

VI.8. PIO RAGASZT

A feladatsor jellemzői

Tárgy, téma

Pitagorasz-tétel alkalmazása gyakorlati problémákban.

Előzmények

Pitagorasz-tétel, négyzetgyök, egyszerűbb algebrai azonosságok, egyenlet megoldása.

Cél

Gyakorlati feladatokban felismerni a derékszögű háromszögeket, a probléma geometriai modelljében való felhasználásuk képességét fejleszteni. A gyakorlati problémából kiinduló számítások elvégzésének biztosabbá tétele, a négyzet átlójának hosszára és a szabályos háromszög magasságára vonatkozó összefüggések megalapozása.

A feladatsor által fejleszthető kompetenciák

Tájékozódás a térben	+
Tájékozódás az időben	
Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban	+
Tapasztalatszerzés	+
Képzelet	+
Emlékezés	
Gondolkodás	+
Ismeretek rendszerezése	+
Ismerethordozók használata	

Ismeretek alkalmazása	+
Problémakezelés és -megoldás	+
Alkotás és kreativitás	+
Kommunikáció	+
Együttműködés	+
Motiváltság	+
Önismeret, önértékelés	
A matematika épülésének elvei	+

Felhasználási útmutató

A feladatsor megoldásához használjunk gyökvonás elvégzésére alkalmas számológépet. Fontos megértetni a diákokkal (erről szól az első feladat), hogy mielőtt alkalmazzák a Pitagorasz-tételt, győződjenek meg róla, hogy valóban derékszögű-e a háromszög, amire a tételt felírják! A további feladatokban is fokozott figyelemmel kell kísérni az ismeretek helyes alkalmazását.

Sikeresebb mondható a feladatsorral elvégzett fejlesztő munka, ha a végére a tanulók meg tudják indokolni, miért és hogyan lehet az adott feladatban alkalmazni éppen a Pitagorasz-tételt, képesek a helyesen felírt egyenletekből a helyes végeredményt számológéppel (szerecsés esetben nélküle) kiszámolni akkor is, ha tizedestörtekkel kell dolgozniuk, valamint szorzatot is helyesen emelnek négyzetre [lásd 5. c) feladat]. A 4. feladat nehezebb mind a modellalkotás, mind pedig a végrehajtandó számítások miatt.

A feladatokban rendre visszatér a néhány leghíresebb pitagorasz-i számhármasság, például a 3-4-5 vagy az 5-12-13. Jó, ha a gyerekek ezeket felismerik, de tudatosítsuk bennük, hogy ez csak megkönnyíti, de nem helyettesíti az egyenlet felírását és megoldását.

A feladatsor és néhány feladat címe talán igényel némi magyarázatot. A Pio ragaszt a Pitagorasz anagrammája (azaz ugyanazokból a betűkből állítottuk össze). Pio aranyos olyan

feladat, melyben a Pitagorasz-tételt arányos számítással kell kombinálni. Miss Take pedig angol nyelvű szójáték (mistake = hiba). Ez utóbbit valószínűleg a gyerekek értékelni fogják, hiszen ebben az életkorban már nagyon gyakori az angol nyelv ilyen szintű ismerete.

PIO RAGASZT

Feladatsor

EGYSZERŰ...

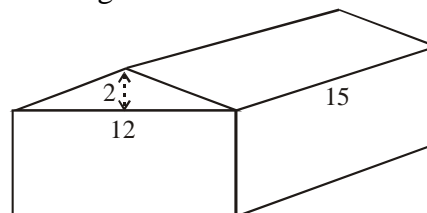
1. Az alábbi szöveges feladatokban karikázd be vagy húzd alá azokat az információkat, amelyek bizonyítják, hogy a feladatban található derékszögű háromszög! Egy másik színnel karikázd be, vagy húzd alá e derékszögű háromszög oldalaira vonatkozó információkat!
- a) Egy derékszögű háromszög rövidebbik befogója 3 cm, a hosszabbik befogó 4 cm. Add meg az átfogó hosszát!
 - b) Egy téglalap oldalai 3 cm és 4 cm hosszúak. Milyen hosszúak az átlói?
 - c) Egy egyenlőszárú háromszög alapja 6 cm. Az alaphoz tartozó magasság 4 cm. Milyen hosszú a háromszög másik két (egyenlő) oldala?

...ÉS NAGYSZERŰ

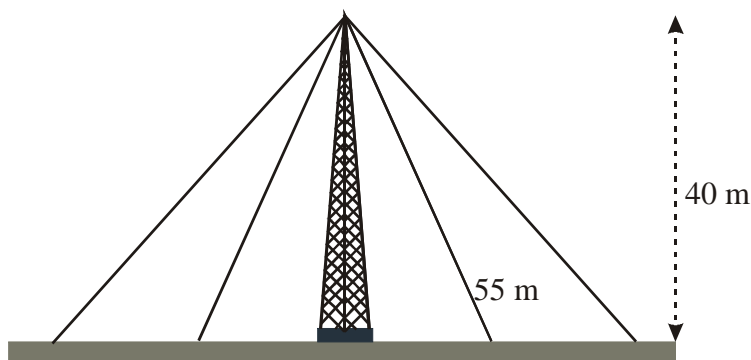
2. A következő feladatokban egy-egy derékszögű háromszög két oldalának hossza ismert.
- a) Tudjuk, hogy a két befogó 5 cm és 12 cm. Számítsd ki az átfogó hosszát!
 - b) Tudjuk, hogy a két befogó 5,51 cm és 11,67 cm. Számítsd ki az átfogó hosszát!
 - c) Tudjuk, hogy az átfogó 17 cm, az egyik befogó pedig 8 cm. Számítsd ki a másik befogó hosszát!
 - d) Tudjuk, hogy az egyik befogó 9,54 cm, az átfogó pedig 11,42 cm. Számítsd ki a másik befogó hosszát!

EZ AZ ÉLET!

3. A következő feladatokban találd meg a derékszögű háromszöget, és alkalmazd a Pitagorasz-tételt a hiányzó adatok megkeresésére!
- a) Egy vitorlás északi irányban hajózott ki a kikötőből, és ebben az irányban 5 km-t haladt. Majd keletnek fordult, és ebben az irányban haladt tovább 8 km-t. Milyen messze van most a kikötőtől?
 - b) Egy 6 m hosszú rudat úgy támasztottunk a falnak, hogy a talajjal érintkező pontja a faltól 1 m távol van. Milyen magasan van a falon a rúd másik vége?
 - c) Egy háztető metszete egyenlőszárú háromszög, melynek alapja 12 m, a magassága középen 2 m, a tető hossza 15 m (lásd az ábrán). Hány m^2 cserép kell a befedéséhez?

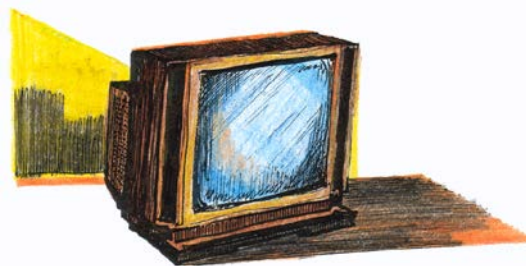


- d) Egy 40 m magas acéltorony csúcsát több kábellel is a talajhoz rögzítették. A rövidebb kábel hossza 55 m. A hosszabb kábel vége pont kétszer olyan messze van a torony lábától, mint a rövidebbé. Milyen hosszú a hosszabb kábel?

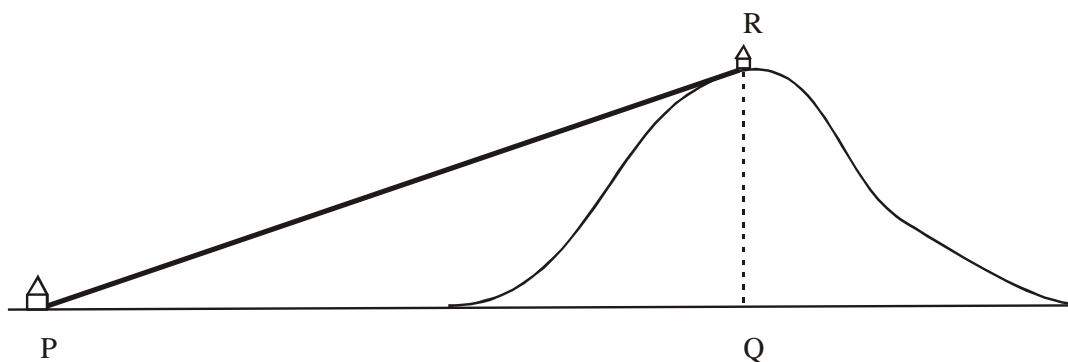


PIO ARANYOS

4. a) A hagyományos tv-készülékek képernyőjének szélesség : magasság aránya 4 : 3. A képernyők méretét az átló hosszával szokás jellemezni. Milyen széles és milyen magas az a képernyő, amelyiknek az átló hossza 55 cm?



- b) Egy rombusz átlóinak aránya 5 : 12, a területe 156 cm. Mekkora a rombusz területe?
c) Milyen hosszú az oldala annak a szabályos háromszögnek, amelyiknek a magassága $\sqrt{3}$ méter?
d) Egy 300 méter magas hegyre sífelvonó vezet fel.
A felvonó PR drótkötélnek hossza $\frac{5}{4}$ -szerese a vetületi, vízszintes PQ távolságnak. Milyen hosszú a drótkötél?



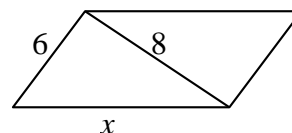
MISS TAKE SZÍNRE LÉP

5. Hol a hiba az alábbi gondolatmenetekben?

- a) Egy paralelogramma rövidebbik oldala 6 cm, a rövidebbik átlója 8 cm, számítsd ki a hosszabbik oldalát!

Megoldás

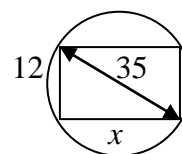
A Pitagorasz-tétel alapján $x^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$,
tehát $x = 10$ cm.



- b) Egy kerek farönk átmérője 35 cm. Olyan gerendát szeretnénk belőle fűrészelni, amelyik éppen 12 cm vastag és olyan széles, amennyit csak a rönk enged. Milyen széles a lehető legszélesebb gerenda?

Megoldás

$x^2 = 12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369$
 $x = \sqrt{1369} = 37$ (cm).



- c) Egy derékszögű háromszög egyik befogója háromszor olyan hosszú, mint a másik befogó. Az átfogó 20 cm. Milyen hosszúak a befogók?

Megoldás

A két befogó legyen x és $3x$ hosszú. A Pitagorasz-tétel szerint:

$$x^2 + 3x^2 = 20^2$$

$$4x^2 = 400$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10.$$

A két befogó tehát 10 cm és 30 cm.



MEGOLDÁSOK

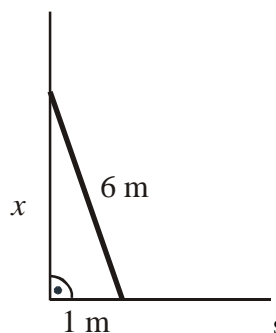
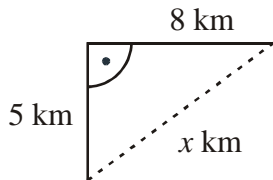
1. Aláhúzás jelöli a derékszögű háromszögre utaló tény, dőltbetű az oldalakra vonatkozó információkat.
- a) Egy derékszögű háromszög rövidebbik befogója 3 cm, a hosszabbik befogó 4 cm. Add meg az átfogó hosszát!
- b) Egy téglalap oldalai 3 cm és 4 cm hosszúak. Milyen hosszúak az átlói?
- c) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm. Az alaphoz tartozó magasság 4 cm. Milyen hosszú a háromszög másik két (egyenlő) oldala?

2. A Pitagorasz-tételt alkalmazzuk:

a)	b)	c)	d)
$5^2 + 12^2 = c^2$	$5,51^2 + 11,67^2 = c^2$	$a^2 + 8^2 = 17^2$	$a^2 + 9,54^2 = 11,42^2$
$25 + 144 = c^2$	$30,36 + 136,19 \approx c^2$	$a^2 + 64 = 289$	$a^2 + 91,01 \approx 130,42$
$169 = c^2$	$166,55 \approx c^2$	$a^2 = 225$	$a^2 \approx 39,41$
$13 = c$	$12,91 \approx c$	$a = 15$	$a \approx 6,28$

Az átfogó 13 cm. Az átfogó kb. 12,91 cm. A befogó 15 cm. A befogó kb. 6,28 cm.

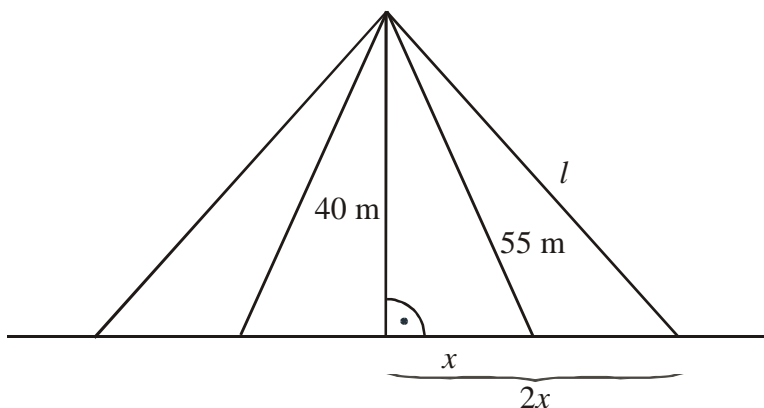
- 3.



- a) $5^2 + 8^2 = x^2$, ebből $x \approx 9,43$ km.
- b) $1^2 + x^2 = 6^2$, ebből $x \approx 5,92$ m.
- c) A tetőlapok ferde oldalának hossza: $x^2 = 2^2 + 6^2$, amiből $x = \sqrt{40} \approx 6,32$ (m).

A két tetőlap összterülete tehát $T = 2 \cdot (15 \cdot \sqrt{40}) \approx 189,74$ (m²). (A korábban kapott kerekített értékkel számolva 189,6 m² adódik.)

- d)



Először az x távolságot számoljuk ki:

$$x^2 = 55^2 - 40^2 = 1425, \text{ ebből } x = 37,75 \text{ m.}$$

Majd ezt kétszerezve a másik háromszögben:

$l^2 = 40^2 + 75,5^2$, ebből $l = 85,44$ m. (Persze csak közelítőleg, de gyakorlati feladatról lévén szó egyenlőségjelet írunk, hiszen a bemenő adat is mért közelítő érték!)

4. a) A szélességet $4x$ -szel, a magasságot $3x$ -szel jelölve:

$$(4x)^2 + (3x)^2 = 55^2$$

$$16x^2 + 9x^2 = 3025$$

$$25x^2 = 3025 \quad \text{A szélesség tehát } 4x = 44 \text{ cm, a magasság } 3x = 33 \text{ cm.}$$

$$x^2 = 121$$

$$x = 11$$

- b) A rombusz kerülete 156 cm, oldalai tehát 39 cm hosszúak. Az átlókat jelölje $5x$ és $12x$. A rombusz átlói merőlegesek és felezik egymást, ezért a keletkezett 4 darab háromszög bármelyikére felírható ugyanaz az egyenlet:

$$\left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{12x}{2}\right)^2 = 39^2$$

$$\frac{25x^2}{4} + \frac{144x^2}{4} = 1521$$

$$25x^2 + 144x^2 = 6084$$

$$169x^2 = 6084$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

A rombusz átlói tehát $5x = 30$ és $12x = 72$ cm hosszúak, területe $T = \frac{e \cdot f}{2} = 1080 \text{ cm}^2$.

- c) A szabályos háromszöget a magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. Ezen háromszögek átfogója a szabályos háromszög egyik oldala, egyik befogójuk a szabályos háromszög oldalának fele, másik befogójuk pedig a magasság. Jelölje a szabályos háromszög oldalát a , ekkor:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = a^2$$

$$\frac{a^2}{4} + 3 = a^2$$

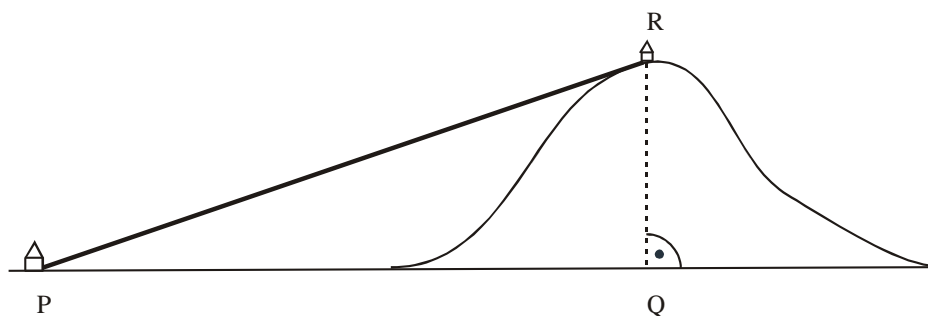
$$\vdots$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

A háromszög oldala 2 m.

d) $RQ = 300 \text{ m}$. $PR = \frac{5}{4} PQ$.



A PQR derékszögű háromszögben:

$$PQ^2 + 300^2 = \left(\frac{5}{4}PQ\right)^2$$

$$PQ^2 + 90\,000 = \frac{25}{16}PQ^2$$

$$PQ^2 = 160\,000$$

$$PQ = 400.$$

A felvonó drótkötele tehát $\frac{5}{4} \cdot 400 = 500 \text{ (m)}$ hosszú.

5. a) A paralelogramma átlója *nem feltétlenül merőleges* az oldalára, így nem biztos, hogy valóban derékszögű a háromszög, amire a tételt felírjuk. (Valójában a két megadott adat még nem is határozza meg egyértelműen a paralelogrammát, a másik oldal hossza többféle értéket is felvehet.)
- b) A háromszög ugyan derékszögű, de *rosszul írtuk fel a Pitagorasz-tételt*, az egyik befogó és az átfogó négyzetösszege nem egyenlő a másik befogó négyzetével. A helyesen felírt összefüggés $x^2 + 12^2 = 35^2$, vagy az ezzel egyenértékű $x^2 = 35^2 - 12^2$ lenne.
- c) Az egyes oldalakat x és $3x$ jelöli. Ezeket kell négyzetre emelni a Pitagorasz-tétel alkalmazásakor. Az ismertetett megoldásban *rosszul emeltük négyzetre a $3x$ -et!* A helyes megoldás $x^2 + (3x)^2 = 20^2$, azaz $x^2 + 9x^2 = 20^2$, illetve $10x^2 = 20^2$ stb. lenne.