*, a másodikat pedig *y* helyébe írva az összefüggés igaz marad. Ezt az összefüggést az **alakzat egyenletének** hívjuk.

PONTHALMAZOK MEGHATÁROZÁSA

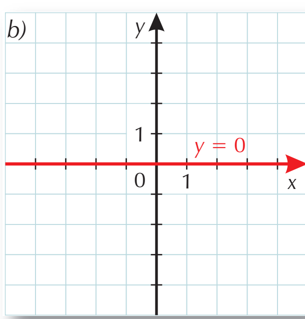
1. példa

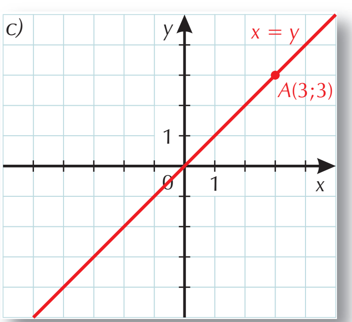


Példák ponthalmazokra:

a) $x = 0$. Egyenletünk azt jelenti, hogy a pont első koordinátája 0. Ha megrajzoljuk az összes ilyen tulajdonságú pontot, akkor az *y* tengelyt kapjuk. Azt is mondhatjuk, hogy az *y* tengely egyenlete: $x = 0$.

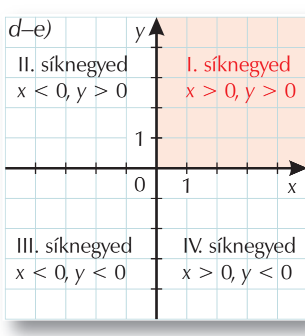
b) $y = 0$. Ez az *x* tengely egyenlete.





c) $x = y$. Azokat a pontokat kapjuk, amelyeknek első és második koordinátája megegyezik. Ezek is egyenest alkotnak, ami az *x* tengely pozitív felével $+45°$-os szöget zár be, és átmegy az origón.

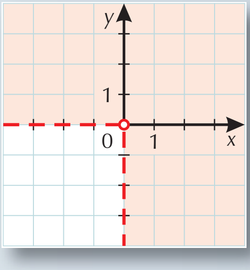
d) A tengelyek a síkot négy részre osztják, ezeket síknegyedeknek nevezzük. Az I. síknegyedbe azok a pontok tartoznak, amelyeknek mindkét koordinátája pozitív, egyszerűbben: $x > 0$ és $y > 0$.



e) II. síknegyed: $x < 0$ és $y > 0$;
III. síknegyed: $x < 0$ és $y < 0$;
IV. síknegyed: $x > 0$ és $y < 0$.

2. példa

Keressük meg azokat a pontokat a síkon, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételeket: $x > 0$ vagy $y > 0$!



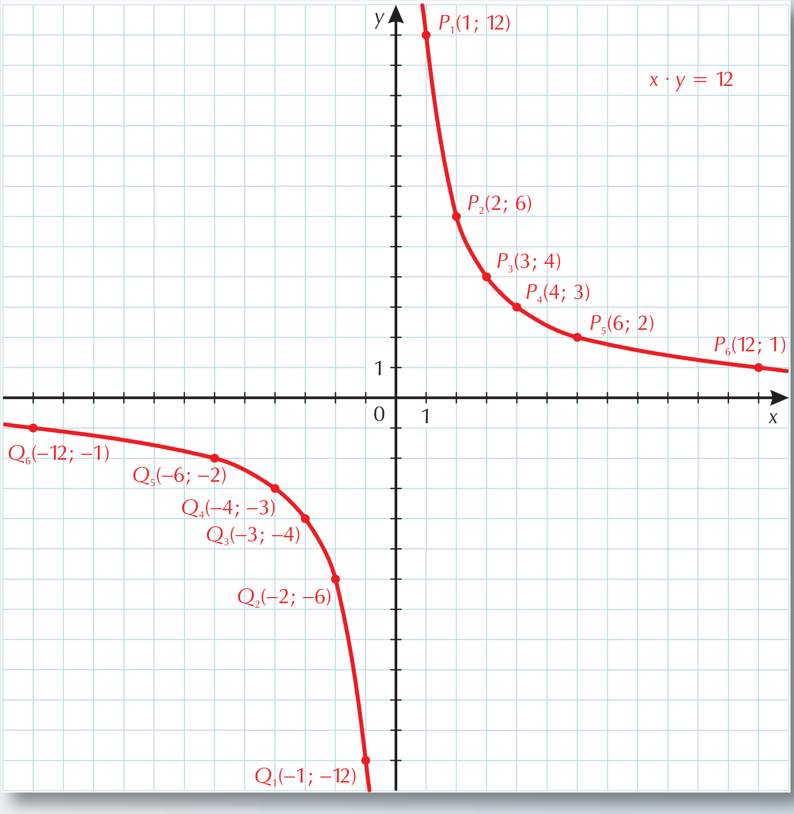
Megoldás

A megadott feltételek azt jelentik, hogy a pontnak legalább az egyik koordinátája pozitív. Ez, kivéve a III. síknegyedet és a tengelyek negatív felét, valamint az origót, mindig teljesül.

Tehát a megoldás az I., a II. és a IV. síknegyed, valamint a tengelyek pozitív fele.

3. példa

Keressük meg azokat a pontokat a síkon, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételeket: $xy = 12$! Hogyan nevezzük a kapott alakzatot?



Megoldás

Olyan pontokat kell keresnünk, ahol az első és a második koordináta szorzata éppen 12. A keresett alakzatnak biztosan nincsen egyetlen pontja sem a tengelyeken. Mivel a szorzat pozitív, ezért a pontok első és második koordinátája azonos előjelű. Ez azt jelenti, hogy vagy az első, vagy a harmadik síknegyedben kell lenniük. Keressünk néhány pontot!

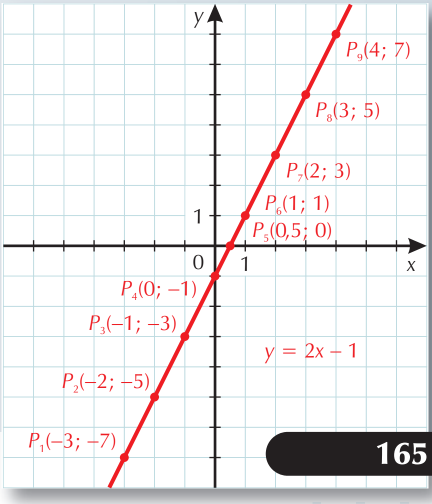
$P_1(1; 12)$, $P_2(2; 6)$, $P_3(3; 4)$, $P_4(4; 3)$, $P_5(6; 2)$, $P_6(12; 1)$;

$Q_1(-1; -12)$, $Q_2(-2; -6)$, $Q_3(-3; -4)$, $Q_4(-4; -3)$, $Q_5(-6; -2)$, $Q_6(-12; -1)$.

A megadott néhány pontra ráilleszthetünk egy görbét, amit hiperbolának nevezünk. Később még foglalkozunk ezzel a görbével.

4. példa

Keressük meg azokat a pontokat a síkon, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő egyenletet: $y = 2x - 1$!



Megoldás

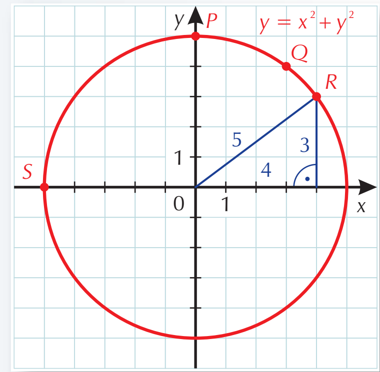
Az alakzat egyenlete azt jelenti, hogy olyan pontokat keresünk, amelyeknek második koordinátája az első kétszeresénél eggyel kisebb. Tehát az első koordinátát szabadon megválaszthatjuk, majd a másodikat a megadott képlet segítségével kiszámíthatjuk.

$P_1(-3; -7)$, $P_2(-2; -5)$, $P_3(-1; -3)$; $P_4(0; -1)$, $P_5(0,5; 0)$, $P_6(1; 1)$;
$P_7(2; 3)$, $P_8(3; 5)$, $P_9(4; 7)$.

A pontok egy egyenes mentén sorakoznak.

5. példa

Keressük meg azokat a pontokat a síkon, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő egyenletet: $x^2 + y^2 = 25$! Legalább 12 pontot keressünk! Gondoljunk a szimmetriára is!



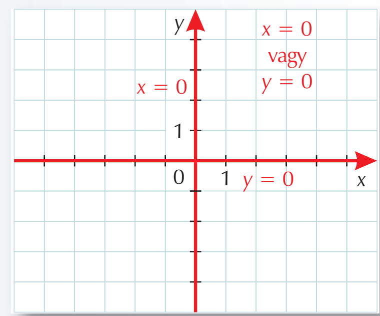
Megoldás

$x^2 + y^2 = 5^2$. Az egyenlet nagyon emlékeztet Pitagorasz tételére. Ha $x \neq 0$, $y \neq 0$ és $x^2 + y^2 = 5^2$, akkor $a = |x|$, $b = |y|$ és $c = 5$ adatokkal egy derékszögű háromszög szerkeszthető.

Így könnyen találunk megfelelő pontokat. $P(0;\ 5)$, $Q(3;\ 4)$, $R(4;\ 3)$, $S(-5;\ 0)$, és ezek tükörképei az x és y tengelyre, valamint az origóra. Mivel a pontok távolsága az O-tól mindig 5 egység, ezért ezek a pontok az origó körüli 5 egység sugarú körön helyezkednek el.

6. példa

Keressük meg azokat a pontokat a síkon, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő egyenletet: $xy = 0$.



Megoldás

Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla. Ez azt jelenti, hogy $x = 0$ (y tengely pontjai), vagy $y = 0$ (x tengely pontjai). A megoldás a két tengely pontjainak uniója.

Megjegyzés

Ez a feladat lehetőséget ad számunkra, hogy átgondoljuk, hogyan kaphatjuk meg két alakzat uniójának egyenletét. Legyen az egyik az $x = y$, a másik pedig az $x = -y$ egyenes. Rendezzük át őket úgy, hogy az egyik oldalon nulla legyen (nullára rendezés):

I: $x - y = 0$,
II: $x + y = 0$.

Ezután szorozzuk össze a bal oldali kifejezéseket, nyilván a végeredmény is nulla lesz:

I × II: $(x - y)(x + y) = 0$.

Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla.

Ez viszont azt jelenti, hogy vagy az egyik, vagy a másik egyenes egy pontjának a koordinátáit helyettesítettük be. Így akárhány alakzat uniójának egyenletét megkaphatjuk.

FÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA A DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZERBEN

A függvények ábrázolása során is egy ponthalmazt kapunk. A következőket kell tennünk: ábrázoljuk az összes olyan pontot, aminek az első koordinátája az értelmezési tartomány egyik eleme, a második koordinátája a hozzárendelt függvényérték. Ez azt jelenti, hogy ábrázolnunk kell az összes $P(x;\ f(x))$ koordinátájú pontot, ahol $x \in D_f$. A függvénygörbének mint ponthalmaznak az egyenlete: $y = f(x)$.

Nem mindig áll módunkban a grafikon összes pontjának az ábrázolása. Ha $D_f = \mathbf{R}$, akkor ez nem lehetséges, ilyenkor mi választhatjuk meg, hogy az értelmezési tartomány mely részhalmazán végezzük el az ábrázolást.

Ha a függvényünket rendezett számpárok formájában adtuk meg, akkor ezek az ábrázolandó pontok.

7. példa

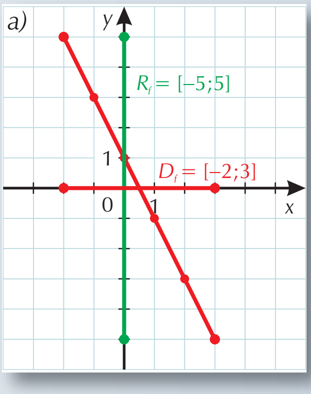
a) Rajzoljuk meg a következő függvény grafikonját!

f: $[-2; 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = -2x + 1$.

Készítsünk táblázatot!

b) Ábrázoljuk a $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \to \mathbf{R}$, $y(x) = -2x + 1$ függvényt!

c) Ábrázoljuk a h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = -2x + 1$ függvényt!



Megoldás

a)

x	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	5	3	1	–1	–3	–5

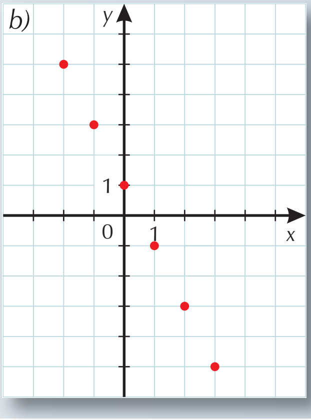
Az első sorban az ÉT néhány elemét soroljuk fel, a másodikban a nekik megfelelő függvényértékeket. Így megkapjuk a görbe néhány pontját. Például:

$f(-2) = -2 \cdot (-2) + 1 = 4 + 1 = 5;$

$f(3) = -2 \cdot 3 + 1 = -6 + 1 = -5.$

Tehát ábrázolnunk kell a (–2; 5), (–1; 3), (0; 1), (1; –1) (2; –3), (3; –5) pontokat.

Most csak a grafikon hat pontját kaptuk meg. A pontokat folytonos vonallal összekötve egy szakaszt kapunk.



b) A pontokat most nem kötjük össze!

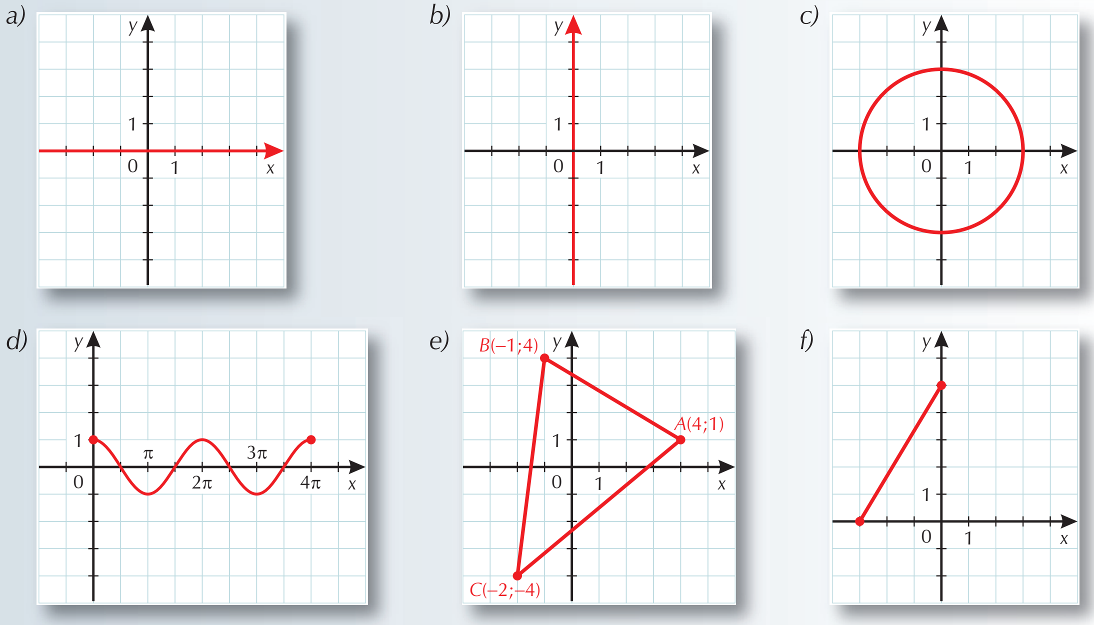
c) Nem tudjuk, melyik x értékek esetén kellene kiszámolnunk a függvényértékeket. A teljes görbét nem tudjuk ábrázolni, csak egy részletét. Ábrázoljuk a [–2; 3] intervallum egész értékeit. Így az *a)* és a *b)* feladatokban megkapott pontokat kapjuk. Az ezekre fektetett egyenes lesz a függvény görbéje.

Mivel a pontok első koordinátái az értelmezési tartomány elemei, ezért a pontok első koordinátái alkotják az ÉT-t. Ezt mi pirossal jelöltük az x tengelyen. A második koordináták pedig az értékkészletet alkotják. Ezt pedig zölddel jelöltük az y tengelyen.

Milyen ponthalmazok lehetnek függvénygörbék?
A függvény egyértelmű hozzárendelés, vagyis minden x-hez egy függvényérték vagy egy sem tartozik, attól függően, hogy x benne van-e az értelmezési tartományban, vagy nincs. Ez azt jelenti, hogy nem lehet a görbének két olyan pontja, amelyeknek az első koordinátája megegyezik. Másként fogalmazva, bármely függőleges egyenes maximum egyszer metszheti a görbét. Ha egy ponthalmazra ez az egyszerű feltétel teljesül, akkor az lehet egy függvény grafikonja.

8. példa

Lehetnek-e a következő ponthalmazok egy függvény grafikonjai? A ponthalmazokat pirossal rajzoltuk be.



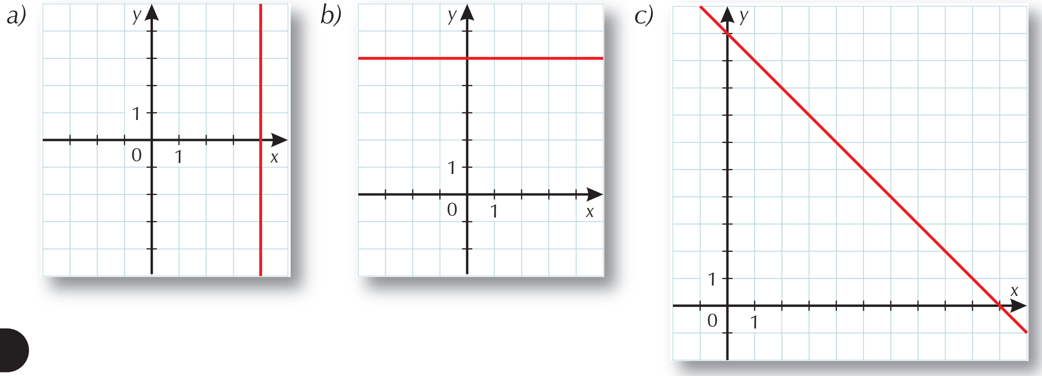
Megoldás

a) Ez annak a függvénynek a képe, ami minden számhoz a nullát rendeli.
b) Ez nem lehet függvénygrafikon, hiszen a nullához nem csak egy számot rendel.
c) Ez sem lehet függvény grafikonja, hiszen a nullához a –3-at és +3-at is hozzárendelné.
d) Ez függvény grafikonja, mert bármely függőleges egyenesnek maximum egy metszéspontja van a görbével.
e) Ez nem függvény grafikonja, mert van olyan függőleges egyenes, aminek két metszéspontja van a görbével.
f) Igen, függvény grafikonja.

Fogalmak
koordináta-rendszer;
ponthalmaz egyenlete;
alakzat egyenlete;
függvény;
függvény grafikonja;
függvénygörbe;
Descartes-féle koordináta-rendszer.

FELADATOK

1. K1 Mi az egyenlete a következő alakzatoknak?



2. K1 Keressük meg a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyeknek második koordinátája feleakkora, mint az első!

3. K1 Van-e olyan függvény, aminek a képe egyetlen pont?

4. K2 Keressük meg a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik az alábbi egyenleteket!
a) $[(x-1)^2+y^2]\cdot[(x+1)^2+y^2]=0$;
b) $x^2-y^2=0$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **573; 584.**

41. LINEÁRIS FÜGGVÉNYEK

Először a legegyszerűbb függvénytípussal foglalkozunk. Olyan függvényeket vizsgálunk, amelyeknek a képe a derékszögű koordináta-rendszerben egyenes, vagy annak egy részhalmaza, amelyek egy egyenesre illeszkednek.

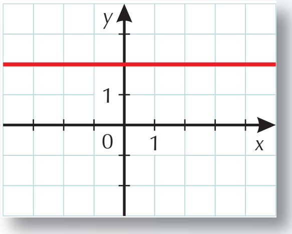
1. példa

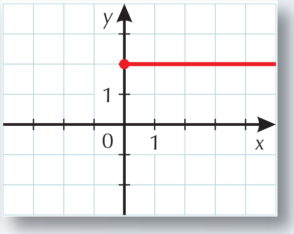
a) $f\colon \mathbf{R}\to\{2\},\ x\mapsto 2$;
b) $g\colon [0;\ \infty[\ \to\{2\},\ x\mapsto 2$;
c) $h\colon [-3;\ 3]\to\{2\},\ x\mapsto 2$;
d) $i\colon \mathbf{N}\to\{2\},\ x\mapsto 2$.

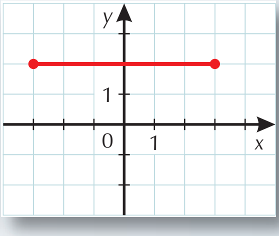
Ábrázoljuk a függvényeket a koordináta-rendszerben!

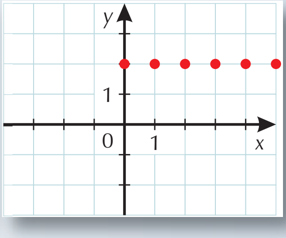
Megoldás

Ezeknek a függvényeknek a képe igen egyszerű. A megfelelő pontok az x tengellyel párhuzamos egyenesen helyezkednek el.

a)


b)


c)


d)


A megadott négy függvény csak az értelmezési tartományban különbözik. A hozzárendelésben szereplő 2 egy nulladfokú algebrai kifejezés, vagyis egy **konstans** (állandó).

Az $f(x)=c$ (a c egy tetszőleges rögzített szám) típusú függvényeket **konstans függvényeknek** nevezzük. A képük egy vízszintes egyenes, ami az y tengelyt a $(0;\ c)$ pontban metszi.

2. példa

A hatoslottó-sorsolásra (45 számból 6-ot húznak ki) véletlenszerűen választják ki a számhúzókat. Mindenki kap 20 000 Ft-ot, és még annyiszor 10 000 Ft-ot, mint amelyik számot kihúzta.

Adjuk meg azt a függvényt, amelyik megadja a kapott pénzt a kihúzott számtól függően!

Milyen határok között mozog a játékosoknak kifizetett összeg?

Megoldás

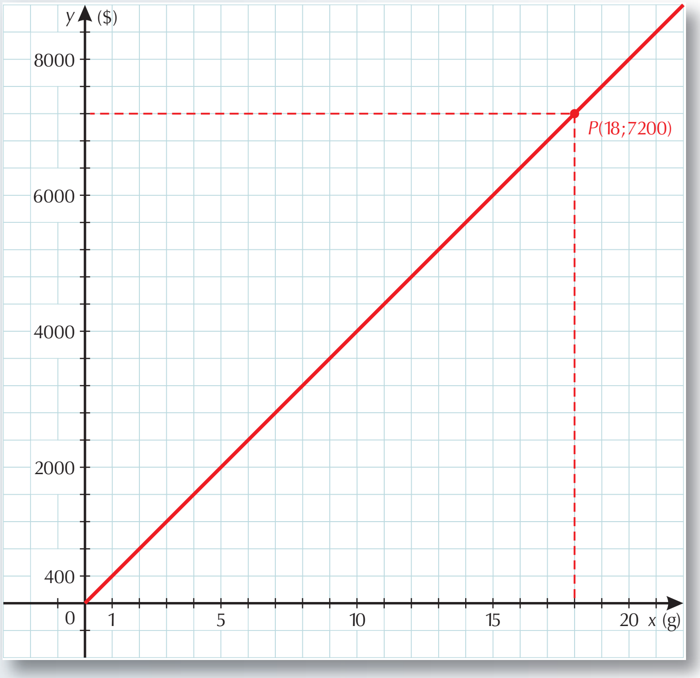
A függvény értelmezési tartománya az egytől negyvenötig terjedő pozitív egészek halmaza. Tehát: $f\colon \{1, 2, \ldots, 45\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 20\,000 + 10\,000x$.

Így a kifizetett pénz minimum $30\,000 = 20\,000 + 10\,000$ és maximum $470\,000 = 20\,000 + 45 \cdot 10\,000$-Ft lehet. Ha eggyel növekszik a kihúzott szám értéke, akkor a hazavihető összeg is nő, méghozzá mindig pontosan ugyanannyival.

A megadott hozzárendelési szabály egy elsőfokú algebrai kifejezés, ezért az ilyen típusú függvényeket elsőfokú függvényeknek nevezzük.

3. példa

Tíz gramm színtiszta arany ára 4000 \$. (Az arany árfolyama változik.) Milyen gazdagnak érezhetjük magunkat, ha egy 18 grammos aranyrög lapul az erszényünkben? Írjuk fel azt a függvényt, ami megadja a nálunk lévő arany értékét az arany tömegének függvényében! Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben ezt a függvényt!



Megoldás

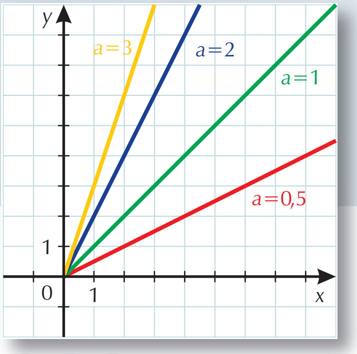
Jelöljük x-szel az arany mennyiségét, $f(x)$-szel pedig az értékét \$-ban. A két mennyiség egyenesen arányos egymással.

$$10\text{ g} = 4000\ \$$$
$$1\text{ g} = 400\ \$$$
$$x\text{ g} = 400x\ \$$$

Ez azt jelenti, hogy $f(x) = 400x$, így a birtokunkban lévő aranyrög $18 \cdot 400 = 7200$ \$-t ér.

A függvény értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza, és a függvénygörbe az origóból induló félegyenes. (Ez mindig így van az egyenes arányosságot leíró függvénynél.)

Mai árfolyamon ez a mennyiség hány forintot ér?



Emlékeztető: Két mennyiség egyenesen arányos, ha az összetartozó értékpárok hányadosa állandó. Ezt a hányadost arányossági tényezőnek nevezzük, jelöljük ezt most a-val. Az egyenes arányosságnak megfelelő függvény az $f\colon\ ]0; \infty[\ \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax$.

Nézzük meg a függvények képét néhány a esetén!

A függvénygörbék az origóból induló félegyenesek, amelyeknek meredeksége éppen a-val egyenlő.

Meredekség: Az egyenes meredeksége megmutatja, hogy ha a grafikon bármely pontjából egy egységet „jobbra” megyünk (x értékét eggyel megnöveljük), akkor mennyivel kell „fölfelé” (az y tengely mentén pozitív irányba) vagy „lefelé” (az y tengely mentén negatív irányba) elmozdulni, hogy újra a grafikonra jussunk, azaz mennyivel változik a függvény értéke.

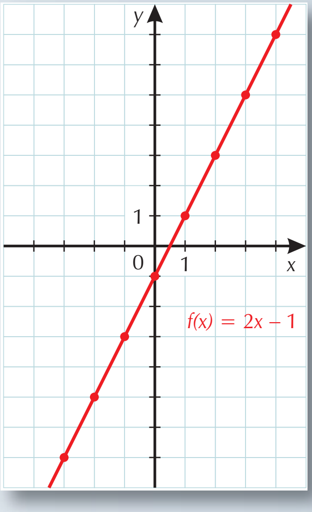
Megmutatja ennek jogosságát a következő: $f(x) = ax$, akkor $f(x + 1) = a(x + 1) = ax + a$, azaz $f(x + 1) = f(x) + a$.

4. példa

Ábrázoljuk a következő függvényeket értéktáblázat segítségével!

a) $f(x) = 2x - 1$; *b)* $g(x) = -x + 3$; *c)* $h(x) = \frac{3x - 4}{5}$.

a)



Megoldás

A függvények értelmezési tartománya az összes valós szám. Mi a táblázatunkban csak néhány értéket tudunk kiszámítani. Ezekből következtetünk a grafikon alakjára. Jelen esetben azt tapasztaljuk, hogy a berajzolt pontok egy-egy egyenes mentén helyezkednek el. Akárhány újabb helyen számolnánk ki az értékeket, ez mindig így maradna. (Ezt csak a későbbiekben tudjuk majd teljes egészében igazolni.)

a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7

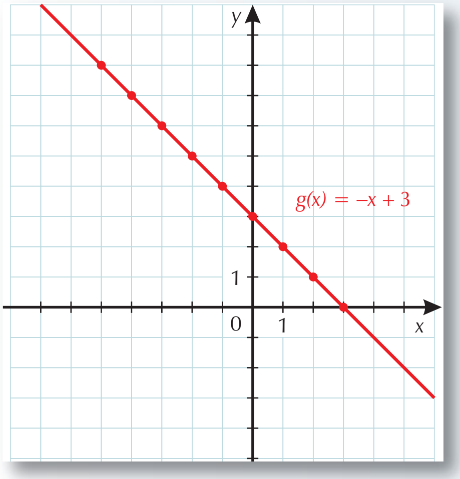
b)

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
$g(x)$	8	7	6	5	4	3	2	1	0

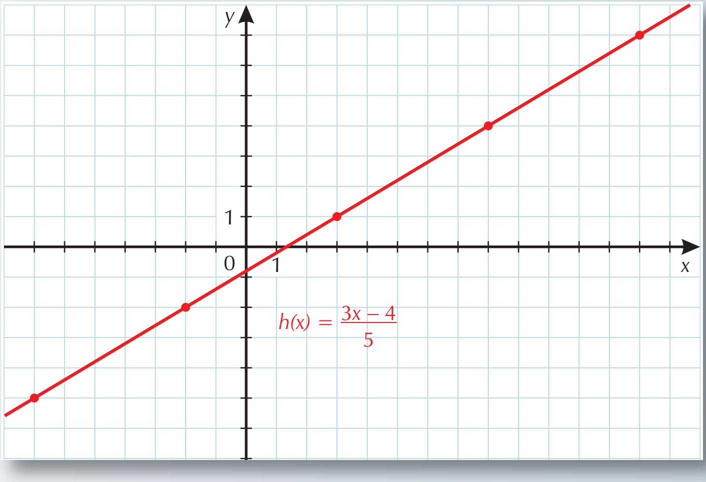
c)

x	–7	–2	3	8	13
$h(x)$	–5	–2	1	4	7

b)



c)



A megadott függvények közös tulajdonsága, hogy a hozzárendelés egy elsőfokú algebrai kifejezés. A képük így egyenes.

Az **elsőfokú függvény** általános alakja

$f(x) = ax + b.$

Az a és a b tetszőleges valós számok lehetnek, csak $a \neq 0$.

Ha $a = 0$, akkor az 1. példában tárgyalt konstans függvényt kapjuk.

Az ábrázolás szempontjából a és b egészen mást jelentenek. Az a a meredekség, vagyis pontosan ennyivel változik a függvény értéke, ha eggyel növeljük x-et.

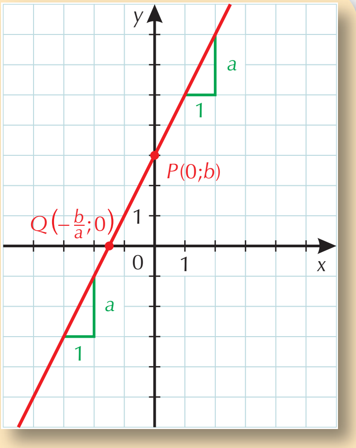
A b az egyenes y tengellyel való metszéspontjának a második koordinátája. Ha kiszámítjuk a függvény 0 helyen vett helyettesítési értékét, éppen b-t kapjuk.

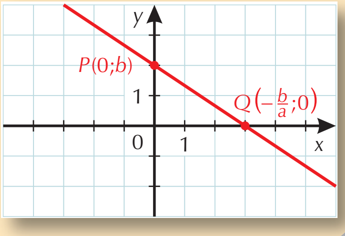
$f(0) = 0 \cdot x + b$, vagyis $f(0) = b$.

A függvénygörbe tengelyekkel való metszéspontjait **tengelymetszeteknek** nevezzük. Az elsőfokú függvény esetében az y tengelyen a $P(0; b)$ pont van.

Az x tengelyen lévő metszéspontot **zérushelynek** is nevezzük. Az elnevezés jogos, hiszen azt az x értéket jelenti, ahol a függvényérték 0, vagyis zérus. Ennek meghatározásához egy elsőfokú egyenletet kell megoldanunk.

$ax + b = 0$, $ax = -b$, $x = -\frac{b}{a}$, ha $a \neq 0$, $Q\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$.





A 4. példa c részében megadott $f(x) = \frac{3x-4}{5}$ függvény esetében egy kis átalakítás után szintén leolvashatjuk a és b értékeit. Az $f(x) = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$ alakból jól látszik, hogy $a = \frac{3}{5}$ és $b = \frac{-4}{5}$.

Ha tudjuk, hogy az elsőfokú függvény képe egyenes, akkor az ábrázoláshoz elegendő a grafikon két pontját meghatározni. Ezeken keresztül meghúzhatjuk az egyenest. Esetleg érdemes egy harmadik pontot is felvenni az ellenőrzés kedvéért.

5. példa

Határozzuk meg azt az elsőfokú függvényt, amelynek a képe áthalad a $P(-2; 3)$ és a $Q(6; -1)$ pontokon!

Megoldás

Tudjuk, hogy a keresett függvény elsőfokú, aminek általános alakja $f(x) = ax + b$. Az „a" szám a meredekség, ami megmutatja, hogy a függvény mennyivel változik, ha az x értékét eggyel növeljük. Ha kettővel növeljük az x-et, akkor $2a$-val változik a függvény értéke. A mi feladatunkban a grafikon tanulmányozása után megállapíthatjuk, hogy x-et nyolccal növelve a függvény értéke néggyel csökken. Ha csak eggyel növelnénk, akkor $\frac{4}{8}$-dal csökkenne, ami azt jelenti, hogy a meredeksége $-\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$.

$a = -\frac{1}{2}$. Ezek után már annak ismeretében, hogy a függvény a 6-hoz –1-et rendel, felírhatunk egy egyszerű egyenletet.

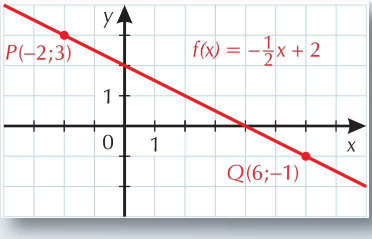
$f(6) = 6a + b$

$-1 = 6\left(-\frac{1}{2}\right) + b,$

$-1 = -3 + b \qquad /+3$

$2 = b.$

Tehát a kereset függvény $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.



GYAKORLÓ FELADATOK A LINEÁRIS FÜGGVÉNYEK KÖRÉBEN

6. példa

A nagyvárosokban a turisták gyakran közlekednek taxival. A napokban két ismerősünk is beszámolt brüsszeli élményeiről. Mindketten utaztak taxival is. Az egyik ismerős egy 8 km-es útért 21 eurót, a másik pedig egy 3 km-es útért 11 eurót fizetett. Vajon mennyibe kerül a taxizás Brüsszelben? Feltételezzük, hogy van egy kiállási díj és egy km díj, ami egyenesen arányos a megtett kilométerrel (természetesen a megtett kilométernek nem kell egésznek lennie). Fizetendő ennek a kettőnek az összege. Ezek a tarifák minden taxira egységesen vonatkoznak a városban.

a) Határozzuk meg azt a függvényt, ami megadja a taxizásért fizetendő összeget a megtett kilométer függvényében!

b) Mennyit fizetnénk egy 10 km-es útért?

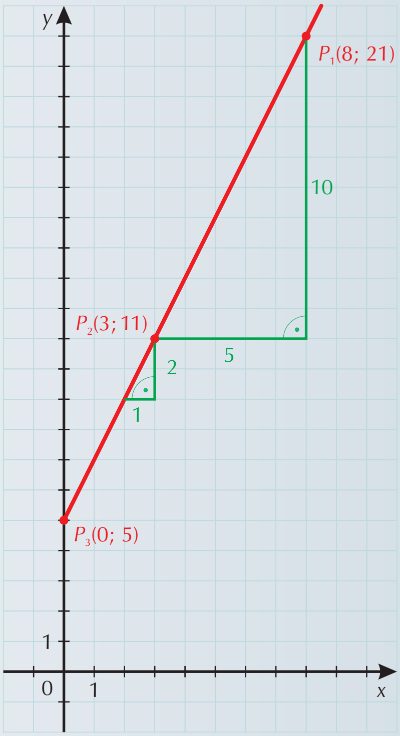
c) Egy harmadik ismerősünk egy alkalommal 16 eurót fizetett egy brüsszeli taxizásért. Vajon ő hány kilométert tett meg a taxival?

Megoldás

a) Az árképzés ismeretében világos, hogy a keresett függvény lineáris, az értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza (amint megérkezik a taxi, a kiállási díjat már fizetni kell). Első lépésben a kilométerdíjat határozzuk meg a megtett km függvényében. Egyenes arányosság esetén, ha ábrázoljuk az egyik változót a másik függvényében, akkor egy origón átmenő félegyenest kapunk (lásd 170 oldal). A mi függvényünk ettől csak abban különbözik, hogy minden értékhez hozzáadtunk egy pozitív számot (kiállási díj). Ezért a keresett függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy egy félegyenest eltolunk az y tengely mentén pozitív irányba.

Ábrázoljuk a megadott adatoknak megfelelő két pontot a koordináta-rendszerben. Mivel 8 kilométerért 21 eurót kell fizetni, ezért a keresett függvény a 8-hoz a 21-et rendeli. Tehát ábrázolnunk kell a $P_1(8;\ 21)$ pontot. Hasonlóan kapjuk a $P_2(3;\ 11)$ pontot.

A függvény grafikonja a megadott két ponton átmenő egyenesnek az első síknegyedbe eső része. Jól látható, hogy ha x érté-



két 5-tel megnöveljük, akkor a függvény értéke 10-zel nő. Ha csak eggyel nőne x értéke, akkor a függvény értéke kettővel nőne. Azaz kilométerenként 2 eurót kell fizetni a taxizásért. Tehát a függvény meredeksége 2. A P_2 pontból indulva, ha 1-gyel csökkentjük az első koordinátát, a másodikat pedig 2-vel, akkor újra a grafikon egy pontját kapjuk. Ezt folytatva jutunk a $P_3(0; 5)$ pontba. Tehát 0 kilométer „megtétele” után 5 eurót kell fizetni, vagyis a kiállási díj 5 euró.

A keresett függvény hozzárendelési utasítása:

$f(x) = 2x + 5$

Ellenőrzés: $f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$, $f(8) = 2 \cdot 8 + 5 = 21$

b) $f(10) = 2 \cdot 10 + 5 = 25$. Tehát 10 km-es útért 25 eurót kell fizetni.

c) Ha a 16 euróból kivonjuk az 5 eurós kiállási díjat, akkor megkapjuk a megtett kilométerek után fizetendő 11 eurót. A 11-nek a fele 5,5. Tehát 5,5 kilométert utazott a harmadik barátom.

Ellenőrzés: $2 \cdot 5{,}5 + 5 = 16$.

7. példa

Miklós az M3-as autópályán autózott Miskolc felé. Indulás után fél órával a 120-as km kőnél egy autópálya kamera észlelte az autóját. Negyedóra múlva a 150-es km kőnél haladt el egy másik mérőműszer mellett. Miklós az útja során szokásainak megfelelően nyugodt, egyenletes tempóban haladt.

a) Az autópályán 130 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a megengedett sebesség. Vajon szabályosan közlekedett Miklós?

b) Adjuk meg azt a függvényt, ami megadja, hogy Miklós autója hányas km kőnél jár az útja során az indulástól eltelt idő függvényében! Mérjük az időt órában!

c) Melyik városból indult el?

d) Mikor érkezett Miskolcra, ha tudjuk, hogy reggel nyolc órakor indult és sehol nem állt meg?
Az M3-as autópályán, Budapesten kezdik a km-ek számozását a nulla km-kőtől. (Miskolc határa a 180-as km kőnél van.)

Megoldás

a) Egyenletesen mozgó jármű esetén a megtett út egyenesen arányos az út megtételéhez szükséges idővel, az $s = vt$ összefüggés segítségével számíthatjuk ki a megtett utat. Mivel Miklós negyedóra alatt eljutott a 120-as km kőtől a 150-esig, ezért negyedóra alatt 30 km-t tett meg. Ezért az egyenes arányosság miatt egy óra alatt 120 km-t tett meg, tehát a sebessége $v = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Tehát Miklósnak nem kell büntetéstől félnie.

b) Egy elsőfokú, $f(x) = ax + b$ alakú függvényt keresünk, ahol x az indulástól eltelt időt jelenti órában mérve, $f(x)$ pedig azt adja meg, hogy éppen hányas km kőnél jár Miklós.

Tudjuk, hogy $f(0{,}5) = 120$ és $f(0{,}75) = 150$.

I. $120 = 0{,}5a + b$

II. $\underline{150 = 0{,}75a + b}$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$30 = 025a \qquad /\cdot 4$

$120 = a$

A kapott a értéket visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$120 = 120 \cdot 0{,}5 + b$

$120 = 60 + b \qquad /-60$

$60 = b \qquad$ Tehát $f(x) = 120x + 60$

Ahhoz, hogy egyértelműen megadjuk a függvényt, meg kell adnunk az értelmezési tartományt is. A feladat szövege alapján erre csak a „d" részfeladat megoldása után tudunk egyértelmű választ adni.

c) Mivel az induláskor Miklós a 60-as km kőnél tartózkodott, megállapíthatjuk, hogy Hatvan városából autózott Miskolcra.

d) Mivel Miskolc a 180-as km kőnél van, ezért függvényünk képletének ismeretében felírhatjuk, hogy

$180 = 120x + 60 \qquad /-60$

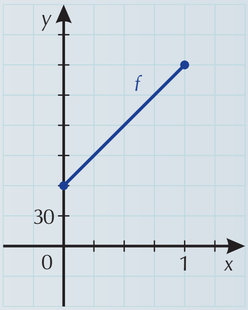
$120 = 120x$

$1 = x$

Tehát az indulás után egy órával érkezett meg. Mivel 8 órakor indult, ezért 9-re érkezett.

Most már meg tudjuk adni az $f(x)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is. Mivel tudjuk, hogy Miskolcra utazott, ahová egy óra alatt megérkezett, ezért $D_f = [0; 1]$, és

$f: D_f = [0; 1], f(x) = 120x + 60.$



8. példa

Vizsgáljuk a következő függvényt!

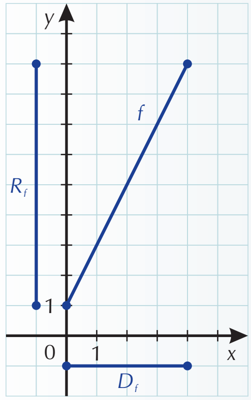
$f: [0; 4] \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$

a) Ábrázoljuk a függvényt!

b) Határozzuk meg az értékkészletét!

Megoldás

a)



b) A grafikonról leolvasható, hogy f értékkészlete: $R_f = [1; 9]$.

A függvény egyértelműen meghatározza, hogy az értelmezési tartomány elemeihez hogyan rendeljük hozzá az értékkészlet elemeit. Vajon az értékkészlet egy tetszőleges elemének ismeretében meg tudjuk-e mondani, hogy azt melyik számhoz rendeltük?

Ha igen, akkor hogyan tudjuk ezt megtenni?

Próbáljuk kitalálni, hogy melyik számhoz rendeltük például a 7-et! Visszafelé haladva, ha a 7-ből levonunk 1-et és a kapott eredményt elosztjuk 2-vel, akkor eljutunk ahhoz a számhoz, amihez a 7-et rendeltük, a 3-hoz. Valóban: $2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Ugyanezt megtehetjük az értékkészlet bármely elemével.

Jelöljük az értékkészlet egy tetszőleges elemét y-nal, vagyis $y \in [1;\, 9]$. Ekkor

$$y = 2x + 1 \qquad /-1$$
$$y - 1 = 2x \qquad /:2$$
$$\frac{y-1}{2} = x$$

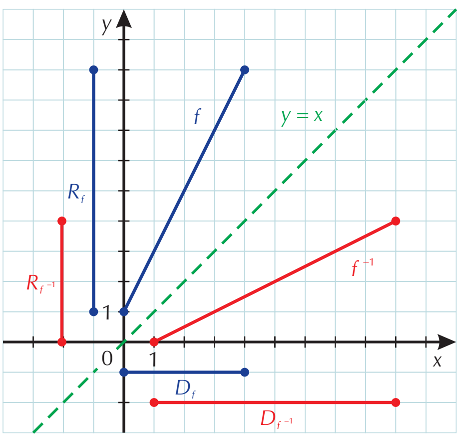
Így y ismeretében kiszámíthatjuk x értékét. Vagyis az értékkészlet minden eleméhez egyértelműen meghatározhatjuk, hogy az értelmezési tartomány melyik eleméhez rendeltük.

Ekkor egy újabb függvényt kapunk, de az értelmezési tartomány és az értékkészlet felcserélődött. Tehát az új függvény értelmezési tartománya az eredeti függvény értékkészlete, az értékkészlete pedig az eredeti függvény értelmezési tartománya lesz.

Az eredeti függvény: $f\colon [0;\, 4] \to [1;\, 9]$, $f(x) = 2x + 1$, itt már a képhalmazt leszűkítettük a függvény értékkészletére.

Az új függvényt f^{-1}-nel szokás jelölni.

$$f^{-1}\colon [1;\, 9] \to [0;\, 4],\; f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}.$$



Ábrázoljuk a kapott függvényt és az eredetit ugyanabban a koordináta rendszerben!

Milyen geometriai transzformációval kaphatjuk meg az egyik függvény grafikonjából a másikat? A válasz megtalálásában a grafikonok mellett nagyban segít az ábrán zöld szaggatott vonallal jelölt egyenes, ami a koordinátatengelyek első síknegyedbeli szögfelelője. Jól látható, hogy a két grafikon tükrös az $y = x$ egyenesre.

Megjegyzés: Ha az $f^{-1}(x)$ függvényből indultunk volna ki, akkor az eredeti $f(x)$-et kaptuk volna.

Szerencsére most sikerült egyértelműen meghatározni y-hoz x értékét. Ez nem mindig van így. Például a konstans függvény esetén nem tudjuk egyértelműen megmondani, hogy az adott számot mihez rendeltük, hiszen az értelmezési tartomány minden eleméhez ugyanazt a számot rendeltük, így a visszafelé hozzárendelés nem lenne függvény.

A SOROZATOK MINT FÜGGVÉNYEK

A számtani sorozatokkal már régebben megismerkedtünk.

A sorozatok is függvények. A pozitív egész számokon értelmezett függvényeket nevezzük sorozatoknak.

A sorozat elemeit általában az ábécé kisbetűivel jelöljük. Ha a sorozatot az f függvénnyel adjuk meg, akkor a szokásos jelölésekkel:

$f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, …, $f(n) = a_n$. A sorozatok igen változatosak lehetnek. Mi most csak az egyik speciális sorozattal, a számtanival foglalkozunk bővebben.

Egy **sorozatot számtaninak** nevezünk, ha az egymást követő elemek különbsége állandó. Ezt az állandót d-vel szoktuk jelölni, a differencia (különbség) szó kezdőbetűjével.

A pozitív egész számok például számtani sorozatot alkotnak. Az első elem az 1, és a differencia is 1. Képlettel: $a_n = n$, vagy $f(n) = n$.

Ha ismerjük a sorozat első elemét és differenciáját, akkor bármely elemét kiszámíthatjuk.

$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$,

$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$. Ugyanígy: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Látható, hogy minden következő elem d-vel nagyobb az előzőnél.

Ha $a_1 = 2$ és $d = 2$, akkor a pozitív páros számokat kapjuk meg.

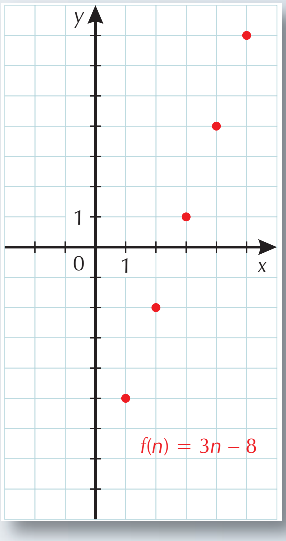
Ha a számtani sorozatokat a függvények szempontjából vizsgáljuk, akkor áttérhetünk az $f(n) = f(1) + (n - 1)d$ jelölésre.

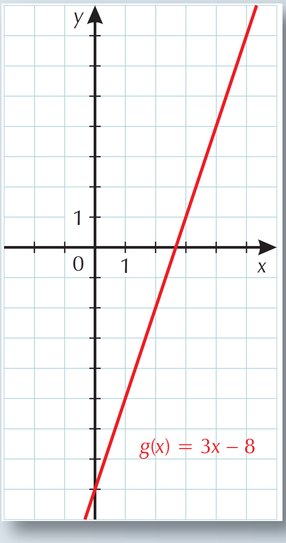
Ábrázoljunk néhány számtani sorozatot!

9. példa

Legyen $a_1 = -5$, $d = 3 \Rightarrow f(n) = -5 + (n - 1)3 = -5 + 3n - 3 = 3n - 8$. Ez a képlet nagyon hasonlít a $g(x) = 3x - 8$ függvény képletére. A két függvény hozzárendelési szabálya megegyezik, de az értelmezési tartományuk különböző. Az f-et a pozitív egészeken értelmezzük, és a képe diszkrét (különálló) pontokból áll. A g minden valós számon értelmezett, és képe egy egyenes. Nyilván f pontjai a g egyenesén helyezkednek el.

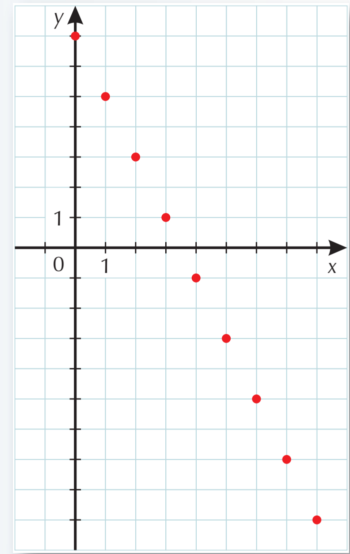
Az f hozzárendelési szabálya elsőfokú algebrai kifejezés, tehát a grafikon pontjai egy egyenesen helyezkednek el. Az egyenes meredeksége éppen a sorozat differenciája, a konstans tag pedig d-vel kisebb az első elemnél.





10. példa

Melyik számtani sorozatot határozza meg az $a_n = -2n + 7$ összefüggés?



Megoldás

Mi is a feladat? Egy számtani sorozatot akkor tekintünk megadottnak, ha ismerjük a_1-et és d-t. Azt is indokolni kell, hogy valóban számtani sorozatról van szó.

$a_{n+1} - a_n = [-2(n + 1) + 7] - [-2n + 7] = -2n - 2 + 7 + 2n - 7 = = -2 = d =$ állandó. Tehát a sorozat differenciája -2. Az első elem pedig $a_1 = -2 \cdot 1 + 7 = 5$. Ábrázoljuk a sorozatot mint függvényt!

Nemcsak az igaz, hogy minden számtani sorozat hozzárendelési szabálya elsőfokú, de ennek a megfordítása is. Ha egy sorozat hozzárendelési szabálya elsőfokú, akkor az számtani sorozat.

11. példa

Számtani sorozat-e az $a_n = n^2$ sorozat?

Megoldás

Elég megmutatni, hogy az egymást követő elemek különbségei között van legalább két különböző. Jelen esetben $a_2 - a_1 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ és $a_3 - a_2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$. A különbségek nem egyenlők, tehát nem számtani a sorozat. Elegendő volt egyetlen ellenpéldát találni.

Egyszerűen azt is mondhattuk volna, hogy n^2 nem elsőfokú kifejezés, tehát az a_n biztosan nem számtani sorozat.

Fogalmak
konstans függvény;
elsőfokú függvény;
lineáris függvény;
meredekség;
tengelymetszet;
zérushely;
sorozat;
számtani sorozat;
differencia.

FELADATOK

1. K1 Ábrázoljuk a következő függvényeket!

a) $f(x) = -3x + 5$; *b)* $g(x) = \frac{1}{4}x + 2$; *c)* $h(x) = -\frac{2}{3}x - 2$.

2. K1 Keressük meg azt az elsőfokú függvényt, amelynek a képe áthalad az
a) $A(0; -3)$ és a $B(1; 0)$; *b)* $R(-1; -1)$ és az $S(5; -1)$; *c)* $P(-6; 3)$ és a $Q(1; -4;)$ pontokon!

3. K1 *a)* Keressük meg a megadott függvényekhez azt a függvényt, amelyik az értékkészlet elemeihez a hozzá tartozó értelmezési tartománybeli elemet rendeli!
b) Ábrázoljuk a kapott függvényeket a párjukkal együtt egy-egy közös koordináta-rendszerben!
g: $[0; 5] \to [0; 5]$, $g(x) = -x + 5$; h: $[-4; 5] \to [-8; 1]$, $h(x) = x - 4$ i: $[1; 4] \to [1; 10]$, $i(x) = 3x - 2$

4. K1 A megadott függvények közül melyek az elsőfokúak?

a) $f(x) = 1000x - \frac{1}{1000}$; *b)* $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$; *c)* $g(x) = \frac{3 - 5x}{7}$; *d)* i: $\mathbf{R}\setminus\{-3\}$; $i(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$.

5. K1 Ábrázoljuk a sorozatok első öt elemét koordináta-rendszerben! Döntsük el róluk, hogy számtaniak-e!

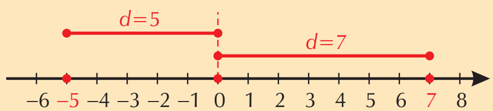
a) $a_n = \frac{2n - 1}{2}$; *b)* $b_n = 6 - n$; *c)* $c_n = \frac{6}{n} + 2$; *d)* $d_n = \frac{n^2 - 4}{n + 2}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **623; 624; 625; 627; 632; 633; 634; 635; 637; 638.**

42. AZ ABSZOLÚTÉRTÉK-FÜGGVÉNY

Definíció



Egy szám abszolút értéke a nullától való távolsága a számegyenesen.

Ez volt eddig a definíció.

Ez a fogalom nagyon szemléletes, jól látható, hogy egy szám abszolút értéke nem lehet negatív. A definíciót megalkothatjuk a függvények nyelvén is.

Definíció

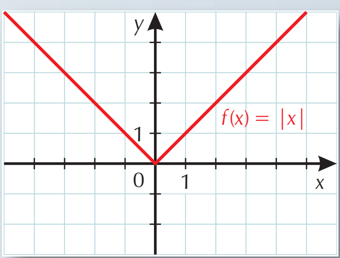
A pozitív számoknak és a nullának az abszolút értéke önmaga, a negatív számoknak pedig az ellentettjük.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

A két definíció ugyanazt jelenti.

1. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = |x|$ függvényt!



Megoldás

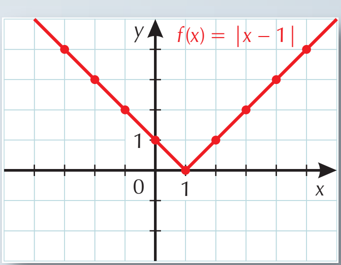
A grafikon két félegyenesből áll, amelyeket a lineáris függvényekről tanultak alapján ábrázolhatunk.

Megkaptuk az abszolútérték-függvényekre jellemző „V” alakzatot.

Jól látható, hogy az értékkészlet a nemnegatív számok halmaza.

2. példa

Adjuk meg azt a függvényt, ami a számoknak az 1-től vett távolságát mutatja a számegyenesen! Ábrázoljuk ezt a függvényt!



Megoldás

$f(x) = |x - 1|$, ha csak az $(x - 1)$ függvényt vennénk, akkor az előjeles távolságot kapnánk meg. Az ábrázoláshoz készítsünk táblázatot!

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2	3	4

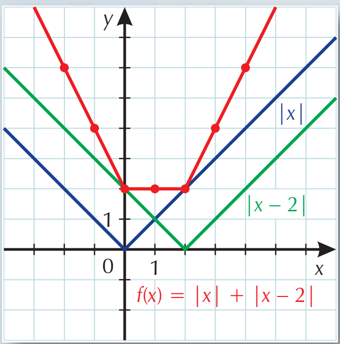
Az abszolút érték definíciója alapján, ha az abszolútérték-jelen belül nemnegatív szám áll, akkor ahhoz önmagát rendeli a függvény. Tehát ha $x - 1 \geq 0$, vagyis $x \geq 1$, akkor a függvény értéke $x - 1$ lesz. Ellenkező esetben, vagyis ha $x - 1 < 0$, tehát $x < 1$, akkor $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$. Összefoglalva:

$$f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x \geq 1, \\ -x + 1, & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$

3. példa

Határozzuk meg a valós számok 0-tól és 2-től mért távolságának összegét! Ábrázoljuk ezt a függvényt!

Megoldások



Első megoldás:

Az előző feladat alapján az $|x|$ és az $|x-2|$ függvények összegét kell vennünk. Tehát:

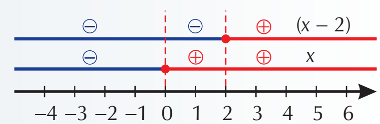
$f(x) = |x| + |x-2|$.

Táblázat segítségével felvázoljuk a grafikont.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3	4	5
$\|x-2\|$	5	4	3	2	1	0	1	2	3
$f(x)$	8	6	4	2	2	2	4	6	8

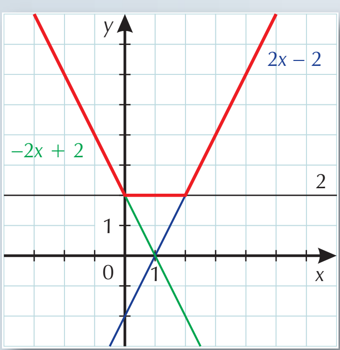
Második megoldás:

$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$, és $|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{ha } x-2 \geq 0, \text{ vagyis } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{ha } x-2 < 0, \text{ vagyis } x < 2 \end{cases}$, ezért három esetet kell megkülönböztetni.



Az *első eset*, amikor mindkét abszolút értéken belül nemnegatív szám áll. Ez azt jelenti, hogy ($x \geq 0$ és $x \geq 2$) $\Rightarrow x \geq 2$.
Ebben az esetben $|x| + |x-2| = x + (x-2) = x + x - 2 = 2x - 2$.

Második eset, ha ($x \geq 0$ és $x < 2$) $\Rightarrow 0 \leq x < 2$. Az első abszolút értéken belül pozitív, a másodikon belül pedig negatív szám áll.
Itt $|x| + |x-2| = x + \left(-(x-2)\right) = x - x + 2 = 2$.



Harmadik eset, ha negatív szám áll mindkét abszolút értéken belül.
($x < 0$ és $x < 2$) $\Rightarrow x < 0$, akkor
$|x| + |x-2| = -x + \left(-(x-2)\right) = -x - x + 2 = -2x + 2$.

Összefoglalva:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2, & \text{ha } x < 0; \\ 2, & \text{ha } 0 \leq x < 2; \\ 2x-2, & \text{ha } 2 \leq x. \end{cases}$$

Ennek alapján megrajzoljuk a megfelelő intervallumokon a függvényeket.

Harmadik megoldás:

Ha tudjuk azt, hogy a lineáris függvények összeadásánál a meredekség összeadódik, akkor egy egyszerű megoldást kapunk.

Ha $x < 0$, akkor két –1 meredekségű függvényt kell összeadnunk. Tehát egy –2 meredekségű függvényt kapunk.

Ha $0 \leq x < 2$, akkor $-1 + 1 = 0$, vagyis egy konstans lesz a két meredekség összege. Tehát egy konstans függvényt kapunk.

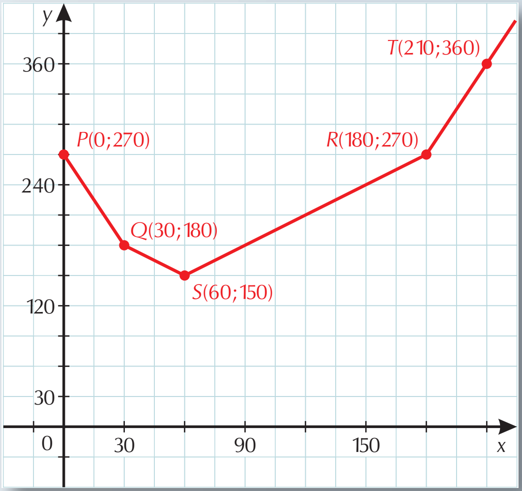
Ha viszont $2 \leq x$, akkor $1 + 1 = 2$ lesz a meredekség.

Ezután az $x = 0$-nál és $x = 2$-nél kell kiszámolni a függvény értékét.

Elemezzük egy kicsit ezt a megoldást! Láthatjuk, hogy a két ponttól mért távolság összege a két pontot összekötő szakaszon mindig ugyanannyi, éppen a két pont távolsága. A két ponton kívül pedig ennél nagyobb.

4. példa

Egy nagy üzletlánc az M3-as autópálya mentén építi meg logisztikai bázisát. Innen kívánja kiszolgálni Gödöllőn, Hatvanban és Miskolcon lévő üzleteit. Hová építsék fel a bázist az út mentén, ha azt szeretnék, hogy a három várostól mért távolság összege a lehető legkisebb legyen? Tudjuk, hogy Gödöllő 30 km-re, Hatvan 60 km-re és Miskolc 180 km-re van Budapesttől.



Megoldások

Első megoldás:

Használjuk az előző feladat megoldását! Ha csak Gödöllőre és Miskolcra szállítanának, akkor a két város között mindegy, hogy hová tesszük a bázist. A Hatvanra történő szállítás szempontjából legjobb, ha éppen oda építjük a központot. Így lesz a három távolság összege a lehető legkisebb.

Második megoldás:

Jelöljük x-szel a bázisnak Budapesttől mért távolságát. Mivel a három várostól mért távolság összegére vagyunk kíváncsiak, ezért az

$f(x) = |x - 30| + |x - 60| + |x - 180|$ függvényt kell vizsgálnunk, ahol $0 \le x$.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-30)-(x-60)-(x-180) = -3x + 270, & \text{ha } x < 30; \\ (x-30)-(x-60)-(x-180) = -x + 210, & \text{ha } 30 \le x < 60; \\ (x-30)+(x-60)-(x-180) = x + 90, & \text{ha } 60 \le x < 180; \\ (x-30)+(x-60)+(x-180) = 3x - 270, & \text{ha } 180 \le x. \end{cases}$$

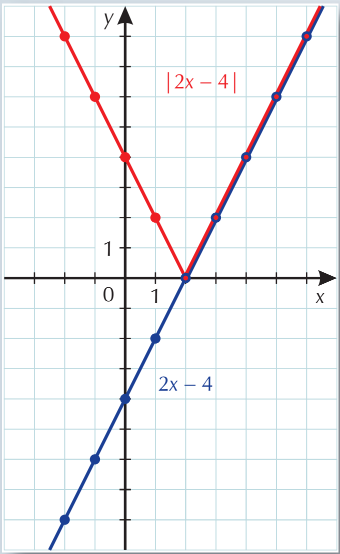
Rajzoljuk meg a függvénygörbét!

Látható, hogy a grafikon legalsó pontja a $S(60;\, 150)$ pont. Ez azt jelenti, hogy a függvény minimuma 150, és ezt az $x = 60$-nál veszi fel. Tehát a függvényvizsgálat során is ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az előbb.

5. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = |2x - 4|$ függvényt!

Megoldások



Első megoldás:
Készítsünk egy táblázatot!

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
2x – 4	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8
|2x – 4|	8	6	4	2	0	2	4	6	8

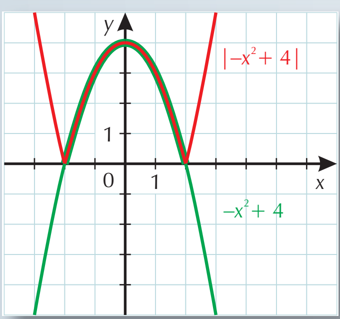
Ábrázoljuk mindkét függvényt!

Második megoldás:
Vizsgáljuk az abszolút érték definíciója alapján a függvényt!
Ha $2x - 4 < 0$, vagyis $x < 2$, akkor $|2x - 4| = -(2x - 4) = -2x + 4$.
Ha $2x - 4 \geq 0$, vagyis $x \geq 2$, akkor $|2x - 4| = 2x - 4$.

Összefoglalva:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & \text{ha } x < 2; \\ 2x - 4, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

$x < 2$ esetén éppen az eredeti függvény –1-szeresét kell ábrázolnunk.
A grafikonon jól látható, hogy ez az x tengelyre vonatkozó tükörkép, hiszen csak a pontok második koordinátája változik –1-szeresére.



Ebből az egyszerű feladatból komoly következtetéseket vonhatunk le.
Ha ismerjük egy f függvény grafikonját, akkor tudjuk ábrázolni a $g(x) = |f(x)|$ képét is.
Ha $f(x) \geq 0$, vagyis a grafikon megfelelő pontjai az x tengelyen vagy afölött helyezkednek el, akkor a pontok helyben maradnak. Ha viszont $f(x) < 0$, tehát a pontok az x tengely alatt vannak, akkor a függvénygörbe ezen részét tükrözzük az x tengelyre.

Fogalmak
abszolút érték;
abszolútérték-függvény.

FELADATOK

1. Ábrázoljuk a következő függvényeket táblázat segítségével!
K1 *a)* $f(x) = |x - 3| - 2$; **E1** *c)* $h(x) = |x + 2| - |x - 2|$;
K1 *b)* $g(x) = -|x + 4| + 3$; **E1** *d)* $i(x) = ||x - 4| - 3|$.

2. E1 Hogyan változik a **4. példa** megoldása, ha tudjuk még, hogy Hatvanba kétszer, Miskolcra pedig háromszor annyi árut szállítanak, mint Gödöllőre?

3. Ábrázoljuk a következő függvényeket!
K2 *a)* $f(x) = |x^2 - 4|$; **K1** *b)* $g(x) = |3 - x|$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **641; 642; 643.** *a), b), c), d);* **645; 646; 647.** *a), b), c), d), e);* **650.** *a), b);* **651; 654; 655.**

43. A MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY

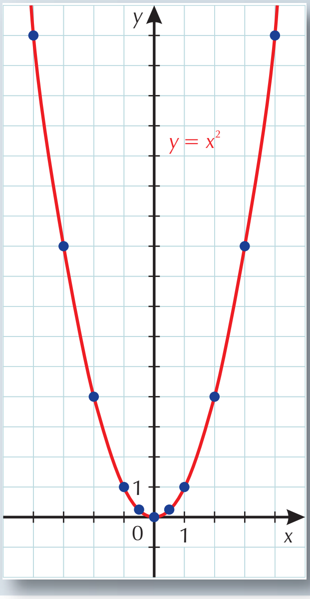
Az $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2 - 4$, $h(x) = x^2 - 6x + 5$, $i(x) = -x^2 + 4$ olyan függvények, amelyeknek hozzárendelési szabálya másodfokú algebrai kifejezés. Ezeket másodfokú függvényeknek nevezzük.

A másodfokú függvény általános alakja: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, ahol a, b és c konkrét valós számok, és $a \neq 0$.

Például h-ban $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$. Célunk az, hogy bármely hasonló függvényt ábrázolni tudjunk.

1. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = x^2$ függvényt értéktáblázat segítségével!



Megoldás

Az értelmezési tartomány az összes valós szám. Természetesen a táblázat segítségével csak véges sok helyen adhatjuk meg az értékeket.

x	–4	–3	–2	–1,5	–1	–0,5	0
x^2	16	9	4	2,25	1	0,25	0

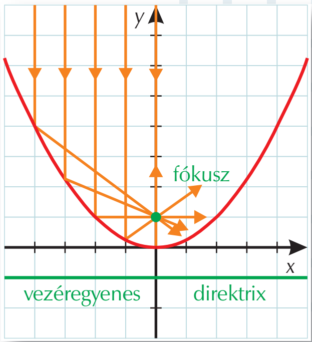
x	0,5	1	1,5	2	3	4	5
x^2	0,25	1	2,25	4	9	16	25

A megadott pontokat egy görbe vonallal összekötve megkapjuk a másodfokú függvények jellegzetes görbéjét, a **parabolát**. A grafikon az y tengelyre szimmetrikus alakzat. A parabola és a tengely metszéspontját tengelypontnak vagy csúcspontnak nevezzük.

A PARABOLA (Olvasmány)

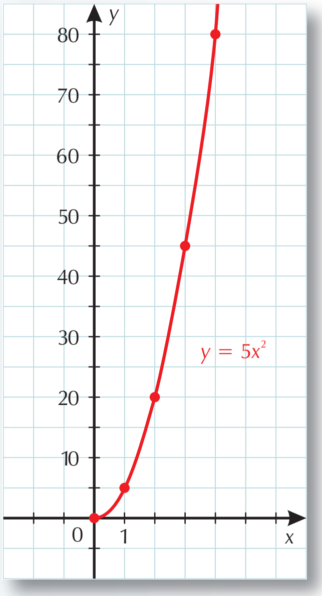
Emelt szint

Adott a síkon egy egyenes és rajta kívül egy pont. Ha megkeressük az összes olyan pontot a síkon, amelyek egyenlő távolságra vannak a megadott egyenestől és ponttól, akkor parabolát kapunk. Az egyenest vezéregyenesnek (direktrixnek), a pontot pedig fókusznak (fókuszpontnak) nevezzük. Az így kapott ponthalmaz tengelyesen szimmetrikus. A tengely átmegy a fókuszponton és merőleges a vezéregyenesre. A tengely és a parabola metszéspontja a tengelypont. A parabola sok érdekes tulajdonsággal rendelkezik. Például a tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarakat visszaverődés után a fókuszpontba gyűjti össze. Ezt a nagyon fontos tulajdonságát használják ki a parabolaantennák készítésénél. Nyilván az antenna maga nem parabola, hiszen az egy síkbeli alakzat. Az antennát úgy kapjuk, hogy a parabolát térben megforgatjuk a saját tengelye körül. Az így kapott térbeli alakzatot forgásparaboloidnak nevezzük.



2. példa

A bevezető feladatok között (156. oldal **4. példa**) találhatunk egy táblázatot, ami egy szabadon eső test által megtett utat mutatja az eltelt idő függvényében. Ábrázoljuk a megadott pontokat egy koordináta-rendszerben! Keressük meg a két mennyiség közötti függvénykapcsolatot!



Megoldás

x = idő = t	1 mp	2 mp	3 mp	4 mp
y = út = s	5 m	20 m	45 m	80 m

A pontokat görbe vonallal összekötve egy félparabolát kapunk. Ha egy test állandó gyorsulással egyenes vonalú pályán mozog, akkor az út-idő grafikonja mindig parabola.

A hozzárendelés szabálya: $s = 5t^2 \Rightarrow f(x) = 5x^2$.

3. példa

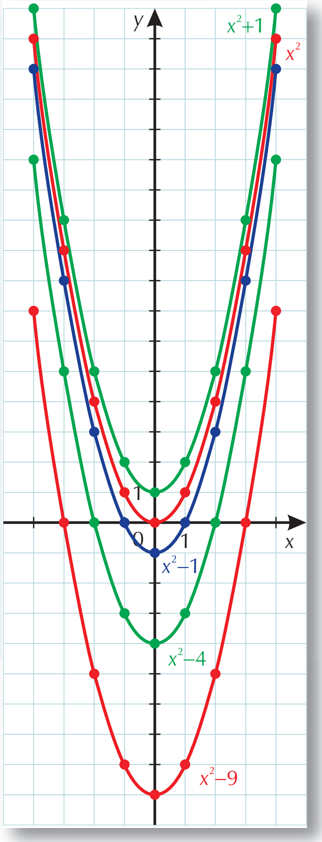
Ábrázoljuk a következő függvényeket!

a) $f(x) = x^2 - 9$;

b) $g(x) = x^2 - 4$;

c) $h(x) = x^2 - 1$;

d) $i(x) = x^2 + 1$.



Megoldás

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$x^2 - 9$	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7
$x^2 - 4$	12	5	0	–3	–4	–3	0	5	12
$x^2 - 1$	15	8	3	0	–1	0	3	8	15
$x^2 + 1$	17	10	5	2	1	2	5	10	17

Az ábrák jól mutatják, hogy **egy konstans hozzáadása, vagy elvétele csak függőlegesen mozdítja el a grafikont.** Amikor 9-et vontunk ki az x^2-ből, akkor a grafikon az y tengely mentén mozdult el negatív irányba 9 egységgel. A többi eset is könnyen átlátható.

4. példa

Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját!

a) $f(x) = (x - 2)^2$;

b) $g(x) = (x - 6)^2$;

c) $h(x) = (x + 2)^2$;

d) $i(x) = (x + 6)^2$.

Megoldás

Ha táblázat segítségével szeretnénk ábrázolni a függvényt, akkor ügyesen kell megválasztani az x értékeit! A függvények legkisebb értékét akkor kapjuk, ha a nullát emeljük négyzetre. Ezt az x értéket megkaphatjuk, ha a zárójelben lévő kifejezésnek megkeressük a zérushelyét. Ezután már csak ehhez képest szimmetrikusan kell megválasztanunk az x értékeit.

a)

x	–1	0	1	2	3	4	5
$x - 2$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$(x - 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

b)

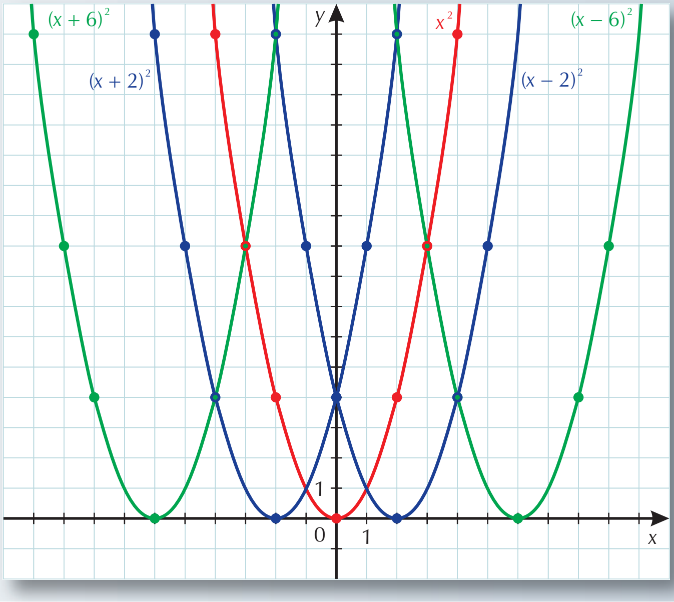
x	3	4	5	6	7	8	9
$x - 6$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$(x - 6)^2$	9	4	1	0	1	4	9

c)

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
$x + 2$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$(x + 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

d)

x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3
$x + 6$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$(x + 6)^2$	9	4	1	0	1	4	9

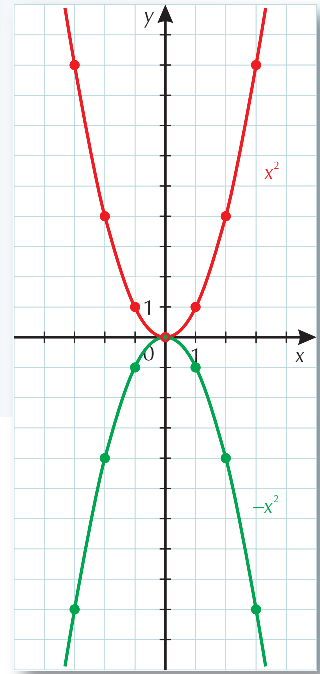


Idézet

A világ alkotóeleme … a mennyiség, s az emberi szellem (e világban világfölötti) semmit sem fog fel olyan jól, mint éppen a mennyiséget, minek felismerésére nyilvánvalóan teremtetett. *(Johannes Kepler)*

5. példa

Készítsük el az $f(x) = -x^2$ függvény grafikonját!



Megoldás

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

A számolásnál ne feledjük a műveleti sorrendet! A hatványozást kell előbb elvégezni, és csak utána a szorzást. A $-x^2$ azt jelenti, hogy az x-et előbb négyzetre kell emelni, és utána a végeredményt megszorozni -1-gyel.

A rajzot szemlélve érthető, hogy miért nevezzük a görbét lefelé nyitott, „lefelé néző” vagy „szomorú” parabolának. Ezek után természetes, hogy az x^2 függvény képe a felfelé nyitott, „felfelé néző”, vagy „vidám” parabola.

6. példa

Ábrázoljuk a következő függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben!

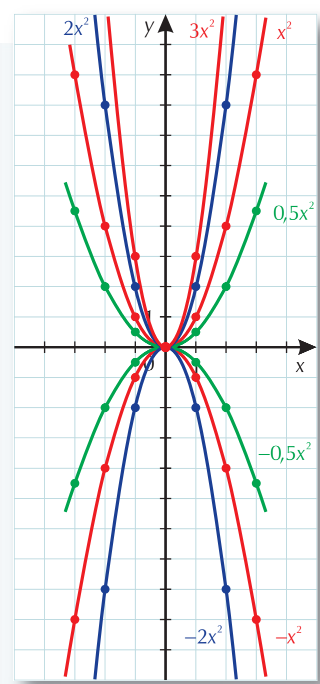
a) $f(x) = 3x^2$;

b) $g(x) = 2x^2$;

c) $h(x) = \frac{1}{2}x^2$;

d) $i(x) = -\frac{1}{2}x^2$;

e) $j(x) = -2x^2$.



Megoldás

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$3x^2$	48	27	12	3	0	3	12	27	48
$2x^2$	32	18	8	2	0	2	12	18	32
$0{,}5x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$-0{,}5x^2$	-8	$-4{,}5$	-2	$-0{,}5$	0	$-0{,}5$	-2	$-4{,}5$	-8
$-2x^2$	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32

7. példa

Értéktáblázat segítségével ábrázoljuk a következő függvényeket!

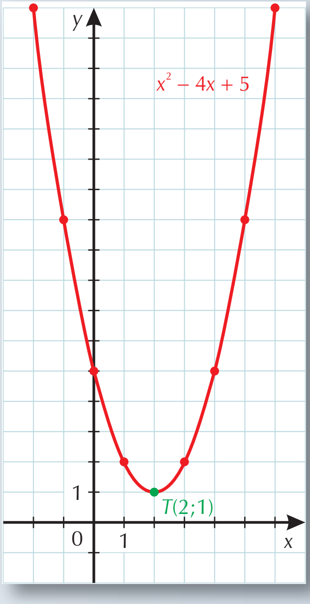
a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$;
b) $g(x) = x^2 + 12x + 27$.

Keressünk hasonló grafikonokat az előző feladatok megoldásai között! Vajon mivel magyarázható ez a hasonlóság?

Megoldás

a)

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
x^2	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$-4x$	20	16	12	8	4	0	–4	–8	–12	–16	–20
$f(x)$	50	37	26	17	10	5	2	1	2	5	10



A táblázat első három oszlopának figyelmen kívül hagyása után ábrázolhatjuk a függvényt.

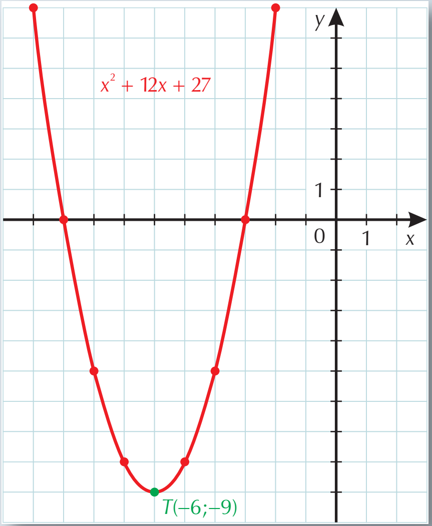
A grafikont tanulmányozva láthatjuk, hogy nagyon hasonlít az $(x - 2)^2$ grafikonjára. A **4. példa** *a)* megoldásához képest a parabola eggyel feljebb tolódott. Ennek az okát könnyen kideríthetjük. Az algebrai azonosságaink felhasználásával kifejtjük az $(x - 2)^2$-t.

$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \quad / +1;$
$(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5.$

Ez a képlet azt mutatja, hogy ha egyet hozzáadunk az $(x - 2)^2$ függvényünkhöz, akkor az előbbi grafikonja feljebb „megy” 1-et.

b)

x	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
x^2	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0
$12x$	–120	–108	–96	–84	–72	–60	–48	–36	–24	–12	0
$g(x)$	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7	16	27



Itt is felfedezhetjük a hasonlóságot az $(x + 6)^2$ grafikonjával.

$(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36 \quad /-9;$
$(x + 6)^2 - 9 = x^2 + 12x + 27.$

Tehát ha 9-et vonunk ki az $(x + 6)^2$ függvényből, akkor az előbbi grafikonja kilenc egységgel „megy” lejjebb.

A parabola tengelypontja a $T(-6; -9)$ pont. Ez a pont a grafikon „legalsó” pontja. Ennek fontos matematikai jelentése van. Ha megvizsgáljuk függvényünk értékkészletét, láthatjuk, hogy annak legkisebb eleme a –9.

Az értékkészlet legkisebb elemét **minimumnak** nevezzük. Az értelmezési tartomány azon eleme (elemei), ahol a függvény felveszi a minimumát, a **minimumhely.**

Az értékkészlet legnagyobb elemét **maximumnak** nevezzük. Az értelmezési tartomány azon eleme (elemei), ahol a függvény felveszi a maximumát, a **maximumhely.**

A „vidám” parabola tengelypontjának első koordinátája a minimumhely, a második pedig a minimum értéke. Mivel az értékkészletnek nincs legnagyobb értéke, ezért azt mondhatjuk, hogy függvényünknek nincs maximuma.

Ha a parabola lefelé néző, akkor éppen fordított a helyzet. Ott a függvénynek maximuma van, de minimuma nincs.

A gyakorlati alkalmazások során a matematika egyik legfontosabb feladata a függvények minimumának és maximumának a meghatározása.

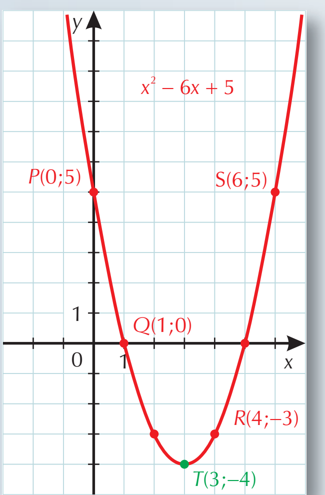
Tapasztalataink alapján azt mondhatjuk, hogy a másodfokú függvény képe mindig parabola. Ha az x^2 együtthatója, az a értéke pozitív, akkor a parabola mindig felfelé néző (vidám). Ha viszont a értéke negatív, akkor a parabola lefelé néző (szomorú).

8. példa

Keressünk olyan másodfokú függvényt, amelynek a grafikonja áthalad a $P(0; 5)$, $S(6; 5)$ és a $T(3; -4)$ pontokon! Keressünk még legalább két olyan pontot, amelyeknek a koordinátái egész számok és rajta vannak a parabolán!

Megoldás

Másodfokú függvényt keresünk, amiről tudjuk, hogy a képe egy parabola. A parabolának mindig van egy szimmetriatengelye, ami jelen esetben párhuzamos az y tengellyel. A P és S pontok második koordinátája megegyezik, ezért ők egymás tükörképei. Ez ezt jelenti, hogy a szimmetriatengely a két pont szakaszfelező merőlegese lesz. Mivel ezen rajta van a T pont, ezért ő csak a parabolánk tengelypontja lehet. Tehát a keresett másodfokú függvény képlete csak $f(x) = a(x - 3)^2 - 4$ alakú lehet. Mivel ha a tengelyponthoz képest hárommal növeljük x értékét, akkor a függvény értéke $9 = 3^2$-nel nő, ezért ez csak az $e(x) = x^2$ egységparabola eltolt képe lehet. Tehát:



$f(x) = (x - 3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$. Ezt az eredményt még ellenőriznünk kell. A megadott pontok első koordinátáját az x helyébe írva éppen a második koordinátát kapjuk.

Ha újabb pontokat keresünk a parabolán, láthatjuk, hogy például a $Q(1; 0)$ és $R(4; -3)$ szintén rajta vannak.

Fogalmak
másodfokú függvény;
parabola;
tengelypont;
függvény minimuma;
függvény maximuma;
minimumhely;
minimumérték;
maximumhely;
maximumérték.

FELADATOK

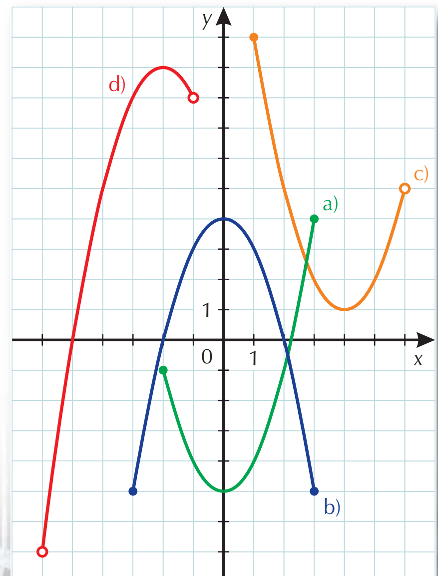
1. K2 Értéktáblázat segítségével ábrázoljuk a következő függvényeket! Keressük meg a parabolák tengelypontjait! Adjuk meg a függvények értékkészletét!

a) $f(x) = 2x^2 - 8$;
b) $g(x) = -x^2 + 4x$;
c) $h(x) = -(x - 2)^2 + 4$;
d) $i(x) = x^2 + 6x + 5$;
e) $j(x) = (x - 3)^2 - 4$;
f) $k(x) = x|x|$.

2. E1 Adjuk meg azt a másodfokú függvényt, aminek grafikonja illeszkedik a következő három pontra!

a) $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(2; 0)$;
b) $P(-3; -1)$, $Q(0; 2)$, $R(-6; 2)$.

3. K2 A grafikonjuk alapján adjuk meg az ábrán látható másodfokú függvények hozzárendelési szabályát, értelmezési tartományát és értékkészletét!

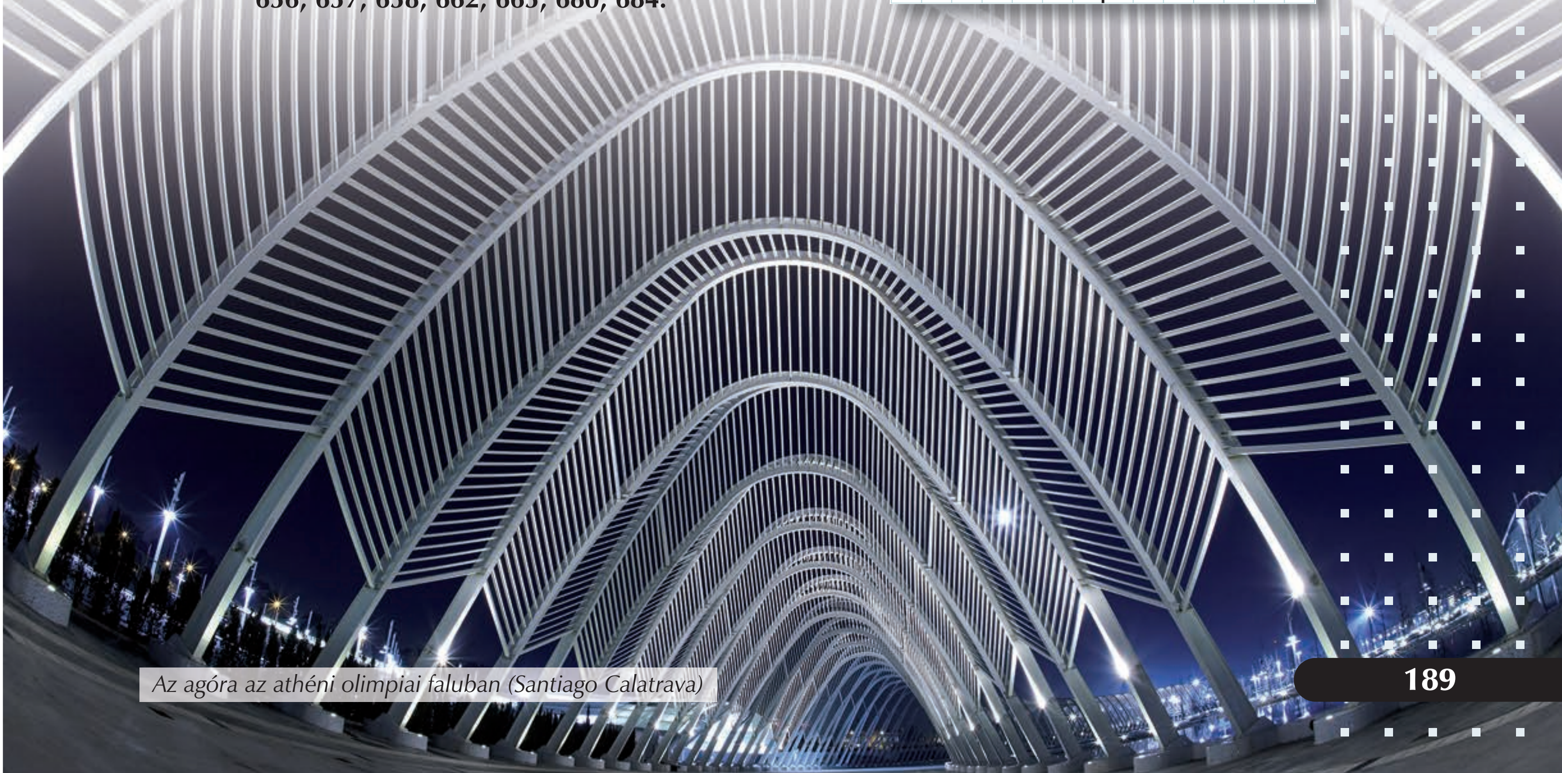


4. K2 Egy nagy erővel megütött golflabda földfelszíntől mért távolságát jó közelítéssel a $h(t) = 25t - 5t^2$ függvény írja le. (A t időt másodpercben, a h magasságot méterben számítjuk.)

a) Mekkora volt a földfelszíntől mért legnagyobb távolsága a labdának?
b) Mekkora távolságot tett meg vízszintes irányban a labda, ha a vízszintes irányú sebessége a mozgás folyamán állandónak tekinthető 32 m/s volt? (A labdát lassító közegellenállás hatását elhanyagoljuk.)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **656; 657; 658; 662; 665; 680; 684.**



Az agóra az athéni olimpiai faluban (Santiago Calatrava)

44. RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK

Korábbi algebrai tanulmányainkban szerepelt egy nagyon fontos fogalom, az algebrai tört. Szeretnénk megismerkedni a neki megfelelő függvényekkel. Először csak a legegyszerűbb típusokkal foglalkozunk.

Vizsgáljuk meg azokat a törteket, amelyek nevezőjében egy elsőfokú, a számlálójában pedig nullad- vagy elsőfokú algebrai kifejezés áll! Az így kapott függvényeknek a képe **hiperbola**.*

Például $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x+5}$, $h(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

1. példa

Ábrázoljuk azt a függvényt, ami minden nullától különböző számhoz hozzárendeli a reciprokát!

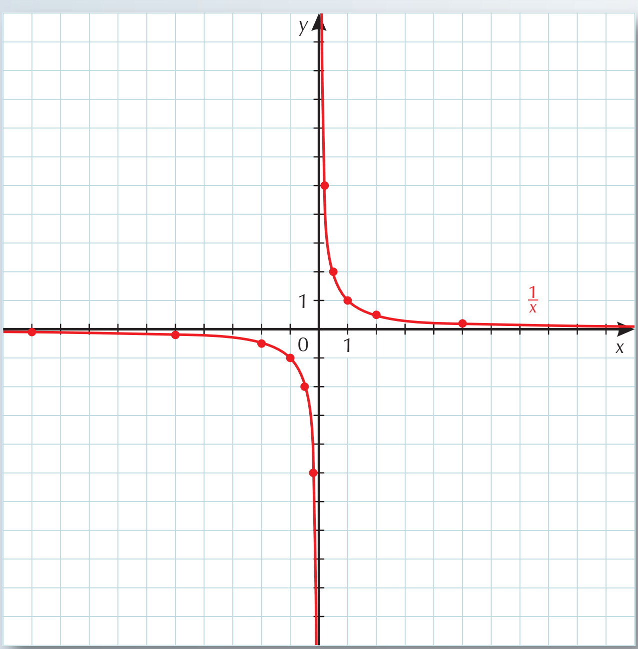
Megoldás

Egy szám akkor reciproka a másiknak, ha a szorzatuk 1. Tehát ha egy tetszőleges x szám reciproka y, akkor $x \cdot y = 1$. Mivel $x \neq 0$, ezért oszthatunk vele.

Így kapjuk, hogy $y = \frac{1}{x}$. Ezek után megadhatjuk a megfelelő függvényt: $f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Táblázatot készítünk:

x	-10	-5	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	2	5
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-5	5	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$



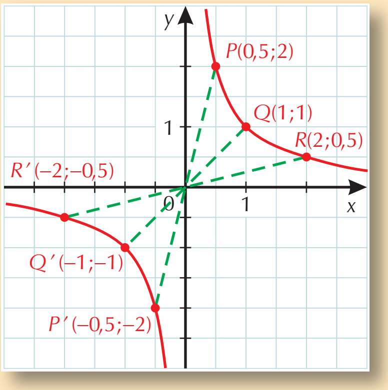
Ha megnézzük a grafikon pontjait, láthatjuk, hogy azoknak a tengelyektől vett előjeles távolságai x és $f(x)$. Mivel ezek szorzata $x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1 =$ állandó, ez azt jelenti, hogy a grafikon pontjai egy hiperbolán helyezkednek el. A két koordinátatengely alkotja az aszimptotákat. Az x értékeit növelve a függvényértékek egyre csökkennek, vagyis a grafikon pontjai egyre közelebb kerülnek az x tengelyhez ($x > 0$ esetén), de soha nem érik el azt.

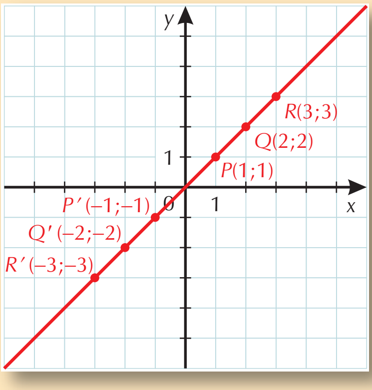
* A hiperbola általános definíciójával most nem foglalkozunk.

Ugyanígy láthatjuk, ha x értékei egyre kisebb pozitív számok, a függvényértékek egyre nagyobbak lesznek, a pontok egyre közelebb kerülnek az y tengelyhez. Lényegében ezért nevezzük a tengelyeket a hiperbola aszimptotáinak. Az első síknegyedben lévő hiperbolaágat az origóra tükrözve kapjuk a másik ágat. Ez egy nagyon fontos tulajdonság, hiszen ha a pozitív x-ekre sikerül ábrázolni a függvényt, akkor már csak egy középpontos tükrözés van hátra, hogy megkapjuk a teljes grafikont.

Definíció

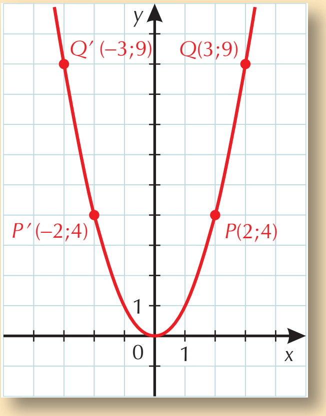
Egy f **függvény páratlan,** ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és minden $x \in D_f$ esetén $f(-x) = -f(x)$ (vagyis az értelmezési tartomány, és a függvény grafikonja is tükrös az origóra). Páratlan függvény az $f(x) = x$ is.

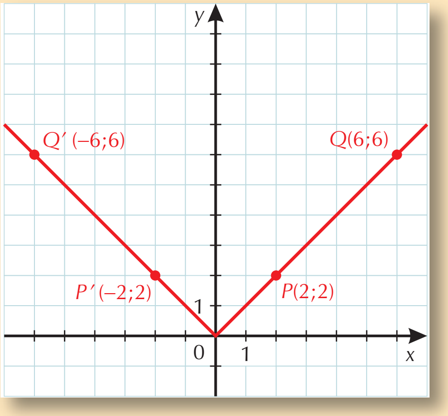




Definíció

Egy f **függvény páros,** ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és minden $x \in D_f$ esetén $f(-x) = f(x)$ (vagyis az értelmezési tartomány, és a függvény grafikonja is tükrös az y tengelyre). Az $f(x) = x^2$ és a $h(x) = |x|$ páros függvények.





A legtöbb függvény se nem páros, se nem páratlan.

2. példa

Budapest és Győr távolsága autópályán 120 km. Ha gyalog szeretnénk megtenni ezt az utat, kb. $5\,\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességet feltételezve $\frac{120}{5} = 24$ órára lenne szükségünk. Pihenők beiktatása nélkül erre igen kevés ember lenne képes. Egy Forma–1-es autóval $240\,\frac{\text{km}}{\text{óra}}$-s tempóban akár fél óra alatt is odaérhetnénk, ha ezt a közlekedési szabályok megengednék. Írjuk fel azt a függvényt, ami megadja az út megtételéhez szükséges időt a sebesség ismeretében! Feltételezhetjük, hogy a sebességek az előbb említett két érték között mozognak. Ábrázoljuk ezt a függvényt!

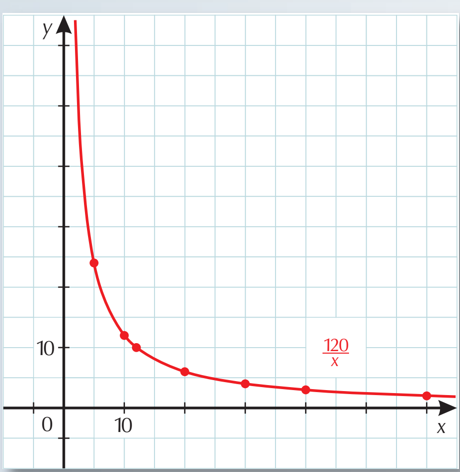
Megoldás

Feltételezzük, hogy az út folyamán végig egyenletes tempóban haladunk. Ebben az esetben a fizikából jól ismert $t = \frac{s}{v}$ képlettel számolhatunk. Tehát

$$f\colon [5;\, 240] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{120}{x}.$$

Készítsünk táblázatot!

x	5	10	15	20	30	40	60	80	100	120	140	160	180	240
$\frac{120}{x}$	24	12	8	6	4	3	2	1,5	1,2	1	≈0,86	0,75	≈0,67	0,5



A táblázat tanulmányozása után megállapíthatjuk, hogy az értékkészlet a [0,5; 24] zárt intervallum lesz. Tehát az út megtételéhez szükséges idő fél óra és huszonnégy óra között mozog. A grafikonunk egy hiperbola részlete. Feladatunkban a sebesség és az idő fordítottan arányos mennyiségek, mert a szorzatuk állandó.

3. példa

a) Ábrázoljuk azt az *f* függvényt, ami a 2 kivételével minden számhoz hozzárendeli a nála 2-vel kisebb szám reciprokát!

b) Legyen $g(x) = f(x) + 5$. Ábrázoljuk a *g* függvényt!

Megoldás

A függvények hozzárendelési szabálya:

a) $f\colon \mathbf{R}\setminus\{2\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x-2}$;

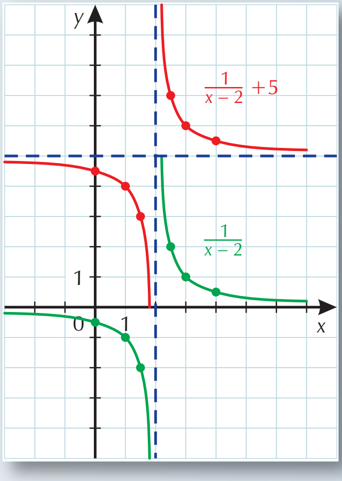
b) $g\colon \mathbf{R}\setminus\{2\} \to \mathbf{R},\ g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 5$.

A 2 nem tartozik az értelmezési tartományhoz, mert ha *x* helyébe 2-t helyettesítenénk, akkor nullával kellene osztanunk. Ez azt jelenti, hogy az $x = 2$-nél húzott függőleges egyenesen nem lehet pontja a grafikonnak. Az ábrázolás előtt ezt az egyenest szaggatott vonallal mindig megrajzoljuk. Könnyen észrevehetjük, ha a kettőhöz közeli számokból vonjuk ki a kettőt, akkor nagyon kis pozitív vagy negatív számot kapunk. A számok reciprokának abszolút értéke viszont nagyon nagy lesz. Ennek figyelembevételével készítjük el a táblázatunkat.

x	–2	–1	0	1	1,5	1,8	1,9	2,1	2,2	2,5	3	4	5	6
$x-2$	–4	–3	–2	–1	–0,5	–0,2	–0,1	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4
$\dfrac{1}{x-2}$	–0,25	$-\dfrac{1}{3}$	–0,5	–1	–2	–5	–10	10	5	2	1	0,5	$\dfrac{1}{3}$	0,25
$\dfrac{1}{x-2}+5$	4,75	$4\dfrac{2}{3}$	4,5	4	3	0	–5	15	10	7	6	5,5	$5\dfrac{1}{3}$	5,25

a) A grafikonon jól látható, hogy a vízszintes aszimptota továbbra is az *x* tengely lesz. Ez azt jelenti, hogy a nulla nem szerepel az értékkészlet elemei között. Az $\dfrac{1}{x-2}$ tört értéke soha nem lesz nulla, hiszen ahhoz a számlálónak kellene nullának lennie. Tehát $\mathbf{R}_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

b) Az *f* grafikonjából úgy kapjuk a *g*-nek megfelelőt, hogy az eltolódik 5 egységgel feljebb. Így a vízszintes aszimptota is feljebb lesz 5 egységgel. Így $\mathbf{R}_g = \mathbf{R}\setminus\{5\}$.



4. példa

Keressük meg a következő függvények képeit a az alábbi grafikonok között!

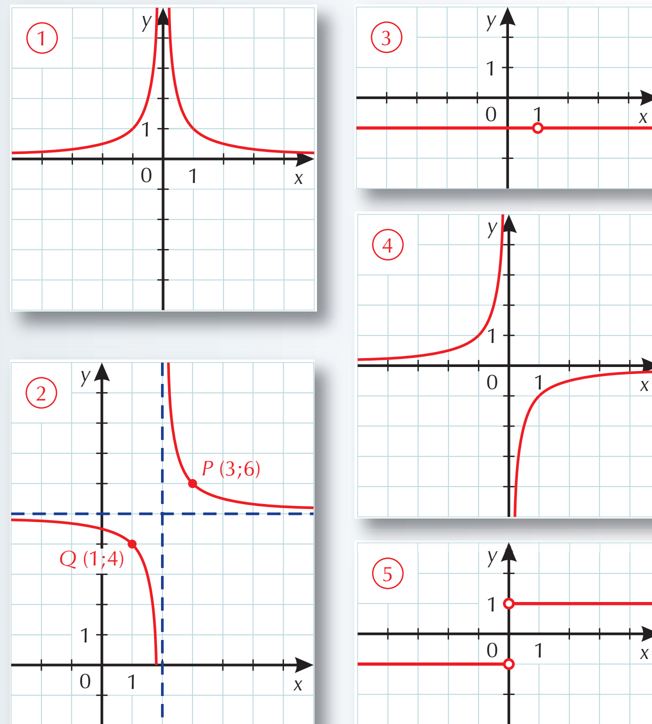
a) $f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{-1}{x}$;

b) $g\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ g(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

c) $h\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ h(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$;

d) $i\colon \mathbf{R}\setminus\{2\} \to \mathbf{R},\ i(x) = \dfrac{5x-9}{x-2}$;

e) $j\colon \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R},\ j(x) = \dfrac{1-x}{x-1}$.



Megoldás

a) Az f képe a 4. grafikon. Ez az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ grafikonjának a tükörképe az x tengelyre nézve.

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1, & \text{ha } x > 0; \\ \dfrac{-x}{x} = -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$ Ez az 5. görbe. A $P(0;\ 1)$ és a $Q(0;\ -1)$ ponton lévő üres karika éppen azt jelenti, hogy a függvény nullánál nincs értelmezve.

c) A függvénynek nem lehetnek negatív értékei. Az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ grafikonjának x tengely alatti részét tükröztük az x-re. Ez az 1. grafikon.

d) A függvénygörbe megegyezik az $x \mapsto \dfrac{1}{x-2} + 5$ függvény képével. Ez a 2. görbe. Rövid algebrai átalakítással igazolhatjuk, hogy a két hozzárendelési szabály megegyezik.

$$\frac{1}{x-2} + 5 = \frac{1}{x-2} + 5\cdot\frac{x-2}{x-2} = \frac{1+5(x-2)}{x-2} = \frac{1+5x-10}{x-2} = \frac{5x-9}{x-2}.$$

e) Itt is szükségünk lesz egy kis átalakításra.

$$\frac{1-x}{x-1} = \frac{-(-1+x)}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1, \text{ ha } x \neq 1. \text{ Ez a 3. grafikon.}$$

Fogalmak
racionális törtfüggvény;
reciprok;
aszimptota;
páros függvény;
páratlan függvény;
hiperbola.

FELADATOK

1. K1 Keressünk fordítottan arányos mennyiségeket! Adjuk meg a nekik megfelelő függvényt a grafikonjával együtt!

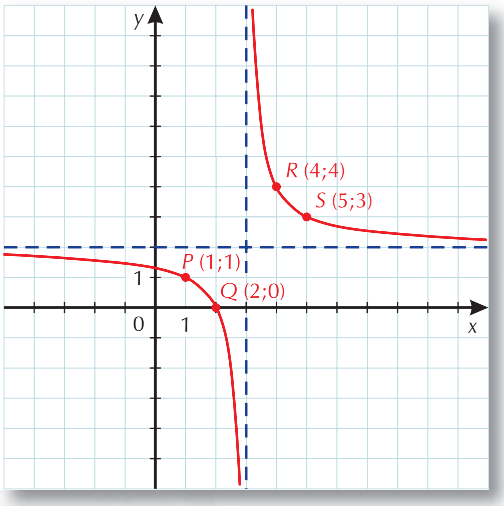
2. K1 Ábrázoljuk a következő függvényeket értéktáblázat segítségével! Ügyesen válasszuk meg *x* értékeit!

a) $f\colon \mathbf{R}\backslash\{-2\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{6}{x+2}$; *b)* $g\colon \mathbf{R}\backslash\{-2\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{6}{x+2} - 3$;

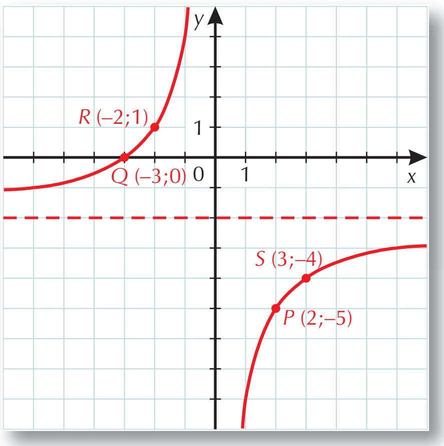
c) $h\colon \mathbf{R}\backslash\{4\} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{4}{x-4} + 4$.

3. K2 Adjuk meg a grafikonjukkal megadott függvények hozzárendelési szabályát!

a)



b)



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **686; 688; 689; 690; 693; 694; 699.**

Nice, Franciaország

AZ EGÉSZRÉSZ-, TÖRTRÉSZ- ÉS AZ ELŐJELFÜGGVÉNY (Olvasmány)

Néhány esetben érdemes a számokat felbontani egy egész és egy törtszám összegére.
Ha azt szeretnénk, hogy ez a felbontás egyértelmű legyen, meg kell állapodnunk a felbontás módjában.

Definíció

Egy szám **egész részén** a hozzá legközelebb eső, nála nem nagyobb egész számot értjük. Jele: $[x]$.

Természetesen az egész számok egész része önmaga. Lássunk pár példát!
a) $[5] = 5$, *b)* $[-3] = -3$, *c)* $[2{,}3] = 2$, *d)* $[3{,}99] = 3$, *e)* $[-1{,}3] = -2$, *f)* $[-6{,}8] = -7$.

Ha már tudjuk egy szám egész részét, akkor könnyen megkaphatjuk a törtrészét is.

Definíció

Egy szám **törtrészét** megkapjuk, ha az eredeti számból kivonjuk az egész részét.
Jele: $\{x\}$. Tehát: $\{x\} = x - [x]$.

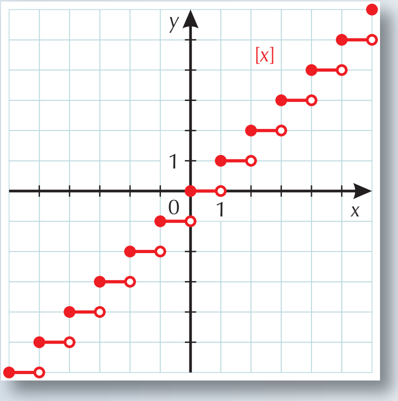
Például: $\{7\} = 0$, $\{0{,}3\} = 0{,}3$, $\{5{,}67\} = 0{,}67$, $\{-3{,}8\} = -3{,}8 - (-4) = -3{,}8 + 4 = 0{,}2$.
Így valóban egy felbontást kaptunk, hiszen
$x = [x] + \{x\}$, vagyis minden szám egyenlő egész és törtrészének összegével.

1. példa

Ábrázoljuk az

$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Z},\ x \mapsto [x]$ függvényt!

Megoldás

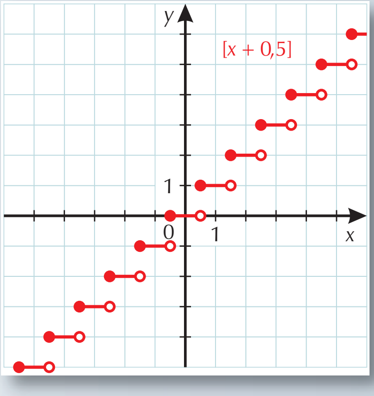


Mivel két egész szám között a függvény értéke nem változik, ezért itt egy vízszintes szakasz lesz a képe. A szakasz bal oldali végpontját teli karikával, a jobb oldalit pedig üressel jelöljük, mert a bal oldali végpont hozzátartozik a grafikonhoz, a jobb oldali pedig nem. Az ilyen függvényt lépcsős függvénynek is szokás nevezni a grafikonja alapján. Az értékkészlet az egész számok halmaza lesz.

2. példa

A gyakorlatban használt egészre kerekítési szabály szerint öt tizedtől már felfelé kerekítünk.

Adjunk meg olyan függvényt, ami minden pozitív számhoz a valódi egészre kerekített értékét rendeli!



Megoldás

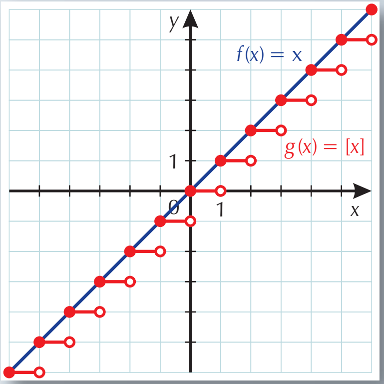
Ha a kerekítendő számhoz hozzáadunk 0,5-et, akkor már csak az egész részét kell vennünk.

Tehát az $f(x) = [x + 0,5]$ éppen jó lesz.

3. példa

Ábrázoljuk az

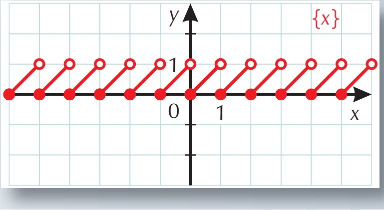
$\mathbf{R} \to [0;\ 1[,\ x \mapsto \{x\}$ függvényt!



Megoldás

$\{x\} = x - [x]$. Rajzoljuk meg az $f(x) = x$ és a $g(x) = [x]$ függvényeket ugyanabba a koordináta-rendszerbe!

Látható, hogy f és g értékei az egész számoknál megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy a kettő különbsége ezeken a helyeken nulla lesz. Máshol az f mindig a g fölött van. Tehát az $\{x\} = f(x) - g(x)$ itt pozitív lesz. Megfigyelhetjük, hogy a $[0;\ 1[$ intervallumon $\{x\} = x$.



A függvénygörbe lényegében a $[0;\ 1[$ intervallumon megrajzolt rész periodikus ismételgetésével előállítható. Az ilyen függvényeket periodikus függvényeknek nevezzük.

Periodikus függvény: Ha létezik olyan $k > 0$ szám, hogy minden $x \in D_f$ esetén $(x + k) \in D_f$ és $f(x + k) = f(x)$. A legkisebb k pozitív számot, amire a fenti állítás igaz, a függvény **periódusának** nevezzük.

A $\{x\}$ periódusa nyilván 1, mert $\{x + 1\} = \{x\}$.

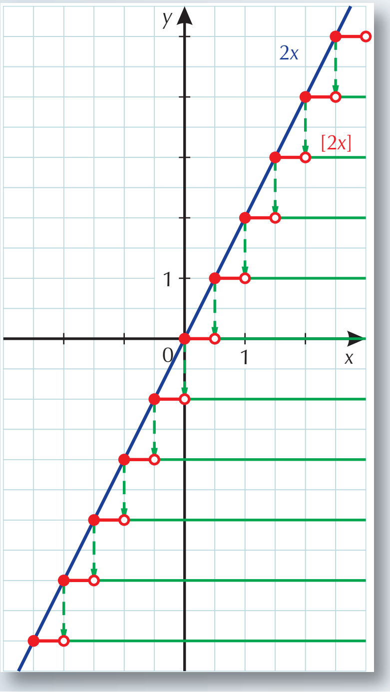
4. példa

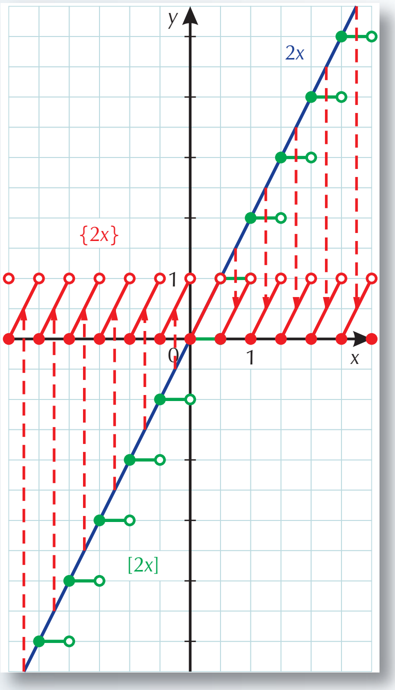
Ábrázoljuk az $f(x) = [2x]$ és a $g(x) = \{2x\}$ függvényeket!

Megoldás

Először az f-et ábrázoljuk. Rajzoljuk meg a $2x$ függvényt, majd húzzunk párhuzamosokat az x tengellyel az y egész pontjain keresztül! Minden két ilyen vonal közti részt merőlegesen az alsóra vetítve kapjuk a függvény egész részét. Ezzel a módszerrel tetszőleges függvény egész részét ábrázolni tudjuk.

Innentől kezdve már könnyű dolgunk van a törtrész ábrázolásával. Mivel $\{2x\} = 2x - [2x]$, ezért csak a két grafikon közti részt kell eltolnunk az y tengellyel párhuzamosan az x tengely fölötti sávba.

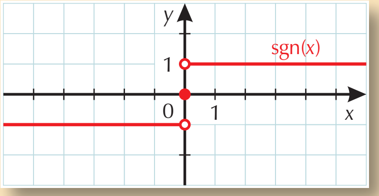




Ismerkedjünk meg egy roppant egyszerű, de nagyon hasznos függvénnyel!

Az **előjelfüggvény** vagy **szignum (*x*)**, jele „sgn (x)". A pozitív számokhoz 1-et, a negatív számokhoz –1-et és a nullához 0-t rendel.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0; \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



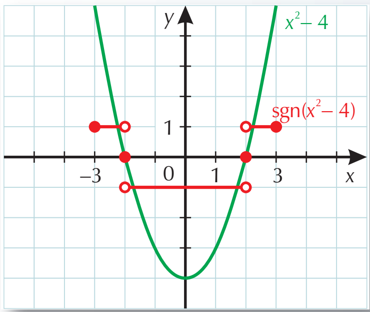
Természetesen tetszőleges függvény előjelét ábrázolhatjuk.

5. példa

Ábrázoljuk a következő függvényt!

$f\colon [-3; 3] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \operatorname{sgn}(x^2 - 4).$

Megoldás



A $]-3; -2[$ és a $]2; 3]$ intervallumon a belső függvény értékei pozitívak, tehát az előjelfüggvény +1-et vesz fel. A $]-2; 2[$-ben pedig $x^2 - 4$ negatív, tehát a szignumfüggvény értéke –1. A 2-nél és –2-nél a függvényérték 0 lesz.

Fogalmak
egész rész;
törtrész;
előjelfüggvény;
periodikus függvény.

FELADATOK

1. (Nem érettségi tananyag.) Adjuk meg azt a függvényt, ami a számokat tízesekre kerekíti!

2. (Nem érettségi tananyag.) Ábrázoljuk a következő függvényeket!

a) $f\colon [-4; 4] \to \mathbf{R},\ x \mapsto 2 \cdot [x]$;

b) $g\colon [-4; 4] \to \mathbf{R},\ x \mapsto 2 \cdot \{x\}$;

c) $h\colon [-3; 3] \to \mathbf{R},\ x \mapsto [x^2]$;

d) $i\colon [-3; 3] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \{x^2\}$;

e) $j\colon]-4; 4] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \operatorname{sgn}(x+1)$;

f) $k\colon [-5; 5] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **701; 703; 706; 709.**

Pályakép

Név: Edit
Lakhely: Budapest
Végzettség: közgazdász
Jelenlegi beosztás: menedzser
Milyen tantárgyakból felvételizett, tanult emelt szinten? Matematika.

Sziasztok!

Edit vagyok, és öt éve egy bankban dolgozom. Mindig is szerettem a matekot, egy olyan játéknak láttam, amiben miután megtanították az alapvető szabályokat, mindig új és új feladatokkal és problémákkal játszottam.

Az egyetemen arra is rájöttem, hogy az a matek, amit a gimiben elsajátítottam, az egyik legfontosabb eszköz ahhoz, hogy az egyetemen meg tudjak tanulni mindent, amitől jó közgazdász leszek. A munkámban fontos, hogy az ember ne ijedjen meg a számoktól, értse az összefüggéseket.

A matek a tiszta, követhető logikára nevel. Ez egy nagyon fontos közös nyelv és gondolati keret, aminek segítségével gyorsan megértem, mire gondol a másik, miért gondolja úgy, és meg tudom magyarázni, én miért értek egyet vele vagy miért nem. Ha egy bonyolult, ijesztő új feladattal találkozom, perceken belül elemeire tudom bontani. Egyesével a komplex probléma is átláthatóvá, megfoghatóvá és megoldhatóvá válik.

V. STATISZTIKA

A mindennapokban gyakran teszünk ilyen kijelentéseket:

„…ez a fiú kosaras termet” – azaz nagyon magas. Mihez viszonyítva?

„…a magyarok kevés halat esznek”. Kikhez képest? Vagy milyen ételhez képest?

„…az USA-ban több a számítógép, mint Mongóliában”. Mondhatnánk, hogy persze, hiszen sokkal többen élnek az Egyesült Államokban, de erről van-e szó?

Ezek, és még sok hasonló kijelentés a **statisztika** tárgykörébe vezet minket.

A statisztika emberek, tárgyak csoportjait vizsgálja adatok összegyűjtésével. Soha nem az egyes ember vagy tárgy az érdekes statisztikai szempontból, hanem a csoportra jellemző vonásokat keresi, akarja bemutatni.

Módszere az adatgyűjtés, az adatok rendszerezése, rendezése.

45–46. ADATOK ÉS ÁBRÁZOLÁSUK. A STATISZTIKA TÁRGYA ÉS FELADATA

Vajon mi történik a népszámlálások sok millió adatával? Ömlesztve használhatatlanok, rendet kell tenni bennük. Csoportosítani kell, áttekinthetővé tenni. Ennek egy lehetősége, hogy az adatokat táblázatokba foglalják, a táblázatokból grafikonokat, **diagramokat** készítenek.

1. példa

Nézzünk néhány példát arra, hogy mit lehet kiolvasni egy táblázatból, és milyen grafikont célszerű használni a különböző adathalmazok ábrázolására. (Az adatok a www.ksh.hu weblapról származnak.) A tanulói létszám és a pedagógusszám a gimnáziumokra vonatkozik.

Tanév	Nappali oktatásban tanulók száma	Pedagógusok száma
2014/2015	182 228	17 884
2015/2016	180 966	17 937
2016/2017	181 782	18 260
2017/2018	184 525	18 259
2018/2019	187 599	18 564

Az első táblázatból látszik, hogy a nappali tagozatos gimnáziumi tanulók száma nagyjából változatlan, a gimnáziumi tanárok száma enyhén emelkedett, ezért az egy pedagógusra jutó tanulók száma a vizsgált időszak utolsó öt évében gyakorlatilag állandó, 10,1 körüli érték.

Tanév	Egy pedagógusra jutó tanulók száma a gimnáziumokban
2014/2015	10,2
2015/2016	10,1
2016/2017	10,0
2017/2018	10,1
2018/2019	10,1

Oszlopdiagram

2. példa

Év	Közúti balesetek száma
2012	15 174
2013	15 691
2014	15 847
2015	16 331
2016	16 627
2017	16 489
2018	16 951

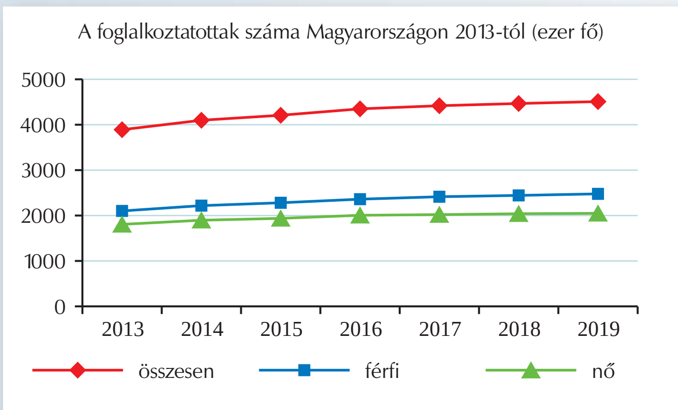
Ezt a diagramtípust **oszlopdiagramnak** nevezzük.

Vonaldiagram

Több adatsor közös diagramon való ábrázolása jól szemlélteti egymáshoz való viszonyukat is.

3. példa

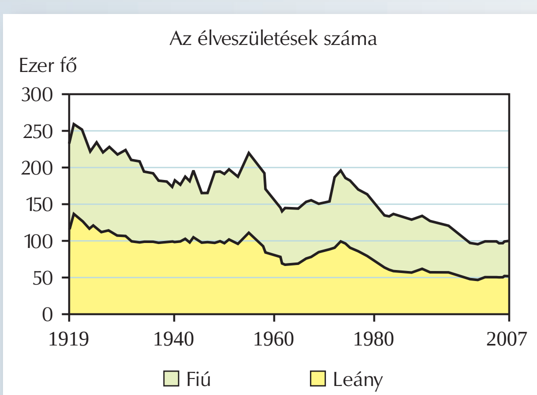
A foglalkoztatottak száma Magyarországon 2013-tól (ezer fő)							
Év	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Összesen	3893	4101	4211	4352	4421	4470	4512
Ebből:							
férfi	2104	2221	2284	2363	2417	2446	2480
nő	1789	1880	1927	1989	2004	2023	2032

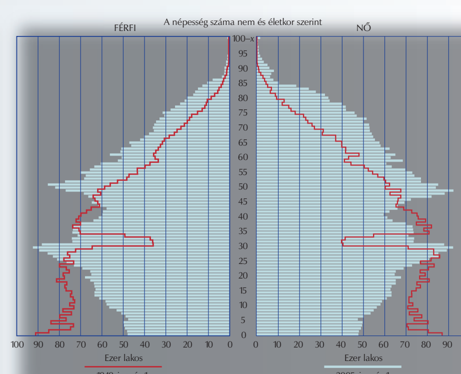


Most **vonaldiagramot** rajzolunk.

4. példa

Gyakran csak a diagramot adják meg, az adatokat mi olvassuk ki a grafikonokból. Például az 1952–1955 környékén levő csúcspont a Ratkó-korszak „asszonynak szülni kötelesség, lánynak szülni dicsőség" abortuszt tiltó rendszerére utal, míg az 1975 táján lévő csúcs a gyermekgondozási segély bevezetése nyomán megnőtt gyermekvállalási kedvet tükrözi. Látható azonban, hogy 1980 óta egyre kevesebb gyerek születik. Magyarország interaktív **korfáját** a https://www.ksh.hu/interaktiv/korfak/orszag.html linken találod meg.





Kördiagram

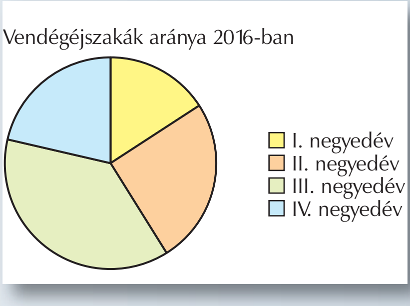
Ha például az adatok egymáshoz viszonyított arányára vagyunk kíváncsiak, jól használható a **kördiagram**. Ekkor a kör kerületét (területét) a megfelelő adatok arányában osztjuk fel. Egy adathoz tartozó körcikk szöge úgy aránylik a 360°-hoz, mint az adat az adatok összegéhez.

5. példa

A külföldiek által eltöltött vendégéjszakák száma a kereskedelmi szálláshelyeken (ezer fő)				
Év	I. negyedév	I. félév	I–III. negyedév	I–IV. negyedév
2016	2178	5670	10 834	13 802
2017	2413	6420	11 831	14 942

Itt még először meg kell határoznunk, hány vendégéjszakát töltöttek a külföldiek az egyes negyedévekben a kereskedelmi szálláshelyeken.

Év	I. negyedév	II. negyedév	III. negyedév	IV. negyedév
2016	2178	3492	5164	2968



Most már ábrázolhatjuk az adatokat.

Láthatjuk, hogy a harmadik negyedévben, július 1. és szeptember 30. között több éjszakát töltenek itt, mint október 1. és március 31. között. Többek közt ezért találták ki a Budapesti Tavaszi Fesztivált és a Budapesti Őszi Fesztivált az idegenforgalmi szakemberek.

Érdemes kipróbálni a gondolatsor követését 2017-es adatokkal is!

Fogalmak
oszlopdiagram;
kördiagram;
korfa;
vonaldiagram.

FELADATOK

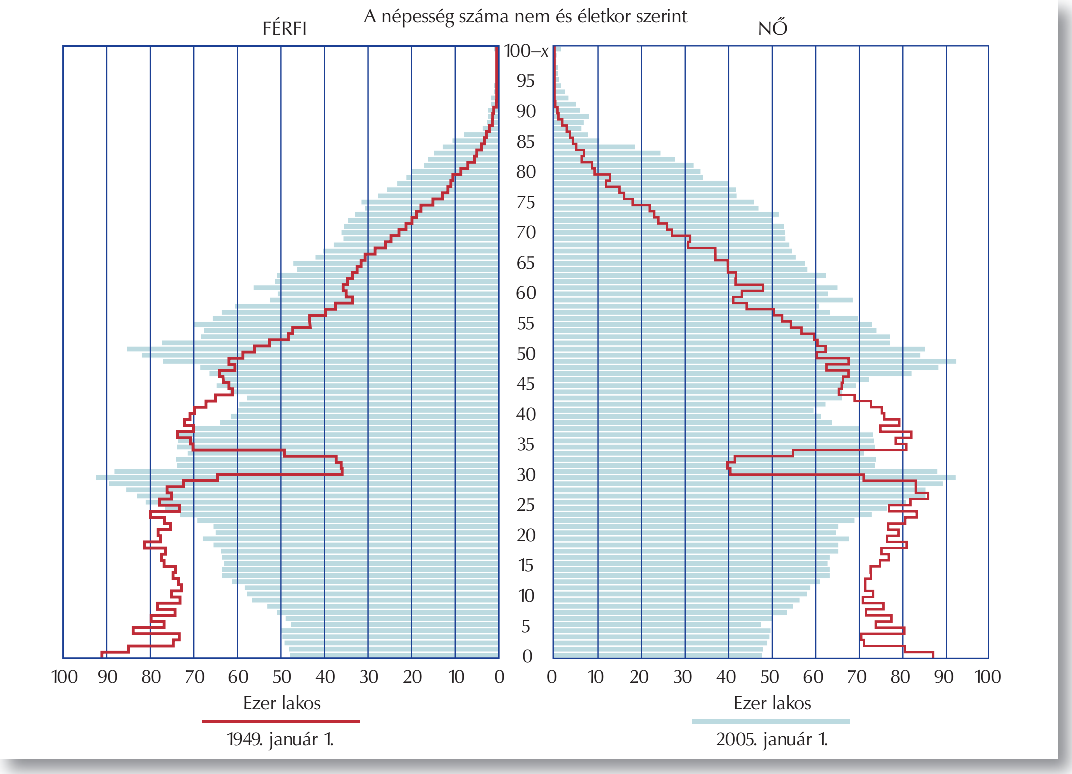
1. K1 Gyűjtsük össze az osztályba járó lányok magasságának adatait! Ábrázoljuk oszlopdiagramon!

2. K1 Keressünk hibás (csalfa, tendenciózus) diagramokat a sajtóban!

3. K1 Ábrázoljuk közös vonaldiagramon a látogatók számát! (Forrás: KSH.)

Év	1000 lakosra jutó látogatások száma		
	Mozi	Színház	Hangverseny
2014	1048	655	158
2015	1272	685	193
2016	1456	726	202
2017	1496	856	243
2018	1585	873	272

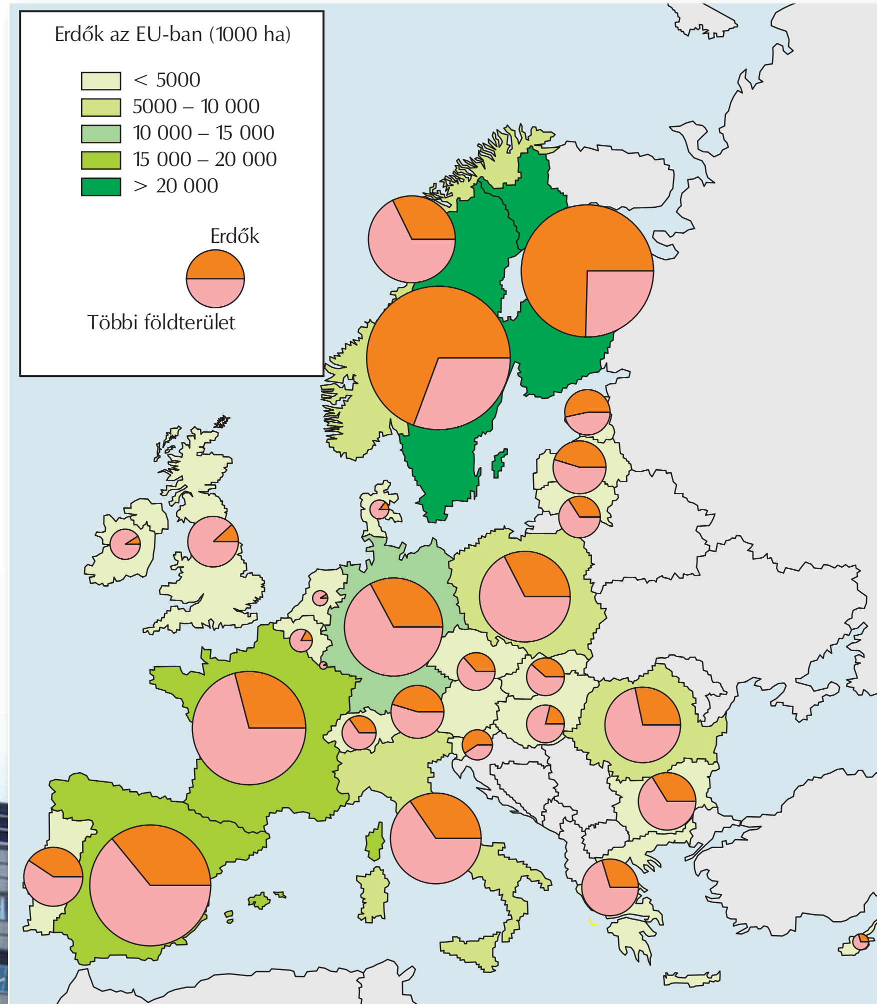
4. K1 Mit olvashatunk le a 2005-ös korfáról, összehasonlítva az 1949-essel? (Forrás: KSH.) Mi okozza a beugrást a 28–33 éveseknél az 1949-es korfán? Hol tart ez a beugrás 2005-ben? Mikor születtek a 2005-ös korfa maximális férfi- és női értékeihez tartozók?



5. K1 Ábrázoljuk a középhőmérsékleteket vonaldiagramon! (Forrás: OMSZ.) A lehullott csapadék összmennyiségének hány százaléka esett az egyes hónapokban? Ábrázoljuk kördiagramon!

A siófoki megfigyelőállomás időjárási adatai				
Időszak	közép-	maximális	minimális	lehullott csapadék, mm
	hőmérséklet, °C			
2019. J	0,5	11,8	–6,5	14
F	3,7	17,0	–5,2	5
M	9,1	21,5	–0,5	7
Á	13,1	27,6	3,8	10
Mj	13,9	24,3	3,8	19
Jú	23,8	33,8	15,2	6
Jl	23,7	35,5	14,5	12
Au	23,8	32,7	13,6	9
Sz	18,4	31,2	6,0	8
O	13,2	25,3	2,8	8
N	9,1	21,8	0,7	20
D	4,3	18,0	–4,5	10
J–D	13,1	35,5	–6,5	128

6. K2 Ez a térkép és a kördiagramok az Európai Unió országainak erdős területeiről készült adatokat mutatják. Értelmezzük! (*Forrás:* eustat.com)
Hol a legnagyobb az erdők aránya (narancssárga) a többi földterülethez (lila) képest?
A térkép színezése szerint milyen határok közt van az erdős terület nagysága Spanyolországban, Romániában és Portugáliában?



Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **1441–1490.**

Az Európai Parlament épülete Brüsszelben, Belgiumban

47–48. KÖZÉPÉRTÉKEK

1. példa

Az iskolai menzán megígérték, hogy gyereknapon a tanulók kedvenc menüjét főzik. Ehhez kérdőíveket adtak ki, amire be lehetett írni, ki mit szeretne enni majd a nevezetes napon. Rengeteg ötlet érkezett. Vajon hogy döntöttek? Megnézték, melyik leves, főétel, desszert kapta a legtöbb szavazatot, és azt főzték. Statisztikai szempontból megkeresték a leggyakoribb adatot a három mintában. Láthatjuk, hogy ez akkor is értelmezhető, ha az adatok nem számok.

Végül paradicsomleves, rántott hús és palacsinta volt az ebéd.

Bármely mintában megkereshetjük a **leggyakoribb adatot**, ezt a statisztikai minta **móduszának** nevezzük. Ha a mintában kétféle leggyakoribb elem van, akkor azt mondjuk, hogy két módusz van. Ha kettőnél több azonos elemszámú leggyakoribb elem van, akkor a mintának nem igazán jellemző adata a módusz.

2. példa

Egy futóversenyen 60 méteres futásban az *a* és a *b* osztály tanulói a következő eredményeket érték el (sec):

Melyik osztály ért el jobb eredményt?

Az *a* osztály tanulói (sec)		A *b* osztály tanulói (sec)	
9,62	9,21	9,54	9,54
9,21	9,59	10,21	9,86
10,51	9,62	10,88	10,15
10,29	10,18	9,86	10,21
9,59	10,29	10,21	10,21
11,64	10,29	11,08	10,26
10,47	10,31	10,82	10,48
10,29	10,37	10,89	10,78
11,14	10,47	10,26	10,80
10,31	10,51	10,90	10,82
10,18	10,76	10,15	10,88
12,53	11,14	10,78	10,89
10,37	11,48	11,12	10,90
11,48	11,64	12,90	10,96
11,77	11,65	11,10	11,08
14,14	11,77	13,80	11,10
11,65	12,53	12,29	11,12
13,11	13,11	10,48	11,55
10,76	14,14	11,55	11,86
		11,86	12,29
		10,80	12,90
		10,96	13,80

Megoldás

Erre a kérdésre nem egyértelmű a válasz. Nézhetjük a leggyorsabbakat az osztályokban, de ez nem jellemzi az egész osztály teljesítményét, ahogy nem jellemzi az sem, melyik osztályban van a leglassabb futó. Az egész osztályt a középső eredmények összehasonlítása inkább jellemezné. Ehhez **rendezni kell** az adatokat. Ezt mutatja mindkét osztálynál a jobb oldali oszlop. Az *a* osztálynál van középső elem, a tizedik a 19 eredmény közül, ennek értéke 10,51 sec, a *b* osztálynál „két középső” van, mivel itt 22-en futottak. Vegyük középsőnek ennek a két eredménynek a számtani közepét. Ennek értéke 10,885 sec, ebből a szempontból tehát az *a* osztály volt a jobb.

Fontos, hogy ez csak rendezett, számokból álló mintából határozható meg.

Egy rendezett minta középső elemét – páros elemszámú minta esetén a két középső elem számtani közepét – a minta **mediánjának** hívjuk.

Meghatározása nagyon egyszerű, és ha nincsenek nagyon kiugró értékek, jól közelíti az átlagot. Bizonyítható, hogy a medián olyan érték, amelynek a minta összes elemétől vett eltéréseinek összege (a különbségek abszolút értékeinek az összege) a legkisebb. Páros elemszámú mintában nem feltétlenül a medián az egyetlen minimumhely. Ha a medián nem mintaelem, akkor a minimumhelyek a mediánt közvetlenül közrefogó mintaelemek által meghatározott zárt intervallum pontjai.

Azt is megtehetjük, hogy kiszámítjuk az osztályokba járó tanulók átlagteljesítményét. Ezt úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk az összes gyerek idejét, és elosztjuk a gyerekek számával.

Az a osztálynál ez

$$\overline{X} = \frac{9,62 + 9,21 + 10,51 + 10,29 + 9,59 + 11,64 + 10,47 + 10,29 + 11,14 + 10,31}{19} +$$

$$+ \frac{10,18 + 12,53 + 10,37 + 11,48 + 11,77 + 14,14 + 11,65 + 13,11 + 10,76}{19}.$$

$\overline{X} = 11,0$ sec adódik.

Kiszámíthatjuk a másik osztály átlageredményét is, és meglepetésünkre, arra is $\overline{Y} = 11,0$ sec jön ki. A két osztály tehát eszerint egyformán jól futott (egy tizedesjegyre kerekítve).

Ha egy statisztikai minta elemei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok, akkor az adatok **átlaga** (számtani közepe) az adatok összegének és az elemek számának a hányadosa. Képletben:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

3. példa

A testnevelésórán kislabdadobásból felmérést végeznek. Mindenki hatszor dob a labdával. A felmérés eredményeként a hat dobás hosszának átlagát jegyzik fel. János első öt dobásának átlaga 52 m. A hatodik dobása olyan jól sikerült, hogy az átlagát egy méterrel javította. Hány métert dobott utolsóra János?

Megoldás

Az adatok átlagának és az adatok számának szorzataként könnyen kiszámíthatjuk az adatok összegét.
Az első öt dobás hosszának az összege $52 \cdot 5 = 260$.
Jelöljük a hatodik dobás hosszát méterben számolva x-szel.

Így a hat dobás átlagára egyfelől $\frac{260 + x}{6}$, másfelől tudjuk, hogy ez 1-gyel nagyobb mint 52, így felírható az egyenlet: $53 = \frac{260 + x}{6} \quad /\cdot 6$

$318 = 260 + x \quad /-260$

$x = 58.$ Tehát 58 métert dobott utolsóra János.

Megjegyzés:

Ha hatodikra 52 métert dobott volna, akkor ugyanannyi maradt volna az átlag, így ha a hat dobás átlaga 1 méterrel több, akkor a korábbi átlagnál 6 m-rel kellett többet dobni.

4. példa

Egy kilencedikes diáknak matematikából ebben az évben nyolc darab jegye van. Tudjuk még, hogy a jegyek átlaga 3,25, a módusza pedig 4. Azt is tudjuk, hogy nem kapott elégtelent.

a) Milyen jegyei vannak ennek a diáknak matematikából ebben az évben?
b) Mennyi a jegyek mediánja?
c) Ábrázoljuk a jegyeket kördiagram segítségével!

Megoldás

a) A nyolc jegy összege $8 \cdot 3{,}25 = 26$. Ha a 4-es az egyedüli módusza a jegyeknek, akkor abból legalább három van (ha két 4-ese lenne, akkor maximum $2 + 3 \cdot 1 = 5$ jegye lehetne).

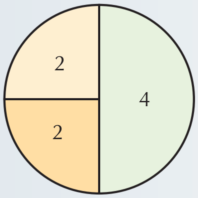
Ha három 4-ese van, akkor legfeljebb kettő darab lehet a 2-esből és a 3-asból is. Ha két 2-ese és két 3-asa van, akkor a hét jegy összege 22. Így viszont már csak egy újabb 4-es lehet a nyolcadik jegy. Tehát ebben az esetben a kapott jegyek: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

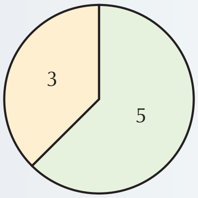
Ha az egyik hármas helyett kettest írunk, a másik helyett pedig négyest, akkor kapjuk a második lehetséges megoldást: 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4.

b) Mivel a megoldásokat eleve nem csökkenő sorrendben írtuk fel, ezért könnyű meghatározni az adatok mediánját. Az első esetben a medián $(3 + 4) : 2 = 3{,}5$, a másodikban pedig 4.

c) Az első esetben a nyolc adat $2 : 2 : 4$ arányban oszlik el a három érdemjegy között, ezért a teljes szögnek megfelelő 360 fokot fel kell osztani ilyen arányban. A ketteseknek megfelelő körcikk középponti szöge $\frac{360^\circ}{8} \cdot 2 = 90^\circ$, ugyanígy kapjuk a hármasoknak és a négyeseknek megfelelő körcikkek középponti szögeit is. Sorban: 90°, 90°,180°.

A második esetben $3 : 5$ arányban kell felosztani a 180°-ot. Az imént látott megoldás alapján a ketteseskhez tartozó középponti szög 135°, a négyeseké 225°.





5. példa

A 9. a osztályba 35 diák jár. A fiúk átlagmagassága 180 cm, a lányoké pedig 170 cm. Az osztály átlagmagassága 174 cm. Hány fiú és hány lány jár az osztályba?

Megoldás

Ha a lányok számát x-nek vesszük, akkor a fiúk száma $(35 - x)$. Ezután a diákok magasságának az összegét kétféle módon is felírhatjuk, és ezek egyenlőségéből alkothatunk egy egyenletet.

$$170 \cdot x + 180 \cdot (35 - x) = 174 \cdot 35$$
$$170 \cdot x + 6300 - 180 \cdot x = 6090$$
$$-10 \cdot x + 6300 = 6090 \qquad /-6300$$
$$-10 \cdot x = -210 \qquad /:(-10)$$
$$x = 21$$

Tehát 21 lány és 14 fiú jár az osztályba. A válasz helyességét a szövegbe behelyettesítve könnyen ellenőrizhetjük.

6. példa

Kati jegyei kémiából az év során a következők voltak: 5; 4; 5; 1; 5; 4; 3; 5; 3; 4.
Mennyi a jegyei átlaga?

Megoldás

Egyszerűbb kiszámítani az átlagot , ha előbb csoportosítjuk a jegyeket, azaz volt négy 5-öse, három 4-ese, két 3-asa és egy 1-ese. Ezt táblázatba is foglalhatjuk:

x_i	5	4	3	2	1
f_i	4	3	2	0	1

A felső sor tehát a minta lehetséges értékeit tartalmazza, az alsó sorban azt láthatjuk, hogy az egyes értékek hányszor fordultak elő a mintában. Ezt a minta **gyakorisági eloszlásának** nevezzük.

Az átlag tehát:

$$\overline{X} = \frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{10} = 3{,}9.$$

Az átlagot tehát úgy kaptuk meg, hogy a lehetséges értékeket megszoroztuk a gyakoriságukkal, ezeket összegeztük, és az összeget elosztottuk a minta elemeinek számával. Ezt nevezzük **súlyozott számtani középnek**.

A súlyozott számtani közép különösen fontos, ha adathalmazok egyesítésének átlagát kell meghatározni a két vagy több rész átlagából, és a részek elemszámát ismerjük.

7. példa

A kilencedik évfolyamon az *a* osztály matematikajegyeinek átlaga 3,82; a *b* osztályé 4,05, míg a *c*-é 3,90 volt. Mennyi a kilencedik évfolyamon a matematikaátlag, ha az egyes osztályokba rendre 35; 28; 31 tanuló jár?

Fogalmak
gyakorisági eloszlás;
módusz;
medián;
átlag;
számtani közép;
súlyozott számtani közép.

Megoldás

Itt az osztályátlagok annyi tanulóhoz tartoznak, ahányan az adott osztályba járnak. Az évfolyamon 35 + 28 + 31 = 94 diák tanul. Tehát az évfolyam átlaga matematikából:

$$\overline{X} = \frac{35 \cdot 3,82 + 28 \cdot 4,05 + 31 \cdot 3,90}{35 + 28 + 31} = \frac{368}{94} \approx 3,91.$$

Emelt szint

Megjegyzés

A súlyozott számtani átlagot az $\overline{X} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \ldots + f_n \cdot x_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$ képlettel számítjuk ki, ahol x_1, x_2, …, x_n a minta lehetséges értékeit, f_1, f_2, …, f_n a lehetséges értékek mintában való előfordulásának gyakoriságát jelentik.

Tudod-e?

A forgalomban lévő zsebszámológépek egy részén – már a középkategóriás gépeken is – megtalálhatók a statisztikai számításokat megkönnyítő billentyűk. Működésük, jelölésük nem egységes; először általában az adatokat kéri a gép, majd ezek tárolása után gombnyomásra kiszámolja az egyes statisztikai jellemzőket (középértékek, regressziószámítás, szórás – ez utóbbi fogalmakkal jövőre találkozunk).

Ugyanígy megtalálhatók a kombinatorikai és valószínűségszámítási billenytűk is, sőt a drágább grafikus kalkulátorok még több funkcióval rendelkeznek: a táblázatok és függvények grafikus megjelenítése mellett egyszerűbb matematikai eljárásokat is végezhetünk velük, és gyakran programozhatók is.

A számítógépeken az Excel táblázatkezelő a legismertebb program a statisztikai számítások alkalmazására.

Ismerd meg a saját géped! Nem is gondolnád, néha mennyi számolási munkát takaríthatsz meg …

FELADATOK

1. K1 Az osztályzatai melyik középértékét érdemes kérnie a jó tanulónak, aki egyszer elfelejtette megcsinálni a feladatát, és kapott egy 1-est? És a rossz tanulónak, akinek pontokból összejött egy 5-öse?

2. K1 Számítsuk ki annak az osztálynak az átlagát matematikából, amelyben 6 db 5-ös, 7 db 4-es, 9 db 3-as, 3 db kettes és egyetlen elégtelen volt!

3. K1 Az évfolyamon kémiából az *a* osztály átlaga 3,65; a *b* osztály átlaga 4,02; a *c* osztály átlaga 3,86, míg a *d* osztály átlaga 3,54 volt. Mennyi az évfolyam átlaga kémiából, ha az egyes osztályokba rendre 28; 25; 32 és 30 gyerek jár?

4. K2 Egy 10 elemű pozitív egészekből álló mintában a medián 19. Ha az utolsó, legnagyobb elem értékét 20-szal megnöveljük, hogy változik a medián értéke? Változhat-e a módusz? Változik-e és mennyivel az átlag?

5. K2 Ha az utolsó tesztemet angolból 89 pontra írom, akkor 82 pont lesz az átlagom, ha csak 57 pontra, akkor az átlagom 78 pont lesz. Hány tesztet eddig az idén?

6. K2 Adjunk meg olyan pozitív természetes számokból álló 10 elemű mintát, amelynek mediánja 2, és egyetlen módusza 4! Mennyi az átlaga?

7. K1 Számítsuk ki az előző lecke feladatsorának 5. feladatában az éves középhőmérsékletet mint a havi középhőmérsékletek átlagát! Vegyük figyelembe, hogy az egyes hónapokban hány nap van! A február legyen 28 napos.

8. E1 Egy diáknak 7 jegye van matematikából. Ha még egy ötöst kapna, az átlaga 0,125-del nőne. Hány négyese lehet eddig, ha a két leggyengébb jegyének átlaga 2?

9. E1 Hány fős az az évfolyam, ahol ha az osztályzatom eggyel jobb, mint a többiek átlaga, akkor hozzávéve az én jegyem, az átlag 0,02-dal emelkedik? Mennyi volt az átlag az én jegyem nélkül?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **1495–1501.**

49. AZ ESÉLYTŐL A VALÓSZÍNŰSÉGIG

A felső tagozaton megismerkedtünk az *esély* fogalmával, amivel előkészítettük az egyik legösszetettebb fogalmat a középiskolai tanulmányaink során: a *valószínűség* fogalmát. Most kísérletek elvégzésén és a tapasztalatok megfogalmazásán keresztül alapozzuk meg a pontosabb definíciót, amit majd a jövő tanévben alkotunk meg.

Olyan eseményekkel fogunk foglalkozni, amelyek bekövetkezését a véletlen határozza meg. Ez nem azt jelenti, hogy ezeknek az eseményeknek nincs oka, hanem azt, hogy annyi körülmény befolyásolja a bekövetkezésüket, hogy lehetetlen az összeset figyelembe venni.

A valószínűségszámítás kibontakozása a szerencsejátékok, vagy ahogyan a középkorban is nevezték, a hazárdjátékok tanulmányozásával kezdődött. Napjainkra nagyon nagy ívű pályát futott be a matematikának ez az ága is. Manapság a fizika, a kémia, a biológia, a társadalomtudományok, a közgazdaságtan nélkülözhetetlen segédeszköze. A közvélemény-kutatások megállapításait nem is tudnánk értelmezni a valószínűségszámítás fogalmainak pontos ismerete nélkül.

Ismerkedjünk a véletlennel!

1. példa

Feldobunk egy szabályos pénzérmét. Mennyi az esélye annak, hogy fejet dobunk, és mennyi az esélye annak, hogy írást dobunk?

Megoldás

Az érme szabályossága azt jelenti, hogy a fej és az írás dobásának esélye ugyanakkora, és dobás után sohasem áll meg az élén. Így 50-50% esélyt adunk mindkét lehetőségnek.

A véletlen természetét jól szemléltető kísérlettel indulunk el a valószínűség fogalmához vezető úton.

Kísérlet

Párban dolgozzatok! Vegyetek elő egy pénzérmét, és dobjátok fel ötvenszer egymás után! Jegyezzétek fel sorban mind az ötven dobás eredményét (fej vagy írás)! Ha készen vagytok, számoljátok össze, hogy hányszor dobtatok fejet az ötven dobásból!

A kísérlet során azt vizsgáljuk, hogy egy pénzérmét sokszor feldobva, a dobások hányadrészében dobunk fejet. Ezt az arányt kifejezzük százalékban is. Így jobban érzékeltethető, hogy miként változik ez az arány a dobások számának növekedésekor.

Készítsetek egy táblázatot, aminek négy sora és eggyel több oszlopa van, mint ahány pár dobálta a pénzérmét.

Az első sorban a dobások száma szerepel. Ezt n-nel jelöljük, ez jelenti az elvégzett kísérletek számát.

A második sorban a dobott fejek száma szerepel, amit k-val jelölünk. Ezt úgy kapjuk, hogy valamilyen sorrendben minden pár bediktálja, hogy mennyi fejet dobott. Ezeket a számokat mindig hozzáadjuk az előzőhöz. (A mi táblázatunk azt mutatja, hogy az első pár 28 fejet dobott, a második pedig 26-ot, így a két pár összesen 54-et.) Ez a szám mutatja tehát, hogy a kísérletünkben a „fej” kimenetel hányszor fordult elő, amit az adott kimenetel gyakoriságának nevezzük.

A harmadik sorban azt számítjuk ki, hogy a dobott fejek száma, azaz a gyakoriság, hogyan aránylik az eddigi összes dobás számához. Ezt r_n-nel jelöljük, és a fejdobások relatív gyakoriságának nevezzük.

A negyedik sor ugyanezt az arányt tartalmazza, csak százalékban kifejezve.

n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	stb.
k	28	54										
$r_n = \frac{k}{n}$	$\frac{28}{50}$	$\frac{54}{100}$										
$r_n(\%)$	56%	54%										

A kapott eredmények szemléltetésére ábrázoljuk ezeket egy koordináta-rendszerben! A vízszintes tengelyen n értékeit, a függőlegesen pedig a hozzájuk tartozó r_n értékeket tüntetjük fel. (Ügyeljetek a tengelyek megfelelő beosztására!) A kapott pontokat össze is köthetjük, ezzel is jobban érzékeltetve r_n változását, ahogyan növekszik n értéke.

Figyeljétek meg, hogy r_n értéke hogyan változik n növekedésekor! Mit lehet megállapítani? Az érdekesség kedvéért rajzoljátok fel újra a táblázatot, és töltsétek ki újra, csak most más sorrendben kerüljön be az egyes pároknál kapott fejek száma a második sorba! Ábrázoljátok egy másik színnel az így kapott r_n értékeket ugyanabban a koordináta-rendszerben! Mit tapasztaltok?

Mi is történt eddig?

Definiáltunk egy véletlen kísérletet: dobjunk fel egy szabályos pénzérmét!

Definíció

Véletlen kísérlet olyan kísérlet, amelynek kimenetele nem határozható meg előre.

Ennek két lehetséges kimenetele van: vagy fejet dobunk, vagy írást. Ezeket elemi eseményeknek nevezzük.

Definíció

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi eseményeknek** nevezzük.

Először azt vizsgáltuk, hogy n kísérlet elvégzésekor egy bizonyos kimenetel (fej) hányszor fordul elő. Ezt nevezzük gyakoriságnak. Ezután azt vizsgáltuk, hogy a kísérletek hányadrészében dobtunk fejet. Ezt nevezzük relatív gyakoriságnak.

Az első példa alapján a fej dobásához tartozó 50% azt jelenti számunkra, hogy ha nagyon sokszor elvégezzük a kísérletet, akkor a kísérletek körülbelül fele részében fogunk fejet dobni.

Vizsgáljuk meg, hogy az általunk elvégzett kísérletsorozat milyen mértékben igazolja az elméleti értéket!

2. példa

Van két különböző, mondjuk egy piros és egy zöld szabályos dobókockánk. (Egy dobókockát akkor tekintünk szabályosnak, ha minden oldalára ugyanolyan eséllyel esik dobás után.) Egyszerre feldobjuk mind a kettőt, és a dobott számokat összeadjuk.

a) Mik a lehetséges összegek? A lehetséges összegek közül melyiknek a legnagyobb az esélye?

b) Annak van nagyobb esélye, hogy ötnél kisebb lesz az összeg, vagy annak, hogy pontosan hét lesz?

Kísérletezzetek párban! Dobjátok fel a két kockát 50-szer, és jegyezzétek fel a dobott számok összegét! Ezután készítsetek egy olyan táblázatot, amiben minden lehetséges összeg esetén kiszámoljátok az adott számhoz tartozó relatív gyakoriságot! Válaszoljátok meg a tapasztalat alapján a fenti kérdéseket!

Most nézzünk néhány elméleti megfontolást!

A két dobókockát figyelve $6 \cdot 6 = 36$-féle kimenetele lehet a kísérletnek. Ezt a 36 elemi eseményt a dobott számok összege szerint csoportosítva a következőket kapjuk (az összegekben az első szám a piros kockával, a második pedig a zöld kockával dobott számot jelenti):

$1 + 1 = 2$

$1 + 2 = 2 + 1 = 3$

$1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4$

$1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 = 5$

$1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1 = 6$

$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 = 7$

$6 + 6 = 12$

$6 + 5 = 5 + 6 = 11$

$6 + 4 = 5 + 5 = 4 + 6 = 10$

$6 + 3 = 5 + 4 = 4 + 5 = 3 + 6 = 9$

$6 + 2 = 5 + 3 = 4 + 4 = 3 + 5 = 2 + 6 = 8$

A dobókockákon megfigyelhetjük, hogy a szemközti lapokon lévő számok összege 7. Tehát, ha a két felső szám összege n, akkor a két alsó szám összege $(14 - n)$ lesz. Ez azt mutatja, hogy az n összeg ugyanannyiféleképpen jöhet ki, mint a $(14 - n)$.

Lehetséges összeg	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hányféle módon jöhet ki	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Az esélyek kifejezése %-ban	2,78	5,56	8,33	11,11	13,89	16,67	13,89	11,11	8,33	5,56	2,78

A második sorban szereplő számokat összeadva megkapjuk az összes elemi esemény számát.

Láthatjuk, hogy a hetes összegnek van a legnagyobb esélye, és ez pontosan megegyezik annak az esélyével, hogy kettő, három vagy négy lesz az összeg.

Ahhoz, hogy a fenti táblázat utolsó sorában szereplő értékeket a gyakorlatban akár csak közelítőleg megkapjuk, nagyon sok kísérlet elvégzésére lenne szükség. Éppen ezért az a legegyszerűbb, ha a számítógépet hívjuk segítségül, például egy táblázatkezelő programot. A két kockát a gép véletlenszám-generátora helyettesítheti. Az első lépésben a gép készítsen két véletlen számot az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból, majd ezeket adja össze. Ezután számítsa ki az egyes összegek relatív gyakoriságát. Ha elég sokszor (akár több ezerszer) végezzük el a kísérletet, akkor jó közelítéssel a fenti táblázatban szereplő százalékos értékeket kapjuk.

Fogalmak
elemi esemény;
véletlen kísérlet.

FELADATOK

1. K1 Dobjatok fel egyszerre két különböző pénzérmét 50-szer, és jegyezzétek fel, hogy mi lett a dobások kimenetele! Számoljátok ki a két fej, a két írás, valamint az egy fej és egy írás dobások relatív gyakoriságát. A kapott eredmények alapján mennyi az esélye annak, hogy a két pénzérme különböző oldalára esik? És mennyi annak az esélye, hogy mindkét dobás fej lesz?

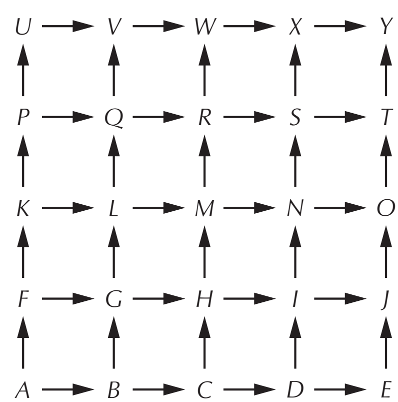
2. K1 Négy szabályos kockát feldobva arra vagyunk kíváncsiak, hogy melyiknek nagyobb az esélye: annak, hogy a négy kockát feldobva a dobások között lesz legalább egy hatos, vagy annak, hogy nem lesz? Táblázatkezelő program segítségével válaszoljatok a kérdésre!

3. K1 Legyen mindenkinek a kezében 3 rajzszög. (Vigyázzatok, hogy ne szúrjátok meg a kezeteket!) Dobjátok fel a rajzszögeket és jegyezzétek fel, hogy hány érkezett a lapjára! (A képen egy rajzszög a lapjára érkezett, kettő nem.) Végezzétek el a kísérletet 50-szer! Dolgozhattok párban is.

a) Hányszor következett be, hogy 0, 1, 2 illetve 3 rajzszög érkezett a lapjára? A többiek eredményeit is figyelembe véve adjátok meg ezeknek az eseményeknek az esélyét a tapasztalat alapján!

b) Az *a)* feladatban kapott esélyek alapján találjatok ki olyan szerencsejátékot, amikor az egyes események bekövetkezéséhez (0, 1, 2 vagy 3 rajzszög érkezik a talpára) valamilyen nyereményt rendeltek hozzá.

4. K1 Padtársaddal játszatok az alábbi táblán. Az *A* pontból induljatok el úgy, hogy egy pénzérmét dobtok fel. Ha a dobás fej, akkor jobbra léptek egyet a rácson (*B* pont), ha írás, akkor felfelé (*F* pont). A következő lépések irányát mindig ezzel a módszerrel döntsétek el, összesen négyszer dobjatok és lépjetek. Írjátok fel, hogy mely pontba jutottatok 4 lépéssel.



a) Mely pontokba juthattok el 4 lépéssel?

20 játék után írjátok össze, hogy melyik pontba hányszor jutottatok el. Az eredményeiteket hasonlítsátok össze a többiek eredményével.

b) Melyik pontba jutottatok el a leggyakrabban?

c) Melyik pontba jutottatok el a legritkábban?

d) Hányszor nagyobb annak az esélye, hogy négy dobás után az *I* pontba juttok, mint annak az esélye, hogy az *E* pontba kerültök?

5. K1 Írjátok fel az osztály minden tanulójának a nevét egy-egy cetlire. A cetliket rakjátok be egy dobozba és mindenki húzzon egy cetlit a dobozból véletlenszerűen. (Olyan ez, mint amikor az osztálykarácsony előtt húztok.)

a) Lett-e olyan, hogy valaki a saját nevét húzta?

Most ismételjétek meg a húzást többször.

b) A húzások hány százalékában fordult elő, hogy valaki a saját nevét húzta?

VI. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

A folyó felszínén visszatükröződik a táj. Az így kialakult szimmetria kiegyensúlyozottságot kiegyensúlyozottságot, nyugalmat áraszt. Környezetünkben a virágok, élőlények, épületek, tárgyak formájában is fellelhetők különböző geometriai transzformációk.

50. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Az általános iskolában megismerkedtünk a tengelyes tükrözéssel, a középpontos tükrözéssel és az eltolással. Azt mondtuk, hogy ezek geometriai transzformációk. Tulajdonképpen mit nevezünk „geometriai transzformáció”-nak?

A **geometriai transzformációk** olyan függvények, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz. Az értelmezési tartomány lehet a tér, egy sík, néha egy egyenes, vagy ezeknek egy részhalmaza.

Mi csak olyan geometriai transzformációkkal foglalkozunk, amelyek kölcsönösen egyértelmű hozzárendelések, valamint értelmezési tartományuk és értékkészletük ugyanaz a halmaz.

Ilyen geometriai transzformáció például az általános iskolából ismert síkbeli tengelyes tükrözés, ahol a transzformáció értelmezési tartománya és értékkészlete is a sík, és adott tükörtengely esetén egy pont és tükörképe kölcsönösen kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Eddig nem említettük azt a geometriai transzformációt, amelynél az értelmezési tartomány minden pontjához saját magát rendeljük. Az ilyen hozzárendelés is geometriai transzformáció.

Azt a geometriai transzformációt, amely minden ponthoz saját magát rendeli, **helyben hagyásnak**, (idegen szóval **identitásnak**) nevezzük.

Minden transzformációnál a következő *tulajdonságokat* fontos megvizsgálni:

Egyenest egyenesbe visz-e át – ezt úgy mondjuk, hogy **egyenestartó-e**?

Bármely két pont távolsága és a két pont képének távolsága megegyezik-e – ezt úgy mondjuk, hogy **távolságtartó-e**?

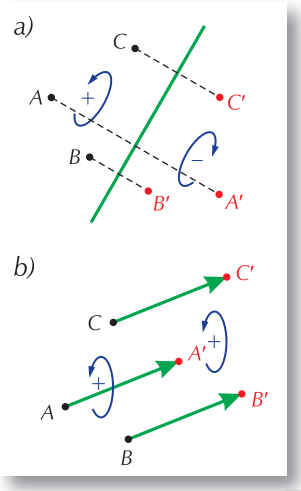
Bármely szög és a képe megegyező nagyságú-e – ezt úgy mondjuk, hogy **szögtartó-e**?

Vannak-e fix pontjai a transzformációnak, azaz vannak-e olyan pontok, amelyeknek a képe önmaga? Vannak-e fix alakzatok, amelyek minden pontja fix pont?

Vannak-e olyan alakzatok, amelyeknek a képe önmaga, de pontjai nem mind maradnak helyben? Az ilyen alakzatokat *invariáns alakzatoknak* nevezzük.

A transzformációk szempontjából általában kitüntetett szerepük van a fix vagy invariáns egyeneseknek, illetve – térben – a fix síkoknak.

Ezután meg kell vizsgálni, hogy a síkbeli transzformáció **körüljárástartó-e.** Ez azt jelenti, hogy ha három nem egy egyenesen lévő pontot és a képeiket vizsgáljuk, és egy rögzített sorrendet megadunk, akkor az eredeti és a képpontok vagy mindkettő az óramutató járásával megegyező vagy mindkettő az óramutató járásával ellentétes irányban járható körbe. Ha a transzformáció megfordítja a körüljárást, akkor az eredeti és a képpontok közül az egyiket az



óramutató járásával megegyező, a másikat az óramutató járásával ellentétes irányban tudjuk bejárni. Az óramutató járásával ellentétes körüljárást pozitív körüljárásnak, az óramutató járásával megegyező körüljárást negatív körüljárásnak nevezzük.

Számunkra most a legfontosabb, hogy bármely szakasz és a képe ugyanolyan hosszú-e. Ezt a tulajdonságot **távolságtartásnak** nevezzük.

A távolságtartó transzformációkat **egybevágósági transzformációknak** hívjuk.

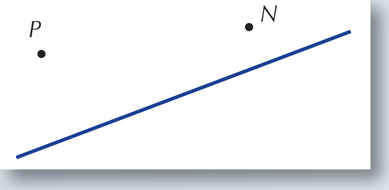
Távolságtartó transzformációnak ismertük meg a tengelyes tükrözést és a középpontos tükrözést is. Egybevágósági transzformáció az identitás is, amit az előbb vezettünk be.

Ezekről a transzformációkról tanultakat fogjuk most átismételni, kiegészíteni.

Fogalmak
geometriai transzformáció;
megfordítható;
egyenestartó;
szögtartó;
fix pont;
fix alakzat;
invariáns alakzat;
körüljárástartás;
pozitív körüljárás;
negatív körüljárás;
identitás;
távolságtartó;
egybevágósági transzformáció.

51–52. TENGELYES TÜKRÖZÉS

1. példa

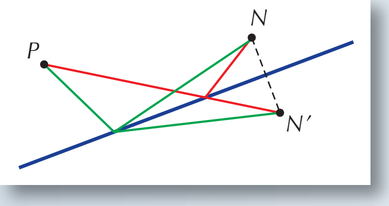


Piroska kis kosárkájával elindult a patak ugyanazon az oldalán lakó nagymamájához. Útközben még vizet kell merítenie a korsójába, és azt is el kell vinnie a nagymamához. Tervezzük meg az útvonalát, ha a lehető legrövidebb úton akarja a feladatát végrehajtani!

Hogy lehetne eldönteni, melyik rövidebb: ha merőlegesen legrövidebb úton lemegy a patakhoz, onnan egyenesen megy nagymamához, vagy menjen inkább a két ház felezőmerőlegesének és a pataknak a metszéspontjához, azután nagymama házához, vagy van még jobb út? Jó lenne kiegyenesíteni ezt a törött vonalat, hogy lássuk, hogyan a legrövidebb…

Az általános iskolában tanult tengelyes tükrözést hívhatjuk segítségül a feladat megoldásához.

Megoldás

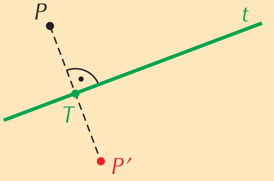


Tükrözzük nagymama házát gondolatban a patak egyenesére! Ha most Piroska és a nagymama házának tükörképét összekötnénk, ez az egyenes szakasz lenne a legrövidebb út $(\overline{PN'})$. Menjünk a pataknak ahhoz a pontjához, ahol az egyenes metszi, és folytassuk utunkat onnan egyenesen a házig. Ez lesz a legrövidebb út, mert ennek tengelyes tükörképe az egyenes szakasz folytatása, ezért egyenlő hosszú vele.

Ismételjük át, mit nevezünk tengelyes tükrözésnek!

Tengelyes tükrözés

Tengelyes tükrözésnél megadjuk a sík egy t egyenesét, amelyet tengelynek nevezünk. A sík P pontjához úgy rendeljük a képét, hogy ha a P pont illeszkedik a t tengelyre, akkor a képe önmaga. Ha a P pont nem illeszkedik a t tengelyre, akkor a P pontból merőlegest bocsátunk a t tengelyre, ennek talppontja legyen T. A PT egyenesre a T pontból a P-vel ellentétes irányban felmérjük a PT szakaszt, a kapott P' pont lesz a P pont képe.



A tengelyes tükrözés tulajdonságai

A tengelyes tükrözés távolságtartó, egyenestartó és szögtartó. A körüljárási irányt megváltoztatja. Fix pontjai a tükörtengely pontjai, így a tengely egyenese fix egyenes. Invariáns alakzat minden, a tengelyre merőleges egyenes. Jó tudni, hogy az egyenes és a képe a tengellyel ugyanakkora szöget zár be.

Invariáns alakzat minden olyan kör is, amelynek középpontja a tengelyen van. Számos alakzatot tudunk találni, amelyek invariánsak egy adott tengelyre.

Tengelyesen szimmetrikus alakzatok

Egy alakzat **tengelyesen szimmetrikus,** ha létezik olyan tengely, amelyre történő tükrözéskor az alakzat képe önmaga.

A tengelyt a síkbeli alakzat szimmetriatengelyének nevezzük.

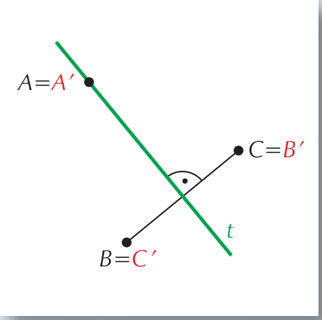
2. példa

Milyen háromszög lehet tengelyesen szimmetrikus?

A háromszög egy csúcsának a tengelyen kell lennie.

Ha nem lenne, akkor mivel a háromszög képe önmaga, van olyan félsík, amiben két pont van. Tükrözés után ezek a másik félsíkba kerülnek, ahol eddig csak egy pont volt, de mivel a transzformáció kölcsönösen egyértelmű, nem lehet az az egy mindkettő képe.

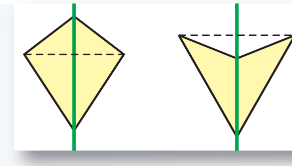
Nyilvánvaló, hogy a háromszög AB oldalának a tengelyre vonatkozó képe az AC oldal, és fordítva: az AC oldal képe AB. **A tengelyesen szimmetrikus háromszög tehát egyenlő szárú.**



Megfordítva: az egyenlő szárú háromszög tengelyesen szimmetrikus. (A szimmetriatengelye az alap felezőmerőlegese.)

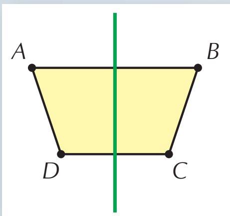
A szabályos háromszögnek három szimmetriatengelye van.

3. példa



Milyen négyszög lehet tengelyesen szimmetrikus?

Megoldás



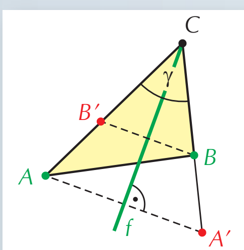
Lehetséges, hogy a négyszög két csúcsa a tengelyen van. Ekkor a harmadik és negyedik csúcs egymásnak tengelyes tükörképe. Ez a négyszög tehát a deltoid. A négyszög két-két oldala egyenlő hosszúságú, a tükörtengely felezi a másik átlót és a deltoid két szemközti szögét. A másik két csúcsnál levő szög egyenlő. A deltoid speciális esete a rombusz és a négyzet.

Lehetséges, hogy a négyszögnek nincs csúcsa a tengelyen. Emiatt a négy csúcs közül kettő-kettő egymásnak tengelyes tükörképe. Ez a négyszög a húrtrapéz. Ennek speciális esete a téglalap és a négyzet.

4. példa

Szerkesszük meg az *ABC* háromszöget, ha adott az *A* és a *B* csúcspontja, továbbá a γ szög *f* szögfelező egyenese!

Megoldás

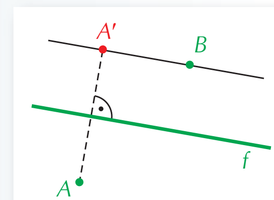


Az ábra a megoldott feladatot szemlélteti, de ebből ötletet is kapunk a megoldáshoz. Észrevehetjük, hogy az *AC* oldalegyenesnek *f*-re vonatkozó tükörképe a *BC* oldal egyenese, mert egyenes, és a képe egyenlő szöget zár be a tengellyel. Ha *A*-t tükrözzük *f*-re, az *A′* tükörkép a *BC* egyenesre kerül. *A′B* egyenese *f*-et a háromszög hiányzó *C* csúcsában metszi.

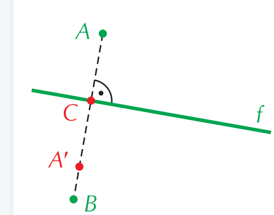
A feladatnak általában egy megoldása van. Az *A* pont tükörképét *B*-vel, illetve a *B* pont tükörképét *A*-val összekötő egyenes ugyanabban a *C* pontban metszi *f*-et.

Nincs megoldása a feladatnak, ha úgy vesszük fel az adatokat, hogy *f* nem metszi az *AB* szakaszt. (A szögfelező metszi a szemközti oldalt.)

Előfordulhat, hogy *A′B* egyenes *f*-fel párhuzamos, és ekkor nem kapunk *C* pontot, a feladatnak nincs megoldása.

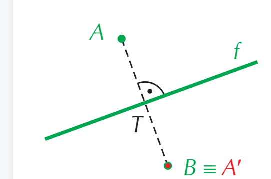


Nincs megoldás akkor sem, ha az *A′B* egyenes merőleges *f*-re. Ilyenkor ugyanis *A, B, C* pontok egy egyenesre esnek, s így nem alkotnak háromszöget.



Fogalmak
tengelyes tükrözés;
tengelyes szimmetria.

Ha *A* tükörképe éppen a *B* pont, akkor *f* az *AB* szakasz felezőmerőlegese. Ilyenkor végtelen sok megoldása van a feladatnak (*f* minden pontja *T* kivételével lehet *C*).



FELADATOK

1. K1 Tükrözzünk egy háromszöget
a) egyik oldalegyenesére;
b) egyik szögfelező egyenesére;
c) a sík egy, a háromszöget nem metsző egyenesére!

2. K1 Tükrözzünk egy kört
a) egyik átmérőjére;
b) egyik húr egyenesére;
c) egyik érintőjére!

3. K2 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szimmetriatengelye, az azon lévő csúcs és a másik két csúcson átmenő
a) egy-egy egyenes;
b) egy-egy kör;
c) egy kör és egy egyenes!

4. K2 Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő szárú háromszög szárához tartozó magasságának az alappal bezárt szöge fele a szárszögnek!

5. K2 Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik végpontjából induló belső szögfelezője a háromszöget két egyenlő szárú háromszögre vágja szét. Mekkorák a háromszög szögei?

6. K2 Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus trapéz átlója felezi a trapéz egyik szögét, akkor a szára valamelyik alappal egyenlő!


Dóm Szegeden


Gyalogos híd Londonban


Kínai pagoda

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **302–354.**


Tükröződő épület Iránban

53–54. A THALÉSZ-TÉTEL

A milétoszi **Thalész** (ejtsd: Tálész, Kr. e. 624?–548?) volt mindenben az első. A hét görög bölcs között ő az első, ő az első természetfilozófus, az első fizikus, az első csillagász és az első matematikus.

Thalész a kis-ázsiai Milétoszban született. Kereskedő volt, és így beutazta az akkor ismert művelt világot Mezopotámiától Egyiptomig. A legenda szerint az egyiptomi papok csodálatát vívta ki azzal az egyszerű módszerrel, amellyel egy piramis magasságát meghatározta. Leszúrt egy botot a földbe, és amikor annak az árnyéka éppen egyenlő volt a bot hosszával, akkor megmérte a piramis árnyékát, amely ekkor megegyezett a piramis magasságával. Persze az ilyen legendákat nem lehet készpénznek venni. (Csak a piramis alaplapján túlnyúló árnyék hosszát lehetett lemérni, ezért a tényleges magasság meghatározásához számítások is szükségesek.)

Thalész elsőként bizonyított be több geometriai tételt. Ő mutatta meg, hogy két háromszög fedésbe hozható, ha megegyezik egy oldalban és a rajta fekvő két szögben.

Thalész matematikai, illetve geometriai munkásságát összefoglalva: Biztosnak látszik, hogy Thalész a „matematika atyja”. Ő a fejlődésnek azt a határkövét jelenti, amely elválasztja a szemléletre alapozott tapasztalati geometriát az érzékekre már nem támaszkodó, logikai bizonyítást igénylő geometriától.

(A részletek Sain Márton: MATEMATIKATÖRTÉNET című könyvéből származnak.)

Tétel

Thalész-tétel: Ha egy kör tetszőleges *AB* átmérőjének végpontjait összekötjük a kör kerületének bármely más pontjával – nevezzük *C*-nek –, akkor az *ACB* szög derékszög.

Bizonyítás

Jelölje *K* az *AB* átmérő felezőpontját, azaz a kör középpontját! Kössük össze *C*-t *K*-val! Így az *ABC* háromszöget két egyenlő szárú háromszögre bontottuk, mert $AK = BK = CK =$ a kör sugara. Egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, ezért

$ACK\sphericalangle = CAK\sphericalangle = \alpha$ és $CBK\sphericalangle = BCK\sphericalangle = \beta$. A háromszög szögeinek összege $180°$, ezért

$2\alpha + 2\beta = 180°$. Kettővel osztva $\alpha + \beta = 90°$ adódik, ami éppen azt jelenti, hogy $ACB\sphericalangle = 90°$.

Tétel

Ha az *ABC* háromszög *C* csúcsánál derékszög van, akkor *C* rajta van az *AB* átmérőjű körön. Ez éppen az előző állítás *megfordítása*.

Bizonyítás **Emelt szint**

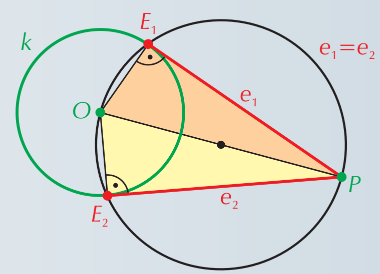
Tükrözzük az ABC háromszöget középpontosan az AB átfogó felezőpontjára! Az A pont képe B, a B pont képe A lesz, C képét jelölje C'. Mivel a középpontos tükrözés szögtartó, $CAB\sphericalangle = ABC'\sphericalangle$ és $CBA\sphericalangle = BAC'\sphericalangle$. Mivel a derékszögű háromszög két hegyesszögének összege 90°, ezért $CAC'\sphericalangle = CBC'\sphericalangle = 90°$. Az $ACBC'$ négyszög téglalap, mert minden szöge derékszög. A téglalap átlói egyenlők, tehát AB felezőpontja, a téglalap átlóinak metszéspontja egyenlő távol van A-tól, B-től és C-től is. Ezért e körül a pont körül $\frac{AB}{2}$ sugarú kör átmegy az A, a B és a C ponton is.

Ebből az is következik, hogy **derékszögű háromszög köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontja.**

Az AB átmérőjű kört az AB szakasz fölé írt **Thalész-körnek** hívjuk.

1. példa

Szerkesszünk külső pontból adott körhöz érintőket!



Megoldás

A Thalész-tételt használjuk a megoldáshoz. Mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért az érintési pont rajta van az adott pont és a kör középpontja által meghatározott szakasz Thalész-körén. Az adott kör és a Thalész-kör metszéspontjai az érintési pontok, amit az adott ponttal összekötve megkapjuk az érintőket.

Mivel az ábrán az OE_1P és az OE_2P háromszögek két oldala és a nagyobbal szemközti szög egyenlő, ezért fedésbe hozhatók. Ebből következik, hogy **külső pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz egyenlő hosszúságú.**

Olvasmány **Emelt szint**

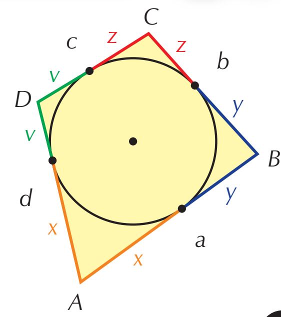
Az utolsó állítás, mely szerint külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, egy érdekes tételhez vezet. Tudjuk, hogy minden háromszögbe írható mindhárom oldalát érintő kör. Négyszögek közül például a rombuszba írható minden oldalát érintő kör; egy olyan téglalapba, amelynek egyik oldala a másik duplája, nem írható minden oldalát érintő kör. Van-e valami jellemzője azoknak a négyszögeknek, amikbe írható kör?

Azokat a konvex négyszögeket, amelyeknek van beírt köre (minden oldalát érintő köre), érintőnégyszögeknek hívjuk.

Fogalmak
Thalész-tétel;
a Thalész-tétel megfordítása;
Thalész-kör;
külső pontból húzott érintőszakaszok;
érintőnégyszög.

Tétel

Érintőnégyszögben a szemközti oldalhosszak összege egyenlő. Tehát $a + c = b + d$.



Bizonyítás

Jelölje az A, B, C és D pontokból a beírt kör érintési pontjáig húzott szakaszokat rendre x; y; z és v. Ekkor $a + c = x + y + z + v$ és $b + d = x + y + z + v$, ami állításunkat igazolja.

Az is bizonyítható, hogy igaz az állítás megfordítása is. Tehát egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha a szemközti oldalhosszak összege egyenlő.

FELADATOK

1. K1 Igazoljuk, hogy egy egyenlő szárú háromszög szára mint átmérő fölé rajzolt kör átmegy az alap felezőpontján!

2. K1 Hol metszi egy hegyesszögű háromszög tetszőleges oldala mint átmérő fölé rajzolt kör a másik két oldalt?

3. K1 Egy kör egyik húrjának egyik végpontját kössük össze a középponttal. Bizonyítsuk be, hogy ennek a sugárnak a Thalész-köre felezi a húrt!

4. K1 Szerkesszünk háromszöget egy oldalából és a két másik oldalhoz tartozó magasságából!

5. K1 Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget az alapjából és a szárhoz tartozó magasságából!

6. K2 Adott az A és B pont, amelyek távolsága 6 cm. Szerkesszünk B-n át olyan egyenest, amely A-tól 3 cm-re halad! Mekkorák a szögei annak a háromszögnek, melynek csúcsai A, B és az egyenesen az A-hoz legközelebb eső pont?

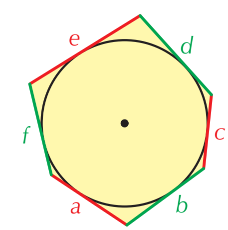
7. K1 Hol metszi a háromszög AC és AB oldalát az AM szakasz Thalész-köre? (M a háromszög magasságpontját jelöli.)

8. K2 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög AB oldalának felezőpontja, valamint a BC és az AC oldalon lévő magasság talppontok egyenlő szárú háromszöget határoznak meg!

9. E1 Bizonyítsuk be, hogy egy körön kívül fekvő P pontot összekötve a kör egy átmérőjének A és B végpontjaival az APB szög hegyesszög! Mit mondhatunk, ha P a Thalész-körön belül van?

10. E2 Le lehet-e fedni egy tetszőleges konvex négyszög alakú teraszt az eső ellen az oldalak fölé befele húzott félkör alakú ernyőkkel?

11. E1 Bizonyítsuk be, hogy egy érintőhatszögben $a + c + e = b + d + f$!



Ajánlott feladatok

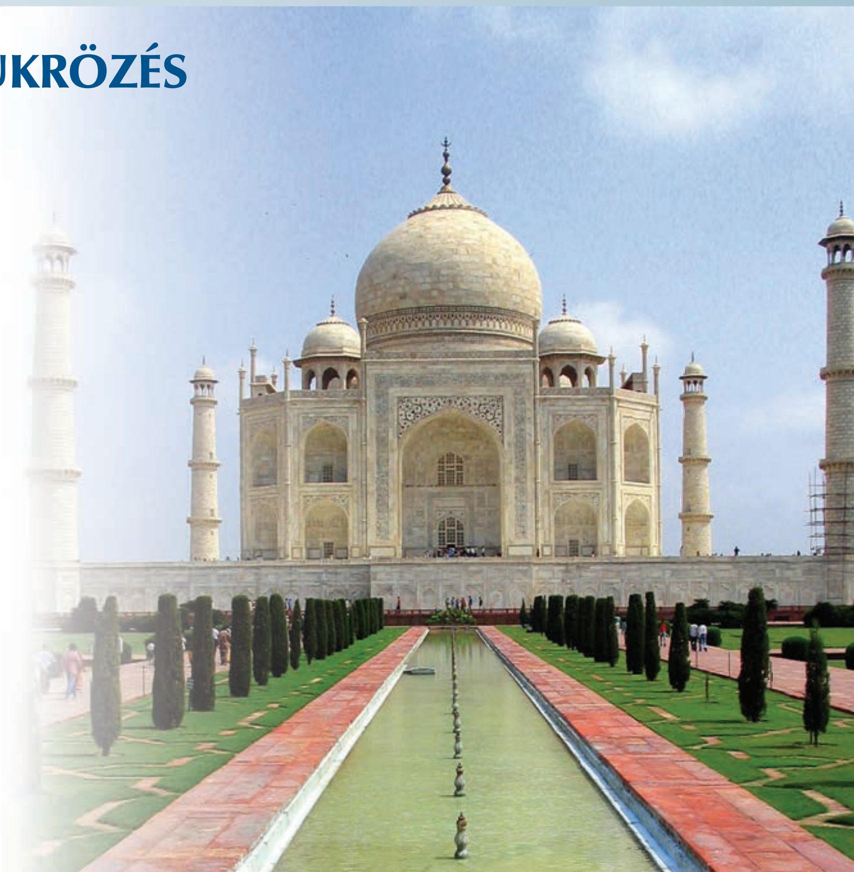
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **531–553.**

Idézet

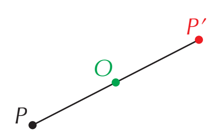
Meg akarom tudni, mi lakozik az emberek szívében, miért ragyognak a csillagok, és miért szabja meg a dolgok rendjét a számokban lakozó pitagoraszi erő.

(Bertrand Russell)

55–56. KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS



Tádzs Mahal (India) alaprajza is középpontosan tükrös

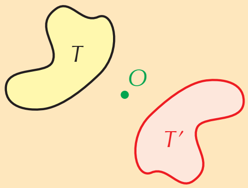


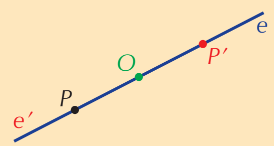
Ezt a transzformációt is tanultuk már az általános iskolában.

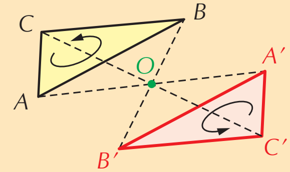
Középpontos tükrözésnél egy O középpontot kell megadnunk. A P ponthoz úgy rendeljük hozzá a P' képpontot, hogy ha a P pont azonos az O-val, akkor képe önmaga; ha P nem azonos az O-val, akkor a P pontnak a P' képe az a pont, amelyre PP' felezőpontja O.

A **pontra vonatkozó tükrözés** következő tulajdonságait érdemes megjegyezni:

1. A középpont tükörképe önmaga. Bármely más pontot a középpont elválaszt a tükörképétől.
2. Ha a P pont O-ra vonatkozó tükörképe P', akkor P'-é P.
3. Bármely alakzat és középpontos tükörképe fedésbe hozható.
4. A középponton átmenő egyenes invariáns egyenes. Ha a középpont nem illeszkedik az egyenesre, akkor az egyenes és a képe párhuzamos.
5. Ha egy síkidomot tükrözünk egy, a síkjában levő tetszőleges pontra, akkor az eredetivel megegyező körüljárású síkidomhoz jutunk.



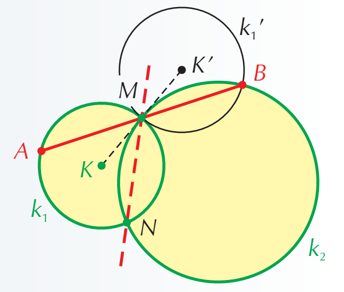




1. példa

Két egymást metsző kör egyik metszéspontján át szerkesszünk olyan szelőt, melyből a két kör egyenlő hosszú húrokat metsz ki!

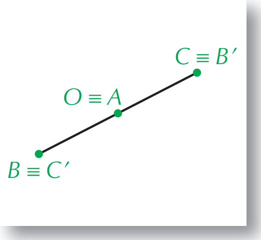
Megoldás



Az ábra a megoldottnak képzelt feladatot mutatja. Az ábrán tehát $AM = MB$. A és B az M pontra tükrösek. Meg kell keresnünk az egyik körön azt a pontot, amelynek M-re vonatkozó tükörképe a másik körre esik. Tükrözzük a k_1 kör pontjait az M-re! A tükörképek halmaza a k_1 kör M-re vonatkozó k_1' tükörképe. A k_1' és k_2 körök M-től különböző metszéspontját kössük össze M-mel. Ez a keresett szelő. Az MN szelő is megoldása a feladatnak.

KÖZÉPPONTOSAN SZIMMETRIKUS ALAKZATOK

Egy alakzat középpontosan szimmetrikus, ha létezik olyan pont, amelyre vonatkozó tükrözéskor az alakzat képe önmaga.



Lehet-e háromszög középpontosan szimmetrikus?

Ha valamely háromszög középpontosan szimmetrikus lenne, az csak úgy lenne lehetséges, hogy az egyik csúcspontjának képe önmaga, ez tehát csak a tükrözés középpontja lehet. A másik kettő egymásnak középpontos tükörképe kell legyen. Ez azonban azt jelentené, hogy a háromszög három csúcspontja egy egyenesre illeszkedik. Az egy egyenesen levő három pontot azonban nem tekintjük háromszögnek.

Háromszög nem lehet középpontosan szimmetrikus.

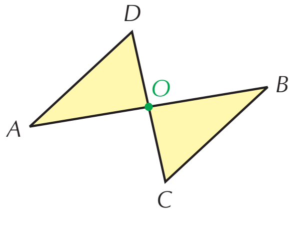
Milyen négyszög lehet középpontosan szimmetrikus?

Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor egyik csúcsának a képe a négyszög valamelyik csúcsa. Ennek alapján, ha az $ABCD$ négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor csúcsainak A', B', C', D' képe is a négyszög csúcsai közül kerül ki.

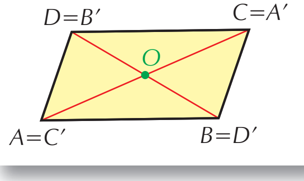
Mi lehet az A pont képe?

Ha $A = A'$, akkor az A pont a tükrözés középpontja: $A = O$. Ekkor a B csúcspont, annak a B' képe és az O pont egy egyenesen vannak. Ez nem lehet, mert a négyszög három csúcsa nem illeszkedhet egy egyenesre.

Ha az A csúcs képe egy szomszédos csúcs, jelöljük ezt B-vel, akkor C képének D-nek kell lennie. Ekkor az AB oldalnak is, a CD oldalnak is felezőpontja az O középpont, tehát a négyszög két oldala egy belső pontban metszi egymást. Az ilyen hurkolt négyszögekkel mi nem foglalkozunk.



Ha az A csúcs képe a szemközti csúcs, jelöljük ezt C-vel, akkor a B és a D csúcsok egymásnak képei. A középpontos tükrözés tulajdonságai alapján az $ABCD$ négyszögben az AC és BD átlók felezik egymást, vagyis az $ABCD$ paralelogramma. Ezzel bebizonyítottuk, hogy **középpontosan szimmetrikus négyszög csak paralelogramma lehet.**



Könnyen belátható, hogy bármely paralelogramma középpontosan szimmetrikus.

Egy négyszög akkor és csak akkor középpontosan szimmetrikus, ha az paralelogramma.

A kör definíciójából következik, hogy középpontosan szimmetrikus alakzat.

Fogalmak
középpontos tükrözés;
középpontos szimmetria;
középpontosan szimmetrikus alakzat.

FELADATOK

1. K1 Tükrözzünk egy háromszöget
a) az egyik csúcsára;
b) az egyik oldal felezőpontjára;
c) egy háromszögön kívül eső pontra;
d) a háromszög egy belső pontjára!

2. K1 Adott egy konvex szög és szárai közt egy pont. Szerkesszünk olyan egyenest, amely átmegy a ponton, és a szögszárak közti szakaszát az adott pont felezi!

3. K1 Adott egy konvex szög és szárai közt egy pont. Szerkesszünk olyan rombuszt, amelynek középpontja a megadott pont, és két szemközti csúcsa a szögszárakon van!

4. K2 Bizonyítsuk be, hogy a szabályos hatszög középpontosan szimmetrikus sokszög! Minden szabályos sokszög középpontosan szimmetrikus?

5. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott
K1 *a)* két oldala és egyik átlója;
K1 *b)* két oldala és a közbezárt szög;
K1 *c)* egy oldala és két átlója;
K1 *d)* két átlója és az átlók szöge;
K2 *e)* egy átlója, egy oldala és az adott oldalhoz tartozó magassága;
K2 *f)* két átlója és az egyik magassága!

Ajánlott feladatok

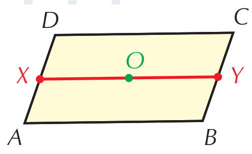
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **360–402.**

Kék mecset, Isztambul, Törökország

57. KÖZÉPVONALAK

A PARALELOGRAMMA, A HÁROMSZÖG ÉS A TRAPÉZ KÖZÉPVONALA

Középvonalnak hívjuk egy négyszögben a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszokat. Minden négyszögnek tehát két középvonala van.



A paralelogrammák középvonalai

Húzzunk a paralelogramma O középpontján át párhuzamost az AB oldallal! Jelöljük az AD és BC oldalakkal való metszéspontját X-szel és Y-nal (ábra). Az $ABYX$ négyszög paralelogramma, így $AX = BY$. AX és CY az O pontra tükrös, ezért egyenlő hosszúak. BY és CY tehát egymással is egyenlő, így Y a BC szakasz felezőpontja. Természetesen X is felezi az AD szakaszt.

A paralelogramma két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a paralelogramma **középvonalának** nevezzük.

Az XY tehát középvonala a paralelogrammának.

Tétel

A paralelogramma középvonala párhuzamos és egyenlő a két nem felezett oldallal.

A paralelogrammának két középvonala van.

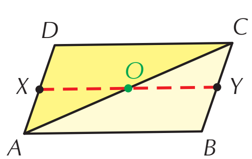
A háromszög középvonalai

A háromszög bármely két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a háromszög középvonalának nevezzük. A háromszögnek három középvonala van.

Tétel

A háromszög középvonala párhuzamos a nem felezett oldallal, és fele olyan hosszú.

Emelt szint **Bizonyítás**



Vegyük fel az ABC háromszöget, és tükrözzük a CA oldal O felezőpontjára. A tükörkép a CDA háromszög lesz. A két háromszög együtt az $ABCD$ paralelogrammát adja. Az ábrán megrajzoltuk a paralelogramma XY középvonalát. OY az ABC háromszög két oldalának a felezőpontját köti össze, párhuzamos az AB oldallal és feleakkora.

A trapézok középvonalai

A trapéznak is két középvonala van. Ha külön nem hangsúlyozzuk, hogy a másik középvonalról van szó, akkor mindig a szárakat összekötő középvonalra gondolunk.

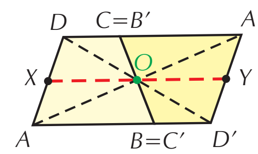
Tétel

Bármely trapéz középvonala párhuzamos a trapéz alapjaival, és hossza az alapok összegének a fele (a két alap hosszának számtani közepe).

Bizonyítás

Emelt szint

Az ábrán felvett $ABCD$ trapézt tükrözzük a BC oldal O felezőpontjára. A tükörkép az $A'CBD'$ trapéz. A tükrözés miatt AD és $A'D'$ párhuzamos, így a két trapéz együtt az $AD'A'D$ paralelogrammát adja. Az XY e paralelogramma középvonala. Az OX a trapéz két szárának felezőpontját összekötő szakasz, vagyis a trapéz középvonala. OX párhuzamos a trapéz alapjaival, hossza az XY szakasz felével egyenlő. XY hossza megegyezik a paralelogramma AD' oldalával, $(a + c)$-vel. Tehát $OX = \frac{1}{2}(a + c)$.



A KÖZÉPVONALLAL KAPCSOLATOS PÉLDÁK

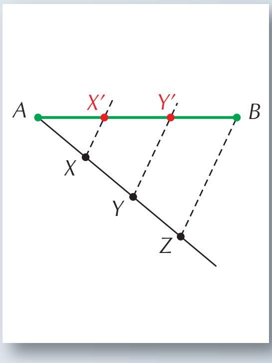
1. példa

Osszunk fel egy adott szakaszt három egyenlő részre!

Megoldás

Az adott AB szakasz egyik végpontjából húzzunk egy félegyenest, és mérjünk rá egymáshoz csatlakozva három egyenlő hosszú szakaszt. Az ábrán $AX = XY = YZ$ a félegyenesre felmért egyenlő szakaszok. Kössük össze a B és Z pontokat. Az Y és X pontokon át húzzunk a BZ egyenessel párhuzamos egyeneseket. Ezek az AB szakaszt az Y' és az X' pontokban metszik. Minthogy az X pont az AY szakasz felezőpontja, és XX' párhuzamos YY'-vel, ezért XX' az AYY' háromszög középvonala. Így X' az AY' szakasz felezőpontja. $AX' = X'Y'$. Hasonlóan látható be, hogy YY' az $XX'BZ$ trapéz középvonala, és így $X'Y' = Y'B$. Az X', Y' pontok tehát az AB szakaszt három egyenlő részre osztják.

Hasonló eljárással lehet egy szakaszt n egyenlő részre felosztani, ahol n tetszőleges 2-nél nem kisebb természetes szám.

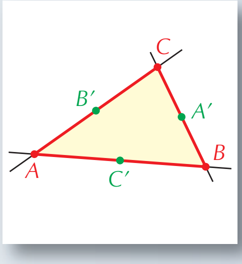


2. példa

Szerkesszünk háromszöget, ha adott a három oldal felezőpontja!

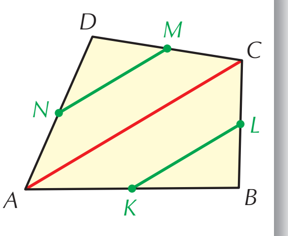
Megoldás

Legyen a három oldal felezőpontja A', B', C'. A szerkesztendő ABC háromszög középvonalai az $A'B'C'$ háromszög oldalai. Tudjuk, hogy az oldalak párhuzamosak egy-egy középvonallal. Húzzunk tehát A'-n át párhuzamost a $B'C'$ egyenessel. Ezen a párhuzamoson helyezkedik el a keresett háromszög BC oldala. A háromszög többi oldalegyeneséhez hasonlóan juthatunk. A három oldalegyenes az ABC háromszöget határozza meg. Az ABC háromszögben A', B', C' valóban oldalfelező pontok, hiszen például $A'B$ és $A'C$ is egyenlő $B'C'$-vel, mert $A'CB'C'$ és $A'B'C'B$ paralelogramma.



3. példa

Igazoljuk, hogy egy négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg!

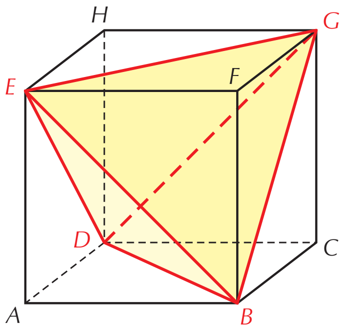


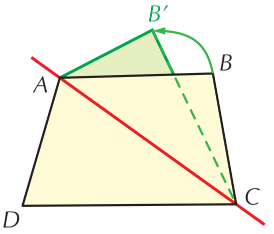
Megoldás

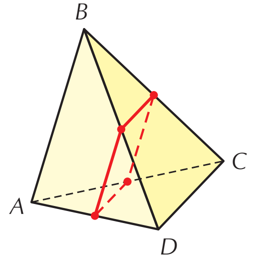
Az *ABCD* négyszög oldalfelező pontjai legyenek *K, L, M, N*. A négyszög *AC* átlója a négyszöget két háromszögre vágja szét. E háromszögek közös *AC* oldalával párhuzamos középvonalai *KL* és *MN*. Ezek tehát párhuzamosak. *KL* és *MN* egyenlők is, mert mindkettő az *AC* átló fele. A *KLMN* négyszög tehát paralelogramma.

Vegyük az ábrán látható kocka *E, B, G, D* csúcsait! Nem található olyan sík, amelyik mind a négy pontot tartalmazza. *EBGD* egy úgynevezett tetraédert alkot. Tetraéderhez juthatunk úgy is, ha a következő ábra *ABCD* négyszögének *ACB* háromszögét az *AC* átló körül kissé elforgatjuk, és a *D* pontot összekötjük a *B'*-vel. A tetraéder oldalfelező pontjai is paralelogrammát határoznak meg, mert az előbbi okoskodásban nem használtuk ki, hogy *ABCD* síknégyszög.

A továbbiakban, ha négyszöget írunk, mindig síknégyszögre gondolunk. Külön megmondjuk, ha valahol tetraéder lép fel.







4. példa

Bizonyítsuk be, hogy bármely négyszög két középvonala felezi egymást!

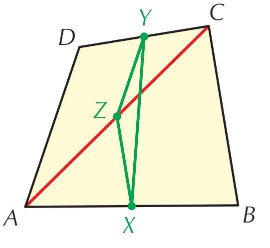
Fogalmak
háromszög középvonala;
négyszög középvonala;
paralelogramma középvonala;
trapéz középvonala;
szakasz adott arányú felosztása.

Megoldás

Bebizonyítottuk,hogy minden négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak. Ennek a paralelogrammának az átlói a négyszög középvonalai. A paralelogramma átlói viszont felezve metszik egymást.

5. példa

Igazoljuk, hogy egy tetszőleges négyszög két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakasz nem lehet nagyobb, mint a másik két oldal számtani közepe!



Megoldás

Az ábrán *X* és *Y* jelöli az *AB* és a *CD* oldalak felezőpontját. *Z* az *AC* átló felezőpontja. *XZ* az *ABC* háromszög, *ZY* az *ACD* háromszög középvonala. E két középvonal összege éppen a *BC* és *AD* oldalak számtani közepe. Az *XY* szakasz viszont nem lehet nagyobb az *XZ* és *ZY* szakaszok összegénél.

FELADATOK

1. K1 Szerkesszünk trapézt, ha adott
a) az m magassága, a k középvonala és az egyik alapon fekvő két szöge: α és β;
b) a középvonala, a két szára és a magassága!

2. K2 Adott egy konvex négyszög. Szerkesszünk olyan paralelogrammát, amelynek csúcsai a négyszög egy-egy oldalára esnek! (A diszkussziótól tekintsünk el.)

3. K1 Mit mondhatunk arról a négyszögről, amelynek oldalfelező pontjai
a) rombuszt;
b) téglalapot alkotnak?

4. K2 Bizonyítsuk be, hogy a trapéz átlóinak felezőpontjait összekötő szakasz egyenlő az alapok különbségének felével!

5. E1 Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög középvonala nem nagyobb a nem felezett oldalak számtani közepénél!

6. K2 Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög oldalfelező pontjai és egyik magasságának talppontja egyenlő szárú háromszöget vagy húrtrapézt határoz meg!

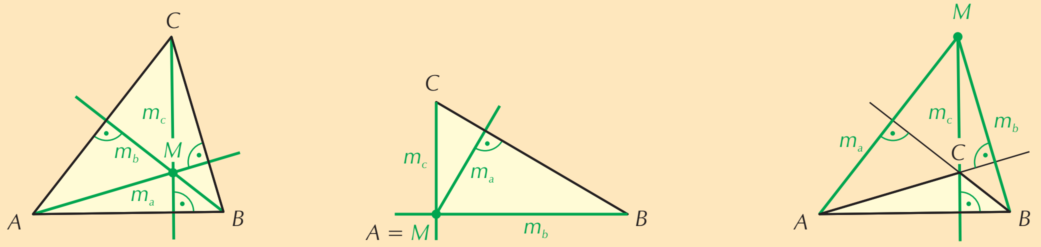
Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **510–525.**

58–59. A HÁROMSZÖGEK NEVEZETES PONTJAI, VONALAI

A HÁROMSZÖG MAGASSÁGVONALAI

A **háromszög magasságvonalának** a csúcsból a szemközti oldal **egyenesére** bocsátott merőleges egyenest nevezzük. Minden háromszögnek három magasságvonala van.



A magasságvonalaknak azt a szakaszát, amely a háromszög egyik csúcsa és a szemközti oldal egyenese között van, a háromszög egyik magasságának nevezzük.

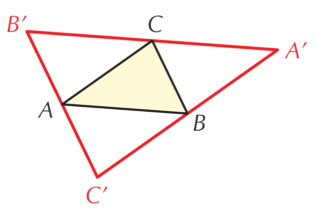
A **„magasságvonal”** és a **„magasság”** között fogalmi különbség van: a magasságvonal egyenes, ennek egy szakasza a háromszög egyik magassága. A magasság alatt gyakran a szakasz hosszát értjük.

A magasságvonal, a magasság és annak hossza közötti fogalmi különbségeket nem hangsúlyozzuk mindig. Ha egy feladatban vagy egy állításban a mondat értelme megmutatja, hogy miről van szó, akkor röviden csak „magasságról” beszélünk.

Tétel

A háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át, ez a pont a háromszög **magasságpontja**.

Emelt szint **Bizonyítás**



Húzzunk párhuzamosokat a háromszög csúcsain keresztül a szemközti oldalakkal.

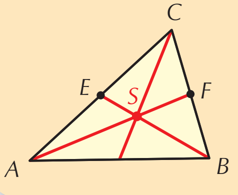
Használjuk az ábra jelöléseit! Az $ABCB'$, a $CAC'B$ és az $ABA'C$ négyszögekben két-két szemközti oldal párhuzamos, tehát paralelogrammák. Ebből következik, hogy az $A'B'$ oldalon a C; az $A'C'$ oldalon a B és a $B'C'$ oldalon A felezőpont, és az $A'B'C'$ háromszög oldalai párhuzamosak az ABC háromszög oldalaival. Az ABC háromszög magasságvonalai az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező merőlegesei. Azt már tudjuk, hogy bármely háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, így az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező merőlegesei is. Ez azt jelenti, hogy az ABC háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

A háromszög magasságpontja a háromszögön belül van, ha a háromszög hegyesszögű, a háromszögön kívül található, ha a háromszög tompaszögű. A derékszögű háromszögnek a magasságpontja a derékszögű csúcs.

A HÁROMSZÖG SÚLYVONALAI

Egy **háromszög súlyvonalának** nevezzük a háromszög csúcspontját és a szemközti oldal felezőpontját összekötő szakaszt. A háromszögnek három súlyvonala van.

Tétel

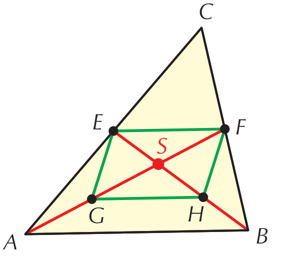


A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át, ez a pont a háromszög **súlypontja**. A háromszög bármely súlyvonalán a súlypont az oldalhoz közelebb eső harmadolópont.

Emelt szint **Bizonyítás**

A tétel bizonyításához tekintsük a háromszög AC és BC oldalának az E, illetve F felezőpontját. A háromszög BE, illetve AF súlyvonalának metszéspontját jelöljük S-sel.

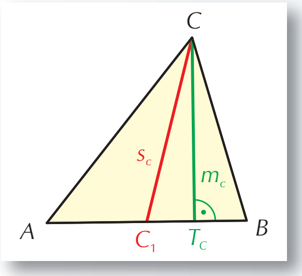
A háromszög EF középvonaláról tudjuk, hogy párhuzamos az AB oldallal, és $AB : EF = 2 : 1$.



Tekintsük most az ABS háromszöget. Jelöljük az AS és a BS szakaszok felezőpontját G-vel és H-val. Az ABS háromszög középvonala GH, ezért ez is párhuzamos az AB oldallal, és $AB : GH = 2 : 1$. Ebből következik, hogy az $EFHG$ négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő. Átlóinak metszéspontja S, ezért $SF = SG = GA$, tehát S valóban az oldalhoz közelebb eső harmadolópont az AF súlyvonalon. Hasonlóan elmondható ez a BE súlyvonalra is.

Gondolatmenetünkben bármely két súlyvonal szerepelhet, emiatt a harmadik súlyvonal is ebben az S pontban metszi az előző kettőt.

Példa



Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalai felezik a háromszög területét!

Mivel abból a csúcsból, ahonnan a súlyvonal indul, csak egy magasságot lehet húzni, ez közös magassága a két háromszögnek. A szemközti oldalt pedig két egyenlő részre osztja a súlyvonal, ezért a területek egyenlők.

Fogalmak
háromszög magasságvonala;
magassága;
magasságpontja;
súlyvonala;
súlypontja.

FELADATOK

1. Szerkesszünk háromszöget, ha adott
K1 *a)* egy oldala, a hozzá tartozó magasság és egy másik magasság;
K1 *b)* egy oldala, a hozzá tartozó súlyvonal és magasság;
K1 *c)* egy oldala és a másik két oldalhoz tartozó súlyvonala;
K1 *d)* egy oldala és a hozzá tartozó súlyvonal és egy másik súlyvonal;
K2 *e)* két oldala és a közbezárt súlyvonal;
E1 *f)* három súlyvonala!

2. E1 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonala kisebb, mint a közrefogó oldalak számtani közepe!

3. E1 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalai hosszának összege kisebb, mint a háromszög kerülete és nagyobb, mint a kerület $\frac{3}{4}$ része!

4. K2 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlypontját a háromszög csúcsaival összekötve három egyenlő területű részre bontottuk a háromszöget!

5. K2 Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = 20$ cm, $AC = BC = 26$ cm. Milyen hosszúak a háromszög magasságai és súlyvonalai?

6. E1 Jelölje egy ABC hegyesszögű háromszög magasságpontját M, és körülírt körének A-val átellenes pontját A'. Bizonyítsuk be, hogy $BMCA'$ paralelogramma!

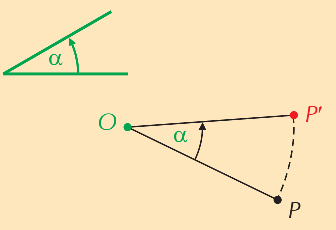
Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **526–530; 612–616; 623; 624.**

60. A PONT KÖRÜLI ELFORGATÁS ÉS TULAJDONSÁGAI

Pont körüli elforgatásnál a sík egy fix O pontját, valamint az elforgatás szögének nagyságát és irányát adjuk meg. Az elforgatást pozitívnak mondjuk, ha az óramutató járásával ellentétes irányú. Az óramutató járásával megegyező irányú forgatást negatívnak mondjuk.

Pont körüli elforgatásnál a sík egy P pontjához úgy rendeljük a P' képpontot, hogy ha P nem azonos az O-val, akkor a P pont képe az a P' pont, amelyre $OP' = OP$, és a POP' szög nagysága és iránya az elforgatás adott α irányított szögével egyezik meg. Ha P azonos az O-val, akkor a képe önmaga.

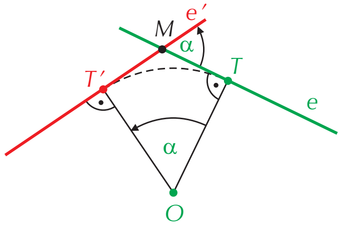


A hétköznapokból világos, hogy ha a nyári időszámítás kezdőnapján észrevesszük, hogy az óránk 5 percet késik, akkor nem elég csak egy órával (–360°-kal) előreállítani, hanem még 5 perccel (–30°-kal) többel kell tekernünk, összesen –390°-ot. Téli időszámításra való visszatéréskor 1 órával vissza kell állítani az órákat, tehát az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba kell +360°-ot forgatni. A pont körüli forgatásnál is így értelmezzük a szögeket, tehát pl. a 2008°-os forgatás azt jelenti, hogy az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba kell ötször teljesen körbeforgatni az objektumot, és még tovább 208°-kal. A szögeknek ilyen értelmezésekor **forgásszögről** beszélünk.

A leírt származtatásból következik, hogy pont körüli elforgatással az eredeti alakzat és képe fedésbe hozható. Így az elforgatás távolság-, szög- és egyenestartó. A transzformáció megfordítható. Az elforgatás a körüljárás irányát nem változtatja meg.

Ha $\alpha \neq k \cdot 360°$, akkor egyetlen fix pontja van a transzformációnak, a forgatás középpontja.

Ha $\alpha = k \cdot 360°$, akkor az identitást, ha $\alpha = (2k + 1) \cdot 180°$, akkor speciális esetként a középpontos tükrözést kapjuk (k tetszőleges egész).



Vegyünk fel egy O pontot és egy e egyenest. Forgassuk el az egyenest O körül α szöggel például pozitív irányban. Megtehetjük, hogy az egyenesen felveszünk két pontot, és ezeket forgatjuk el. A két elforgatott ponton átmenő e' egyenes az e elforgatottja. Az ábra célszerűbb eljárást mutat. O-ból merőlegest állítottunk e-re, a merőleges T talppontját forgattuk el. Az így kapott T' pontban az OT'-re állított merőleges adja az e egyenes e' elforgatottját. Az ábrán keletkezett derékszögű deltoid segítségével leolvashatjuk, hogy e és e' M-nél levő egyik szöge α. Fontos megjegyezni, hogy **az egyenes és a képe az elforgatás szögét zárja be.**

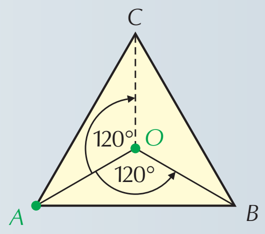
Egy alakzatot **forgásszimmetrikusnak** mondunk, ha van olyan pont és olyan α szög, hogy az alakzatot a pont körül α szöggel elforgatva a képe önmaga lesz.

Forgásszimmetrikus alakzatok a szabályos sokszögek, amelyeket például a körülírt körük középpontja körül $\frac{360°}{n}$ szöggel elforgatva a képük önmaguk. Forgásszimmetrikus alakzat a kör is tetszőleges szögre.

1. példa

Szerkesszünk szabályos háromszöget, ha adott az A csúcspontja és a körülírt körének O középpontja!

Megoldás



Az ábrán megrajzoltunk egy ABC szabályos háromszöget és körülírt körének O középpontját. Így

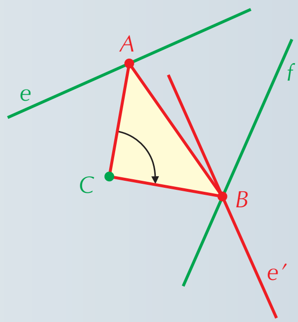
$AO = BO = CO.$

A háromszög szabályosságából az is következik, hogy az O-nál fellépő szögek 120°-osak. Az A és O ismeretében B-hez és C-hez eljuthatunk, ha A-t O körül ± 120°-kal elforgatjuk.

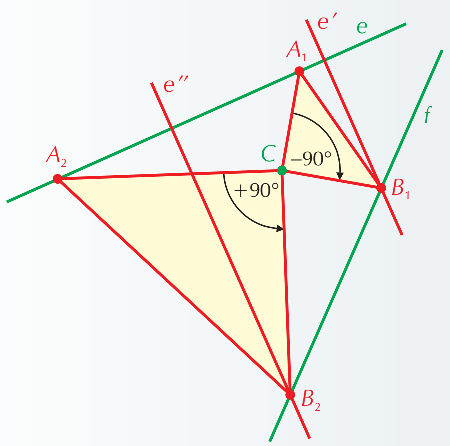
2. példa

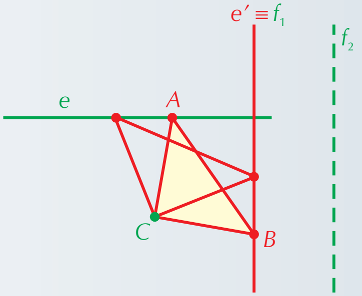
Szerkesszünk egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adott a derékszögű csúcsa, a másik két csúcsa pedig egy-egy adott egyenesen helyezkedik el!

Megoldás



Jelöljük C-vel az adott csúcsot, e-vel és f-fel az adott egyeneseket! Az ábrán a megszerkesztendő háromszöget is megrajzoltuk. Az ábráról leolvashatjuk, hogy ha az A pontot C körül megfelelő irányban 90°-kal elforgatjuk, akkor a B-be kerül. Az e egyenesen rajta van az A pont, ezért ha e-t a C körül 90°-kal elforgatjuk, az elforgatott e′ egyenes átmegy a B ponton. Tehát e′ és f metszéspontja a keresett B csúcspont. Ezt C körül 90°-kal visszaforgatva nyerjük a háromszög A csúcsát. Az e egyenest C körül kétféle irányban is elforgathatjuk. Mindkét elforgatás adhat egy-egy megoldást. Nincs megoldás, ha e′ párhuzamos f-fel (ezt az utolsó ábrán f_2-vel jelöltük), és végtelen sok megoldás van, ha e′ és f egybeesik (ezt az utolsó ábrán f_1-gyel jelöltük).





Fogalmak
pont körüli elforgatás;
forgásszög;
forgásszimmetrikus alakzat.

FELADATOK

1. K1 Szerkesszük meg egy négyzet elforgatott képét, ha
a) a középpont körül forgatunk 45°-kal;
b) a csúcsa körül forgatunk –90°-kal;
c) az egyik oldal felezőpontja körül forgatunk 60°-kal;
d) egy külső pont körül forgatunk α szöggel!

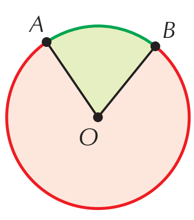
2. K2 Szerkesszünk szabályos háromszöget, ha adott egy csúcsa és
a) egy-egy egyenes, ami a másik két csúcson megy át;
b) egy egyenes és egy kör, ami a másik két csúcson megy át;
c) két kör, ami a másik két csúcson megy át!

3. E1 Adott három párhuzamos egyenes. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, amelynek egy-egy csúcsa egy-egy egyenesre illeszkedik!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **403–446.**

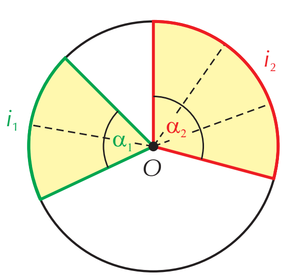
61. A KÖZÉPPONTI SZÖG ÉS A HOZZÁ TARTOZÓ KÖRÍV



Egy körvonalon vegyük fel az *A* és *B* pontot. E két pont a kört két ívre bontja. A kör *O* középpontjából kiinduló *OA, OB* félegyenesek két szöget határoznak meg. A két szögtartomány mindegyike az előbbi körívek közül egyet tartalmaz. Ha egy szög csúcsa egy kör középpontja, akkor a szöget **középponti szögnek** nevezzük. Minden középponti szöghöz tartozik egy körív és minden körívhez egy középponti szög. Szokás azt mondani, hogy a középponti szög a hozzá tartozó köríven nyugszik.

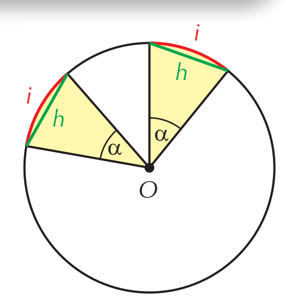
Ha egy körön két egyenlő nagyságú ívet vagy két egyenlő nagyságú középponti szöget jelölünk ki, akkor ezek egyikét a kör középpontja körül elforgathatjuk úgy, hogy fedje a másikat. Ebből következik:

Egy körben egyenlő hosszú körívekhez tartozó középponti szögek nagysága, illetve egyenlő nagyságú középponti szögekhez tartozó körívek hossza egyenlő.



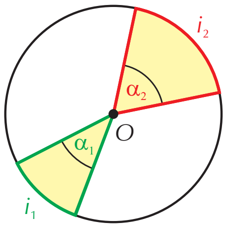
Az elforgatásból az is látható, hogy az egyenlő hosszú ívek végpontjait összekötő húrok is egyenlők hosszúak (jobb oldali ábra). Mégsem szerencsés azt mondani, hogy a középponti szög a húrhoz tartozik.

Egy körben kétszer akkora ívhez kétszer akkora középponti szög tartozik. A húr azonban nem lesz kétszer akkora! A bal oldali ábra két olyan ívet szemléltet egy körben, melyeknek aránya 2 : 3. Az ábráról az is leolvasható, hogy ekkor a megfelelő középponti



szögek aránya is 2 : 3. Hasonlóan bizonyítható bármilyen racionális arányra, hogy az ívek aránya megegyezik a középponti szögek arányával.

Általában is igaz, hogy egy körben két ív aránya megegyezik a hozzájuk tartozó középponti szögek arányával:



$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Ezt a következőképpen is fogalmazhatjuk:

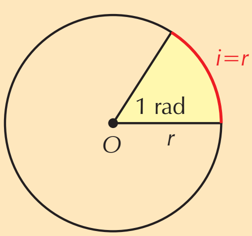
Egy körben az ív hossza egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szög nagyságával.

Megállapításaink akkor is érvényesek, ha egy kör helyett két egyenlő sugarú kört veszünk. Egyenlő sugarú körökben egyenlő középponti szögekhez egyenlő ívek tartoznak, és megfordítva.

A SZÖG ÍVMÉRTÉKE

Ha egy kör kerületét egyenlő részekre osztjuk, akkor az egyes ívekhez tartozó középponti szögek egyenlők. Ezt fogjuk most szögmérésre használni. A kör kerületét 360 egyenlő részre osztjuk. Egy ívhez tartozó középponti szög a teljesszög háromszázhatvanad része. Ezt a szöget nevezzük 1 foknak (jelben 1°), és tekintjük a szögmérés egységének. 1° hatvanadrészét 1 percnek (jelben 1′), 1′ hatvanadrészét 1 másodpercnek (jelben 1′′) nevezzük.

A mérés egységgel való összehasonlítást jelent. Egy szakasz hosszának megméréséhez hosszúságegységet (1 cm-t, 1 dm-t, 1 m-t stb.) választunk. A szakasz mérésekor azt állapítjuk meg, hogy a szakasz hányszorosa a választott egységnek. Hasonlóan járunk el az előbb leírt szögméréskor.



A fok helyett más szögegységet is használhatunk. A cél az, hogy a szöget hosszúsággal tudjuk összevetni. Írjunk a szög csúcsa köré egy kört. **Egységnyinek vesszük azt a szöget, amelyhez tartozó körív hossza egyenlő a kör sugarával. Ezt egy radiánnak nevezzük.**

Ha az ív kétszer, háromszor, *n*-szer akkora, mint a sugár, akkor a szög két, három, *n* radián. Tehát a szöghöz tartozó ív és sugár hányadosa megmutatja, hogy hány radián a szög.

Célszerű a szög csúcsa körül *egységsugarú körívet* rajzolni. Ilyenkor a *szög radiánokban mért mérőszáma megegyezik a szöghöz tartozó ív mérőszámával*. Ezért szokás egy szög radiánokban megadott mérőszámát a szög **ívmértékének** nevezni.

A **szög ívmértéke** tehát azt mutatja meg, hogy a szöghöz tartozó körív hossza hányszorosa a kör sugarának. Így a szög ívmértéke „puszta” szám.

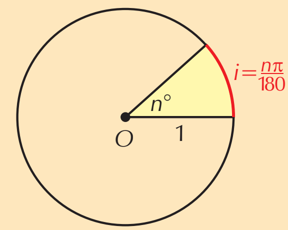
Az egységsugarú kör kerülete 2π, így a teljesszög ívmértéke 2π.

Ívmérték	Szög
π	180°
2π	360°
$\frac{\pi}{2}$	90°
$\frac{\pi}{3}$	60°
$\frac{\pi}{4}$	45°
$\frac{\pi}{6}$	30°

Az egyenesszög ívmértéke π, a derékszög ívmértéke $\frac{\pi}{2}$, a 60°-os szög ívmértéke $\frac{\pi}{3}$, a 45°-os szögé $\frac{\pi}{4}$, a 30°-os szögé $\frac{\pi}{6}$ stb.

Az 1°-os szög a teljesszög háromszázhatvanad része, így ívmértéke $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$. Ennek négy tizedesjegyre kiszámított közelítő értéke 0,0175.

Az n°-os szög ívmértéke $\frac{n\pi}{180}$. Mivel 2π radián = 360°, ezért 1 radián $= \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$. Innen 1 radián közelítőleg 57,3°. Ebből következik, hogy $\boldsymbol{p}$ **radián** $= \boldsymbol{p} \cdot \frac{180°}{\pi}$.



FELADATOK

Fogalmak
körív;
középponti szög;
ívhossz;
ívmérték;
radián.

1. K1 Mekkora a fokban megadott következő szögek ívmértéke?

a) 15°; *b)* –75°; *c)* 150°; *d)* 210°; *e)* –300°; *f)* 540°; *g)* 17°; *h)* –204°; *i)* 1234°.

2. K1 Hány fokosak az ívmértékben megadott következő szögek?

a) $\frac{3\pi}{8}$; *b)* $\frac{\pi}{18}$; *c)* $\frac{5\pi}{12}$; *d)* $\frac{2\pi}{3}$; *e)* $-\frac{\pi}{2}$; *f)* $\frac{7\pi}{15}$; *g)* $\frac{100\pi}{6}$; *h)* 1; *i)* –5; *j)* 2008.

3. (Kutatómunka) A *radián* fontos fogalom. Keress példákat az interneten, hogyan, mely témakörökben használja például a fizika tudományterülete a radián fogalmát!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **2456–2464.**

62. A KÖRÍV HOSSZA, A KÖRCIKK TERÜLETE

Láttuk már, hogy egy körben két ív aránya megegyezik a hozzájuk tartozó középponti szögek arányával:

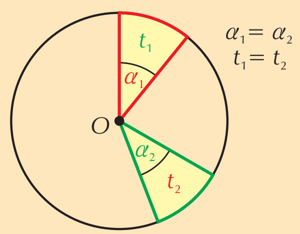
$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

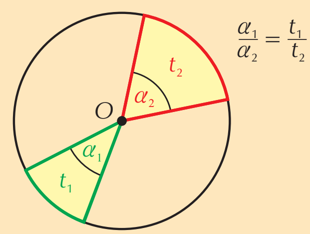
A kör kerülete $2\pi r$, így a teljesszöghöz tartozó körív hossza $2\pi r$. Ebből következik, hogy i_α-val jelölve az α középponti szöghöz tartozó körív hosszát

$$\frac{i_\alpha}{2\pi r} = \frac{\alpha°}{360°}, \quad \text{ahonnan} \quad i_\alpha = \frac{\alpha°}{360°}2r\pi = \frac{\alpha°}{180°}r\pi.$$

Ha egy körben két egyenlő nagyságú középponti szöget jelölünk ki, és nézzük az ezekhez tartozó körcikkeket, akkor ezek egyikét a kör középpontja körül elforgathatjuk úgy, hogy fedje a másikat. Ebből következik:

Egy körben két egyenlő nagyságú középponti szöghöz tartozó körcikkek területei egyenlők.
Hasonló gondolatmenet segítségével bizonyítható be, mint a köríveknél, hogy **egy körben a körcikk területe egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szöggel,** azaz $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.





A kör területe πr^2, így a teljesszöghöz tartozó körcikk területe πr^2. Ebből következik, hogy t_α-val jelölve az α középponti szöghöz tartozó körcikk területét $\frac{t_\alpha}{r^2\pi} = \frac{\alpha°}{360°}$, ahonnan $t_\alpha = \frac{\alpha°}{360°}r^2\pi$. Vessük össze ezt a képletet az ívhosszra kapottal!

Láthatjuk, hogy $t_\alpha = \frac{\alpha°}{360°}r^2\pi = \frac{i_\alpha \cdot r}{2}$. **A körcikk területét megkapjuk, ha a körív hosszát megszorozzuk a sugár felével.**

1. példa

Mekkora a 6 cm sugarú körben a 120°-os szöghöz tartozó körív hossza és a körcikk területe?

Megoldás

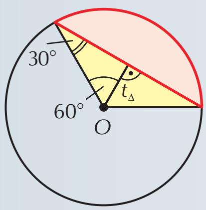
$\frac{t_\alpha}{r^2\pi} = \frac{\alpha°}{360°}$, ahol $\alpha = 120°$. Az arány jobb oldalán így $\frac{1}{3}$ áll, tehát $t_{120°} = \frac{1}{3} \cdot 36\pi = 12\pi$ (cm²). A körív hossza a kerület harmada: $i_{120°} = 4\pi$ (cm).

A kört egy húrja két részre bontja. Mindkét lemetszett részt körszeletnek hívjuk.

2. példa

Mekkora a 6 cm sugarú körben a 120°-os szöghöz tartozó kisebb körszelet területe?

Megoldás



A körcikk területéből ki kell vonni a háromszög területét. Az előbb már kiszámítottuk, hogy a körcikk területe 12π. A háromszög területe pedig egyenlő egy 6 cm oldalú szabályos háromszög területével, mivel annak a merőleges által kettévágott két része van a 3 cm-es oldalakkal összeillesztve, tehát $t_\triangle = \frac{6^2\sqrt{3}}{4}$. A körszelet területe tehát $t = 12\pi - 9\sqrt{3}$ (cm²).

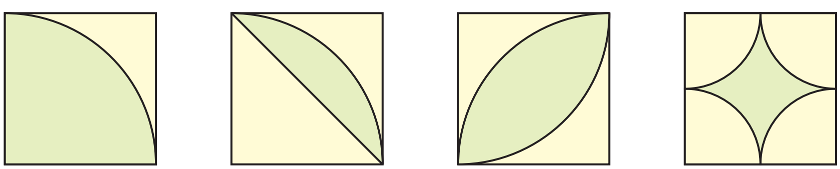
Fogalmak
körív hossza;
körcikk;
körszelet;
területük kiszámítása.

FELADATOK

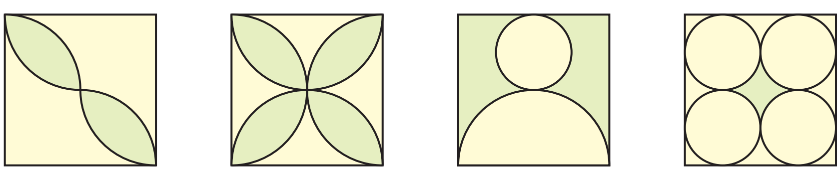
1. K1 Hány fokos középponti szög tartozik egy 6 m sugarú kör 10 m hosszú ívéhez?

2. K1 Számítsuk ki a zöld részek területét, ha a négyzet oldala egységnyi!

a)

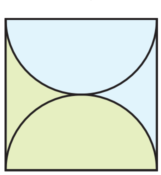


b)

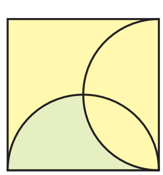


3. K2 Hányadrésze az *a)* és *b)* ábrán a zöld terület a négyzet területének? Igaz-e, hogy a *c)* ábrán a kék és sárga területek egyenlők?

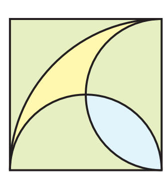
a)



b)



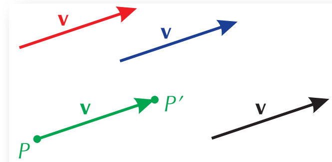
c)



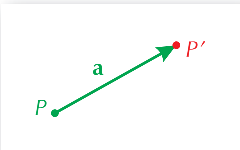
Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **1553–54; 1570; 1559.**

63–64. ELTOLÁS

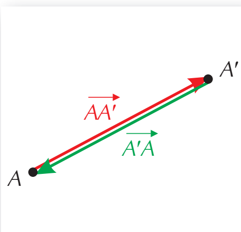


Eltoláskor a P ponthoz a P ponttól megadott irányban és megadott távolságban levő P' pontot rendeljük hozzá. Röviden azt mondjuk, hogy a PP' irányított szakasz egyértelműen meghatározza az eltolást. Az egyirányú és egyenlő hosszú irányított szakaszok ugyanazt az eltolást határozzák meg, ezért azt mondjuk, hogy az egyirányú és egyenlő hosszú irányított szakaszok egyértelműen meghatároznak egy **v** vektort.

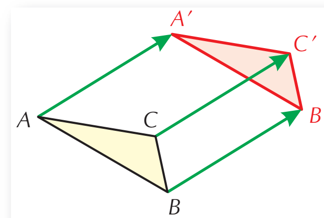


Az **a** vektorral megadott eltolásnál bármely P ponthoz a P kezdőpontú $\mathbf{a} = \overrightarrow{PP'}$ vektor P' végpontját rendeljük.

Az identitást is tekinthetjük olyan eltolásnak, amelynél a pontot (vagy alakzatot) 0 távolsággal toljuk el. Ez az eltolás milyen irányú? Teljesen mindegy. Így bevezethetjük a **0 vektor** (zérusvektor) fogalmát. A 0 vektor hossza 0, iránya tetszőleges.



Az eltolást megadja egy vektor. Az eltolást megadhatjuk jelben egy nyíllal (a nyíl hossza és iránya az eltolás hosszát és irányát adja). Az ábrán például az A-ból az A'-be mutató nyíl megadja az eltolást. Mondhatjuk, hogy az ABC háromszöget AA' irányban AA' távolsággal toltuk el.



Az $\overrightarrow{AA'}$ irányon mindig az A pontból az A' pontba mutató irányt értjük. **Az $\overrightarrow{AA'}$ irány az $\overrightarrow{A'A}$ iránnyal ellentétes.**

Az eltolás tulajdonságai:

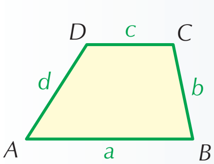
1. Az eltolt alakzat fedésbe hozható az eredeti alakzattal, tehát távolság-, egyenes- és szögtartó.
2. Bármely egyenes és az eltolt képe párhuzamos.
3. Az alakzat és az eltolt alakzat körüljárása megegyezik.
4. Az eltolásnak nincs fix pontja (ha nem nullvektorral tolunk el), de van invariáns egyenese. Ilyen minden egyenes, ami az eltolás vektorával párhuzamos.

NÉHÁNY PÉLDA AZ ELTOLÁS ALKALMAZÁSÁRA

1. példa

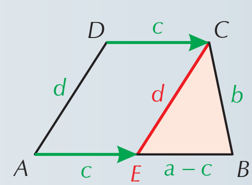
Szerkesszünk trapézt, ha adottak az a, c alapok és a b, d szárak!

Megoldás



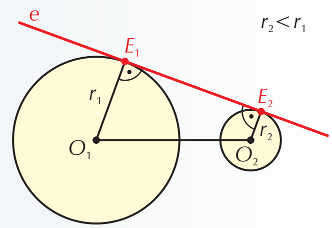
Az ábra a megoldottnak képzelt feladatot mutatja. Az ábrán nem találunk közvetlenül megszerkeszthető részletet.

A jobb oldali ábrán az AD szárat DC irányban DC távolsággal eltoltuk. EC az eltolt szár. Az EBC háromszög oldalai: $EB = a - c$, $BC = b$ és $CE = d$. Először ezt a háromszöget szerkesztjük meg. Ha e háromszög EC oldalát BE irányban c távolsággal eltoljuk, akkor a keresett $ABCD$ trapézt kapjuk.



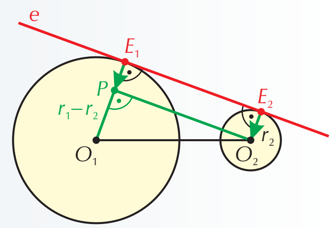
2. példa

Az ábrán az e egyenes a k_1 és k_2 körök közös érintője. Hogyan szerkeszthető meg ez az érintő, ha adott a két kör?

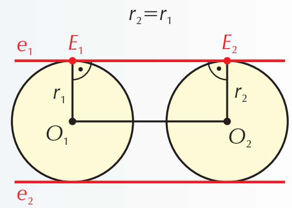


Megoldás

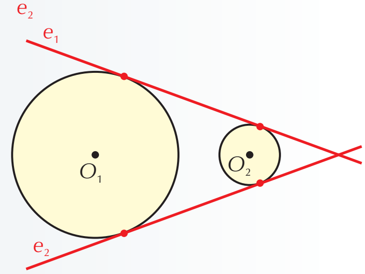
Az e érintőt ismerjük, ha az E_1, E_2 érintési pontokat megszerkesztjük. Az $O_1O_2E_2E_1$ négyszög derékszögű trapéz. A körök adottak, így adott e derékszögű trapéz r_1, r_2 és c ($= O_1O_2$) oldala is. Ezt a trapézt ismét eltolás segítségével szerkeszthetjük meg. Az E_1E_2 szakaszt toljuk el E_2O_2 irányban r_2 távolsággal, ha $r_1 > r_2$. Az E_1E_2 az eltolás után PO_2-be jut. Az O_1O_2P derékszögű háromszög O_1O_2 átfogója és $PO_1 = r_1 - r_2$ befogója ismert. Ez a háromszög tehát megszerkeszthető. (P az O_1O_2 szakasz fölé rajzolt Thalész-körön lesz O_1-től $r_1 - r_2$ távolságra.) Az O_2P szakaszt O_1P irányban r_2 távolsággal eltolva kapjuk E_1E_2-t.

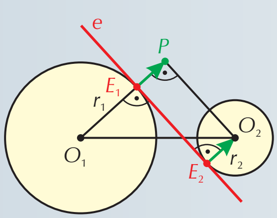


Mindig jelölhetjük r_1-gyel a nagyobbik kör sugarát, ha nem egyenlő sugarú köröket szerepeltetünk. Így kiköthetjük, hogy $r_1 > r_2$ legyen. Ha a körök egyenlő sugarúak, akkor O_1O_2-vel párhuzamos, tőle sugártávolságban haladó egyenes lesz a közös érintő. Szerkesztéskor a két középpontot összekötő egyenest merőlegesen eltoljuk mindkét irányba a sugár hosszával.

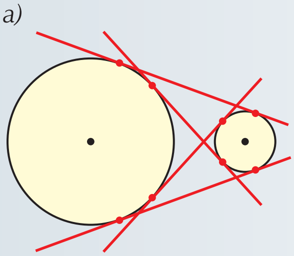


Az előbb megszerkesztett érintőt a **két kör közös külső érintőjének** szokás nevezni. Két ilyen érintő létezhet. Két körnek lehet két **közös belső érintője** is. A közös belső érintőket az előbbihez hasonlóan eltolással szerkeszthetjük meg. A szerkesztés az ábráról leolvasható. A metsző köröknek nincs közös belső érintőjük. Ha az egyik kör tartalmazza a másikat, akkor nincsenek közös érintőik.

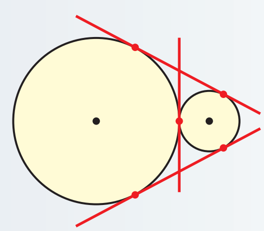




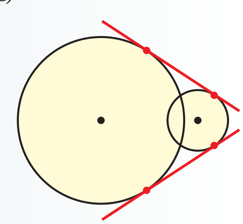
a)



b)

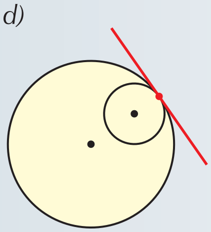


c)

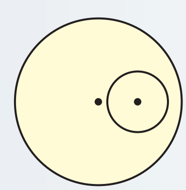


Fogalmak
eltolás;
irányított szakasz;
vektor;
két kör közös érintői.

d)



e)



FELADATOK

1. K1 Toljunk el egy háromszöget
a) az egyik oldalvektorával;
b) a háromszög súlypontjából a körülírt kör középpontjába mutató vektorral!

2. K2 Szerkesszünk trapézt, ha adottak az átlói, az átlók szöge és
a) az egyik alapja;
b) az egyik szára!

3. K2 Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott egyik oldala és a másik két csúcson átmenő
a) egy-egy egyenes;
b) egy kör és egy egyenes!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **447–488.**

65. A VEKTOR FOGALMA

Az előző leckében az *ABCD* trapéz egyik szárát *DC* irányban a *DC* oldal hosszával toltuk el. Ezt az eltolást a 237. oldali ábrán két nyíl mutatja. Elegendő egy nyilat is bárhol megrajzolni, ha ezt úgy értjük, hogy minden szükséges pontot, esetleg az egész síkot vagy a teret a nyíllal megjelölt irányban a nyíl hosszával el kell tolni.

Az eltolást tehát egy vektorral adhatjuk meg.

Megjegyzés

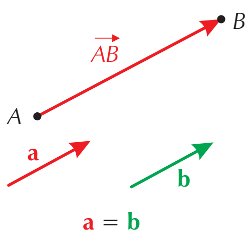
Találkoztunk már ilyen furcsasággal a matematikában például az oszthatóságnál. Amikor azt mondjuk, hogy nézzük az öttel osztva 3 maradékot adó számok halmazát, akkor reprezentálhatjuk ezt a halmazt a 3-mal, a 98-cal vagy akár a 2008-cal is.

Két vektor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik.

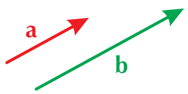
Ha egy vektort úgy helyezünk el, hogy kezdőpontja az *A* pont, végpontja a *B* pont, akkor ezt a vektort a következőképpen jelöljük: $\overrightarrow{AB}$.

Legtöbbször nem érdemes a vektor kezdő- és végpontját külön jelölni, hanem magát a vektort jelöljük egy betűvel. Írásban a vektort aláhúzott latin kisbetűvel, nyomtatásban vastag (félkövér) betűvel jelöljük.

Az ábrán szereplő **a** és **b** vektorok egyenlők. Az egyenlő vektorokat szokás ugyanazzal a betűvel is jelölni.

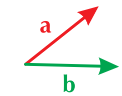


A vektor hosszát a *vektor abszolút értékének* nevezzük. Jelölése: $|\overrightarrow{AB}|$; $|\mathbf{a}|$.
A vektor jellemzői tehát a hossza (abszolút értéke) és az iránya. Kezdőpontját bárhol felvehetjük.



$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

A jobb oldali ábra **a** és **b** vektora nem egyenlő, bár hosszuk megegyezik, de irányuk különböző. A bal oldali ábra **a** és **b** vektora egyező irányú ugyan, de hosszuk különböző, tehát e két vektor sem egyenlő.



$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$

Vektorokkal a fizikában is találkozunk. Budapesttől Szeged légvonalban kb. 150 km távolságra van. Ha azt tudjuk, hogy egy repülőgép Budapesttől 150 km-t távolodott, akkor még nem mondhatjuk, hogy Szeged fölött jár. Lehet például Dombóvár, Baja vagy Miskolc fölött is. Az elmozdulást tehát csak a hosszával nem jellemezhetjük, meg kell adnunk az elmozdulás irányát is. Az elmozdulás vektormennyiség, irányított szakasszal ábrázoljuk. Az elmozduláson kívül vektormennyiség például a sebesség és az erő is, de későbbi tanulmányainkban más vektormennyiségeket is meg fogunk ismerni.

Fogalmak
irányított szakasz;
vektor;
vektor
abszolút értéke;
iránya;
nullvektor.

FELADATOK

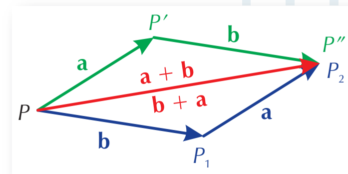
1. K1 Egyenlő-e a négyzet két átlóvektora?

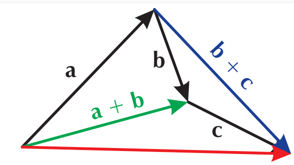
2. K2 Egyenlők-e a kocka szemközti lapjain párhuzamosan futó átlóvektorok?

3. K1 Van-e olyan vektor, ami egyenlő a 45°-os elforgatottjával?

4. K1 Van-e olyan vektor, ami egyenlő a kétszeres nyújtásával?

66. VEKTOROK ÖSSZEADÁSA



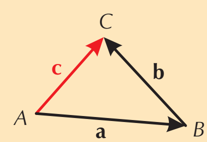


(a + b) + c = a + (b + c)

Legyen egy *f* transzformáció az **a** vektorral, egy *g* transzformáció a **b** vektorral történő eltolás. Először hajtsuk végre elsőnek az *f*, másodiknak a *g* transzformációt. Azután csináljuk fordítva, hajtsuk végre elsőnek a *g*, másodiknak az *f* transzformációt. Ugyanahhoz a képponthoz jutunk, hiszen a két vektornak egy pontból kétféle sorrendben történő egymás utáni felmérésével paralelogramma keletkezett. A kiindulóponttal átellenes paralelogrammacsúcsba jutottunk. A két eltolás helyettesíthető egyetlen eltolással, amelynek vektorát a két közös pontba felmért vektor által kifeszített paralelogramma ugyanabból a pontból induló átlója reprezentálja. Az *ábrák* vizsgálatakor azt látjuk, hogy az **a** és **b** vektort egymás után mértük fel: az egyik vektor végpontjába került a másik vektor kezdőpontja. A két vektor közül az első kezdőpontját összekötöttük a másik vektor végpontjával, és ezt a szakaszt a végpont felé irányítottuk. Erre az eljárásra külön elnevezést vezetünk be, ezt **két vektor összeadásának**, a kapott vektort pedig a **két vektor összegének** nevezzük.

Definíció

Adott az **a** és **b** vektor. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor *B* végpontjába mérjük fel a $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ vektort. Az **a** és **b** vektor összege:

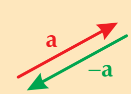


$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{c}.$$

Ez a definíció akkor is használható, ha a két vektor egyirányú vagy ellentétes irányú, tehát ha a két vektor nem határoz meg paralelogrammát.

Vektorok összegezésére beláthatók a következő tulajdonságok.

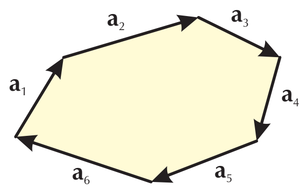
1. Két vektor összege független az összeadandók sorrendjétől: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, azaz a vektorok összeadása **kommutatív** művelet.
2. Három vektor összege független az összeadandók csoportosításától (**asszociatív** művelet): $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$. Ezt beláthatjuk az ábráról.
   Ennek a tulajdonságnak az újabb alkalmazásából következik, hogy véges sok vektor összege a vektorok csoportosításától független.
3. Értelemszerűen $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
4. Minden eltoláshoz tartozik egy „visszatolás”, azt mondjuk, hogy minden vektornak van **ellentett vektora**, ami éppen a „visszatolás”-t adja meg. Ez tehát **a**-val egyenlő hosszú és ellentétes irányú. Két egyenlő hosszú, de ellentétes irányú vektor összege a nullvektor.



$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

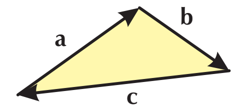
Az egyenlő hosszú, de ellentétes irányú vektorokat ellentett vektoroknak nevezzük.
A számokkal való analógia indokolja, hogy az **a** ellentettjét **–a**-val jelöljük.

$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$



$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6 = \mathbf{0}$

A ábrán három olyan vektort adtunk össze, amelyek egymáshoz fűzve háromszöget alkotnak. E vektorok összege **0**. A nullvektorhoz jutunk akkor is, ha háromnál több olyan vektort adunk össze, amelyek egymáshoz fűzve zárt sokszöget alkotnak.



$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

1. példa

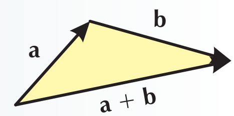
Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges **a** és **b** vektor esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség-rendszer!

$\left||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|\right| \le |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$

Megoldás

Fogalmak
vektorok összeadása;
a vektorösszeadás tulajdonságai.

A tetszőleges **a** és **b** vektort vegyük fel az ábra szerint. Az **a**, **b** és **a** + **b** vektorok háromszöget határoznak meg, abszolút értékeik a háromszög oldalhosszai. Az egyenlőtlenség-rendszer a háromszög-egyenlőtlenség kétféle alakjának az összekapcsolása. Az első egyenlőség akkor teljesül, ha – az ábrától eltérően – az **a** és **b** ellentétes irányú vektorok, a második akkor, ha azonos irányúak.



Megjegyzés
Észrevehetjük, hogy az abszolútérték-jel vektorok hosszát és valós szám abszolút értékét is jelöli az egyenlőtlenségben.

FELADATOK

1. K1 Rajzoljunk tetszőleges négyszöget. Szerkesszük meg az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ összegvektort!

2. K1 Fejezzük ki a kocka egy csúcsból induló három oldalvektora segítségével az adott csúcsból a többi csúcsba mutató vektorokat!

3. K1 Fejezzük ki egy szabályos hatszög egyik csúcsából induló két oldalvektora segítségével az adott csúcsból a többi csúcsba mutató vektorokat! ($\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF}$ vektort $2\overrightarrow{EF}$ vektornak szokás írni.)

4. K2 Három (egyenlő tömegű) kutya egyenlő nagyságú erővel húzza ugyanazt a zsákmányt. Mekkora szöget zár be közülük két kutya által kifejtett erő, ha egy tapodtat sem tudnak semmilyen irányba mozdulni?

5. E1 Szerkesszük meg a háromszög súlypontjából a csúcsokba mutató három vektor összegét! Mit tapasztalunk? Indokoljuk!

6. K2 A folyó sebessége $3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A folyásirányra merőlegesen $4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel evezünk.
Szerkesszük meg a csónak haladási irányát és sebességét!

Ajánlott feladatok

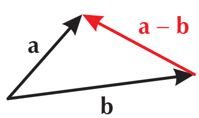
Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **2282–2316.**

67. KÉT VEKTOR KÜLÖNBSÉGE

Az **a** – **b** jelölést használjuk, és az **a** és **b** vektor különbségének nevezzük azt a vektort, amit úgy kapunk, hogy az **a** vektorhoz hozzáadjuk a **b** vektor ellentettjét. Tehát

a – **b** = **a** + (–**b**).

Az **a** – **b** különbségvektor értelmezéséből (és az összeadás tulajdonságaiból) következik, hogy ha a **b** vektorhoz hozzáadjuk **a** – **b** vektort, az **a** vektort kapjuk.



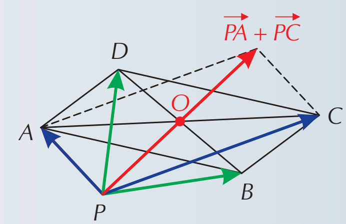
Az **a** és **b** vektor **a** – **b** különbségvektorát úgy is megszerkeszthetjük, hogy a két vektort közös pontból mérjük fel, és a két vektor különbsége a kivonandó vektor végpontjából a kisebbítendő vektor végpontjába mutat.

Az **a – b** és a **b – a** vektorok tehát ellentett vektorok.

1. példa

Bizonyítsuk be, hogy ha $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$, akkor az AB és CD szakaszok valamely O pontra szimmetrikusak!

Megoldás



Az eredeti egyenlőség átírva a következő:

$\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC}$.

A bal és a jobb oldalon álló különbségeket egyszerűbben felírva a $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ egyenlőséget kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a BA és a CD szakasz egyenlő hosszú és párhuzamos. Emiatt az $ABCD$ négyszög paralelogramma, tehát középpontosan szimmetrikus.

Speciális esetben előfordulhat, hogy az említett vektorok között van **0** vektor, vagy az említett pontok egy egyenesre illeszkednek. Ebben az esetben is belátható az állítás, bár akkor nem jutunk paralelogrammához.

Fogalom
két vektor különbsége.

FELADATOK

1. K2 Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor abszolút értéke egyenlő, akkor a két vektor összege és különbsége merőleges egymásra!

2. K2 Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor összege és különbsége merőleges egymásra, akkor a két vektor abszolút értéke egyenlő!

3. K2 A folyó sebessége $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Szeretnénk pontosan szemben partot érni. Milyen irányba induljunk el, ha $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel tudunk evezni?

4. E1 Bizonyítsuk be, hogy a háromszög körülírt körének középpontjából a csúcsokhoz mutató vektorok összege a háromszög magasságpontjába mutat!

5. E1 Tekintsük az *ABCD* négyszög *AD* oldalának felezőpontját *E*-t, és BC oldalának felezőpontját, *F*-et. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög $\overrightarrow{EF}$ középvonalvektorára igaz, hogy $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$!

6. K2 Jelölje egy szabályos hatszög csúcsait *A, B, C, D, E, F*. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \mathbf{0}$, és $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA} = \mathbf{0}$!

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **2282–2316.**

68. EGYBEVÁGÓSÁG

Korábban megismerkedtünk az identitással, a tengely körüli elforgatással, az egyenesre, pontra és síkra vonatkozó tükrözéssel, az eltolással és a síkban a pont körüli elforgatással. A felsorolt **geometriai transzformációk** mindegyike **távolságtartó**. Ez azt jelenti, hogy bármely szakasz és tükörképe, elforgatottja vagy eltoltja („megfelelője") egyenlő hosszú. A távolságtartó transzformációkat összefoglaló néven egybevágósági transzformációknak, vagy egybevágóságoknak nevezzük.

Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amelyik az egyik alakzatot a másikba viszi át.

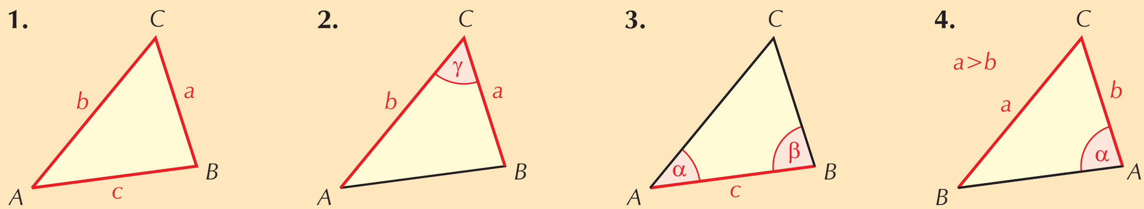
Az egybevágóság jele: ≅.

Egybevágó az ábrán látható bal és jobb cipő is. Egyik a másikba síkra vonatkozó tükrözéssel vihető át.

Két alakzat egybevágóságának az eldöntéséhez sokszor elegendő bizonyos „meghatározó" adatainak az egyenlőségét kimutatni. Nincs tehát feltétlenül szükség az egyiket a másikba átvivő egybevágósági transzformáció megkeresésére. Például a kör ilyen meghatározó adata a sugara. Két egyenlő sugarú kör egybevágó.

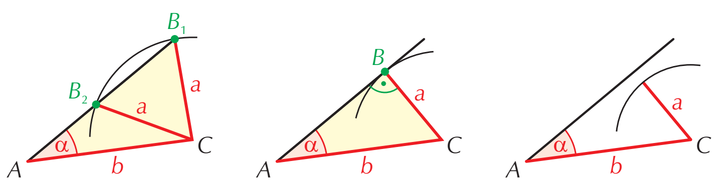
Már az általános iskolában megismertük, hogy a következő négy alapesetben megszerkeszthető a háromszög:

1. Adott a háromszög három oldala.
2. Adott a háromszög két oldala (a és b) és az ezek által közrefogott szög (γ).
3. Adott a háromszög egy oldala (c) és a rajta fekvő két szög (α és β). (Természetesen bármely kettőből a harmadik szög kiszámítható. Valójában csak az fontos, hogy két egymásnak megfelelő szög legyen adva.)
4. Adott a háromszög két oldala ($a > b$) és a nagyobbikkal szemben levő szöge (α).



Három oldalból természetesen csak akkor szerkeszthető háromszög, ha a megadott oldalakra a háromszög-egyenlőtlenségek teljesülnek. A 2. alapesetben a szerkeszthetőség feltétele, hogy a megadott szög 180°-nál kisebb legyen. A 3. alapesetben csak akkor szerkeszthető meg a háromszög, ha a két adott szög összege kisebb mint 180°.

A 4. alapesetben lényeges az, hogy a nagyobbik oldallal szemközti szög szerepeljen. Amennyiben a, b, és α adott, és $a < b$, akkor lehetséges, hogy ezekkel az adatokkal nem szerkeszthetünk háromszöget; lehet, hogy egy háromszöget, de az is lehet, hogy két nem egybevágó háromszöget szerkeszthetünk.



A négy alapesetben a háromszöget **egyértelműen** tudjuk megszerkeszteni. Ez azt jelenti, hogy ha ugyanazokkal az adatokkal két háromszöget szerkesztünk, akkor a két háromszög egybevágó.

Elmondhatjuk tehát, hogy **két háromszög egybevágó, ha**
1. oldalaik páronként egyenlők;
2. két oldal és az ezek által közrefogott szög a két háromszögben páronként egyenlő;
3. egy oldal és a rajta fekvő két szög a két háromszögben páronként egyenlő;
4. két oldaluk és ezek közül a nagyobbikkal szemben fekvő szögük páronként egyenlő.
Ezek a háromszögek egybevágóságának alapesetei.

A háromszög megszerkesztéséhez általában **három adat** szükséges. Természetesen három szög nem határozza meg a háromszöget, még akkor sem, ha úgy adjuk meg a három szöget, hogy összegük 180°. **Háromszöget csak három független adatból szerkeszthetünk.**

Sokszögek egybevágóságához nem elég az oldalak egyenlősége, gondoljunk például a 45°–135°-os szögű rombusz és a vele egyenlő oldalú négyzet esetére. Egy oldal és a megfelelő szögek egyenlősége sem biztosítja az egybevágóságot, elég, ha egy négyzetre és egy vele közös oldalú nem egyenlő oldalú téglalapra gondolunk. Elégséges feltétel sokszögek egybevágóságára, ha minden megfelelő oldaluk és minden megfelelő szögük egyenlő, vagy ha minden megfelelő oldaluk és minden megfelelő átlójuk egyenlő.

Emelt szint

A négyszög egyik átlójával két háromszögre bontható. A két háromszög azonban nem független egymástól, van egy közös oldaluk. Így csupán az egyik háromszög megszerkesztéséhez van szükség három adatra, a másikhoz már elég további két adat.

Az általános négyszög megszerkesztéséhez általában öt független adatra van szükségünk.

Hasonló gondolatmenettel ki lehet számolni, hány adat kell egy *n*-szög megszerkesztéséhez.

Kiegészítő anyag

A definícióból (távolságtartás) következik, hogy egybevágósági transzformációk egymás utáni alkalmazása (azaz a transzformációk *szorzata*) szintén egybevágóságot eredményez. Egy szép tétel szerint bármely síkbeli egybevágóság előállítható tengelyes tükrözések szorzataként; sőt az is igaz, hogy elegendő legfeljebb három tengelyes tükrözés alkalmazása. (Például a forgatás két metsző, az eltolás pedig két párhuzamos egyenesre történő tükrözéssel helyettesíthető.)

Fogalmak
két alakzat egybevágósága;
a háromszögek egybevágóságának alapesetei;
sokszögek egybevágóságának elégséges feltétele.

FELADATOK

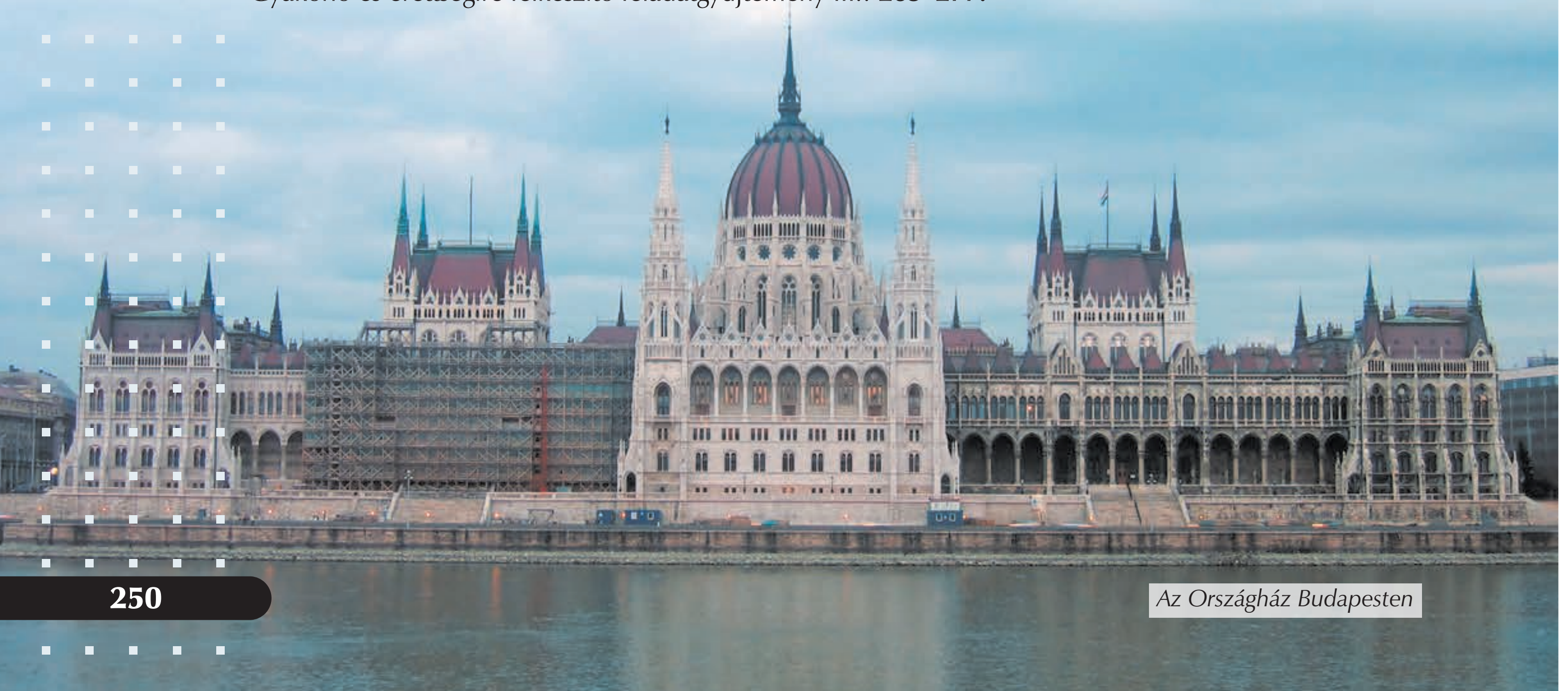
1. E1 Bizonyítsuk be, hogy két szabályos háromszög egybevágó, ha megegyezik
a) a magasságuk;
b) a beírt körük sugara!

2. E1 Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő szárú derékszögű háromszög egybevágó, ha megegyezik
a) a befogójuk;
b) a háromszög köré írt körük sugara!

3. Melyek igazak a következő állítások közül? Válaszunkat indokoljuk!
K2 *a)* Két háromszög egybevágó, ha megegyezik két szögük és egy oldaluk.
K2 *b)* Ha egy háromszögben két magasság egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.
E1 *c)* Két háromszög egybevágó, ha megegyezik két szögük és a harmadik csúcshoz tartozó magasságuk.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.: **263–277.**



Az Országház Budapesten

69. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK EGYMÁS UTÁNI VÉGREHAJTÁSA

Megismerkedtünk a legfontosabb síkbeli egybevágósági transzformációkkal: a tengelyes tükrözéssel, a középpontos tükrözéssel, a forgatással és az eltolással. Természetesen egymás után több transzformációt is végrehajthatunk, és a sík bármely pontjára elvégezhetjük az előírt leképezéseket. Több transzformáció egymás utáni végrehajtása, a papír alapú szerkesztés elég időigényes munka, ezért érdemes valamilyen digitális segédprogramot használnunk. Ebben a leckében a GeoGebra szoftverrel végzünk néhány szerkesztést. A programban a transzformációk végrehajtása egyszerű műveletekkel történik, és mivel interaktív a felület, nagyon alkalmas a transzformációk egymás utáni alkalmazásának szemléltetésére. (Az interaktív programok esetében, ha az alappontok helyzetét változtatjuk, akkor a származtatott pontok új helyzete azonnal megjelenik.)

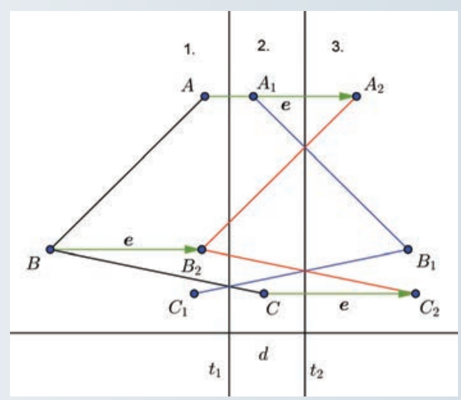
Mint az előző lecke végén szerepelt, az egybevágósági transzformációk – definíció szerint – távolságtartók, ezért egymás utáni végrehajtásuk eredménye is távolságtartó, azaz egybevágósági transzformáció lesz. (A transzformációk egymás utáni végrehajtását nevezik transzformációk *egymásutánjának* vagy *szorzatának* is.)

1. példa

Tükrözzük a sík pontjait egymás után két párhuzamos egyenesre! Mit állíthatunk az eredményről?

Megoldás

Az ábrán látható A, B, C pontokat először a t_1 tengelyre tükröztük (a képpontok A_1, B_1, C_1), majd a képpontokat a t_2 tengelyre, így kaptuk az A_2, B_2, C_2 pontokat. Az A, B, C pontok helyzetét változtatva azt sejthetjük, hogy a t_1 és t_2 tengelyes tükrözések egymás utáni végrehajtása egy olyan **e** vektorú eltolást eredményez, amely merőleges a tengelyekre, a hossza a két tengely d távolságának kétszerese, azaz $2d$, és iránya t_1 felől t_2 felé mutat.



A bizonyítás során több esetet kellene megvizsgálnunk, attól függően, hogy a pontok és képeik az 1., 2. és 3. síktartományok közül melyikbe, vagy éppen melyik tengelyre esnek. A pontok elhelyezkedésének időigényes diszkussziója helyett elegendő, ha a GeoGebrában a kiindulási pontokat az egérrel mozgatjuk; a megfelelő képpontok mozgásai megerősítik a sejtést.

Az állítást bebizonyítjuk például az A pont egyszerű esetére: $\overline{AA_1} = 2\overline{A_1t_1}$, $\overline{A_1A_2} = 2\overline{A_1t_2}$, így $\overline{AA_2} = 2(\overline{A_1t_1} + \overline{A_1t_2}) = 2\overline{t_1t_2} = 2d$ (és a szakaszok merőlegesek a tengelyekre).

Megjegyzések (kiegészítő anyag):

1. Számít a tengelyek sorrendje: a t_2, majd t_1 tükrözések egymásutánja az ellentett vektorú eltolást adja.

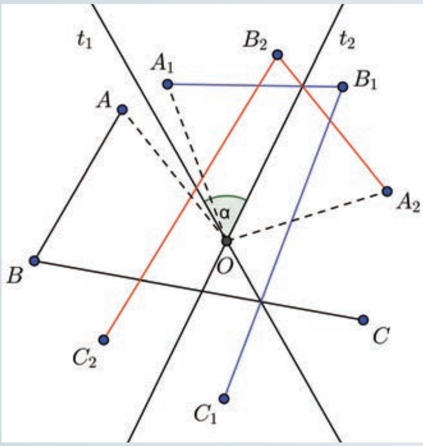
2. Az is igaz, hogy nem számít a párhuzamos tengelyek konkrét helyzete, csak a két tengely távolsága. A t_1-et – önmagával párhuzamosan – bárhol felvehetjük. Ha a t_2-t tőle d távolságban (és megfelelő irányban) vesszük fel, akkor a két transzformáció egymásutánja ugyanazt az eredményt adja.

3. Az előző pontból az eredeti állításunk „fordítottja” is következik: bármely eltolást előállíthatunk két megfelelő tengelyes tükrözés egymás utáni alkalmazásával.

2. példa

Tükrözzük a sík pontjait egymás után két egymást metsző egyenesre! Mit állíthatunk az eredményről?

Megoldás



Az ábrán látható A, B, C pontokat először a t_1 tengelyre tükröztük (a képpontok A_1, B_1, C_1), majd a képpontokat a t_2 tengelyre, így kaptuk az A_2, B_2, C_2 pontokat. Az A, B, C pontok helyzetét változtatva azt sejthetjük, hogy a t_1 és t_2 tengelyes tükrözések egymás utáni végrehajtása egy olyan forgatást eredményez, amely szöge a két tengely α hajlásszögének a kétszerese, azaz 2α, és iránya megegyezik α irányával.

Ez a transzformációs kapcsolat már nehezebben vehető észre. Segíthet például, ha felhasználjuk, hogy az A, A_1 és A_2 pontoknak a két egyenes O metszéspontjától való távolsága állandó marad: $AO = A_1O = A_2O$.

A bizonyítás során most is több esetet kellene megvizsgálnunk, attól függően, hogy a pontok és képeik melyik szögtartományokba, vagy éppen melyik tengelyre esnek. Például az ábrán látható A, A_1, A_2 pontok esetén egyszerű a bizonyítás, mert az OA_1 szakasz két részre osztja α-t, és a tükrözések miatt az AOA_2 szögben mindkét rész kétszer jelenik meg: $AOA_2\sphericalangle = 2\alpha$.

Megjegyzések (kiegészítő anyag):

1. Számít a tengelyek sorrendje: a t_2, majd t_1 tükrözések egymásutánja ellentétes irányú forgatást eredményez.

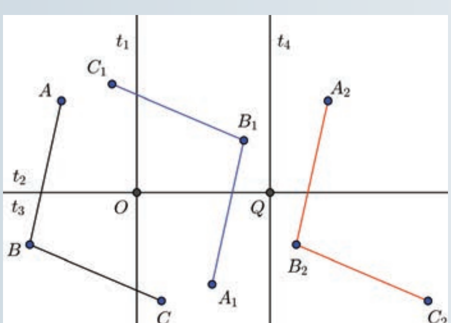
2. Most sem számít a tengelyek konkrét helyzete, csak a két tengely bezárt szöge, és hogy ezek az O pontban metsszék egymást. A t_1-et – O-n áthaladva – bárhogyan felvehetjük. Ha a t_2 áthalad O-n, és (a megfelelő irányban) α szöget zár be t_1-gyel, akkor a két transzformáció egymásutánja állandó eredményt ad.

3. Az előző pontból az eredeti állításunk „fordítottja" is következik: bármely O pont körüli, 2α szögű forgatást előállíthatunk két megfelelő tengelyes tükrözés egymás utáni alkalmazásával, ha a tengelyek O-ban metszik egymást, és bezárt szögük α.

3. példa

Milyen transzformációval helyettesíthető két középpontos tükrözés egymásutánja?

Megoldás



Az ábrán látható A, B, C pontokat először az O pontra tükröztük (a képpontok A_1, B_1, C_1), majd a képpontokat a Q pontra, így kaptuk az A_2, B_2, C_2 pontokat. Az A, B, C pontok helyzetét változtatva azt sejthetjük, hogy az O és Q centrumú középpontos tükrözés egymás utáni végrehajtása egy olyan eltolást eredményez, amely vektora az $\overrightarrow{OQ}$-val megegyező irányú, hossza pedig annak kétszerese. (Ezt úgy is jelöljük, hogy az eltolás vektora $2 \cdot \overrightarrow{OQ}$.)

A bizonyításhoz ismét több tárgypont képeit kellene megvizsgálnunk, de ehelyett ügyesebben is eljárhatunk, ha figyelembe vesszük az 1. és 2. példa eredményeit.

Először észrevehetjük, hogy a középpontos tükrözés megegyezik az adott pont körüli 180°-os forgatással. Az O pont körüli 180°-os forgatást pedig – a 2. példa alapján – elő tudjuk állítani két tengelyes tükrözés (t_1 és t_2) egymásutánjaként, ha a tengelyek egymással $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ nagyságú szöget zárnak be, és O-ban metszik egymást. (Állásuk egyébként tetszőleges lehet.)

Hasonlót mondhatunk a Q centrumú középpontos tükrözésről is: előállítható a t_3 és t_4 tengelyes tükrözések egymásutánjaként, ha ezek merőlegesek egymásra, és Q-ban metszik egymást.

Az O és Q középpontos tükrözések egymásutánját előállíthatjuk tehát a t_1, t_2, t_3 és t_4 tengelyes tükrözések egymás utáni végrehajtásával. A tengelyek megválasztásában van egy kis szabadságunk: felvehetjük őket úgy, hogy a t_2 és t_3 tengely egybeessen (lásd az ábrát). Mivel ekkor a t_2 és t_3 tükrözések egymásutánja helyben hagyás (identitás), a négy tengelyes tükrözés csak t_1 és t_4 végrehajtására egyszerűsödik.

Azt pedig már láttuk az 1. példában, hogy a t_1 és t_4 párhuzamos egyenesekre való tükrözések egymásutánja éppen az $\overrightarrow{OQ}$ kétszeresével való eltolást eredményezi.

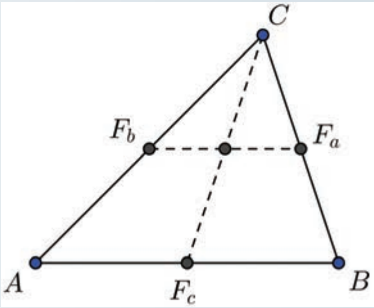
Kiegészítő anyag

4. példa

a) Adottak egy háromszög oldalfelező pontjai. Szerkesszük meg a háromszöget!
b) Adottak egy négyszög oldalfelező pontjai. Szerkesszük meg a négyszöget!
c) Adottak egy ötszög oldalfelező pontjai. Szerkesszük meg az ötszöget!

Megoldás

a) Többféleképpen is eljárhatunk. Az ábra szerinti betűzést használva tudjuk, hogy az F_bF_a középvonal párhuzamos AB-vel, és hossza feleakkora. Ezért ha F_c-ből felmérjük az $\overrightarrow{F_bF_a}$ vektort, megkapjuk B-t, és a többi csúcs hasonlóan szerkeszthető.



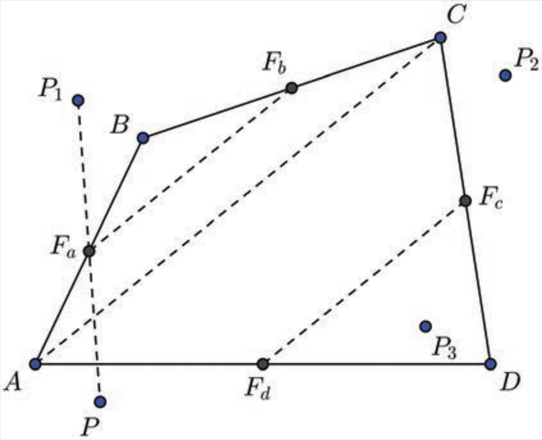
Más megoldási lehetőségek:

– Ha párhuzamost húzunk F_bF_a-val F_c-n keresztül, akkor megkapjuk az AB oldal egyenesét, és hasonlóan megszerkeszthetjük a másik két oldalegyenest is. Ezek kijelölik a háromszöget.

– Vagy észrevehetjük, hogy $F_bF_cF_aC$ *négyszög* paralelogramma (szemközti oldalai párhuzamosak), így ha F_c-t tükrözzük az F_bF_a szakasz felezőpontjára, megkapjuk C-t. (És hasonlóan adódik a többi csúcs is.)

A háromszög mindig megszerkeszthető, ha F_a, F_b és F_c nincs egy egyenesen.

b) Tekintsük a feladatot megoldottnak, és próbáljunk a keresett A, B, C, D csúcsok között valamilyen transzformációs kapcsolatot találni! (Az ábra szerinti betűzést használjuk.)



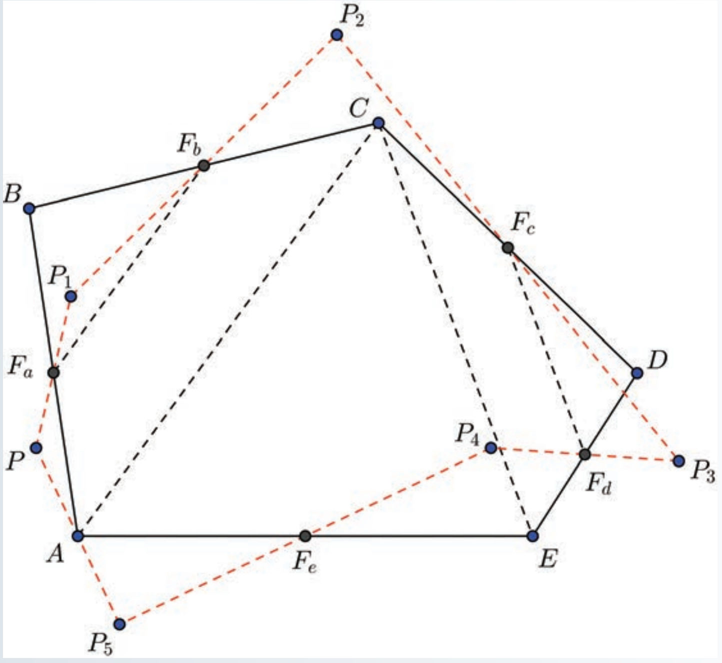
Ha az A csúcsot tükrözzük F_a-ra, akkor B-t kapjuk; és ha B-t tükrözzük F_b-re, akkor C-t. A 3. példa megjegyzésében láttuk, hogy két középpontos tükrözés helyettesíthető egy eltolással, most az $\overrightarrow{F_aF_b}$ kétszerese, $\overrightarrow{AC}$ az eltolás vektora. (Ezt az eredményt kapjuk akkor is, ha észrevesszük, hogy az ABC háromszögben F_aF_b középvonal.)

Ha C-t tükrözzük F_c-re, akkor D-t kapjuk, és ha D-t tükrözzük F_d-re, akkor A-t. Az F_c és F_d centrumú középpontos tükrözés eredménye a $\overrightarrow{CA}$ vektorú eltolás, ami az előző $\overrightarrow{AC}$ vektor ellentettje. Két ilyen eltolás eredménye pedig helyben hagyás (identitás).

Az *A* pont helyzetéről semmilyen feltevésünk nem volt, így érdekes eredményt fogalmazhatunk meg: ha egy tetszőleges pontot tükrözünk az F_a, F_b, F_c, F_d pontokra (a tükrözést mindig az aktuális képponttal folytatva), akkor a negyedik tükrözés után az eredeti pontot kapjuk. A feladatnak tehát általában végtelen sok megoldása van: az F_a, F_b, F_c, F_d pontokon kívül a sík bármely pontja lehet a négyszög egyik (*A*) csúcsa, mindig szerkeszthető (esetleg konkáv) négyszög. (Az ábrán egy tetszőleges *P* pont képeit is feltüntettük.)

A megoldhatóságnak persze szükséges feltétele, hogy a négy kiindulási pont, $F_aF_bF_cF_d$ paralelogrammát alkosson. Ugyanis F_cF_d középvonal az *ADC* háromszögben, párhuzamos *AC*-vel és hossza feleakkora; ezért F_aF_b és F_cF_d párhuzamos és egyenlő hosszú.

c) Tekintsük a feladatot megoldottnak! Az ábrán F_a, F_b, F_c, F_d, F_e jelöli az oldalak felezőpontjait, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* az ötszög (szerkesztendő) csúcsait. A négyszög szerkesztéséhez hasonlóan transzformációs lépésekkel próbálkozunk.



Ha egy tetszőleges *P* pontot tükrözünk az F_a, F_b, F_c, F_d, F_e pontokra (a tükrözést mindig az aktuális képponttal folytatva), akkor az ötödik tükrözés után a P_5 pontot kapjuk. A GeoGebrát alkalmazva érdekes sejtést fogalmazhatunk meg.

Úgy tűnik, akárhogy is változtatjuk a *P* pont kezdőhelyzetét, az *A* csúcs mindig a PP_5 szakasz felezőpontja marad. Hogyan tudnánk ezt a sejtést igazolni?

Amikor a *P* pontot tükrözzük F_a-ra, majd P_1-et F_b-re, akkor a két középpontos tükrözés helyettesíthető egy eltolással. Mivel F_aF_b az *ABC* háromszögben középvonal, ezért ennek az eltolásnak a vektora $\overrightarrow{AC}$. (Kaptuk: $\overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{AC}$.)

Hasonlóan ha P_2-t tükrözzük F_c-re, majd a P_3-at F_d-re, akkor a két középpontos tükrözés ismét helyettesíthető egy eltolással. Az eltolás vektora $\overrightarrow{F_cF_d}$ kétszerese, azaz $\overrightarrow{CE}$, mert F_cF_d középvonal a *CDE* háromszögben. (Kaptuk: $\overrightarrow{P_2P_4} = \overrightarrow{CE}$.)

A négy középpontos tükrözés eredménye tehát az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CE}$ vektorú eltolás, ami – könnyen látható – megegyezik az $\overrightarrow{AE}$ eltolással. Mivel $\overrightarrow{PP_4} = \overrightarrow{AE}$, így PP_4EA paralelogramma. Az F_eP_4E és F_eP_5A háromszögek középpontosan szimmetrikus helyzetűek (a centrum F_e), ezért AP_5 párhuzamos és egyenlő hosszú P_4E-vel – csakúgy, mint *PA*. Ebből pedig már következik, hogy *A* valóban a PP_5 szakasz felezőpontja.

Ezután a szerkesztés már könnyű. Tetszőleges P pontot tükrözünk az F_a, F_b, F_c, F_d, F_e pontokra (a tükrözést mindig az aktuális képponttal folytatva), így kapjuk P_5-öt. PP_5 felezőpontja megadja A-t; A-t tükrözve F_a-ra megkapjuk B-t és így tovább.

Megjegyzés
Ezzel a módszerrel az *a)* feladatbeli háromszög is megszerkeszthető.

Fogalom
transzformációk szorzata (egymásutánja).

GYAKORLATI FELADATOK A GEOGEBRA SZOFTVERREL

Ezekben a feladatokban megadunk néhány kiindulási alakzatot (egyenes, pont), és a sík pontjaival ezekre vonatkozó tükrözéseket kell végezni (a tükrözést mindig az aktuális képponttal folytatva). Érdemes meggondolnod, kipróbálnod a következőket:

– Számít-e az, hogy milyen sorrendben hajtjuk végre a tükrözéseket?
– Esetleg van valamilyen sejtésed, milyen transzformáció lesz a tükrözések egymásutánjának az eredménye? Hogyan lehetne bizonyítani a sejtést?
– Hogyan változik a transzformáció, ha a kiindulási alakzatokat (a pontok vagy egyenesek helyzetét) változtatjuk?

1. Vegyél fel egy t egyenest és rajta egy A pontot, majd tükrözd a sík néhány pontját először A-ra, utána a képpontjukat t-re! Vizsgáld meg, mi lesz a pontok képe, és hogyan változnak a képpontok, ha a kiindulási pontokat mozgatod!

2. A 2. példában láttuk, hogy két metsző egyenesre vonatkozó tükrözés egymás utáni végrehajtásának eredménye egy forgatás. Vajon hogyan változik ez a transzformáció, ha még egy tükrözést is végrehajtunk a metszéspontra?

Vegyél fel két, egymást az A pontban metsző egyenest, majd tükrözd a sík néhány pontját adott sorrendben először az egyenesekre, majd az A pontra (a tükrözést mindig az aktuális képponttal folytatva)! Vizsgáld meg, mi lesz a pontok képe, és hogyan változnak a képpontok, ha a kiindulási pontokat mozgatod!

3. Vegyél fel három párhuzamos egyenest (t_1, t_2, t_3), majd adott sorrendben tükrözd a sík néhány pontját az egyenesekre (a tükrözést mindig az aktuális képponttal folytatva)! Vizsgáld meg, mi lesz a pontok képe, és hogyan változnak a képpontok, ha a kiindulási pontokat mozgatod!

4. Vegyél fel három egyenest (t_1, t_2, t_3) úgy, hogy ezek egy pontban metsszék egymást, majd adott sorrendben tükrözd a sík néhány pontját az egyenesekre (a tükrözést mindig az aktuális képponttal folytatva)! Vizsgáld meg, mi lesz a pontok képe, és hogyan változnak a képpontok, ha a kiindulási pontokat mozgatod!

5. Vegyél fel három egy egyenesen lévő pontot (A, B, C), majd adott sorrendben tükrözd a sík néhány további pontját A-ra, B-re és C-re (a tükrözést mindig az aktuális képponttal folytatva)! Vizsgáld meg, mi lesz a pontok képe, és hogyan változnak a képpontok, ha a kiindulási pontokat mozgatod!

Hogyan változik a transzformáció, ha az A, B, C pontok helyzetét változtatod?

VII. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK, EGYENLETRENDSZEREK

„… ha valaki tudomány nélkül szerelmes a gyakorlatba, akkor éppen olyan, mint az a kormányos, aki kormány és iránytű nélkül száll hajóra; sohasem lehet biztos, hogy hová is hajózik. A gyakorlat nélküli tudomány pedig hasonlatos a lefolyástalan állóvízhez, amely vagy megposhad, vagy hidegen befagy; az emberi elme pedig, ha nem talál magának kibontakozást, elsatnyul.”

Leonardo da Vinci

70. AZ EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG FOGALMA

1. példa

Melyik az a szám, amelynek ötszöröséből ha hetet elveszünk, akkor ugyanannyit kapunk, mintha 41-ből vettük volna el a számot?

Megoldás

Bár nem tudjuk, hogy egyáltalán létezik-e ilyen szám, tételezzük fel, hogy igen. Ha a keresett számot x-szel jelöljük, akkor a kérdés így írható fel:

$x = ?$, ha $5x - 7 = 41 - x$.

A kérdés ilyen alakú lejegyzését tanulmányaink során egyenletnek neveztük. Rendezéssel meg tudjuk oldani:

$5x - 7 = 41 - x \quad /+x+7$

$6x = 48 \quad /:6$

$x = 8.$

Ellenőrzés: $8 \cdot 5 - 7 = 33.$

$41 - 8 = 33.$

A 8-at az **egyenlet megoldásának,** vagy az **egyenlet gyökének** nevezzük.

Az ellenőrzéskor láttuk, hogy a **keresett szám valóban létezik**, értéke 8, valamint a megoldás módszeréből tudható, hogy más szám nem felel meg a kérdésnek.

EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK ÉRTELMEZÉSE

I. értelmezés:

Az egyenleteket értelmezhetjük úgy, hogy az egyenlőség két oldalán **egy-egy algebrai kifejezés áll**.

Az értelmezési tartomány azon elemeit, melyekre a kifejezések helyettesítési értékei megegyeznek, az **egyenlet megoldásának**, vagy az **egyenlet gyökének** nevezzük.

II. értelmezés:

Az egyenleteket értelmezhetjük úgy, hogy az egyenlőség **két oldalát egy-egy függvény hozzárendelési szabályának** tekintjük. Értelmezési tartománya az a halmaz, amely a függvények értelmezési tartományának közös elemeiből áll. Az egyenlet megoldása azt jelenti, hogy keressük az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyeknél a függvények azonos értékeket vesznek fel.

III. értelmezés:

a) példa:
Tíznek a fele öt.
Ez egy olyan kijelentő mondat, melyről könnyen eldönthető, hogy igaz vagy hamis. Esetünkben az állítás nyilván igaz.

b) példa:
Holnap szerda lesz.
Ez is egy kijelentő mondat. Természetesen nem lehet egyértelműen eldönteni, hogy igaz-e, vagy sem. Ha kedden hangzott el, igaz, ha más napokon, akkor hamis.

A matematikai logikában azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről egyértelműen eldönthetők, hogy igazak vagy hamisak, **állításoknak**, vagy **kijelentéseknek** (ítéletnek) nevezzük.
Az olyan hiányos állításokat, amelyek logikai értéke attól függ, hogy mit írunk a változó(k) helyére, **logikai függvényeknek** nevezzük.
Az egyenleteket, egyenlőtlenségeket ilyen értelemben tekinthetjük logikai függvényeknek is. (Általános iskolai tanulmányainkban nyitott mondatoknak is neveztük.)

Ha egy egyenlet az értelmezési tartományának minden elemére igaz, akkor az egyenletet **azonosságnak** nevezzük.
Ha egy egyenlőtlenség az értelmezési tartományának minden elemére igaz, akkor az egyenlőtlenséget **azonos egyenlőtlenségnek** nevezzük.

2. példa

Oldjuk meg az $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

A már ismert azonosság alapján egyenletünket bármely valós szám kielégíti, ezért **azonosság**.

3. példa

Oldjuk meg az $x^2 - 10x + 28 > 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Megoldás

$x^2 - 10x + 28 > 0$ /alakítsuk teljes négyzetté:
$(x - 5)^2 + 3 > 0.$

Azonos egyenlőtlenséghez jutottunk, mivel a bal oldal minimuma 3, így minden valós számra igaz az egyenlőtlenség.

4. példa

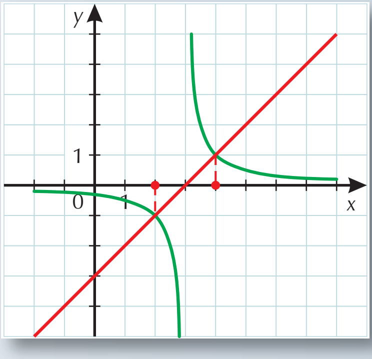
Állapítsuk meg az egyenlet értelmezési tartományát! $\frac{x}{x^2-2x+1}+\frac{2}{x}=10.$

Megoldás

A jobb oldali kifejezés mindig értelmezhető.
A bal oldali kifejezés abban az esetben értelmezhető, ha a törtek értelmezhetők.
Tehát $x \neq 0$, valamint $x^2 - 2x + 1 \neq 0$. Ez utóbbi: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, ezért $x \neq 1$.
Összegezve: az egyenlet értelmezési tartománya: $\mathbf{R}\setminus\{0; 1\}$.

5. példa

Írjuk fel azt az egyenletet, amelynek megoldásához az ábrán látható függvények grafikonjait rajzoltuk fel! Határozzuk meg az egyenlet értelmezési tartományát, gyökeit! Ellenőrizzük a gyököket!



Megoldás

Mivel a két függvény: $f(x)=\frac{1}{x-3}$, $g(x) = x - 3$, ezek közös értelmezési tartománya: $\mathbf{R}\setminus\{3\}$, az egyenlet: $\frac{1}{x-3} = x - 3$.

A gyökök: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Ellenőrzés: $\frac{1}{2-3} = -1$ és $2 - 3 = -1$,

$\frac{1}{4-3} = 1$ és $4 - 3 = 1$.

Fogalmak
egyenlet;
egyenlet gyöke;
állítások;
kijelentések;
logikai függvény;
azonosság;
azonos egyenlőtlenség.

FELADATOK

1. K1 Tekintsük a következő kijelentő mondatokat. Ha eldönthető, akkor döntsük el, hogy az állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

a) Tizenhat négyszerese négyzetszám.
b) Tegnap délután sütött a nap.
c) Mai napon lesz biológiaóránk.
d) A körnek 4 szimmetriatengelye van.
e) Minden paralelogramma trapéz.
f) Minden harmadik természetes szám osztható 3-mal.
g) $3 \cdot 5 = 16$.

2. K1 Állapítsuk meg, hogy az alábbi logikai függvények mely értékekre igazak és mely értékekre hamisak a megadott értékek közül!

a) $3x + 7 = x - 3$; $x = 0;\ -2;\ -5;\ 3;$
b) $|2x - 5| = 4$; $x = -2{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 1{,}5;\ \frac{9}{2};$
c) $-(x + 2)^2 + 3 = -x - 1$; $x = -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0.$

3. K1 Válasszuk ki az azonosságokat a következő egyenletek közül!

a) $2x + 3 + x - 5 = x - 8 + 4x + 3 - x$;

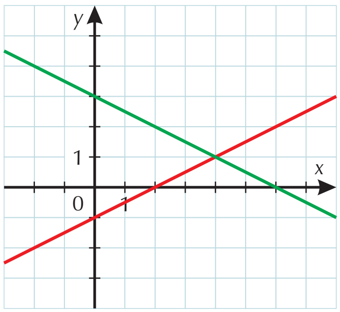
b) $11 - 2x = 7x + 29 - (9x + 18)$;

c) $\frac{5x+3}{2} = \frac{15x}{6} + 1{,}5$;

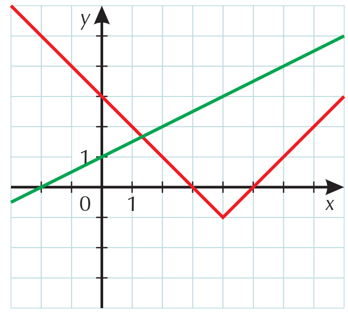
d) $3 - x = 5 - x$.

4. K1 Írjunk fel olyan egyenleteket, melyeknek ábrázolásához az alábbi grafikonokat rajzoltuk fel!

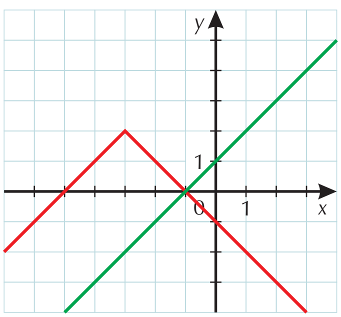
a)



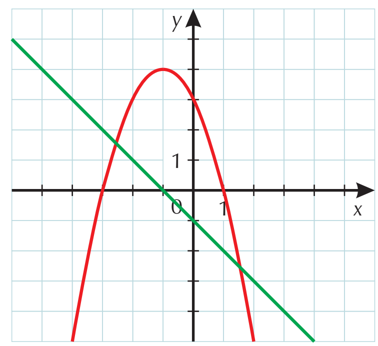
c)



b)



d)



5. Mely számok esetén értelmezhetjük az alábbi egyenleteket?

K1 *a)* $\frac{2x-5}{4} = 3$;

K1 *b)* $\frac{5}{x} = \frac{8}{x-1}$;

K1 *c)* $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3x+4}{5x-5} = \frac{1}{5}$;

K1 *d)* $\frac{x}{x-5} + \frac{2x-1}{x^2-5x} = 1$;

K2 *e)* $\frac{x+3}{x-2} + \frac{x-2}{x+3} = \frac{2x^2+8x-11}{x^2+x-6}$.

6. Milyen számot írhatunk a *b* betű helyére, hogy azonos egyenlőtlenséget kapjunk?

K2 *a)* $(x + 5)^2 + b \ge 0$;

E1 *b)* $x^2 - 8x + b \ge 0$;

E1 *c)* $x^2 + 2x + 3 + b \ge 0$;

E1 *d)* $-(x + 3)^2 + 5 + b \le 0$.

Rejtvény

Vannak olyan számok, amelyek szorzata és összege megegyezik. Néhány példa:

$2 \cdot 2 = 2 + 2$, $3 \cdot 1\frac{1}{2} = 3 + 1\frac{1}{2}$ vagy $11 \cdot 1{,}1 = 11 + 1{,}1$.

Vajon vannak más ilyen tulajdonságú számpárok is?
(A rejtvény megoldása a 263. oldalon található.)

71. EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

Az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásának nincs általánosan alkalmazható algoritmusa. Néhány esetben igen kemény diónak bizonyul a megoldásuk. Példáinkkal néhány jó „fogást”, ötletet mutatunk be a sikeres feladatmegoldásokhoz. Az adott feladathoz próbáljuk meg mindig a legcélravezetőbb módszert alkalmazni.

I. A GRAFIKUS MEGOLDÁSI MÓDSZER

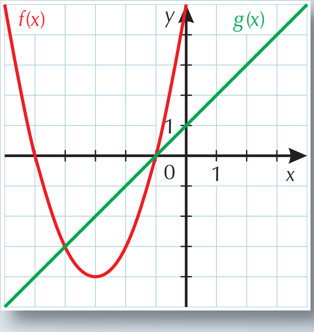
Az egyenletek, egyenlőtlenségek II. értelmezése alapján a gyökök megkereséséhez a függvényeket hívhatjuk segítségül.

A függvények vizsgálatakor már foglalkoztunk ezzel a megoldási módszerrel, így most egy példa erejéig ismételjük át a lényegét.

1. példa

Oldjuk meg az egyenletet, egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $x^2 + 6x + 5 = x + 1$; *b)* $x^2 + 6x + 5 < x + 1$.



Megoldás

Alakítsuk át a bal oldal hozzárendelési szabályát:

$f(x) = x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 4 = (x + 3)^2 - 4$,

$g(x) = x + 1$.

A közös értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

Ábrázoljuk a függvényeket!

a)

A két grafikon az $x_1 = -4$ és az $x_2 = -1$ abszcisszájú helyen metszi egymást. Ekkor a két függvényérték egyenlő. Számolással ellenőrizzük a gyökök helyességét:

$f(-4) = -3$ és $g(-4) = -3$,

$f(-1) = 0$ és $g(-1) = 0$.

Tehát az egyenlet gyökei: $x_1 = -4$ és $x_2 = -1$.

b)

Az egyenlőtlenség megoldásához keressük meg, mikor van az $f(x) = x^2 + 6x + 5$ függvény grafikonja a $g(x) = x + 1$ függvény grafikonja alatt, hiszen ekkor kisebbek az *f(x)* függvény értékei, mint a *g(x)* függvény értékei.

Ez akkor igaz, ha $-4 < x < -1$, tehát ez az egyenlőtlenség megoldása.

Megjegyzés

A **módszer előnye**, hogy akkor is alkalmazhatjuk, ha algebrai módszerekkel nem tudjuk az egyenletet megoldani.

Hátránya, hogy hibátlan függvényábrázolás esetén sem lehetünk biztosak a gyökök pontos leolvasásában, esetleg csak közelítő értékeket tudunk megállapítani.

A leolvasott eredményeket minden esetben ellenőrizni kell!

II. AZ ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY SZEREPE AZ EGYENLET MEGOLDÁSÁBAN

2. példa

Oldjuk meg az $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{2\}$, mert $x = 2$ esetén a tört nem értelmezhető.
Ha mindkét oldalt az $(x-2) \neq 0$ számmal szorozzuk és rendezzük az egyenletet, akkor:

$$\begin{aligned} 1+3(x-2) &= 3-x, \\ 1+3x-6 &= 3-x, \\ 4x &= 8, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Bár kaptunk látszólag gyököt, azonban ez a szám nem eleme az egyenlet értelmezési tartományának, ezért az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

3. példa

Oldjuk meg a $\sqrt{3-2x} \geq \sqrt{2x-3}$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Megoldás

Mivel csak nemnegatív számoknak értelmeztük a négyzetgyökét, ezért egyidejűleg teljesülnie kell az alábbi feltételeknek:

$3-2x \geq 0; \qquad 2x-3 \geq 0.$

$\frac{3}{2} \geq x; \qquad x \geq \frac{3}{2}.$

Látható, hogy az egyenlőtlenség értelmezési tartománya egyetlen szám, a $\frac{3}{2}$. Ez egyben az egyetlen megoldás is, hiszen ekkor mindkét oldal értéke 0.

III. AZ ÉRTÉKKÉSZLET SZEREPE AZ EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG MEGOLDÁSÁBAN

4. példa

Oldjuk meg az egyenletet, egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $-x^2 - 2 = (x-2)^2$; *b)* $-x^2 - 2 < (x-2)^2$.

Megoldás

Az egyenlet és az egyenlőtlenség értelmezési tartománya egyaránt **R**.
Nem érdemes felbontani a zárójelet, mert komplikáltabb egyenlethez, egyenlőtlenséghez jutunk.
A bal oldalon álló kifejezés helyettesítési értékei –2, vagy az ennél kisebb számok.
A jobb oldalon álló kifejezés helyettesítési értékei a nemnegatív számok.
Az előzőekből következik, hogy az egyenletnek nem lehet megoldása, míg az egyenlőtlenségnek minden valós szám megoldása.

5. példa

Oldjuk meg az $|x+4| + (x+4)^2 \leq 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya **R**.
Sem grafikus úton, sem rendezésekkel nem tűnik egyszerűnek a megoldás megkeresése.
Ugyanannak a valós számnak [$(x+4)$-nek] sem az abszolút értéke, sem a négyzete nem lehet negatív. Ezért a bal oldali kifejezés minimuma 0. Ezt pontosan akkor veszi fel, ha az összeg mindkét tagja 0.
Tehát az egyenlőtlenségnek pontosan egy gyöke van: $x = -4$.

6. példa

(Nem érettségi tananyag.)

Oldjuk meg az $(x-5)^2 + 2 = \left[\frac{x}{2}\right]$ egyenletet a $]-\infty; 6[$ számok halmazán!

Megoldás

A bal oldali kifejezés értékkészlete: $[2; \infty[$ intervallum, a jobb oldalon állóé pedig a 3-nál kisebb egész számok. A két halmaznak csak egy közös eleme van, a 2.
Ha az egyenletnek van megoldása, az csak olyan szám lehet, amelyre mind a két oldal értéke 2.
Az $(x-5)^2 + 2 = 2$, ha $x = 5$.

Ha $x = 5$, akkor $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$.

Tehát az egyenlet egyetlen megoldása az $x = 5$.

Fogalmak
grafikus módszer;
értelmezési tartomány vizsgálata;
értékkészlet vizsgálata.

FELADATOK

1. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket!

K1 *a)* $\frac{1}{2}x + 2 = -\frac{3}{2}x + 6$;

K1 *b)* $\frac{1}{3}x - 2 = -x - 6$;

E1 *c)* $-|x-1| + 5 = (x-3)^2 + 1$;

E1 *d)* $2 - |x-3| = \frac{2}{x-2}$.

2. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{x-2} = \sqrt{1-x}$;

b) $\sqrt{x} + 2\sqrt{-x} = 5$;

c) $\sqrt{x-5} - \sqrt{5-x} = 0$;

d) $\sqrt{2x-5} + \sqrt{2{,}5-x} = 3$.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

K2 *a)* $|x-3| + |y+5| = 0$;

K2 *b)* $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$;

E1 *c)* $(x+7)^2 \cdot (2y-3) = 0$;

E1 *d)* $(2y+7)^2 + (x+4y-5)^2 = 0$;

E1 *e)* $|3y-z| + |2y+x| + |x-3| = 0$.

4. E1 Oldjuk meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $(x-4)^2 + 1 = 1 - 2|x-3|$;

b) $x^2 - 6x + 7 < -3|x+1| - 4$;

c) $(x-2)^2 + 1 = \{x\}$. (Nem érettségi tananyag.)

5. K2 Egy 12 cm magas gyertya 6 óra alatt, egy 9 cm-es gyertya 9 óra alatt ég el. Egyszerre meggyújtjuk mindkét gyertyát, amelyek ezután egyenletesen égnek (fogyásuk egyenletes).

a) Ábrázoljuk a gyertyák magasságát az eltelt idő függvényében!

b) Meggyújtásuk után hány perccel lesz kétszer akkora az egyik gyertya, mint a másik?

6. K2 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Oldjuk meg az $n(n+4) = 60$ egyenletet!

„Megoldás" (hibás): Észrevehetjük, hogy $n = 6$ megoldás: $6 \cdot 10 = 60$. Több megoldás nincs, mert n növelésével vagy csökkentésével a bal oldal is nő, illetve csökken, míg a jobb oldal állandó.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **1006; 1009; 1526; 1527; 1528.**

72. EGYENLET, EGYENLŐTLENSÉG MEGOLDÁSA SZORZATTÁ ALAKÍTÁSSAL

A SZORZATTÁ ALAKÍTÁS MÓDSZERE

Az olyan szerkezetű egyenleteket, amelyeknek egyik oldalán szorzat, a másik oldalán 0 szerepel, könnyen meg tudjuk oldani, mivel egy szorzat pontosan akkor lehet 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Egyenlőtlenségek megoldásában is segít az ilyen alak, ekkor azonban körültekintőbbnek kell lennünk. A szorzattá alakítás előnye, hogy ezzel a módszerrel olyan feladatokat is meg tudunk oldani, amelyeket más módszerrel nem sikerülne.

1. példa

Oldjuk meg az egyenletet, egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $(x+1)(5-2x)=0$; *b)* $(x+1)(5-2x)<0$.

Az egyenlet és az egyenlőtlenség értelmezési tartománya egyaránt **R**.

Megoldások

a) A bal oldalon kéttényezős szorzat szerepel, a jobb oldalon 0, így az egyenletnek pontosan 2 megoldása lehet:

$x+1=0$ vagy $5-2x=0$.

Ezek akkor teljesülnek, ha $x_1=-1$, $x_2=\frac{5}{2}$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a gyökök helyességéről.

b) Egy kéttényezős szorzat pontosan akkor negatív, ha tényezői különböző előjelűek.

1. eset:

Ha $x+1>0$ és $5-2x<0$, vagyis ha $x>-1$ és $x>\frac{5}{2}$ egyidejűleg igaz. Tehát a megoldáshalmaz: $x>\frac{5}{2}$.

2. eset:

Ha $x+1<0$ és $5-2x>0$, vagyis ha $x<-1$ és $x<\frac{5}{2}$ egyidejűleg igaz. Tehát a megoldáshalmaz: $x<-1$.

Összegezve: $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{5}{2};\infty\right[$.

2. példa

Oldjuk meg az egyenletet, egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $x^3+6x^2+3x-10=0$; *b)* $x^3+6x^2+3x-10<0$.

Az egyenlet és az egyenlőtlenség értelmezési tartománya egyaránt **R**.

Megoldások

a) $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0.$

Próbáljuk szorzattá alakítani az egyenletet!

$$(x^3 + x^2 - 2x) + (5x^2 + 5x - 10) = 0;$$
$$x(x^2 + x - 2) + 5(x^2 + x - 2) = 0;$$
$$(x + 5)(x^2 + x - 2) = 0;$$
$$(x + 5)(x^2 - x + 2x - 2) = 0;$$
$$(x + 5)[x(x - 1) + 2(x - 1)] = 0;$$
$$(x + 5)(x - 1)(x + 2) = 0.$$

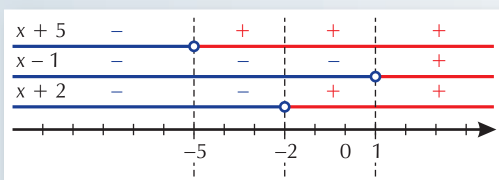
Innen már leolvashatók az egyenlet gyökei, mivel a bal oldal szorzat, a jobb oldal 0.

$x_1 = -5;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = -2.$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a gyökök helyességéről.

b) $(x + 5)(x - 1)(x + 2) < 0.$

Az egyenlőség három gyökét jelöljük be a számegyenesen:



Négy intervallumot kaptunk, keressük a megoldáshalmazt külön-külön az egyes intervallumokon. A –5; –2; 1 nem lehet megoldás, mert ekkor a szorzat 0 lenne.

1. eset:
Ha $x < -5$, akkor
$x + 5 < 0,\quad x + 2 < 0,\quad x - 1 < 0,$ tehát a szorzat negatív. Ezek a számok megoldások.

2. eset:
Ha $-5 < x < -2$, akkor
$x + 5 > 0,\quad x + 2 < 0,\quad x - 1 < 0,$ tehát a szorzat pozitív. Ezek a számok nem megoldások.

3. eset:
Ha $-2 < x < 1$, akkor
$x + 5 > 0,\quad x + 2 > 0,\quad x - 1 < 0,$ tehát a szorzat negatív. Ezek a számok megoldások.

4. eset:
Ha $x > 1$, akkor
$x + 5 > 0,\quad x + 2 > 0,\quad x - 1 > 0,$ tehát a szorzat pozitív. Ezek a számok nem megoldások.

Összegezve: az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $x \in\ ]-\infty; -5[\ \cup\ ]-2; 1[.$

3. példa

Oldjuk meg az $\frac{x+4}{x-5}+\frac{x+2}{x-7}\le 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Megoldás

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya $x \in \mathbf{R}\setminus\{5;\,7\}$.

Nem célszerű a közös nevezővel beszorozni, mert nem ismert az előjele, így nehéz lenne vizsgálni az egyenlőtlenségjel irányát. Próbáljuk meg másképp!

Rendezzük 0-ra, majd hozzunk közös nevezőre:

$\frac{(x+4)(x-7)+(x+2)(x-5)-2(x-5)(x-7)}{(x-5)(x-7)}\le 0.$ Végezzük el a számlálóban a műveleteket:

$\frac{(x^2-3x-28)+(x^2-3x-10)-(2x^2-24x+70)}{(x-5)(x-7)}\le 0.$

$\frac{18(x-6)}{(x-5)(x-7)}\le 0.$ Oszthatunk 18-cal, az egyenlőtlenség iránya nem változik:

$\frac{x-6}{(x-5)(x-7)}\le 0.$ Ezt felfoghatjuk háromtényezős szorzatnak:

$(x-6)\cdot\frac{1}{x-5}\cdot\frac{1}{x-7}\le 0.$

Most már „csak” a szorzat előjelét kell vizsgálnunk. Ezt az előző példa mintájára végezhetjük. Most is négy intervallumon vizsgáljuk a szorzat előjelét, de figyeljünk arra is, hogy az 5 és a 7 nem, míg a 6 eleme az értelmezési tartománynak.

1. eset:
Ha $x < 5$, akkor a szorzat negatív.

2. eset:
Ha $5 < x \le 6$, akkor a szorzat nemnegatív.

3. eset:
Ha $6 \le x < 7$, akkor a szorzat nempozitív.

4. eset:
Ha $x > 7$, akkor a szorzat pozitív.

Összegezve kapjuk a megoldáshalmazt: $x \in \,]-\infty;\,5[\,\cup\,[6;\,7[$.

A 256. oldalon lévő rejtvény megoldása

Ha a két szám a és b, akkor:

$ab = a + b \qquad \mid -a$

$a(b-1) = b \qquad \mid :(b-1)$

$a=\frac{b}{b-1}=1+\frac{1}{b-1}.$

Végtelen sok megfelelő számpár van, tetszőleges b-hez ($b \ne 1$) létezik a. Néhány példa a $(b;\,a)$ számpárra: $\left(5;\frac{5}{4}\right)$, $\left(7{,}5;\frac{15}{13}\right)$, $(0{,}5;-1)$, $\left(-2;\frac{2}{3}\right)$.

Ha az egyenlet értelmezési tartománya az egész számok halmaza, akkor az egyenletet **diofantoszi egyenletnek** is szoktuk nevezni. Ezek megoldása során is hatékony lehet a szorzattá alakítás módszere. (Diophantosz görög matematikus a III. században foglalkozott ilyen típusú egyenletekkel.)

4. példa

a) Oldjuk meg az $x^2 - 2xy = 15$ egyenletet az egész számok halmazán!

b) Lehet-e két pozitív egész szám reciprokának összege egyenlő az összegük reciprokával? (Másképpen: Oldjuk meg az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$ egyenletet a pozitív egész számok halmazán!)

Megoldások

a) $x^2 - 2xy = 15$. Alakítsuk szorzattá a bal oldalt:
$x(x - 2y) = 15$. Két egész szám szorzata úgy lehet 15, ha ezek 15 osztói. Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket:

x	1	15	–1	–15	3	5	–3	–5
$x - 2y$	15	1	–15	–1	5	3	–5	–3
y	–7	7	7	–7	–1	1	1	–1

A táblázatból kiolvasható, hogy az egyenletnek 8 összetartozó $(x; y)$ számpár felel meg.

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$. Hozzunk közös nevezőre, rendezzük 0-ra:

$\frac{y(x+y) + x(x+y) - xy}{xy(x+y)} = 0$. Ez csak úgy teljesülhet, ha a számláló 0, mivel a nevező biztosan pozitív egész.

Kiemeléssel szorzattá alakíthatjuk az első két tagot:

$(x + y)(x + y) - xy = 0$. Rendezve:

$$x^2 + y^2 + xy = 0.$$

Pozitív számok négyzete és szorzata is pozitív, így az egyenletnek nincs megoldása. Tehát nincs két olyan pozitív egész szám, amelyek reciprok értékeinek összege egyenlő az összegük reciprokával.

Fogalmak, név
diofantoszi egyenlet; szorzattá alakítás.

FELADATOK

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

K1 *a)* $(x - 5)(x + 3) = 0$;

K1 *b)* $(2x - 5)(x + 2)(x - 1) = 0$;

K1 *c)* $x(x - 3) \leq 0$;

K1 *d)* $(5x - 6)(2 - 3x) \geq 0$;

K2 *e)* $x(6 - 2x)(5 + 2x) > 0$;

K2 *f)* $(2x - 4)(5x + 8)(x - 6) < 0$.

2. Alakítsuk szorzattá a bal oldalon álló kifejezéseket, és határozzuk meg az egyenletek gyökeit!

K1 *a)* $(x - 1)(x + 5) + (x - 1)(x + 8) = 0$;

K1 *b)* $(2x - 5)(3x + 4) - (2x - 5)(1 - x) = 0$;

K1 *c)* $(x + 2)(5x - 7) - 2 - x = 0$;

K2 *d)* $x^2 + 5x + 6 = 0$;

K2 *e)* $x^3 + 6x^2 + 8x = 0$;

K2 *f)* $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.

3. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valósz számok halmazán!

a) $\frac{x-4}{x+2} > 0$; *c)* $\frac{x+5}{x-2} < 1$;

b) $\frac{2x+5}{3x-9} \leq 0$; *d)* $2 - \frac{3}{x-4} \leq 0$.

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

K2 *a)* $\frac{(x+3)(x-1)}{x-4} < 0$; **E1** *c)* $\frac{x-1}{x-3} > \frac{7}{x-1} + 1$;

K2 *b)* $\frac{(2x-1)(3x+5)}{(4x+8)(x-2)} \geq 0$; **E1** *d)* $\frac{x-1}{x-3} < \frac{3x-2}{3x}$.

5. E2 Két egész szám összegéhez hozzáadjuk a két szám szorzatát, eredményül 23-at kapunk. Melyik ez a két szám?

6. E2 Két természetes szám reciprokának összege $\frac{1}{11}$. Melyik ez a két természetes szám?

7. E2 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a természetes számok halmazán!

a) $2x^2 + xy = 28$;

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **1198; 1199; 1459; 1464; 1465.**

Pályakép

Név: Janka
Lakhely: Leuven (Belgium)
Végzettség: biomérnök
Jelenlegi beosztás: posztdoktori kutató (olyan kutató, aki nemrégen szerezte a doktori fokozatát)
Milyen tantárgyakból felvételizett, tanult emelt szinten? Matematika.

Sziasztok!

Jankának hívnak. Egy génterápia-laboratóriumban dolgozom kutatóként. Egy nagyszerű nemzetközi (kubai-belga-olasz-etióp-albán-ghánai-iráni-maláj-kínai-bolgár-görög-magyar) csapatban.
Amikor kutatótársaimmal sikerül átprogramozott testi sejtekből összehúzódó szívizomsejtet előállítani egy Petri-csészében, vagy egy hemofíliás kutyát meggyógyítani, vagy angliai kollégáinktól olyan kísérletről hallani, amelyben a génterápiának köszönhetően vakok kezdenek el megint látni, tudom, hogy olyan kalandnak vagyok részese, amit kár lenne kihagyni.
A munkám nagyon sokszínű és összetett. Magába foglalja a kísérletek kivitelezéséhez szükséges összes lépést. A siker kulcsa az a kreatív problémaátlátó és -megoldó képességem, amit a gimnáziumi matematikaórákon sajátítottam el. Az ott tanult technikák, trükkök sokszor napi szinten köszönnek vissza. A mi tudományterületünkön sem vezet királyi út egy-egy megoldáshoz.

73. EGY ÁLTALÁNOS MÓDSZER: A MÉRLEGELV

Az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása során gyakran célszerű az egyenleteket, egyenlőtlenségeket más alakban, egyszerűbben felírni. Ezeket az átalakításokat **rendezésnek** nevezzük. A rendezéseknél figyelnünk kell arra, hogy az átalakított egyenletnek, egyenlőtlenségnek pontosan ugyanazok a gyökei legyenek, amelyek az eredeti feladatnak is gyökei. Ezeket a rendezéseket **ekvivalens átalakításoknak,** az így kapott egyenleteket **ekvivalens egyenleteknek** nevezzük.

A MÉRLEGELV

Egyenlet, egyenlőtlenség rendezésekor, ha mind a két oldalhoz ugyanazt a számot vagy kifejezést adjuk hozzá (vonjuk ki), és nem változik meg az alaphalmaz, akkor ekvivalens átalakítást végzünk.

Ha az egyenlet mind a két oldalát ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk (osztjuk) úgy, hogy az értelmezési tartománya ne változzon, akkor ekvivalens egyenlethez jutunk.

(Egyenlőtlenség esetén hasonlóan járhatunk el, csak figyelni kell az egyenlőtlenségjel irányára is.)

Kerüljük az ismeretlent tartalmazó taggal történő szorzást, osztást, ha lehet! Ekkor ha ismeretlent tartalmazó taggal szorzunk, hamis gyököt kaphatunk, ha osztunk, gyököt veszíthetünk.

1. példa

Oldjuk meg az $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=3-\frac{x+3}{4}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Az egyenlet értelmezési tartománya **R**.
Szorozzunk a közös nevezővel:

$$6(x+1)+4(x+2)=36-3(x+3) \qquad /\text{zárójelfelbontás, összevonások}$$

$$10x+14=27-3x \qquad /+3x-14$$

$$13x=13 \qquad /:13$$

$$x=1.$$

Ellenőrzés:

Bal oldal: $\frac{1+1}{2}+\frac{1+2}{3}=2.$

Jobb oldal: $3-\frac{1+3}{4}=2.$

Tehát az egyenlet gyöke: $x=1$.

2. példa

Oldjuk meg az $\frac{x^2+6x+9}{x+3} = 2x+6$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Az egyenlet értelmezési tartománya $\mathbf{R}\setminus\{-3\}$.
Vegyük észre, hogy a számláló teljes négyzet, ezért:

$$\frac{(x+3)^2}{x+3} = 2x+6 \qquad \text{/az értelmezési tartomány miatt nem vesztünk gyököt, ha egyszerűsítünk.}$$

$$x+3 = 2x+6 \qquad /-x-6$$

$$-3 = x.$$

Mivel a –3 nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

3. példa

Oldjuk meg a $3x-4 < \frac{x+1}{2}+1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! Melyik az a legnagyobb egész szám, amely kielégíti az egyenlőtlenséget?

Megoldás

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya **R**.

$$3x-4 < \frac{x+1}{2}+1 \qquad /\cdot 2$$

$$6x-8 < x+1+2 \qquad /-x+8$$

$$5x < 11 \qquad /:5$$

$$x < \frac{11}{5}.$$

A legnagyobb egész megoldása a feladatnak: $x = 2$.

4. példa

Oldjuk meg az egyenletet, egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! Figyeljük meg a két feladat megoldásának különbözőségét!

a) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+2}$; *b)* $\frac{x+1}{x-1} \le \frac{x-1}{x+2}$.

Megoldások

Az egyenlet és az egyenlőtlenség értelmezési tartománya egyaránt $\mathbf{R}\setminus\{1; -2\}$.

a) $$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+2} \qquad \text{/Szorozzunk a közös nevezővel. Ezt megtehetjük, mivel nem 0.}$$

$$(x+1)(x+2) = (x-1)(x-1) \qquad \text{/zárójelfelbontás, összevonás}$$

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 - 2x + 1 \qquad /-x^2 + 2x - 2$$
$$5x = -1 \qquad /:5$$
$$x = -\frac{1}{5}.$$

Ellenőrzés:

Bal oldal: $\dfrac{-\frac{1}{5}+1}{-\frac{1}{5}-1} = -\dfrac{2}{3}$. Jobb oldal: $\dfrac{-\frac{1}{5}-1}{-\frac{1}{5}+2} = -\dfrac{2}{3}$.

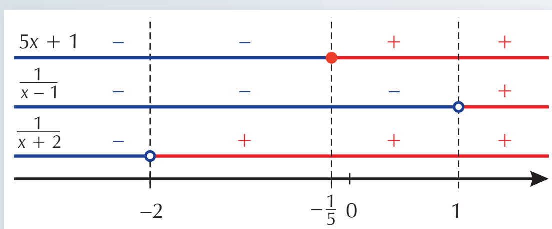
Tehát az egyenlet gyöke: $x = -\frac{1}{5}$.

b) Nem célszerű szorozni az egyenlőtlenséget ismeretlent tartalmazó tényezővel.

$$\frac{x+1}{x-1} \le \frac{x-1}{x+2} \qquad \text{/rendezzük 0-ra, hozzunk közös nevezőre}$$

$$\frac{(x+1)(x+2)-(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \le 0 \qquad \text{/zárójelfelbontás, összevonás a számlálóban}$$

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} \le 0 \qquad \text{/Alkalmazzuk a szorzattá alakításnál tanultakat!}$$



Az ábráról leolvashatók a megoldáshalmaz elemei:

$x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left[-\frac{1}{5}; 1\right[$.

Fogalmak
mérlegelv;
ekvivalens átalakítás;
ekvivalens egyenlet;
hamis gyök.

5. példa

(Nem ekvivalens átalakítások.) Az alábbi *a)–c)* példákban az egyenletekhez változót adtunk, változóval szoroztuk, illetve négyzetre emeltük őket. Észrevehetjük, hogy az M_A és M_B megoldáshalmazok különböznek. A *d)* feladat mutatja, hogy törtes egyenlőtlenséget közvetlenül nem szorozhatunk meg a nevezővel; míg *e)* a $\sqrt{(x-4)^2} = |x-4|$ azonosság helytelen alkalmazására példa.

a) *A:* $x^2 - 4 = 0$;	*B:* $x^2 - 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2}$;	$M_A = \{-2; 2\}$;	$M_B = \{-2\}$.
b) *A:* $x - 2 = 6$;	*B:* $(x-2)^2 = 6x - 12$;	$M_A = \{8\}$;	$M_B = \{8; 2\}$.
c) *A:* $x - 2 = 6$;	*B:* $(x-2)^2 = 36$;	$M_A = \{8\}$;	$M_B = \{8; -4\}$.
d) *A:* $\frac{3x-4}{x+2} \ge 1$;	*B:* $3x - 4 \ge x + 2$;	$M_A = \left]-\infty; -2\right[\cup \left[3; \infty\right[$;	$M_B = \left[3; \infty\right[$.
e) *A:* $(x-4)\sqrt{3x} = -3$;	*B:* $\sqrt{3x \cdot (x-4)^2} = -3$;	$M_A = \{3\}$;	$M_B = \varnothing$.

FELADATOK

1. K1 Oldjuk meg az alábbi egyenleteket mérlegelv segítségével a valós számok halmazán!

a) $5(x + 1) - 7 = 3(x - 2) - 4$;

b) $4x - (x + 5) + 12 = 14 + 2x$;

c) $(8 - 4x) - (3x - 5) = 2x - 5$;

d) $4(x - 5) - 3(2x + 3) = 8x - 6(5 - x)$.

2. Van-e az alábbi egyenleteknek megoldása a pozitív számok halmazán?

K1 *a)* $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5} = \frac{3x - 2}{4}$;

K1 *b)* $\frac{3 - 2x}{2} + 6 = \frac{5x + 2}{7} - 2x$;

K2 *c)* $\frac{11(x + 3)}{6} - \frac{3x - 1}{5} = \frac{13 - x}{2} + \frac{5x}{3}$;

K2 *d)* $5 - \frac{2 - 9x}{5} + \frac{2x + 7}{4} = 4 - \frac{5 - 4x}{6}$.

3. A tanult nevezetes azonosságok felhasználásával oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

K1 *a)* $(x + 3)^2 + (x + 5)(x - 2) + 4 = 2(x + 7)(x - 3)$;

K2 *b)* $(x - 2)^3 + (x + 3)^3 - x^3 - 4x^2 = x^2(x - 1) + 19x - 1$.

4. A változók lehetséges értékeinél van-e megoldása az alábbi egyenleteknek?

K1 *a)* $\frac{5}{x - 4} - 2 = \frac{3}{x - 4}$;

K1 *b)* $1 + \frac{3}{x - 3} = \frac{x}{x - 3} - 1$;

K2 *c)* $\frac{5x - 4}{x - 1} + \frac{2}{3x - 3} - \frac{2x - 7}{2x - 2} = 3$;

K2 *d)* $\frac{x - 3}{x + 2} + \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{2x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 6}$.

5. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a legbővebb számhalmazon, és ábrázoljuk a megoldásokat számegyenesen!

K1 *a)* $8x + 7 \le 9x + 8$;

K1 *b)* $3(x + 1) + 5(x + 5) > 11(x + 3)$;

K2 *c)* $\frac{4(x + 2)}{3} + \frac{4 - 3x}{2} > \frac{5x + 1}{4}$;

K2 *d)* $(x - 5)(x - 3) - 4 < (x - 4)^2 + 6$.

6. K2 Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amely

a) egyenlő szárú, és egyik külső szöge háromszorosa egy belső szögének;

b) derékszögű, és egyik külső szöge 80°-kal nagyobb egy belső szögénél?

7. K2 Mi a **hiba** az alábbi feladat megoldásában?

Feladat: Oldjuk meg az $x^2 + \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{x + 3} + 9$ egyenletet!

„Megoldás” (hibás): Mindkét oldalból kivonunk $\frac{1}{x + 3}$-at, rendezünk és szorzattá alakítunk: $x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$.

Az egyenlet megoldása $x_1 = -3$ vagy $x_2 = 3$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **1000–1008.**

74. ABSZOLÚT ÉRTÉKET TARTALMAZÓ EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

A függvények vizsgálatánál már foglalkoztunk abszolút értékes függvényekkel, megismertük a legegyszerűbb ábrázolási technikákat.

Az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása során, ha több abszolút értékes tag is szerepel, akkor körülményesebb a megoldás menetének megtalálása. Ehhez mutatunk különböző módszereket.

1. példa

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $|2x-3| = 0$;

b) $\left|\frac{x+2}{2} - 4\right| = \frac{1}{2}$;

c) $|x^2 - 5x + 6| = -4$.

Megoldások

Az egyenletek értelmezési tartománya egyaránt **R**.

a) $|2x-3| = 0$. Mivel csak egy olyan szám van, melynek abszolút értéke 0, és ez a 0, ezért

$$2x - 3 = 0.$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

b) $\left|\frac{x+2}{3} - 4\right| = \frac{1}{2}$.

Két eset lehet, mert $\frac{1}{2}$ és $\left(-\frac{1}{2}\right)$ abszolút értéke is $\frac{1}{2}$.

1. eset:

$\frac{x+2}{3} - 4 = \frac{1}{2}$, rendezéssel: $x_1 = \frac{23}{2}$.

2. eset:

$\frac{x+2}{3} - 4 = -\frac{1}{2}$, rendezéssel: $x_2 = \frac{17}{2}$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

c) $|x^2 - 5x + 6| = -4$. Mivel nincs olyan szám, melynek abszolút értéke negatív, így az egyenletnek nincs megoldása.

2. példa

Oldjuk meg a $|3x-10|-5>4$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! Ábrázoljuk a megoldáshalmazt számegyenesen!

Megoldás

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya **R**.

$|3x-10|-5>4;$

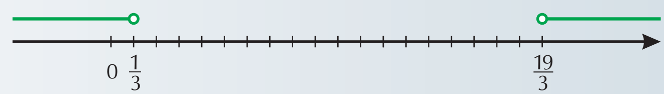
$|3x-10|>9.$

Az egyenlőtlenség úgy teljesülhet, ha az abszolút értékben levő kifejezés vagy nagyobb mint 9, vagy kisebb mint -9.

1. eset: $3x-10>9$, ha $x>\dfrac{19}{3}$.

2. eset: $3x-10<-9$, ha $x<\dfrac{1}{3}$.

Összegezve: $x<\dfrac{1}{3}$, vagy $x>\dfrac{19}{3}$.



3. példa

Oldjuk meg a $\big|\,||x+3|-1|-5\,\big|-2=6$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Az egyenlet értelmezési tartománya **R**.

$\big|\,||x+3|-1|-5\,\big|-2=6.$

$\big|\,||x+3|-1|-5\,\big|=8.$

Vizsgáljuk az abszolút értékek elhagyását „kívülről befelé haladva”.

Két eset van

$||x+3|-1|-5=8$ vagy $||x+3|-1|-5=-8.$

$||x+3|-1|=13.$ Itt ismét 2 eset van. $||x+3|-1|=-3.$ Ez ellentmondás.

$|x+3|-1=13$ vagy $|x+3|-1=-13.$ Ez ellentmondás.

$|x+3|=14.$ Itt ismét 2 eset van.

$x+3=14$ vagy $x+3=-14.$

Az egyenlet gyökei: $x_1=11$, $x_2=-17$.

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk a megoldások helyességéről.

4. példa

Oldjuk meg az $|x-1| + |2x+6| = x + 10$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Mivel a bal oldalon két abszolút értékes kifejezés összege szerepel, ezek összege nyilván nem lehet negatív, ezért az $x + 10 \geq 0$ feltételnek teljesülnie kell.

Tehát az egyenlet értelmezési tartománya a $[-10; \infty[$.

Az abszolút értékben levő kifejezések „előjelváltó" helyei (zérushelyei) az $x = 1$ és az $x = -3$.

Ezért három intervallumot vizsgálva oldjuk meg az egyenletet.

1. eset:

Ha $x \in [-10; -3[$, akkor mindkét abszolút értékben levő szám negatív, tehát abszolút értékük az ellentettjükkel egyezik meg. Egyenletünk ekvivalens a következő egyenlettel:

$$(1-x) + (-2x-6) = x + 10 \qquad \text{/rendezésekkel}$$
$$-3x - 5 = x + 10,$$
$$-15 = 4x,$$
$$-\frac{15}{4} = x.$$

Ez eleme a vizsgált intervallumnak, és megoldása az egyenletnek.

2. eset:

Ha $x \in [-3; 1[$, akkor az első abszolút értékben levő szám negatív, a második abszolút értékben levő szám nemnegatív, így egyenletünk ekvivalens a következő egyenlettel:

$$(1-x) + (2x+6) = x + 10 \qquad \text{/rendezésekkel}$$
$$x + 7 = x + 10.$$

Ez ellentmondás, tehát az intervallumon nincs megoldása az egyenletnek.

3. eset:

Ha $x \in [1; \infty[$, akkor mindkét abszolút értékben levő szám nemnegatív, tehát abszolút értékük a számokkal egyezik meg. Egyenletünk ekvivalens a következő egyenlettel:

$$(x-1) + (2x+6) = x + 10 \qquad \text{/rendezésekkel}$$
$$3x + 5 = x + 10,$$
$$2x = 5,$$
$$x = \frac{5}{2}.$$

Ez eleme a vizsgált intervallumnak, tehát megoldása lehet az egyenletnek.

Az egyenletnek két gyöke van: $x_1 = -\frac{15}{4}$ és $x_2 = \frac{5}{2}$.

Ellenőrzés:

Bal oldal: $\left|-\frac{15}{4} - 1\right| + \left|2 \cdot \left(-\frac{15}{4}\right) + 6\right| = \frac{25}{4}$. Jobb oldal: $-\frac{15}{4} + 10 = \frac{25}{4}$.

Bal oldal: $\left|\frac{5}{2} - 1\right| + \left|2 \cdot \frac{5}{2} + 6\right| = \frac{25}{2}$. Jobb oldal: $\frac{5}{2} + 10 = \frac{25}{2}$.

FELADATOK

1. K2 Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

K1 *a)* $|x-5|-3=1$; *c)* $-|x+3|+4<x-3$; *e)* $\frac{1}{3}x-2\geq|x-4|-2$;

b) $-|x+3|+4=x-3$; *d)* $|x-3|-5\geq-1$; *f)* $|x+1|-3>\frac{1}{2}x+2$.

2. K1 Oldjuk meg algebrai úton az alábbi egyenleteket!

a) $2|x|+4=|x|+1$; *b)* $|x-3|=5$; *c)* $|x+5|=-1$.

3. K1 Van-e a pozitív számokon megoldása az alábbi egyenleteknek?

a) $|x+3|=7-x$; *b)* $|x-4|=\frac{1}{2}x+3$; *c)* $|x-2|=x-2$.

4. K2 Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket, és a megoldást ábrázoljuk számegyenesen!

a) $|x|<3$; *c)* $|x+1|\leq 1$; *e)* $|x|\geq 2x$;

b) $|x|>2$; *d)* $|2x-5|>1$; *f)* $|x-2|\leq 2x+5$.

5. E1 Oldjuk meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a) $|x-2|+|x+3|=7$; *d)* $||x-3|-2|-1=3$;

b) $|x|+|x-5|=2$; *e)* $\frac{1}{2}||x+1|-2|-3=1$;

c) $|1-x|+|x+2|\leq 5$; *f)* $\left|\frac{1}{x-3}\right|>2$.

6. K2 Egy pontszerű test kezdetben a koordináta-rendszer $A(-16; 0)$ pontjában van. Ezután a test időegységenként 2 egységnyi utat megtéve egyenletes sebességgel halad az x tengely mentén pozitív irányba.

a) Mekkora a pontszerű test távolsága t idő múlva az origótól?
b) Ábrázoljuk a pontszerű test és a $B(4; 0)$ pont távolságát az idő függvényében!
c) Mennyi idő múlva lesz a pontszerű test 5 egység távolságra a $C(10; 0)$ ponttól?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **1570; 1572; 1575; 1576; 1577; 1581; 1583–1585.**

Idézet

Egy középiskolás diákot nehéz meggyőzni, hogy az életben egy halom sokkal nehezebb dologgal fog találkozni, mint amilyen az algebra vagy a mértan.

(*Ed Howe* amerikai újságíró)

Emelt szint

75. PARAMÉTERES EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

1. példa

Keressük meg az egyenletek megoldásait a valós számok halmazán!

a) $2x - 3 = 17$; *b)* $2x - 11 = 17$; *c)* $2x + 9 = 17$.

Megoldás

Az egyenletek értelmezési tartománya **R**.

a) $x = \dfrac{17+3}{2} = 10$; *b)* $x = \dfrac{17+11}{2} = 14$; *c)* $x = \dfrac{17-9}{2} = 4$.

Észrevehetjük, hogy mind a három egyenlet azonos szerkezetű, megoldásának lépései is megegyezők. Az eltérés a bal oldali konstans tagban van.

Hogyan írhatnánk fel az összes olyan egyenletet, melyek csak ebben a konstans tagban különböznek? Hogyan oldhatnánk meg őket? Erre mutatunk példát.

2. példa

Keressük meg az egyenletek megoldásait a valós számok halmazán, ha p valós paraméter.

A p-t nem ismeretlennek, hanem **paraméternek** nevezzük. Ez azt jelenti, hogy **megadott állandó szám**, amely azonban **tetszőleges lehet**.

$2x + p = 17$. Az egyenlet megoldása: $x = \dfrac{17-p}{2}$.

A paraméteres egyenletekben, egyenlőtlenségekben az ismeretlent is és a paramétert is betűk jelölik. **Ezért mindig tisztázni kell, mely betű(k) a paraméter(ek), mely(ek) az ismeretlen(ek).** Az egyenlet, egyenlőtlenség megoldása során fokozottan figyelnünk kell azokra az átalakításokra, amelyeknél a paraméteres kifejezéssel szorzunk, osztunk. Gyakran esetek vizsgálatával találjuk meg a megoldáshalmazt.

3. példa

Keressük meg az egyenletek megoldásait a valós számok halmazán! Az x-től különböző betűk valós paraméterek.

a) $2x + 3b - 4 = 5x + 2a - 8$;

b) $mx + ax + (-x) = m + a - 1$;

c) $\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{m+5}{x+2}$.

Megoldások

a) $2x + 3b - 4 = 5x + 2a - 8$ /rendezéssel

$3b - 4 - 2a + 8 = 3x$ /: 3

$\dfrac{3b - 2a + 4}{3} = x$.

Ellenőrzés:

Bal oldal: $2 \cdot \frac{3b - 2a + 4}{3} + 3b - 4 = \frac{6b - 4a + 8 + 3(3b - 4)}{3} = \frac{15b - 4a - 4}{3}$.

Jobb oldal: $5 \cdot \frac{3b - 2a + 4}{3} + 2a - 8 = \frac{15b - 10a + 20 + 3(2a - 8)}{3} = \frac{15b - 4a - 4}{3}$.

Az ellenőrzésből látható, hogy a paraméterek bármely értékére a két oldal helyettesítési értéke egyenlő.

b) $mx + ax + (-x) = m + a - 1$ /rendezéssel

$(m + a - 1)x = m + a - 1$.

Mielőtt osztanánk mind a két oldalt $(m + a - 1)$ kifejezéssel, két esetet különböztessünk meg:

1. eset:
Ha $(m + a - 1) = 0$, akkor mind a két oldal értéke x értékétől függetlenül 0, azaz egyenlő.

2. eset:
Ha $(m + a - 1) \neq 0$, akkor az egyenlet gyöke: $x = \frac{m + a - 1}{m + a - 1} = 1$.

Összegezve:
Ha $(m + a - 1) = 0$, akkor az egyenlet azonosság, ha $(m + a - 1) \neq 0$, akkor az egyenlet gyöke: $x = 1$.

c) $\frac{1}{x - 3} = \frac{m + 5}{x + 2}$.

Az egyenlet értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{3; -2\}$.

$x + 2 = (x - 3)(m + 5)$;

$x + 2 = mx + 5x - 3m - 15$;

$x - mx - 5x = -2 - 3m - 15$;

$-(4 + m)x = -(3m + 17)$.

1. eset:
Ha $m = -4$, akkor a bal oldal értéke x értékétől függetlenül 0.
A jobb oldal értéke -5. Ezért $m = -4$ esetén nincs megoldása az egyenletnek.

2. eset:
Ha $m \neq -4$, akkor oszthatunk $-(m + 4)$-gyel:

$x = \frac{3m + 17}{m + 4}$.

Vizsgálnunk kell még az értelmezési tartományt!

Mivel $x \neq 3$, ezért $\frac{3m + 17}{m + 4} \neq 3 \Rightarrow 3m + 17 \neq 3m + 12$, ez nyilván mindig igaz.

Mivel $x \neq -2$, ezért $\frac{3m + 17}{m + 4} \neq -2 \Rightarrow 3m + 17 \neq -2m - 8 \Rightarrow m \neq -5$.

Összegezve:
Ha $m = -4$, vagy $m = -5$, akkor nincs valós gyök, ha $m \neq -4$, $m \neq -5$, akkor $x = \frac{3m + 17}{m + 4}$.

Ellenőrzés:

Ha $m = -4$, akkor $\frac{1}{x - 3} = \frac{-4 + 5}{x + 2}$; ellentmondás.

Ha $m = -5$, akkor $\frac{1}{x - 3} = \frac{-5 + 5}{x + 2} = 0$; ellentmondás.

Ha $m \neq -4$ és $m = -5$, akkor:

Bal oldal: $\dfrac{1}{\dfrac{3m+17}{m+4} - 3} = \dfrac{1}{\dfrac{5}{m+4}} = \dfrac{m+4}{5}.$

Jobb oldal: $\dfrac{m+5}{\dfrac{3m+17}{m+4} + 2} = \dfrac{m+5}{\dfrac{3m+17+2m+8}{m+4}} = \dfrac{m+5}{\dfrac{5(m+5)}{m+4}} = \dfrac{m+4}{5}.$

Látható, hogy a két oldal egyenlősége minden megengedett m valós szám esetén igaz.

4. példa

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ahol p valós paraméter!

$px - 5 < 3x - 1.$

Megoldás

$px - 5 < 3x - 1$ /rendezéssel

$(p - 3)x < 4.$

1. eset:
Ha $p = 3$, akkor a bal oldal értéke x értékétől függetlenül 0, tehát teljesül az egyenlőtlenség.

2. eset:
Ha $p < 3$, akkor $(p - 3)$ negatív szám, ezért egyenlőtlenségünk:

$x > \dfrac{4}{p-3}.$

3. eset:
Ha $p > 3$, akkor $(p - 3)$ pozitív szám, ezért egyenlőtlenségünk:

$x < \dfrac{4}{p-3}.$

Fogalom
paraméter.

FELADATOK

1. E1 Határozzuk meg az egyenletben szereplő a paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek a valós számok halmazán
I. legyen; II. ne legyen megoldása!

a) $ax - 2 = 2x - 4;$ *b)* $(a + 3)x = 5x - 7;$ *c)* $(a - 2)x + 11 = 2ax - 4.$

2. E1 Hogyan válasszuk meg a p paraméter értékét, hogy az egyenlet megoldása pozitív szám legyen?

a) $5x + 3p = 2x - 4;$ *b)* $px + 4 = x + 2;$ *c)* $(p + 1)x + 9 = 2x - 5.$

3. E1 Ha m munkás n nap alatt t darab terméket gyárt, akkor:
a) Hány terméket gyárt x munkás 10 nap alatt?
b) Hány nap alatt gyárt y munkás z terméket?
c) Hány munkás gyárt z terméket u nap alatt?
(Feltételezzük, hogy a munkások termelése egyenletes.)

4. E1 Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán, ahol az a valós paraméter!

a) $5x = a$; *c)* $7x - (a + 2)x = 4$; *e)* $ax^2 - a = ax - 1$;
b) $2x + a = ax$; *d)* $ax + 5 = 3x + 7$; *f)* $18 + a^2x = 2a + 9ax$.

5. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletek megoldása 2-nél nagyobb valós szám legyen!

E1 *a)* $\frac{5(x-2p)}{3} + 1 = x - p$; **E2** *b)* $p(1 - 2x) = 5 - 3x$.

6. E2 Oldjuk meg az alábbi paraméteres egyenleteket (a egész paraméter) az egész számok halmazán!

a) $4ax - 6 = (a + 2)x + 12$; *b)* $\frac{3}{ax-2} = \frac{2}{5x-2a}$; *c)* $\frac{3x-2a}{1-a} = \frac{x+2a}{1+a}$.

7. E2 Hogyan függ a p paramétertől az alábbi egyenletek megoldásainak a száma?

a) $x^2 - 3 = p$; *b)* $\sqrt{x+3} = -p + 2$; *c)* $|2x + 1| = p - 1$.
(Segítség: ábrázoljuk koordináta-rendszerben a bal oldalon szereplő függvényeket!)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **1081; 1082; 1083; 1084; 1098; 1099.**

76. ELSŐFOKÚ EGYENLETRENDSZEREK

Gyakran találkozunk olyan feladatokkal, amelyekben **nem csak egy ismeretlen szerepel**. Ha ezek az ismeretlenek elsőfokú egyenletekben fordulnak elő, akkor **elsőfokú egyenletrendszerről** beszélünk. Az ismeretlenek számától függően két-, három-, többismeretlenes egyenletrendszereket különböztethetünk meg.

Példáinkban bemutatunk néhány megoldási módszert. Célszerű a megoldandó egyenletrendszerhez választani a megoldási technikák közül. (Figyeljünk arra, hogy a megoldáshalmaz rendezett párokból áll, ha kétismeretlenes egyenletrendszert oldunk meg.)

1. példa

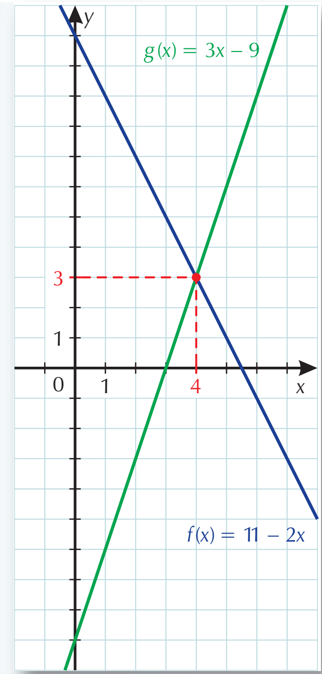
Oldjuk meg a kétismeretlenes egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ 3x - y &= 9 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer értelmezési tartománya: $(x; y)$ rendezett valós számpárok.

Megoldás

Az egyenletrendszer megoldására mutatunk három eljárást.



A grafikus módszer

Rendezzük mind a két egyenletet az egyik ismeretlenre.

$$\left.\begin{aligned} y &= 11 - 2x \\ y &= 3x - 9 \end{aligned}\right\}$$

Ábrázoljuk az $f(x) = 11 - 2x$ és a $g(x) = 3x - 9$ függvényeket közös koordináta-rendszerben.

Az egyenletrendszer megoldáshalmazát a metszéspont koordinátái adják.

Mint az ábráról leolvasható, az egyenletrendszerünk megoldása: $(x; y) = (4; 3)$.

Mindig végezzünk ellenőrzést az eredeti egyenletekbe történő behelyettesítéssel!

Ellenőrzés:
$2 \cdot 4 + 3 = 11$;
$3 \cdot 4 - 3 = 9$.

A behelyettesítő módszer

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ 3x - y &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Fejezzük ki az egyik egyenletből az egyik ismeretlent. Például az elsőből:

(1) $y = 11 - 2x$.

Helyettesítsük be a másik egyenletbe a kifejezett ismeretlen helyére a kifejezett alakot:

(2) $3x - (11 - 2x) = 9$.

Oldjuk meg az egyismeretlenes egyenletet:

$x = 4$.

Visszahelyettesítve keressük meg a másik ismeretlen értékét:

$y = 11 - 2 \cdot 4 = 3$.

Ellenőrizzük a kapott megoldást!

Az egyenlő együtthatók módszere

Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer egyenletei mindig felírhatók rendezés után

(1) $ax + by = c$,
(2) $dx + ey = f$

alakban, ahol a, b, c, d, e, f valós számok, x és y az ismeretlenek.

Az azonos együtthatók módszere a következő két esetben egyszerűen alkalmazható:

1. eset:

Van olyan ismeretlen, amelynek együtthatói az egyenletekben azonosak, pl. $a = d$. Ilyenkor célszerű a két egyenlet megfelelő oldalait kivonni egymásból, így az egyik ismeretlen „kiesik”, mert ezek különbsége 0.

2. eset:

Van olyan ismeretlen, amelynek együtthatói az egyenletekben egymás ellentettjei, pl. $b = -e$. Ilyenkor célszerű a két egyenlet megfelelő oldalait összeadni, így az egyik ismeretlen „kiesik”, mert ezek összege 0.

3. eset:

Ha nincs olyan ismeretlen, amelynek együtthatói az egyenletekben azonosak, vagy egymás ellentettjei, akkor az azonos együtthatók módszere úgy alkalmazható, hogy az egyenleteket alkalmasan választott számokkal megszorozzuk, és így jutunk az ismertetett egyszerű esetekhez.

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad 2x + y &= 11\\ (2)\quad 3x - y &= 9\end{aligned}\right\}$$

Az y együtthatói 1 és –1, ezért adjuk össze az egyenletek bal, illetve jobb oldalait:

(1) + (2),

$5x = 20$,

$x = 4$.

A kapott x értéket behelyettesítve kapjuk meg y lehetséges értékét.

Ebben az esetben is ellenőrizzük a kapott megoldást!

Rejtvény (Lewis Carroll, 1882)

Ismert, hogy egy pohár limonádé, 3 szendvics és 7 sütemény 1 shilling 2 pennybe, egy pohár limonádé, 4 szendvics és 10 sütemény pedig 1 shilling 5 pennybe kerül. (1 shilling =12 penny.) Meg tudod-e határozni

a) egy pohár limonádé, egy szendvics és egy sütemény, illetve

b) 2 pohár limonádé, 3 szendvics és 5 sütemény árát?

A megoldás: *a)* 8 penny, *b)* 19 penny.

2. példa

Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad 4x - 5y + 23 &= 0\\ (2)\quad 3y - 6x - 12 &= 0\end{aligned}\right\}$$

Megoldás

Rendezzük át az egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad 4x - 5y &= -23\\ (2)\quad -6x + 3y &= 12\end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer értelmezési tartománya: $(x; y)$ rendezett valós számpárok.

Alkalmazhatjuk az azonos együtthatók módszerét, ha az első egyenletet megszorozzuk 3-mal, a másodikat 5-tel. Így az y együtthatói egymás ellentettjei lesznek:

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad 12x - 15y &= -69\\ (2)\quad -30x + 15y &= 60\end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a megfelelő oldalakat:

$-18x = -9$.

$x = \frac{1}{2}$, behelyettesítve: $4 \cdot \frac{1}{2} - 5y = -23 \Rightarrow y = 5$.

Ellenőrzés:

(1) $4 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 5 + 23 = 0$;

(2) $3 \cdot 5 - 6 \cdot \frac{1}{2} - 12 = 0$.

Új ismeretlen bevezetése

3. példa

Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\\ (2) & \frac{3}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}\end{array}\right\}$$

Az egyenletrendszer értelmezési tartománya: $(x;\, y)$ rendezett valós számpárok, amelyekben x és y egyike sem 0.

Megoldás

Vegyük észre, hogy mind a két egyenlet azonos szerkezetű. Beszorzásokkal másodfokú kifejezéseket is kapnánk, ezért keressünk más ötletet.

Vezessünk be új jelöléseket: $\frac{1}{x}=a$ és $\frac{1}{y}=b$. Új egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{array}{r}a-b=\frac{1}{4}\\ 3a+8b=\frac{5}{3}\end{array}\right\}$$

Ezt már az előzőek alapján könnyen meg tudjuk oldani, a megoldás: $(a;b)=\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{12}\right)$.

Tehát: $\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad x=3;$

$\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \quad\Rightarrow\quad y=12.$

Ellenőrzés:

(1) $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4};$

(2) $\frac{3}{3}+\frac{8}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}.$

4. példa

Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 2x+3y+4z=56\\ (2) & x-y+2z=13\\ (3) & 3x+2y-z=-15\end{array}\right\}$$

Megoldás

Egy lehetséges indulás, hogy visszavezetjük a feladatot már ismert feladat megoldására. Természetesen más módszerrel is dolgozhatunk.

Ahhoz, hogy kétismeretlenes egyenletrendszerhez jussunk, amire már vannak megoldási módszereink, fejezzük ki az egyik ismeretlent, majd ezt helyettesítsük be a másik két egyenletbe.

(2) $x = 13 + y - 2z$. Behelyettesítve:

(1) $2(13 + y - 2z) + 3y + 4z = 56$.

(3) $3(13 + y - 2z) + 2y - z = -15$.

Rendezések után:

(1) $5y + 26 = 56 \quad \Rightarrow \quad y = 6$. (3)-ba behelyettesítve kapjuk:

(3) $-7z + 69 = -15 \quad \Rightarrow \quad z = 12$. (2)-be helyettesítve kapjuk:

(2) $x = -5$.

Ellenőrzés:

(1) $2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 12 = 56$.

(2) $(-5) - 6 + 2 \cdot 12 = 13$.

(3) $(-15) + 2 \cdot 6 - 12 = -15$.

Tehát az egyenletrendszer megoldása: $(x; y; z) = (-5; 6; 12)$.

Fogalmak
egyenletrendszer;
grafikus módszer;
behelyettesítő módszer;
egyenlő együtthatók módszere;
új ismeretlen bevezetése.

FELADATOK

1. K1 Oldjuk meg behelyettesítő módszerrel a következő egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} x - y &= -2 \\ 3y - 2x &= 9 \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} x - 3y &= -4 \\ 5y - 3x &= -5 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} x &= 5 - 3y \\ x + 8x &= 10 \end{aligned}\right\}$; *d)* $\left.\begin{aligned} 2x + 6y &= 6 \\ x + 2y &= \frac{4}{3} \end{aligned}\right\}$.

2. K1 Oldjuk meg az azonos együtthatók módszerével az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 2x - y &= 10 \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} x &= 2 - 4y \\ 8y + 3x &= 5 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 11 \\ 3x + 2y &= 9 \end{aligned}\right\}$; *d)* $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 6 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$.

3. K2 Vezessünk be célszerűen megválasztott új ismeretlent, és ennek segítségével oldjuk meg az egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{2}{3} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right\}$; *b)* $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x+3} + \frac{4}{y-5} &= 2 \\ \frac{3}{x+3} + \frac{8}{y-5} &= 5 \end{aligned}\right\}$; *c)* $\left.\begin{aligned} \frac{9}{2x-y} + \frac{7}{2x+y} &= 2 \\ \frac{6}{2x-y} - \frac{14}{2x+y} &= -\frac{4}{3} \end{aligned}\right\}$.

4. K1 Két szám összege 40, különbsége 13. Melyik ez a két szám?

5. K1 Egy panzióban három- és kétágyas szobák vannak. Összesen 14 szoba van, a férőhelyek száma 34. Hány két-, illetve háromágyas szoba van a panzióban?

6. K1 Egy- és kéteurós pénzérméből összegyűjtöttünk 35 db-ot, melynek értéke 56 euró. Melyik pénzérméből hány db-ot gyűjtöttünk össze?

7. K1 Ha egy kétjegyű számhoz hozzáadjuk a jegyei felcserélésével kapott számot, 132-t kapunk. Másrészt tudjuk, hogy a jegyek felcserélésével kapott szám harmadrésze 8-cal kisebb, mint az eredeti szám. Melyik kétjegyű számról van szó?

8. K1 Egy somlói galuska és egy krémes ára 560 Ft. Három krémes 80 Ft-tal drágább, mint egy somlói. Mennyit kell fizetnünk öt krémesért és két somlóiért?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **1039–1057; 1058–1067.**

77. SZÖVEGES FELADATOK 1.

A matematikában az egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldhatóságának vizsgálata, megoldásának módszerei fontos szerepet töltenek be. A mindennapi életben azonban természetesen nem egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel találkozunk. A valóságban felvetett problémák megoldása során eddigi ismereteink inkább csak technikai segítséget jelenthetnek a válaszok megadásában. Nemcsak ezekkel a módszerekkel kereshetünk válaszokat a felvetett kérdésekre – bár ezek az algoritmusok hatékonyak –, hanem gyakran logikai következtetésekkel is. Ne feledjük ezek használatát elménk csiszolása érdekében!

1. példa

A pénzváltó automatában a papírpénzt 10 és 20 forintosokra válthatjuk. Azt is megválaszthatjuk, hogy összesen hány darab érmét kapjunk. Hogy váltja fel az automata az 1000 Ft-ot, ha 90 darab érmét kérünk?

Megoldás

Jelöljük a 10 Ft-os érmék számát x-szel, ekkor a 20 Ft-os érmék száma $90 - x$.

$$10x + 20(90 - x) = 1000,$$
$$-10x = -800;$$
$$x = 80 \quad \Rightarrow \quad 90 - 80 = 10.$$

Ellenőrzés:

80 darab 10 Ft-os értéke 800 Ft, 10 darab 20 Ft-os értéke 200 Ft, 800 Ft + 200 Ft = 1000 Ft.

Tehát az automata 80 darab 10 Ft-os és 10 darab 20 Ft-os érmére vált fel.

2. példa

Húsz év múlva az apa kétszer annyi idős lesz, mint a fia. 8 évvel ezelőtt pedig hatszor idősebb volt nála. Hány évesek külön-külön?

Megoldás

Jelöljük jelenlegi életkoraikat: apa a éves; fia f éves. A feltételeket írjuk fel egyenletekkel:

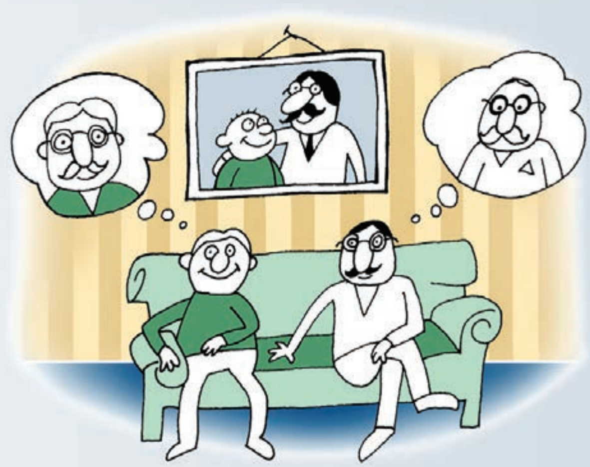
$$\left.\begin{aligned} a+20&=2(f+20)\\ a-8&=6(f-8)\end{aligned}\right\}$$ /rendezve

$$\left.\begin{aligned} a-2f&=20\\ a-6f&=-40\end{aligned}\right\}.$$ Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat!

$4f=60,$

$f=15.$

Visszahelyettesítve megkapjuk: $a=50.$



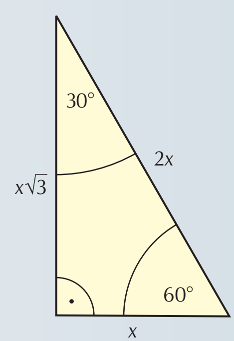
Ellenőrzés:
Húsz év múlva: apa: 70 éves, fia: 35 éves, $35\cdot 2=70.$
Nyolc évvel ezelőtt: apa: 42 éves, fia: 7 éves, $7\cdot 6=42.$
Mostani életkoraik: 50 év, illetve 15 év.

3. példa

Egy háromszög belső szögeinek aránya 1 : 2 : 3, kerülete $\left(30+10\sqrt{3}\right)$ cm. Számítsuk ki a leghosszabb oldalhoz tartozó magasság hosszát!

Megoldás

Mivel $\alpha:\beta:\gamma=1:2:3$, ezért $\alpha=\dfrac{180^\circ}{6}=30^\circ$, $\beta=2\cdot\dfrac{180^\circ}{6}=60^\circ\Rightarrow\gamma=90^\circ.$



Tehát a háromszög derékszögű háromszög, egy szabályos háromszög fele (oldalai: $2x$, x, $\sqrt{3}\cdot x$).

A háromszög kerülete: $30+10\sqrt{3}=x+2x+x\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad x=10$ cm.

Jelöljük az átfogóhoz tartozó magasságot m-mel.
A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{10\cdot 10\sqrt{3}}{2}=\frac{20\,m}{2}\quad\Rightarrow\quad m=5\sqrt{3}\ \text{(cm)}.$$

A leghosszabb oldalhoz tartozó magasság hossza $5\sqrt{3}$ cm.

4. példa

Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha a számjegyeit felcseréljük, 45-tel kisebb számot kapunk. Melyik az eredeti szám?

Megoldás

Jelöljük az egyeseken álló számjegyet x-szel, ekkor a tízes helyiértéken álló számjegy (y) a feltétel miatt: $y = 11 - x$. Eredeti szám $10 \cdot y + x = 10(11 - x) + x$. A felcserélt szám $10x + y = 10x + (11 - x)$. Egyenlettel felírva a feltételeket:

$$[10(11 - x) + x] - [10x + (11 - x)] = 45;$$

$$-18x + 99 = 45;$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 11 - 3 = 8.$$

Ellenőrzés:
$8 + 3 = 11$ és $83 - 38 = 45$.
A keresett szám a 83.

Megjegyzés
A hasonló jellegű feladatokat módszeres próbálkozással is megoldhatjuk. Gyakran hamarabb megoldáshoz juthatunk ezzel a módszerrel.

5. példa

Apa és fia nekiálltak kerítést festeni. Egymásról tudták, hogy egyedül 6, illetve 10 óra alatt lennének kész. Egyórányi közös munka után a mama elküldte a fiút vásárolni, így az apa fél órán át egyedül dolgozott. Majd közösen befejezték a kerítés festését. Összesen mennyi ideig tartott a kerítés festése?

Megoldás

Foglaljuk táblázatos elrendezésbe adatainkat! Jelöljük x órával azt az időt, amennyi ideig együtt dolgoztak.

Az apa egyedül elvégzi a munka $\frac{1}{6}$ részét 1 óra alatt;

a fiú egyedül elvégzi a munka $\frac{1}{10}$ részét 1 óra alatt.

1 óra közös munkavégzés alatt: $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$ részt;

az apa fél óra alatt: $\frac{1}{12}$ részt;

közösen x óra alatt a befejezésig: $\frac{x}{6} + \frac{x}{10} = \frac{4x}{15}$ részt.

Egyenlettel megfogalmazva: $\frac{4}{15}+\frac{1}{12}+\frac{4x}{15}=1$, rendezéssel:

$16+5+16x=60$, innen $x=\frac{39}{16}$. Ennyi órán át dolgoztak együtt.

Számítsuk ki, mennyi ideig dolgoztak külön-külön!

Apa: $1+\frac{1}{2}+\frac{39}{16}=\frac{63}{16}$ órát. Fiú: $1+\frac{39}{16}=\frac{55}{16}$ órát.

Az apa elvégezte a munka $\frac{63}{16}\cdot\frac{1}{6}=\frac{63}{96}=\frac{21}{32}$ részét, a fiú $\frac{55}{16}\cdot\frac{1}{10}=\frac{55}{160}=\frac{11}{32}$ részét. Ketten együtt: $\frac{21}{32}+\frac{11}{32}=1$, elvégezték a teljes munkát.

A kerítésfestés összesen $\frac{63}{16}$ óráig $=3$ óra $56{,}25$ percig, körülbelül 4 óráig tartott.

FELADATOK

1. K1 Egy kétjegyű számban a tízes helyiértéken 2-vel kisebb szám áll, mint az egyes helyiértéken. Ha a számjegyeket felcseréljük, az eredeti és felcserélt számok összege 154. Melyik ez a szám?

2. K1 Egy háromjegyű szám első számjegye 2. Ha a tízes és az egyes helyiértéken lévő számokat felcseréljük, akkor az eredeti szám és a kapott szám különbsége 63. Melyik ez a szám?

3. K1 Egy fürdőmedencét két csapon keresztül lehet feltölteni. Az első csap egyedül 18 óra alatt, a második csap egyedül 15 óra alatt töltené fel a medencét. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha az első csapból 2 órán keresztül folyik a víz, majd ezt a csapot elzárják?

4. K1 Egy autópálya-szakasz építéséhez kavicsot hordanak. Három különböző teljesítményű teherautó végzi a munkát. Az egyik teherautó egyedül 5 nap alatt, a másik teherautó egyedül 8 nap alatt, a harmadik teherautó egyedül 9 nap alatt vinné a helyszínre a szükséges kavicsmennyiséget. Mennyi idő alatt végzi el a három teherautó a munkát, ha párhuzamosan dolgoznak?

5. K1 Karcsi 17 évvel fiatalabb mogorva szomszédjánál. Ha kétszer annyi idős lenne, mint most, akkor egy évvel volna idősebb, mint a szomszédja most. Hány éves a mogorva szomszéd?

6. K1 Három testvér közül a legidősebb kétszer annyi éves, mint a legfiatalabb, a középső négy évvel fiatalabb, mint a legidősebb. Öt év múlva életkoraik összege 46 év. Hány évesek most a testvérek?

7. K1 Egy nagy méretű, kör alakú templomi ablak kerülete 5 méter. Hány méter a kör sugara? (A választ cm pontossággal adjuk meg!)

8. K1 Egy téglalap alakú füvesített terület közepére kb. 100 m^2 területű, kör alakú szökőkutat terveznek. Mekkora a füvesített terület oldalainak hossza, ha oldalainak aránya $7:3$, és a szökőkút területe a téglalap alakú park területének 13%-át foglalja el? A választ méter pontossággal adjuk meg!

9. K1 Egy lakóparkot L alakú park határol, mely 6 db azonos méretű négyzetre bontható. A parknak nincs kerítése a lakónegyed felé. A parkot határoló kerítéshossz mérőszámának tízszerese (m-ben mérve) megegyezik a park területének mérőszámával. Hány négyzetméter a park területe?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **1011–1019; 1077–1078; 1103–1127; 1171–1174; 1175–1178.**

78. SZÖVEGES FELADATOK 2.

Foglaljuk össze, hogyan építhetjük fel megoldásunkat gyakorlati feladatok esetén!

- A szöveg értelmezése után vezessünk be ismeretleneket, jegyezzük le mit, mivel jelöltünk!
- A szövegben megfogalmazott összefüggések után vagy logikai okfejtéssel oldjuk meg a feladatot, vagy fogalmazzunk meg egyenleteket, egyenlőtlenségeket!
- Oldjuk meg a felírt egyenleteket, egyenlőtlenségeket!
- A kapott eredményeket az eredeti szövegbe visszahelyettesítve végezzünk ellenőrzést! Nem szabad csak az egyenletmegoldást ellenőrizni, mert rosszul felírt egyenletet hibátlanul megoldva sem kapunk jó választ a feladat kérdésére!
- Jegyezzük le válaszunkat a feltett kérdésre!

1. példa

Az óra mutatói 6 órakor egy egyenesbe esnek és ellentétes irányúak. 6 óra után legközelebb mikor következik be ugyanez a helyzet?

Megoldás

Jelöljük a nagymutató szögelfordulását $2\pi + x$-szel, szögsebességét ω_n-nel, ekkor a kismutató szögelfordulása x, szögsebessége $\frac{\omega_n}{12}$.

A két mutató mozgása ugyanannyi ideig tart, tehát $\frac{2\pi + x}{\omega_n} = \frac{x}{\frac{\omega_n}{12}}$. Rendezve: $\frac{2\pi}{11} = x$.

A nagymutató 2π, azaz 360°-os elfordulása 60 percig tart, így tehát $\frac{2\pi}{11} = x$ szögelfordulás $\frac{60}{11}$ percig tart.

Vagyis 1 óra és $\frac{60}{11}$ perc múlva áll elő a kérdéses helyzet, azaz 7 óra $5\frac{5}{11}$ perckor.

2. példa

Két iskolai csoport találkozót beszélt meg. A két turistaház, ahol megszálltak, egymástól 25 km-re van, melyet egy ösvény köt össze. Az egyik csoport óránként 4, a másik 6 km-t tud megtenni. Ha egyszerre indulnak el, akkor mennyi idő múlva találkoznak? Határozzuk meg a találkozás pontos helyét!

Megoldások

1. megoldás:

Mivel a sebességek aránya 4 : 6, így azonos idő alatt a megtett utak aránya szintén 4 : 6.

Tehát a lassabbak $\frac{25}{10} \cdot 4 = 10$ km-t, míg a gyorsabbak 15 km-t tesznek meg. Mind a két társaságnak ehhez 2,5 órára van szüksége.

2. megoldás:

Jelöljük x km-rel azt az utat, amelyet a lassabban haladók tesznek meg a találkozásig.

Ekkor ők összesen $\frac{x}{4}$ óráig vannak úton, a másik csoport tagjai pedig $\frac{25-x}{6}$ óráig.

Ezek egyenlőségéből:

$$\frac{x}{4} = \frac{25-x}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 10 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad 25 - 10 = 15 \text{ km.}$$

A lassabban haladók 10 km-t 2,5 óra alatt, míg a gyorsabban haladók 15 km-t szintén 2,5 óra alatt tesznek meg a találkozásig.

3. példa

Laboratóriumban gyakran kell 30%-os és 80%-os oldatból 5 liter 60%-os töménységű oldatot készíteni a kísérletekhez. Melyikből mennyit kell vennünk? Adjuk meg a választ úgy is, ha azt szeretnénk, hogy a keverék töménysége p%-os legyen!

Megoldás

Oldjuk meg az általánosabb kérdést!

Jelöljük a 30%-os oldat térfogatát x literrel. Foglaljuk táblázatba az adatokat:

x liter	30%-os oldat	tömény része: $\frac{30x}{100}$ liter,
$(5-x)$ liter	80%-os oldat	tömény része: $\frac{80(5-x)}{100}$,
5 liter	p%-os oldat	tömény része: $\frac{5p}{100}$.

A tömény részekkel paraméteres egyenlethez jutunk:

$$\frac{30x}{100} + \frac{80(5-x)}{100} = \frac{5p}{100}.$$

Emelt szint

Oldjuk meg az egyenletet a pozitív számok halmazán, ahol $0 \le x \le 5$ és $30 \le p \le 80$!

$400 - 50x = 5p$.

$$x = \frac{400 - 5p}{50} = \frac{80 - p}{10}.$$

Egyszerű számolással meggyőződhetünk, hogy a kapott gyök kielégíti a feltételeinket:

Ha $0 \le \frac{80 - p}{10} \le 5 \quad \Rightarrow \quad 0 \le 80 - p \le 50 \quad \Rightarrow \quad 30 \le p \le 80$.

Ha, az első kérdésnek megfelelően, $p = 60$, akkor:

$x = \frac{80 - 60}{10} = 2$, azaz 2 liter kell a 30%-os és 3 liter a 80%-os oldatból.

Ellenőrzés:
$2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}8 = 3 = 5 \cdot 0{,}6$.

4. példa

Egy derékszög háromszög oldalainak mérőszáma egész szám. A háromszög kerületének és területének a mérőszáma megegyezik. Határozzuk meg a háromszög oldalait!

Megoldás

Jelölje a két befogó hosszát a és b, ekkor az átfogó hossza $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, és a kerület és terület mérőszámának egyenlőségéből $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{ab}{2}$ (ahol a, b pozitív egész számok). Az egyenletet átrendezzük és négyzetre emelünk:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{ab}{2} - (a + b)$$

$$a^2 + b^2 = \frac{a^2 b^2}{4} + a^2 + b^2 + 2ab - ab(a + b)$$

Rendezés és ab-vel osztás után
$0 = ab + 8 - 4a - 4b$.
A másodfokú diofantoszi egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk 8-at, majd a jobb oldalát szorzattá alakítjuk:
$8 = (a - 4)(b - 4)$.
Mivel $(a - 4)$ és $(b - 4)$ egész számok, a tényezők csak a 8 osztói lehetnek. Feltehetjük, hogy pl. $a \le b$, ekkor a lehetőségek:

$a - 4$	–8	–4	1	2
$b - 4$	–1	–2	8	4
a	–4	0	5	6
b	3	2	12	8

Két megoldást kapunk: $(a, b) = (5, 12)$ vagy $(a, b) = (6, 8)$.
Ellenőrzés: ha $(a, b, c) = (5, 12, 13)$, akkor a kerület és a terület 30; $(a, b, c) = (6, 8, 10)$ esetén pedig a kerület és a terület is 24.

5. példa

Az A autó $a\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, míg a B autó $b\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad ($0 < a < b$). Induláskor a közöttük levő távolság $d > 0$ km. Mikor találkozik a két autó, ha

a) egy irányba haladnak (B van hátrább);
b) ellentétes irányba haladnak?

Megoldások

Jelöljük x-szel a találkozásig eltelt időt órában számolva. A megtett utak egyenlőségéből:

a) $bx - ax = d$.

$(b - a)x = d$, mivel $b \neq a$, így $x = \dfrac{d}{b-a}$.

b) $ax + bx = d \Rightarrow \qquad x = \dfrac{d}{a+b}$.

A találkozásig $\dfrac{d}{b-a}$ óra, illetve $\dfrac{d}{a+b}$ óra szükséges.

FELADATOK

1. K1 Egy autó A-ból B felé halad. Bizonyos idő múlva a megtett út úgy aránylik a még hátralévőhöz, mint 3 : 5. Ha az autó megtesz még 40 km-t, akkor az út felénél tart. Mekkora az AB távolság?

2. K2 10 liter 20%-os oldathoz legalább hány liter 80%-os oldatot öntsünk, hogy a keverék legalább 42%-os legyen? (A választ két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.)

3. E2 Numizmatikus barátomnak k db érméje összesen K dkg. Legfeljebb hány érme tömege lehet nagyobb, mint $\dfrac{K}{k} + 0{,}01$?

4. E1 Egy $2x$ liter térfogatú edényben x liter víz, mellette egy $2y$ liter térfogatú edényben y liter víz van. Az elsőbe percenként $\dfrac{y}{x}$ liter, a másodikba percenként $\dfrac{x}{y}$ liter víz folyik be. Hány perc múlva lesz a két edényben ugyanannyi víz?

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **1020–1023; 1034–1038; 1146–1151; 1152–1157.**

VIII. FÜGGVÉNYEK – TRANSZFORMÁCIÓK

Egyenleteinket úgy is értelmezhetjük, hogy annak mindkét oldalán egy-egy függvény áll. Az egyenlet értelmezési tartománya a két értelmezési tartomány metszete. A megoldáshalmazt pedig az értelmezési tartomány azon elemei alkotják, amelyekre a két függvény értéke megegyezik. A grafikus megoldás szempontjából ez annyit jelent, hogy ábrázoljuk mindkét függvényt. Ezután megkeressük a két grafikon metszéspontjait. A metszéspontok első koordinátái a megoldások. A második koordináták pedig a megegyező függvényértékek. Ezt a megoldást csak akkor alkalmazhatjuk, ha a metszéspontok koordinátái pontosan leolvashatók. A leolvasás után behelyettesítéssel ellenőriznünk kell a megoldást.

George Washington híd New Yorkban.

79. EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK GRAFIKUS MEGOLDÁSA

1. példa

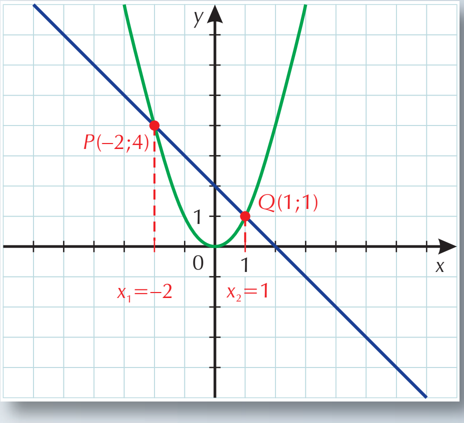
Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletet!

$x^2 = 2 - x.$

Megoldás

Egyenletünk mindkét oldalának értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Ábrázoljuk az $x \mapsto x^2$ és az $x \mapsto 2 - x$ függvényeket!

A két függvény grafikonja a $P(-2;\ 4)$ és $Q(1;\ 1)$ pontokban metszi egymást. Át kell gondolnunk, lehet-e több metszéspont. A parabolának és az egyenesnek nem lehet kettőnél több közös pontja. Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek két megoldása van, mégpedig az $x_1 = -2$ és az $x_2 = 1$. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ezek valóban megoldásai az egyenletnek.



Ellenőrzés:

$(-2)^2 = 2 - (-2),$

$4 = 4,$

$1^2 = 2 - 1,$

$1 = 1.$ Tehát mindkét megoldás helyes.

2. példa

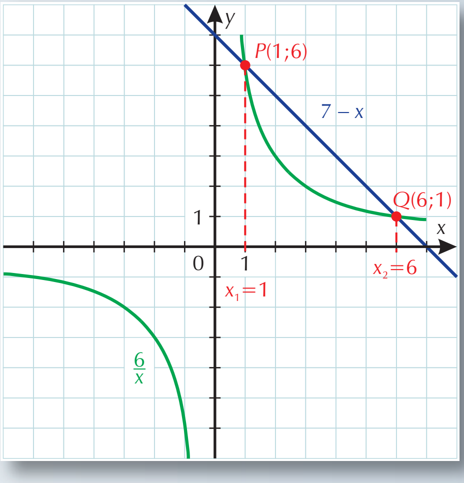
Keressük meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek reciprokának hatszorosa ugyanannyi, mint amennyivel ők maguk kisebbek hétnél!

Megoldás

A $\frac{6}{x} = 7 - x$ egyenlet megoldásait keressük.

Ábrázoljuk az $x \mapsto \frac{6}{x}$ és az $x \mapsto 7 - x$ függvényeket az $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ halmazon!

A két grafikon a $P(1;\ 6)$ és a $Q(6;\ 1)$ pontokban metszi egymást. Tehát az egyenlet gyökei az $x_1 = 1$ és az $x_2 = 6$. Ezeket behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.



$\frac{6}{1} = 7 - 1,$

$6 = 6,$

$\frac{6}{6} = 7 - 6,$

$1 = 1,$ valóban megoldásai az egyenletnek.

3. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$|x| = \frac{1}{2}x + 3.$$

Megoldás

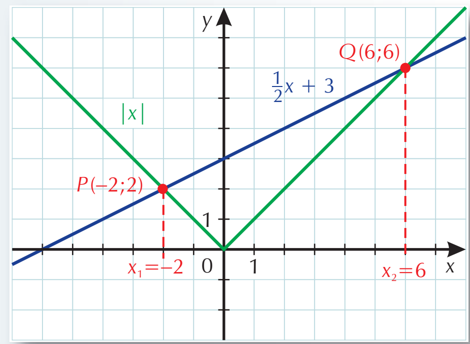
Az eddigiek alapján nem lesz nehéz dolgunk.

Ábrázoljuk az $x \mapsto |x|$ és az $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ függvényeket!

A metszéspontok koordinátái könnyen leolvashatók. *P*(–2; 2) és *Q*(6; 6). Tehát a megoldások: $x_1 = -2$, $x_2 = 6$. Ezeket könnyen ellenőrizhetjük:

$$|-2| = \frac{1}{2}\cdot(-2) + 3$$

$$|6| = \frac{1}{2}\cdot 6 + 3$$



4. példa

(Nem érettségi tananyag.)

Keressünk olyan pozitív számokat, amelyek kétszereséhez az egész részüket hozzáadva 5-öt kapunk!

Megoldás

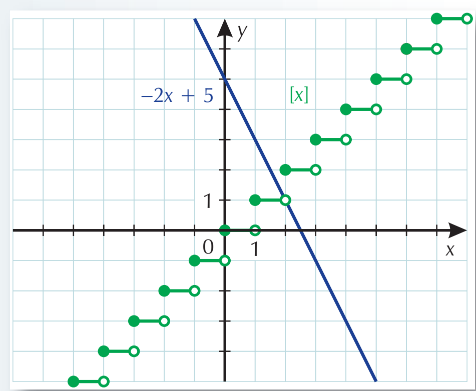
Feladatunk egyenértékű az $[x] + 2 \cdot x = 5$ egyenlet megoldásával. Ha grafikusan akarjuk megoldani a problémát, akkor célszerű átalakítani egyenletünket.

$$[x] + 2 \cdot x = 5 \qquad /-2 \cdot x$$

$$[x] = -2 \cdot x + 5$$

Most már ábrázolhatjuk a két függvényt. $f(x) = [x]$ és $g(x) = -2 \cdot x + 5$.

A két görbének nincs közös pontja. Az *f* függvény görbéjéhez nem tartozik hozzá a *P*(2; 1) pont, hiszen [2] = 2. Tehát az egyenletnek nincs megoldása.

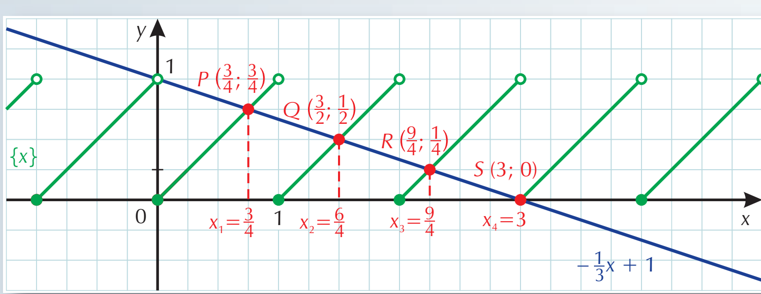


5. példa

(Nem érettségi tananyag.)

Keressük meg az összes olyan számot, amelyek harmadát 1-ből kivonva eredményül a szám tört részét kapjuk!

Megoldás



A feladat a $\{x\} = 1 - \frac{x}{3}$ egyenlet megoldását kívánja tőlünk. Az egyenlet algebrai megoldása kicsit hosszadalmasnak tűnik. A függvények segítségével viszont elég gyorsan célhoz érhetünk. Tehát ábrázolnunk kell az $x \mapsto \{x\}$ és az $x \mapsto 1 - \frac{x}{3}$ függvényeket.

Most nem tudjuk közvetlenül leolvasni az összes megoldást. Azt viszont láthatjuk, hogy egyenletünknek pontosan négy megoldása van. Ha $x = 0$, akkor a (0; 1) nem megoldás, mert az $\{x\}$ grafikonjának a (0; 1) nem pontja. Az $S(3; 0)$ pont könnyen leolvasható a grafikonról. Az x_1-ről csak annyit tudunk, hogy $0 < x_1 < 1$. Viszont itt egyszerű algebrai átalakításokkal hamar célhoz érünk. Tudjuk, hogy $\{x\} = x$, ha $0 \leq x < 1$, ezért egyenletünk így alakul:

$$x = 1 - \frac{1}{3}x \qquad /\cdot 3$$

$$3 \cdot x = 3 - x \qquad /+x$$

$$4 \cdot x = 3 \qquad /:4$$

$x = \frac{3}{4}$, tehát $x_1 = \frac{3}{4}$ és $P\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$. Az eredményt könnyen ellenőrizhetjük.

$$\left\{\frac{3}{4}\right\} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right) \qquad /\cdot 3$$

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4},$$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, valóban megoldás.

Az x_2-ről látjuk, hogy $1 < x_2 < 2$. Ebben az intervallumban a $\{x\} = x - 1$, hiszen az $x \mapsto x$ grafikonját eggyel toltuk „lejjebb”. Itt egyenletünk így alakul:

$$x - 1 = 1 - \frac{1}{3}x \qquad /\cdot 3$$

$$3 \cdot x - 3 = 3 - x \qquad /+x$$

$$4 \cdot x - 3 = 3 \qquad /+3$$

$$4 \cdot x = 6 \qquad /:4$$

$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, tehát $x_2 = \frac{3}{2}$, $Q\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Ellenőrzés: $\left\{\frac{3}{2}\right\} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)$,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ha $2 \leq x < 3$, akkor az $x \mapsto \{x\}$ képét úgy kapjuk, hogy az $x \mapsto x$ görbét kettővel „lejjebb” toljuk. Így ezen az intervallumon $\{x\} = x - 2$.

Az egyenlet $x - 2 = 1 - \frac{x}{3}$ alakú lesz.

$$x - 2 = 1 - \frac{x}{3} \qquad /\cdot 3$$

$$3x - 6 = 3 - x \qquad /+x$$

$$4x - 6 = 3 \qquad /+6$$

$$4x = 9 \qquad /:4$$

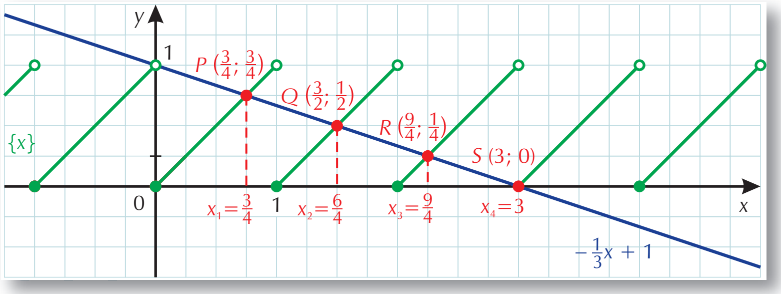
$x = \frac{9}{4}$, tehát $x_3 = \frac{9}{4}$ és $R\left(\frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Ellenőrzés: $\left\{\frac{9}{4}\right\} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4}$,

$$\left\{2 + \frac{1}{4}\right\} = 1 - \frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Tehát egyenletünk megoldásai: $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{9}{4}$, $x_4 = 3$.



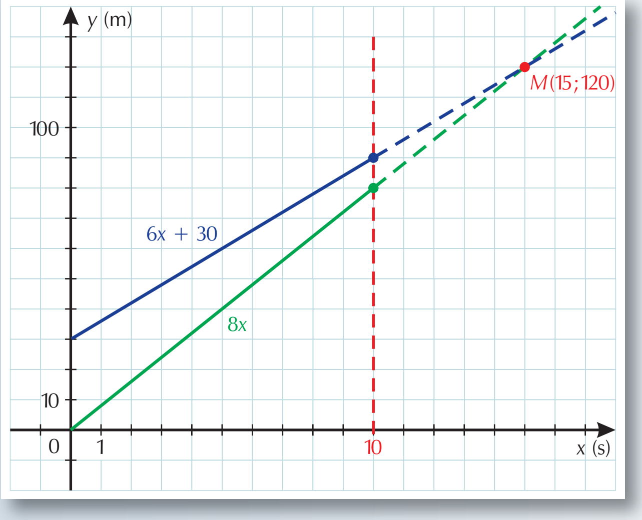
Érdemes a függvényeket még egyszer felrajzolni; négyzethálós füzetünkben egy egységet két cm-nek véve.

Egyenleteinket rendszerint nullára rendezzük. Ha ilyen formában szeretnénk megoldani grafikus módszerrel, akkor az egyik függvény az azonosan nulla függvény lesz. Ennek képe az *x* tengely. Tehát lényegében a másik oldalnak megfelelő függvénynek az *x* tengellyel való metszéspontjait keressük.

6. példa

Egy róka tőle 30 m távolságra megpillant egy nyulat, és azonnal a nyomába ered. A róka 8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a nyúl pedig 6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel tud futni. A nyúl egyetlen esélye, hogy a róka csak 10 másodpercig tud ilyen gyorsan futni. Megmenekül-e a nyúl?

Megoldás



Grafikus megoldással kísérletezünk.

Fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy az egyenletes mozgást végző test által megtett út (*s*) a sebesség (*v*) és az eltelt idő (*t*) szorzata. Az *x* tengelyen az eltelt időt másodpercben, az *y* tengelyen pedig a róka kezdeti helyzetétől mért távolságot méterben mérjük.

A róka helyzetét az $f(x) = 8x$ függvény adja meg, ahol az *x* az eltelt időt, $f(x)$ pedig a kezdeti helyzettől mért távolságot jelenti. Természetesen $x \geq 0$.

A nyúl esetében a $g(x) = 30 + 6x$ lesz a megfelelő függvény.

Ábrázoljuk mindkét függvényt ugyanabban a koordinátarendszerben.

Jól látható, hogy a rókának 15 másodpercre lenne szüksége ahhoz, hogy utolérje a nyulat. Mivel a róka csak tíz másodpercig tud ilyen sebességgel futni, ezért a nyúl megmenekül.

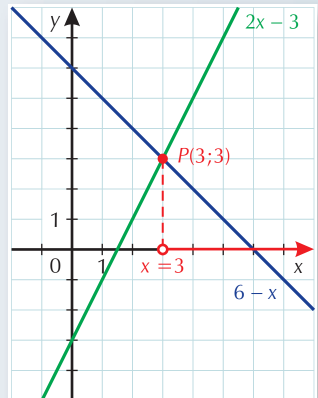
A grafikonról azt is leolvashatjuk, hogy tíz másodperc alatt a kezdeti 30 m-es előnyből csak 10 m maradt.

EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA GRAFIKUS MÓDSZERREL

7. példa

Oldjuk meg grafikusan a $2x - 3 > 6 - x$ egyenlőtlenséget!

Megoldás



Mindkét oldal értelmezési tartománya az összes valós szám. Most is ábrázoljuk az $f\colon x \mapsto 2x - 3$ és $g\colon x \mapsto 6 - x$ függvényeket! Olyan x-eket keresünk, amelyekre az f függvény értékei nagyobbak a g értékeinél. Mivel a grafikon pontjainak második koordinátája a függvényérték, ezért azon x értékeket keressük, amelyekre az f képének pontjai g képének pontjai fölött vannak.

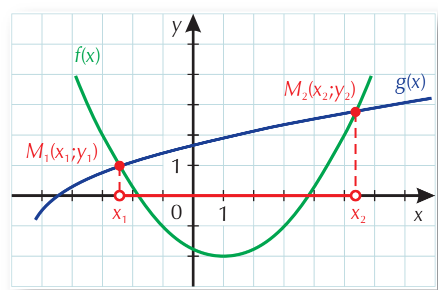
Nézzük a grafikonokat!

Az ábrán jól látható, hogy $x = 3$-nál a két függvény értékei megegyeznek. Ha viszont $x > 3$, akkor az f képének pontjai vannak fölül. Tehát a megoldáshalmaz a háromnál nagyobb számok.

Például $x = 4$-nél:
$2 \cdot 4 - 3 = 5 > 6 - 4 = 2$.

Tehát a megoldáshalmaz $M =]3; \infty[$.
Az egyenlőtlenséget algebrai úton is megoldhatjuk:

$$
\begin{aligned}
2x - 3 &> 6 - x && /+x\\
3x - 3 &> 6 && /+3\\
3x &> 9 && /:3\\
x &> 3.
\end{aligned}
$$



Ily módon egyszerűbben jutottunk eredményre, de ez nem mindig van így. A függvények néha akkor is segíthetnek, amikor az algebrai átalakítások csődöt mondanak.

Az 7. példa módszerét általánosíthatjuk is.

Az $f(x) < g(x)$ egyenlőtlenség grafikus megoldása érdekében mindkét függvényt ábrázoljuk.

Megkeressük az f függvénygörbe azon pontjait, amelyek a g függvénygörbe pontjai alatt helyezkednek el. Ezeknek az első koordinátái alkotják a megoldáshalmazt. Természetesen az egyenlőtlenségünk értelmezési tartománya csak a két függvény értelmezési tartományának a közös része lehet.

Tehát $M \subseteq D_f \cap D_g$,

$f(x) < g(x)$,

a megoldás: $x_1 < x < x_2$.

8. példa

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget!

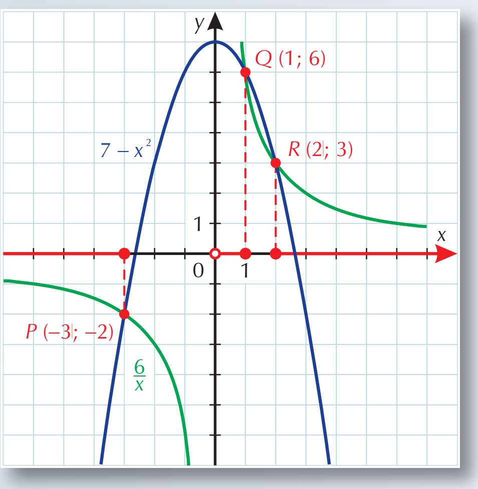
$\frac{6}{x} \geq 7 - x^2$.

Megoldás

Ábrázoljuk a függvényeket: $f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = 7 - x^2$! Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Az ábrázoláshoz készítsünk táblázatot!

x	–5	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5	6
$\frac{6}{x}$	–1,2	–1,5	–2	–3	–6	6	3	2	1,5	1,2	1
x^2	25	16	9	4	1	1	4	9	16	25	36
$7 - x^2$	–18	–9	–2	3	6	6	3	–2	–9	–18	–29



A metszéspontok koordinátáit már a táblázatból is kiolvashatjuk, $P(-3; -2)$, $Q(1; 6)$, $R(2; 3)$.

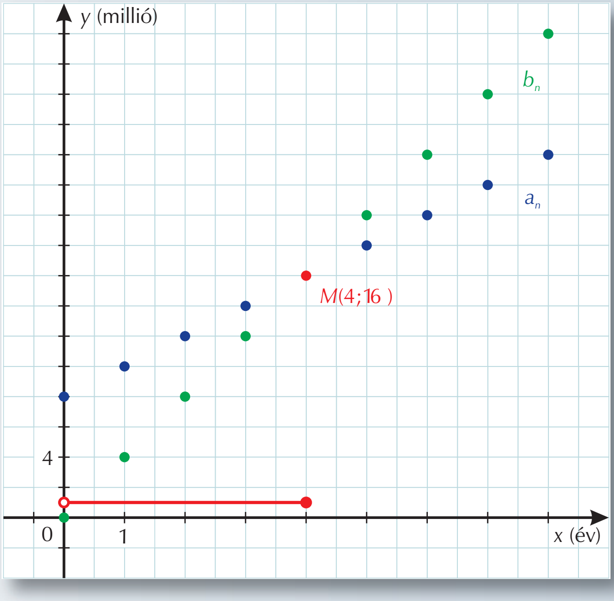
Három olyan intervallumot találunk, ami megoldása feladatunknak:

$M =]-\infty; -3] \cup]0; 1] \cup [2; \infty[$.

Operaház Sydney-ben, Ausztráliában

9. példa

8 millió forintom van a bankban, évente 2 milliót tudok megtakarítani. A barátomnak ugyan egy forintja sincs a bankban, de éves szinten 4 milliót tud megtakarítani. Mennyi ideig érezhetem gazdagabbnak magam nála?



Megoldás

Jelöljük a_n-nel a bankban lévő pénzemet n év múlva millióban. Legyen b_n a barátom vagyona a bankban, szintén millióban. Az n egy nemnegatív egész számot jelent. Két sorozatot kapunk:

$a_n = 8 + n \cdot 2,$
$b_n = 4 \cdot n.$

Ábrázoljuk mindkét sorozatot egy koordináta-rendszerben!

A grafikonról leolvasható, hogy a negyedik év végéig én leszek a gazdagabb. Mivel év közben nem tudjuk pontosan, mi történik, ezért feltételezzük, hogy vagyonunk egyenletesen gyarapszik. Négy év elteltével pontosan ugyanannyi pénzünk lesz. Utána pedig már a barátom lesz a vagyonosabb.

FELADATOK

Fogalmak
grafikus megoldás;
egyenletek grafikus megoldása;
egyenlőtlenségek grafikus megoldása.

1. Oldjuk meg az első négy példa megoldásának felhasználásával a következő egyenlőtlenségeket!

K1 *a)* $x^2 > 2 - x$; **K2** *c)* $\frac{6}{x} < 7 - x$;

K2 *b)* $|x| < \frac{1}{2}x + 3$; *Nem érettségi tananyag:* *d)* $\{x\} > 1 - \frac{x}{3}$.

2. Oldjuk meg az egyenleteket!

K1 *a)* $x^2 = 2x$; **E1** *b)* $x^2 = |x|$; *Nem érettségi tananyag:* *c)* $[x] = x^2 - 2$.

3. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket!

K1 *a)* $x + 1 < \frac{2}{x}$; **E1** *b)* $x^2 - 6 > -|x|$; **K2** *c)* $x^2 + 6x + 5 \le 0$.

4. K2 Győr és Miskolc távolsága autópályán 300 km. Reggel egy időben elindul két személyautó egymással szemben. A Győrből indulónak 70 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$, a Miskolcról indulónak pedig 80 $\frac{\text{km}}{\text{óra}}$ az átlagsebessége. Az indulás után mennyi idővel találkoznak? Mennyi idő múlva lesz a két autó távolsága 30 km? (Ábrázoljuk az autók távolságát az idő függvényében!)

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: **153.** oldal.

FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓK (Olvasmány)

A korábbi leckékben megismerkedtünk a függvények néhány alaptípusával. Az ábrázolások során megtapasztaltuk, hogy a hozzárendelési szabály kis változtatása hogyan módosítja a függvény grafikonját.

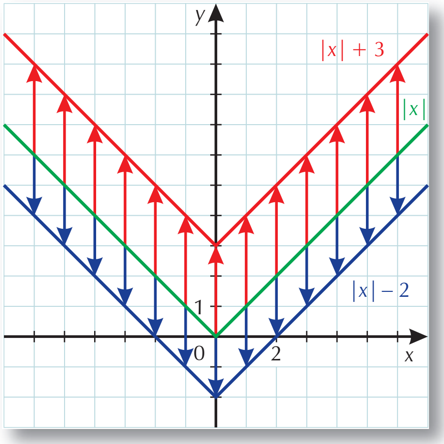
Ezeket az ismereteket foglaljuk most össze.

I. A függvénygörbe eltolása az *y* tengely mentén.

$f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = |x| - 2$, $f_3(x) = |x| + 3$,
$g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = x^2 - 2$, $g_3(x) = x^2 + 3$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert - 2$	1	0	–1	–2	–1	0	1
$\lvert x\rvert + 3$	6	5	4	3	4	5	6

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 - 2$	7	2	–1	–2	–1	2	7
$x^2 + 3$	12	7	4	3	4	7	12

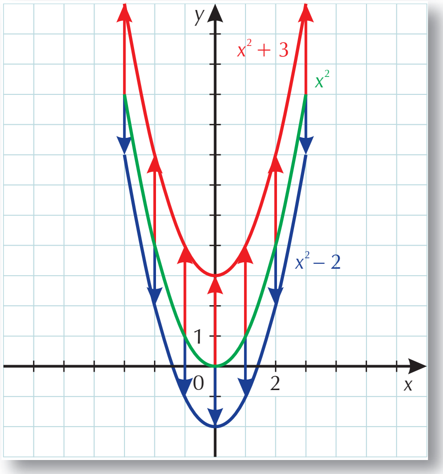


Bár mindkét esetben más volt az alapfüggvényünk, mégis ugyanaz az eltolás vezetett eredményre.

Ezekből arra következtethetünk, hogy tetszőleges függvény képének ismeretében ábrázolni tudjuk a tőle csak egy konstansban különbözőt.

Ezt egyszerűen leírhatjuk a függvények nyelvén : $f(x) \to f(x) + c$.

A grafikont el kell tolnunk az *y* tengely mentén *c*-vel.



II. A függvénygörbe eltolása az *x* tengely mentén.

Az első esetben a függvény értékét változtattuk meg, most viszont a változót fogjuk.

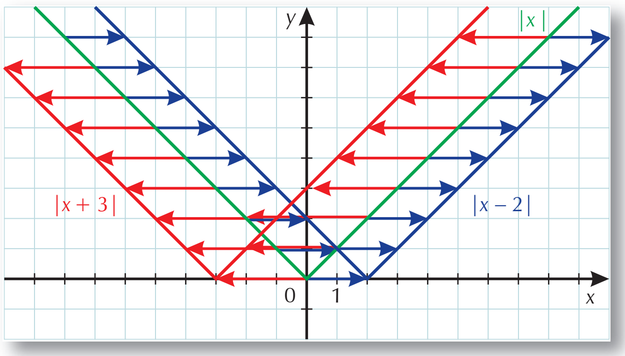
Lássuk a példákat!

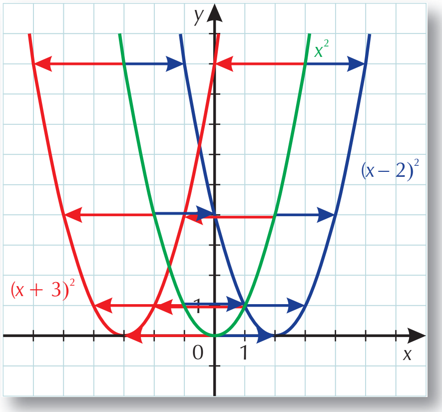
$f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = |x - 2|$, $f_3(x) = |x + 3|$.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\lvert x\rvert$	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$x - 2$	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2
$\lvert x - 2\rvert$	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2
$x + 3$	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\lvert x + 3\rvert$	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7

$g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = (x - 2)^2$, $g_3(x) = (x + 3)^2$.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x^2	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$x - 2$	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2
$(x - 2)^2$	49	36	25	16	9	4	1	0	1	4
$x + 3$	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$(x + 3)^2$	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49

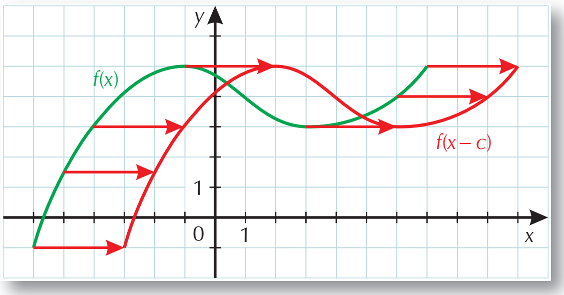




Itt is eltolással kaptuk meg az új függvényt az eredetiből.

A képletben a változó helyére egy új változót helyettesítünk. Egyszerűen így foglalhatjuk össze: $f(x) \to f(x - c)$. Tehát az $f(x)$ képének ismeretében tudjuk ábrázolni az $f(x - c)$-t. Az eredeti függvény grafikonját el kell tolnunk c-vel az x tengely mentén. Ha $c > 0$ (pl. 2, $f(x - 2)$), akkor pozitív irányba kell eltolnunk, ha $c < 0$ (pl. –3, $f(x - (-3)) = f(x + 3)$), akkor pedig negatív irányba az x tengely mentén.

Jelen esetben $c = -3$, illetve $c = 2$.



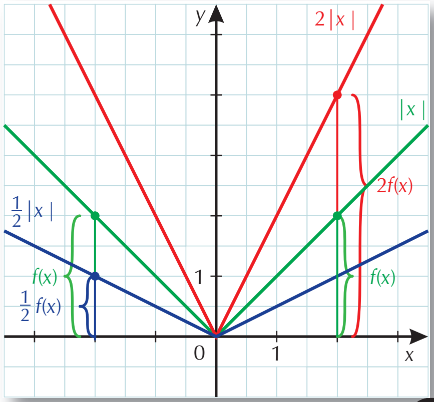
Vigyázz!

Ha a függvényt pozitív irányba toljuk az x tengely mentén c-vel, a képletben x helyett $(x - c)$-t helyettesítünk!

III. Szorozzuk meg a függvényt egy számmal!

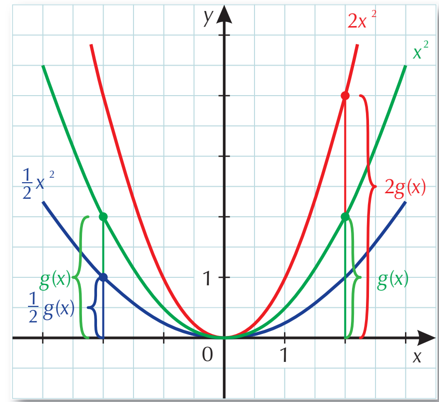
$f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = 2|x|$, $f_3(x) = \frac{1}{2}|x|$.

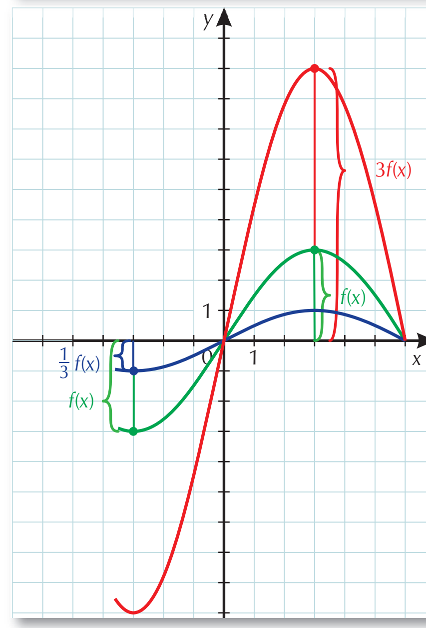
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$2\|x\|$	6	4	2	0	2	4	6
$\frac{1}{2}\|x\|$	1,5	1	0,5	0	0,5	1	1,5



$g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = 2x^2$, $g_3(x) = \frac{1}{2}x^2$;

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$\frac{1}{2}x^2$	4,5	3	0,5	0	0,5	2	4,5





A függvények hozzárendelési szabálya csak annyiban változott, hogy megszoroztuk egy pozitív számmal. A rajzokon jól látható, hogy ebben az esetben a grafikon pontjai egy függőleges egyenes mentén mozdulnak el. Az x tengelytől mért előjeles távolságuk változik pontosan annyiszorosára, mint amennyivel a függvényt szoroztuk. A tengelyen lévő pontok helyben maradnak. Ha egynél nagyobb számmal szorzunk, akkor a pontok távolodnak az x tengelytől, és ezt mi nyújtásnak fogjuk nevezni. Ha egynél kisebb ez a szám, akkor zsugorításról beszélünk. Ezt a geometriai transzformációt az x tengelyre történő merőleges affinitásnak nevezzük.

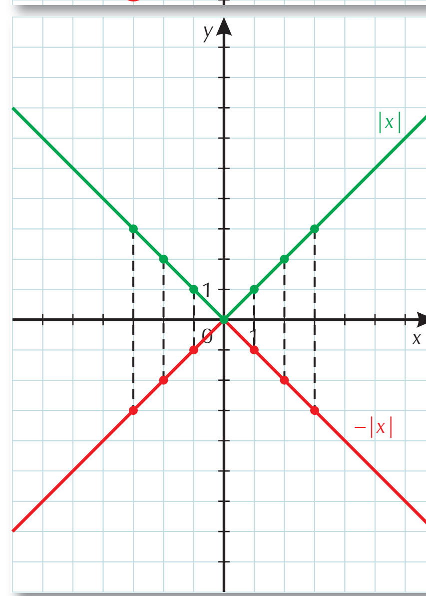
Tehát $f(x) \to c \cdot f(x)$, ahol $c > 0$, de $c \neq 1$, akkor ez vagy nyújtás ($c > 1$), vagy zsugorítás ($0 < c < 1$).

IV. Nézzük meg a $c = -1$ esetet!

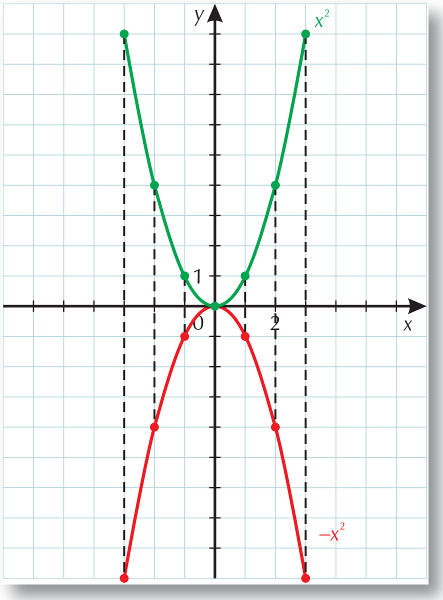
$f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = -|x|$;

$g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = -x^2$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9
$\lvert x \rvert$	3	2	1	0	1	2	3
$-\lvert x \rvert$	–3	–2	–1	0	–1	–2	–3



Látható, hogy $f(x) \rightarrow -f(x)$ esetén az x tengelyre vonatkozó tükrözés vezet eredményre.



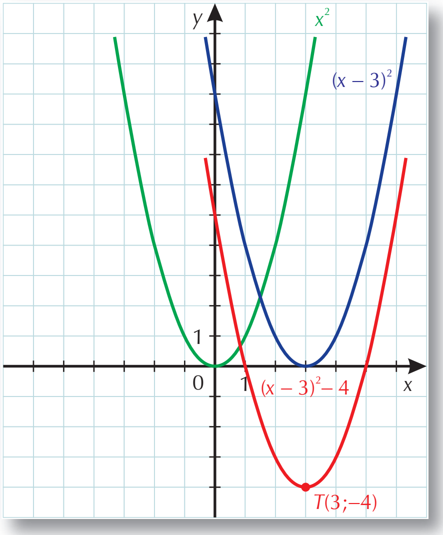
Egy függvényábrázolás során lehet, hogy ezeket a transzformációkat többször kell alkalmaznunk egymás után. Például:

$f(x) = (x - 3)^2 - 4.$

Nézzük, hogyan kell ezt a függvényt transzformációk egymásutánjával ábrázolni.

Kiindulunk az x^2 grafikonjából. Ezt hárommal „jobbra" (az x tengely mentén pozitív irányba) tolva kapjuk az $(x - 3)^2$-et. Ha ezt eltoljuk néggyel „lefelé" (az y tengely mentén negatív irányba), akkor megkapjuk $f(x)$ képét. Ezt egyszerűen így írhatjuk:

$x^2 \rightarrow (x - 3)^2 \rightarrow (x - 3)^2 - 4.$



1. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = -2(x + 2)^2 + 2$ függvényt!

Megoldás

Nézzük, hány transzformációs lépéssel juthatunk el idáig az x^2 grafikonjából kiindulva!

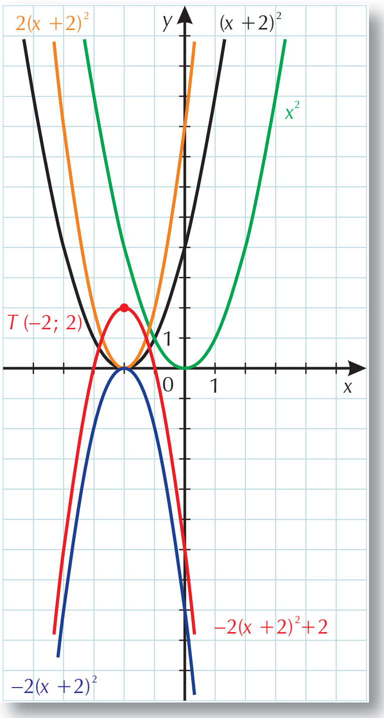
$x^2 \rightarrow 2x^2 \rightarrow -2x^2 \rightarrow -2(x + 2)^2 \rightarrow -2(x + 2)^2 + 2.$

Tehát először nyújtjuk kétszeresére, majd tükrözzük az x tengelyre, ezután eltoljuk kettővel „balra" (az x tengely mentén negatív irányba), végül eltoljuk 2-vel „felfelé" (az y tengely mentén pozitív irányba).

Megjegyzés

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a következő sorrendben hajtjuk végre az ábrázolást:

$x^2 \to (x+2)^2 \to 2(x+2)^2 \to -2(x+2)^2 \to -2(x+2)^2+2.$



Megjegyzés

Minden másodfokú kifejezést átalakíthatunk erre a transzformációs alakra. Nézzünk két egyszerű példát!

2. példa

Készítsük el az $f(x) = x^2 + 4x$ függvény grafikonját!

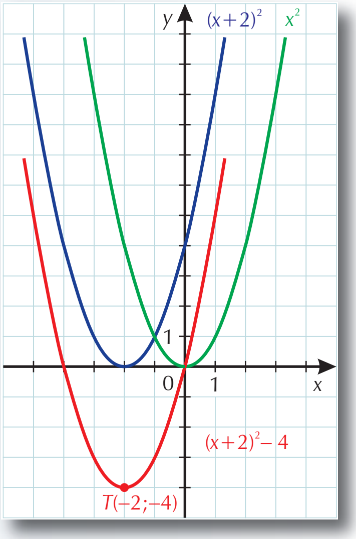
Megoldás

Ilyen alakban nem tudjuk leolvasni a transzformációs lépéseket. Algebrai tanulmányaink során megismerkedtünk a másodfokú kifejezések azonos átalakításaival. Ezek közül most a teljes négyzetté alakítást fogjuk használni.

$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x^2 + 4x + 4) - 4 = (x+2)^2 - 4$. Így már elvégezhetjük a transzformációs lépéseket.

Az ábrázoláshoz két lépésre lesz szükség.

$x^2 \to (x+2)^2 \to (x+2)^2 - 4$, vagyis a normálparabolát először eltoljuk „balra” két egységgel, majd „lefelé” 4 egységgel.



3. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$ függvényt! Keressük meg a parabola tengelypontját!

Megoldás

Újra teljes négyzetté alakítással próbálkozunk. Előtte azonban emeljük ki az x^2 együtthatóját az egész kifejezésből!

$-2x^2 - 8x - 6 = -2(x^2 + 4x + 3) = -2[(x+2)^2 - 1] = -2(x+2)^2 + 2.$

Megkaptuk az első példában már ábrázolt függvényt. Így a tengelypont koordinátáit is könnyen meghatározhatjuk: $T(-2;\,2)$.

A másodfokú függvények ábrázolása során tanultakat hasznosíthatjuk más függvények ábrázolásánál is.

4. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ függvényt!

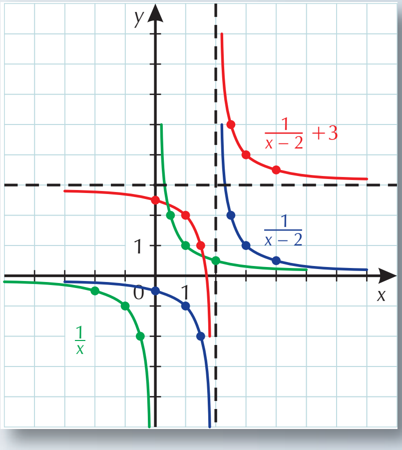
Megoldás

Most az alapfüggvény az $\frac{1}{x}$, aminek a képe hiperbola, melynek aszimptotái az x és y tengely.

Nézzük a transzformációs lépéseket!

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x-2} \to \frac{1}{x-2} + 3.$$

Az első lépésben eltoljuk a hiperbolát kettővel jobbra. Ekkor viszont a függőleges aszimptota, vagyis az y tengely is kettővel jobbra mozdul. Az új aszimptotát egy függőleges szaggatott vonallal jelöljük. A második lépésben 3-mal felfelé (az y tengely mentén pozitív irányba) toljuk el grafikonunkat. Ekkor a vízszintes aszimptota, vagyis az x tengely is hárommal feljebb kerül. Húznunk kell egy vízszintes szaggatott vonalat, ami 3-nál metszi az y tengelyt.



A transzformációk megváltoztatták az értelmezési tartományt és az értékkészletet is.

Az $\frac{1}{x}$-nek az ÉT-a és az ÉK-e is az összes valós szám, kivéve a nulla.

Az $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$-nak az ÉT-a az összes valós szám, kivéve a 2-t, az ÉK-e az összes valós szám, kivéve a 3-at.

A transzformációk alkalmazása során mindig ügyelnünk kell arra, hogy a megfelelő helyeken értelmezve legyenek a függvényeink.

5. példa

Ábrázoljuk az $f(x) = \frac{2x-5}{x-2}$ függvényt!

Megoldás

Itt szintén nem tudjuk rögtön leolvasni a transzformációs lépéseket. Szükségünk van némi átalakításra. Ezt ezután transzformációs alakra hozásnak, vagy „egész rész leválasztásnak” hívjuk.

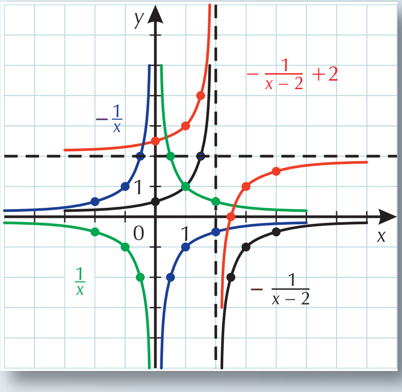
$$\frac{2x-5}{x-2} = \frac{2(x-2)-1}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} - \frac{1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{x-2} + 2.$$

Végeredményben egy olyan törtet kaptunk, ahol a számlálóból eltűnt az x.

Így már fel tudjuk írni a transzformációkat.

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x-2} \to -\frac{1}{x-2} \to -\frac{1}{x-2} + 2.$$

A hiperbolát először eltoljuk 2-vel „jobbra”, utána tükrözzük az x tengelyre, végül kettővel eltoljuk „felfelé”.



Fogalom
függvénytranszformációk.

Megjegyzés
Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha transzformációkat a következő sorrendben végezzük el:
$\frac{1}{x} \to -\frac{1}{x} \to -\frac{1}{x-2} \to -\frac{1}{x-2} + 2$

FELADATOK

Ábrázoljuk a következő függvényeket a megfelelő transzformációs lépések segítségével! Keressük meg a tengelypontok koordinátáit!

1.
K1 *a)* $f(x) = (x + 2)^2 - 9$; **K2** *c)* $h(x) = -x^2 + 8x - 12$;
K2 *b)* $g(x) = x^2 - 6x + 6$; **E1** *d)* $i(x) = 0{,}5x^2 + 3x + 3{,}5$.

2.
K1 *a)* $f(x) = \frac{3}{x-3} - 3$; **K2** *b)* $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$; **K2** *c)* $h(x) = \frac{-3x+13}{x-4}$.

3. K1
a) $f(x) = |x - 2| - 2$; *b)* $g(x) = -3|x + 3| - 3$; *c)* $h(x) = 0{,}5|x - 4| - 4$.

4.
Nem érettségi tananyag: *a)* $f(x) = 3\{x\} - 1$; *b)* $g(x) = -\{x\} + 1$.

Ajánlott feladatok

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: **742; 743; 744; 745; 753.**/*a), d), e), f).*

Pályakép

Név: Balázs
Lakhely: Budapest
Végzettség: angol–magyar szakos tanár
Jelenlegi beosztás: doktori hallgató, angol- és drámatanár
Milyen tantárgyakból felvételizett, tanult emelt szinten? Magyar nyelv és irodalom, angol nyelv.

Sziasztok!

Általános iskolás korom óta érdekel a matematika, elsősorban mindig is a kihívást jelentő, több gondolkodást igénylő, rejtvényszerű feladatokat szerettem: azt, ahogyan egy elsőre talán kuszának látszó egyenletből, szöveges feladatból vagy éppen geometriai problémából a megfelelő lépések felfedezése közben egyszerre csak kibomlik a megoldás. Bár érettségi után az angol–magyar szakot választottam, a matematika iránti érdeklődés és az ilyenfajta rendszerteremtő és problémamegoldó feladatok igénye az egyetem évei alatt is utat tört magának, mikor angol nyelvészeti szemináriumokat hallgattam, majd később tanítottam is, hiszen e tudományág ma elsősorban a matematikai és természettudományos megközelítéseken alapul.
Az egyetem elvégzése után angoltanítással, irodalom- és színháztudománnyal, illetve színházrendezéssel foglalkozom, és bár látszólag egyiknek sincsen egyértelmű kapcsolódása a számtannal, a korábbi matematikai képzésnek olyan gondolkodásmódot és problémamegoldó képességet köszönhetek, amelyeknek nemcsak jelenlegi munkaköreimben veszem hasznát, hanem az élet bármely más területén is.

FOGALOMTÁR

*-gal az emelt szinten előforduló fogalmakat jelöljük.

Képjegyzék:

Grafika (Létai Márton): 24., 35., 53., 55., 75., 111., 128., 186., 196., 222., 238., 264., 287.

Grafika (Urmai László): 23., 33., 34., 40., 44., 51., 69/1., 2., 3., 74., 75/1., 2., 80., 159., 222.

Dreamstime: 38.

Pixabay: 3., 4., 5., 6., 14., 21., 23., 29., 38., 40., 41., 43., 46., 47., 68., 83., 74., 79., 80., 96., 107., 113., 120., 127., 141., 155., 163., 163., 181., 199., 200., 201., 205., 206., 211., 216., 217., 219., 221., 225., 227., 234., 243., 248., 250., 256., 270., 281., 285., 286., 290., 291., 293., 294., 298., 300.

Shutterstock: 39., 95., 102., 154., 173., 189., 212.

Tananyagfejlesztők saját képe: 57., 112., 123., 215., 269., 308.

ThinkStock: 15.