雪 兰 莪 暨 吉 隆 坡 福 建 会 馆
新　纪　元　大　学　学　院　　联合主办

ANJURAN BERSAMA
PERSATUAN HOKKIEN SELANGOR DAN KUALA LUMPUR
&
KOLEJ UNIVERSITI NEW ERA

第三十三届（2018 年度）
雪隆中学华罗庚杯数学比赛
PERTANDINGAN MATEMATIK PIALA HUA LO GENG ANTARA SEKOLAH-SEKOLAH MENENGAH DI NEGERI SELANGOR DAN KUALA LUMPUR YANG KE-33 (2018)

~~高中组~~
KATEGORI MENENGAH ATAS

日期　: 2018 年 7 月 22 日 （星期日）
Tarikh　: 22 Julai 2018 (Hari Ahad)

时间　: 10:00→12:00（两小时）
Masa　: 10:00→12:00（2 jam）

地点　: 新纪元大学学院 5 楼大礼堂
Tempat　: B500 Auditorium Hall, Kolej Universiti New Era
5 Floor, Block C, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit,
43000 Kajang, Selangor

说明

1. 不准使用计算机。
2. 不必使用对数表。
3. 对一题得 4 分，错一题倒扣 1 分。
4. 答案 E：若是“以上皆非”或“不能确定”，一律以“***”代替之。

INSTRUCTIONS

1. Calculators not allowed.
2. Logarithm table is not to be used.
3. 4 marks will be awarded for each correct answer and 1 mark will be deducted for each wrong answer.
4. (E)***indicates “none of the above”.

---

1. 若a是正数，且点$P(a, a+1)$到直线$5x-12y-6=0$的最近距离为10，求a的值。

   If a is a positive number, and the nearest distance from the point $P(a, a+1)$ to the line $5x-12y-6=0$ is 10, find the value of a.

   A. 16 B. 17 C. 18 D. 20 E. ***

2. 将 NECESSARY 一字中的字母全排列，使得两个 S 不相邻，有多少种方法?

   How many ways can all the letters in the word “NECESSARY” be rearranged such that the two “S’’s are not adjacent?

   A. 70560 B. 80640 C. 161280 D. 322560 E. ***

3. 若x是正的实数，求$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{162}{x^2}$的最小值。

   If x is a positive real number, find the smallest value of $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{162}{x^2}$.

   A. 3 B. 6 C. 9 D. 18 E. ***

4. 已知$F(x)=\int_{x^2}^{1}\sqrt{1+3t^3}\ dt$，求$F'(1)$。

   Given that $F(x)=\int_{x^2}^{1}\sqrt{1+3t^3}\ dt$, find $F'(1)$.

   A. 2 B. -2 C. 4 D. -4 E. ***

5. 若$(1-2x+3x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x^{20}$，求$a_1+a_2+\cdots+a_{20}$的值。

   If $(1-2x+3x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x^{20}$, find the value of $a_1+a_2+\cdots+a_{20}$.

   A. 1022 B. 1023 C. 1024 D. 1025 E. ***

6. 求 9991 的所有正因数之和。

Find the sum of all the positive factors of 9991.

A. 9992　　B. 10082　　C. 10092　　D. 10192　　E. ***

7. 不大于 700 的正整数中有多少个与 21 互质?

How many positive integers not exceeding 700 are relatively prime to 21?

A. 399　　B. 400　　C. 401　　D. 402　　E. ***

8. 求 $9^9 + 90^{90} + 901^{901} + 9018^{9018}$ 的个位数字。

Find the last digit of $9^9 + 90^{90} + 901^{901} + 9018^{9018}$.

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8　　E. ***

9. 大明与小明玩一个游戏，他们轮流投掷一粒匀称的骰子，先投得点数 6 的得胜。若大明先投，求他得胜的概率。

Da-Ming and Xiao-Ming play a game. They take turns to toss a fair die. The first one who obtains the number 6 wins the game. If Da-Ming tosses the die first, find the probability that he will win the game.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{7}{12}$　　D. $\frac{6}{11}$　　E. ***

10. 下列五个数字中，哪一个是最大的?

Among the following five numbers, which one is the largest?

A. 20^{30}　　B. 25^{25}　　C. $(85\times95)^{10}$　　D. 90^{20}　　E. 300^{15}

11. 若 $\log_3\log_3\log_2 x=0$ 及 $\log_5\log_2\log_7 y=0$，求 $x+y$ 的值。

If $\log_3\log_3\log_2 x=0$ and $\log_5\log_2\log_7 y=0$, find the value of $x+y$.

A. 2　　B. 81　　C. 137　　D. 153　　E. ***

12. 如图1所示，$ABCD$ 是一个平行四边形，W、X、Y、Z 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，P 是线段 WX 上任意一点。若平行四边形 $ABCD$ 的面积为 α，ΔPYZ 的面积为 β，求 $\frac{\alpha}{\beta}$。

As shown in the Figure 1, $ABCD$ is a parallelogram. W, X, Y, Z are respectively the midpoints of AB, BC, CD and DA. P is a point on the line segment WX. If the area of the

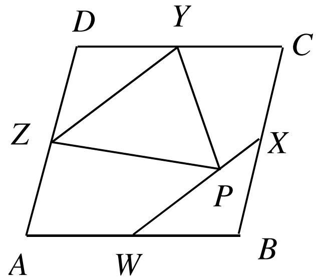

图 1

Figure 1

parallelogram $ABCD$ is α and the area of ΔPYZ is β, find $\frac{\alpha}{\beta}$.

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6 E. ***

13. 已知 $x+y=7$ 且 $xy=11$，求 x^6+y^6 的值。

Given that $x+y=7$ and $xy=11$, find the value of x^6+y^6.

A. 9282 B. 9882 C. 10282 D. 10882 E. ***

14. 若 a、b 是实数且 x^2-x+2 是多项式 ax^5+bx^4+16 的因式，求 a 的值。

If a, b are real numbers such that x^2-x+2 is a factor of the polynomial ax^5+bx^4+16, find the value of a.

A. 0 B. 1 C. -3 D. 3 E. ***

15. 若 p、q 是质数使得 $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{86}{534^2-533^2}$，求 $p+q$ 的值。

If p, q are prime numbers such that $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{86}{534^2-533^2}$, find the value of $p+q$.

A. 108 B. 112 C. 120 D. 138 E. ***

16. 如图 2 所示，ΔABC 中，$\angle A=120^\circ$，D、E 是 BC 边上两点使得 ΔADE 是等边三角形。若 $BD=18$，$EC=32$，求 DE 的长。

As shown in the Figure 2, in ΔABC, $\angle A=120^\circ$. D, E are two points on BC such that ΔADE is an equilateral triangle. If $BD=18$, $EC=32$, find the length of DE.

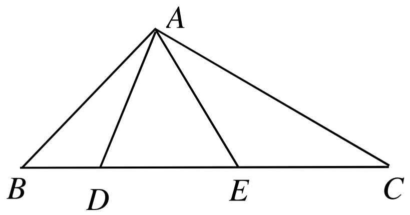

图 2
Figure 2

A. 24 B. 25 C. 27 D. 28 E. ***

17. 若 A、B 是平面上相距42的两点，平面上有多少条直线 L 使得 A 到 L 的距离为13，B 到 L 的距离为29?

If A, B are two points on the plane with distance 42 apart, how many lines L on the plane are such that the distance from A to L is 13, and the distance from B to L is 29?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 无限多 infinitely many E. ***

18. 如图 3 所示，E 是 BC 上的点，D、F 是 AB 上的点使得 $DE//AC$，$EF//CD$ 且 CD 平分 $\angle ACB$。已知 $BC=54$，$AC=18$，$AF=14$，求 BF 的长。

As shown in the Figure 3, E is a point on BC, D, F are points on AB such that $DE//AC$, $EF//CD$ and CD bisects $\angle ACB$. Given that $BC=54$, $AC=18$ and $AF=14$, find the length of BF.

A. 14　　B. 16　　C. 18

D. 21　　E. ***

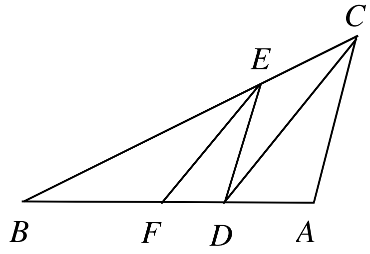

图 3

Figure 3

19. 求满足方程式$6x+14y=2018$ 的正整数对(x, y)的个数。

Find the number of ordered pairs of positive integers (x, y) that satisfy the equation $6x+14y=2018$.

A. 49　　B. 48　　C. 47　　D. 46　　E. ***

20. 如图 4 所示，D、E、F 分别是ΔABC 中 AB、BC、CA 边上的点。已知$BE=4$，$EC=7$，ΔABC 的面积为77。若ΔBEG 的面积与ΔDFG的面积相等，求ΔABF的面积。

As shown in the Figure 4, D, E, F are respectively points on the sides AB, BC, CA of ΔABC. Given that $BE=4$, $EC=7$ and the area of ΔABC is 77. If the area of ΔBEG is equal to the area of ΔDFG, find the area of ΔABF.

A. 22　　B. 24　　C. 28

D. 33　　E. ***

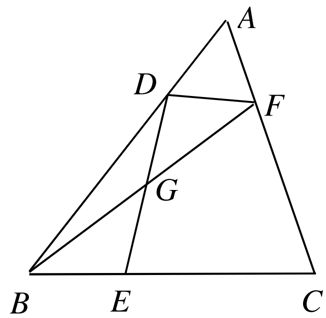

图 4

Figure 4

21. 已知α、β、γ为方程式$(x-59)^3+(2x-64)^3=(3x-123)^3$ 的三个根，求$\alpha+\beta+\gamma$ 的值。

Given that α, β, γ are the three roots of the equation $(x-59)^3+(2x-64)^3=(3x-123)^3$, find the value of $\alpha+\beta+\gamma$.

A. 246　　B. 132　　C. 123　　D. 91　　E. ***

22. 若x、y是实数且满足以下的三个条件：

$3x-7y=11+5p$，　$2x-5y=13+4p$，　$x<y$，

求 p 的取值范围。

If x, y are real numbers that satisfy the following three conditions:

$3x-7y=11+5p$,　$2x-5y=13+4p$,　$x<y$,

find the range of values of p.

A. $p>-19$ B. $p<-19$ C. $p>19$ D. $p<19$ E. ***

23. 已知a、b为整数且$\sqrt{\frac{8+3\sqrt{7}}{2}}$是方程式$ax^2+bx+1=0$的其中一个根，求$a+b$的值。

Given that a, b are integers and $\sqrt{\frac{8+3\sqrt{7}}{2}}$ is a root of the equation $ax^2+bx+1=0$, find the value of $a+b$.

A. 8 B. 5 C. -1 D. -4 E. ***

24. 设n为大于 3 的整数，α_n及β_n为方程式$x^2+(n^2-3)x+3n=0$的两个根。求$\frac{3}{(\alpha_4-3)(\beta_4-3)}+\frac{3}{(\alpha_5-3)(\beta_5-3)}+.....+\frac{3}{(\alpha_{99}-3)(\beta_{99}-3)}$的值。

Let n be an integer larger than 3, and let α_n and β_n be the two roots of the equation $x^2+(n^2-3)x+3n=0$. Find the value of

$$\frac{3}{(\alpha_4-3)(\beta_4-3)}+\frac{3}{(\alpha_5-3)(\beta_5-3)}+.....+\frac{3}{(\alpha_{99}-3)(\beta_{99}-3)}$$

A. $\frac{95}{132}$ B. $\frac{18}{25}$ C. $\frac{95}{396}$ D. $\frac{6}{25}$ E. ***

25. 设$A=\{1,2,3,....,30\}$，$P=\{a_1,a_2,a_3\}$是A的子集且$a_1+6\le a_2+4\le a_3$。A有多少个这样的子集?

Let $A=\{1,2,3,....,30\}$, $P=\{a_1,a_2,a_3\}$ is a subset of A such that $a_1+6\le a_2+4\le a_3$. How many such subsets does the set A have?

A. 2300 B. 2600 C. 2925 D. 3276 E. ***

26. 已知函数f的定义域为正整数集合，且对于所有的正整数x、y,

$$f(x+y)=\left(1+\frac{2y}{2x+1}\right)f(x)+\left(1+\frac{2x}{2y+1}\right)f(y)+2x^2y+xy+2y^2x 。$$

若$f(1)=1$，求$\frac{f(99)}{199}$的值。

Given that f is a function defined on positive integers such that for all positive integers x, y,

$$f(x+y)=\left(1+\frac{2y}{2x+1}\right)f(x)+\left(1+\frac{2x}{2y+1}\right)f(y)+2x^2y+xy+2y^2x.$$

If $f(1)=1$, find the value of $\frac{f(99)}{199}$

A. 4484 B. 4684 C. 4884 D. 4488 E. ***

27. 如图 5 所示，$ABCD$是一四边形，AC与BD相交于点E。已知$AB=12$，$BC=8$，$CD=7$，$DA=5$，$\tan\angle AED=2$，求四边形$ABCD$的面积。

As shown in the Figure 5, $ABCD$ is a quadrilateral, AC and BD intersect at the point E. Given that $AB=12$, $BC=8$, $CD=7$, $DA=5$, $\tan\angle AED=2$, find the area of the quadrilateral $ABCD$.

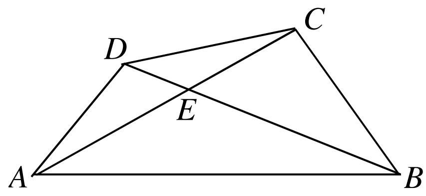

图 5

Figure 5

A. 52　　B. 60　　C. 72　　D. 80　　E. ***

28. 有多少组正整数(x, y, z)满足以下的方程式?

$$xy+3xz=144$$
$$2xz-yz=63$$

How many triples of positive integers (x, y, z) satisfy the following system of equations?

$$xy+3xz=144$$
$$2xz-yz=63$$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. ***

.

29. 求$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}\right)$。

Find $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}\right)$.

A. $\ln 2$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$　　E. ***

30. 求$\frac{\tan 25^\circ \tan 40^\circ \tan 65^\circ}{\tan 25^\circ+\tan 40^\circ-\tan 65^\circ}$的值。

Find the value of $\frac{\tan 25^\circ \tan 40^\circ \tan 65^\circ}{\tan 25^\circ+\tan 40^\circ-\tan 65^\circ}$.

A. -1　　B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　　C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$　　D. 1　　E. ***

31. 有多少对整数序偶(x, y)满足方程式$x^2+y^2=3(x+y)+xy$?

How many pairs of integers (x, y) satisfy the equation $x^2+y^2=3(x+y)+xy$?

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 8　　E. ***

32. 在ΔABC中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$。若a，b是方程式$x^2+5(2c+5)=(c+5)x$的二根，求$\angle C$。

In ΔABC, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. If a, b are the two roots of the equation $x^2+5(2c+5)=(c+5)x$, find $\angle C$.

A. 30°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 120°　　E. ***

33. 有10个信封，分别编上号码1至10。求有多少种方法可将5张红信纸与5张蓝信纸分别装进这10个信封中，使得每一个信封恰有一张信纸，而且装有红信纸的信封的编号之和大于装有蓝信纸的信封的编号之和。

There are 10 envelopes numbered 1 to 10. Find the number of ways to insert 5 pieces of red letterforms and 5 pieces of blue letterforms into these 10 envelopes, such that each envelope contains exactly one letterform, and the sum of the numbers on the envelopes that contain red letterforms is larger than the sum of the numbers on the envelopes that contain blue letterforms.

A. 124　　B. 125　　C. 126　　D. 127　　E. ***

34. 有多少个小于 200 的正整数有恰好 6 个正的因数?

How many positive integers less than 200 have exactly 6 positive factors?

A. 24　　B. 25　　C. 26　　D. 27　　E. ***

35. 有多少个四位数的正整数$\overline{abcd}$满足以下两个条件：

(i) $\overline{abcd}$ 能被 7 整除；

(ii) 将第一位数与最后一位数对调后，所得的数$\overline{dbca}$仍是一个能被 7 整除的四位数的正整数。

How many positive four-digit integers $\overline{abcd}$ satisfy the following two conditions:

(i) $\overline{abcd}$ is divisible by 7;

(ii) When the first and the last digits are interchanged, the resulting number $\overline{dbca}$ is still a positive four-digit number that is divisible by 7.

A. 195　　B. 200　　C. 205　　D. 210　　E. ***

~~~~~~~~~~ 完 END ~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~