

Gyakorló feladatsorok 9. évfolyam

1.) Legyen $U = \{1;2;3;4;5;6;7\}$, $A = \{2;4;6;7\}$ és $B = \{1;3;5;6;7\}$. Készíts Venn-diagramot, majd add meg a következő halmazokat!

a.) $A \cap B$; b.) $B \cap U$ c.) $B \setminus A$ d.) $\overline{A \cup B}$

2.) Határozd meg az A és B halmazokat, ha tudjuk, hogy: $A \cup B = \{5,6,7,8,9,10\}$, $A \setminus B = \{8,9,10\}$ és $A \cap B = \{5\}$. Lili és Evelin majdnem minden órán leveleznek egymással a fiúkról. Ma pont saját osztálytársaikat vitatják meg, amikor a matematikatanár elcsípi az alábbi postát. Fiú vagy lány jár több Liliék osztályába, ha a lányoknak van még 14 lány osztálytársa?

Jóképű	7
Okos	5
Jóképű és okos	30
Egyik sem	8

3.) Ábrázold számegyenesen a valós számok azon részhalmazát, amely megfelel az alábbi feltételnek:

a.) x nem kisebb 3-nál; b.) x legalább 1 vagy legfeljebb -1 ; c.) $-2 < x \leq 5$.

4.) Add meg a műveletek eredményét, majd ezt ábrázold számegyenesen!

a.) $] - 5; 1 [\cap [1; 6 [$ b.) $[0; 7 [\cap [- 2; 3]$

5.) Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét a hatványazonosságok felhasználásával! (Nem zsebszámológéppel!)

a.) $\frac{(3 \cdot 7^3)^4 \cdot 9^5 \cdot 3^8}{3^6 \cdot 49^6}$ b.) $\frac{(a^3 \cdot b)^3 \cdot b^5}{(b^2)^3 \cdot a^8}$ c.) $\frac{10^{-3}}{100} \cdot 1000^2$ d.) $\frac{16^3 \cdot 4^2 \cdot 8^2}{32^4}$

e.) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ f.) $(2^{-1})^{-3}$ g.) 3^{-4}

6.) Végezd el a kijelölt műveleteket, vonj össze, majd rendezd csökkenő fokszám szerint a tagokat!

a.) $3x(2x^2 - 3x + 7)$ b.) $(3a - 2)(3 - 2a)$ c.) $(8a - 1)(8a + 1)$

7.) Végezd el a műveleteket! a.) $(10a + 2b)^2$ b.) $(a - 9b^3)^2$ c.) $\left(\frac{5}{7}a + \frac{1}{3}b\right)^2$

d.) $(x^2 + 3z)^2$ e.) $(8a^3 - 5b^2)^2$ f.) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y\right)^2$

8.) Melyik kifejezés négyzete a következő kifejezés?

a.) $a^2 + 8a + 16$ b.) $b^2 - 10b + 25$ c.) $x^2 - 40x + 400$ d.) $c^2 - 14c + 49$

9.) Alakítsd szorzattá az alábbi kifejezéseket!

a.) $20x^2y - 30xy^3$ b.) $20x^2y^3 - 14x^3y^3 + 21x^2y^4$ c.) $15ax - 10ay + 6bx - 4by$

d.) $\frac{4}{9}x^2 - y^2$ e.) $16x^2 + 88x + 121$ f.) $64b^2 - 9x^2$ g.) $36a^2 - 84a + 49$

10.) Add meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a.) $\frac{4x-6}{x+2}$ b.) $\frac{3a-1}{2a+3}$ c.) $\frac{2x-3}{x} + \frac{4x+1}{x-1}$

11.) Számítsd ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét, ha $a = 4$, $b = -1,2$ és $c = \frac{5}{6}$!

a.) $6c - 2a$ b.) $4a^2 - 5b$ c.) $a + 6bc$ d.) $-2a - 5b + 12c$

12.) Egyszerűsítsd a következő törtet!

a.) $\frac{17x^3y^2}{34xy^4}$ b.) $\frac{24(2x-3)^2}{8(2x-3)(2x+3)}$ c.) $\frac{x^2 - y^2}{5x - 5y}$ d.) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$

13.) Végezd el a következő műveleteket!

a.) $\frac{12xy^5}{7ab} \cdot \frac{21a^2b^3}{32x^2y^3}$ b.) $\frac{8a^4x^3}{15y^6} : \frac{16a^2x^4}{25y^7}$ c.)

14.) Végezd el a következő törtkifejezések összevonását!

a.) $\frac{1}{3a^2} - \frac{2}{5a} - \frac{1}{a}$ b.) $\frac{x-1}{3x+1} + \frac{x+2}{6x+2}$

15.) Milyen számjegyek írhatók x és y helyére, ha a.) $15 \mid \overline{5x327y}$ b.) $12 \mid 5x327y$

Határozd meg! a.) (420; 560) b.) (1425; 1725) c.) (972; 648) d.) [600; 720]
e.) [392; 448] f.) [800; 3400]

16.) Ábrázold a síkon azokat a pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségeket!

a.) $x \leq 3$ b.) $y \geq -2$ c.) $-2 \leq x < 3$ d.) $|x| < 4$

17.) Határozd meg azt a lineáris függvényt, amelynek grafikonja áthalad a két megadott ponton.

Add meg a függvény meredekségét és azokat a pontokat, ahol a grafikon metszi az x és y tengelyeket!

a.) P(1; 1) és Q(3; 2) b.) P(1; -1) és Q(4; -2) c.) P(3; 3) és Q(2; 0)

18.) Ábrázold a következő intervallumokon értelmezett valós értékű függvényeket!

a.) $f(x) = x \cdot |x-3|$, $x \in [-2; 4]$ b.) $g(x) = x^2 - 4$, $x \in [-3; 3]$
c.) $h(x) = \sqrt{x+2} - 3$, $x \in [-3; 1]$ d.) $i(x) = -(x+2)^2 + 1$, $x \in [-4; 0]$

19.) Oldd meg az egyenleteket!

a.) $x(x+4) - x^2 = 16$ b.) $\frac{2}{x-1} + 1 = \frac{3}{x-1}$ c.) $\frac{x-3}{8} + 3 = \frac{3x+127}{20} - \frac{x+9}{12}$

$$d.) \frac{x+2}{2x-2} - \frac{2x}{3(x-1)} = \frac{1}{24}$$

$$e.) 2x - (2 - x) = x + 1$$

$$f.) \frac{7}{x} - \frac{2}{3x} = \frac{19}{3}$$

$$g.) \frac{x-4}{3} - \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{6}$$

$$h.) \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-3} = \frac{3}{x^2-9}$$

20.) Oldd meg az egyenlet-rendszereket! Ellenőrizd!

$$a.) \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -10 \end{cases}$$

$$b.) \begin{cases} 7x + 9y = 8 \\ 9x - 8y = 69 \end{cases}$$

$$c.) \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 7x + 5y = 4 \end{cases}$$

$$d.) \begin{cases} 2y = x + 12 \\ y + 6 = 2x \end{cases}$$

$$e.) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

21.) Oldd meg az egyenlőtlenségeket! Ellenőrizd!

$$a.) \frac{2x+15}{9} - \frac{x-1}{5} \geq \frac{x}{3}$$

$$b.) \frac{3x-5}{x-1} - \frac{2x-5}{x-2} = 1$$

$$c.) \frac{9x-3}{2x+6} \geq 0$$

$$d.) \frac{x+5}{2x-2} \leq 0$$

Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek otthoni gyakorlásra

(mozgási, helyiértékes, keverési, együttes munkára vonatkozó, egyéb feladatok)

- 24 km-es útját egy gyalogos 6 óra alatt tette meg. Ugyanezt az utat egy kerékpáros 8 km/h-val nagyobb átlagsebességgel futotta be. Hány óra kellett a kerékpárosnak az út megtételéhez?
- Egy gyalogos elindul egy faluból 4,5 km/h sebességgel. 5 óra múlva ugyanonnan utána indul egy kerékpáros 12 km/h sebességgel. Mennyi idő múlva és a falutól hány km-re éri utol a kerékpáros a gyalogost?
- Valaki 40 perc alatt tette meg az A és B községek közötti utat. Visszafelé 0,5 km/h-val kisebb sebességgel jött, így ugyanez az út 45 percig tartott. Mekkora a két község közötti távolság, és mekkora volt a gyalogos sebessége oda és visszafele?
- A-ból B felé elindult egy 10 km/h sebességgel haladó gőzhajó. 4 órával utána ugyancsak A-ból B felé elindult egy másik gőzhajó is, 12 km/h sebességgel. A két hajó egyszerre ért B-be. Hány km-re van A-tól B?
- 15 km-es út két végéről egy gyalogos és egy kerékpáros indul el egymás felé. A gyalogos 3 óra alatt, a kerékpáros 50 perc alatt teszi meg az utat. Hol találkoznak, ha a kerékpáros 1 órával később indul, mint a gyalogos?
- A Sopron és Tatabánya közötti utat 72 km/h sebességgel 20 perccel több idő alatt lehet megtenni, mint 84 km/h sebességgel. Milyen hosszú a két város közötti út?

7. Egy hajó a két állomás közötti utat oda-vissza 4 óra és 40 perc alatt tette meg. A sebessége a folyón lefele menet 16 km/h volt, a folyón felfelé pedig 12 km/h. Milyen messze van egymástól a két állomás?
8. Egy kétjegyű szám második jegye kétszer akkora, mint az első. Ha jegyeit felcseréljük, 27-tel nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?
9. Egy kétjegyű szám első számjegye öttel több, mint a második. A jegyek felcserélésével kapott szám az eredetinél 45-tel kisebb. Melyik ez a szám?
10. Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor az eredetihez képest feleakkora számot kapunk. Az eredeti szám első számjegye kétszerese a második számjegynek. Melyik ez a szám?
11. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 9. Kivonva belőle a szám jegyeinek felcserélésével kapott számot, az eredeti szám $\frac{3}{7}$ -ét kapjuk. Melyik ez a szám?
12. Egy kétjegyű szám jegyeinek aránya 3: 4. Ha a jegyeket felcseréljük, az új szám az eredeti $\frac{3}{2}$ -szeresénél 8-cal kisebb lesz. Melyik ez a szám?
13. Egy kétjegyű szám tízeinek száma 3-mal nagyobb az egyesek számánál. A számjegyek felcserélésével kapott kétjegyű szám 10-zel nagyobb, mint az eredeti szám fele. Melyik ez a kétjegyű szám?
14. Egy zérusra végződő háromjegyű szám számjegyeinek összege 13. Ha az első számjegyet a második számjegy értékével csökkentem, és a többi számjegyet nem változtatok, akkor 600-zal kisebb számot kapok. Melyik az eredeti szám?
15. Ugyanannak a savnak 8 liter 45 %-os és 4 liter 60 %-os oldatát összekeverjük. Hány %-os oldatot kapunk?
16. 5 liter 40 %-os kénsavoldathoz mennyi víz kell, hogy 10 %-os oldatot kapjunk?
17. 3 liter 20 %-os és 4 liter 32 %-os alkoholhoz hány liter 60 %-ost öntsünk, ha 40 %-os alkoholt akarunk kapni?
18. 2 liter 96 %-os és 5 liter 75 %-os alkoholunk van. Az egész készletből 40 %-os alkoholt szeretnénk kapni. Mennyi víz szükséges a keverék elkészítéséhez?
19. 8 liter 46 °C-os vízhez 80 °C-os vizet öntöttünk. A keverék 60 °C-os lett. Hány liter 80 °-os vizet öntöttünk hozzá?
20. Hány kg vizet kell elpárologtatni ahhoz, hogy 8 kg 30 % sót tartalmazó oldatból 50 %-os oldatot kapjunk?
21. 100 gramm 15 %-os töménységű oldathoz 25 gramm vizet öntünk. Hány %-os oldatot kapunk?
22. Egy külföldi gyár Magyarországról műszereket rendelt. Ezek elkészítését az egyik gyár 4 hónapra, a másik 6 hónapra vállalta. A megrendelő kérésére a két gyár együttesen készítette el a műszereket. Hány hónap múlva készültek el így a munkával?
23. A gazdaság kertjét két motoros szivattyúval öntözik. Ha csak a nagyobb szivattyú működik, 4 óra alatt lesznek készen, ha csak a kisebbik, 9 óra alatt. Mennyi idő alatt lennének készen, ha mind a két szivattyút használnák?

24. Egy lakás parkettázásával az egyik munkás 40 óra alatt, a másik 48 óra alatt, a harmadik 60 óra alatt lenne készen. Hány óra alatt lesznek készen a munkával együtt?
25. Két csapon keresztül 4 óra alatt telik meg a benzintartály. Ha csak az egyik van nyitva, a tartály 7 óra alatt lesz tele. Mennyi idő alatt telik meg a másikcsapon keresztül a tartály?
26. Két traktor együttesen 13 nap alatt tud felszántani egy földterületet. Ugyanezt a földterületet az egyik egyedül 20 nap alatt szántaná fel. (Állandó teljesítmény!) Mennyi idő alatt készülne el egyedül a másik?
27. Egy üzemben három gép dolgozik. 150 munkadarabot az első 10 óra alatt, a második 12 óra alatt, a harmadik pedig 15 óra alatt készít el. Hány óra alatt készül el a 150 munkadarab, ha mindhárom gép egyszerre dolgozik?
28. A víztározó 2 csövön át tölthető meg, mégpedig egyedül az első 4 óra alatt, egyedül a második 3 óra alatt. Egy harmadik csövön a teli víztározó 1 óra alatt ürül ki. Mennyi idő alatt ürül ki a teli tároló, ha mindhárom cső egyszerre van nyitva?

Szöveges feladatok

1. Gondoltam egy számot. A számhoz hozzáadva a kétszeresét, az így kapott összegből kivonva a számnál 8-cal kisebb számot, és az eredményt elosztva kettővel 27-et kaptam. Melyik számra gondoltam?
2. Gondoltam egy számot. A szám feléhez hozzáadva a szám kétszeresét és a kapott eredményt 7-tel osztva az eredeti számnál 36-tal kisebb számot kaptam. Melyik számra gondoltam?
3. Gondoltam egy számot. A szám harmadához hozzáadva 138-at az eredeti szám felét kapom. Melyik számra gondoltam?
4. Gondoltam egy számot. A szám feléhez hozzáadva 32-t és az eredményt elosztva 3-mal az eredeti szám kétszeresénél 72-vel kisebb szám tizedét kapom. Melyik számra gondoltam?
5. Gondoltam egy számot. A szám 5-szöröséhez hozzáadva a szám felénél 17-tel kisebb számot az eredeti szám 6-szorosánál 64-gyel kisebb számot kapok. Melyik számra gondoltam?
6. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 9. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 9-cel nagyobb számot kapok. Melyik ez a szám?
7. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 14. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti szám felénél 25-tel nagyobb számot kapok. Melyik ez a szám?
8. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 8. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 20-szal kisebb szám harmadát kapom. Melyik ez a szám?
9. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 27-tel nagyobb számot kapok. Melyik ez a szám?
10. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 17. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 9-cel kisebb számot kapok. Melyik ez a szám?
11. Egy kétjegyű szám számjegyeinek szorzata 7. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 54-gyel nagyobb számot kapok. Melyik ez a szám?
12. Egy kétjegyű szám számjegyeinek szorzata 12. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 9-cel kisebb számot kapok. Melyik ez a szám?
13. Gondoltam egy kétjegyű számot. A tízes helyi értéken álló számot kivontam az egyes helyi értéken álló számból és 7-et kaptam. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 63-mal nagyobb számot kapok. Melyik ez a szám?
14. Gondoltam egy kétjegyű számot. Az egyes helyi értéken álló számot kivontam a tízes helyi értéken álló számból és 2-t kaptam. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 18-cal kisebb számot kapok. Melyik ez a szám?
15. Gondoltam egy kétjegyű számot. A tízes helyi értéken álló számot elosztva az egyes helyi értéken álló számmal 3-at kapok. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 36-tal kisebb számot kapok. Melyik ez a szám?

- 16.** Gondoltam egy kétjegyű számot. Az egyes helyi értéken álló számot elosztva a tízes helyi értéken álló számmal 2-t kapok. Ha felcserélem a számjegyeit, akkor az eredeti számnál 27-tel nagyobb számot kapok. Melyik ez a szám?
- 17.** Egy háromjegyű szám számjegyeinek összege 14. A tízes helyi értéken álló számból kivonva az egyes helyi értéken álló számot 8-at kapok. Ha felcserélem a százasként álló számot a tízes helyi értéken álló számmal, akkor az eredeténél 450-nel nagyobb számot kapok. Melyik ez a szám?
- 18.** Egy háromjegyű szám számjegyeinek összege 7. A tízes helyi értéken álló szám a százasként álló szám kétszerese. Ha felcserélem a százasként álló számot és az egyes helyi értéken álló számot, akkor az így kapott szám négyszerese az eredeti számnál 75-tel nagyobb lesz. Melyik ez a szám?
- 19.** Egy háromjegyű szám számjegyeinek összege 17. A százasként álló szám harmada megegyezik az egyes helyi értéken álló szám felével. Ha felcserélem a százasként álló számot a tízes helyi értéken álló számmal, akkor az így kapott szám az eredeti szám felénél 129-cel nagyobb szám lesz. Melyik ez a szám?
- 20.** Egy apa és a fia együtt 30 évesek. Az apa 9-szer annyi idős, mint a fia. Hány évesek?
- 21.** Egy apa és a fia együtt 36 évesek. Az apa 8-szor annyi idős, mint a fia. Hány évesek?
- 22.** Dóri és Elemér együtt 39 évesek. Elemér 3 évvel idősebb Dórinál. Hány évesek?
- 23.** Aladár, Béla és Cecil testvérek. Együtt 44 évesek. Cecil 4 évvel idősebb Bélánál. Aladár és Béla együttes életkora 26. Hány évesek?
- 24.** Van három testvér. A legidősebb 2 évvel idősebb a középsőnél. A legfiatalabb és a legidősebb együtt 13 éves. A középsőnél a legfiatalabb 5 évvel fiatalabb. Hány évesek?
- 25.** Laci, Misi és Nóri testvérek. Együtt 48 évesek. Misi 6 évvel fiatalabb Nórinál. Nóri 9 évvel idősebb Lacinál. Hány évesek?
- 26.** Most 6-szor annyi idős vagyok, mint 20 évvel ezelőtt. Hány éves vagyok most?
- 27.** Egy apa és a fia most összesen 51 éves. 8 évvel ezelőtt az apa 6-szor annyi idős volt, mint a fia. Hány évesek most?
- 28.** Géza 13 évvel idősebb Ferinél. 5 évvel ezelőtt együtt 47 évesek voltak. Hány évesek most?
- 29.** Helga 7 évvel fiatalabb Ildinél. 6 év múlva együtt 51 évesek lesznek. Hány évesek most?
- 30.** Jani kétszer annyi idős, mint Karcsi. 3 év múlva együtt 69 évesek lesznek. Hány évesek most?
- 31.** Egy szobát András 28, Béla pedig 32 óra alatt tapétázna ki egyedül. Mennyi idő alatt készülnek el együtt?
- 32.** Egy lakást Cecil 46, Dénes pedig 39 óra alatt festene ki egyedül. Mennyi idő alatt készülnek el együtt?
- 33.** Endre a léckerítésüket 200, Fruzsina pedig 250 perc alatt mázolni le egyedül. Hány óra alatt készülnek el együtt?
- 34.** Egy medencét két csapon keresztül lehet feltölteni. Ha csak az egyik csap van kinyitva (teljesen), akkor 3 óra alatt lesz tele a medence. Ha csak a második csapot nyitjuk ki (teljesen), akkor 4 óra alatt. Mennyi idő alatt tudjuk megtölteni a medencét, ha mindkét csap egyszerre van kinyitva?
- 35.** Gizi egyedül 1,5 óra alatt, Hugó pedig 1 óra alatt gereblyézné fel a házuk udvaráról a faleveleket. Hány perc alatt végeznek együtt?
- 36.** Ilona egyedül 30, Julcsi pedig 45 perc alatt mosná fel a lakást. Hány perc alatt végeznek együtt?
- 37.** Kitti egyedül 1, Lola pedig $\frac{3}{4}$ óra alatt törölné le a port a szobájukban. Mennyi idő alatt végeznek együtt?
- 38.** Egy Budapest-Szeged vonalon közlekedő gyorsvonaton két kalauz kezeli a jegyeket egyszerre. Egyikük 20 perc alatt kezelné az összes jegyet egyedül, a másik pedig 35 perc alatt. Mennyi ideig tart kettőjüknek együtt?
- 39.** Máté és Nándi rakodómunkások. Máté egyedül 4, Nándi pedig 5 óra alatt pakolna tele egy teherautót ládákkal. Mennyi idő alatt végeznek együtt?
- 40.** Ottó és Péter erdészek. Ottó egyedül 13, Péter pedig 11 óra alatt járná be a területüket. Mennyi idő alatt végeznének együtt?

Algebrai kifejezések (otthoni gyakorlásra)

1. Végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $5a - 3ab + 2ba - 5a + ab =$

b) $4xy - 3x + 5xy - 7y + 10x + y =$

c) $\frac{x^2}{2} - \frac{7x^2}{3} + \frac{2y^2x - 3xy^2}{5} =$

d) $\frac{5}{12} + \frac{a}{4} + \frac{2}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{4}{3} =$

e) $5,2 - \frac{2b}{25} - \frac{10}{25} + \frac{b}{5} - 0,1 =$

f) $\left(2a - \frac{5}{2}b\right) - \left(\frac{3}{2}a - \frac{7}{4}b\right) + \left(2 + \frac{3}{4}b\right) - \left(\frac{1}{2}a + 2\right) =$

2. Írd le a kifejezéseket zárójel nélkül! (Ahol lehet, vonj össze!)

a) $(a - 1) \cdot 5 =$

b) $(a - 1)(a + 1) =$

c) $(2x - 3)(2x + 3) =$

d) $(-a + 2)(2 - a) =$

e) $(3x + 2) \cdot 2x =$

f) $-3a(5b - 2) =$

g) $(-4) \cdot \frac{5y}{2} \cdot 3y =$

h) $3s^2 \cdot (-2s) \cdot \frac{5s}{6} =$

i) $3(x + y) =$

j) $(2a - b)^2 =$

k) $(x + y)(x - y) =$

l) $(3x + y)^2 =$

3. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $\frac{2x}{3y} : \frac{6x^2}{y^2}$

b) $15b^2 : \frac{2b}{10a}$

c) $\frac{3a}{4b} : 6a$

d) $\left(-\frac{3x^2}{4y}\right) : \frac{6x}{4y^3}$

e) $16a^2b : \left(-\frac{8b}{32a}\right)$

f) $6x^2y : \frac{2xy^3}{3x^2y}$

g) $\frac{18a^2b^3 - 6b^2}{3b^2}$

h) $\frac{12x^3 - 6x^2}{9} : \frac{2x^2}{3}$

i) $\frac{3x^2y}{a^3} \left(\frac{4x}{ay^2} - \frac{2x^5y}{15ab}\right)$

j) $\frac{3a}{b^3} + \frac{3b}{a} \left(\frac{a^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right)$

k) $\frac{6b^3}{a^2} - \frac{b}{2a} \left(\frac{a^2}{3b} - \frac{3a}{2b^2}\right)$

PITAGORASZ TÉTEL

- 1.) Az ABC derékszögű háromszögben ($\angle ACB = 90^\circ$) $AC = 9$ cm, $BC = 12$ cm. Hány centiméter AB hossza?
- 2.) Derékszögű háromszög átfogója 13 cm, egyik befogója 5 cm. Milyen hosszú a másik befogó?
- 3.) Mekkora az egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója?
- 4.) Derékszögű háromszög egyik befogója 8 cm, területe 24 cm². Milyen hosszú az átfogó?
- 5.) Az ABC derékszögű háromszögben ($\angle ACB = 90^\circ$) $AB = 26$ cm, $AC = 10$ cm. Mekkora a háromszög területe?
- 6.) Derékszögű háromszög egyik szöge 30° , rövidebbik befogója 3,6 mm. Milyen hosszú az átfogó?
- 7.) Derékszögű háromszög egyik szöge 60° , az átfogó hossza 7 m. Mekkora a hosszabbik befogó? (A válasz milliméter pontosságú legyen.)
- 8.) Mekkora annak a négyzetnek az oldala, amelynek átlója 20 egység hosszú?
- 9.) Egy 10 cm sugarú kör húrja 16 cm. Mekkora a húr és a kör középpontjának a távolsága?
- 10.) Mekkora annak a téglalapnak az átlója, amelynek két szomszédos oldala 7 cm, ill. 10 cm hosszú?
- 11.) Milyen hosszú a 22 egység sugarú kör középpontjától 6,4 egységnyi távolságban haladó húra?
- 12.) Mekkora a 10 cm oldalú szabályos háromszög magassága?
- 13.) Hány cm² annak az egyenlő szárú háromszögnek a területe, amelynek alapja 12 cm és a szárai 18 cm hosszúak?
- 14.) Az ABC egyenlő szárú háromszög területe 105 cm², BC alapja 14 cm. Mekkora a háromszög AB és AC szárai?
- 15.) Mekkora annak a rombusznak a területe, amelynek a kerülete 40 cm, és egyik átlója kétszer olyan hosszú, mint a másik?
- 16.) Közelítőleg mekkora sugarú körhöz húzható a középpontjától 1 méterre lévő pontból 75 cm hosszú érintő?
- 17.) Milyen hosszú húr tartozik a 10 cm sugarú körben a 60° -os középponti szöghöz?
- 18.) Az O középpontú kör AB húrja 20 cm, az OAB háromszög területe 150 cm². Mekkora a kör sugara?
- 19.) A 32 cm sugarú kör középpontjától 58 cm-re lévő P pontból érintőt húzunk a körhöz. Milyen hosszú közelítőleg az érintési szakasz?
- 20.) Mekkora az ABC háromszög B csúcsából húzható súlyvonalának a közelítő hossza, ha $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$ egység?
- 21.) Két, egymástól 2 méter távolságra lévő A és B pontot összekötünk egy 210 cm hosszú fonállal. Ezután a fonalat kifeszítjük az F középső pontjában, így egy AFB egyenlő szárú háromszöget kapunk.

Közelítőleg mekkora távolságra van F az AB egyenestől?

22.) Mennyi az ABC háromszög B csúcsából húzható magasságának a hossza, ha $AB = AC = 30$ cm, $BC = 36$ cm?

23.) Mekkora az ABC háromszög köré írt kör sugara, ha $AB = AC = 30$ cm, $BC = 36$ cm?

24.) Az ABC háromszögben $a = 6$ cm, $b = 8$ cm. Igaz-e, hogy ha $c > 10$ cm, akkor a háromszög tompaszögű?

25.) Típusa szerint milyen az a háromszög, amelyben $a = 10$ cm, $b = 24$ cm, $c = 25$ cm?

26.) Típusa szerint milyen az a háromszög, amelyben $a = 10$ cm, $b = 24$ cm, $c = 27$ cm?

27.) Hány cm-rel kell a 26 cm-es könyvet megdönteni, hogy beférjen egy 24 cm magasságú polcra?

28.) Egy szabályos háromszög alakú asztallapot, melynek egyik oldala éppen 1 méter, kör alakú terítővel teljesen lefedünk. Hány cm a terítő sugara?

29.) Egy háromszög alakú rét oldalai 53, 45 és 28 méter hosszúak. Hány négyzetméter a rét területe?

Geometria

Háromszög:

1) Oldalak szerint:

- általános háromszög
- Egyenlő szárú háromszög
- Egyenlő oldalú háromszög

2) Szögek szerint:

- Hegyes szögű háromszög
- Derékszögű háromszög
- Tompaszögű háromszög
-

A háromszög feltétele:

- Egy háromszög belső szögeinek összege 180° , azaz $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- Egy háromszög bármely 2 oldalának összege nagyobb a harmadik oldalánál. Azaz $a + b > c$.
- Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, azaz ha $a > b$, akkor $\alpha > \beta$.

Magasság: A háromszögben az oldallal szemközti csúcsból húzott szakasz, mely az oldalra merőleges. A magassági szakaszok egy pontban metszik egymást, ez a háromszög köré írt kör középpontja.

A háromszög szögfelező egyenesei egy pontban metszik egymást, ez a pont a beírt kör középpontja

Háromszög súlyvonala az a szakasz, mely a oldal felezőpontja és a vele szemközti csúcs határol.

Súlyvonalak egy pontban metszik egymást, melyet súlypontnak hívunk.

Háromszöghöz tartozó tételek (bizonyítás nélkül):

- Pitagoraszétel $a = \sqrt{b^2 + c^2}$
- Koszinusz-tétel $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$

- Szinusztétel $= \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}; \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$
- Heronképlet $= T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ s a beírt kör sugara.

Kerületszámítás:

- Egyenlő oldalú háromszög esetén: $K=3a$.
- Egyenlő szár esetén: $K=a+2b$
- Általános háromszög esetén: $K=a+b+c$

Területszámítás:

- Egyenlő oldalú háromszög esetén: $T = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
- Derékszögű háromszög esetén: $T = \frac{ab}{2}$
- Általános háromszög esetén: $T = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2}$
- Általános terület képlet háromszögre: $T = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2} = \frac{cm_c}{2}$

Négyszög:

- Általános négyszög
- Trapéz
- Deltoid
- Paralelogramma
- Rombusz
- Téglalap
- Négyzet

1. Általános négyszög

- Négy oldala van
- Belső szögeinek összege 360° , azaz $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$
- 2 átlója van.
- Kerülete a $K=a+b+c+d$ képlettel számolható ki.

2. Trapéz

- Egy párhuzamos oldal párja van.
- Derékszögű, egyenlő szárú, s általános fajtái ismertek
- Kerülete a $K=a+b+c+d$ vagy a $K=a+2b+c$ képlettel számolható ki
- Területe a $T = \frac{(a+c)m}{2}$ képlettel számolható ki

3. Deltoid

- 2 párhuzamos oldal párja van
- Átlói merőlegesek egymásra, és az „e” átló felezi az „f” átlót, s szögfelezők
- Kerülete a $K=2(a+b)$ képlettel számolható ki
- Területe a $T = \frac{ef}{2}$ képlettel számolható ki

4. Paralelogramma
 - Szemközti oldalai és szögei egyenlők, tehát 2-2 oldal párhuzamosak
 - Átlói felezik egymást
 - Kerülete a $K=2(a+b)$ képlettel számolható ki
 - Területe a $T = am_a = bm_b$ képlettel számolható ki
5. Rombusz
 - Szemközti oldalai és szögei egyenlők, tehát 2-2 oldal párhuzamosak
 - Átlói felezik egymást
 - Kerülete a $K=4a$ képlettel számolható ki
 - Területe a $T = am_a$ képlettel számolható ki
6. Téglalap
 - Szemközti oldalai és szögei egyenlők, tehát 2-2 oldal párhuzamosak
 - Átlói felezik egymást
 - Kerülete a $K=2(a+b)$ képlettel számolható ki
 - Területe a $T = ab$ képlettel számolható ki
7. Négyzet
 - Szemközti oldalai és szögei egyenlők, tehát 2-2 oldal párhuzamosak
 - Átlói felezik egymást, és merőlegesek egymásra
 - Kerülete a $K=4a$ képlettel számolható ki
 - Területe a $T = a^2$ képlettel számolható ki

noldalú szabályos sokszögekről:

- Belső szögeinek összege $(n-2)180^\circ$
- Egyenlő oldaluk van
- Kerülete $K=N \cdot a$ képlettel számolható ki
- Területszámításhoz szükségünk van az oldal hosszára, az a beírt kör sugarának hosszára vagy a csúcs és a beírt kör középpontja közötti szakasz hosszára, az oldalhoz tartozó szögére, valamint a 360° annyi részére, ahány oldalas a sokszög.

$$r = \sqrt{d^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = d \cos \frac{\alpha}{2} = d \sin \beta$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$T = \frac{ar}{2} = \frac{d^2 \sin \alpha}{2} = \frac{ad \sin \beta}{2}$$

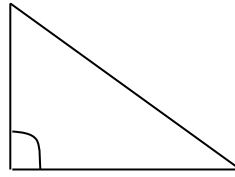
- a = a sokszög oldala, mely a beírt kör egyik érintője.
- d = a beírt kör középpontja, s a csúcs közötti szakasz, amely a sokszög szögfelező egyenesére illeszthető szakasz is egyben.
- r = a sokszögbe beírt kör sugara, mely merőleges a sokszög oldalára.

Kör:

- Egy adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza.
- A kör átmérője a kör középpontján átmenő szakasz, mely a kör legnagyobb húrja is.
- $K = 2r\pi$
- $T = r^2 \pi$

Szögfüggvények:

- Szinusz – $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- Koszinusz – $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- Tangens – $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$
- Kotangens – $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$



$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \operatorname{ctg} 90^\circ = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{ctg} 0^\circ = \text{nincs érték}$$

Térgeometria

Kocka:

- 12 éle van, melyek egyenlők
- 6 oldal lapja, melyek négyzetek
- $A = 6a^2$
- $V = a^3$

Téglatest:

- 12 éle van
- 6 oldal lapja, melyek téglalapok
- $A = 2(ab + bc + ac)$
- $V = abc$

Tetraéder:

- 4 egyenlő oldalú háromszög határolja
- 6 éle van

$$A = a^2 \sqrt{3}$$

$$- \quad M = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Henger:

- 2 körből áll és egy téglalapból
- Egyenes és ferde változata ismert
- $A = 2(r^2 \pi) + 2r\pi M$
- $V = Mr^2 \pi$

Kúp:

- Egy körből, s egy magasságtól függő körcikkből áll.
- Egyenes és ferde változata ismert
- $A = r^2 \pi + r\pi a$
- $V = \frac{Mr^2 \pi}{3}$

Gömb:

- Térben egy adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza
- $A = 4r^2 \pi$
- $V = \frac{4r^3 \pi}{3}$

Kerület- és területszámítás

A sokszögek kerülete oldalaik hosszának összege.

A kör kerülete: $K = 2r \cdot \pi$,
ahol $r = a$ kör sugara, $\pi \approx 3,14$ irracionális állandó.

Adott körben a középponti szögek nagysága és a hozzájuk tartozó körív hosszak egyenes arányosak. Ebből következik, hogy az ív hossza:

$$i = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2r\pi = \frac{\alpha \cdot r \cdot \pi}{180^\circ},$$

ahol $r = a$ kör sugara, $\pi \approx 3,14$ irracionális állandó, $\alpha = a$ körívhez tartozó középponti szög fokban kifejezve. (I. 22. tétel)

A terület mértékegysége megegyezik a hosszúság mértékegységeivel (méter).

Területmérés:

Egy alakzat területét úgy kapjuk meg, hogy összehasonlítjuk az egységül választott területtel.

Alapegysége: az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe.

Ha a négyzet oldala 1 mm, akkor a négyzet területe: 1 mm²

Ha a négyzet oldala 1 cm, akkor a négyzet területe: 1 cm².

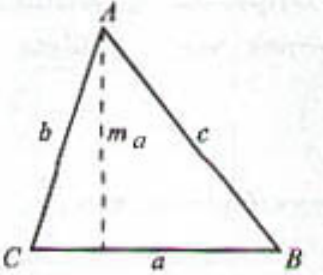

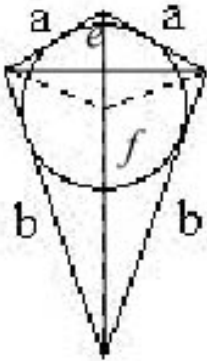
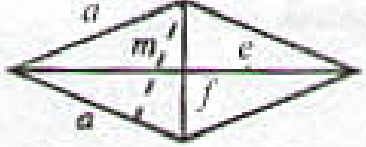


Ha a négyzet oldala 1 dm, akkor a négyzet területe: 1 dm².

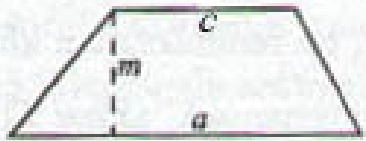
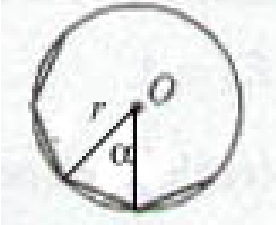
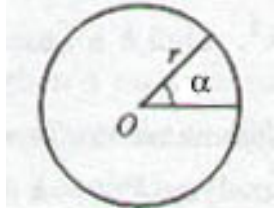
Ha a négyzet oldala 1 m, akkor a négyzet területe: 1 m².

Ha a négyzet oldala 1 km, akkor a négyzet területe: 1 km².

A 100 m oldalhosszúságú négyzet területe: 1 ha. (hektár).

Területképletek:

Háromszög		$T = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{ac \cdot \sin \beta}{2} = \frac{bc \cdot \sin \alpha}{2}$ $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$
Paralelogramma		$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$ $T = ab \cdot \sin \alpha$
Deltoid		$T = \frac{e \cdot f}{2}$
Rombusz		$T = a \cdot m$ $T = \frac{e \cdot f}{2}$
Téglalap		$T = ab$
Négyzet		$T = a^2$

Trapéz		$T = \frac{(a + c) \cdot m}{2}$
Szabályos sokszög		$T = n \cdot \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2} = n \cdot \frac{r^2 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{2}$
Kör Körcikk		$T = r^2 \cdot \pi$

Adott körben a középponti szögek nagysága és a hozzájuk tartozó körcikk területé egyenesen arányosak. Így körcikk területe:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \pi$$

Feladatlap

Válassza ki a következő kérdésekre adott válaszok közül a helyes választ és karikázza be a betűjelét!

- Lehet-e szimmetria-tengelye egy paralelogrammának?
 - igen;
 - nem;
- Hány szimmetria-tengelye van egy négyzetnek?
 - kettő;
 - négy;
- Melyik háromszögnek van szimmetria-tengelye?
 - Derékszögű, de nem egyenlőszárú
 - Derékszögű és egyenlőszárú
- Hány szimmetria-tengelye van egy téglalapnak?
 - pontosan kettő
 - lehet kettő, vagy négy, vagy egy sem
- Középpontosan szimmetrikus-e a paralelogramma?
 - igen
 - nem
- Lehet-e egy rombusznak kettőnél több szimmetria-tengelye?
 - igen
 - nem
- Hány szimmetria-tengelye van egy körnek?
 - négy
 - végtelen sok

8. Hány fokkal kell elforgatni egy szabályos hatszöget a szimmetria-középpontja körül, hogy önmaga maradjon?
- a) 90
 - b) 120