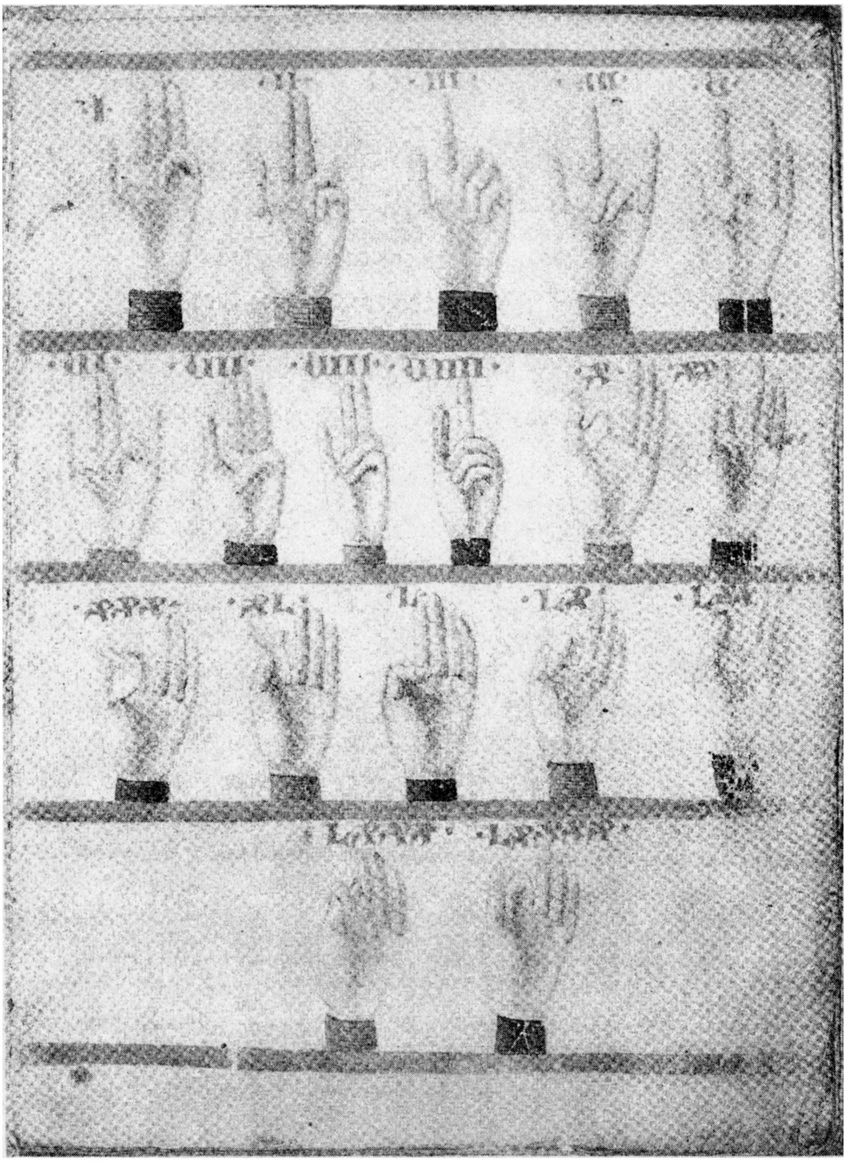

《计算之书》原稿的“手算图”

（承蒙米兰 Ambrosiana 图书馆惠允）

丝绸之路数学名著译丛

计　算　之　书

〔意〕斐波那契　原著
〔美〕劳伦斯·西格尔　英译

纪志刚　汪晓勤　马丁玲　郑方磊　译

本书受吴文俊数学与天文丝路基金资助
上海市哲学社会科学基金资助

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书是意大利数学家斐波那契的重要数学著作之一，是一部百科全书式的数学著作，内容涉及算术、代数、几何和问题解决等在13世纪广为人知的数学知识，在世界数学史上占有重要地位。其理论基础是欧几里得的数学，作者对原来的解法及自己独创的解法都给出了证明，并收集了中世纪时期用于解决日常问题的数学方法及其在商贸、度量衡、货币换算、单利复利计算等各种场合的应用。此外，还有许多趣味数学问题以其丰富的想象力和解答的独创性展示了数学的魅力。而书中数学问题的东方背景特别引人注目。

本书主要读者对象是数学工作者、科学史工作者、数学教师及数学爱好者。

图书在版编目(CIP)数据

计算之书/〔意〕斐波那契原著；〔美〕西格尔英译；纪志刚等译．—北京：科学出版社，2008

(丝绸之路数学名著译丛)

ISBN 978-7-03-020017-4

Ⅰ．计…　Ⅱ．①斐…②西…③纪…　Ⅲ．算法-研究　Ⅳ．O242.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第179898号

丛书策划：孔国平/责任编辑：孔国平　王日臣

责任校对：包志虹/责任印制：钱玉芬/封面设计：张　放

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008年1月第　一　版　　开本：B5(720×1000)

2008年1月第一次印刷　　印张：47 1/4　插页：1

印数：1—2 000　　字数：916 000

定价：80.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

① ＊ 本编委会成员即"吴文俊数学与天文丝路基金"学术领导小组成员。

总　　序

李文林同志在本译丛导言中指出，古代沟通东西方的丝绸之路，不仅便利了东西方的交通与商业往来，“更重要的是使东西方在科学技术发明，宗教哲学与文化艺术等方面发生了广泛的接触、碰撞，丝绸之路已成为东西方文化交汇的纽带。”特别是在数学方面，“沿丝绸之路进行的知识传播与交流，促成了东西方数学的融合，孕育了近代数学的诞生。”

在李文林同志的精心策划与组织带动之下，我国先后支持并派出了几批对数学史有深厚修养的学者们远赴东亚特别是中亚亲访许多重要机构，带回了一批原始著作，翻译成中文并加适当注释。首批将先出版5种，具见李的导言。它们的深刻意义与深远影响，李文言之甚详，不再赘述。

吴文俊

2007.9.30

丝路精神　光耀千秋

——《丝绸之路数学名著译丛》导言

李文林

吴文俊院士在2002年北京国际数学家大会开幕式主席致辞中指出：

“现代数学有着不同文明的历史渊源。古代中国的数学活动可以追溯到很早以前。中国古代数学家的主要探索是解决以方程式表达的数学问题。以此为线索，他们在十进位值制记数法、负数和无理数及解方程式的不同技巧方面做出了贡献。可以说中国古代的数学家们通过‘丝绸之路’与中亚甚至欧洲的同行们进行了活跃的知识交流。今天我们有了铁路、飞机甚至信息高速公路，交往早已不再借助‘丝绸之路’，然而‘丝绸之路’的精神——知识交流与文化融合应当继续得到很好的发扬。”[1]

正是为了发扬丝路精神，就在北京国际数学家大会召开的前一年，吴文俊院士从他荣获的国家最高科技奖奖金中先后拨出100万元人民币建立了“数学与天文丝路基金”(简称“丝路基金”)，用于促进并资助有关古代中国与亚洲各国(重点为中亚各国)数学与天文交流的研究。几年来，在吴文俊丝路基金的支持、推动下，有关的研究得到了积极的开展并取得了初步的成果，《丝绸之路数学名著译丛》就是丝路基金首批资助项目部分研究成果的展示。值此丛书出版之际，笔者谨就“丝路基金”的创设理念、学术活动、课题进展以及本丛书的编纂宗旨、内容和所涉及的中外数学交流史的若干问题等作一介绍和论述。

(一)

两千多年前，当第一批骆驼队满载着货物从长安出发，穿过沙漠向西挺进的时候，他们大概并没有意识到自己正在开辟一条历史性的道路

——丝绸之路。千余年间,沿着不断延拓的丝绸之路,不仅是丝绸与瓷器源源流向中亚乃至欧洲,更重要的是东西方在技术发明、科学知识、宗教哲学与文化艺术等方面发生了广泛的接触、碰撞,丝绸之路已成为东西方文化交汇的纽带。

特别是就数学而言,沿丝绸之路进行的知识传播与交流,促成了东西方数学的融合,孕育了近代数学的诞生。事实上,诚如吴文俊院士自20世纪70年代以来的数学史研究所揭示的那样,数学的发展包括了两大主要活动:证明定理和求解方程。定理证明是希腊人首倡,后构成数学发展中演绎倾向的脊梁;方程求解则繁荣于古代和中世纪的中国、印度,导致了各种算法的创造,形成了数学发展中强烈的算法倾向。统观数学的历史将会发现,这两大活动构成了数学发展的两大主流,二者相辅相成,对数学的进化起着不可或缺、无可替代的重要作用,而就近代数学的兴起论之,后者的影响可以说更为深刻。事实上,研究表明:作为近代数学诞生标志的解析几何与微积分,从思想方法的渊源看都不能说是演绎倾向而是算法倾向的产物。

然而,遗憾的是,相对于希腊数学而言,数学发展中的东方传统与算法倾向并没有受到应有的重视甚至被忽略。有些西方数学史家就声称中国古代数学“对于数学思想的主流没有影响”。要澄清这一问题,除了需要弄清什么是数学发展的主流,同时还需弄清古代中国数学与天文学向西方传播的真实情况,而这种真实情况在许多方面至今仍处于层层迷雾之中。揭开这层层迷雾,恢复中西数学与天文传播交流历史的本来面目,丝绸之路是一条无可回避和至关重要的线索。

中国古代数学在中世纪曾领先于世界,后来落后了,有许多杰出的科学成果在14世纪以后遭到忽视和埋没,有不少甚至失传了。其中有一部分重要成果曾传到亚洲其他国家,特别是沿丝绸之路流传到中亚各国并进而远播欧洲。因此,探明古代中国与亚洲各国沿丝绸之路数学与天文交流的情况,对于客观地揭示近代数学中所蕴涵的东方元素及其深刻影响,无疑具有正本清源的历史价值。

当今中国正处在加快社会主义现代化建设、赶超世界先进水平的重要历史时期。我们要赶超,除了学习西方先进科学,同时也应发扬中国古代科学的优良传统。吴文俊院士获得国家最高科技奖的两大成就是拓扑学和数学机械化研究,其中数学机械化是他在70年代以后开拓的

一个既有强烈的时代气息、又有浓郁的中国特色的数学领域。吴先生说过:“几何定理证明的机械化问题,从思维到方法,至少在宋元时代就有蛛丝马迹可寻。”他在这方面的研究“主要是受到中国古代数学的启发”。数学机械化理论,正是古为今用的典范。吴文俊先生本人这样做,同时也大力提倡年轻学者继承和发扬中国古代科学的优良传统,并在此基础上做出自己的创新。要继承和发扬,就必须学习和发掘。因此,深入发掘曾沿丝绸之路传播的中国古代数学与天文遗产,对于加强我国科学技术的自主创新同时具有重要的现实意义。

这方面的研究以往由于语言和经费等困难在国内一直没有得到应有的开展,而推动这方面的研究,是吴文俊先生多年来的一个夙愿。他设立的“数学与天文丝路基金”,必将产生深远影响。丝路基金旨在鼓励支持有潜力的年轻学者深入开展古代与中世纪中国与其他亚洲国家数学与天文学沿丝绸之路交流传播的研究,努力探讨东方数学与天文遗产在近代科学主流发展过程中的客观作用与历史地位,为我国现实的科技自主创新提供历史借鉴,同时通过这些活动逐步培养出能从事这方面研究的年轻骨干和专门人才。为了具体实施“吴文俊数学与天文丝路基金”的宗旨与计划,根据吴文俊院士本人的提议,成立了由有关专家组成的学术领导小组。该小组负责遴选、资助年轻学者立项研究,并在必要时指派适当人员赴中亚、日本与朝鲜等地进行专门考察,特别是调查中国古代数理天文典籍流传这些地区且幸存至今的情况;负责审议当选项目的研究计划,并争取与有关科研、教育部门联合规划,多渠道多途径地支持、保证计划的落实;负责评价资助项目的研究报告,支持研究结果的出版;赞助有关的国际会议,促进围绕丝路项目的国际合作,等等。

(二)

丝绸之路之起源,最早可以追溯到商周、战国,其基本走向则奠定于汉代:以长安城为起点,向西穿过河西走廊,经新疆、中亚地区而通往欧洲、北非和南亚。在以后的数千年中,丝绸之路虽然历经拓展,但其主要干线却维持稳定。人们习惯上称经中亚通往欧洲和北非的路线为西线;称经中亚而通往南亚的路线为南线。另有自长江与杭州湾口岸城市(扬州、宁波等)东渡日本或从辽东陆路去朝鲜半岛的路线,亦称丝绸之路东线。吴文俊“数学与天文丝路基金”支持的研究对象,原则上包括所有这

三条路线,战略重点则在西线。目前已支持的研究项目有:

1. 中亚地区数学天文史料考察研究;
2. 斐波那契《计算之书》的翻译与研究;
3. 中世纪中国数学与阿拉伯数学的比较与交流研究;
4. 中国朝鲜数学交流史研究;
5. 中国数学典籍在日本的流传与影响研究;
6. 中国传统数学传播日本的史迹调研

以下根据各项目组的汇报简要介绍研究进展。

1. 中亚地区数学天文史料考察研究(新疆大学:依里哈木、阿米尔)

阿拉伯文献蕴涵着了解、揭示沿丝绸之路数学与天文交流实况的丰富史料和重要线索。新疆大学课题组的任务就是要深入调研中亚地区数学与天文学原始资料。该组具有地理上的优势,两位成员均能接触阿拉伯数学与天文学文献。到目前为止他们已调研了包括历史名城萨马尔罕在内的乌兹别克斯坦和哈萨克斯坦多个城市图书馆收藏的1000余份原始资料,带回2000余幅照片和下列作者的17本书:

al-Khowarizmi(783—850)
al-Farabi(870—950)
lben Sina(980—1037)
al-Biruni(973—1048)
al-Kashi(1380—1429)
Ulugh Beg(1397—1449)

该课题组与乌兹别克科学院及中国科学院的研究人员合作,已完成al-Khowarizmi两部著作(《算法》与《代数学》)的翻译,目前正在研究Al-Kashi及其代表性著作《算术之钥》并将其译中文(带评注)。课题组成员关于Ulugh Beg天文著作的研究显示了中国与伊斯兰世界天文与历法的许多相似性。

2. 斐波那契《计算之书》的翻译与研究(上海交通大学:纪志刚)

斐波那契及其《计算之书》(亦译作《算经》或《算盘书》)对于了解中世纪中国与欧洲之间数学知识的传播具有重要意义。然而长期以来中国学者却只能利用一些数学通史和原著选集中摘录的片段。上海交通大学课题组的任务是对中国古代数学典籍与斐波那契《计算之书》中的数学进行全面的比较研究。作为第一步,该课题组已完成《计算之书》的

中文翻译,同时通过对原著的认真研读,做出了许多比较性评注,涉及三次方程的数值解、盈不足术、分数运算及一些典型中肯的相似性讨论。相信该项研究对于揭示欧洲近代数学兴起的东方元素是有意义的。

3. 中世纪中国数学与阿拉伯数学的比较与交流研究(辽宁师范大学:杜瑞芝)

俄罗斯学者对于伊斯兰数学与天文学已有大量研究,这些研究对于丝路基金的研究计划是很有帮助和借鉴作用的。辽宁师范大学课题组在充分利用俄文资料的基础上,对世界各大图书馆收藏的阿拉伯数学文献的情况开展了调研,并进行了中世纪中国与伊斯兰数学若干问题的比较研究,特别是关于 Al-Samaw'al(1125—1174)及其代表著作《算术》的研究。

4. 中国朝鲜数学交流史研究(内蒙古师范大学:郭世荣)

5. 中国数学典籍在日本的流传与影响研究(清华大学:冯立升)

6. 中国传统数学传播日本的史迹调研(天津师范大学:徐泽林)

以上三个课题组均属于所谓"东路"的范畴,但各有不同的重点。清华组主要从事中国古代数学经典在日本流传及影响的调研,天津组侧重于幕府时期数学著作的比较研究,而呼和浩特组则集中挖掘中国与朝鲜半岛数学交流的原始资料并进行比较分析。三个课题组对现存于日本和韩国下列图书馆的中国古代数学经典开展了较为彻底的调研:

日本的东京大学图书馆、日本学士院、日本国会图书馆、宫内厅书陵部、东京理科大学、早稻田大学、庆应义塾大学、京都大学、东北大学、同志社大学;韩国的延世大学、首尔大学、汉阳大学、高丽大学、梨花女子大学、奎章阁图书馆、藏书阁图书馆。

同时根据调研结果,相互合作编纂完成了一部日本和韩国图书馆中国古代数理天文著作藏书目录,收录了日本各主要图书馆收藏的 2000 余种、韩国各主要图书馆收藏的 100 余种著作,其中有一些是珍本甚至是在中国本土已失传的孤本(如韩国延世大学藏《杨辉算法》新抄本、日本幕府时期的刘徽《海岛算经》图说本等)。笔者相信,这部目录提供了关于中国古代数学与天文历法著作流传日本和朝鲜半岛情况的迄今最完全的信息。除此以外,上述三课题组的成员还在原著调研的基础上完成了若干研究专著。

(三)

作为吴文俊丝路基金资助项目部分研究成果的《丝绸之路数学名著译丛》(简称《译丛》),首批计划出版5种,它们分别是:

(1) 阿尔· 花拉子米:《算法与代数学》

本书由阿尔· 花拉子米的两部著作《算法》、《代数学》的中文译本组成。花拉子米(al-Khowarizmi,约公元780—850)是中世纪阿拉伯的领头数学家,他的名字已跟现代数学两个最基本的术语——“算法”(Algorithm)与“代数”(Algebra)联系在一起。《算法》一书主要介绍十进位值制算法,而十进位值制的故乡恰恰是中国。该书原无书名,国外文献习称《印度计算法》,系西方学者所生加。《代数学》一书阿拉伯文原名《还原与对消计算概要》,系统讨论一元二次方程的解法,在西方文献中,它已成为以解方程为主题的近代代数学之滥觞,而代数方程求解正是中国古代数学的主要传统。

(2) 阿尔· 卡西:《算术之钥》

阿尔· 卡西(Al-Kashi, ?- 1429)领导的著名的撒马尔罕天文台聚集了来自欧亚各地的学者,应该也有中国历算家。在已公开出版的传世阿拉伯数学著作中,阿尔· 卡西的《算术之钥》是反映中国古典数学传播与影响信息最为丰富的一部。

(3) 斐波那契:《计算之书》

斐波那契(Leonardo Fibonacci,约1170—1250)是文艺复兴酝酿时期最重要的欧洲数学家。他所生活的意大利地区作为通向欧洲的丝绸之路的终点,成为东西文化的熔炉。斐波那契的《计算之书》可以说正是中国、印度、希腊和阿拉伯数学的合金。即使是西方学者,也早有人指出:“1202年斐波那契的巨著中所出现的许多算术问题,其东方来源不容否认。”[2]中文全译本使我们能发掘其中更多、更明显的东方元素。总之,斐波那契《计算之书》对于揭示文艺复兴近代数学的东方来源和中国影响,具有特殊的意义。

(4) 婆什迦罗:《莉拉沃蒂》

婆什迦罗(BhaskaraII,1114—约1185)的《莉拉沃蒂》是古典印度数学的巅峰之作。从这部12世纪的印度数学著作中,人们不难看到《九章算术》的影子。这部有着美丽的名字及传说的著作,也是反映沿丝绸之

路南线发生的数学传播与交流情况的华章。

(5) 关孝和等:《和算选粹》

和算无疑是中国古代数学在丝绸之路东线绽放的一朵奇葩。以关孝和、建部贤弘等为代表的日本数学家(和算家),他们的著述渗透着中国古代数学的营养,同时也闪耀着和算家们在中国传统数学基础上创新的火花。《和算选粹》是经过精选的、有代表性的和算著作(以关孝和、建部贤弘的为主)选集。

上述五种著作,都是数学史上久负盛名的经典、丝绸之路上主要文明数学文化的珍宝。此次作为《丝绸之路数学名著译丛》翻译出版,特就丛书翻译工作及中外数学交流的若干问题作如下说明:

首先,这五种著作都属首次中译出版,除最后一种外,在国外均有多种文本存在。各课题组在中译过程中都遵循了尽量依靠原始著作的原则。五种著作中有的(《算术之钥》、《和算选粹》)是直接根据原始语种文本译出;有的则通过与外国有关专家的国际合作做到最大程度接近和利用原始语种文本,《算法与代数学》和《莉拉沃蒂》的翻译就是如此;《计算之书》的翻译虽是以英译本为底本,但同时认真参校了拉丁原文。当然目前国内学者尚不能直接阅读梵文原著,利用阿拉伯文献的能力也还相当有限,但上述努力使中译本有可能避免第二语种译本中出现的某些讹误。另外可以说,各课题组的翻译工作是与研究工作紧密结合进行的。事实上,如果没有这种研究作基础,整个丛书的编译是不可能的。

其次,《译丛》为了解中外数学交流的历史面貌和认识中国古代数学的世界影响提供了原始资料和整体视角。

中国古代数学具有悠久的传统与光辉的成就。经过几代中外数学史家的探讨,现在怀疑中国古代存在有价值的数学成就的人已大为减少,但关于中国古代数学的世界影响特别是对数学思想主流的影响,则仍然是学术界争论的问题。这方面问题的解决,有赖于文献史料的发掘考据,更依靠科学观点下的理论分析和文化比较研究。丝路基金鼓励这样的发掘和研究。这套《译丛》,也正是为这样的发掘和研究服务,提供原始资料和整体视角。这方面的内涵当然有待于读者们去评析研讨,这里仅根据初步的通读举例谈谈笔者的感受。

古代印度和阿拉伯数学著作乃至文艺复兴前夕意大利斐波那契等人的书中存在着与《九章算术》等古代中国数学著作的某些相似性,这已

被不少学者指出。但以往知道的大都是个别的具体的数学问题(如孙子问题、百鸡问题、盈不足问题、赵爽弦图等等),并且是从第二手的文献资料中获悉的片段。《译丛》提供了相关原著的全豹,使我们不仅可以找到更多的、具体的、相似的数学问题,而且可以进行背景、特征乃至体系上的比较,而后者在笔者看来是更为重要的。当我们看到《莉拉沃蒂》与《九章算术》相同的体系结构和算法特征,当我们意识到花拉子米《代数学》中处理一元二次方程的似曾相识的出入相补传统与手法……所有这一切难道能简单地一言以蔽之曰“偶然”吗？当我们考察分析花拉子米《算法》中所介绍的系统而完整的十进位值制算法时,难道能像那些抱有偏见的西方学者那样给这本原本没有书名的著作冠名以“印度计算法”吗？(其实,正如该书中译序言所指出的那样,花拉子米这本书的核心内容是介绍十进位值制算法。尽管印度记数法在8世纪已随印度天文书传入阿拉伯世界,但并未引起人们的广泛注意,花拉子米这本书的拉丁文译稿中几乎所有数码都采用的是当时在欧洲流行的罗马数码而非印度数码,由此可以看出欧洲人在14世纪以后才接受印度数码,同时也说明在最初的传播中,起实质性影响的并非数码符号而是十进位值制系统。)

笔者在这里特别想提一提《和算选粹》。和算的基础是中算,这一点是没有疑义的。但我们通过《和算选粹》所选录的关孝和、建部贤弘等人的著述可以看到,和算家们是怎样在中国古代割圆术与招差法的基础上开创了可以看做是微积分前驱的“圆理”研究;又怎样通过对天元术、四元术的接受与改造,建立他们自己的行列式展开理论与多项式消元理论。一个意味深长的事实是:和算家对曲线求积方法的不断探索,显示出企图复原祖冲之“缀术”方法的努力。总之,我们可以说:和算家们站在中国古代数学家的肩膀上接近了近代数学的大门。我们为中国古代数学的成就和发展势能感到自豪,同时也为明代以后中国传统数学的衰落而深陷反思。

在整个《译丛》的编译过程中,编译者们对“欧洲中心论”者们所表现的西方偏见感到惊讶。他们看到,在以往的一些西方文献中,这些著作所反映的大量的东方元素或中国元素是怎样被视而不见或轻描淡写。他们发现,执“欧洲中心论”的学者们,在评判东西方数学的价值问题上,所持的往往是双重标准。即以上面提到的“相似性”论之:按照正常的逻辑,当不同的文明在某个知识点上出现相似性时,最有可能和合理的解

释应当是从年代久远者向晚近者传播,从高文化向低文化传播。然而有人却不可思议地提出“对于这些相似性的唯一合理解释是共同起源”,即把这种相似性归结为所谓数学的“共同起源”(the common origin)——一种“口口相传的算术、代数和几何”[3],并把这个源头设定在新石器时代的欧洲。真是荒唐的逻辑和地道的子虚乌有,既没有任何实证和凭据,连备受欧洲中心论者们顶礼膜拜的欧几里得几何演绎法则也被抛到了九霄云外!

《译丛》的编译使我们认识到科学文化的欧洲中心论史观的劣根性,对于这类偏见的回答只能是:数学知识的传播,既不是将一杯水从A处移到B处,更不是虚无缥缈的“口口相传”,而是遵循着文化发展自身的规律,对这种规律的认识,不能是沙文主义的臆造,而应该是客观的科学探讨。我们不赞成狭隘民族主义的文化观。问题是一元论的科学史观恰恰是一种与历史真相不符的文化沙文主义,因此从根本上是对科学发展的障碍。只有探明科学的多元文化来源,才能恢复历史的本来面目,古为今用,促进科学的共同繁荣与真正进步。这正是丝路基金的初衷。

(四)

我们已经做的工作只能说是迈出了第一步。吴文俊数学与天文丝路基金倡导的是一项任重道远、伟大艰巨而又功及百世的事业,不可能毕其功于一役,甚至需要几代人的努力。但重要的是脚踏实地地开始行动。下一阶段,我们将计划做好以下几件事:

首先是继续进一步开展原始资料的调研、挖掘。古代中外数学与天文交流的文献资料浩如烟海,《译丛》展示的不啻是沧海一粟。我们面临的是更为艰巨的任务。各课题组根据以往的调研经历认识到,泛泛而查好比大海捞针,何况一些失传已久的古代经典的重新发现,往往是可遇而不可求。我们需要从实际出发,从具体目标出发,有计划地进行工作。克莱茵曾这样谈论过“数学发现的奥秘”:“选定一个目标,然后朝着它勇往直前。您也许永远不能抵达目的地,但一路上却会发现许多奇妙有趣的东西!”文化的探究又何尝不是如此。像《缀术》这样的失传名著,也许将永远密藏在地下的宝库,但发掘它们的努力,将会引导饶有意义甚至是重要的研究成果。

其次是在调研、积累的基础上大力开展比较研究。在笔者看来,用

正确的观点和科学的方法对所获得的原始资料进行整理、分析和比较研究，在某种意义上说更为重要。即使如已译出的《译丛》各书，其比较研究也亟待深入。丝路基金将鼓励撰写中外数学天文交流史的比较研究专著，并着力组织，尽可能形成系列丛书。

最后是重点加强丝绸之路西线的工作，特别是着眼于人才培养。如前所论，古代中国与中亚各国乃至南欧国家的数学交流，对于揭示中国古代数学的主流影响，具有关键的意义。在过去几年里，相关课题组已作出很大努力，但这方面的研究依然薄弱，亟待加强。为此，已初步组建了丝路基金"西线工作小组"，以具体任务带动人才培养，特别是建立能较熟练地掌握阿拉伯语种的中青年专家队伍。

在前一阶段的工作中，我们得到了国际同行学者的热情帮助和广泛支持。他们或提供信息、资料，或帮助校订译文，有的甚至慨允参考自己尚未公开发表的论著。《译丛》各书序言中已对这些分别作有鸣谢。进一步加强国际合作，无疑是我们在今后的工作中将要始终坚持的方针。

"千里之行始于足下"。希望《丝绸之路数学名著译丛》的翻译出版，能成为良好的开端，引导更多的有志之士特别是年轻学者投身探索，引起社会各界普遍的关注与支持，为弘扬中华科学的光辉传统与灿烂文化，同时也为激励更多具有中国特色的自主科技创新而作出重大贡献。

值此《丝绸之路数学名著译丛》出版之际，我们谨向吴文俊院士表示衷心的感谢和致以崇高的敬意。

丝路精神，光耀千秋！

参考文献

[1] Wu Wen Tsun. Proceedings of International Congress of Mathematicians. Vol. I. Beijing. Higher Education Press. 2002. 21-22

[2] Louis C. Karpinski. The History of Arithmetic. New York. Rand Mcnally, 1925

[3] B. L. van der Waerden, Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Springer, 1983

[4] 顾今用，中国古代数学对世界文化的伟大贡献，《数学学报》，1975，第 18 期

[5] 李文林，古为今用的典范——吴文俊教授的数学史研究，《数学与数学机械化》(林东岱、李文林、虞言林主编)，山东教育出版社，2001，49-60

英译本致谢词

献给尊敬的埃托莱(Ettore)

谨向我们的朋友阿利克斯·库里(Alex Khoury)博士,以及布克奈尔(Bucknell)大学数学系为此书的出版所给予的支持与鼓励致以崇高的敬意。对格里高利·亚当斯(Gregory Adams)教授、乔治·艾诺(George Exner)教授、保罗·麦克盖莱(Paul McGuire)教授、霍华德·史密斯(Howard Smith)教授、卡尔·沃斯(Karl Voss)教授,还有艾贝·萨特森(Abbe Satteson)女士的热心帮助表示衷心感谢!

——L.E.西格尔(L.E.Sigler)

英译本导言

《计算之书》(*Liber Abaci*)是中世纪数学的最重要的著作之一。它促使印度数字系统和代数方法在欧洲广泛传播,并产生了巨大影响。本书首次将拉丁文版的《计算之书》翻译为现代语言。希望本书能在增进历史学家、数学家以及一般公众关于我们文化遗产的知识方面有所贡献。毕竟,正如文学、艺术和音乐一样,数学和科学也是我们文化的重要组成部分。对一个人来说,了解数学和科学经典与了解文学和艺术经典同样重要。

对当今的数学家和科学家来说,比萨的列奥那多(Leonardo Pisano)的更广为知晓的名字是斐波那契(Fibonacci)。从 1170 年到 1240 年后,他一直是沿海城邦比萨(Pisa)的市民。当时正值十字军(the Crusades)战争时期,而且神圣罗马帝国皇帝腓特列二世(Frederick II)和教皇(the Papacy)发生了强烈的政治冲突,也是阿西西(Assisi)的圣·佛朗西斯(St. Francis)的宗教狂热时期。意大利的沿海城邦,如比萨、热那亚 (Genoa)、威尼斯(Venice)和阿马尔非(Amalfi),则忙于对包括拜占庭、穆斯林国家在内的地中海沿岸各国商业贸易的激烈竞争之中。

列奥那多年轻时在布日伊(贝贾亚)[1]学习数学,那里是比萨设立的商贸特区,位于西阿拉伯帝国的北非穆斯林教区。在埃及、叙利亚、普罗旺斯和拜占庭等地经商时,他仍致力于数学的学习和研究,并同地中海沿岸国家的科学家们有着密切的接触。他精通欧几里得(Euclid)的《几何原本》,掌握了希腊数学中有关定义、定理和证明的方法。他从阿拉伯科学家那里学到了印度数字和位值制系统、算术运算的计算方法,也从阿尔·花拉子米(al-Khwārizmī)的著作中学到了代数学的方法。通过学习、游历以及从科学家们那里学到的辩论术,他成为了一位卓越的、富有创造力的数学家。他参加了弗里德利希二世的宫廷学院,这个

① Bougie(Bejaie),现在位于阿尔及利亚北部港口。

宫廷学院由弗里德利希二世聘请13世纪杰出的学者所组成。根据他所掌握的科学知识,列奥那多清楚地认识到那些为穆斯林科学家们所熟知的实用数学的优越性,特别是印度数字与十进制位值制、算法化的计算,以及他们的代数。在公元10世纪后半叶,印度数字已经通过西班牙从阿拉伯传到了欧洲,但是到了列奥那多的时代,印度数字的用法仍未普及。列奥那多致力于撰写他的百科全书式的著作《计算之书》,就是要将这一世界上最好的数学以其便于使用的形式带给意大利人民。

自古以来,计算就是一种人类的活动。各种各样的计算用具使得计算变得更加便利,到希腊和罗马时代,形成了算盘。在木质框架上以线串上算珠是其最著名的形式。这类算盘能保存至今,甚至仍在世界一些地方使用,就已证明了它的效用。算盘的早期形式是把木板或石板刻出线条凹槽,在凹槽中对石头算珠进行运算。另一种形式,则是在木板上洒些细沙,然后用手指在上面做记号。17世纪,巴斯卡尔(Blaise Pascal)和莱布尼茨(Gottfried Leibniz)设计了机械的计算器。今天,我们有了电子计算机,精巧的计算机帮助我们进行计算。廉价的掌上电子计算器就是今天的算盘。

印度人和阿拉伯人利用位值制的书写数字和方法作为计算的基础,这样就不需要算盘。罗马数字和其他类似的书写数字系统对于计算是不方便的:在算盘上计算,用罗马数字另写答案。采用位值制的印度数字既可计算,又可以记下结果。这些程序正是今天的孩子们在学校使用纸和笔学习加、减、乘、除所做的。在中世纪的欧洲,这些新的书写程序被称作“算法”(algorithms),以区别于用算盘计算。列奥那多在他的《计算之书》讲授的就是这种程序。一般说来,这些计算、代数和实用数学的书写程序在中世纪的意大利被认为是“计算”(abaco)。

《计算之书》首次出版于1202年,后于1228年出了第二版。列奥那多自称他的愿望就是要把印度数字系统及其计算介绍给意大利人民。然而,《计算之书》远不止介绍印度数字系统及其计算方法。它是一部百科全书式的数学著作,涉及算术、代数和问题解决等在13世纪广为人知的数学知识。它不但是一部实用性的著作,也具有理论化的特点。在《计算之书》中使用的方法,列奥那多都以欧几里得式的几何证明加以确认。读者切莫因书中缺乏现代数学符号而误认为它不是一部杰出的或严格的数学著作。数学符号不应成为数学质量的判据。在它撰写

的时候,《计算之书》是好的数学,今天依然也是。《计算之书》是一部由卓越而富有创造力的数学家撰写的、关于算术和应用数学的严格的数学著作。

这里要再次指明,尽管 abaci 一词源自 abacus,而在 13 世纪,abaci 却是荒唐地用于指不用 abacus 的计算。因此,Liber Abaci 不应该翻译为《算盘书》(*The Book of the Abacus*)。其实,Maestro D'abbaco 是这样一位大师,他可以直接使用印度数字计算而不用"算盘"(abacus),而 abaco 则是指用印度数字计算的一种专门学问。列奥那多的目的不仅要在科学家中用印度数字取代罗马数字,而且在商业和普通公众之间也这么做。也许,他的成功远远超出了预期目的。在地中海沿岸,意大利的商人不论走到那里,他们都带着这一新数学和新方法。新数学也传入了德国,曾以 cossists 之名广为传播(cossists 是意大利的单词 cosa 的误用,意思是"东西",即代数学中的未知量)。

大约有三个世纪之久,托斯卡纳(Tuscany)计算学校(school of abaco,一种专为将来要作商人或别的目的学习数学的学生设立的学校)的课程是依据《计算之书》讲授的。其他老师,或是很好的数学家也写了一些关于计算的书在学校中使用。这类书从初等规则手册到高质量的数学论著都有,但是,没有一本能像列奥那多的《计算之书》那样内容广泛、富有理论、成就卓著。

列奥那多其他的数学著作有:《平方数之书》(*Liber Quadratorum*, 1225)、《实用几何》(*Practica Geometriae*, 1223)、《花朵》(*Flos*, 1225)和《与哲学家泰奥多姆的通信集》(*Epistola ad Magistrum Theodorum*, 1225)。正是他的《平方数之书》证明了列奥那多作为一位数学家的才能。这部著作可以说是在丢番图(Diophantus)与费马(Pierre Fermat)之间关于数论著作的代表。它展示了列奥那多作为一个富有创造力的数学家的才华。

《计算之书》中以欧几里得式数学作为论述算术、代数和应用数学的理论基础,从而给人们留下了深刻印象。《几何原本》第二卷利用几何化代数的基本原理建立了一般性的方法,列奥那多从《几何原本》第十卷中寻求二次无理根数的理论基础。贯穿整个《计算之书》,列奥那多对旧的方法、从阿拉伯获得的方法,以及他自己独创的方法都给出了证明。列奥那多也收集了中世纪时期用于问题解决(problem solving)

的非代数的方法,同时证明了这些方法在数学上的合理性。此外还有:验算的“弃九法”、各种比例算法、单假设法和双假设法。

除了讲授算术、代数所有必需的方法之外,在《计算之书》中,列奥那多广泛收集了数学在各种场合的应用,如商业贸易、度量衡和货币的单位换算、物品交易、商业契约、利润分配、钱币合金、货币投资、单利和复利。通过这些贸易问题可对中世纪做出极富洞察力的理解。他还收集了许多纯粹是为了展示数学魅力的问题,这些问题也因其丰富的想象力和解答的独创性而引人注目。

列奥那多为《计算之书》写了一篇序言,讲述了他在旅行和研究中,是怎样发现印度的数字系统和计算方法,而且这一方法远胜于其他方法,他希望能在这部书里把这些介绍给意大利人民。他强调指出利用欧几里得的原理给出的证明,是为了阐明这些方法的有效性。他提醒读者注意他的方法对于通过学习和实践获得熟练的必要性。

列奥那多给出了全书的内容概要表。这一概要表在每章的篇头又用更多的细节加以扩充。

第一章首先介绍了印度数字系统的 10 个数字,包括零,它被称为“零”(zero),源自阿拉伯语的“虚空”(zephir);然后解释了不论多大的数都可利用这 10 个数以位值制系统表示出来。这就是已为我们所熟知的十进位位值制:任何数在首位上都代表它自己,向左数第二位上的数字表示这个数的 10 倍,从左数第三位上的值是百位,第四位是千位,如此等等。列奥那多所称的“零”或是“虚空”表示“没有”,也要占据一位。为了方便读数,大的数字三位一组。我们用惯了十进位记数法和它的加法等其他计算方法,很容易忽视这本书在算术计算上给 13 世纪的欧洲带来的新的和革命性的进步。

作为书写数字的补充,列奥那多介绍了各种手指记数的记忆方法。当列奥那多说“把某个数记在手里”,他确实就是这样做的。这正是中世纪的“指算”记忆系统,曾经广泛使用,当然,现在已被弃而不用了。只要少量的书写,一个人就可以用手指记数进行有效的计算。今天在进行计算的时候,我们仍然会用笔在数字上作些小的记号,以表示进位或借位。较小数字的加法和乘法以表格形式给出,以帮助初学者便于记忆,这正如今天的孩子们所做的那样。

第二章的开始,介绍两位数与两位数的乘法、一位数与多位数的乘

法。乘法、加法、减法和除法在运算的概念上和今天几乎没有多少差别，所以，这里似乎没有必要多费笔墨去描述这些数字上下左右的摆放，对于这些，读者已在小学中就做过了。我们把它留给读者自己去比较列奥那多的算法是怎样算的。在进行计算的时候，许多算法家随手擦写数字，进行数字替换，或将数字保留在手中。

列奥那多引进并解释了利用“弃九法”的数字验算。“弃九法”是一个古老的算法，大概可以追溯到毕达哥拉斯学派(Pythagoreans)。列奥那多证明以 9 为模的余数，等于各位数字之和的余数。在本书中，列奥那多不仅用 9 作模数，还使用了 7、11 等其他素数。他也告诫说，在验算中随意选用模数将会招致错误。列奥那多展示出了相当可观的模算术的初步知识，这些正是后来高斯(Gauss)在《算术探究》(*Disquisitiones Arithmeticae*)中所着力发展的。

从简单逐步过渡到更复杂的计算，斐波那契讨论了三位数与三位数、二位数与三位数的乘法。随后是四位数与四位数、二位数与四位数、三位数与四位数的乘法。也讨论了以 000 开头的数字的乘法。比例和 10 的方幂被用来解释位值制和运算规则，然后讨论五位数与多位数的乘法；接下来说明如何用手指记数，便捷地做二位数与二位数的乘法、三位数与三位数的乘法；最后是任意多位数的乘法。

第三章给出了任意位整数的加法运算，解释了中世纪时期的“棋盘乘法”(chessboard multiplication)；给出了“弃九法”验算；讲述了按栏加法；介绍了使用逐栏表格记录镑、索尔蒂、第纳尔消费支出记账法。

第四章阐述整数的减法。

在第五章中，讨论除法和简单分数。除了我们知道的普通分数外，列奥那多还发展了一种复合分数(the composed fraction)，这种分数的使用方法可追溯到阿拉伯的科学家。它是几个分数之和的紧凑型符号，即连续几个分数，分母是其与前一个分母的乘积，例如，复合分数 $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}$ 即是 $\frac{1}{2\times3\times5}+\frac{2}{3\times5}+\frac{4}{5}$，它的和是 $\frac{29}{30}$。还介绍了“心算”除法(division using head and hand)。接下来是除数为两位数的素数的除法。同乘法一样，除法也可以用模数算术(modular arithmetic)来验算。也讨论了正则数抑或合数的因数分解。所谓正则数(regular number)，就是可以表示为其因子的乘积的数。给出了正则数的组合构成后，在

用正则数做除法时,斐波那契使用了正则数组合构成,即一个数被一个正则数来除,可以连续地用正则数的因子去除而得到。复合分数的表述已十分接近算术基本定理(the fundamental theorem of arithmetic),即任何整数可以唯一地分解为它的素因数乘积。列奥那多将这种因数分解称为一个数的组合构成或简单规则。他也讨论了包含因数为 10、20、12 的组合构成,这一规则对其他的数是否适用,依赖于它的公约数。当然,这种因数分解不是素因数分解,但却可以从素因数分解中推导出来。

列奥那多所使用的复合分数也包括十进小数。例如,十进小数28.2429536481出现在第十二章题为"某人旅行通过 12 城"的问题,不过,列奥那多是用复合分数表示的:

$$\frac{1\quad 8\quad 4\quad 6\quad 3\quad 5\quad 9\quad 2\quad 4\quad 2}{10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10}28$$

第六章讨论混合分数(mixed numbers),即整数带着一个简单分数。算法过程是把带分数变成假分数(improper fractions),运算后,再把答案约化为带分数,结果通常以复合分数表示。可以用"弃九法"或是别的模数来检验。本章还给出了一个复合分数中的整数与两个、三个分数部分的运算。接着讨论了整数与两个复合分数中的两个分数的运算。列奥那多引入了一个特殊符号:数与封闭圆圈的分数。也讨论了带分数的分数。

第七章继续讨论整数与分数的加、减、乘、除运算,以及将若干个分数部分化简为单个分数。首先介绍一个分数与另一个分数的加法、减法和除法;然后是两个分数之间的加法与减法、整数与带分数之间的除法,以及带分数的加法、减法和除法。列奥那多着力讨论了将分数分解为单位分数(unit fractions)之和,即如何将任一个分数表示为单位分数的和。这一话题可以回溯到埃及人,因此,单位分数常被称为埃及分数。

第八章运用四项比例的原理求解商品的价钱。列奥那多先是用比例方法讨论众多的简单商品交易。比如:如果 2 磅大麦值 5 个索尔蒂,那么 7 磅大麦值多少索尔蒂? 列奥那多将此类问题系统地归纳为简明的比例表,他称其为"商议法"(method of negotiation)。在这类问题中,人们可以不仅了解到商品的买卖,同时还可以了解到 13 世纪流行的重量和货币体系。这些商业问题包括:以 1 担(hundredweight)卖东西,货

币换算，藤条、大捆、托塞里的销售，各种单位货币与比萨卷（Pisan roll）的兑换。这些例子全部取自地中海沿岸地区。涉及的货币与度量衡的单位在其出现的各章中都给出了进一步的解释，其拉丁文名称也全部被翻译为意大利名称。

在第九章中，前一章中的物品交换找到了共同货币等价物后，商品交易被扩充到多项。前面所使用的系统化比例表格方法也被扩充了。涉及的问题有：普通物品交易、货币出售、依据规则的购买货币。其他的问题有：马匹食麦、多人种树、人吃谷物，等等。

第十章论述投资分析和合伙收益。解决此类问题的方法是比例。首要的概念是合资的股东们怎样根据个人的投资份额获得收益。这类问题反映出13世纪的商业运作。

在第十一章中，列奥那多着力讨论含有银和铜的钱币的合金分析，以便得到某种银与铜的固定比例。用比例方法解决此类问题。因其涉及不定线性方程组而常常有多种解答，根据相同的原理，类比得出其他问题，如：买卖水果、出售黄金、购买肉类和谷物以及若干钱买若干种禽类。

第十二章主要是试位法（the method of false position）。设定的问题含有一个或多个未知数的一个或多个线性方程。试位法先做出“假令”（arguments），得到近似值，然后修正获得正确解答。单假设法用于求解类似于 $Ax=B$ 简单的线性问题。双假设法应用于解决诸如 $Ax+B=C$ 之类的线性方程。双假设法主要在第十三章。除了试位法之外，列奥那多还使用他所称的“直接法”（the direct method）解决问题。这种方法涉及所谓的“某物”（thing），即“未知量”，设立一个包含“某物”的方程。这种方程是用文字叙述的，而不是用我们今天使用的符号。对方程逐步演算，求出“某物”。当然，这也是一种代数，正如我们所知，花拉子米在他的关于代数学的著作中详细描述了这种方法。

第十二章[①]开篇给出了算术级数求和的若干结果，并将其应用于不怎么现实的旅行者问题。在引入“树问题”之前，详细讨论了比例。“树问题”（the tree problem）是典型的求解形如 $Ax=B$ 的方程问题。可以利用单假设法求解。讨论了各种演变，其中包括生动有趣的问题，如：

① 原文误作“十三章”。

两蛇爬塔、四足兽、买卖鸡蛋、合伙经商、两船相遇、空罐注水以及纯数字问题。充满想象力的各种问题十分引人入胜。“某人持钱”是这类问题的推广。在这类问题中,一个人把自己的若干钱分给另外一人或几个人,构成一定的比例和数量关系。根据分钱、得钱和已知条件,就可求得每人所有钱数。这类问题产生线性方程组,只求其整数解。常常有很多解,但有时也无解。另一个精心构思的问题是“捡钱包”,题目是有若干人有若干钱,捡到了一个或多个有钱的钱包,根据已知条件,需要求出每个人的钱数,以及每个钱包中的钱数。这些问题也只要整数解。与此类似的另一个问题是“某人买马”,从已知条件求出每人的钱数和每匹马的价钱。一般说来,只要求正整数解,但有些问题需要负整数解,列奥那多称其为“亏欠”。当问题的解有多个时,常常给出最小正整数解。有时,需要增强额外的条件。这类方程,一般称为“丢番图方程”,丢番图通常求分数解,而列奥那多则求整数解。

在《计算之书》中,列奥那多经常使用负数。我们想强调一点,那就是在恰当的条件下列奥那多完全认为方程的负数解也是合理的。进一步说,书中给出了关于正负数的加法和乘法法则及其证明,这些法则被广泛使用,尤其是在第十三章中。

值得关注的商业问题是关于旅行者的周期性消费和利润,也还有关于银行的问题,涉及投资、单利与复利、投资期望。工程问题涉及劳动报酬和利润。另外一些问题包括鸟、水果、动物,以展示作者的聪明才智和数学知识,著名的“兔子问题”就包含在其中,从而诞生了“斐波那契序列”。

本章中还有几道列奥那多所称的“猜数问题”。在若干步运算之后,未知的数被揭示出来,给出结果。这类问题通常涉及模算术的应用。最后几道问题是级数求和。

第十三章讨论“双假设法”(elchataym)。双假设法不仅适用于形如 $Ax=B$ 的“树问题”,而且可以解决更复杂的方程,如 $Ax+B=C$。单假设法和双假设法都依据比例或线性外推法。在本章中列奥那多解决了相当复杂的线性方程组,所使用的方法是将“双假设法”反复迭代,直至求出未知数的值。有时求有理解,有时则是求整数解。他完全认识到许多问题有多个解答,通常只给出最小解。此类问题没有数值解。变化范围包括钱币互取、计工付酬、外出经商、捡钱包、买马匹等。

在第十四章列奥那多收集了求根的资料和技巧。他利用欧几里得《几何原本》第十卷中建立的对于根的和与差的分类方法,也就是二项线(binomials)与余线(apotomes)。他给出了二项线和余线的运算,并简化了它们的表示法。尽管他处理了高于二次的根,就其意义来说,未能超越《几何原本》。

我们在第十五章中可以看到比例的再次论述,以及初等几何问题的汇集。涉及毕达哥拉斯定理、简单的面积和体积。再次展示了代数技巧,不过这里是二次而不是线性方程。所论内容与阿尔·花拉子米著作中的相关课题几乎相同。这不是剽窃,而是追寻传统,并对前人的著作表示尊重。例如,《几何原本》第七卷介绍的就是毕达哥拉斯学派的数学。在《计算之书》中,列奥那多在原书第 406 页的页边注明 Maumeht[注释 8],以明确地表示二次方程解法出自花拉子米。假定所有的系数都是非负数,讨论了六种标准形式方程的求解,并给出了一些应用问题。所使用的解二次方程的技巧就是“配方法”(completing the square)。通常只考虑正数解,但列奥那多完全认识到两种解都是可能的。

本书的英文译本依据 B.邦康帕尼(Baldassarre Boncompagni) 的 1857 年拉丁文底本[B]。拉丁文版的页码贯穿整个英文译本,例如,[p193]标明拉丁版本新页码的近似开始之处[①]。 拉丁文版含有许多印刷错误,大多数是数字错误,它自己指出了几处错误,但未纠正,不过,这些讹错均没有导致误解,依据上下文就可纠正。加入副标题是为了使其更清楚。这个英文版是拉丁文版首次翻译成现代语言。在翻译中,我尽最大努力忠实拉丁文版原文,采取了直译的方式。在欧洲,*Liber Abaci* 尚存有多个手稿,邦康帕尼在准备他那权威性的版本时,对它们都做了审查。邦康帕尼的版本是完整的,也是准确的。

要编写那个时代数学史,就不得不对 E.皮卡迪(Ettore Picutti)的著作给予特殊的关注。他的有关著作已列入本书的参考文献。对任何一位试图撰写早期意大利数学的人来说,他的著作是清晰和准确的典范。

J.M 西格尔(J.M.Sigler)

---

① 中译本删掉了拉丁文版的页码标记,而代之以英文版页码。

目　录

献辞和前言

——这里开始《计算之书》，编纂者是比萨的列奥那多，波那契家族的儿子[①]，1202 年

您，我的老师迈克尔·斯科特（Michael Scott）[注释 1]，最伟大的哲学家，致函我王陛下［注释 2］述及我前次呈奉于您的那部关于数字计算的拙作。承蒙您的批评意见和细心检查，我在这部书中均予接受，以表示对您和其他先生的敬重。在修订中，增加新论，删除冗余。其中，对数字计算多有阐发以使其更忠实于印度人的方法［注释 3]，这也正是我为这门学科所选的卓越之法。算术与几何彼此相关且互相倚重，倘若没有相应的几何知识，抑或缺乏洞悉数字运算而不知怎样循此途径融入几何，那么所有关于数的知识都无法充分表述。本书所述方法充满着证明和阐释，它们多以几何图形构成［注释 4]。事实上，在另外一本关于几何应用的书中［注释 5]，我就解释了它们与几何的关联，每个题目都给出了相应的证明。自然，这本书更多关注于理论而不是应用。因此，任何人欲求更好地理解数学的应用，当应在实践中多加使用和练习，因为数学可以通过练习成为习惯；记忆甚至感觉都和手指相关，正如脉搏和呼吸几乎是在同一瞬间，人们总是自然地把它们合在一起。因此，要使学生养成习惯，循序渐进，方可得到个中真谛，以期臻于完美的境界。我把此书分成十五章，以便任何有意阅读本书的人都能容易地探视理论的奥秘。诚然，对本书不当之处，恭请不吝赐教。

家父远离家乡，在布日伊海关供职，布日伊海关为比萨的商人们建立，他们常常群聚此处。考虑到能为我创造一个舒适而有意义的未来，幼时［注释 6］就被父亲带在身边。他希望我在那里学习数学，接受一段时间的数学教育。那些来自印度的九个数字的精妙解说，令我如此着迷，远远胜过别的任何东西。我向所有精于这方面学识的人们学习，学习他们各种各样的方

① “斐波那契”（Fibonacci）就是“波那契家族”（Bonaci）的“儿子”（Filius）的之意。故拉丁文版全称是“*A Leonardo filio Bonacij Psiano*”，但英译本只有“*Family Bonaci*”，丢掉了“儿子”。

法，他们来自附近的埃及、叙利亚、希腊、西西里和普罗旺斯。为了更深入地学习，我后来在这些商贸地区四处周游，在相互辩难中所获甚丰。总的来说，对照印度的方法，我纠正了旧式运算法则，甚至是毕达哥拉斯的数字分节（pythagorean arcs）[注释 7] 中的大量错误。于是，准确地引入印度方法，专注于对它的研究，间或加入自己的阐述，当然更多的是来自于精妙的欧几里得几何体系，尽可能把我的理解融入其中，最终汇成这部十五章的书稿，其中我所加入的每一部分几乎都给出了证明。因此，这些方法远远胜过其他。应该给那些渴望学习的人讲授这门学科，这对拉丁世界的人们来说尤其重要，因为到目前为止他们对算术尚不甚明了。如果我偶然或多或少地忽略了一些必须的和正确的东西，恳请得到您的原谅：凡人皆有错，万事应周详（*cum nemo sit qui uitio careat*，*et in omnibus undique sit circumspectus*）①。

这里结束前言，开始各章提要

关于九个印度数字的认识和如何用这些数字书写所有的数，以及这些数字如何用手算法来表示，并且介绍数字的计算。

关于整数的乘法。

关于整数之间的加法。

关于从大数中减去小数。

关于带分数的乘法以及真分数的乘法。

关于带分数的除法、减法和加法以及把分数部分化简成单分数。

关于货物和相关东西的买卖。

关于货物贸易以及货币的买卖和类似问题的某些法则。

关于合伙办公司的问题。

关于货币的合金以及与合金相关的法则。

关于被称为假设法的问题解答。

关于“双假设法”，通过它所有假设法的问题都可以解决。

关于求平方根、立方根及其乘法、除法和减法，并且关于二项线、余线及其根式计算。

关于几何比例的相关法则；关于还原和对消的问题 [注释 8]。

① 此句拉丁文的英译为：as there is no one who is without fault，and in all thing is altogether circumspect.

第一章 17

印度数字的九个符号是：

9、8、7、6、5、4、3、2、1

正如下面所论证的，用这九个数字符号和被阿拉伯人被称为零（zephir）的符号 0 [注释 1]，可以写出任何数。数是单位的和，或者是单位的集合，通过它们的累加，数量可以一步步地无限增加 [注释 2]。首先，由单位 1 组成了从 1～10 的数；其次，由 10 可以组成从 10～100 的数；再次，由 100 可以组成从 100～1000的数，然后由 1000 可以组成从 1000～10 000 的数……，于是通过这样无限次的步骤，任何数都可以籍由前面的数的参与而构成。书写数字时第一位始于右边，第二位紧随第一位正确地写在其左边，第三位紧跟第二位左边，第四位在第三位左边，第五位在第四位左边……，如此一位接一位，永远写在左边。因此，写在第一位上的数代表其本身，也就是说，如果在第一位上是 1，它就代表 1，如果是 2 就代表 2，如果是 3 就代表 3，按照如此次序从 1 到 9。事实上，这九个数字在第二位上表示 10 倍于第一位上的数，也就是说，如果 1 在第二位上，就表示 10；是 2 就表示 20，3 表示 30，9 表示 90。

这些符号在第三位上表示百位数，就像在第二位上成十位数，第一位上是个位数。如果第三位上是 1，就表示 100；是 2 表示 200，3 表示 300，9 表示 900。因此在第四位上的符号表示千位数，就像第三位上成百，第二位上成十，第一位上是单位数一样。因此，随着数位的改变，数值也因数字结合而随之增加。这个
原则通过数字可以很清楚地展示出来。例如数字 7 在第一个位置，而数字 3 在第 18
二位，则它们加起来表示 37；或者改变一下次序，数字 3 在第一位，数字 7 在第二位，则表示 73。同样地，如果数字 4 在第一位，数字 1 在第二位，表示的是 14，毫无疑问，xiiii 就这样被表示出来；或者说，如果数字 1 在第一位，数字 4 在第二位，就是 41，xli 就被表示出来。与此相同，如果第一位是 2，第二位是 7，就组合成了 72，反之就是 27。然而，如果一个人想写 70，则在第一位写上 0，然后接着写上 7，就是 70；如果是 80，数字 0 之后写上数字 8，就是 80。因此这种表示方法告诉你如何去写从 10 到 100 的两位数。对于三位数，从 100 到 1000 也可以写出来。如果 8 在第一位，5 在第二位，1 在第三位，那么就是 158，即表示一百五十八；改变排列顺序，如果 1 在第一位，5 在第二位，8 在第三位，则是 851，即表示八百五十一；或者再改变排列顺序，8 在第一位，1 在第二位，5 在第三位，则表示 518。再改变顺序，5 在第一位，8 在第二位，1 在第三位，

则表示 185。同样如果 1 在第一位，8 在第二位，5 在第三位，则表示 581。事实上，三个 1，可以组成 111。如果想写 500，在第一和第二位都写上 0，在第三位写上 5，就是 500，这样就可以书写带两个零的百位数。如果想写百位数带十位数或者个位数，可以在第一位写上 0，然后第二位写几十，在第三位写上想写的百位数。例如，在第一位是 0，在第二位是 9，第三位是 2，则 290 就可以表示出来了；如果想写百位数，它有个位数，没有十位数，在第二位，即十位数的位置，写上 0，在第一位写上想写的数字，在第三位写上 2，就是 209；通过上面的表示原则，就能写出从一百到一千的任何数。对于四位数，从千到万也可以按照上面的方法表示如下：

Mi	MMxxiii	MMMxxii	MMMxx	MMMMMdc
1001	2023	3022	3020	5600

MMM	Mcxi	Mccxxxiiii	MMMMcccxxi
3000	1111	1234	4321

其他的数也可以如此写出，如果是五位，可以写出从 10 000 开始到 100 000
19 的所有数字。如果有六位，可以写出从 100 000 到 1000 000 的所有数字。因而按此步骤，数字和数字邻接，数就随着邻接数的增加而增加。据此，如果有人因为有太多的数字符号不能读出或者理解一些数字。我在这里将讲解一下应该如何来读和理解。

因此，对于第一个数字，如果它是放在第一位的数字，可以直读其数。

第二个，放在第二位，可以读某十。

第三个，放在第三位，可以读某百，将其与高位相连。

第四个数字，可是读某千，将其与低位部分相连。

第五个数字，可以读某十千（万）。

因此，第六个数字，可以读某百千（十万），邻接它的是更高的位置。

第七个数字，可以读某千千（百万），邻接它的是一个更低的位置。

第八个数字，可以读某十千千（千万）。

第九个数字，可以读成某百千千（亿），邻接它的是更高的位置。

第十个数字，可以读成某千千千（十亿），它邻接一个更低的位置；并且因此对于千、十千（万）、百千（十万），这三个数字的更高位置，这样建立直到数字的最后一位。由此开始读数，从数字的最后一位即千千（百万）位，到它的邻接，这样直到最低位，正如邻接在它之前的部分，直到第一位数字，邻接的更高位被称为百千（十万），邻接在它之前的更低部分同样到它的邻接，这样直到最