高等数学 300 题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ________.

答案：$\dfrac{6}{5}$

难度等级：1； 知识点：等价无穷小的替换,有理分式函数的极限

分析：由于当 $x\to\infty$ 时,$\sin\dfrac{2}{x}\sim\dfrac{2}{x}$,于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2+5)\cdot 2}{(5x+3)\cdot x}=\dfrac{6}{5}$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{2}} & x\le 0 \\ \left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}} & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

答案：2

难度等级：1； 知识点：连续函数定义

分析：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,由连续定义知 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$,而

$f(0-0)=e^{\frac{1}{2}}$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}=e^{\frac{1}{a}}$ ，因此 $e^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{a}}$.

解得 $a=2$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}\cdots2^{2^{-n}}\right)=$ ________.

答案：2

难度等级：1； 知识点：数列极限的计算

分析：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}\cdots2^{2^{-n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2.$

4. $y=e^{\frac{1}{x}}+5$ 的水平渐近线为 ________.

答案：$y=6$.

难度等级：1；　知识点：水平渐近线的定义

分析：由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+5\right)=6$，知水平渐近线为 $y=6$

5. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x=$____________.

答案：$\frac{1}{2}$

难度等级：1；　知识点：等价无穷小的替换

分析：$\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

6. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}$ 存在，则 $f(2)=$____________.

答案：3

难度等级：2；　知识点：函数极限的四则运算法则，连续函数的定义

分析：由 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}$ 存在，得到 $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-3)=0$，从而 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$，另一方面，由于 $f(x)$ 在 $x=2$ 连续，于是 $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$.

7. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$

高阶的无穷小，则正整数 $n=$ __2______.

答案：2

难度等级：2；　知识点：等价无穷小，高阶无穷小的定义

分析：当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^4$，$x\sin x^n\sim x^{n+1}$，$e^{x^2}-1\sim x^2$，故由题意知 $n+1=3\Rightarrow n=2$

8. 当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$____________.

答案：$-\dfrac{3}{2}$

难度等级：2; 知识点：等价无穷小的定义,等价无穷小的替换

分析：由于当 $x\to 0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2$,$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,于是

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}a$,又 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,所以 $-\dfrac{2}{3}a=1$,解得 $a=-\dfrac{3}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$____________.

答案：e^6

难度等级：2; 知识点：两个重要极限

分析：$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6$

10. 设 $0<a<b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$____________.

答案：b

难度等级：2; 知识点：夹逼准则

分析：由于 $b<\sqrt[n]{a^n+b^n}<\sqrt[n]{2}b$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}b=b$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=b$

11. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=$____________.

答案：$\dfrac{1}{12}$

难度等级：2; 知识点：函数极限的四则运算法则

分析：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$ 知,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{f(3x)}=6$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{6}$,即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{2x}=\dfrac{1}{6}$,

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=\dfrac{1}{12}$

12. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的无穷间断点为____________.

答案： $x=2$

难度等级：2;　　知识点：无穷间断点的定义

分析：由于函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=1,2$ 且

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=-2,$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\infty$$,故函数的无穷间断点为 $x=2$.

13. $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\frac{1}{x^2}+\frac{\sin 2x}{x}\right)=$ ________.

答案：2

难度等级：2;　　知识点：无穷小的性质,第一个重要极限

分析： $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\frac{1}{x^2}+\frac{\sin 2x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\frac{1}{x^2}\right)+\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2=0+2=2$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ________.

答案： $\frac{1}{2}$

难度等级：2;　　知识点：夹逼准则

分析：由

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\frac{1}{2},\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$ 根据数列极限的夹逼准则知,所求数列极限为 $\frac{1}{2}$.

15. $\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$ ________.

答案： e^2

难度等级：3;　　知识点：第二个重要极限,等价无穷小

分析： $\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{2\ln(1+x)}{x}}=e^2$

16. 设 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-ax^2+3x-6}{x-2}=b$，则 $a=$____________，$b=$____________.

答案： $a=4,b=11$

难度等级：3;　　知识点：函数极限的四则运算法则

分析： 由 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-ax^2+3x-6}{x-2}=b$ 且 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$，有 $\lim\limits_{x\to2}(2x^3-ax^2+3x-6)=0$，

即　$16-4a+6-6=0$，故 $a=4$，代入极限式中

$$b=\lim_{x\to2}\frac{2x^3-4x^2+3x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2(x-2)+3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(2x^2+3)=11$$

17. 若 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$，则 $f(x)=$__________.

答案： $\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2$

难度等级：3;　　知识点：函数极限的计算

分析： 设 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=a$，则 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 两边求极限得： $a=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2a$，由此 $-a=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=-1$，即 $a=1$，所以 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-\pi}+2$

18. 设当 $x\to1^+$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小，则 $n=$__________.

答案： $\dfrac{3}{2}$

难度等级：3;　　知识点：同阶无穷小的定义,等价无穷小的替换

分析：

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x}{(x-1)^n}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\ln[1+(x-1)]}{(x-1)^n},$$

$$\underline{\underline{令u=x-1}}\lim_{u\to0^+}\frac{\sqrt{3u+4}\sqrt{u}\cdot\ln(1+u)}{u^n}=2\lim_{u\to0^+}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{u^n}$$

当 $n=\frac{3}{2}$ 时,其极限等于 2,故取 $n=\frac{3}{2}$

19. 曲线 $\begin{cases} x=\cos t+\sin^2 t \\ y=1+\cos t \end{cases}$ 上对应于 $t=\frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为__________.

答案：$\sqrt{2}-1$

难度等级：1;知识点：参数方程所确定的函数的求导,导数的几何应用.

分析 先利用参数方程所确定函数的求导法则求出导数,再求法线的斜率.

解 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{-\sin t}{-\sin t+2\sin t\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$,所求法线的斜率为 $\sqrt{2}-1$.

20. 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为__________.

答案：$y=x-1$

难度等级：1; **知识点**：导数的几何应用.

分析 先求函数的导数为 1 的点,再求切线方程.

解 直线 $x+y=1$ 的斜率为 -1,从而曲线的切线斜率为 1.由 $y'=\frac{1}{x}=1$,得 $x=1$,这时 $y=\ln 1=0$,即点 $(1,0)$ 处的切线与直线 $x+y=1$ 垂直,故所求切线方程为 $y=x-1$.

21. 已知 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=4$,则 $f'(x_0)=$__________.

答案：-2

难度等级：1; **知识点**：导数的定义.

分析 利用导数定义求出极限,再确定 $f'(x_0)$ 的值.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=-2\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}=-2f'(x_0)=4$,故 $f'(x_0)=-2$.

22. 已知 $f'(2)=6$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{2h}=$__________.

答案：-3

难度等级：1;　　　　**知识点：**导数的定义.

分析　利用导数定义求出极限.

解　$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{-h}=-\dfrac{1}{2}f'(2)=-\dfrac{1}{2}\cdot6=-3$.

24. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的法线方程为__________.

答案： $y-1=\dfrac{1}{2}x$

难度等级：2;　**知识点：**隐函数的求导,导数的几何应用.

分析　利用隐函数的求导法则先求出导数,再给出曲线的法线方程.

解　方程两边同时对 x 求导,得 $e^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0$,解之得 $y'=-\dfrac{2e^{2x+y}+y\sin(xy)}{e^{2x+y}+x\sin(xy)}$,所以 $y'|_{(0,1)}=-2$,法线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$,故法线方程为 $y-1=\dfrac{1}{2}x$.

25. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$__________.

答案： $\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}$

难度等级：2; **知识点：**参数方程所确定的函数的求导,高阶导数.

分析　利用由参数方程所确定的函数的求导法则逐阶求出二阶导数.

解　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\dfrac{1}{1+t}}=3t^2+5t+2$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{6t+5}{1-\dfrac{1}{1+t}}=\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}$.

26. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定,则 $dy|_{x=0}=$__________.

答案： $(\ln2-1)\,dx$

难度等级：2;

知识点：导数的四则运算,隐函数的求导,复合函数的求导,微分的定义.

分析　利用隐函数和复合函数的求导法则求出导数,再求微分.

解　方程两边同时对 x 求导,得 $2^{xy}\ln 2(y+xy')=1+y'$,解之得 $y'=\dfrac{1-2^{xy}y\ln 2}{2^{xy}x\ln 2-1}$,

当 $x=0$ 时 $y=1$,则 $y'|_{x=0}=\ln 2-1$,故 $\mathrm{d}y|_{x=0}=(\ln 2-1)\,\mathrm{d}x$.

27. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{3x}=$__________.

答案: $\dfrac{2}{3}f'(x_0)$

难度等级: 2; 知识点: 导数的定义,极限的四则运算.

分析　利用导数定义和极限的四则运算求出极限.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}\right].$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}$$
$$=\frac{1}{3}f'(x_0)+\frac{1}{3}f'(x_0)=\frac{2}{3}f'(x_0).$$

28. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导,且 $f'(x_0)\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$__________.

答案: $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$

难度等级: 2;　　　　知识点: 导数的定义,极限的四则运算.

分析　利用导数定义和极限的四则运算求出极限.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-2\cdot\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}+\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}}$$
$$=\frac{1}{-2f'(x_0)+f'(x_0)}=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

29. 设 $f'(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x-3h)}{h}=$__________.

答案: $5f'(x)$

难度等级: 2;　　知识点: 导数的定义,极限的四则运算.

分析　利用导数定义和极限的四则运算求出极限.

解
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-3h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[2\cdot\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+3\cdot\frac{f(x-3h)-f(x)}{-3h}\right].$$
$$=2f'(x)+3f'(x)=5f'(x).$$

30. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,且当 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 与 $(\tan\Delta x-2\cos\Delta x)\Delta x$ 是等价无穷小,则 $f'(x_0)=$______.

答案: -2

难度等级: 2; 知识点: 导数的定义,等价无穷小的定义,极限的四则运算.

分析 利用等价无穷小的定义、导数的定义和极限的运算法则求出 $f'(x_0)$.

解 由已知, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{(\tan\Delta x-2\cos\Delta x)\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\dfrac{1}{\tan\Delta x-2\cos\Delta x}\right]=1$,

即 $f'(x_0)\cdot\dfrac{1}{0-2}=1$,故 $f'(x_0)=-2$.

31. 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$,则 $y^{(n)}(0)=$______.

答案: $\dfrac{(-1)^n n!}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

难度等级: 3; 知识点: 间接法求高阶导数.

分析 利用 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ 间接求出 $y=\dfrac{1}{2x+3}$ 的 n 阶导数.

解 $y=\dfrac{1}{2x+3}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+\dfrac{3}{2}}$, 由 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ 可得 $y^{(n)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}}$,

所以 $y^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n n!}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

32. 设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$______.

答案: $-\pi\,\mathrm{d}x$

难度等级: 3;知识点: 对数求导法,导数的四则运算,复合函数的求导,微分的定义.

分析 利用对数求导法求出导数,再求微分.

解 两边取对数,有 $\ln y = x\ln(1+\sin x)$,方程两边同时对 x 求导,得

$$\frac{y'}{y}=\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x},\ y'=(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}\right],$$

$$y'|_{x=\pi}=-\pi,\text{故 } \mathrm{d}y|_{x=\pi}=-\pi\,\mathrm{d}x.$$

32. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$,则 $f'(2)=$__________.

答案：3

难度等级：3; 知识点： 连续的定义,导数的定义,极限的四则运算.

分析 由 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$ 和函数在 $x=2$ 处连续,求出 $f(2)$ 的值,再用导数定义求出 $f'(2)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$,而 $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{f(x)}{x-2}\cdot(x-2)\right)=0$.

又因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,由连续的定义有, $f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$.

故 $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$.

32. 设 $f(0)=0$, $f'(0)=1$,则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{\sin x^2}=$__________.

答案：$\frac{1}{2}$

难度等级：3;知识点： 导数的定义,极限的四则运算,等价无穷小.

分析 利用导数定义、极限的四则运算和等价无穷小的替换求出极限.

解 当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\to0$,且 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$\sin x^2\sim x^2$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)}{\sin x^2}=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}.$$

33. 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\frac{x+t}{x-t}\right)^x$,则 $f'(t)=$__________.

答案：$(1+2t)e^{2t}$

难度等级：3;

知识点：极限的运算法则,重要极限,导数的四则运算,复合函数的求导.

分析 先利用极限的运算法则和重要极限求出函数的表达式,再利用导数的四则运算法则和复合函数的求导法则求出函数的导数.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-t+2t}{x-t}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\dfrac{2t}{x-t}\right)^{\frac{x-t}{2t}}\right]^{2t}\cdot\left(1+\dfrac{2t}{x-t}\right)^t\right\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2t}{x-t}\right)^{\frac{x-t}{2t}}\right]^{2t}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2t}{x-t}\right)^t=e^{2t}\cdot 1=e^{2t}$,所以 $f(t)=t\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x=te^{2t}$,

故 $f'(t)=e^{2t}+te^{2t}\cdot 2=(1+2t)e^{2t}$.

34. 设曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=x^3-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)=$________.

答案： -4

难度等级：3;

知识点：导数的运算法则,导数的几何应用,可导与连续的关系,连续的定义,导数的定义,极限的运算法则.

分析 由于两曲线在 $(1,0)$ 处有公共切线,所以两个函数在 $x=1$ 处的导数值相等,且 $f(1)=0$. 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,从而连续,再用导数的定义、极限的运算法则和连续的定义确定极限值.

解 因为曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=x^3-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线,所以有

$$f'(1)=\left(x^3-x\right)'\Big|_{x=1}=(3x^2-1)\Big|_{x=1}=2,\ \text{且}\ f(1)=0,$$

由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,从而连续,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(1-\dfrac{2}{n+3}\right)=f(1)=0$. 故

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{n+1}{n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[(n+3)f\left(1-\frac{2}{n+3}\right)-3f\left(1-\frac{2}{n+3}\right)\right]$$

$$=-2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{n+3}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+3}}-3\lim_{n\to\infty} f\left(1-\frac{2}{n+3}\right)$$

$$=-2f'(1)-3f(1)=-4.$$

35. 设 函 数 $y=f(x)$ 由 方 程 $x^2+y-1=e^{xy}$ 所 确 定 ， 则 $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-2\right]=$____________.

答案： 4

难度等级：3; **知识点：** 隐函数的导数,导数的定义.

分析 观察易知 $f(0)=2$,将所求极限变形为 $2\lim_{n\to\infty}\frac{\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right]}{\frac{2}{n}}$,即需求 $f'(0)$.利用隐函数的求导法则求出 $f'(x)$,再求出 $f'(0)$.

解 将 $x=0$ 代入方程得, $f(0)=2$.方程 $x^2+y-1=e^{xy}$ 两边对 x 求导,有 $2x+y'=e^{xy}(y+xy')$,解之得

$$y'=\frac{ye^{xy}-2x}{1-xe^{xy}},\qquad f'(0)=\left.\frac{ye^{xy}-2x}{1-xe^{xy}}\right|_{(0,2)}=2.$$

所以 $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-2\right]=2\lim_{n\to\infty}\frac{\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right]}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2\cdot 2=4$.

36. 函数 $x^{\frac{1}{x}}$ 的极值点为________.

答案： $x=e$

难度等级：1;知识点：导数应用（极值）.

分析 令 $y=x^{\frac{1}{x}}, y'=x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

$1<x<e, y'>0; x>e, y'<0;$

$x=e$ 是 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的最大值点.

37. 曲线 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在点 $(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ 的曲率为______.

答案： $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

难度等级：1;知识点：导数应用（曲率）.

分析 曲线曲率由公式 $k=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ 确定,只需求出公式中对应的项即可.

令 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$y'=\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y''=\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$;

代入曲率公式 $k=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$,得 $k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

38. 曲线 $\sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 的曲率为________.

答案： 1

难度等级：1;知识点：导数应用（曲率）.

分析 曲率由公式 $k=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ 确定,求出公式中对应的项即可.

解： 令 $y=\sin x$，$y'=\cos x, y''=-\sin x$;

代入曲率公式 $k=\frac{|y''|}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$,得 $k=1$.

39. 曲线 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点为________.

答案： $x=\pm 1$

难度等级：1;知识点：导数应用（凹凸）.

分析 曲线拐点取决于二阶导数反号的点.

$$f'=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},f''=\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$$

显然,$x=\pm1$为拐点.

40. 曲线$\frac{6}{x}+x$的单增区间为________.（难度等级 1）导数的应用：单调

答案： $|x|<\sqrt{6}$

难度等级：1;知识点：导数应用（单调）.

分析 曲线单调性要看一阶导数的符号.

$y'=-\frac{6}{x^2}+1,|x|<\sqrt{6},y'<0;$为单减区间.

41. 极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{\ln\left(1+x^3\right)}=$________.

答案： $-\frac{1}{6}$

难度等级：1;知识点：导数应用（洛必达）.

分析 $\frac{0}{0}$型重要极限,用洛必达法则.

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$

42. 极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{e^{x^3}-1}=$________.

答案： $\frac{1}{3}$

难度等级：1;知识点：导数应用（洛必达）.

分析 $\frac{0}{0}$型重要极限,用洛必达法则.

原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$

$=\frac{1}{3}$

43. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{\sin^3 x}=$______.

答案： 0

难度等级：2;知识点：导数应用（洛必达）.

分析 $\frac{0}{0}$ 型重要极限,可用洛必达法则,也可利用函数的泰勒公式恒等变形化简.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}{x^3}=0$$

44. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{\left(e^x-1\right)\sin x^2}=$______.

答案： 0

难度等级：2;知识点：导数应用（洛必达）.

分析 $\frac{0}{0}$ 型重要极限,可用洛必达法则,也可利用函数的泰勒公式恒等变形化简.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{(e^x-1)\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}}{x\bullet x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}{x^3}=0$$

45. 曲线 $\begin{cases}x=\tan t\\ y=\sin t\cos t\end{cases}$ 的拐点为_______.

答案： $x=0,x=\pm\sqrt{3}$

难度等级：2;知识点：导数应用（凹凸）.

分析 曲线拐点取决于二阶导数反号的点.

可转化成显函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2},\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x\left(1+x^2\right)(x^2-3)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

显然,$x=0,x=\pm\sqrt{3}$ 都是拐点.

46. 数列 $\left\{\sqrt[n]{2n}\right\}$ 的最大项为________.

答案： $\sqrt[2]{2}$

难度等级：2;知识点：导数应用（最值）.

分析 将数列的问题转化成函数,对于函数就可以微分,从而由导数的性质推导出函数本身的性质.

令$y=\left(2x\right)^{\frac{1}{x}},y'=\left(2x\right)^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(1-\ln 2x)$

$0<x<\frac{e}{2},y'>0;x>\frac{e}{2},y'<0;$

$x=\frac{e}{2}$ 是 $y=\left(2x\right)^{\frac{1}{x}}$ 的最大值点,再比较 $\sqrt[1]{1}$ 与 $\sqrt[2]{2}$,知 $\left\{\sqrt[n]{2n}\right\}$ 最大项为 $\sqrt[2]{2}$

47. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+3}-\sqrt[4]{x^4-4x}=$_______.

答案： 0

难度等级：3;知识点：导数应用（泰勒公式）.

分析 $\infty-\infty$型重要极限,可用泰勒公式变形化简.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+3}-\sqrt[4]{x^4-4x}=\lim_{x\to\infty}x\left[(1+\frac{3}{x^3})^{\frac{1}{3}}-(1-\frac{4}{x^3})^{\frac{1}{4}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[1+\frac{1}{3}\bullet\frac{3}{x^3}+o(\frac{3}{x^3})-1+\frac{1}{4}\bullet\frac{4}{x^3}+o(\frac{4}{x^3})\right]=0$$

48. **不定积分** $\int\sin xe^{\cos x}dx=$______

答案： $-e^{\cos x}+c$

难度等级：1 知识点：凑微分

分析： $\int\sin xe^{\cos x}dx=-\int e^{\cos x}d\cos x=-e^{\cos x}+c$

49.不定积分$\int\frac{3x^2}{x^2+2x+2}dx=$________

答案：$3x-3\ln\left(x^2+2x+2\right)+c$

难度等级：2;知识点：基本函数（有理）积分

分析 $\int\frac{3x^2}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{3(x^2+2x+2)-6x-6}{x^2+2x+2}dx$

$=3x-\int\frac{3}{x^2+2x+2}d\left(x^2+2x+2\right)$

$=3x-3\ln\left(x^2+2x+2\right)+c$

50.不定积分$\int\frac{x}{x^3+1}dx=$________

答案：$=\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}-\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|+c$

难度等级：2;知识点：基本函数（有理）积分

分析 有有理函数都可唯一分解成部分分式的和.

$\int\frac{x}{x^3+1}dx=\int\frac{x+1-1}{x^3+1}dx=\int\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}-\frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx$

$=\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}-\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|+c$

51.不定积分$\int\frac{1}{x(1+x^6)}dx=$________

答案：$\frac{1}{6}\ln\frac{x^6}{(1+x^6)}+c$

难度等级：2;知识点：基本函数（有理）积分

分析：可以直接拆开,也可恒等变形.

$$\int \frac{1}{x(1+x^6)}dx = \int \frac{x^5}{x^6(1+x^6)}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x^6} - \frac{1}{1+x^6}dx^6 = \frac{1}{6}\ln\frac{x^6}{(1+x^6)} + c$$

52. 不定积分 $\int (\sin 2x\cos 3x)^2 dx =$______

答案：$\frac{x}{4} - \frac{\sin 10x}{80} + \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\sin 2x}{16} + c$

难度等级：2;知识点：三角函数积分

分析：通过积化和差再降次,将被积函数化简.

$$\int (\sin 2x\cos 3x)^2 dx = \int \left(\frac{\sin 5x + \sin(-x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 5x - 2\sin x\sin 5x + \sin^2 x}{4} dx$$

$$= \int \frac{\frac{1-\cos 10x}{2} - \cos 6x - \cos 4x + \frac{1-\cos 2x}{2}}{4} dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 10x}{80} + \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\sin 2x}{16} + c$$

53. 不定积分 $\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} dx=$______

答案：$\frac{\sin x}{x} + c$

难度等级：3;知识点：

分析：被积分函数即包含幂函数又有三角函数,其原函数必定是此二函数的某种组合,猜测出 $\frac{\sin x}{x} + c$

54. 不定积分 $\int \frac{e^x(x-1)}{x^2} dx=$______

答案：$\frac{e^x}{x} + c$

难度等级：3;知识点：

分析：被积分函数即包含幂函数又有指数函数,其原函数必定是此二函数的某种组合,猜测出 $\frac{e^x}{x} + c$

55. 不定积分$\int \frac{x\sin x+\cos x}{x^2}dx$=______

答案：$-\frac{\cos x}{x}+c$

难度等级：3;知识点：

分析：被积分函数即包含幂函数又有三角函数,其原函数必定是此二函数的某种组合,猜测出$-\frac{\cos x}{x}+c$

56. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sin t dt=$______.

答案：　$2x\sin x^2$

难度等级：1 ;知识点：　变上限积分函数求导.

分析　$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sin t dt=(x^2)'\sin x^2=2x\sin x^2$

57. $\int_{-1}^{3}|2-x|dx=$______.

答案：　5

难度等级：1 ;知识点：定积分计算,积分区间可加性 .

分析　$\int_{-1}^{3}|2-x|dx=\int_{-1}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{3}(x-2)dx=5$

58. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-x^2}dx}{x^2}=$______.

答案：　$\frac{1}{2e}$

难度等级：1 ;知识点：变上限积分求导,洛必达法则 .

分析　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-x^2}dx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\sin x}{2x}=\frac{1}{2e}$

59. 已知函数 $f(x)=\int_{x^2}^{c}\frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt\quad(x>0,c>0)$,则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$______.

答案：　$-\frac{4}{\pi}$

难度等级：1 ;知识点：　变上限积分求导.

分析 $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{x^2}\cdot 2x=-\dfrac{2\sin x}{x}$, $f'(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{4}{\pi}$

60. 设函数参数方程为 $\begin{cases} x=\int_0^{t^2}\sin u du \\ y=\int_0^{t^2}\cos u du \end{cases}$,则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

答案： $\cot t$

难度等级：1;知识点： 变上限积分函数求导,参数方程求导 .

分析 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{\sin t}=\cot t$

61. 连续曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a, x=b$，及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周而成的立体的体积 $v=$__________.

答案： $\pi\int_a^b f^2(x)dx$

难度等级：1;知识点：定积分应用,旋转体体积 .

分析

62. 连续曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a, x=b$，及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转一周而成的立体的体积 $v=$__________.

答案： $2\pi\int_a^b xf(x)dx$

难度等级：1;知识点：定积分应用,旋转体体积.

63. 已知 $\int_0^x f(\sqrt{t})\mathrm{d}t=5x^3$,则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ __________ .

答案： 3

难度等级：1;知识点： 变上限积分求导.

分析 $\int_0^x f(\sqrt{t})\mathrm{d}t=5x^3$，（变上限积分求导）两边对求导,得 $f(\sqrt{x})=15x^2$, $f(x)=15x^4$,积分得 $\int_0^1 15x^2dx=3$

64. 若 $f(x)$ 在[-2,2]上连续,则 $\int_{-2}^{2}[f(x)-f(-x)]dx=$_______.

答案：0

难度等级：1;知识点：对称函数定积分性质.

分析 $f(x)-f(-x)$是奇函数

65. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx =$____.

答案：$\frac{1}{2}$

难度等级：1;知识点：广义积分计算 .

分析 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}[e^{-x^2}]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$

66. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx =$____.

答案：1

难度等级：1;知识点：广义积分计算,换元法 .

分析 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 x}d\ln x = [-\frac{1}{\ln x}]_e^{+\infty} = 1$

67. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^2 dt & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$,在 $x=0$ 处连续,则 $a=$____.

答案：$\frac{1}{3}$

难度等级：1;知识点：变上限积分函数求导,洛必达法则,连续定义 .

分析 由连续定义,$a = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^2 dt = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3x^2}\sin x^2 = \frac{1}{3}$

68. $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}dx =$____.

答案：$\frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$

难度等级：1 ;知识点：定积分计算,换元法 .

分析

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int_1^2 e^{\frac{1}{x^2}} d(\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{2}[e^{\frac{1}{x^2}}]_1^2 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$$

69. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2)du \end{cases}$,则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} =$ ____ .

答案： 0

难度等级：1 ;知识点：变上限积分求导,参数方程求导.

70. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ ________ .

答案： $\frac{\pi}{3}$

难度等级：1 ;知识点：对称函数定积分计算 .

分析

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 0 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2[\arcsin x]_0^{1/2} = \frac{\pi}{3}$$

71. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\frac{i}{n}}$ 可以用定积分表示为 ________.

答案： $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$

难度等级：1 ;知识点：定积分定义 .

分析

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$

72. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}=$________.

答案： $\dfrac{1}{2e}$

难度等级：1;知识点：变上限积分求导,洛必达法则 .

分析

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2e}$$

73. 已知 $f(t)\in C_1$, $f(1)=0$ 且 $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$,则 $f(e)=$________.

答案： $\dfrac{1}{3}$

难度等级：1;知识点： 定积分计算,变上限积分求导.

分析 解法 1：

$$\ln x=\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x^3)-f(1)=f(x^3)$$

$$令u=x^3,得\ f(u)=\ln\sqrt[3]{u}=\tfrac{1}{3}\ln u\Rightarrow f(e)=\tfrac{1}{3}$$

解法 2：对一直等式两边求导,得 $3x^2 f'(x^3)=\frac{1}{x}$

$$令u=x^3,得\ f'(u)=\tfrac{1}{3u}$$

$$\therefore\quad f(e)=\int_1^{e} f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)=\tfrac{1}{3}\int_1^{e}\tfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\tfrac{1}{3}$$

74. 已知 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 则 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x=$

________.

答案：2

难度等级：1;知识点： 定积分计算,分部积分法

分析

$$\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)=\frac{1}{2}\left[\left. x f'(2x)\right|_0^1-\int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\left. f(2x)\right|_0^1=2$$

75. 函数 $F(x)=\int_1^x (2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt,(x>0)$ 的单调减少区间为________.

答案： $(0,\frac{1}{4})$

难度等级： 1;知识点：变上限积分函数求导,函数单调性 .

分析 　**等式** $F(x)=\int_1^x (2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt$,两边对 x 求导,得 $F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$,

令 $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}<0$,可得 $x\in(0,\frac{1}{4})$

76. 已知曲线 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$,则曲线在点 $(0,0)$ 处的切线方程________.

答案： $y=x$

难度等级：1;知识点：变上限积分函数求导 .

分析 　$y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$,两边对 x 求导,得 $y'=\frac{1}{1+x^2}e^{-(\arctan x)^2}$，**得** $y'|_0=1$.**所以所求切线方程为** $y=x$

77. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数, $f(a)=f(b)=0$,且 $\int_a^b [f(x)]^2dx=1$,则 $\int_a^b xf(x)f'(x)dx=$________.

答案： $-\frac{1}{2}$

难度等级： 1;知识点：定积分计算,分部积分 .

分析

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b xd[f(x)]^2=\frac{1}{2}\left[xf^2(x)|_a^b-\int_a^b f^2(x)dx\right]=-\frac{1}{2}$$

78. 曲线 $y=\frac{2}{x^2+1},y=x^2$ 所围成的图形的面积为________.

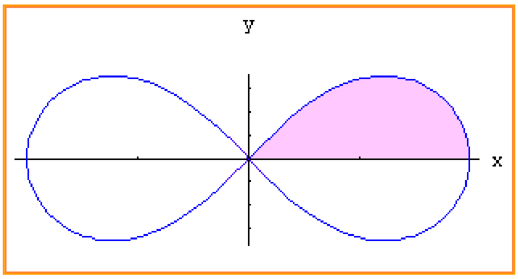
答案： $\pi-\frac{2}{3}$

难度等级：2;知识点：定积分应用,求面积 .

分析 联立两曲线方程解得交点（-1,1），（1,1）

$$A=\int_{-1}^{1}(\frac{2}{x^2+1}-x^2)dx=(2\arctan x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1}=\pi-\frac{2}{3}$$

79. 求双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 所围平面图形的面积.为 ________.



答案： a^2.

难度等级：2;知识点：定积分应用,求面积.（极坐标）

分析 $A=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta d\theta=a^2$.

80. 星形线参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi,a>0)$，则星形线全长为 ________.

答案： $6a$

难度等级：2;知识点：定积分应用,求弧长（参数方程）. .

分析

$$s=4s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos tdt=6a.$$

81. 已知星形线为 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi,a>0)$，则它围成的面积为 ________.

答案： $\frac{3}{8}\pi a^2$

难度等级：2;知识点：定积分应用,求面积（参数方程）.

分析

设面积为 A,由于对称性,有

$$A=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2[\sin^4 t-\sin^6 t]dt=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

82. 已知星形线为 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi,a>0)$,则它绕轴旋转而成的旋转体的体积为 ________.

答案： $\frac{32}{105}\pi a^3.$

难度等级：2;知识点： 定积分应用,旋转体体积（参数方程）.

分析

设旋转体的体积为 V,由对称性

$$V=2\int_0^a \pi y^2dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$

$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t(1-\sin^2 t)dt=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

83. 已知星形线为 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi,a>0)$,则它绕轴旋转而成的旋转体的表面积为 ________.

答案： $\frac{12}{5}\pi a^2$

难度等级：2;知识点：定积分应用,旋转体表面积（参数方程） .

分析

设旋转体的表面积为 S,由对称性

$$S=2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y_x'^2}dx$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\cos t\sin tdt=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

84. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})=$ ________.

答案：$\frac{\pi}{4}$

难度等级：2;知识点：定积分定义,求极限 .

分析

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

85. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}})=$ ________.

答案：$\frac{1}{\ln 2}$

难度等级：3;知识点：定积分定义,求极限 ,夹逼准则.

分析

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\le\text{原式}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}$$

$$\text{左边}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}=\text{右边}$$

86. 位于曲线 $y=xe^{-x}(8\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是___ .

答案：$9e^{-8}$

难度等级：2;知识点：定积分应用（求面积）,广义积分计算 .

分析　面积 $s=\int_8^{+\infty}xe^{-x}dx=[-xe^{-x}]_8^{+\infty}-\int_8^{+\infty}-e^{-x}dx=9e^{-8}$

87. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ 可以用定积分表示为________.

答案：$\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$

难度等级：2;知识点：定积分定义 .

分析

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$$

88. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$可以用定积分表示为 ________.

答案： $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x$

难度等级：2;知识点：定积分定义 .

分析

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\pi\cdot\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x$$

89. $I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}+\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right]$ 可以用定积分表示为

________.

答案： $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$

难度等级：2;知识点：定积分定义 .

分析

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}-\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right]+\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}-0+0\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

90. 已知极限 $\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}=c\ (c\neq0)$，则 $a=$ ________ , $b=$ ________ , $c=$

________.

答案： $a=1,b=0,c=\frac{1}{2}$.

难度等级：2;知识点：变上限积分求导,洛必达法则.

分析

$\because\ x\to 0$时$,ax-\sin x\to 0,c\neq 0,\therefore\ b=0.$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{x^2}=c$，

$c\neq 0$,故$a=1$.又由$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，得$c=\frac{1}{2}$

91. 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2\pi}f(\dfrac{t}{2})dt+\ln 2$,则 $f(x)$ 等于 ________.

答案： $\dfrac{\ln 2}{1-2\pi}$

难度等级：2;知识点：定积分定义,计算,换元法 .

分析 $f(x)=2\int_0^{\pi}f(x)dx+\ln 2$,令$\int_0^{\pi}f(x)dx=a$,则 $f(x)=2a+\ln 2$,

两边在$[0,\pi]$上积分,得$a=\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}2adx+\ln 2\int_0^{\pi}1dx$,即得

$a=2a\pi+\pi\ln 2$,从而 $f(x)=\dfrac{\ln 2}{1-2\pi}$

92. 曲线$y=\int_0^{x}\tan tdt\quad(0\le x\le\dfrac{\pi}{4})$的弧长为 ________.

答案： $\ln(\sqrt{2}+1)$

难度等级： 2;知识点：定积分应用,求弧长 .

分析　弧长公式为$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$,所以所求弧长为

$$s=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\tan^2 x}dx$$
$$=\int_0^{\pi/4}\sec xdx=\left(\ln|\mathrm{sec}x+\tan x|\right)_0^{\pi/4}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

93. 求数列极限： $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})=$ ________.

答案： $\dfrac{3}{4}$

难度等级：2 ;知识点：定积分的概念 .

分析　利用定积分求该极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})$$
$$=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{2}{n}})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}$$

94. 设函数 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，则 $\int_0^1 xf(x)dt=$________.

答案： $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-1}-1)$

难度等级： 2;知识点：变上限积分函数求导,定积分计算,分部积分 .

分析

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\right]\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x^3e^{-x^4}dx=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-1}-1)$$

95. 求数列极限： $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+1)\cdots 2n}=$________.

答案： $\frac{3}{4}$

难度等级：3 ;知识点：定积分的概念 .

分析 这是一个“无穷多个”因子连乘形式的极限问题.利用对数性质,通过“取对数”可以将乘法运算变为加法运算,从而将连乘形式的极限变为积分和式极限,再利用定积分求该极限.

令 $u_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+1)\cdots 2n}$,取对数,得

$$\ln u_n=\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}=\frac{1}{n}\cdot\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right]$$

这恰好是函数 $\ln(1+x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分和式,故

$$\lim_{n\to\infty}\ln u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right]$$
$$=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$$

96. 求定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x=$ ________..

答案： $\ln(2+\sqrt{3})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

难度等级：3;知识点：定积分计算,换元法,积分公式 .

分析

令$e^{-x}=\sin t$,则$x=-\ln\sin t$,$\mathrm{d}x=-\dfrac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$,

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc t-\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=[\ln\left|\csc t-\cot t\right|+\cos t]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

97. 若可微函数 $f(x)$ 满足 $f^2(x)=\int_0^x f(t)\dfrac{\sin t}{2+\cos t}\mathrm{d}t$,则 $f(x)=$ ________.

答案： $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2+\cos x}$

难度等级：3;知识点：变上限积分函数求导,换元法 .

分析

解:等式两边对x求导,得

$$2f(x)f'(x)=f(x)\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

不妨设$f(x)\neq 0$,则$f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+C$$

注意$f(0)=0$,得$C=\dfrac{1}{2}\ln 3$,

$$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2+\cos x}$$

98. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ k, & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x}-1, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求常数 k 的值

难度等级：2;**知识点：** 分段函数分界点的连续性问题.

分析 分段函数分界点的连续性问题,可以直接利用连续的定义.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}(x\sin\dfrac{1}{x})=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{\sin x}{x}-1)=0$, $f(0)=k$,所以当 $k=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

99. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-x}$ 的间断点,并说明是哪类间断点.

难度等级：2;**知识点：** 间断点的类型.

分析 判断间断点的类型,只需直接利用间断点的定义.

解 $f(x)$ 的间断点为 $x=0,1$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x(x-1)}=-1$,所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点;

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x}{x^2-x}=\infty$,故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类（无穷）间断点.

100. 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$ 的间断点,并说明是哪类间断点.

难度等级：2;**知识点：** 间断点的类型.

分析 判断间断点的类型,只需直接利用间断点的定义.

解 $f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z$

由于 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=0$,所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z$ 为 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点.

又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$,所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点.

当 $k\neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty$,所以 $x=k\pi, k\in Z$ 为 $f(x)$ 的第二类（无穷）间

断点.

101.　求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点,并说明是哪类间断点.

难度等级：2;知识点： 间断点的类型.

分析 判断间断点的类型,只需直接利用间断点的定义.

解 $x=0$, $x=1$ 与 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x-1)}{-x(x-1)(x+1)}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=1$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类（跳跃）间断点

因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}$,所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点;

又因为 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第二类（无穷）间断点.

102.　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\sin^2 x+b\cos x+2}{3x^2}, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ c+x, & x>0.\end{cases}$,试确定 a, b, c 的值,使函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

难度等级：2;知识点： 间断点的类型.

分析 这是确定分段函数中的待定系数,使分段函数在分段点连续的问题,主要方法是根据函数在该点的左极限和右极限都存在,并且都等于函数在该点的函数值(即函数在该点既左连续又右连续),从而确定出待定系数的值.

解 欲使函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,需

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\sin^2 x+b\cos x+2}{3x^2}=2,$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}3x^2=0$,所以必有 $\lim\limits_{x\to 0}\left(a\sin^2 x+b\cos x+2\right)=0$,即 $b+2=0$,故 $b=-2$.

将 $b=-2$ 代入 $f(x)$ 中,有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\sin^2 x-2\cos x+2}{3x^2}=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{a\sin^2 x}{3x^2}+\frac{2(1-\cos x)}{3x^2}\right]$$

$$=\frac{a}{3}+\lim_{x\to 0^-}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{a}{3}+\frac{1}{3}=\frac{a+1}{3}=2,$$

由此可得 $a=5$. 故当 $a=5,b=-2$ 时,函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处左连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(c+x)=c=2$. 故当 $c=2$ 时,函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处右连续.

综上可知,当 $a=5,b=-2,c=2$ 时,函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

103. 计算极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$,其中 $a>0$,$b>0$

难度等级：3;知识点： 1^∞ 型数列的极限、重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a$.

分析 1^∞ 型数列的极限,应转化为重要极限来处理.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n}\ln a=\ln a$,

同理 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{b}-1\right)=\ln b$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}n\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}}\right]^{\frac{1}{2}n\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2\right)}=e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}\ .$$

104.　设 $x_1=a,x_2=b,x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2},n=1,2,3,\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

难度等级：3;知识点： 递推数列的极限.

分析 本问题的关键在于求出递推数列的通项公式.

解　$x_{n+2}-x_{n+1}=-\dfrac{x_{n+1}-x_n}{2}$,分别令 $n=1,2,3,\cdots$,得

$$x_3-x_2=-\frac{x_2-x_1}{2}=-\frac{b-a}{2},$$

$$x_4-x_3=-\frac{x_3-x_2}{2}=\frac{b-a}{2^2},$$

$$x_5-x_4=-\frac{x_4-x_3}{2}=-\frac{b-a}{2^3},$$

$$\vdots$$

$$x_n-x_{n-1}=(-1)^n\frac{b-a}{2^{n-2}},$$

所以

$$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$$

$$=a+(b-a)+\left(-\frac{b-a}{2}\right)+\frac{b-a}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{b-a}{2^{n-2}}$$

$$=a+(b-a)\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{n-2}}\right]$$

$$=a+(b-a)\left[\frac{1-(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2}}\right]=a+\frac{2(b-a)}{3}\left[1-(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}\right],$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{a+\frac{2(b-a)}{3}\left[1-(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\right]\right\}=a+\frac{2}{3}(b-a)=\frac{a+2b}{3}$$

105.　设 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

难度等级：3;知识点： 1^∞ 型极限.

分析 1^∞ 型极限,应转化为重要极限来处理.

解　因 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x+\frac{f(x)}{x}}\cdot\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}}=e^3$

得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=3$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$.

106. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\sin x+e^x\right)-x}{\ln\left(\sin x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

难度等级：3;知识点： $\dfrac{0}{0}$型极限、等价无穷小代换.

分析　这是$\dfrac{0}{0}$型未定式的极限,不能直接利用极限的运算法则求解. 求$\dfrac{0}{0}$（或$\dfrac{\infty}{\infty}$）型未定式极限的另一个常用方法是利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 或等价无穷小的替换求解.

解 因为 $x\to 0$ 时,$\ln\left(\sin x+e^x\right)-x=\ln\dfrac{\sin x+e^x}{e^x}=\ln\left(1+\dfrac{\sin x}{e^x}\right)\sim\dfrac{\sin x}{e^x}\sim\dfrac{x}{e^x}\sim x$,

$$\ln\left(\sin x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(1+\sin x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\sim\sin x+\sqrt{1+x^2}-1\sim x,$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sin^2 x+e^x\right)-x}{\ln\left(\sin x+\sqrt{1+x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

106.　设 $x_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

难度等级：3;知识点： $\dfrac{\infty}{\infty}$型极限、夹逼准则.

分析 利用不等式缩放后化为易求和或易求积的数列,再结合夹逼准则求出极限

解　$x_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$,

由于对所有的正整数 n,有 $\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{2n}{2n+1}$,令　$y_n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdots\dfrac{2n}{2n+1}$,　则有

$0<x_n<y_n$,从而有　$0<x_n=\sqrt{x_n^2}<\sqrt{x_ny_n}=\sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}=0$,由夹逼准则知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

107. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

难度等级：3;知识点： $\dfrac{0}{0}$型极限.

分析 此问题的关键是将分子分解因式. 用罗必达法则更简单.

解 由于 $x^n-1=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)$, 所以

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-x-n(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x\left(x^n-1\right)-n(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)-n(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^n+x^{n-1}+\cdots+x-n}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^n-1\right)+\left(x^{n-1}-1\right)+\cdots+(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^{n-1}+\cdots+1\right)+(x-1)\left(x^{n-2}+\cdots+1\right)+\cdots+(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\left(x^{n-1}+\cdots+1\right)+\left(x^{n-2}+\cdots+1\right)+\cdots+1\right]$$

$$=n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

108. 设 $x_1>0$, $a>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)$ $(n=1,\ 2,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

难度等级：3;知识点： 递推数列的极限、单调有界准则准则.

分析 对于递推公式定义的数列,首先考察是否是单调有界数列,然后令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,再对递推公式两边取极限,得到关于 A 的方程,从中解出所求极限. .

解 因为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(x_n+x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\geq\sqrt[3]{a}>0$,所以数列 $\{x_n\}$ 有下界 0 ,又因为 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{3}\left(2+\dfrac{a}{x_n^3}\right)\leq 1$,所以 $x_{n+1}\leq x_n$,即数列 $\{x_n\}$ 单调减少,由

单调有界准则知,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = K$,对 $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$ 两边取极限得：$K = \dfrac{1}{3}\left(2K + \dfrac{a}{K^2}\right)$,

化简得：$K^3 = a$,解出 $K = \sqrt[3]{a}$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$

109. $y = f^3\left(\arcsin\sqrt{x}\right)$,其中 f 为可导函数,求 y'.

难度等级：1; 知识点： 复合函数的求导法则.

分析 直接利用复合函数的求导法则求导.

解 $y' = 3f^2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)\cdot f'\left(\arcsin\sqrt{x}\right)\cdot\left(\arcsin\sqrt{x}\right)'$

$$= 3f^2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)\cdot f'\left(\arcsin\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x(1-x)}} f^2\left(\arcsin\sqrt{x}\right) f'\left(\arcsin\sqrt{x}\right).$$

110. $y = x^2 f\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)$,其中 f 为可导函数,求 y'.

难度等级：1;知识点： 复合函数的求导法则,导数的四则运算法则.

分析 直接利用复合函数的求导法则和导数的四则运算法则求导.

解 $y' = 2xf\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right) + x^2\cdot f'\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$= 2xf\left(\arctan\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} f'\left(\arctan\frac{1}{x}\right).$$

111.设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \theta(1-\sin\theta) \\ y = \theta\cos\theta \end{cases}$ 所确定,求 $\dfrac{dy}{dx}$.

难度等级：1; 知识点： 参数方程所确定的函数的导数,导数的四则运算.

分析 利用导数的四则运算法则和参数方程所确定的函数的求导法则求出 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\theta\cos\theta)'}{[\theta(1-\sin\theta)]'} = \dfrac{\cos\theta - \theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

112.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=1$,对任意的 x,有 $f(2+x)=3f(x)$,求 $f'(2)$.

难度等级：1;　知识点： 导数的定义,连续的定义,等价无穷小.

分析　题目中没有给出 $f(x)$ 的具体表达式,也没说明 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导,所以只能用导数的定义求 $f'(2)$.

解　$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3f(\Delta x)-3f(0)}{\Delta x}$$

$$=3\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=3f'(0)=3\cdot 1=3.$$

113.设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h^3)-f(x_0)}{h}$.

难度等级：1;　知识点： 导数的定义,极限的四则运算.

分析　利用导数的定义和极限的四则运算法则求出极限值.

解　$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h^3)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h^3)-f(x_0)}{h^3}\cdot h^2\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h^3)-f(x_0)}{h^3}\cdot\lim_{h\to 0}h^2=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

114.设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,求极限 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{r}\left[f\left(x_0+\dfrac{r}{a}\right)-f\left(x_0-\dfrac{r}{a}\right)\right]$（其中 $a\neq 0$ 且与 r 无关）.

难度等级：2;　知识点： 导数的定义,极限的四则运算.

分析　利用导数的定义和极限的四则运算法则求出极限值.

解　$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\left[f\left(x_0+\frac{r}{a}\right)-f\left(x_0-\frac{r}{a}\right)\right]=\lim_{r\to 0}\frac{1}{a}\left[\frac{f\left(x_0+\frac{r}{a}\right)-f(x_0)}{\frac{r}{a}}-\frac{f\left(x_0-\frac{r}{a}\right)-f(x_0)}{\frac{r}{a}}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\lim_{r\to 0}\frac{f\left(x_0+\frac{r}{a}\right)-f(x_0)}{\frac{r}{a}}+\frac{1}{a}\lim_{r\to 0}\frac{f\left(x_0-\frac{r}{a}\right)-f(x_0)}{-\frac{r}{a}}$$

$$=\frac{1}{a}f'(x_0)+\frac{1}{a}f'(x_0)=\frac{2}{a}f'(x_0).$$

115.设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)}$,求 $f'(1)$.

难度等级：2;　　知识点： 导数定义,连续函数在连续点的极限.

分析　利用导数的定义求出 $f'(1)$.

解　显然 $f(1)=0$,

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)-0}{(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-3)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(n+1)!}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

116. 设 $f(0)>0$, $f'(0)$ 存在,求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(0)}\right]^x$.

难度等级：2; 知识点： 重要极限,导数定义,复合函数的极限性质.

分析　这是一个1^∞型未定式,将它化为重要极限的形式,利用导数的定义和复合函数的极限性质求出极限值.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(0)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(0)}{f(0)}\right]^{\frac{f(0)}{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(0)}}\right\}^{\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(0)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{f(0)}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(0)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{f(0)}\right]}=e^{\frac{f'(0)}{f(0)}}.$$

117.设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,且 $f(a)\neq0$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

难度等级：2;知识点： 导数的定义,重要极限,复合函数的极限性质.

分析　题目是1^∞型的极限形式,考虑用重要极限来求,利用重要极限、

复合函数的极限性质和导数的定义来求极限值.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[1+\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}}\right\}^{\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}}$

$$=e^{\frac{1}{f(a)}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

118.设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.

难度等级：2;　　**知识点：**导数的定义,极限的四则运算.

分析　利用导数定义和极限的四则运算法则来求极限.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{a\left[f(x)-f(a)\right]}{x-a}$$

$$=f(a)-af'(a).$$

119. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(x)-a^2f(a)}{x-a}$.

难度等级:2;　**知识点:**导数的定义,连续函数在连续点的极限,极限的四则运算.

分析　题目只说明 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,所以不能通过先求函数 $x^2f(x)$ 得导函数,再求 $x^2f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数值来求极限,而只能用导数定义来求极限.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(x)-a^2f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(x)-x^2f(a)+x^2f(a)-a^2f(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\left[x^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+(x+a)f(a)\right]$$

$$=a^2f'(a)+(a+a)f(a)=a^2f'(a)+2af(a).$$

120. 设函数 $f(x)$,$g(x)$ 可导,且 $g(a)\neq ag'(a)$,求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{ag(x)-xg(a)}$.

难度等级：2;　知识点： 导数的定义,极限的四则运算.

分析　利用导数定义和极限的四则运算法则来求极限.

解
$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{ag(x)-xg(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{af(x)-af(a)+af(a)-xf(a)}{x-a}}{\dfrac{ag(x)-ag(a)+ag(a)-xg(a)}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)}{a\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}-g(a)}=\frac{a\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)}{a\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}-g(a)}$$

$$=\frac{af'(a)-f(a)}{ag'(a)-g(a)}.$$

121. 设曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 所确定,求曲线在点 $(0,1)$ 处的切线与法线方程.

难度等级：2; 知识点： 参数方程所确定的函数的导数,导数的几何意义.

分析　先寻找切点 $(0,1)$ 所对应的参数 t,再利用导数的四则运算法则和参数方程所确定的函数的求导法则求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,根据导数的几何意义得到切线的斜率,给出切线与法线方程.

解　由曲线的参数方程 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 可知,$\dfrac{x}{y}=\dfrac{e^t\sin 2t}{e^t\cos t}=2\sin t$,

在点 $(0,1)$ 处,有 $\sin t=0$,$e^t\cos t=1$,所以点 $(0,1)$ 对应的参数 $t=0$. 又因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(e^t\cos t)'}{(e^t\sin 2t)'}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}.$$

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2}$,即曲线在点 $(0,1)$ 的切线斜率为 $k=\dfrac{1}{2}$,

故切线方程为 $y-1=\frac{1}{2}x$,即 $x-2y+2=0$;

法线方程为 $y-1=-2x$,即 $2x+y-1=0$.

122. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2-\ln x+(x-e)\cot\frac{\pi y}{2}=0$ 所确定的隐函数,求曲线 $y=y(x)$ 在点 $x=e$ 处的切线方程.

难度等级：2;　　知识点： 隐函数的求导,导数的四则运算,导数的几何意义.

分析　利用隐函数的求导法则和导数的四则运算法则求出导数 y' 和 $y'|_{x=e}$,给出切线方程.

解　当 $x=e$ 时,由方程 $y^2-\ln x+(x-e)\cot\frac{\pi y}{2}=0$,得 $y=\pm1$. 方程两边对 x 求导,得

$$2yy'-\frac{1}{x}+\cot\frac{\pi y}{2}+(x-e)\left(-\csc^2\frac{\pi y}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}y'=0,$$

即 $y'=\dfrac{\frac{1}{x}-\cot\frac{\pi y}{2}}{2y-\frac{\pi}{2}(x-e)\csc^2\frac{\pi y}{2}}$.

在切点 $(e,-1)$ 处,斜率 $k_1=y'\Big|_{\substack{x=e\\y=-1}}=-\frac{1}{2e}$,切线方程为 $y+1=-\frac{1}{2e}(x-e)$,即 $x+2ey+e=0$;在切点 $(e,1)$ 处,斜率 $k_2=y'\Big|_{\substack{x=e\\y=1}}=\frac{1}{2e}$,切线方程为 $y-1=\frac{1}{2e}(x-e)$,即 $x-2ey+e=0$.

122. 设 $y=x^2e^x$,求 $y^{(n)}$.

难度等级：2;　　知识点： 莱布尼兹公式,高阶导数.

分析　直接利用莱布尼兹公式求高阶导数.

解　$$y^{(n)}=\left(e^x\right)^{(n)}x^2+n\left(e^x\right)^{(n-1)}\left(x^2\right)'+\frac{n(n-1)}{2}\left(e^x\right)^{(n-2)}\cdot\left(x^2\right)''$$

$$=e^x\left(x^2+2nx+n^2-n\right).$$

123. 设常数 $a\neq 0$，$y=\dfrac{a+x}{a-x}$，求 $y^{(n)}$.

难度等级：2;

知识点： 间接法求高阶导数,隐函数的求导法则,n 阶导数公式 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

分析 利用 n 阶导数公式 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ 和复合函数的求导法则间接求出 $y^{(n)}$.

解 $y=\dfrac{a+x}{a-x}=-1+2a\cdot\dfrac{1}{a-x}$，因为 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$，所以

$$y^{(n)}=2a\cdot\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)}=2a\cdot\frac{(-1)^n n!}{(a-x)^{n+1}}\cdot(-1)^n=\frac{2a\cdot n!}{(a-x)^{n+1}}.$$

124. 设 $y=\sin 2x\cdot\cos^2 x$，求 $y^{(n)}$.

难度等级：2; **知识点：** 间接法求高阶导数,隐函数的求导法则,n 阶导数公式

$$(\sin ax)^{(n)}=a^n\sin\left(ax+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

分析 利用 n 阶导数公式 $(\sin ax)^{(n)}=a^n\sin\left(ax+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$ 和复合函数的求导法则间接求出 $y^{(n)}$.

解 $y=\sin 2x\cdot\cos^2 x=\sin 2x\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{4}\sin 4x$，

因为 $(\sin ax)^{(n)}=a^n\sin\left(ax+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(\sin 2x)^{(n)}+\frac{1}{4}(\sin 4x)^{(n)}=2^{n-1}\sin\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+4^{n-1}\sin\left(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

125. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|f(x_2)-f(x_1)|\le(x_2-x_1)^2$，求 $f'(x)$.

难度等级：3; **知识点：** 导数的定义,夹逼准则.

分析 题目没有给出 $f(x)$ 的具体形式,所以只能用导数定义和夹逼准则来求 $f'(x)$.

解 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,由已知不等式有

$$0\le\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\le\left|\frac{(x+\Delta x-x)^2}{\Delta x}\right|=|\Delta x|,$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$,由夹逼准则有, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|=0$,

从而有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$.

故 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0,x\in(-\infty,+\infty)$.

126. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$,恒有

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

且 $f(0)=0,g(0)=1,f'(0)=1,g'(0)=0$,求 $f'(x)$.

难度等级：3; **知识点：** 导数的定义,极限的四则运算.

分析 题目没有给出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的具体形式,只给出了 $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$, $g'(0)$,所以只能用导数定义和极限的四则运算来求 $f'(x)$.

解 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,由已知等式有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x)\cdot\frac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}+g(x)\cdot\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}+g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)=g(x).$$

127. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+4x}-1}=2$,求 $f'(0)$.

难度等级：3; **知识点：** ,连续的定义,导数的定义,极限的四则运算.

分析 题目没有给出 $f(x)$ 的具体形式,所以只能先根据连续性求出

$f(0)$,再用导数定义、极限的四则运算法则和已知极限值来求 $f'(0)$.

解　因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$,而

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)}{\sqrt{1+4x}-1}\cdot\left(\sqrt{1+4x}-1\right)\right]=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{1+4x}-1}\cdot\lim_{x\to0}\left(\sqrt{1+4x}-1\right)$$

$=2\times0=0$,故 $f(0)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+4x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\left(\sqrt{1+4x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+4x}-1\right)\left(\sqrt{1+4x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{4x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1+4x}+1\right)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2,$$

可得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=4$,

所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=4$.

128. 设函数 $f(x)$ 处处可导,且有 $f'(0)=2$,对任何实数 x 和 h,恒有

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+3hx,$$

求 $f'(x)$.

难度等级：3;　　　**知识点：** 导数的定义,极限的四则运算.

分析　题目没有给出 $f(x)$ 的具体形式,所以只能先根据所给关系式求出 $f(0)$,再用导数定义、极限的四则运算法则和 $f'(0)$ 来求 $f'(x)$.

解　由于对任何实数 x 和 h,恒有 $f(x+h)=f(x)+f(h)+3hx$,所以

$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)+3\times0\times0=2f(0)$,可得 $f(0)=0$.

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+3hx-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(h)}{h}+3x\right]=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+3x$$

$$=f'(0)+3x=2+3x.$$

129. 设 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}$,求 $f'(x)$.

难度等级：3;　　　**知识点：** 导数的四则运算,复合函数的求导.

分析 由于方程中含有 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$,所以将方程中的 x 换成 $\frac{1}{x}$,得到关于 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的另一个方程,两个方程分别对 x 求导,得到关于 $f'(x)$ 和 $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ 的方程组,再解出 $f'(x)$.

解 由于 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$,将等式中的 x 换成 $\frac{1}{x}$,得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=3x$,

两个方程分别对 x 求导,得方程组 $\begin{cases} f'(x)-\frac{2}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{3}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)+2f'(x)=3 \end{cases}$,

解之得 $f'(x)=2+\frac{1}{x^2}$.

130. 已知函数 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=2$ 处的切线与法线方程.

难度等级：3;知识点： 连续的定义,极限的四则运算,导数的定义,导数的几何意义.

分析 由于题目未给出 $f(x)$ 的表达式,所以只能先根据连续性和所给极限值,求出 $f(2)$,再由导数的定义求出 $f'(2)$,最后给出切线与法线方程.

解 因为 $f(x)$ 连续,所以在 $x=2$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$.

又因为 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{f(x)}{x-2}\cdot(x-2)\right]=4\times 0=0$,所以 $f(2)=0$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=2$ 处的切线的斜率为

$k=f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$,

故切线方程为 $y=4(x-2)$,即 $4x-y-8=0$;

法线方程为 $y=-\frac{1}{4}(x-2)$,即 $x+4y-2=0$.

130. 求过原点且与曲线 $y=\frac{x+9}{x+5}$ 相切的切线方程.

难度等级：3; **知识点：** 函数的求导,导数的几何意义.

分析 先判定原点是否为切点,若不是,根据已知条件寻找切点的坐标,然后根据导数的几何意义,得到切线的斜率,再给出切线方程.

解 因为 $\frac{0+9}{0+5}=\frac{9}{5}\neq 0$,所以 $(0,0)$ 不在曲线 $y=\frac{x+9}{x+5}$ 上,不是切点,所以要先求切点

的坐标.

设切点为 (x_0,y_0),则 $y_0=\frac{x_0+9}{x_0+5}$,即切点可设为 $\left(x_0,\frac{x_0+9}{x_0+5}\right)$,而曲线 $y=\frac{x+9}{x+5}$ 在切点 (x_0,y_0) 处的切线斜率为

$$k=y'(x_0)=\left(\frac{x+9}{x+5}\right)'\Bigg|_{x=x_0}=-\frac{4}{(x+5)^2}\Bigg|_{x=x_0}=-\frac{4}{(x_0+5)^2},$$

所以过切点 $\left(x_0,\frac{x_0+9}{x_0+5}\right)$ 的切线方程为

$$y-\frac{x_0+9}{x_0+5}=-\frac{4}{(x_0+5)^2}(x-x_0),$$

而原点 $(0,0)$ 在该切线上,所以有 $0-\frac{x_0+9}{x_0+5}=-\frac{4}{(x_0+5)^2}(0-x_0)$,即

$x_0^2+18x_0+45=0$,解得 $x_0=-3$ 或 $x_0=-15$.故切点为 $(-3,3)$ 与 $\left(-15,\frac{3}{5}\right)$.

在切点 $(-3,3)$ 处,斜率 $k=-1$,切线方程为 $y-3=-(x+3)$,即 $x+y=0$.

在切点 $\left(-15,\frac{3}{5}\right)$ 处,斜率 $k=-\frac{1}{25}$,切线方程为 $y-\frac{3}{5}=-\frac{1}{25}(x+15)$,即 $x+25y=0$.

131. 设 $y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$,求 y'.

难度等级：2; **知识点：** 导数的四则运算,对数求导法.

分析 利用对数求导法和导数的四则运算法则直接求出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　左右两边先取对数,得　$\ln y = x\ln(\ln x) - \ln^2 x$,再对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}y' = \ln(\ln x) + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} - 2\ln x\cdot\frac{1}{x},$$

故　$$y' = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2\ln x}{x}\right].$$

132. 求由方程 $x^y = y^{\sin x}$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

难度等级：2;　　**知识点：** 导数的四则运算,对数求导法.

分析　直接利用对数求导法和导数的四则运算法则求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　方程左右两边先取对数,得　$y\ln x = \sin x\ln y$,再对 x 求导,得

$$y'\ln x + \frac{y}{x} = \cos x\ln y + \sin x\cdot\frac{1}{y}y',$$

解得　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos x\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{\sin x}{y}} = \frac{y(x\cos x\ln y - y)}{x(y\ln x - \sin x)}.$$

133. 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-2)} + ax + b}{1 + e^{n(x-2)}}$,（1）求 $f(x)$;（2）确定 a、b 的值,使 $f(x)$ 可导,并求 $f'(x)$.

难度等级：3;

知识点： 极限的计算,可导与连续的关系,左右极限,极限存在的充要条件,连续的定义,左导数,右导数的定义,导数存在的充要条件,导数的四则运算法则,复合函数的求导法则.

分析　先计算出极限,得到函数 $f(x)$ 的表达式,再讨论函数在分段点处的连续性与可导性.由可导一定连续,根据函数在分段点处的左右极限相等且等于该点的函数值,寻找 a、b 满足的关系式,再由左右导数定义求出函数在该点处的左右导数,根据左右导数相等,寻 134. 找 a、b 满足的另一个关系式,再求出 a、b 的值.

解　（1）当 $x<2$ 时,$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-2)} + ax + b}{1 + e^{n(x-2)}} = ax + b$,

当 $x>2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-2)}+ax+b}{1+e^{n(x-2)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+(ax+b)e^{-n(x-2)}}{e^{-n(x-2)}+1}=x^2$,

当 $x=2$ 时, $f(2)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2e^{n(2-2)}+2a+b}{1+e^{n(2-2)}}=\dfrac{2a+b+4}{2}$,

故 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x<2,\\ \dfrac{2a+b+4}{2}, & x=2,\\ x^2, & x>2.\end{cases}$

（2）要 $f(x)$ 可导,则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导,从而 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,于是

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(ax+b)=2a+b=f(2)$,

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}x^2=4=f(2)$,

所以有 $2a+b=\dfrac{2a+b+4}{2}=4$,即 $2a+b=4$ 且 $f(2)=4$.

又因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导,所以

$f_-'(2)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{ax+b-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{a(x-2)}{x-2}=a$,

$f_+'(2)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}(x+2)=4$,

所以 $a=4$,且 $f'(2)=4$.又由 $2a+b=4$,可得 $b=-4$.

故当 $a=4$, $b=-4$ 时, $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导,且 $f'(2)=4$.

当 $x<2$ 时, $f'(x)=(4x-4)'=4$,

当 $x>2$ 时, $f'(x)=(x^2)'=2x$.

所以 $f'(x)=\begin{cases}4, & x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$.

135. 要做一个体积为定值 V 的有盖圆柱形铁桶, 问底半径 r 多大时, 用料最省.

难度等级: 1; **知识点:** 单调性, 极值.

分析 利用导数符号判断单调性并求极值和最值.

解 记铁桶表面积为 S, 高为 h, 底半径为 r, 由 $\pi r^2 h = V$ 知 $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$,得函数

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, r > 0.$$

由 $\dfrac{dS}{dr} = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = 0$ 得唯一驻点 $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，又 $\dfrac{d^2S}{dr} = 4\pi + \dfrac{4V}{r^3}$,知 $\left.\dfrac{d^2S}{dr}\right|_{r=r_0} > 0$，即 r_0 为极小值点,也是最小值点. $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$,时 $h = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$,铁桶表面积为最小，用料最省,其最小表面积 $2\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2 + 2\pi\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

136. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 上哪一点处的曲率最大?

难度等级: 1; **知识点:** 极值和曲率的概念.

分析 利用极值和曲率的概念求曲率的极值.

解 由 $y' = 2ax + b, y'' = 2a$ 代入曲率公式，得 $K = \dfrac{|2a|}{\left[1 + (2ax+b)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \le 2|a|$.

等号当且仅当 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 时成立，所以抛物线顶点 $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ 处曲率最大，最大曲率为 $2|a|$.

137. 求抛物线 $y^2 = 4x$ 上点 $P(1,2)$ 处的曲率半径.

难度等级: 1; **知识点:** 曲率半径的概念.

分析 利用曲率半径概念求曲率半径.

解 对 x 求导，得 $2yy' = 4$，所以得 $y|_{(1,2)} = \dfrac{2}{y}|_{(1,2)} = 1$,又 $y'' = -\dfrac{2y'}{y^2}$,得

$y''|_{(1,2)} = -\left.\dfrac{2y'}{y^2}\right|_{(1,2)} = -\dfrac{1}{2}$,所以在点 $P(1,2)$ 处的曲率为 $k = \left.\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\right|_{(1,2)} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$，

曲率半径 $R=4\sqrt{2}$.

138. 试求曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d，使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线，$(1,-10)$ 为拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上.

难度等级: 1; **知识点:** 导数的几何意义，拐点的概念.

分析 利用导数值为切线斜率，拐点的概念.

解 $y'=3ax^2+2bx+c, y''=6ax+2b,$ 由题意得方程组

$$\begin{cases} a+b+c+d=-10 \\ -8a+4b-2c+d=44 \\ 12a-4b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases}，解方程组得 \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-24 \\ d=16 \end{cases}$$

139. 确定 a, b, c 使抛物线 $y_1=ax^2+bx+c$ 在点 $x=0$ 处与 $y_2=e^x$ 相切,且又有相同的曲率半径.

难度等级: 1; **知识点:** 导数的几何意义，曲率半径的概念.

分析 利用导数值为切线斜率，曲率半径的概念.

解 由题意,两曲线在 $x=0$ 处具有相同的函数值，一阶导数值，二阶导数值的绝对值，由 $y_1=ax^2+bx+c, y_1'=2ax+b, y_1''=2a$ 有 $c=1, b=1, |2a|=1$，解之有:

$$a=\pm\frac{1}{2},\quad b=1,\quad c=1$$

140. 证明曲线 $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

难度等级: 1; **知识点:** 拐点的概念.

分析 利用拐点的概念和三点共线的性质加以证明.

解 $y'=-\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}, y''=\dfrac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2(x+1)(x-(2-\sqrt{3}))(x-(2+\sqrt{3}))}{(x^2+1)^3}$

令 $y''=0$ 得 $x=-1, x=2-\sqrt{3}, x=2+\sqrt{3},$ 当 $x<-1$ 时 $y''<0$，当 $-1<x<2-\sqrt{3}$ 时，$y''>0$，当 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ 时，$y''<0$ 当 $x>2+\sqrt{3}$ 时，$y''>0$. 所以曲线的

$$拐点为\ \mathrm{A}(-1,-1),\ \mathrm{B}\left(2-\sqrt{3},\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right),\ \mathrm{C}\left(2+\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right),$$

由于直线 AB 的斜率与直线 AC 的斜率相等，故 A, B, C 三点共线.

141. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{x^x}-1\right)$

难度等级：2;知识点：洛必达.

分析：这里幂指函数 x^{x^x} 转化成复合函数,再讨论其极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{x^x}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x^x\ln x}-1\right)$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$;

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x^x\ln x}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{x^x}-1\right)=-1$

142. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-x^2-1}$

难度等级：2;知识点：洛必达. 、泰勒公式

分析：$\dfrac{0}{0}$ 型的未定式函数极限,可用等价替换、洛必达法则、泰勒展开等方法讨论极限.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-x^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left\{x^2-\dfrac{\left(x^2\right)^2}{2}+o(x^4)\right\}}{\left\{1+x^2+\dfrac{\left(x^2\right)^2}{2!}+o(x^4)\right\}-x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+o(x^4)}{\dfrac{x^4}{2!}+o(x^4)}=2$$

143. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$

难度等级：2;知识点：洛必达.

分析：$\frac{0}{0}$型的未定式函数极限,洛必达法则.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\cos\frac{\pi}{2}x}$

$=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\sin\frac{\pi}{2}x}=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$

144. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\arcsin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$

难度等级：2;知识点：洛必达.

分析：1^∞型重要极限,也是幂指函数,转化成复合函数,再讨论其极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\arcsin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arcsin x}{x}}$

而$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arcsin x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\Big/\sqrt{1-x^2}-\arcsin x}{2x^2\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1+x\arcsin x\Big/\sqrt{1-x^2}}{6x^2}=\frac{1}{6}$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\arcsin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}$

145. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1}$

难度等级：2;知识点：洛必达.

分析：$\frac{0}{0}$型的未定式函数极限,洛必达法则.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{1}{3}\frac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\tan^2 x}}}{4\sin x\cos x}=\dfrac{1}{3}$

146. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(e^t-e^{-t}-2t)dt}{x-\sin x}$

难度等级：2;知识点：洛必达.

分析： $\dfrac{0}{0}$型的未定式函数极限,洛必达法则.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(e^t-e^{-t}-2t)dt}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\frac{1}{2}x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{1}=0$

147. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(e^t-1)dt}{\ln(1+x^2)}$

难度等级：2;知识点：洛必达.

分析： $\dfrac{0}{0}$型的未定式函数极限,洛必达法则.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(e^t-1)dt}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{\sin x}-1\right)\cos x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^2}=\infty$

148. 试确定函数 $f(x)=e^{-x^2}(2x^{12}+3x^8-12x^4+1)$ 的实零点的个数.

难度等级: 2; **知识点:** 零点定理，单调性.

分析 由零点定理判断至少存在一根,由单调性判断只有一根.

解 因 $e^{-x^2}>0$，故 $f(x)$ 的实零点与 $g(x)=2x^{12}+3x^8-12x^4+1$ 的实零点相同，

设 $y=x^4$，则问题又归结为确定 $\psi(y)=2y^3+3y^2-12y+1$ 在 $[0,+\infty)$ 的实零点的个数,

$$\psi'(y)=6y^2+6y-12=6(y+2)(y-1)$$

在 $[0,+\infty)$ 上 $\psi(y)$ 有唯一的驻点 $y=1$，在 $[0,\ 1]$ 上，$\psi'(y)<0$,$\psi(y)$ 连续且递减，又 $\psi(0)=1>0$，$\psi(1)=-6<0$ 故 $\psi(y)$ 在 $[0,\ 1]$ 内有一个且仅有一个零点. 在 $[0,+\infty)$ 上，$\psi'(y)>0$,$\psi(y)$ 连续且递减，又 $\psi(1)=-6<0$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，故 $\psi(y)$ 在 $[0,+\infty)$ 内有一个且仅有一个零点.因此，$g(x)$ 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有四个且仅有四个零点.

149. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$，判断方程 $2\varphi'(x)+x\varphi''(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内是否有实根.

难度等级: 2; **知识点:** 零点定理, Rolle 定理.

分析 由零点和 Rolle 定理判断导函数方程根的存在问题.

解 由 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$，对 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上使用 Rolle 定理，存在一点 $x_1\in(0,1)$，使 $\varphi'(x_1)=0$.将原方程等价变形: 在原方程两边乘以 x 得到 $2x\varphi'(x)+x^2\varphi''(x)=0$.问题归结为判断上方程在 $(0,1)$ 内是否有实根. 令 $F(x)=x^2\varphi'(x)$，则 $F(0)=0$，$F(x_1)=x_1^2\varphi'(x_1)=0$，又 $F(x)$ 在 $[0,x_1]$ 上满足 Rolle 定理其他条件，故存在 $\xi\in(0,x_1)\subset(0,1)$ 使 $F'(\xi)=2\xi\varphi'(\xi)+\xi^2\varphi''(\xi)=0$. 因 $\xi\neq0$，$2\varphi'(\xi)+\xi\varphi''(\xi)=0,\xi\in(0,1)$. 所以方程在 $(0,1)$ 内是仅有一个实根.

150. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

难度等级: 2; **知识点:** 洛必达法则.

分析 做变换使其满足洛必达法则的条件.

解 令 $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 则 $\ln y=\dfrac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}$,

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\sin x}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

故 $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

151. 求非零常数 a,b, 使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^a}=b$.

难度等级:2; **知识点:** 极限的定义, 洛必达法则.

分析 根据极限存在的意义, 使用洛必达法则求极限再分析结果.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^a}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{2}{1-x^2}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{ax^{a-1}(1-x^4)}=\begin{cases}-\dfrac{4}{3},a=3\\ \infty,a>3\\ 0,a<3\end{cases},$$

故 $a=3,b=-\dfrac{4}{3}$ 时等式成立.

152. 用 Taylor 公式求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$

难度等级: 2; **知识点:** 极限, Taylor 公式.

分析 某些题使用 Taylor 公式求极限比洛必达法则的计算量要小.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{3}{3x}+o\left(\dfrac{3}{x}\right)\right)-\left(1-\dfrac{2}{4x}+o\left(\dfrac{-2}{x}\right)\right)}{\dfrac{1}{x}}=\frac{3}{2}.$$

153. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$

难度等级: 2; **知识点:** 极限, Taylor 公式.

分析 某些题使用 Taylor 公式求极限比洛必达法则的计算量要小.

解 由于当 $x\to 0$ 时，$\sin^3 x \sim x^3$ 故由 $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2), x\cos x = x-\frac{x^3}{2!}+o(x^3)，故$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{2!}+o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

154. 讨论方程 $\ln x = ax$，其中 $a>0$ 有几个实根?

难度等级: 2; **知识点:** L 零点定理，极值.

分析 由零点定理判断至少存在一根，根据极值判断实根的个数.

解令 $f(x)=\ln x - ax, (x>0)$，由 $f'(x)=\frac{1}{x}-a$ 知 $f(x)$ 有唯一驻点 $x=\frac{1}{a}$, 当 $x<\frac{1}{a}$ 时 $f'(x)>0$;当 $x>\frac{1}{a}$ 时 $f'(x)<0$.

故 $x=\frac{1}{a}$ 为极大值点，也是最大值点. $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1=\ln\frac{1}{ae}$

$0<\frac{1}{ae}<1, f(x)\le \ln\frac{1}{ae}<0$，方程无实根；当 $ae=1$，即 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f\left(\frac{1}{a}\right)=0$，方程有唯一实根 $x=e$；当 $\frac{1}{ae}>1$ 时，方程有 2 个实根.

155. 在半径为 r 的圆桌边看书，电灯挂在圆桌中央的上方，如果桌上每一点的照度与光线入射角(线与桌面垂线的夹角)的余弦成正比，而与光源的距离平方成反比.若想看书时桌边的光线照度最强，应该把电灯挂在离桌面多高处?

难度等级: 2; **知识点:** 单调性，极值.

分析 利用导数符号判断单调性并求极值和最值.

解 设电灯距离桌面为 x, 由题意, 照度

$$y=\frac{k\cos\alpha}{x^2+r^2}=\frac{kx}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},y'=k\frac{r^2-2x^2}{(x^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}$$

由 $y'=0\Rightarrow x=\pm\frac{r}{\sqrt{2}}$，取 $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$,$0<x<\frac{r}{\sqrt{2}},y'>0;x>\frac{r}{\sqrt{2}},y'<0$，故 $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$ 是极大值点.

156. 若函数 $f(x)=\frac{ax^2+bx+a+1}{x^2+1}$ 在 $x=-\sqrt{3}$ 处取得极小值 $f(-\sqrt{3})=0$,求 a 与 b 的值,再求函数 $f(x)$ 的极大值.

难度等级: 2; **知识点:** 单调性, 极值.

分析 利用导数符号判断单调性并求极值和最值.

解 依题意 $f(-\sqrt{3})=0$,即 $3a-\sqrt{3}b+a+1=0$. 由 $f'(-\sqrt{3})=0$,即 $b-3b+2\sqrt{3}=0$ 知 $b=\sqrt{3}$,从而 $a=1/2,b=\sqrt{3}$ 时 $f'(x)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x-2x}{(1+x^2)^2}=\frac{(x+\sqrt{3})(\sqrt{3}x-1)}{(1+x^2)^2}$,因而 $f(x)$ 另一驻点 $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$. $x\in\left(-\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 时， $f'(x)>0$, 而 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ 时， $f'(x)<0$ 所以 $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

157. 从一个半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成漏斗，问留下扇形的中心角 φ 多大时做成漏斗的体积最大?

难度等级: 2; **知识点:** 单调性, 极值.

分析 利用导数符号判断单调性并求极值和最值.

解 设所成圆锥形漏斗的底半径为 r，高为 h. 由 $2\pi r=R\varphi$，得 $r=\frac{R}{2\pi}\varphi$，

而 $h=\sqrt{R^2-r^2}=R\sqrt{1-\frac{1}{4\pi^2}\varphi^2}$，漏斗体积

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{R^3}{12\pi}\varphi^2\sqrt{1-\frac{1}{4\pi^2}\varphi^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}\ .$$

令 $\frac{dV}{d\varphi}=\frac{R^3}{24\pi^2}\left[2\varphi\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}-\frac{\varphi^3}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}\right]=0$ 得唯一驻点 $\varphi_0=2\pi\frac{\sqrt{6}}{3}$，由常识知，漏斗应有最大体积，故当 $\varphi=2\pi\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时漏斗体积为最大.

158. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有 Peano 型余项的 n 阶 Taylor 展开式.

难度等级: 2; **知识点:** Taylor 公式，余项的概念.

分析 求出函数的各阶导数，写出 Taylor 公式及其 Peano 型余项.

解 $f(x)=\ln x, f'(x)=\frac{1}{x}, f''(x)=-\frac{1}{x^2}, f'''(x)=\frac{2}{x^3}, f^{(4)}(x)=\frac{-3!}{x^4},$

$$\ldots, f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$$

$$\ln x=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o\left[(x-2)^n\right]$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o\left[(x-2)^n\right]$$

159. 描绘函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

难度等级:2; **知识点:** 定义域，极值，拐点，单调性， 凹凸性，渐近线.

分析 需考察函数的定义域，极值，拐点，单调性， 凹凸性，渐近线.

解 $y'=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$，令 $y'=0$ 得 $x=-\frac{1}{3}, x=1, y''=6x-2$，令 $y''=0$ 得 $x=\frac{1}{3}$，列表如下

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+

y''	-	-	-	0	+	+	+
y	单增,凸	极大值	单减,凸	拐点	单减,凹	极小值	单增,凹
极大值 $y\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{32}{27}$,极小值 $y(1)=0$,拐点 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{16}{27}\right)$							

图形无渐近线，根据表中性质描点作图，图略.

160. 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$,证明对于内的任意 $x\neq 0$，存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)]$ 成立；并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$.

难度等级: 3; **知识点:** Lagrange 中值定理, Maclaurin 公式.

分析 由 Lagrange 中值定和 Maclaurin 公式构造极限式.

解 任给非零 $x\in(-1,1)$，由 Lagrange 中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x], 0<\theta(x)<1.$$

假设还存在与 $\theta(x)$ 不相等的 $\theta_1(x)$，使 $f(x)=f(0)+xf'[\theta_1(x)x], 0<\theta_1(x)<1.$ 则有

$$f'[\theta_1(x)x]=[f(x)-f(0)]/x=f'[\theta(x)x].$$

根据 Rolle 定理，在 $\theta_1(x)$ 与 $\theta(x)$ 之间必定存在 ξ，使 $f''(\xi)=0$，而这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾.

根据 Maclaurin 公式，有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)x^2/2+o(x^2)$. 二式相减去得

$$\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)+\frac{o(x^2)}{x^2}.$$

取极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\theta(x)\dfrac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\right]=\dfrac{1}{2}f''(0)$，即有 $\left[\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)\right]\bullet f''(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$，故有

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

161. 设 $f(x)$ 有三阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

难度等级: 3; **知识点:** 极限, Taylor 公式.

分析 某些题使用 Taylor 公式求极限比洛必达法则的计算量要小.

解 由 Taylor 公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^3)$，有

$$\lim_{x\to 0}\left[1+f'(0)+\left(1+\frac{f''(0)}{2}\right)x+\frac{f(0)}{x}+\frac{o(x^3)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+f'(0)+\left(1+\frac{f''(0)}{2}\right)x+\frac{f(0)}{x}+\frac{o(x^3)}{x}\right]}{x}=3$$

$\left[f'(0)+\left(1+\dfrac{f''(0)}{2}\right)x+\dfrac{f(0)}{x}+\dfrac{o(x^3)}{x}\right]\to 0$，因此 $f(0)=f'(0)=0$，故有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f''(0)}{2}x+\frac{o(x^3)}{x}\right]}{x}=3\Rightarrow 1+\frac{f''(0)}{2}=3\ \Rightarrow f''(0)=4$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x^2+o(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2.$$

162. 如果 $x\geq 0$, 证明 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta}}, 0<\theta<1$, 并求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta, \lim\limits_{x\to +\infty}\theta$.

难度等级: 3; **知识点:** Lagrange 中值定理, 极限.

分析 由 Lagrange 中值定构造极限式.

解 设 $f(t)=\sqrt{t}$, 在 $[x,x+1]$ 上 $f(t)$ 连续，在 $(x,x+1)$ 内可导，且 $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

由 Lagrange 定理：$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)(x+1-x), \xi\in(x,x+1)$, 取

$\xi = x+\theta, 0<\theta<1$, 则 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta}}$, 解得

$$\theta=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}.$$

从而

$$\lim_{x\to 0^+}\theta=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\right]=\frac{1}{4},\quad \lim_{x\to +\infty}\theta=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right)=\frac{1}{2}.$$

163. 考查数列 $x_n=\dfrac{n^2}{4^x}$ 的单调性.

难度等级: 3; **知识点:** 单调性.

分析 将数列转化为函数, 利用导数符号判断单调性.

解 设 $f(x)=\dfrac{n^2}{4^x}$，则 $f'(x)=\dfrac{2x\cdot 4^x-x^2\cdot 4^x\ln 4}{(4^x)^2}=\dfrac{x(2-x\ln 4)}{4^x}$

当 $x>\dfrac{2}{\ln 4}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减，因 $\dfrac{2}{\ln 4}<\dfrac{2}{\ln e}=2$,故当 $x\geq 2$ 时，f(x)单调减，因此，当 $x\geq 2$ 时，x_n 单调减小，易见 $x_1=x_2=\dfrac{1}{4}$，所以 $x_1=x_2>x_3>x_4>\cdots x_n>\cdots$.

164. 设在 $(-\infty,+$ 上 $f''(x)>0$，而 $f(0)=0$，判断函数 $g(x)=\begin{cases} f(x)/x, & x\neq 0 \\ f'(0), & x=0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调性.

难度等级: 3; **知识点:** 单调性.

分析 利用导数符号判断单调性.

解 当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. 引入中间函数 $\varphi(x)=xf'(x)-f(x)$，则当 $\varphi'(x)=xf''(x)$，且因 $f''(x)>0$，有

$$\varphi'(x)=xf''(x)=\begin{cases} >0, & x>0, \\ =0, & x=0, \\ <0, & x<0. \end{cases}$$

由此可见 $\varphi(0)=0$ 是 $\varphi(x)$ 的最小值. 于是当 $x\neq 0$ 时，$\varphi(x)>0$. 因而 $g'(x)>0$. 又 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续：$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$. 又由题设由 $g(0)=f'(0)$，故 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)$. 因而 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续. $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

165. 设 $f(x)=(x-x_0)^n\psi(x)$，其中 n 是正整数，$\psi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，并且 $\psi(x_0)\neq 0$，试研究 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 是否取极值.

难度等级: 3; **知识点:** 单调性，极值.

分析 利用导数符号判断单调性并求极值和最值.

解 因为 $f(x_0)=0$，所以只需研究在点 $x=x_0$ 附近 $f(x)$ 取值的正负，另一方面，$\psi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续且 $\psi(x_0)\neq 0$，因此存在 $\delta>0$，在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内 $\psi(x)$ 与 $\psi(x_0)$ 同号，于是，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 的正负由 n 的奇偶性决定.

如果 n 是奇数，$(x-x_0)^n$ 从而 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 异号，因此 $x=x_0$ 不是的极值点.

如果 n 是偶数，则在 $(x_0-\delta,x_0)$，$(x_0,x_0+\delta)$ 内，$(x-x_0)^n$. 当 $\psi(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 均取正号，故 $f(x_0)=0$ 是极小值，当 $\psi(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 内均取负号，故 $f(x_0)=0$ 是极大值.

166. 设 $f(x)$ 二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，若 $f(x)$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上的最小值为 -1，试证明 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值不小于 8.

难度等级: 3; **知识点:**Taylor 公式，极值.

分析 利用导数符号判断单调性并求极值和最值.

解　依题意，最小值只能在 $(0,\ 1)$ 取得，即存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=-1,f'(c)=0$，由 Taylor 公式

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-c)^2,\left(0<\xi_1<c\right)，即，\frac{1}{2}f''(\xi_1)=\frac{1}{c^2}$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2,\left(0<\xi_2<c\right)，即，\frac{1}{2}f''(\xi_2)=\frac{1}{(1-c)^2}$$

所以有　$\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\ge\frac{1}{2}f''(\xi_1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)=\frac{1}{\left(1-c\right)^2}+\frac{1}{c^2}\ge 8$

167. 如果在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则对 (a,b) 内任意 n 个点 $x_{1,}x_2,x_3...,x_n$，有不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

难度等级: 3; **知识点:** Taylor 公式.

分析　利用 Taylor 公式做适当变换加以证明.

解　令 $x_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，由函数 $f(x)$ 在 x_0 的 Taylor 展式，可将 $f(x_i),(i=1,2,\cdots,n)$ 表示为

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x_0)^2,\ \ a<\xi<b$$

由于 $f''(x)>0$，因此 $f(x_i)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0),(i=1,2,\cdots,n)$，将这 n 个不等式相加

$\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\ge nf(x_0)+f'(x_0)\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_0)=nf(x_0)$，再除以 n,由 $nx_0=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 得

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

168. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\left|f''(x)\right|\le 1$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上取得最

大值$\frac{1}{4}$，证明$|f(0)|+|f(1)|\le 1$.

难度等级: 3; **知识点:** Taylor 公式，极值.

分析 利用 Taylor 公式和极值加以证明.

解 设$x_0\in(0,1)$为$f(x)$在$(0,1)$上的最大值点，则$f(x_0)=\frac{1}{4}, f'(x_0)=0$，将$x=0,x=1$展开为$x_0$处的一阶 Taylor 公式:

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x_0)^2=\frac{1}{4}+\frac{f''(\xi)}{2}x_0^2,\qquad \xi\in(0,x_0)$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x_0)^2=\frac{1}{4}+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x_0)^2,\ \ \xi\in(x_0,1)$$

故有 $$|f(0)|+|f(1)|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[x_0^2+(1-x_0)^2\right]\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

169. 若$f(x)$在(a,b)上连续,且有极值点,证明存在$x_1\ne x_2\in(a,b)$使$f(x_1)=f(x_2)$.

难度等级: 3; **知识点:** 介值定理，极值.

分析 利用介值定理和极值加以证明.

解 设$f(x)$在(a,b)上有极大值点x_0，则在x_0的某个邻域$U(x_0,\delta)\subset(a,b)$内有:$f(x)\le f(x_0),\forall x\in U(x_0,\delta)$，不妨设$f(x)<f(x_0)$，更有

$$f(x_0+\frac{\delta}{2})\le f(x_0), f(x_0-\frac{\delta}{2})\le f(x_0)$$

若$f(x_0+\frac{\delta}{2})=f(x_0-\frac{\delta}{2})$，则结论显然成立. 若$f(x_0+\frac{\delta}{2})\ne f(x_0-\frac{\delta}{2})$，不妨设$f(x_0+\frac{\delta}{2})>f(x_0-\frac{\delta}{2})$，则有$f(x_0-\frac{\delta}{2})<f(x_0+\frac{\delta}{2})<f(x_0)$，由介值定理$\exists x_1\in(x_0-\frac{\delta}{2},x_0)$，使得$f(x_1)=f(x_0+\frac{\delta}{2})$，令$x_2=x_0+\frac{\delta}{2}$得结论成立.

170. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内二阶可导,证明$\exists\eta\in(a,b)$使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{(a-b)^2}{4}f''(\eta)$$

难度等级: 3; **知识点:** Lagrange 中值定理.

分析 构造辅助函数，利用 Lagrange 中值定理加以证明.

解 构造辅助函数 $g(x)=f(x)-f(x-\frac{b-a}{2})$，由于

$$g(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(a), g(b)=f(b)-f(\frac{a+b}{2})$$

在区间 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上对 $g(x)$ 使用 Lagrange 中值定理得

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=g(b)-g(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)(\frac{a+b}{2})$$
$$=\left[f'(\xi)-f'(\xi-(\frac{b-a}{2}))\right](\frac{b-a}{2})=f''(\eta)(\frac{b-a}{2})^2$$

171. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1),|f'(x)|<1$，证明对任意的 $x_1,x_2\in(0,1)$ 均有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

难度等级: 3; **知识点:** Lagrange 中值定理.

分析 利用 Lagrange 中值定理加以证明.

解 设 $f(a),f(b)$ 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值，不妨设 $a>b\in[0,1]$，

当 $a-b<\frac{1}{2}$ 时，由 Lagrange 中值定理 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f(a)-f(b)|=|f'(\xi)||b-a|<\frac{1}{2}$$

当 $a-b>\frac{1}{2}$ 时，由 Lagrange 中值定理 $\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b)$ 使得

$$|f(b)-f(0)|=|f'(\xi_1)|b,\quad |f(1)-f(a)|=|f'(\xi_2)|(1-a)$$

由 $f(0)=f(1)$ 有

$$|f(a)-f(b)|=|f(a)-f(1)+f(0)-f(b)|\le|f(b)-f(0)|+|f(1)-f(a)|$$
$$=|f'(\xi_1)|b+|f'(\xi_2)|(1-a)<b+1-a=1-(a-b)<\frac{1}{2}$$

172. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0, \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$，证明存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f''(\xi)\le\frac{1}{8}$.

难度等级: 3; **知识点:** Fermat 定理, Taylor 公式.

分析 利用 Fermat 定理, Taylor 公式加以证明.

解 设 $f(x_0)=\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$，由 Fermat 定理 $f'(x_0)=0$，由 Taylor 公式

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2,\qquad \xi_1\in(0,x_0)$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2,\quad \xi_2\in(x_0,1)$$

若 $x_0\le\frac{1}{2}$，取 $\xi=\xi_1$；若 $x_0\ge\frac{1}{2}$,取 $\xi=\xi_2$，则有 $f''(\xi)\le\frac{1}{8}$.

173. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导,且 $f(0)=0, f(1)=2$,证明存在 $x_1\ne x_2\in(0,1)$ 使:

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=1$$

难度等级: 3; **知识点:** 零点定理, Taylor 公式.

分析 利用零点定理, Taylor 公式加以证明.

解 令 $g(x)=f(x)-1, g(0)=f(0)-1<0, g(1)=f(1)-1>0$，由零点定理 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=1$,在 $[0,\xi],[\xi,1]$ 上分别使用 Lagrange 定理,存在 $x_1\ne x_2\in(0,1)$ 使

$$f(\xi)-f(0)=f'(x_1)\xi,\quad f(\xi)-f(1)=f'(x_2)(\xi-1)$$

即有 $1=f'(x_1)\xi,\ 1=f'(x_2)(1-\xi)$,所以有: $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=1$

174. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

难度等级：3;知识点：洛必达.

分析： 1^∞ **型重要极限,也是幂指函数,转化成复合函数,再讨论其极限.**

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)}$

而$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{n}{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}\bullet\dfrac{e^x+2e^{2x}+\ldots+ne^{nx}}{n}}{1}=\dfrac{n+1}{2}$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{n+1}{2}}$

175.$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$ （难度等级 3）洛必达

难度等级：3;知识点：洛必达.

分析：1^∞型重要极限,也是幂指函数,转化成复合函数,再讨论其极限.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\tan 2x\ln\tan x}$

而$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\tan x}{\cot 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}}{-2\csc^2 2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x}{\csc^2 2x}=-1$

$\therefore\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=e^{-1}$

176. $\lim\limits_{x\to0}(\cot x)^{\sin x}$ （难度等级 3）洛必达

难度等级：3;知识点：洛必达.

分析：∞^0型极限,也是幂指函数,转化成复合函数,再讨论其极限.

解 $\lim\limits_{x\to0}(\cot x)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x\ln\cot x}$

而$\lim\limits_{x\to0}\sin x\ln\cot x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cot x}{\csc x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{-\csc^2 x}{\cot x}}{-\cot x\csc x}=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}(\cot x)^{\sin x}=1$

177. $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

难度等级：3;知识点：洛必达.

分析：1^{∞}型重要极限,也是幂指函数,转化成复合函数,再讨论其极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}$

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}\bullet\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[x-(1+x)\ln(1+x)\right]}{e\bullet x^2}}{\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

178. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}$

难度等级：3;知识点：洛必达.

分析：1^{∞}型重要极限,也是幂指函数,转化成复合函数,再讨论其极限.

解 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}e^{\cot(x-a)\ln\frac{\tan x}{\tan a}}$

而$\lim\limits_{x\to a}\cot(x-a)\ln\dfrac{\tan x}{\tan a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\dfrac{\tan x}{\tan a}}{\tan(x-a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{\sec^2 x}{\tan a}\Big/\dfrac{\tan x}{\tan a}}{\sec^2(x-a)}=\dfrac{2}{\sin 2a}$

$\therefore\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}=e^{\frac{2}{\sin 2a}}$

179. 求$\int xf(x^2)f'(x^2)dx.$

难度等级：1;知识点： 第一换元法

分析： 凑微分

解 原式$=\frac{1}{2}\int f(x^2)f'(x^2)dx^2=\frac{1}{2}\int f(x^2)df(x^2)=\frac{1}{4}\left[f(x^2)\right]^2+C.$

180. 求$\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^5 x\cos^3 x}}$.

难度等级：1;知识点： 第一换元法

分析： 被积函数进行恒等变形,分成两个积分后凑微分

解 原式$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sqrt{\sin^5 x\cos^3 x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos^3 x}}+\int\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin^5 x}}dx$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{\tan x}\cos^2 x}+\int\frac{\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}dx=\int\frac{d\tan x}{\sqrt{\tan x}}-\int\sqrt{\cot x}d\cot x$$

$$=2\sqrt{\tan x}-\frac{2}{3}\sqrt{\cot^3 x}+C.$$

181. 求$\int x(1-x)^{20}dx.$

难度等级：1;知识点： 第二换元法

分析： 令$1-x=t$,化为幂函数积分

解 令$1-x=t,dx=-dt$,则

$$原式=-\int(1-t)t^{20}dt=\int(t^{21}-t^{20})dt=\frac{1}{22}t^{22}-\frac{1}{21}t^{21}+C$$

$$=\frac{1}{22}(1-x)^{22}-\frac{1}{21}(1-x)^{21}+C.$$

182. 求$\int\frac{\sin 2x}{1+e^{\sin^2 x}}dx$.

难度等级：2;知识点： 第二换元法,第一换元法

分析： 令$\sin^2 x=t$,换元后再拆项凑微分

解 $\int\frac{\sin 2x}{1+e^{\sin^2 x}}dx=\int\frac{1}{1+e^{\sin^2 x}}d(\sin^2 x)$,令$\sin^2 x=t$，则

$$原式=\int\frac{dt}{1+e^t}=\int\frac{1+e^t-e^t}{1+e^t}dt=\int dt-\int\frac{d(1+e^t)}{1+e^t}=t-\ln(1+e^t)+C$$

$$=\sin^2 x-\ln(1+e^{\sin^2 x})+C.$$

183. 求$\int\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}dx$;

难度等级：2;知识点： 第一换元法

分析： 将被积函数恒等变形后,再凑微分

解 $\int\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x(1+\tan x)^2}=\int\frac{d(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}=\frac{-1}{1+\tan x}+C$;

另解 $\int\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}dx=\int\frac{dx}{2(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4})^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{\pi}{4})}{\cos^2(x-\frac{\pi}{4})}$

$$=\frac{1}{2}\tan(x-\frac{\pi}{4})+C;$$

184. 求$\int\frac{1}{\cos x+\sin x}dx$;

难度等级：2;知识点： 第一换元法

分析： 将被积函数恒等变形后,再凑微分

解 $\int\frac{1}{\cos x+\sin x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x-\frac{\pi}{4})}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln|\sec(x+\frac{\pi}{4})+\tan(x+\frac{\pi}{4})($$

185. 求$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

难度等级：2;知识点： 有理函数积分,部分分式

分析： 将被积函数拆成部分分式,再分项积分

解 设$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{x+1}$,去分母得

$$1=(Ax+B)(x+1)^2+C(x^2+1)+D(x+1)(x^2+1).$$

比较 x 各次幂的系数得

$$\begin{cases}A+D=0\\2A+B+C+D=0\\A+2B+D=0\\B+C+D=1\end{cases}，解得\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2}\\B=0\\C=\dfrac{1}{2}\\D=\dfrac{1}{2}\end{cases},从而$$

$$原式=-\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

186. 求 $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$；

难度等级：2;知识点： 三角函数有理式积分,有理函数积分

分析：令 $\tan\frac{x}{2}=t,\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ 把积分化为有理函数积分,再将被积函数拆成部分分式,分项积分

解 1 作代换 $\tan\frac{x}{2}=u$,得 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},dx=\frac{2du}{1+u^2}$,故

$$原式=\int\frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2du}{1+u^2}=\int\frac{du}{1+u}=\ln|1+u|+C$$

$$=\ln|1+\tan\frac{x}{2}|+C;$$

解 2

$$原式=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d(1+\tan\frac{x}{2})}{1+\tan\frac{x}{2}}=\ln|1+\tan\frac{x}{2}|+c$$

187. 求 $\int x\sin^4 xdx$

难度等级：2;知识点： 分部积分.

分析：将 $\sin^4 x$ 降次,转化成简单形式,再分部积分.

解 $\int x\sin^4 xdx=\int x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$=\int x\frac{1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}}{4}dx$$

$$=\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\int xd\sin 2x+\frac{1}{32}\int xd\sin 4x$$

$$=\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{1}{32}x\sin 4x+\frac{1}{128}\cos 4x+c$$

188. 求 $\int\frac{1}{a\sin x+b\cos x}dx$

难度等级：2;知识点： 三角函数积分.

分析： 利用公式：$a\sin x+b\cos x=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x+\alpha)$,将分母三角函数表达式化简成一个三角函数的形式.

解 $\int\frac{1}{a\sin x+b\cos x}dx=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\csc(x+\alpha)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\csc(x+\alpha)-\cot(x+\alpha)\right|+c$$

$$\alpha:\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

189. 求$\int e^{ax}\cos bxdx$

难度等级：2;知识点： 分部积分.

分析： 凑了再分部,变到有用的形状计算积分.

解 $\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{a}\int\cos bxde^{ax}$

$$=\frac{1}{a}\left\{e^{ax}\cos bx+\frac{1}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{e^{ax}\cos bx+\frac{1}{ab}\int\sin bxde^{ax}\right\}$$

$$=\frac{1}{a}\left\{e^{ax}\cos bx+\frac{1}{ab}(e^{ax}\sin bx)-\frac{1}{ab^2}\int e^{ax}\cos bxdx\right\}$$

$$\therefore\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{b^2}{1+ab^2}\left\{e^{ax}\cos bx+\frac{1}{ab}(e^{ax}\sin bx)\right\}+c$$

$$\int\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}dx=\int\frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}dx$$

$$=-\int\frac{1}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}d\cos x$$

$$=-\int\left\{\frac{5/18}{1-\cos x}+\frac{1/6}{1+\cos x}+\frac{1/9}{2+\cos x}\right\}d\cos x$$

$$=\frac{5}{18}\ln|1-\cos x|-\frac{1}{6}\ln|1+\cos x|-\frac{1}{9}\ln|2+\cos x|+c$$

190. 设$f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$,计算$\int f(x)dx$.

难度等级：3;知识点： 分部积分法

分析： 令$\ln x=t$,求出$f(x)$,再进行分部积分

解 令$\ln x=t,$则$x=e^t,f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$,

$$\text{原式}=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)de^{-x}=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{dx}{1+e^x}$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\int\frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}}dx=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\int dx-\int\frac{e^{x}dx}{1+e^{x}}$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+x-\ln(1+e^{x})=x-(1+e^{-x})\ln(1+e^{x})+C$$

191. 求$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^{2}}dx$;

难度等级：3;知识点： 第一换元积分法

分析：恒等变形后连续的凑微分

解　$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^{2}}dx=\int\frac{1+\ln\frac{1}{x}}{x^{2}(1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x})^{2}}dx=-\int\frac{1+\ln\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x})^{2}}d\frac{1}{x}$$

$$=-\int\frac{d(1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x})}{(1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x})^{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-\ln x}+C$$

192. 求$\int(\arcsin x)^{2}dx$;

难度等级：3;知识点： 分部积分法

分析：令$u=(\arcsin x)^{2},dv=dx$,分部积分后凑微分再次分部积分

解　$$\int(\arcsin x)^{2}dx=x(\arcsin x)^{2}-\int\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$$

$$=x(\arcsin x)^{2}+2\int\arcsin x\,d\sqrt{1-x^{2}}$$

$$=x(\arcsin x)^{2}+2\sqrt{1-x^{2}}\arcsin x-2\int dx$$

$$=x\cdot(\arcsin x)^{2}+2\sqrt{1-x^{2}}\arcsin x-2x+C$$

193. 计算$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin x}dx$.

难度等级：1;知识点：定积分的计算,换元法.

分析　利用平方差公式对被积函数进行等价变形,使得原函数很容易

求得,再利用牛—莱公示求解

解 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x+\sec x\tan x)dx$

$=\tan x+\sec x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1+\sqrt{2}$

194. 计算. $I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$

难度等级：1;知识点：定积分的计算.

分析 对被积函数进行变量替换 $y=\ln x$,然后用牛—莱公式进行求解

解 $I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$

195.求由 $\int_0^{y^2}e^{-t}dt+\int_x^0\cos t^2dt=a$ 所确定的确隐函数对 x 的导数 $y'(x)$.

难度等级：1;知识点：变限积分,求导.

分析 利用变限积分的求导公式,对 $\int_0^{y^2}e^{-t}dt+\int_x^0\cos t^2dt=a$ 左右两边求导即得

解: 两 $\int_0^{y^2}e^{-t}dt+\int_x^0\cos t^2dt=a$ 对 x 求导得

$e^{-y^2}2y\frac{dy}{dx}-\cos x^2=0$

所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}e^{y^2}\cos x^2$.

196. 计算 $I=\int_0^2 x^4\sqrt{4-x^2}dx$.

难度等级：1;知识点：定积分的计算,换元法.

分析 对被积函数进行变量替换 $y=2\sin x$,然后用牛—莱公式求解

解 $I=\int_0^2 x^4\sqrt{4-x^2}dx$

$\overset{x=2\sin x}{=}\quad 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 xdx=64\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 xdx\right]$

$=64\left[\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right]=2\pi$.

197. 计算$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\int_2^x[\int_t^2 f(u)du]dt}{(x-2)^2}$．其中$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$．

难度等级：2;知识点：变限积分,罗毕达法则求导.

分析 用罗毕达法则.

解$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\int_2^x[\int_t^2 f(u)du]dt}{(x-2)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\int_x^2 f(u)du}{2(x-2)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{2}=1$

198.已知$f'(x)\int_0^2 f(x)dx=50, f(0)=0$,求$f(x)$.

难度等级：2;知识点：定积分的计算.

分析 直接计算

解由$f'(x)\int_0^2 f(x)dx=50$,得$f'(x)=\dfrac{50}{\int_0^2 f(x)dx}$,则$f(x)=\dfrac{50}{\int_0^2 f(x)dx}x+c$,由$f(0)=0$,

得$c=0$．于是$f(x)=\dfrac{50}{\int_0^2 f(x)dx}x$,$\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{50}{\int_0^2 f(x)dx}\dfrac{1}{2}\Big|_0^2$,

得$\int_0^2 f(x)dx=10$ $f(x)=5x$．

199．计算$I=\int_{e^{-2}}^{e^2}\dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx$．

难度等级：2;知识点：定积分的计算,换元法.

分析 分区间计算

解$I=\int_{e^{-2}}^{e^2}\dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx=-\int_{e^{-2}}^{1}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=8(1-e^{-1})$.

200.计算$\int_{-2}^2\max(1,x^2)dx$．

难度等级：2;知识点：定积分的计算．最大的表示..

分析 求出最大最小的区间

解$\int_{-2}^2\max(1,x^2)dx$

$=\int_{-2}^{-1}x^2dx+\int_{-1}^1dx+\int_1^2x^2dx$

$=\dfrac{20}{3}$

201. 计算 $I=\int_0^1 x|x-a|dx$.

难度等级： 2 ;知识点： 定积分的计算,换元,分区间 .

分析 分区间去掉绝对值

解 $$I=\int_0^1 x|x-a|dx=\begin{cases}\int_0^1 x(a-x)dx & a\ge 1\\ \int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1 x(x-a)dx & 0\le a<1\\ \int_0^1 x(x-a)dx & a<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{3} & a\ge 1\\ \dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3} & 0\le a<1\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}a & a<0\end{cases}$$

202. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$,求 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}dx$.

难度等级：3;知识点： 定积分的计算,换元法 .

分析 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}dx$ 不能直接用牛—莱公式,只能用 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

解 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}dx=$

$=e^{-2}\int_0^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\dfrac{1}{x})-\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}dx$

$\overset{u=x-\frac{1}{x}}{=} e^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du-\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}dx$

$\overset{u=\frac{1}{v}}{=} e^{2}\sqrt{\pi}-I$

$\therefore\quad I=\dfrac{1}{2}e^2\sqrt{\pi}$

203. 设 $f(x)=x, x\in[0,1]$,定义

$f^n(x_n)=\int_0^1 f^n(x)dx, x_n\in[0,1]$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

难度等级： 3 ;知识点： 变限积分,数列的极限.

分析 根据 $f^n(x_n)=\int_0^1 f^n(x)dx, x_n\in[0,1]$.

解 $x_n^n=\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}, x_n=\sqrt[n]{\dfrac{1}{n+1}}, \lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

204．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$.

难度等级：3;知识点： 用定积分求极限.

分析 先夹逼,再用定积分

解因为 $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x dx=\dfrac{1}{\ln x}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x dx=\dfrac{1}{\ln 2}$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+\frac{1}{k}}=\dfrac{1}{\ln 2}$.

205．计算 $I=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

难度等级： 3 ;知识点： 定积分的计算．换元.

分析 令 $x=\tan t$ 化为 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt$

解令 $x=\tan t$ 则 $=\dfrac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)du\ \ x=\tan t$

$I=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt \overset{t=\frac{\pi}{4}-u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-u))du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u})du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan u}du$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)du=\frac{\pi}{4}\ln 2-I .$$

$$\therefore\quad I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

206. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left|\sin nx\right|f(x)dx,\ f(x)\in C[0,\pi]$.

难度等级：3;知识点：定积分,求极限.

分析 分区间用中值定理

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left|\sin nx\right|f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}\left|\sin x\right|f(x)dx$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}\left|\sin x\right|dx \qquad \frac{k-1}{n}\pi\le\xi_{nk}\le\frac{k}{n}\pi$$

$$\overset{nx=t}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\sin t\right|dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\int_0^{\pi}\sin tdt=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx .$$

207. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

难度等级：2;知识点：极限转化为定积分.

分析 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 计算应转化为定积分.

解原式＝$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}}$＝$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}$＝$\int_0^1\ln xdx$＝－１ .

208. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(1+\frac{i^2}{n^2})$.

难度等级：2;知识点：极限转化为定积分.

分析 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(1+\frac{i^2}{n^2})$ 计算应转化为定积分.

解． $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(1+\frac{i^2}{n^2})=\int_0^1\ln(1+x^2)dx=\ln 2+\frac{\pi}{2}-2$ ．

209. 一纪念碑的高为 20m,在距离顶点 x 处的水平横截面面积是边长为 $\frac{1}{4}x$ 的等边三角形,求该纪念碑的体积.

难度等级：1;知识点：定积分的几何应用平行截面面积为已知的立体体积

分析：先求等边三角形的面积,再求体积

解 边长为 $\frac{1}{4}x$ 的等边三角形的面积为 $S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{4}x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{64}x^2$

所求体积为 $V=\int_0^{20}\frac{\sqrt{3}}{64}x^2dx=\frac{\sqrt{3}}{64}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{20}=\frac{125}{3}\sqrt{3}$

210.计算曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 相应于 1≤x≤3 的一段弧的弧长..

难度等级：1;知识点：定积分的几何应用平面曲线的弧长.

分析：应用平面曲线的弧长公式

解 $y=\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

所求弧长

$$S=\int_1^3\sqrt{1+\frac{1}{4}(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x})^2}dx=\int_1^3\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})dx=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$$

211. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)=0$, $f(1)=1$,试证：存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-2\xi$.

难度等级：2;知识点：方程根的存在性.

分析 只要利用连续函数的零点存在定理.

证 令$F(x)=f(x)-1+2x$,则$F(x)$在$[0,1]$上连续,且$F(0)=-1, F(1)=2$,所以存在一点$\xi\in(0,1)$使得$F(\xi)=0$即$f(\xi)=1-2\xi$.

212. 设函数$f(x)$是周期为 2 的周期函数,且在整个数轴上连续,证明方程$f(x)-f(x-1)=0$在任何区间长度为 1 的闭区间上至少有一个实根.

难度等级：2;知识点： 方程根的存在性.

分析 只要利用连续函数的零点存在定理,并充分应用周期函数的特性.

证 设任何区间长度为 1 的闭区间为 $[a, a+1]$,其中a为任意实数.

令 $F(x)=f(x)-f(x-1)$,则$F(x)$在 $[a, a+1]$上连续,且

$F(a)=f(a)-f(a-1)$,

$F(a+1)=f(a+1)-f(a)=f[(a-1)+2]-f(a)=f(a-1)-f(a)$,

当$f(a)-f(a-1)=0$时,有$F(a)=0$,$F(a+1)=0$,即a与$a+1$都是方程$f(x)-f(x-1)=0$的根;

当$f(a)-f(a-1)\neq 0$时，$F(a)\cdot F(a+1)=-\left[f(a)-f(a-1)\right]^2<0$,根据连续函数根的存在性定理知,至少存在一点$\xi\in(a, a+1)$,使得$F(\xi)=0$,即方程$f(x)-f(x-1)=0$在$(a, a+1)$内至少有一个实根.

综上可知,方程$f(x)-f(x-1)=0$在任何区间长度为 1 的闭区间上至少有一个实根.

213. 设$f(x)$在$[a, b]$上连续,试证：存在一点$\xi\in[a, b]$使得$2f(a)+3f(b)=5f(\xi)$.

难度等级：2;知识点： 连续函数的介值定理.

分析 关键是要证明 $m \le \dfrac{2f(a)+3f(b)}{5} \le M$.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,所以由最大值与最小值定理知：$\exists m, M$，使得 $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

因为 $5m \le 2f(a)+3f(b) \le 5M$,所以有 $m \le \dfrac{2f(a)+3f(b)}{5} \le M$,故存在 $\xi \in [a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{2f(a)+3f(b)}{5} \text{即} 2f(a)+3f(b)=5f(\xi).$$

215. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $2f(0)+3f(1)=10$,试证：存在一点 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=2$.

难度等级：2;知识点： 连续函数的介值定理.

分析 关键是要证明 $m \le \dfrac{2f(0)+3f(1)}{5} \le M$.

证 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,所以由最大值与最小值定理知：$\exists m, M$，使得 $m=\min\limits_{x\in[0,1]} f(x), M=\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$

因为 $5m \le 2f(0)+3f(1) \le 5M$,所以有 $m \le \dfrac{2f(0)+3f(1)}{5} \le M$,故存在 $\xi \in [0,1]$,使得

$$f(\xi)=\frac{2f(a)+3f(b)}{5} \text{即} f(\xi)=2.$$

216. 设数列 $\{a_n\}$ 单调增,$\{b_n\}$ 单调减,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 证明：$\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛,且有相同的极限.

难度等级：3;知识点： 单调有界准则.

分析 只需证明数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是单调有界数列.

证 因为数列 $\{b_n-a_n\}$ 单调减少,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,所以 0 是数列 $\{b_n-a_n\}$ 的下确界,从而

$0 \le b_n-a_n < b_1-a_1$,于是 $a_1 \le a_n \le b_n, a_n \le b_n \le b_1$,即 $\{a_n\}$ 有上界 b_1,

$\{b_n\}$有下界a_1.

所以$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛,设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,则由$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$得$A-B=0$,故$A=B$.

217. 设$0<x_1<1$,$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$,$n=1,2,3,\cdots$. 证明$\{x_n\}$收敛,并求它的极限.

难度等级：3;知识点： 由递推公式定义的数列.

分析　这也是由递推公式定义的数列,先证明该数列是单调有界数列,令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,再对递推公式$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$两边取极限,得到关于$A$的方程,从中解出$A$的值.

证　先用数学归纳法证明：$0<x_n<1,n=1,2,3,\cdots$.

$n=1$时,结论显然成立;假设$n=k$时结论成立,即$0<x_k<1$,所以$0<1-x_k<1$,从而 $0<x_k(1-x_k)<1$,即$0<x_{k+1}<1$. 这样就证明了$0<x_n<1$,$n=1,2,3,\cdots$, 即数列$\{x_n\}$有界.

由$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$.得$0<\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1-x_n<1$,即$x_{n+1}<x_n$,故$\{x_n\}$单调减少. 由单调有界准则知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,在等式$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$两端取$n\to\infty$时的极限,得

$A=A(1-A)$,

解之得$A=0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

219. 已知$x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{x_1+1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1},\cdots$,证明数列$\{x_n\}$收敛,并求出此数列的极限.

难度等级：3;知识点： 由递推公式定义的数列.

分析 这也是由递推公式定义的数列,先证明该数列是单调有界数列,令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,再对递推公式$x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$两边取极限,得到关于$A$的方程,从中解出$A$的值. 还有一点需要注意,就是在证明数列$\{x_n\}$单调增加时,需要将$x_n$代换为$x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$.

证 $x_2=\dfrac{3}{2}>1=x_1$,假设$x_n>x_{n-1}$,

$$x_{n+1}-x_n=1+\frac{x_n}{x_n+1}-1-\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(x_n+1)(x_{n-1}+1)}>0$$

即数列$\{x_n\}$单调增加,且$1\le x_n<2$,故则数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则 $A=1+\dfrac{1}{1+A}$,解得$A=\sqrt{2}$

220. 若$x_1=a$,$y_1=b$（$b>a>0$）,$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$,$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$（$n=1,2,3,\cdots,$）,试证数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都收敛于相同的极限.

难度等级：3;知识点： 由递推公式定义的数列、单调有界准则.

分析 这也是由递推公式定义的数列,但涉及到两个数列,先证明该数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是单调有界数列,令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,再对递推公式$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$,$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$两边取极限,得到关于$A$与$B$的方程,从中解出$A=B$.

证 因为$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}\ge\sqrt{x_ny_n}=x_{n+1}$,所以$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\ge\sqrt{x_n\cdot x_n}=x_n$,

故数列$\{x_n\}$单调增加;又因为 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}\le\dfrac{y_n+y_n}{2}=y_n$,故数列$\{y_n\}$单调减少,从而有

$$a = x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_n \le y_n \le y_{n-1} \le \cdots \le y_1 = b,$$

即数列$\{x_n\}$有上界b,$\{y_n\}$有下界a,由数列的单调有界准则知,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$都存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = M$,对$y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$两边同时取极限得:

$M = \dfrac{M+L}{2}$,解之得$M = L$. 故数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都收敛于相同的极限.

221. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)=f(1)$,证明: 存在 $\xi \in [0,1]$,使 $f(\xi + \dfrac{1}{2014}) = f(\xi)$.

难度等级: 3;知识点: 方程根的存在性.

分析 证明存在一点满足某抽象函数方程,主要方法是通过构造一个函数,使得该函数为闭区间上的连续函数,由介值定理或根的存在性定理,即得所要证明的结论.

证 设 $H(x) = f(x + \dfrac{1}{2014}) - f(x)$,则 $H(x)$ 在 $[0,1-\dfrac{1}{2014}]$ 上连续,且

$$\begin{aligned}
&H(0) + H(\frac{1}{2014}) + H(\frac{2}{2014}) + \cdots + H(1 - \frac{1}{2014}) \\
&= [f(\frac{1}{2014}) - f(0)] + [f(\frac{2}{2014}) - f(\frac{1}{2014})] + \cdots + [f(1) - f(\frac{2013}{2014})] \\
&= f(1) - f(0) = 0
\end{aligned}$$

,故存在 $\xi \in [0,1]$,使 $H(\xi) = 0$,即 $f(\xi + \dfrac{1}{2014}) = f(\xi)$.

223. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,且 $f[f(x)] = x$,证明: $\exists \xi \in (-\infty,+\infty)$,使得 $f(\xi) = \xi$.

难度等级: 3;知识点: 方程根的存在性.

分析 证明存在一点满足某抽象函数方程,主要方法是通过构造一个函数,使得该函数为闭区间上的连续函数,由介值定理或根的存在性定理,即得所要证明的结论.

证 取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$,设 $y_0 = f(x_0)$,则 $f(y_0) = x_0$.

若 $x_0 = y_0$,则 $\xi = x_0$

当 $x_0 \neq y_0$ 时,令 $F(x) = f(x) - x$,则 $f(x)$ 在 $[x_0, y_0]$ 或 $[y_0, x_0]$ 上连续,且

$F(x_0) = f(x_0) - x_0 = y_0 - x_0, F(y_0) = f(y_0) - y_0 = x_0 - y_0$

故存在 $\xi \in [x_0, y_0]$,使得 $F(\xi) = 0$,即 $f(\xi) = \xi$

224. 设 $f'(0) = 1, f''(0) = 0,$ 求证：在 $x = 0$ 处,有 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x^2)\Big|_{x=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f^2(x)\Big|_{x=0}$

难度等级：2 知识点：复合函数求导

分析 只需根据复合函数求导法则证之

证 应用复合函数的链式法则，有 $\frac{d}{dx} f(x^2) = 2xf'(x^2)$ ，

$\frac{d^2}{dx^2} f(x^2) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2)$

所以 $\frac{d^2}{dx^2} f(x^2)\Big|_{x=0} = 2f'(0) + 0 = 2$ ，

而 $\frac{d}{dx} f^2(x) = 2f(x)f'(x), \frac{d^2}{dx^2} f^2(x) = 2[f'(x)]^2 + 2f(x)f''(x)$

所以 $\frac{d^2}{dx^2} f^2(x)\Big|_{x=0} = 2[f'(0)]^2 + 2f(0)f''(0) = 2$.得证

225. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件 （1） $f(x+y) = f(x)f(y)$,对一切 $x, y \in R$;

（2） $f(x) = 1 + xg(x)$,而 $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$,证明： $f(x)$ 在 R 上处处可导且 $f'(x) = f(x)$.

难度等级：2 知识点：导函数的求法

分析 利用条件,直接用定义求 $f(x)$ 的导数证明

证 由（2）知 $f(0) = 1$,故

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{\Delta x g(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x)g(\Delta x)=f(x)$$

226.设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有定义,且 $|f(x)|\le x^2$,证明： $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$.

难度等级：2　知识点：函数的导数定义

分析　利用夹逼准则求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数,并证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

证　由 $|f(x)|\le x^2$,有 $f(0)=0$,又 $0\le\frac{|f(x)-f(0)|}{|x|}=\frac{|f(x)|}{|x|}\le|x|$,且 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$,故

$\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=0$,从而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

227. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且满足:

（1） $f(x+y)=f(x)f(y)\quad\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$ ；

(2) $f(0)=1$

（3） $f'(0)$ 存在,证明： $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f'(x)=f'(0)f(x)$

难度等级：2　知识点：函数的导数定义

分析　由已知条件,利用导数定义直接求 $f'(x)$

证　$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(f(\Delta x)-1)}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f'(0)f(x)$$

228. 证明：抛物线 $y=a(x-x_1)(x-x_2)\quad(a\ne 0,x_1<x_2)$ 和 Ox 轴相交成彼此相等的两角 α 与 $\beta\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

难度等级：2 知识点：曲线切线的斜率

分析　求出抛物线在与 Ox 轴的两交点处的切线的斜率,即可证之

证 抛物线与 Ox 轴的两交点分别为 $A(x_1,0),B(x_2,0)$, 由于 $y'=2ax-a(x_1+x_2)$,

故在点 A,B 的切线的斜率为

$$k_1=2ax_1-a(x_1+x_2)=a(x_1-x_2)=\tan(\pi-\beta)$$

$$k_2=2ax_2-a(x_1+x_2)=a(x_2-x_1)=\tan\alpha$$

故 $\tan\beta=-\tan(\pi-\beta)=-a(x_1-x_2)=\tan\alpha$,因此 $\alpha=\beta$.

229. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $F(x)=f(x^2-1)+f(1-x^2)$ ，证明：$F'(1)=F'(-1)$

难度等级：2　知识点：复合函数求导法

分析　利用复合函数求导法求出 $F(x)$ **在 1 和-1 处的导数,即证之**

证 由 $F(x)=f(x^2-1)+f(1-x^2)$,有

$$F'(x)=f'(x^2-1)\cdot 2x+f'(1-x^2)\cdot(-2x),$$

从而　$F'(1)=2f'(0)-2f'(0)=0,\quad F'(-1)=-2f'(0)+2f'(0)=0$

故　$F'(1)=F'(-1)$

230. 在 (a,b) 内 $f(x)$ 有定义，且对区间内任意 x_1,x_2 恒有 $|f(x_2)-f(x_1)|\le(x_2-x_1)^2$,求证： $f(x)$ 在该区间内是一个常数.

难度等级：2　　知识点：导数定义

分析　用夹逼准则求出 $f'(x)=0$,证明出 $f(x)$ 在该区间内是一个常数.

证 $0\le|f'(x)|=\left|\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|f(x+\Delta x)-f(x)|}{|\Delta x|}\le\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2}{|\Delta x|}=0$

所以 $f'(x)=0$,故 $f(x)$ 在该区间内是一个常数.

231.设 f 为可导函数,证明:若 $x=1$ 时有 $\frac{d}{dx}f\left(x^2\right)=\frac{d}{dx}f^2(x)$,则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

难度等级：2　　知识点：复合函数求导

分析　用复合函数求导法证明

证 应用复合函数的链式法则,有 $\frac{d}{dx}f\left(x^2\right)=2xf'\left(x^2\right)$,$\frac{d}{dx}f^2(x)=2f(x)f'(x)$

所以 $\left.\frac{d}{dx}f\left(x^2\right)\right|_{x=1}=2f'(1)$,$\left.\frac{d}{dx}f^2(x)\right|_{x=1}=2f(1)f'(1)$

又 $x=1$ 时有 $\frac{d}{dx}f\left(x^2\right)=\frac{d}{dx}f^2(x)$,即 $2f'(1)=2f(1)f'(1)$

解之: $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$

232. 在曲线 $y=x^3$ 上任取一点 P,过 P 的切线与曲线交于 Q,证明：曲线在 Q 处的切线斜率正好是 P 处切线斜率的四倍.

难度等级：2 知识点：曲线切线的斜率

分析　先求出曲线在点 P 处的切线斜率及切线方程,再求出切线方程与曲线的另一交点,最后求出此交点处的曲线的切线斜率即可证明.

证 设 $P(x_0,y_0)$ 为曲线上任意一点,则有 $y_0=x_0{}^3$,且该点切线斜率为

$$k_1=y'\big|_{x=x_0}=3x^2\big|_{x=x_0}=3x_0{}^2,$$

于是过 P 点的切线方程为 $y-y_0=3x_0{}^2(x-x_0)$,它与曲线的交点 Q 的坐标为 $Q\left(-2x_0,-8x_0^3\right)$,曲线在 Q 点的切线斜率为 $k_2=y'\big|_{x=-2x_0}=3x^2\big|_{x=-2x_0}=12x_0{}^2$,而

$\frac{k_2}{k_1}=4$,故曲线在 Q 处的切线斜率正好是 P 处切线斜率的四倍.

233.证明：曲线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ 上任一点的法线到原点距离恒等于 $|a|$.

难度等级：2　知识点：参数方程求导及法线方程

分析　用参数方程求导法,求出曲线上任一点处的法线方程,再求出法

线与原点的距离即可.

证 利用参数形式所表示的函数的求导公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t$$

曲线在对应于参数 t 的点处的法线方程为 $y-a(\sin t-t\cos t)=-\cot t(x-a(\cos t+t\sin t))$

简化后为 $\cos t\cdot x+\sin t\cdot y-a=0$,法线到原点的距离为

$$d=\left|\frac{a}{\cos^2 t+\sin^2 t}\right|=|a|$$

234.证明： $P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\left[(x^2-1)^m\right]^{(m)}(m=0,1,2,\ldots)$满足方程

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0$$

难度等级：2 知识点：高阶导数

分析 用莱布尼兹公式证明之

证 设 $y=(x^2-1)^m$,就有 $y'=2mx(x^2-1)^{m-1}$ 或 $(x^2-1)y'=2mxy$

对上式两端各取$(m+1)$阶导,按莱布尼兹公式,即有

$$(x^2-1)y^{(m+2)}+2(m+1)xy^{(m+1)}+m(m+1)y^{(m)}=2mxy^{(m+1)}+2m(m+1)y^{(m)}$$

于是

$$(x^2-1)y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}-m(m+1)y^{(m)}=0$$

两端乘以$\frac{1}{2^m m!}$,并以$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}y^{(m)}$代入,即得所要证明的等式

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0$$

235. 设 $y=(\arcsin x)^2$,证明它满足方程

$(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)xy^{(n)}-(n-1)^2y^{(n-1)}=0,(n\geq 2)$.

难度等级：3 知识点：高阶导数

分析　用数学归纳法证明

证

$$y' = 2\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\arcsin x$$

$$y'' = 2\left(1-x^2\right)^{-1} + 2x\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\arcsin x$$

$$y''' = 6x\left(1-x^2\right)^{-2} + 2\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\arcsin x + 6x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\arcsin x$$

当 $k=2$ 时，$\left(1-x^2\right)y''' - 3xy'' - y' = 0$ 成立

设 $k=n-1$ 时，$\left(1-x^2\right)y^{(n)} - (2n-3)xy^{(n-1)} - (n-2)^2 y^{(n-2)} = 0$ 成立

两边求导得 $-2xy^{(n)} + \left(1-x^2\right)y^{(n+1)} - (2n-3)y^{(n-1)} - (2n-3)xy^{(n)} - (n-2)^2 y^{(n-1)} = 0$

所以 $\left(1-x^2\right)y^{(n+1)} - (2n-1)xy^{(n)} - (n-1)^2 y^{(n-1)} = 0, (n \ge 2)$ 成立.

236. 证明：$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$

难度等级：3　　知识点：高阶导数

分析　用数学归纳法证明之

证　当 $n=1$ 时，由于 $\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，故等式成立

设当 $n=k$ 时等式成立，即有 $\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} = \dfrac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$，

下证等式对 $n=k+1$ 时成立，事实上，有

$$\begin{aligned}
\left(x^k e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} &= \left[\left(x\cdot x^{k-1}e^{\frac{1}{k}}\right)^{(k)}\right]' \\
&= \left[x\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} + k\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k-1)}\right]' \\
&= x\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} + \left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} + k\left(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} \\
&= x\left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right]' + (k+1)\cdot\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

于是,按照数学归纳法得知 $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$

237. 设 $f(x)=a_1\sin x + a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数且 $|f(x)|\le|\sin x|$,试证：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$

难度等级：3　知识点：函数在一点的导数及极限的保向性

分析　通过直接求 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的导数和用定义求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的导数的联系,利用极限保向性证之.

证　由于 $f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$,于是

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n| = |f'(0)| = \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right|,$$

由题意知，$x\ne 0$ 时，$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|$，从而由极限的保向性得

$\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$　　又　$\left|\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le 1$,于是

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1.$$

238. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$,证明：方程

$f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根.

难度等级：3 知识点：零点定理,极限的保号性,导数与左右导数的关系

分析 用极限保号性,在 (a,b) **找到** ξ_1 **与** ξ_2, $f(x)$ **在这两点异号,用零点定理即可证明**

证 因为 $f'(a)f'(b)>0$,所以 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 同号,不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$,

由于 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a}>0$,由极限的保号性知,必存在 δ,满足 $0<\delta<\dfrac{b-a}{2}$,使得当 $\xi_1\in(a,a+\delta)$ 时,有 $f(\xi_1)>0$

又因为 $f'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{x-b}>0$,由极限的保号性知,必存在 η,满足 $0<\eta<\dfrac{b-a}{2}$,使得当 $\xi_2\in(b-\eta,b)$ 时,有 $f(\xi_2)<0$

显然 $a<\xi_1<\xi_2<b$,由于 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续,且 $f(\xi_1)>0$, $f(\xi_2)<0$,由根的存在性定理知,必存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

239. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义, $f'(1)=4$,且对任意正数 x,y 有 $f(xy)=xf(y)+yf(x)$,证明： $f(x)$ 处处可导,并求 $f(x)$ 和 $f'(x)$.

难度等级：3 知识点：导函数的求法

分析 利用条件,直接用定义求 $f(x)$ **的导数,并证明之**

证 易知 $f(1)=0$,因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=4=f'(1)$,令 $y=1+\Delta x$,得

$$f(x(1+\Delta x))=xf(1+\Delta x)+(1+\Delta x)f(x)$$

因此, $f(x+x\Delta x)-f(x)=xf(1+\Delta x)+\Delta xf(x)$

故 $x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+x\Delta x)-f(x)}{x\Delta x}=4x+f(x)$. 所以 $f(x)$ 处处可导且 $xf'(x)-f(x)=4x$. 或 $\dfrac{1}{x}f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f(x)=\dfrac{4}{x}$,即 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{4}{x}$,所以

$$f(x)=4x\ln x, f'(x)=4\ln x+4(x>0)$$

240. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$,证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是:

存在在 $x=0$ 处连续的函数 $g(x)$,使得 $f(x)=xg(x)$,且此时成立 $f'(0)=g(0)$.

难度等级：3　知识点：可导定义

分析　直接求导证明充分性,通过构造 $g(x)$ 证明必要性.

证　充分性.由 $f(x)=xg(x)$ 可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且成立 $f'(0)=g(0)$.

必要性.令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$,则 $f(x)=xg(x)$,且

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0)$,即 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

241. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=k>0$ 存在,方程 $f(x)=0$ 有 k 个实根： $x_1<x_2<\cdots<x_k$,证明： $f'(x_1)\le0,f'(x_k)\ge0$

难度等级：3　知识点：函数极限的性质及导数的定义

分析　利用函数极限的保号性,根的定义,及导数的定义证明

证　由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=k>0$ 知,存在 $X>0$,当 $|x|\ge X$,有 $f(x)>\dfrac{k}{2}>0$.由 $f(x_1)=0,x_1$ 是小的根,故在 $(-\infty,x_1)$ 内 $f(x)$ 不变号,而 $f(-X)>0$,故 $f(\pm X)>\dfrac{k}{2}$,故 $f(x)>0$,从而 $f'(x_1)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}\le0$.同理有 $f'(x_k)\ge0$.

242. 证明：函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

难度等级：3　知识点：函数的导数定义

分析　对 $x\neq0$,按 x 为有理数,x 为无理数时用海涅定理讨论 $f(x)$ 的可导性,对 $x=0$ 用定义直接讨论.

证 $\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\Delta x, & \Delta x\text{为有理数}\\ 0, & \Delta x\text{为无理数}\end{cases}$，于是，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$，即 $f'(0)=0$.

其次，对于任一点 $x\neq 0$，分两种情形讨论函数的可微性：

（1） x 为有理数，取一无理数列 $\{x_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则有 $\lim\limits_{x_n\to x}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\lim\limits_{x_n\to x}\frac{0-x^2}{x_n-x}=\infty$. 由此可知，函数 $f(x)$ 在任一有理点 $(\neq 0)$ 不可微.

（2） x 为无理数，取一异于零的有理数列 $\{x_n'\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x$，则有 $\lim\limits_{x_n'\to x}\frac{f(x_n')-f(x)}{x_n'-x}=\lim\limits_{x_n'\to x}\frac{{x_n'}^2}{x_n'-x}=\infty$. 由此可知，函数 $f(x)$ 在任一无理点不可微.

综上所述：函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

243. 设 $f(x)$ 的一阶导数连续，$f(x)+f'(x)\neq 0$. 证明：$f(x)$ 至多有一个零点.

难度等级：3 知识点：零点定理，极限的保号性，导数与左右导数的关系

分析 用反证法，假设 $f(x)$ 有两个零点，推出 $f(x)+f'(x)$ 有零点，矛盾

证 反证法，假设 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，$x_1<x_2$，且它们之间没有其他零点，$f(x_1)=f(x_2)=0$，由 $f(x)+f'(x)\neq 0$ 知：$f'(x_1)\neq 0, f'(x_2)\neq 0$.

如果 $f'(x_1), f'(x_2)$ 同号，不妨设 $f'(x_1)>0, f'(x_2)>0$，由于

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)}{x-x_1}>0,$$

由极限的保号性知，必存在 δ，满足 $0<\delta<\frac{x_2-x_1}{2}$，使得当 $\xi_1\in(x_1,x_1+\delta)$ 时，有 $f(\xi_1)>0$；又因为

$$f'(x_2)=\lim_{x\to x_2^-}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=\lim_{x\to x_2^-}\frac{f(x)}{x-x_2}>0,$$

由极限的保号性知,必存在η,满足$0<\eta<\frac{x_2-x_1}{2}$,使得当$\xi_2\in(x_2-\eta,x_2)$时,有 $f(\xi_2)<0$,显然 $x_1<\xi_1<\xi_2<x_2$,由于 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续,且 $f(\xi_1)>0$,$f(\xi_2)<0$,由根的存在性定理知,必存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$,即在x_1与x_2之间有 $f(x)$ 的零点,矛盾.故 $f'(x_1), f'(x_2)$ 异号.

令 $F(x)=f(x)+f'(x)$, $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续,且 $F(x_1)F(x_2)<0$,所以 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)+f'(\xi)=0$,与题设矛盾,所以 $f(x)$ 至多一个零点.

244.设 $f'(0)$ 存在,$g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2\ln x, & x>0\end{cases}$,证明 $f[g(x)]$在 $x=0$ 处可导.并求其值.

难度等级：3　知识点：分段函数及复合函数的导数,罗必达法则

分析　先求出 $g(x)$ **在** $x=0$ **处的导数,再用复合函数求导法**证明 $f[g(x)]$ 在 $x=0$ 处可导

证 由题知 $g(0)=0$,且

$$\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{0}{x}=0=g'_-(0),\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\ln x}{x}=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0=g'_+(0)$$

有 $g'(0)=0$,由 $g(0)=0$, $f'(0)$ 存在,根据复合函数求导法则知 $f[g(x)]$在 $x=0$ 处可导且有 $\left.\frac{d}{dx}f[g(x)]\right|_{x=0}=f'(g(0))g'(0)=f'(0)\cdot0=0$

245. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，且 $f(a)f(b)>0, f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=f(\xi)$ 成立.

难度等级: 1; 知识点: 零点定理, Rolle 定理.

分析 只需根据零点定理, Rolle 定理就可证之.

证　由于 $f(a)f(b)>0$, $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, $f(a)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$; $f(b)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 异号.

分别在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上对 $f(x)$ 使用零点定理，存在 $\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. 对 $F(x)=e^{-x}f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上用 Rolle 定理，知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $F'(x)=e^{-x}(f'(\xi)-f(\xi))=0$ 即 $f'(\xi)=f(\xi)$ 成立.

246. 设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$$

难度等级:1; 知识点: Rolle 定理.

分析　只需构造辅助函数，根据 Rolle 定理就可证之.

证　令 $F(x)=xf(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上满足 Rolle 定理条件，故存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0, f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

247. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导，且在任意区间上都不恒等于零，并满足

$f''(x)=(x+x^3)f(x)$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上最多有一个实根.

难度等级: 1; **知识点:** 最大值.

分析　利用最大值的概念反证.

证　反证，若结论不成立，设 $\exists x_1,x_2\in(0,+\infty)$，满足 $f(x_1)=f(x_2)=0$，且 $x\in(x_1,x_2)$ 时 $f(x)\neq0$，不妨设 $f(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 内一定取得最大值点 x_3，所以 $f''(x_3)\le0, f(x_3)>0$，与 $f''(x)=(x+x^3)f(x)$ 矛盾.

248.证明对$[a,b]$上的可微函数$f(x)$存在$c(a<c<b)$，使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=c^{n-1}[nf(c)+cf''(c)],(n\ge 1).$$

难度等级: 1; **知识点:** Lagrange 中值定理.

分析 利用 Lagrange 中值定理证明之.

证 将要证等式变换成

$$\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{2}=nc^{n-1}f(c)+c^n f'(c)=[x^n f(x)]'\Big|_{x=c},$$

或
$$b^n f(b)-a^n f(a)=(b-a)[x^n f(x)]'\Big|_{x=c},$$

于是对函数$\varphi(x)=x^n f(x)$应用 Lagrange 中值定理就得出所要结论.

249.设$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，在$(a,\ b)$内可导$0\le a<b$证明在$(a,\ b)$存在ξ,η

使得$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f(\eta)$.

难度等级: 2; 知识点: Cauchy 定理, Lagrange 定理.

分析 只需构造辅助函数，根据 Cauchy 定理, Lagrange 定理就可证之.

证 对$f(x)$，$g(x)=x^2$在$[a,\ b]$上用 Cauchy 定理得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g''(\eta)},(\eta\in(a,b))$$

即
$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}\quad\text{或}\quad\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$$

再由 Lagrange 定理知存在$\xi\in(a,b)$使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$故存在$\xi,\eta\in(a,b)$

使得$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

250.设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，$f(a)=f(b),f'(a)>0$，证明存在

$\eta\in(a,b)$ 使$f''(\eta)<0$.

难度等级: 2; **知识点:** Rolle 定理, Lagrange 定理.

分析 利用 Rolle 定理, Lagrange 定理证明之.

证 由 Rolle 定理$\exists\xi\in(a,b)$使$f'(\xi)=0$，对$f'(x)$在$[a,\xi]$上使用

Lagrange 定理，$\exists\eta\in(a,\xi)\subset(a,b)$使 $f''(\eta)=\dfrac{f'(\xi)-f'(a)}{\xi-a}<0$

251. 若$f(x),g(x)$在(a, b)内可导，证明

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix},(a<\xi<b)$$

难度等级:2; **知识点:** Rolle 定理.

分析 构造辅助函数，利用 Rolle 定理证明之.

证 作辅助函数$\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}-k(x-a)$，则$\varphi(x)$在$[a, b]$中满足 Rolle 定理的条件,故必$\xi\in(a,b)$使$\varphi'(\xi)=0$．即

$$\varphi'(\xi)=\left[f(a)g'(x)-g(a)f'(x)\right]\Big|_{x=\xi}-k=\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}-k=0$$

故 $k=\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$，即 $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$

252. 设$f(x)$在$[x,x+h]$上连续，且二次可微，$\tau\in[0,1]$，则必存在$\theta\in(0,1)$使得

$$f(x+\tau h)=\tau f(x+h)+(1-\tau)f(x)+\frac{h^2}{2}\tau(\tau-1)f''(x+\theta h)$$

难度等级: 2; **知识点:** Rolle 定理.

分析 构造辅助函数，利用 Rolle 定理证明之.

证 当$\tau=0$或 1 时，任取$\theta\in(0,1)$，结论显然成立.因此只须设$\tau\in(0,1)$，故$\dfrac{h^2}{2}\tau(\tau-1)\neq0$.要证$f(x+\tau h)=\tau f(x+h)+(1-\tau)f(x)+\dfrac{h^2}{2}\tau(\tau-1)f''(x+\theta h)$.

即要证 $\dfrac{f(x+\tau h)-\tau f(x+h)-(1-\tau)f(x)}{\dfrac{h^2}{2}\tau(\tau-1)}=f''(x+\theta h)$. 为此，令

$$\frac{f(x+\tau h)-\tau f(x+h)-(1-\tau)f(x)}{\dfrac{h^2}{2}\tau(\tau-1)}=M.$$

即 $f(x+\tau h)-\tau f(x+h)-(1-\tau)f(x)=\dfrac{h^2}{2}\tau(\tau-1)M$, 作辅助函数

$$F(t)=f(x+th)-tf(x+h)-(1-t)f(x)-\frac{h^2}{2}t(t-1)M,t\in[0,1]$$

则 $F(0)=F(\tau)=F(1)=0$. 连续两次使用 Rolle 定理推得存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $F''(\theta)=0$. 由此可得 $M=f''(x+\theta h)$, $\theta\in(0,1)$.

253. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内可导，且对于 $(a,\ b)$ 内的一切 x 有 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$. 试证如果 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内有两个零点，则介于这两个零点之间，$g(x)$ 至少有一个零点.

难度等级: 2; **知识点:** Rolle 定理.

分析 构造辅助函数，利用 Rolle 定理反证.

证 设 $a<x_1<x_2<b$，且 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 用反证法，设 $g(x)$ 在 (x_1,x_2) 上恒不为 0，则考虑函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，因为 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$ 在 $(a,\ b)$ 上都成立，在 x_1,x_2 处成立，由于 $f(x_1)=f(x_2)=0$，所以 $g(x_1),g(x_2)$ 必不为 0. 于是 $y(x)$ 在上 $[x_1,x_2]$ 连续，在 (x_1,x_2) 上可导，且 $y(x_1)=y(x_2)=0$，由 Rolle 定理在 (x_1,x_2) 中必有一点 x_3，使得 $y'(x_3)=\dfrac{f'(x_3)g(x_3)-f(x_3)g'(x_3)}{g^2(x_3)}=0$，这与 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$ 矛盾，因此在两个零点之间，$g(x)$ 至少有一个零点.

254. 若 $f(x)$ 是 $[0,\ 1]$ 上有三阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，设 $F(x)=x^3 f(x)$，则在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使 $F'''(\xi)=0$.

难度等级: 2; **知识点:** Lagrange 中值定理.

分析 利用 Lagrange 中值定理证明之.

证 因为 $f(0)=f(1)$，所以 $F(0)=F(1)$. $F'(x)=3x^2 f(x)+x^3 f'(x)$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且在 $(0,1)$ 内可导，由 Lagrange 中值定理，

$$F'(\xi_1)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=0, 0<\xi_1<1,$$

因 $f(x)$ 有三阶导数，所以 $F(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 连续，在 $(0,\xi_1)$ 内可微，且 $F'(\xi_1)=F'(0)=0$，由 Lagrange 中值定理，有

$$F''(\xi_2)=0, 0<\xi_2<\xi_1,$$

$F(x)$ 在 $[0,\xi_2]$ 连续，在 $(0,\xi_2)$ 可微，且 $F''(\xi_2)=F''(0)=0$，故有

$$F'''(\xi)=0, 0<\xi<\xi_2<1.$$

255. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，且 $0\le f(x)\le \frac{x}{1+x^2}$，证明存在 $\xi>0$，使 $f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

难度等级: 2; **知识点:** Rolle 定理.

分析 构造辅助函数，利用 Rolle 定理证明之.

证 令 $\varphi(x)=\frac{x}{1+x^2}-f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，并且 $\varphi'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}-f'(x)$. 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{1+x^2}=0, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0,$ 由不等式 $0\le f(x)\le \frac{x}{1+x^2}$ 知 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,$ 因此 $\lim\limits_{x\to+0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. 由推广的 Rolle 定理知，存在 $\xi>0$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

256. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 二次可微，并且 $f(x)$， $f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 有界，即 $|f(x)|\le M_{0,}\ |f''(x)|\le M_2,(a<x<+\infty)$, 证明 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 有界，并且

$$|f'(x)|\le 2\sqrt{M_0M_2}\ .$$

难度等级: 2; **知识点:** Taylor 公式.

分析 利用 Taylor 公式证明之.

证 对任意的 $x>a$ 与 $h>0$, 由 Taylor 公式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2!}h^2,(x<\xi<x+h),$$

即 $f'(x)=\frac{1}{h}\left[f(x+h)-f(x)\right]-\frac{h}{2}f''(\xi)$.

故 $|f'(x)|\le\frac{1}{h}\left[|f(x+h)|+|f(x)|\right]+\frac{h}{2}|f''(\xi)|\le\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$. 因此 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 有界.

取 $h=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$，则 $\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}=2\sqrt{M_0M_2}$. 因此对所有的 $x>a$ ，$|f'(x)|\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

258. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $0<f(x)<1$，对于 $(0,1)$ 内所有的 $x, f'(x)\ne 1$，证明在$(0,1)$内有且仅有一个x，使 $f(x)=x$.

难度等级: 2; **知识点:** Lagrange 定理.

分析 利用 Lagrange 定理证明之.

证 令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在$[0,1]$续，由 $0<f(x)<1$ 知 $g(0)>0, g(1)<0$. 由连续函数的中值定理知在$(0,1)$存在点c，使$g(c)=0$，即 $f(c)=c$.

如果在$(0,1)$内有异于点c的点c_1，满足 $f(c_1)=c_1$，则由Lagrange定理，在c与c_1之间存在点ξ，使 $f'(\xi)=\frac{f(c)-f(c_1)}{c-c_1}=\frac{c-c_1}{c-c_1}=1$. 与 $f'(x)\ne 1$ 矛盾. 因此，在$(0,1)$仅有一个x满足 $f(x)=x$.

259. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且当 $x>0$ 时，有 $0<f'(x)<\dfrac{1}{x^{1+\alpha}},(\alpha>0)$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

难度等级: 2; **知识点:** 单调性.

分析 利用单调性证明之.

证 由 $f'(x)>0$，知 $f(x)$ 单调递增，又 $f'(x)<\dfrac{1}{x^{1+\alpha}}$ 有

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(x)dx<\int_1^x \frac{1}{x^{1+\alpha}}dx=-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}-1\right)<\frac{1}{\alpha}$$

即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有上界，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

260. 设在 $(0,a)$ 上，$|f''(x)|\le M$，且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值，试证

$$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma.$$

难度等级: 3; **知识点:** 最大值,. Lagrange 中值定理.

分析 利用最大值,. Lagrange 中值定理证明之.

证 因 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值，故必存在 $c\in(0,a)$ 使得 $f'(c)=0$，将 Lagrange 中值定理用于 $f'(x)$ 便得 $f'(0)=f'(c)-f''(\xi_1)\cdot c=-f''(\xi_1)\cdot c$，

. $f'(a)=f'(c)+f''(\xi_2)\cdot(a-c)=f''(\xi_2)\cdot(a-c)$.

于是 $|f'(0)|=|f''(\xi_1)\cdot c|\le Mc$，$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\le M(a-c)$，

从而 $|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

261. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0, f(c)>0$，其中 $a<c<b$ 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)<0$.

难度等级: 3; **知识点:** Cauchy 定理.

分析 构造辅助函数，利用 Cauchy 定理证明之.

证 由已知条件有

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1)>0,(a<\xi_1<c)$$
$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2)<0,(c<\xi_2<b),\xi_1<\xi_2$$

又因 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内有二阶导数，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使

$\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=f''(\xi)$，

因 $f'(\xi_2)<0, f'(\xi_1)>0$ 所以 $f''(\xi)<0$.

262. 设函数 $f(x)$ 在[-1, 1]上可微，且 $f(0)=0$，$|f'(x)|<M$ 证明在[-1, 1]上，$|f(x)|<M$，其中 $M>0$ 为常数.

难度等级: 3; **知识点:** Lagrange 中值定理.

分析 利用 Lagrange 中值定理证明之.

证 在[-1, 1]中任取一点 x，则在 0 与 x 构成的区间上应用 Lagrange 中值定理，即有

$$f(x)-f(0)=(x-0)f'(\xi)=f'(\xi)\cdot x，\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

因为 $f(0)=0$，所以 $|f(x)|=|f'(\xi)|\cdot|x|$，又 $|x|\le 1$，$|f'(x)|\le M, x\in[-1,1]$. 所以 $|f(\xi)|<M$，故 $|f(x)|<M$.

268. 设 $f(x)$ 在任何点 x 处均有二阶连续导数，且 h 为一正数，若

$$f(x)<\frac{1}{2}\left[f(x+h)+f(x-h)\right]$$

恒成立，试证 $f''(x)\ge 0$.

难度等级: 3; **知识点:** Lagrange 中值定理.

分析 利用 Lagrange 中值定理证明之.

证 由 $\frac{1}{2}\left[f(x+h)-f(x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x-h)-f(x)\right]>0$，取 $h=\frac{1}{n}$，则

$$\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]-\left[f(x)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right]>0,$$

从而 $\frac{1}{n}f'(\xi_n^1)-\frac{1}{n}f'(\xi_n^2)>0\ (x-\frac{1}{n}<\xi_n^1<x<\xi_n^2<x+\frac{1}{n})$ 或 $f'(\xi_n^1)-f'(\xi_n^2)>0$，再用 Lagrange 中值定理得,$(\xi_n^1-\xi_n^2)f''(\xi_n)>0, \xi_n^1<\xi_n<\xi_n^2$. 由此得 $f''(\xi_n)>0$，由于 $f''(x)$ 连续，所以 $f''(x)=\lim_{n\to\infty}f''(\xi_n)\ge 0$. 再由 x 之任意性，得 $f''(x)\ge 0, x\in(-\infty,+\infty)$.

269. 证明 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$， $x_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$.

难度等级: 3; **知识点:** 凹凸性.

分析 构造辅助函数, 利用凹凸性证明之.

证 令 $f(x)=-\ln x,(x>0)$，则 $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$，得到

$$\frac{-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n}{n}\ge-\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

$$\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\ln\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\frac{1}{n}\ln x_1x_2\cdots x_n=\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}$$

270. 若 $f''(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在，$f'(a)=f'(b)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，满足 $|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

难度等级: 3; **知识点:** Taylor 公式.

分析 利用凹凸性 Taylor 公式证明之.

证 由 Taylor 展式，有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-x_0)^2$.

设 $x=\frac{a+b}{2}, x_0=a$，得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2=f(a)+\left(\frac{a+b}{8}\right)^2f''(\xi_1).\quad (a<\xi_1<\frac{a+b}{2})$$

设 $x_0=b$ 有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_2)$. 二式相减得

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{8}(b-a)^2\left[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right],\qquad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{8}(b-a)^2\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\left(\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right|\right).$$

令 $\xi=\begin{cases}\xi_2,当|f''(\xi_2)|\ge|f''(\xi_1)|\\ \xi_1,当|f''(\xi_2)|\le|f''(\xi_1)|\end{cases}$,

则 $\xi\in(a,b)$，$|f''(\xi)|=\max\left(|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\right)$. 所以

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{8}(b-a)^2\cdot 2\left|f''(\xi)\right|.$$

即 $|f''(\xi)|\ge\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

271. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有 n 阶导数，且 $\left|f^{(4)}(x)\right|\le M$. 证明对于此邻域内异于 x_0 的任何 x 均有 $\left|f''(x_1)-\dfrac{f(x)-2f(x_1)+f(x_2)}{(x-x_1)^2}\right|\le\dfrac{M}{12}(x-x_1)^2$，其中 x_2 与 x 是关于 x_1 点对称的.

难度等级: 3; **知识点:** Taylor 公式.

分析 利用凹凸性 Taylor 公式证明之.

证 由 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)+\frac{f''(x_1}{2!}(x-x_1)^2+\frac{f'''(x_1)}{3!}(x-x_1)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}(x-x_1)^4.$$

因 x_2 与 x 是关于 x_1 点对称，故

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+\frac{f''(x_1)}{2!}(x_2-x_1)^2+\frac{f'''(x_1)}{3!}(x_2-x_1)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}(x_2-x_1)^4.$$

其中 ξ_1 在 x_1 与 x 之间，而 ξ_2 在 x_1 与 x_2 之间.

将上面两式相加，再由 $x-x_1=-\left(x_2-x_1\right)$ 得

$$f(x)+f(x_2)=2f(x_1)+f''(x_1)(x-x_1)^2+\frac{1}{4!}\left[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right](x-x_1)^4.$$

因为 $x\ne x_1$，故由上式得

$$\left|f''(x_1)-\frac{f(x)-2f(x_1)+f(x_2)}{(x-x_1)^2}\right|\le\frac{1}{4!}\left|f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right|(x-x_1)^2.$$

又因为 $\left|f^{(4)}(x)\right|\le M$.，则 $\left|f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right|\le 2M$，

故 $\left|f''(x_1)-\dfrac{f(x)-2f(x_1)+f(x_2)}{(x-x_1)^2}\right|\le\dfrac{M}{12}(x-x_1)^2$.

272. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上两次可微，$f(a)=g(a)=f(b)=0$，则存在 $c,(a<c<b)$, $f''(c)g(c)+2f'(c)g'(c)+f(c)g''(c)=0$.

难度等级: 3; **知识点:** Taylor 公式.

分析 利用凹凸性 Taylor 公式证明之.

证 要证存在 $c(a<c<b)$，使得

$$f''(c)g(c)+2f'(c)g'(c)+f(c)g''(c)=\left[f(x)g(x)\right]''\big|_{x=c}=\varphi''(c)=0.$$

其中 $\varphi(x)=f(x)g(x)$.按 Taylor 公式将 $\varphi(x)$ 在点 a 展开

$$\varphi(b)=\varphi(a)+\varphi'(a)(b-a)+\frac{1}{2}\varphi''(a)(b-a)^2,(a<c<b).$$

并注意到 $\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi'(a)=0$，于是 $\varphi''(c)=0,(a<c<b)$.

273. 设 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0$$

难度等级: 3; **知识点:** Rolle 定理.

分析 构造辅助函数，利用 Rolle 定理证明之.

证 令 $\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，并且

$$\varphi'(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \end{vmatrix}.$$ 又 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，证毕.

274. 设函数 $f(x)$ 可导，$x\in[a,a+h],(h>0)$ 证明

$$f(a+h)=f(a)+(e^h-1)e^{-\theta h}f'(a+\theta h)(0<\theta<1)$$

难度等级: 3; **知识点:** Cauchy 定理.

分析 构造辅助函数, 利用 Cauchy 定理证明之.

证 $g(x)=e^{x-a}$，则 $g'(x)=e^{x-a}\neq 0$. 由 Cauchy 定理,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}(0<\theta<1),$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{e^h-1}=\frac{f'(a+\theta h)}{e^{\theta h}}\ 0<\theta<1$$

化简整理后, 便得结论成立.

275. 求 $\int[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2dx$;

难度等级：3;知识点： 分部积分法

分析：两次分部积分

解 原式 $=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\int x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\sqrt{1+x^2}$$

$$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int dx$$

$$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x;$$

276. 求 $\int\frac{1}{x^4+1}dx$;

难度等级：3;知识点： 有理函数积分,部分分式,第一换元法

分析：将被积函数化为部分分式用凑微分法积分.

解 原式 $=\int\frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{(2x+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{(2x-\sqrt{2})-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C;$$

277. 求 $\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}dx$;

难度等级：3;知识点： 有理函数积分,部分分式,第一换元法

分析：将被积函数化为部分分式用凑微分法积分,.

解　原式 $=\int\frac{(-x^2-x-1)+(x-1)}{(x^2+x+1)^2}dx$

$$=-\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=-\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{\left[(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right]^2}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C;$$

278. 求 $\int\frac{x^2\cdot e^x}{(x+2)^2}dx$;

难度等级：3;知识点： 分部积分法

分析：令 $x^2e^x=u,\frac{dx}{(x+2)^2}=dv$ 进行分部积分,化简后再进行第二次分部积分

解 原式$=-\int x^2e^x d\dfrac{1}{x+2}=-\dfrac{x^2e^x}{x+2}+\int\dfrac{2xe^x+x^2e^x}{x+2}dx=-\dfrac{x^2e^x}{x+2}+\int xe^x dx$

$$=-\frac{x^2e^x}{x+2}+xe^x-\int e^x dx=-\frac{x^2e^x}{x+2}+(x-1)e^x+C;$$

279. 求$\int(1+x-\dfrac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$；

难度等级：3;知识点： 分部积分法

分析： 对被积函数进行恒等变形,利用积分性质化为两个积分,再对第二个积分进行分部积分

解 原式$=\int\left[e^{x+\frac{1}{x}}dx+x(1-\dfrac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx\right]=\int\left[e^{x+\frac{1}{x}}dx+xe^{x+\frac{1}{x}}d(x+\dfrac{1}{x})\right]$

$$=\int\left[e^{x+\frac{1}{x}}dx+xde^{x+\frac{1}{x}}\right]=\int d(xe^{x+\frac{1}{x}})=xe^{x+\frac{1}{x}}+C;$$

280. 求$\int\dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$；

难度等级：3;知识点： 换元积分法,分部积分法

分析： 作代换$\arctan x=u$换元积分,化简后再进行分部积分

解 作代换 $\arctan x=u$,得$x=\tan u, dx=\sec^2 udu$,故

$$原式=\int\frac{\tan u\cdot e^u}{\sec^3 u}\cdot\sec^2 udu=\int e^u\sin udu=\int\sin ude^u$$

$$=e^u\sin u-\int e^u\cos udu=e^u\sin u-\int\cos ude^u$$

$$=e^u\sin u-e^u\cos u-\int e^u\sin udu$$

于是

$$原式=\frac{e^u}{2}(\sin u-\cos u)+C=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C;$$

281. 求$\int\dfrac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$；

难度等级：3;知识点： 分部积分法

分析： 令$\ln\cos x=u,\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=dv$分部积分

解　原式$=\int\ln\cos x d\tan x=\tan x\ln\cos x-\int\tan x\cdot\dfrac{-\sin x}{\cos x}dx$

$$=\tan x\ln\cos x+\int\tan^2 xdx=\tan x\ln\cos x+\int(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\tan x\ln\cos x+\tan x-x+c;$$

282. 设$f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$,求$\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$.

难度等级：3;知识点： 分部积分法

分析： 令$u=\sin^2 x$,求出$f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,然后分部积分

解　令$u=\sin^2 x$，则有$\sin x=\sqrt{u}$,从而$f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,于是

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=-\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d(1-x)$$

$$=-2\int\arcsin\sqrt{x}d\sqrt{1-x}=-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}$$

$$=-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c$$

283. 求$I=\int\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1-\cos\dfrac{n}{ax}\right)\cdot\sin\dfrac{m}{bx}\right]x^3y^2\right\}dy,m,n$为正整数，$a\neq0,\mathrm{b}\neq0$.

难度等级：3;知识点： 极限,不定积分

分析： 被积函数为极限形式,先求出极限,再积分

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1-\cos\dfrac{n}{ax}\right)\cdot\sin\dfrac{m}{bx}\right]x^3y^2\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{ax}\right)^2\cdot\dfrac{m}{bx}\cdot x^3y^2=\dfrac{n^2m}{2a^2b}y^2$,故

$$I=\int\frac{n^2m}{2a^2b}y^2dy=\frac{n^2m}{6a^2b}y^3+c.$$

284.设 $f(x)=\int_{0}^{x^2}\tan^2 t dt, g(x)=x^7+\sin^6 x$,证明：当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量.

难度等级: 1;知识点: 无穷小量比较,积分上限函数的导数,罗必达法则,

分析：求当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 之比的极限

证 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x^2}\tan^2 t dt}{x^7+\sin^6 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\tan^2 x^2}{7x^6+6\sin^5 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^5}{7x^6+6\sin^5 x\cos x}=\frac{1}{3}$$

所以, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量.

285.证明： $\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx=f(0)+f(1)-2\int_0^1 f(x)dx$.

难度等级：2;知识点：定积分分部积分法

分析：用两次定积分分部积分法

证 $\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx=\int_0^1 x(1-x)df'(x)$

$$=[x(1-x)f'(x)]_0^1-\int_0^1(1-2x)f'(x)dx=-\int_0^1(1-2x)f'(x)dx$$

$$=[-(1-2x)f(x)]_0^1-2\int_0^1 f(x)dx=f(1)+f(0)-2\int_0^1 f(x)dx$$

286． 设$F(x)=\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}dt\,(-1<x<1)$,证明$F(x)+F(-x)=\frac{1}{2}F(x^2)$.

难度等级：2;知识点：积分上限函数的导数

分析：微分中值定理的推论

证 设$G(x)=F(x)+F(-x)-\frac{1}{2}F(x^2)$,

则$\frac{dG(x)}{dx}=\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln(1+x)}{-x}-\frac{1}{2}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}2x=0$,

有$G(x)=c$,又$G(0)=F(0)+F(0)-\frac{1}{2}F(0)=0$,故$c=0$,

从而$F(x)+F(-x)=\frac{1}{2}F(x^2)$.

287.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且满足 $f(x)=x^2-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ （常数 $a\neq -1$）

证明 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3(1+a)}$

难度等级：2;知识点：定积分定义

分析：定积分性质

证 设$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=k$,则 $f(x)=x^2-k$． 在 $f(x)=x^2-k$ 的两边从 0 到 a 积分得

$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a (x^2-k)\mathrm{d}x$． 即 $k=\frac{a^3}{3}-ak$,于是 $k=\frac{a^3}{3(1+a)}$． 所以$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3(1+a)}$．

288．设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,

证明 $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

难度等级：2;知识点：定积分换元法

分析：定积分性质

证 令 $x=\pi-t$,则

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_\pi^0 (\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

故$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$．

又因为$\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$,令 $x=\pi-t$,则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

所以$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

因此$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

289．已知 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt(x>0)$,证明： $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln^2 x$

难度等级：2;知识点：积分上限函数定

分析：定积分换元法

证 $f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln(1+t)}{t}dt$

令 $u=\frac{1}{t}$,则 $t=\frac{1}{u}$

$$f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln(1+t)}{t}dt=-\int_1^{x}\frac{u\ln(1+\frac{1}{u})}{u^2}du$$

$$=-\int_1^{x}\frac{\ln(1+t)-\ln t}{t}dt$$

所以 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}\ln^2 x$

290. 设 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$使

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)dx\,.$$

难度等级：2;知识点：积分上限函数的导数

分析：构造辅助函数用罗尔定理

证 作$F(x)=\left(\int_x^b g(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^x f(x)dx\right)$

则 $F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$F'(x)=f(x)\int_x^b g(x)dx-g(x)\int_a^x f(x)dx.$

又由于有 $F(a)=F(b)=0$,由罗尔定理知,至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得

$F'(\xi)=0$ 即有下式成立 $f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx=g(\xi)\int_{a}^{\xi}f(x)dx$

291．证明恒等式

$$\int_{0}^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}dt+\int_{0}^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}dt=\frac{\pi}{4},(0<x<\frac{\pi}{2}).$$

难度等级：2;知识点：积分上限函数的导数

分析：构造辅助函数用微分中值定理

证 令 $f(x)=\int_{0}^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}dt+\int_{0}^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}dt$,则有：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$f'(x)=\sin 2x\cdot\arcsin(\sin x)-\sin 2x\cdot\arccos(\cos x)=x\sin 2x-x\sin 2x=0$$

故 $f(x)=C$.又由于 $f(\frac{\pi}{4})=\int_{0}^{1/2}(\arcsin\sqrt{t}+\arccos\sqrt{t})dt=\int_{0}^{1/2}\frac{\pi}{2}dt=\frac{\pi}{4}$.

故 $f(x)\equiv\frac{\pi}{4}$,即恒等式成立.

292. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微,且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$.试证:存在

$\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

难度等级：2;知识点：定积分中值定理

分析：构造辅助函数用罗尔定理

证　设 $F(x)=xf(x)$,由定积分中值定理,存在 $\eta\in[0,\frac{1}{2}]$,使

$$\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}F(x)dx=\frac{1}{2}F(\eta)$$

由已知条件,有 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=2\cdot\frac{1}{2}F(\eta)=F(\eta)$.

又由于 $F(1)=f(1)=F(\eta)$,且 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导,故由罗尔

定理，存在$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使得$F'(\xi)=0$,即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

293. 设函数$f(x)$为连续函数,证明:

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt.$$

难度等级：2;知识点：积分上限函数的导数

分析：定积分分部积分法

证　注意到$\frac{d}{dt}\int_0^t f(u)du=f(t)$，并利用分部积分法,所以

$$\text{左边}=\int_0^x(x-t)d\left[\int_0^t f(u)du\right]$$

$$=\left[(x-t)\int_0^t f(u)du\right]_{t=0}^{t=x}-\int_0^x\left[\int_0^t f(u)du\right]d(x-t)$$

$$=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)du\right]dt=\text{右边}$$

故等式成立

294. 设$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续,且$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$.

证明：若$f(x)$是非增函数,则$F(x)$是非减函数.

难度等级：2;知识点：积分上限函数

分析：函数的单调性

证　设$f(t)$是非增函数,即对任意$x_1<x_2$,有$f(x_1)\ge f(x_2)$

$$F(x)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$$

$$F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x[f(t)-f(x)]dt$$

当$x<0$时,$x\leqslant t\leqslant 0$, $f(x)\geqslant f(t)$　$F'(x)=\int_x^0[f(x)-f(t)]dt\ge 0$

当$x\geqslant 0$时,$0\leqslant t\leqslant x$, $f(t)\ge f(x)$　　$F'(x)\ge 0$

故对一切x,$F'(x)\ge 0$　即$F(x)$是非减函数

295. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导, $f(a)=0$, $|f'(x)|\le M$

$(M>0)$,证明： $\int_a^b f(x)dx \le \frac{M}{2}(b-a)^2$.

难度等级：2;知识点：lagrange 中值定理

分析： lagrange 中值公式

证 因 $f(a)=0$,由 lagrange 中值定理有：

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a) \qquad \xi\in(a,x)$$

于是 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b |f'(\xi)|(x-a)dx$

$$\le M\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b = \frac{M}{2}(b-a)^2$$

296. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)<1$; 证明方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一实根.

难度等级：2;知识点：根的存在定理,函数的单调性

分析：构造辅助函数 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$,再用根的存在定理,函数的单调性

证 设 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$

由条件知, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

且 $F(0)$=-1<0, $\qquad F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt>0$

由根的存在定理,存在 $\xi\in$（0,1），使得F（ξ）=0

即方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $(0,1)$ 内至少有一实根.

又因为 $F'(x)$=2-$f(x)>0$

所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加

故只有唯一点 $\xi\in$（0,1），使得F（ξ）=0. 即方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $(0,1)$ 内有

且仅有一实根.

297. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$.证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ,使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$, $x=a$ 所围成平面图形的面积是 曲 线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$, $x=b$ 所围成平面图形的面积的 3 倍.

难度等级：3;知识点：平面图形的面积

分析：积分上限函数,介值定理和函数单调性

解 如图所示

令 $F(t)=\left[f(t)(t-a)-\int_a^t f(x)dx\right]-3\left[\int_t^b f(x)dx-f(t)(b-t)\right]$

只要证明,在（a,b）内存在唯一的一点ξ,使 $F(\xi)=0$ 即可

因 $f'(x)>0 \quad x\in(a,b)$ 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加

于是 $F(a)=-3\left[\int_a^b f(x)dx-f(a)(b-a)\right]=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]dx<0$

$$F(b)=f(b)(b-a)-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b[f(x)-f(a)]>0$$

由介值定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使 $F(\xi)=0$

又 $\because F'(t)=f(t)+(t-a)f'(t)-f(t)-3[-f(t)+f(t)-(b-t)f'(t)]$

$$=f'(t)[(t-a)+3(b-t)]>0$$

即 $F(t)$ 单增,故仅存在唯一的 $\xi\in(a,b)$,使 $F(\xi)=0$

298. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(x)\geq 0$, $f(1)=0$,求证：

存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=\int_0^{\xi} f(x)dx$

难度等级：3;知识点： 介值定理,最大、最小值定理

分析：积分上限函数

证　(1) 如果 $f(x)\equiv 0$,则结论显然成立.

(2) 如果 $f(x)$ 不恒为零,则

$$M=\max_{x\in[0,1]} f(x)>0\text{,且}\int_0^1 f(x)dx>0$$

令 $F(x)=f(x)-\int_0^x f(t)dt$,则

$$F(1)=f(1)-\int_0^1 f(t)dt<0$$

设 $x_M\in[0,1)$，使得$f(x_M)=M$,则

$$F(x_M)=M-\int_0^{x_M} f(t)dt\begin{cases}=M>0, & (x_M=0)\\ \geq(1-x_M)M>0, & (x_M>0)\end{cases}$$

所以存在 $\xi\in(x_M,1)\subset(0,1)$,使 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\int_0^{\xi} f(x)dx$

299. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减,又设 $f(x)>0$,证明对于任意满足 $0<\alpha<\beta<1$ 的 α 和 β,恒有 $\beta\int_0^{\alpha} f(x)dx>\alpha\int_0^{\beta} f(x)dx$.

难度等级：3;知识点：微积分基本定理,定积分的性质和函数单调性

分析：作辅助函数,积分上限函数

证明　作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$,

由 $\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\dfrac{\int_0^x[f(x)-f(t)]dt}{x^2}<0$ 知 $\varphi(x)$ 单调递减,

故结论成立!

300．设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续可导.证明：

$$\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|\leq\int_0^1(|f(x)|+|f'(x)|)dx.$$

难度等级：3;知识点：积分中值定理

分析：积分上限函数

证　由积分中值定理知存在$\xi\in[0,1]$使得

$$\int_0^1|f(x)|dx=|f(\xi)|$$

又$\forall x\in[0,1]$　$\int_\xi^x f'(t)dt=f(x)-f(\xi)$

$$|f(x)|=\left|f(\xi)+\int_\xi^x f'(t)dt\right|\le|f(\xi)|+\left|\int_\xi^x|f'(t)|dt\right|\le\int_0^1|f(x)|dx+\int_0^1|f'(x)|dx$$

故有　$\max\limits_{0\le x\le1}|f(x)|\le\int_0^1(|f(x)|+|f'(x)|)dx$

301. 设函数$f(x)$在$\left[a,b\right]$上具有一阶连续导数，且$f(a)=f(b)=0,\underset{a\le x\le b}{Max}|f'(x)|=M$

求证$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\dfrac{1}{4}M(b-a)^2.$

难度等级:3；知识点：微分中值定理

分析:�定积分的性质

证$\because\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)-f(a)|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(x)|(x-a)dx\le M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx=\frac{M}{8}(b-a)^2,$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)-f(b)|dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(x)|(b-x)dx\le M\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)dx=\frac{M}{8}(b-a)^2,$$

$\therefore\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\dfrac{1}{4}M(b-a)^2$

302．证明方程$2^x-x^2-1=0$有且只有三个实根.

难度等级：3;知识点：闭区间连续函数的性质

分析：介值定理,罗尔定理

证明：设$f(x)=2^x-x^2-1$,则$f(0)=0,f(1)=0$,于是$x=0,x=1$是原方程的两个根,

因为$f(2)=-1<0$,$f(5)=6>0$,由零点定理（介值定理）,存在$x_3\in(2,5)$,使得

$f(x_3)=0$．所以$2^x-x^2-1=0$至少有三个不同的实根.

$$f'(x)=2^x\ln2-2x,\ f''(x)=2^x(\ln2)^2-2,\ f'''(x)=2^x(\ln2)^3,\ f'''(x)=2^x(\ln2)^3>0$$

下面根据 $f'''(x)>0$,用反证法证明方程 $f(x)=0$ 最多有三个实根:

如果 $f(x)=0$ 多于三个实根,不妨有四个实根: x_1,x_2,x_3,x_4 （其中 $x_1<x_2<x_3<x_4$ ）对三个小区间 $(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4)$ 应用罗尔定理,存在 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3),\xi_3\in(x_3,x_4)$ 使得 $f'(\xi_1)=0,f'(\xi_2)=0,f'(\xi_3)=0$. 再对 $f'(x)$ 在两个区间 $(\xi_1,\xi_2),(\xi_2,\xi_3)$ 应用罗尔定理,存在 $\eta_1\in(\xi_1,\xi_2),\eta_2\in(\xi_2,\xi_3)$,使得 $f''(\eta_1)=0,f''(\eta_2)=0,$ 最后对 $f''(x)$ 在区间 (η_1,η_2) 应用罗尔定理,存在 $\zeta\in(\eta_1,\eta_2)$,使得 $f'''(\zeta)=0,$ 与 $f'''(x)>0$ 矛盾. 故方程 $f(x)=0$ 最多有三个实根. 因此方程 $2^x-x^2-1=0$ 有且只有三个实根.

303.设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续,且 $f(x)>0$.证明:

$$F(x)=\frac{\int_0^x t\ f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}\quad \text{在区间}[0,+\infty)\text{内为单调增加的函数.}$$

难度等级: 3;知识点: 函数的单调性

分析: 定积分性质,积分上限函数

证 首先指出,当 $x>0$ 时,

分母 $\int_0^x f(t)dt>0$ 所以 $F(x)$ 在（0,+∞）内有定义.

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$$

由于 $0\le t\le x$ 时 $f(t)>0,$ $(x-t)f(t)\ge 0$,且 $(x-t)f(t)$ 不恒等于零

故 $\int_0^x (x-t)f(t)dt>0$

所以,当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $F'(x)>0,$ 故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加

304. 设 $y=f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数,

(1)证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得在 $[0,\xi]$ 上以 $f(\xi)$ 为高的矩形面积等于 $[\xi,1]$

上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积;

(2)若 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导且 $f'(x)>\dfrac{-2f(x)}{x}$,证明 ξ 是唯一的.

难度等级：3;知识点：平面图形的面积,函数的单调性

分析：作辅助函数,积分上限函数

证 （1）设 $F(x)=-x\int_x^1 f(x)dx$

由条件,$F(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$ 内可导

且 $F(0)=0, F(1)=0$

据罗尔定理,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)dx$

即在 $[0,\xi]$ 上以 $f(\xi)$ 为高的矩形面积等于 $[\xi,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积.

（2）由条件 $f'(x)>\dfrac{-2f(x)}{x}$

$F'(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)dt$， $F''(x)=2f(x)+xf'(x)>0$

所以 $F'(x)$ 单调增加

故存在唯一的 $\xi\in(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$,即 $\xi f(\xi)=\int_\xi^1 f(x)dx$

305. 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续,证明：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$$ （Cauchy-Schwarz 不等式）

难度等级：3;知识点：微积分基本定理,函数的单调性

分析：作辅助函数,积分上限函数的导数

证 设 $F(t)=\int_a^t f^2(x)dx\cdot\int_a^t g^2(x)dx-\left(\int_a^t f(x)g(x)dx\right)^2(a\le t\le b)$

因 $F'(t)=f^2(t)\int_a^t g^2(x)dx+g^2(t)\int_a^t f^2(x)dx-2f(t)g(t)\int_a^t f(x)g(x)dx$

$$=\int_a^t \left[f(t)g(x)-f(x)g(t)\right]^2 dx \ge 0$$

所以 $F(t)$ 非减,又因 $F(a)=0$

故 $F(b)\ge 0$

即 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

306. 设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续,证明:

$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$（闵可夫斯基不式）

难度等级：3;知识点：微积分基本定理,函数的单调性

分析：　先证 Canchy-schwarz 不等式,再利用 Canchy-schwarz 不等式

证　利用 Canchy-schwarz 不等式

$$\text{右端的平方}=\int_a^b f^2(x)dx+2\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx}+\int_a^b g^2(x)dx$$

$$\ge \int_a^b f^2(x)dx+2\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx$$

$$=\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx=\text{左端的平方}$$

故右端⩾左端.