第 11 卷第 2 期 数 学 教 育 学 报 Vol.11, No.2
2002 年 5 月 JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION May., 2002

关于数学的学术形态和教育形态
——谈“火热的思考”与“冰冷的美丽”

张奠宙[1]，王振辉[2]

（1．华东师范大学 数学系，上海 200062；2．青岛大学师范学院 数学系，山东 青岛 266071）

摘要：数学知识需要形式化的表述，但学生掌握数学知识必须经过朴素而火热的思考．教师的责任是返璞归真，运用适度的非形式化方法，将数学的学术形态转化为教育形态，展现数学的魅力，激起学生学习数学的热情．为此，在教学中应注意：（1）把数学教材中形式化的表述顺序颠倒过来；（2）认识到学生对数学的思考往往来自于个别范例和具体活动；（3）帮助学生揭示数学的内在联结；（4）将火热的思考提高到“数学思想方法”的高度上来．

关键词：再创造；火热的思考；返璞归真；数学活动；数学联结

中图分类号：G421 文献标识码：A 文章编号：1004–9894（2002）02–0001–04

数学的表现形式比较枯燥，给人一种冰冷的感觉．但是数学思考却是火热的、生动活泼的．如何点燃和激起学生的火热思考，使他们能够欣赏数学的美丽，实在是数学教育的一项根本任务．

著名数学教育家弗赖登塔尔曾经这样描述数学的表达形式[1]：“没有一种数学的思想，以它被发现时的那个样子公开发表出来．一个问题被解决后，相应地发展为一种形式化技巧，结果把求解过程丢在一边，使得火热的发明变成冰冷的美丽．”我们在教科书上看到的，某些老师陈述的，往往就是这样一种美丽而冰冷的数学．火热的思考被淹没在形式化的海洋里．对此，本文的作者之一曾经提出，数学教学的目标之一，是要把数学知识的学术形态转化为教育形态[2]．实际上，数学的学术形态通常表现为冰冷的美丽，而数学知识的教育形态正是一种火热的思考．

数学教师的任务在于返璞归真，把数学的形式化逻辑链条，恢复为当初数学家发明创新时的火热思考．只有经过思考，才能最后理解这份冰冷的美丽．以下是一些教学上的建议．

1 颠倒教材中形式化的表述顺序

形式化是数学的特征之一．数学教科书里的数学知识大多是形式地摆在那儿的，准确的定义、逻辑地演绎、严密的推理，一个字一个字地印在纸上．这种形式地、演绎地呈现出来的数学，看上去确实是冷冰冰的．教师如果“照本宣科”，把教材中的数学知识依次抄在黑板上，学生就很难进行“火热的思考”和主动建构，剩下的只能是囫囵吞枣似地记忆，欣赏“冰冷的美丽”也就无从谈起了．因此对一些基本的、重要的内容，必须把教材上的叙述顺序颠倒过来，恢复原始的、火热的思考过程，从而使学生领会数学的本原．

例如，方程是一个基本概念，被数学大师陈省身先生当作“好数学”的典型．但是，数学教材中叙述的方式是用黑体字写着：含有未知数的等式称为方程．然后，写了一堆数学式，看看哪些式子符合黑体字的要求，以便掌握“方程”的概念．这是“冰冷的美丽”．那么原始的火热思考是怎样的呢？古代数学家，为了寻找未知量，通过与已知量之间建立等量关系，借助数学运算得到结果．正如我们不认识某人，需要由熟人介绍，然后和某人相识那样，原始思想是非常朴实无华的．这样揭示方程的本原，就是一种火热的思考．

再如函数概念，初中阶段的函数思想，是用变量之间的依存关系定义的．到了高中，则从非常一般的集合之间的对应出发，将函数看作数集之间的一种取唯一值的对应．如果仅是如此这般的讲下来，贬低“变量说”，拔高“对应说”，且美其名曰“现代化”，就成了只是为“冰冷的美丽”唱赞歌．那么火热的思考在哪里？实际上，“变量说”是函数思想的根本，数学家和科学工作者主要是从事物运动中把握变量之间的依赖关系．工程师看函数，必然采用变量说，对应说不便于对

收稿日期：2002–01–23

作者简介：张奠宙（1933—），男，浙江奉化人，教授，国际数学教育委员会（ICMI）执行委员（1995—1998），国际欧亚科学院院士，教育部师范司高师数学改革指导委员会委员，《高中数学课程国家标准》研制组组长，《数学教学》主编，主要从事数学教育研究．

运动事物的考察．但是，对应说也有其长处．比如 $y=x$ 和 $y=x^2$ 在定义域 $M=\{0，1\}$上是否表示同一个函数，用对应说就容易看出 2 者并无区别．于是，函数思想的建立，就必须 2 种定义兼顾，在强调对应说的时候，倒过来也重视变量说．因此，恢复“火热的数学思考”，决不能停留在教材的形式化的表面处理上．

对于祖暅原理的教学，如果按教材顺序先给出原理，然后利用原理的结论推出柱体体积公式，学生只是从铺好的路上平稳走过．这样从原理到公式的表述，数学本质被掩盖了．颠倒过来思考，就要问“幂势相同，则积不容异”的原理是从哪里来的？这就是引发学生火热的思考的关键所在．教学上建议从以下实验开始：现有一副扑克牌，可以把它摆成一个长方体．稍微用力一推又可以做成一个斜柱体．请学生观察长方体和斜柱体的体积之间的关系．学生从体积“守恒”的思考出发，就能重新创造出祖暅原理．这样，冰冷的、似乎从天上掉下来的祖暅原理，成为学生火热的思考过程的结果．这种颠倒，在数学教材中可说比比皆是．高考中曾有过一道关于轧钢的题目，其本质关系是“轧钢前后体积不变”，变和不变，祖暅原理的设立，和轧钢问题的求解，在思想方法上是相通的．

2 学生对数学的思考往往来自于个别范例和具体活动

数学的特点之一是抽象．数学表述的形式化，更加深了抽象的层次．无论教师和学生都必须经受“抽象”炼狱的考验．不通过抽象关，就不能说理解了数学．然而，如果拿抽象作为挡箭牌，把活生生的数学背景一笔抹去，那是一种认识的误区．项武义教授曾经生动地把数学比喻为美女西施，如果只是把数学形式地逻辑演绎一番，那等于是把西施放在 X 光下透视，你所看到的只是一幅骨架而已，毫无美感可言．总之，数学教师的责任是把数学有血有肉地表现出来．

让我们就几何教学进行分析．几何学的任务是理解空间的本质．几何教学应从数学地组织空间现象开始，通过这样的活动构成几何理解．可实际却正好相反，几乎所有课程都是从已经形式化地组织好的数学对象开始，学生被剥夺了将一个非数学的题材形成为数学内容的数学化机会，同时也堵塞了纯数学与应用数学之间的联系[3]．

怎样才是几何学的“教育形态”，如何激起学生火热的几何思考？首先应当为学生创设一种可以活动的数学环境．这里有 2 个经典的例子．

弗赖登塔尔曾经描述一个比和比例的教学设计[4]：一天早晨学生走进教室，发现窗开着，黑板上有个大手印，学生都认为一定是巨人来了．他们很惊讶，不知巨人有多高．老师把手掌放在巨人的手印上，看上去巨人的手比老师的大 4 倍．学生对老师的身高进行测量，然后他们剪了一根线，是老师高度的 4 倍长，并在黑板上留了一封信，将这根线挂在墙上，表示巨人的高度．根据这段经历，学生开始一系列调查，描述巨人课桌、巨人靴子、特大报纸、特大蛋糕等等的长度、面积、体积．这样的数学活动，把比和比例的数学内涵和底蕴，揭示得淋漓尽致．

另一个经典的例子，是上海长宁区“数学活动教学小组”的“坐标课”设计．将教室中课桌椅并拢，拉 2 根相互垂直的长绳，一人为原点，于是每个人都有坐标．象限、直线、坐标轴都可通过学生的活动加以演示．坐标原点可以移动，正是坐标变换的影子．这种只有“整数坐标”的数学活动，比起抽象地讲数轴、坐标系，岂不是更生动、更实际、也许更深刻．

以上 2 个例子表明，恢复学生“火热的思考”，最好的办法是通过再创造把数学化的过程尽可能变成适合学生的可操作的活动．借助操作活动可显示数学的内在特征，暴露数学的实质内涵，以及朴素的数学思考过程．冰冷的美丽可以转化为火热的思考，抽象的数学形式，能够形成数学的教育形态．这些，需要教师精心设计，付出心血．

当然，数学教学不能只停留在操作层面，还应上升到抽象层面去理解数学，使概念的形成由“过程”向“对象”转换，从而达到“凝聚”．用范·希尔夫妇（Van Hieles）的话说：学习过程是由各层次构成的，用低层次的方法组织活动就成为高层次的分析对象；低层次的运算内容又成为高层次的题材[3]．对此，弗赖登塔尔从另一个角度阐述[3]：人们不懂音乐理论仍可以唱歌，不学机械力学照样可以获得熟练的手艺与实验技能……．而数学必须将学生提高到更高层次，如果不是全面提高，也至少要在某一部分上，那样他才能理解最低层次活动的意义．

因此，比和比例的教学，坐标系的建立，最后仍然要上升到抽象的层面，以掌握数学知识的“学术形态”．这时，学生才会感觉到冰冷的美丽．

3　帮助学生揭示数学的内在联结

数学是一种知识体系，通过概念的分析、生成和组织，形成一个和谐的整体．因此，数学的教育形态之一就是要把教科书上线性排列的知识“打乱”，同时融合不同学科的相关知识，由内在联结将它们串起来，建立网络．这样，学生的火热的思考就在于凸现思维网络的“结点”，在纷繁复杂的干扰中寻找本质的、感性的信息，从而使教学达到对数学内在本质的认识．

美国的 NCTM《数学课程标准》，把数学联结（Connection）作为数学的基本能力之一．这是很有见地的．这里，让我们举例说明，如何认识、组织和设计一些数学联结点，形成学生的火热的“联结性”思考．

★勾股定理的证明．这是代数和几何的结合点．我国赵爽的证明，具有代数的特点，是中国古代数学传统的体现．学生可以用“出入相补”原理，根据面积的相等加以证实，也可以使用代数运算加以证明．这种数学之间的连接，曾是古代数学家火热思考的焦点，值得后人仔细体味．

★中学代数的本质是不定元和数字之间能够进行四则运算，特别是分配律的运算．分配律是唯一的一种把加法和乘法联系在一起的运算规律．小学里的“凑十法”、“脱括弧”都与此有关．中学里的数学运算，如合并同类项、因式分解、配方等知识，其基本的连接点就是分配律．于是在提取公因式的教学中就要恢复学生关于分配律的火热思考．使分配律这一思想在不同的，或许是相互没有联系的情境中应用．

★三角函数的教学，从静态的正弦定理、余弦定理到动态的周期变化、潮水涨落、弹簧及波的振动以及在轴上均匀旋转的轮子边缘上荧光点的运动等现象，把代数式、三角形、单位圆、投影、波、周期等离散的领域联系在一起．正是三角函数使它们形成一个有机整体，同时它们也是三角函数在不同侧面的反映．因此对于三角函数的教学必须通过再创造来恢复学生火热的思考，使之返璞归真．让三角函数丰满起来，才能把教科书上定义—公式—图像—性质—应用，这种冰冷的美丽变成学生丰富的联想，使学生在某一领域孤立学习的主题能迁移到另一领域中．

★余弦定理是代数式与三角形的联结点．像证明如下题目，用余弦定理观察代数式就是关键，是学生火热思考的来源．

已知：$x>0$，$y>0$，$z>0$．求证：

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}>\sqrt{z^2+zx+x^2}\ .$$

★再如：

设 x，y 为实数，且满足关系式

$$\begin{cases}(x-1)^3+1997(x-1)=-1,\\(y-1)^3+1997(y-1)=1\end{cases}$$

则 $x+y=(\quad)$．

通过对题设的观察，构造出函数：$f(t)=t^3+1997t$，是奇函数，且在（$-\infty$，$+\infty$）上是单调增函数．又由已知：$f(x-1)=f(1-y)$，所以 $x-1=1-y$，由此得 $x+y=2$．

能否构造上述函数，是学生的思考是否火热的检验．解题教学中，引导学生寻找恰当的切入点，跨越关键，是实现由知识向能力转化的前提．

综上所说，返璞归真，寻求数学的本原，找到数学知识网的结点，就能纲举目张，以一当百．我们常常有一种感觉：读一篇论文，洋洋洒洒好几页，一旦说穿了就不过是几个关节点的新思考，如果要口头说明不过是几句话的事．同样，中学数学解题，看起来由头到尾写了很多步，说到底不过是一个技巧、一个想法而已．火热的思考往往只在一些关节点上发生，其余都是常规．以前华罗庚先生说过，读书要把书读到越来越薄才好，其实也是说要在关节点上进行火热的思考，抓住关键，提纲挈领，一本书就成了不多的一点东西．

4　火热的思考应该提高到“数学思想方法”的高度上来

像一切科学一样，数学也是一门由特定的思想方法组成的学问．数学不等于逻辑，数学要远远多于逻辑．形式化不是数学的起源，也不是最终的目标．掌握数学思想方法，认识客观世界的数量变化规律，并用于认识世界和改造世界，才是数学科学的真谛．因此，通过数学学习，使学生理解数学的价值，经受思想方法的训练，是返璞归真的重要一环．

在数学思想方法的训练上，中国数学教学已经积累了丰富的经验，体现了中国数学教学的特

长．徐利治先生等已经作了大量的研究，无须笔者在此饶舌．以下 3 方面，希望能作为一点补充．

第一，需要宏观地把握数学思想方法．数学的特征是什么？数学方法有哪些特点？与其它科学方法有什么不同？我们应当用各种方法，使学生体验数学思想的威力，受到心灵上的震撼．

例如，几何学的第一个定理：对顶角相等．量一量、看一看就得到结论，学生也不会提出疑问．但是，数学教学不能停留在这一点上，教师应当在这里介绍古希腊学者的深邃思考，把它归于更原始的公理：等量减等量仍为等量．接受对顶角相等的结论并非难事，认识到此事需要证明才是数学教学的目标．同样，学习等腰三角形的底角相等的结论时也是如此．

第二，要善于使用“平台”方法．数学到了 19 世纪，一方面是因实际需要的刺激而大力发展应用数学；另一方面，则向人类思维能力的深度进军．非欧几何、四元数、群论、分析学的严密化等思辨性数学发展迅速．其中和中学密切相关的内容有：皮亚诺的自然数公理，戴德金的实数公理，希尔伯特的几何公理体系等．这些，以前都作为师范大学数学系的必修课．其实，在中学这些都可以作为平台使用．我们不必知道它们的具体内容，只要知道它们的价值，然后“大胆地往前走”就是了．打个比方，我们都了解并会使用 Windows、几何画板等软件平台，但无须知道它们的内部结构，也不必懂得它们是如何做出来的．

会用平台，是一种数学教学方法．其实，“面积”也是平台，我们从未定义过面积，却一直在使用．实数系和数轴上的点一一对应，大家也默认这一平台．有人建议，瞬时速度是否可以作为平台接受下来？而对于对数的首数、尾数，开平方，三角恒等变换，乃至二次曲线等这样的问题，是否都该问问它的出发点在哪里？

这些都是火热的数学思考的一部分，是从数学知识的教育形态出发应该思考的问题．

第三，数学建模方法．这是数学基本方法之一，徐利治先生早就论述过．可惜我们通常看到的数学思想方法，只是“化归”一种类型，把建模方法排除在外（波利亚也是如此）．这样做的结果便是高考中的数学应用题的得分率始终提不高．实际上，数学教学要恢复火热的思考，数学建模思想方法是必须抓住的一环．

最后，我们要说明的是，数学的表达方式仍然是形式化的．数学形式化是数学学习的重要组成部分．冰冷的形式化依然是美丽的．我们主张火热的思考，正是为了能够欣赏这种美丽．反过来说，天天在形式化的圈子里打转，难道就能懂得形式化的本意？火热的思考，是为了理解．将数学的学术形态转化为教育形态是数学教师的职责．我们要研究的是如何在冰冷的美丽与火热的思考之间要寻找平衡点，做到既有形式的表达更有火热的思考，而不要淹没在形式的海洋里．

参考文献：

[1] [荷]Freudenthal, Hans. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures[M]. Dordrecht: Reidel, 1983. 9.

[2] 张奠宙．关于数学知识的教育形态[J]．数学通报，2001，(5)：2．

[3] [荷]弗赖登塔尔．作为教育任务的数学[M]．陈昌平，唐瑞芬译．上海：上海教育出版社，1999．114，115，228．

[4] 徐斌艳．数学教育展望[M]．上海：华东师范大学出版社，2001．179．

Mathematics: the Academic for Mand the Educational Form

ZHANG Dian-zhou[1]，WANG Zhen-hui[2]

(1. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;

2. Department of Mathematics, Normal College of Qingdao University, Shandong Qingdao 266071, China)

Abstract: Mathematical knowledge had two forms: academic and educational. Mathematics teacher should transfer the deductive, formal and academic the matics to the simple, informal and educational mathematics. Then students would fall into hot thinking. After that they also were able to enjoy the ice beauty of mathematics. Some examples were presented.

Key words: recreation; hot thinking; recover simple; mathematical activities; mathematics connection

[责任编校：周学智]