

计划协调技术中的等效计算

华东工程学院 孙东川 朱明月

目前,计划协调技术中有一组等效计算公式存在着不合理性,这里,我们提出新的等效计算公式供大家参考。

一、情况与问题

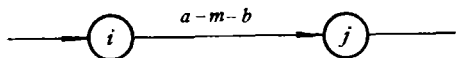


图 1

在计划协调技术的计算中,对于非确定性情况下的作业工时通常采用“三时估计法”。图 1 中, a 即 $a(i, j)$, 是作业 (i, j) 的最短工时, 或称最乐观工时, 是该作业在最顺利情况下所需花费的时间; b 即 $b(i, j)$, 是作业 (i, j) 的最长工时, 或称最悲观工时, 是该作业在最困难情况下所需花费的时间; m 即 $m(i, j)$, 是作业 (i, j) 的最可能工时, 也即该作业在正常情况下所需花费的时间。

一般地,对于实际问题,应有基本关系式:

$$0 \leq a \leq m \leq b \quad (1)$$

下面的公式用来计算作业 (i, j) 的平均工时及其方差:

$$t_e(i, j) = \frac{a + 4m + b}{6} \quad (2)$$

$$\sigma^2(i, j) = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2 \quad (3)$$

设一项任务由许多项作业组成,任务的起始结点为 A , 终止结点为 B (图 2), 则任务 (A, B) 的总工期 $T_E(A, B)$ 及其方差 $\sigma^2(A, B)$ 为:

$$T_E(A, B) = \sum_{CP} t_e(i, j) \quad (4)$$

$$\sigma^2(A, B) = \sum_{CP} \sigma^2(i, j) \quad (5)$$



图 2

其中 CP 为 Critical Path 的缩写,表示流程图中的“紧急路线”(或称“关键路线”,“主要矛盾线”,等等)^[1,3]。

在一级流程图中,任务 (A, B) 可能作为一项大作业出现^[2], 即图 3 等价于图 2。

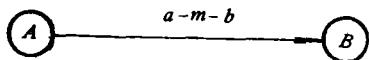


图 3

由于图 2 中任务 (A, B) 的各项作业具有不确定性,其工时为三时估计,所以图 3 的等价大作业 (A, B) 也具有不确定性,那么,如何得到大作业 (A, B) 的三时估计值呢?目前,有关文献中采用以下公式:

$$\left. \begin{aligned} m(A,B) &= \sum m(i,j) \\ a(A,B) &= \sum \frac{a(i,j)+b(i,j)}{2} - \sqrt{\sum \left[\frac{b(i,j)-a(i,j)}{2} \right]^2} \\ b(A,B) &= \sum \frac{a(i,j)+b(i,j)}{2} + \sqrt{\sum \left[\frac{b(i,j)-a(i,j)}{2} \right]^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这一组公式称为“流程图等效计算公式”。其中 \sum 均是 \sum_{CP} 的简写。第1个公式是人为的规定，故在等号上加 Δ 表示，由这个公式以及公式(4)、(5)共同推导出其他两个公式。然而这一组公式在实际应用中可能违背基本关系式(1)，请看下例。

例 设某工程施工的流程图如图4。图中，箭线上方的数字为该作业工时的三时估计值，箭线下方的数字为该作业工时的平均值，按公式(2)计算得到，结点旁边用方框框起的数字为该结点的最早可能开始时间 $T_E(i)$ ，在这里，令 $T_E(1)=0$ ；用三角形框起的数字为结点的最迟必须完成时间 $T_L(j)$ ，这里，令 $T_L(7)=T_E(7)=19$ ；紧急路线用双线表示： $CP=(1,2,5,7)$ 。

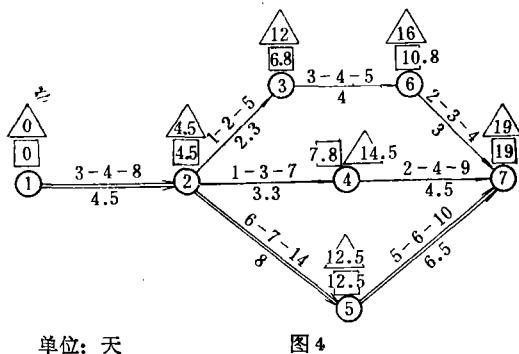


图4

由公式(4)、(3)、(5)算得图4所示任务(1,7)的总工期与方差： $T_E(1,7)=19$ (天)； $\sigma(1,7)=\sqrt{3.2}=1.8$ (天)。

按公式组(6)算得： $m(1,7)=17$ ； $a(1,7)=23-\sqrt{28.5}\approx 17.7$ ； $b(1,7)=23+\sqrt{28.5}\approx 28.3$ 。

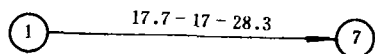


图5

于是，图4所示任务(1,7)等效化为图5所示的大作业(1,7)。这里出现了 $m < a$ 的现象，这在实际应用中是不合情理的。

二、症结何在

分析这种现象产生的原因，在于公式组(6)中首先令 $m(A,B)=\sum m(i,j)$ 所致。

我们认为，对于每一项作业 (i,j) 而言，根据公式(2)计算得到的 $t_e(i,j)$ ，应该比 $m(i,j)$ 更合理、更可信，因为前者是充分利用了三时估计的信息，经过加权平均而得到的。在公式(2)中， $m(i,j)$ 的权是相当大的。接着，把由公式(4)所算得的 $T_E(A,B)$ 作为任务 (A,B) 的总工期也是合理的。

但是，在公式组(6)中却简单地令 $m(A,B)=\sum m(i,j)$ ，没有利用 $t_e(i,j)$ ，也没有利用信息 $a(i,j)$ 与 $b(i,j)$ 。在此后推导 $a(A,B)$ 及 $b(A,B)$ 的过程中，利用了公式(4)、(5)，从而利用了信息 $a(i,j)$ 与 $b(i,j)$ 。就是说，在公式组(6)的三个公式的推导过程中，先后利用的信息量是不一致的。这样，就出现了 $m < a$ 的现象。

三、新的等效计算公式

下面推导一组新的等效计算公式并加以验证。

$$1. \quad \text{令 } m(A,B) = T_E(A,B) \quad (7)$$

其中 $T_E(A, B)$ 由公式(4)得到, 而公式(4)中的 t_{ij} 是由公式(2)得到, 从而这样规定的 $m(A, B)$ 利用了紧急路线上每一项作业 (i, j) 的全部信息。

2. 根据公式(2)、(3), 对于大作业 (A, B) 有:

$$T_E(A, B) = \frac{a(A, B) + 4m(A, B) + b(A, B)}{6} \quad (8)$$

$$\sigma^2(A, B) = \left[\frac{b(A, B) - a(A, B)}{6} \right]^2 \quad (9)$$

或
$$\sigma(A, B) = \frac{b(A, B) - a(A, B)}{6} \quad (10)$$

将(7)式代入(8)式, 整理可得:

$$2T_E(A, B) = a(A, B) + b(A, B) \quad (11)$$

我们现在的目的是求出 $a(A, B)$ 与 $b(A, B)$ 。在先行计算中, 我们可以根据公式(4)与(5), 求得 $T_E(A, B)$ 与 $\sigma(A, B)$ 。所以, 将方程(10)与(11)联立, 其中 $T_E(A, B)$ 与 $\sigma(A, B)$ 作为已知数, $a(A, B)$ 与 $b(A, B)$ 作为未知数, 求解得到:

$$a(A, B) = T_E(A, B) - 3\sigma(A, B) \quad (12)$$

$$b(A, B) = T_E(A, B) + 3\sigma(A, B) \quad (13)$$

3. 以上(7)、(12)、(13)三式即为对于大作业 (A, B) 进行三时估计的一组新的等效计算公式, 合并记为公式组(14):

$$\left. \begin{aligned} m(A, B) &= T_E(A, B) \\ a(A, B) &= T_E(A, B) - 3\sigma(A, B) \\ b(A, B) &= T_E(A, B) + 3\sigma(A, B) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其右端的 $T_E(A, B)$ 与 $\sigma(A, B)$ 分别根据公式(4)与(5)计算, 在进行等效计算之前已经获得。公式组(14)结构简单、整齐, 容易记忆。

4. 任务 (A, B) 的实际总工期 T 近似符合于以 $T_E(A, B)$ 为平均值, 以 $\sigma(A, B)$ 为标准偏差的正态分布^[1], 故

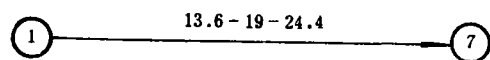


图6

$$\begin{aligned} P\{T_E(A, B) \pm 3\sigma(A, B)\} &= 99.7\% \\ P\{T \leq T_E(A, B) + 3\sigma(A, B)\} \\ &= 99.87\% \approx 1 \end{aligned} \quad (15)$$

由此可以验证, 按公式组(14)算得的大作业 (A, B) 的三时估计是合理的。

5. 用公式组(14)对前例作等效计算:

$$m(1, 7) = 19 \text{ (天)};$$

$$a(1, 7) = 19 - 3 \times 1.8 = 13.6 \text{ (天)};$$

$$b(1, 7) = 19 + 3 \times 1.8 = 24.4 \text{ (天)}。$$

即在一级流程图中, 分任务 $(1, 7)$ 可以等效化为大作业 $(1, 7)$ 如图6。

附记: 本文是我们的教学体会, 很多同志为揭露矛盾起了积极的作用, 谨在此致意。

参 考 文 献

- [1] 华罗庚, 统筹方法平话及补充, 中国工业出版社, 1965年7月。
- [2] 陶家渠, 计划协调技术, 中国科协普及部, 系统工程普及讲座汇编(上), 1980年。
- [3] Wiest, J. D. and Levy, F. K., A Management Guide to PERT/CPM, With GERT/PDM/DCPM and Other Networks, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., 1977.