华罗庚：这是一个非常巧妙的证明（19年3月26日）

每天3道奥数题
微信公众号“每天3道奥数题”

家长是孩子最好的老师，

这是奥数君第804天给出奥数题讲解。

今天的题目是一个经典的数论问题，

华罗庚先生曾在一次报告中提到过，

他说这道题的证明方法非常巧妙。

在证明过程中体现了深深的数学思维，

证明过程虽然有点长，

但让小朋友弄明白整个证明过程，

数学思维能直接上一个台阶，

在将来的学习中一定受益匪浅。

解题所用知识不超过小学5年级。

题目（超5星难度）：

1+1/2不是整数，1+1/2+1/3也不是整数，1+1/2+1/3+1/4也不是整数。对任意一个大于2的自然数n:

1+1/2+…+1/n可能是正整数吗？

讲解思路：

这道题属于数论问题，

如果要说明这个数可能是整数，

只需要举一个例子即可；

如果要说明这个数不是整数，

就要给出严格的证明了。

我们知道正整数a乘以正整数b，

结果一定是正整数。

反过来如果某数a乘以正整数b,

得到的结果不是正整数，

那么a也一定不是正整数。

下面我们将利用上述原理解题，

解题时将对n是否为质数讨论。

为解题方便，

假设A=1+1/2+…+1/n。

步骤1：

先思考第一个问题，

如果n是质数，

1+1/2+…+1/n是不是正整数?

当n是质数的时候，

考虑原式乘以(n-1)!的情况，

【注: (n-1)!表示n-1的阶乘，

(n-1)!=1*2*3*…*(n-1)。】

显然当正整数k小于n时，

(n-1)!一定是k的整数倍，

故 (n-1)!*1/k是正整数。

则[1+1/2+…1/(n-1)]*(n-1)!是正整数，

而由于n是质数，

(n-1)!*1/n不是整数，

二者相加也不是正整数，

故(n-1)!*A不是正整数，

因此n是质数时A不是正整数。

注:下面将进行n不是质数的证明。

步骤2先进行铺垫，

结论将应用在步骤3中。

步骤2：

再思考第二个问题，

将所有不大于n的正整数k，

写为k=p*(2^q)的形式，

其中p是奇数，q是整数，

如果所有q的最大值是m，

有几个自然数对应的是m?

考虑m的取值，

2^m是所有不大于n的自然数中，

形如2的幂次方的最大值，

比如n=62时，2^m=32，m=5，

比如n=64时，2^m=64，m=6。

因此只能有1个数对应m。

注: 2^q表示2的q次方。

步骤3：

再思考第三个问题，

当n不是质数时，

1+1/2+…+1/n是不是正整数?

假设所有小于n的奇数的乘积是B，

考虑原式乘以B*2^(m-1)的情况。

当正整数k不大于n时，

如果k=p*(2^q)不是2^m，

由于B是p的整数倍，

显然B*2^(m-1)是k的整数倍。

故除分母是2^m的项外，

其余项的和乘以B*2^(m-1)是正整数。

但[B*2^(m-1)]*1/(2^m)=B/2，

由于B是奇数故B/2不是整数，

故[B*2^(m-1)]*A不是正整数，

因此n不是质数时A不是正整数。

步骤4：

综合上述几个问题，

考虑原问题的答案。

由于n要么是质数要么不是质数，

在步骤1和步骤3中，

已经得到A都不是正整数，

所以1+1/2+…+1/n不是正整数。

思考题（3星难度）：

对任意自然数n，5n+3可能是完全平方数吗？

获得思考题答案方法：

关注微信公众号“每天3道奥数题”(tiantianaoshu)

微信回复“20190326”可获得思考题答案。

注：过4个月之后，关键词回复可能失效。

同类题目链接：

19年3月23日题目（数论问题）

19年3月15日题目（数论问题）

19年3月7日题目（数论问题）

19年3月5日题目（余数问题）

19年2月15日题目（余数问题）

19年2月7日题目（数论问题）

19年1月28日题目（数论问题）

19年1月16日题目（数论问题）

19年1月14日题目（数论问题）

18年12月29日题目（数论问题）

发布于 2019-03-27 08:25

小学奥数

如月千早
这就是小学五年级的数学题吗，爷爱了

2020-03-05 回复 赞

名字好难起
思考题，完全平方数的个位必然是：4，9，6，5，1.。而5n+3的余数是3，8.。。故没有是不可能有完全平方数的

2019-03-29 回复 1

非奇异
是的
2019-03-30 回复 赞

胡兵大好人
妙啊
2019-03-29 回复 赞

黄家强
根据文中的思路，想到一个更简洁的方法：
考虑[1,n]中最大的质数k，由于(n,2n)之间必有质数，因此n/2<k<=n，则(1+1/2+⋯+1/n)*n!/k不为整数。
2019-03-28 回复 4

李建国
我也想到这个了。
2019-03-29 回复 赞

黄家强 ‣ 我不喝杰克丹尼
对的
2019-03-28 回复 赞

我不喝杰克丹尼
你最后一步，是由于：
（1+1/2+....+1/（k-1） “这里注意没有1/k这项” +1/（k+1）+1/（k+2）+....+1/n）*n！/k是整数。
然而1/k*n！/k不是整数。
故（1+1/2+...+1/n）*n！/k不为整数。
是这意思么？
2019-03-28 回复 赞

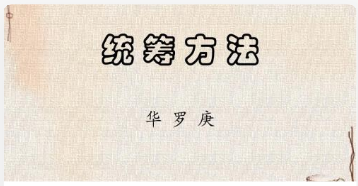
写下你的评论...

每天3道奥数题

推荐阅读

华罗庚的统筹方法和事情一件一件的做，两种办法该选哪个？
邹小强 发表于邹小强

华罗庚先生讲过的一个故事 | 返朴
袁岚峰 发表于风云之声



统筹方法——华罗庚
火火妹