

丘成桐 数学与中国文学的比较 数学文采在简洁 寥寥数语道出不同现象的法则 数学的赋比兴 数学的意境



知乎用户NKtEou
复兴唐宋传统文化 禅宗国学

13 人赞同了该文章

丘成桐：数学与中国文学的比较

很多人会觉得我今日的讲题有些奇怪，中国文学与数学好像是风马牛不相及，但我却讨论它。其实这关乎个人的感受和爱好，不见得其他数学家有同样的感觉，“如人饮水，冷暖自知”。每个人的成长和风格跟他的文化背景、家庭教育有莫大的关系。我幼受庭训，影响我至深的是中国文学，而我最大的兴趣是数学，所以将它们做一个比较，对我来说是相当有意义的事。

中国古代文学记载最早的是诗三百篇，有风雅颂，既有民间抒情之歌，朝廷礼仪之作，也有歌颂或讽刺当政者之曲。至孔子时，文学为君子立德和陶冶民风而服务。战国时，诸子百家都有著述，在文学上有重要的贡献，但是诸子如韩非却轻视文学之士。屈原开千古辞赋之先河，毕生之志却在楚国的复兴。文学本身在古代社会没有占据到重要的地位。司马迁甚至说：“文史、星历，近乎卜祝之间，固主上所戏弄，倡优畜之，流俗之所轻也。”一直到曹丕才全面肯定文学本身的重要性：“盖文章，经国之大业，不朽之盛事。”即使如此，曹丕的弟弟曹植却不以为文学能与治国的重要性相比。他写信给他的朋友杨修说：“吾虽德薄，位为蕃侯，犹庶几戮力上国，流惠下民，建永世之业，留金石之功。岂徒以翰墨为勋绩，辞赋为君子哉。”

至于数学，中国儒家将它放在六艺之末，是一个辅助性的学问。当政者更视之为雕虫小技，与文学比较，连歌颂朝廷的能力都没有。政府对数学的尊重要到近年来才有极大的改进。西方则不然，希腊哲人以数学为万学之基。柏拉图以通几何为入其门坎之先决条件，所以数学家得到崇高地位，数学在西方蓬勃发展了两千多年。

【数学之基本意义】

数学之为学，有其独特之处，它本身是寻求自然界真相的一门科学，但数学家也如文学家般天马行空，凭爱好而创作，故此**数学可说是人文科学和自然科学的桥梁**。

数学家研究大自然所提供的一切素材，寻找它们共同的规律，用数学的方法表达出来。这里所说的大自然比一般人所了解的来得广泛，我们认为数字、几何图形和各种有意义的规律都是自然界的一部分，我们希望用简洁的数学语言将这些自然现象的本质表现出来。

数学是一门公理化的科学，所有命题必须由三段论证的逻辑方法推导出来，但这只是数学的形式，而不是数学的精髓。大部分数学著作枯燥乏味，而有些却令人叹为观止，其中的分别在哪里？

大略言之，**数学家以其对大自然感受的深刻肤浅来决定研究的方向**，这种感受既有其客观性，也有其主观性，后者则取决于个人的气质，气质与文化修养有关，无论是选择悬而未决的难题，或者创造新的方向，文化修养皆起着关键性的作用。文化修养是以数学的功夫为基础，自然科学为副，但是深厚的人文知识也极为要紧，因为人文知识也致力于描述心灵对大自然的感受，所以司马迁写《史记》除了“通古今之变”外，也要“究天人之际”。

刘勰在《文心雕龙·原道篇》说文章之道在于：“写天地之辉光，晓生民之耳目。”刘勰以为文章之可贵，在尚自然，在贵文采。他又说：“人与天地相参，乃性灵所集聚，是以谓之三才，为五行之秀气，实天地之灵气。灵心既生，于是语言以立。语言既立，于是文章着明，此亦原于自然之道也。”《文心雕龙·风骨》：“诗总六义，风冠其首，斯乃化感之本源，志气之符契也。”

历代的大数学家如阿基米德、牛顿莫不以自然为宗，见物象而思数学之所出，即有微积分的创作。费马和欧拉对变分法的开创性发明也是由于探索自然界的现象而引起的。

近代几何学的创始人高斯认为几何和物理不可分，他说：“我越来越确信几何的必然性无法被验证，至少现在无法被人类或为了人类而验证，我们或许能在未来领悟到那无法知晓的空间的本质。我们无法把几何和纯粹是先验的算术归为一类，几何和力学却不可分割。”

20世纪几何学的发展，则因物理学上重要的突破而屡次改变其航道。当狄拉克把狭义相对论用到量子化的电子运动理论时，发现了狄拉克方程，以后的发展连狄拉克本人也叹为观止，认为他的方程比他的想象来得美妙，这个方程在近代几何的发展起着关键性的贡献，我们对旋子的描述缺乏直观的几何感觉，但它出于自然，自然界赋予几何的威力可说是无微不至。

广义相对论提出了场方程，它的几何结构成为几何学家梦寐以求的对象，因为它能赋予空间一个调和而完美的结构。我研究这种几何结构垂三十年，时而迷惘，时而兴奋，自觉同《诗经》、《楚辞》的作者或晋朝的陶渊明一样，与大自然浑为一体，自得其趣。

捕捉大自然的真和美，实远胜于一切人为的造作，正如《文心雕龙》说的：“云霞雕色，有踰画工之妙。草木菁华，无待锦匠之奇，夫岂外饰，盖自然耳。”

在空间上是否存在满足引力场方程的几何结构，是一个极为重要的物理问题，它也逐渐地变成几何中伟大的问题。尽管其他几何学家都不相信它存在，我却锲而不舍，不分昼夜地去研究它，就如屈原所说：“亦余心之所善兮，虽九死其犹未悔。”

我花了五年工夫，终于找到了具有超对称的引力场结构，并将它创造成数学上的重要工具。当时的心境可以用以下两句来描述：“落花人独立，微雨燕双飞。”

以后大批的弦理论学家参与研究这个结构，得出很多深入的结果。刚开始时，我的朋友们都对这类问题敬而远之，不愿意与物理学家打交道。但我深信造化不致弄人，回顾十多年来在这方面的研究尚算满意，现在卡拉比-丘空间的理论已经成为数学的一支主流。

【数学的文采】

数学的文采，表现于简洁，寥寥数语，便能道出不同现象的法则，甚至在自然界中发挥作用，这是数学优雅美丽的地方。我的老师陈省身先生创作的陈氏类，就文采斐然，令人赞叹。它在扭曲的空间中找到简洁的不变量，在现象界中成为物理学界求量子化的主要工具，可说是描述大自然美丽的诗篇，直如陶渊明“采菊东篱下，悠然见南山”的意境。

从欧氏几何的公理化、到笛卡儿创立的解析几何，到牛顿、莱布尼茨的微积分，到高斯、黎曼创立的内蕴几何，一直到与物理学水乳相融的近代几何，都以简洁而富于变化为宗，其文采绝不逊色于任何一件文学创作，它们发轫的时代与文艺兴起的时代相同，绝对不是巧合。

数学家在开创新的数学想法的时候，可以看到高雅的文采和崭新的风格，例如欧几里得证明存在无穷多个素数，开创反证法的先河。高斯研究十七边形的对称群，使伽罗瓦群成为数论的骨干。这些研究异军突起，论断华茂，使人想起五言诗的始祖苏(武)李(陵)唱和诗以及词的始祖李太白的《忆秦娥》。

【数学中的赋比兴】

中国诗词都讲究比兴。钟燦在《诗品》中说：“文已尽而意有余，兴也。因物喻志，比也。”

刘勰在《文心雕龙》中说：“故比者，附也。兴者，起也。附理者切类以指事，起情者依微以拟议。起情故兴体以立，附理故比例以生。”

白居易：“噫，风雪花草之物《三百篇》中岂含之乎？顾所用何如耳，设如北风其凉，假风以刺威虐也，雨雪霏霏，因雪以愍征役也……比兴发于此而义归于彼。”他批评谢朓诗：“‘余霞散成绮，澄江净如练。’丽则丽矣，吾不知其所讽焉，故仆所谓嘲风雪，弄花草而已，文意尽去矣。”

有深度的文学作品必需要有“义”、有“讽”、有“比兴”。数学亦如是。我们在寻求真知时，往往只能凭已有的经验，因循研究的大方向，凭我们对大自然的感觉而向前迈进，这种感觉是相当主观的，因个人的文化修养而定。

文学家为了达到最佳意境的描述，不见得忠实地描写现象界，例如贾岛只追究“僧推月下门”或是“僧敲月下门”的意境，而不在乎所说的是不同的事实。数学家为了创造美好的理论，也不必依随大自然的规律，只要逻辑推导没有问题，就可以尽情地发挥想象力。然而文章终究有高下之分，大致来说，好的文章“比兴”的手法总会比较丰富。

中国《古诗十九首》，作者年代不详，但大家都认为是汉代的作品。刘勰说：“比采而推，两汉之作乎。”这是从诗的结构和风格进行推敲而得出的结论。在数学的研究过程中，我们亦利用比的方法去寻找真理。**我们创造新的方向时，不必凭实验，而是凭数学的文化涵养去猜测去求证。**

举例而言，三十年前我提出一个猜测，断言三维球面里的光滑极小曲面，其第一特征值等于2。当时这些曲面例子不多，只是凭直觉，利用相关情况模拟而得出的猜测，最近有数学家写了一篇文章证明这个猜想。其实我的看法与文学上的比兴很相似。

我们看《洛神赋》：“翩若惊鸿，婉若游龙。荣曜秋菊，华茂春松。髣髴兮若轻云之蔽月，飘飘兮若流风之回雪。”由比喻来刻画女神的体态。又看《诗经》：“高山仰止，景行行止。四牡，六轡如琴，覯尔新婚，以慰我心。”也是用比的方法来描写新婚的心情。

我一方面想象三维球的极小子曲面应当是如何的匀称，一方面想象第一谱函数能够同空间的线性函数比较该有多妙，通过原点的平面将曲面最多切成两块，于是猜想这两个函数应当相等，同时第一特征值等于2。

当时我与卡拉比（Calabi）教授讨论这个问题，他也相信这个猜测是对的。旁边我的一位研究生问为什么会做这样的猜测，不待我回答，卡教授便微笑说这就是洞察力了。

数学上常见的对比方法乃是低维空间和高维空间现象的对比。我们虽然看不到高维空间的事物，但可以看到一维或二维的现象，并由此来推测高维的变化。我在做研究生时企图将二维空间的单值化原理推广到高维空间，得到一些漂亮的猜测，我认为曲率的正或负可以作为复结构的指向，这个看法影响至今，可以溯源到19世纪和20世纪初期曲率和保角映射关系的研究。

另外一个对比的方法乃是数学不同分支的比较。记得我从前用爱氏结构证明代数几何中一个重要不等式时，日本数学家宫冈（Miyazaka）利用俄国数学家博戈莫洛夫（Bogomolov）的代数稳定性理论也给出这个不等式的不同证明，因此我深信爱氏结构和流形的代数稳定有密切的关系，这三十年来年的发展也确是朝这个方向蓬勃地进行。

事实上，爱因斯坦的广义相对论也是对比各种不同的学问而创造成功的，它是科学史上最伟大的构思，可以说是惊天地而泣鬼神的工作。它统一了古典的引力理论和狭义相对论。爱氏花了十年功夫，基于等价原理，比较了各种描述引力场的方法，巧妙地用几何张量来表达引力场，将时空观念全盘翻新。

爱氏所用的工具是黎曼几何，乃是黎曼比他早五十年发展出来的，当时的几何学家唯一的工具是对比，在古典微积分、双曲几何和流形理论的模拟后得出来的漂亮理论。反过来说，广义相对论给黎曼几何注入了新的生命。

20世纪数论的一个大突破乃是算术几何的产生，利用群表示理论为桥梁，将古典的代数几何、拓扑学和代数数论比较，有如瑰丽的歌曲，它的发展势不可挡，气势如虹，“天之所开，不可当也”。韦伊（A.Weil）研究代数曲线在有限域上解的问题后，得出高维代数流形有限域解的猜测，推广了代数流形的基本意义，直接影响了近代数学的发展。筹学所问，无过于此矣。

伟大的数学家远瞩高瞻，看出整个学问的大流，有很多合作者和跟随者将支架建立起来，解决很多重要的问题。正如曹雪芹创造《红楼梦》时，也是一样，全书既有真实，亦有虚构。既有前人小说如《西厢记》、《金瓶梅》、《牡丹亭》等的踪迹，亦有作者家族凋零、爱情悲剧的经验，通过各种不同人物的话语和生命历程，道出了封建社会大家族的腐败和破落。《红楼梦》的写作影响了清代小说垂二百年。

《西厢记》和《牡丹亭》的每一段写作和描述男女主角的手法都极为上乘，但是全书的结构则是一般的佳人才子写法，由《金瓶梅》进步到《红楼梦》则小处和大局俱佳。

这点与数学的发展极为相似，从局部的结构发展到大范围的结构是近代数学发展的一个过程。往往通过比兴的手法来处理。几何学和数论都有这一段历史，代数几何学家在研究奇异点时通过爆炸的手段，有如将整个世界浓缩在一点。微分几何和广义相对论所见到的奇异点比代数流形复杂，但是也希望从局部开始，逐渐了解整体结构。数论专家研究局部结构时则通过素数的模方法，将算术流形变成有限域上的几何，然后和大范围的算术几何对比，得出丰富的结果。数论学家在研究朗兰兹理论时也多从局部理论开始。

好的作品需要赋比兴并用。钟燦《诗品》：“直书其事，寓言写物，赋也。宏斯三义，酌而用之，干之以风力，润之以丹采，使味之者无极，闻之者动心，是诗之至也。若专用比兴，则患在意深，意深则词蹶。若但用赋体，则患在意浮，意浮则文散。”

在数学上，对非线性微分方程和流体方程的深入了解，很多时需要靠计算器来验算。很多数学家有能力做大量的计算，却不从大处着想，没有将计算的内容与数学其他分支比较，没有办法得到深入的看法，反过来说只讲观念比较，不作大量计算，最终也无法深入创新。

有些工作却包含赋比兴三种不同的精义。近五十年来数论上一个伟大的突破是由英国人伯奇（Birch）和斯温奈顿-戴尔（Swinneton-Dyer）提出的一个猜测，开始时用计算器大量计算，找出L函数和椭圆曲线的整数解的联系，与数论上各个不同的分支比较接合，妙不可言，这是赋比兴都有的传世之作。

【数学家对事物看法的多面性】

由于文学家对事物有不同的感受，同一事或同一物可以产生不同的吟咏。例如对杨柳的描述：

温庭筠：“柳丝长，春雨细……”

吴文英：“一丝柳，一寸柔情，料峭春寒中酒……”

李白：“年年柳色，灞陵伤别。”“风吹柳花满座香，吴姬压酒劝客尝。”

周邦彦：“柳阴直，烟里丝丝弄碧，隋堤上，曾见几番，拂水飘绵送行色……长亭路，年去岁来，应折柔条过千尺。”

晏几道：“舞低杨柳楼心月，歌尽桃花扇底风。”

柳枝既然是柔条，又有春天时的嫩绿，因此可以代表柔情，女性体态的柔软（柳腰、柳眉都是用柳条来描写女性），又可以描写离别感情和青春的感觉。

对事物有不同的感受后，往往通过比兴的方法另有所指，例如“美人”有多重意思，除了指美丽的女子外，也可以指君主：屈原《九章》“结微情以陈词兮，矫以遗夫美人”。也可以指品德美好的人：《诗经·邶风》中的“云谁之思，西方美人”，苏轼《赤壁赋》中的“望美人兮天一方”。

数学家对某些重要的定理，也会提出很多不同的证明。例如勾股定理的不同证明有十个以上，等周不等式亦有五六个证明，高斯则给出数论对偶定律六个不同的看法。不同的证明让我们以不同的角度去理解同一个事实，往往引导出数学上不同的发展。

记得三十年前我利用分析的方法来证明完备而非紧致的正曲率空间有无穷大体积后，几何学家格罗莫夫（Gromov）开始时不相信这个证明，以后他找出我证明方法的几何直观意义后，发展出他的几何理论，这两个不同观念都有它们的重要性。

小平邦彦有一个极为重要的贡献叫做消灭定理，是用曲率的方法来得到的，它在代数几何学上有奠基性的贡献，代数几何学家却不断地企图找寻一个纯代数的证明，希望对算术几何有比较深入的了解。

对空间中的曲面，微分几何学家会问它的曲率如何，有些分析学家希望沿着曲率方向来推动它一下看看有什么变化，代数几何学家可以考虑它可否用多项式来表示，数论学家会问上面有没有整数格点。这种种主观的感受由我们的修养来主导。

反过来说，文学家对同一事物亦有不同的歌咏，但在创作的工具上却有比较统一的对仗韵律的讲究，可以应用到各种不同的文体。从数学的观点来说，对仗韵律是一种对称，而对称的观念在数学发展至为紧要，是所有数学分支的共同工具。另外，数学家又喜欢用代数的方法来表述空间的结构，同调群乃是重要的例子，由拓扑学出发而应用到群论、代数、数论和微分方程学上去。

【数学的意境】

王国维在《人间词话》中说：“词以境界为最上。有境界则自成高格……有造境，有写境，此理想与写实二派之所由分。然二者颇难分别，因大诗人所造之境必合乎自然，所写之境亦必邻于理想故也。有有我之境，有无我之境。‘泪眼问花花不语，乱红飞过秋千去。’……有我之境也。‘采菊东篱下，悠然见南山。’……无我之境也。有我之境，以我观物，故物皆着我之色彩。无我之境，以物观物，故不知何者为我，何者为物……无我之境，人唯乎静中得之。有我之境，于由动入静时得之，故一优美，一宏壮也。自然之物互相关系，互相限制。然其写之于文学及美术中也，必有其关系限制之处。故虽写实家亦理想家也。又虽如何虚构之境，其材料必求之于自然，而其构造亦必从自然之法律。故虽理想家亦写实家也。”

数学研究当然也有境界的概念，在某种程度上也可谈有我之境、无我之境。当年欧拉开创变分法和推导流体方程，由自然现象引导，可谓无我之境。他又凭自己的想象力研究发散级数，而得到zeta函数的种种重要结果，开三百年数论之先河，可谓有我之境矣。另外一个例子是法国数学家格罗滕迪克 (A. Grothendieck)，他著述极丰，以个人的哲学观点和美感出发，竟然不用实例，建立了近代代数几何的基础，真可谓有我之境矣。

在几何的研究中，我们发现狄拉克在物理上发现的旋子在几何结构中有魔术性的能力，我们不知道它内在的几何意义，它却替我们找到几何结构中的精髓。在应用旋子理论时，我们常用的手段是通过所谓消灭定理而完成的，这是一个很微妙的事情，我们制造了曲率而让曲率自动发酵去证明一些几何量的不存在，可谓无我之境矣。以前我提出用爱因斯坦结构来证明代数几何的问题和用调和映像来看研究几何结构的刚性问题也可作如是观。不少伟大的数学家，以文学、音乐来培养自己的气质，与古人神交，直追数学的本源，来达到高超的意境。

《文心雕龙·神思》说：“文之思也，其神远矣。故寂然凝虑，思接千载；悄然动容，视通万里。吟咏之间，吐纳珠玉之声，眉睫之前，卷舒风云之色，其思理之致乎。”

【数学的品评】

好的工作应当是文已尽而意有余，大部分数学文章质木无文，流俗所好，不过两三年耳。但是有创意的文章，未必为时所好，往往十数年后始见其功。

我曾经用一个崭新的方法去研究调和函数，以后和几个朋友一同改进了这个方法，成为热方程的一个重要工具。开始时没有得到别人的赞赏，直到最近五年大家才领会到它的潜力。然而我们还是锲而不舍地去研究，觉得意犹未尽。

我的老师陈省身先生在他的文集中引杜甫诗“文章千古事，得失寸心知。”而杜甫就曾批评初唐四杰的作品：“王杨卢骆当时体，轻薄为文哂未休，尔曹身与名俱灭，不废江河万古流。”

时俗所好的作品，不必为作者本人所认同。举个例子，白居易留传至今的诗甚多，最出名之一是《长恨歌》，但他给元微之的信中却说：“及再来长安，又闻有军使欲聘倡伎，伎大夸曰：‘我诵得白学士《长恨歌》，岂同他伎哉。’……诸伎见仆来，指而相顾曰：‘此是《秦中吟》、《长恨歌》主耳。’自长安抵江西，三四千里……每有咏仆诗者，此诚雕虫之技，不足为多，然今时俗所重，正在此耳。”

白居易说谢朓的诗丽而无讽。其实建安以后，绮丽为文的作者甚众。亦自有其佳处，毕竟钟嵘评谢朓诗为中品，以后六朝骈文、五代《花间集》以至近代的鸳鸯蝴蝶派都是绮丽为文。虽未臻上乘，却有赏心悦目之句。

数学华丽的作品可从泛函分析这种比较广泛的学问中找到，虽然有其美丽和重要性，但与自然之道总是隔了一层。举例来说，从函数空间抽象出来的一个重要概念叫做巴拿赫空间，在微分方程中有很重要的功用，但是以后很多数学家为了研究这种空间而不断地推广，例如有界算子是否存在不变空间的问题，确是漂亮，但在数学大流上却未有激起任何波澜。

在70年代，高维拓扑的研究已成强弩之末，作品虽然不少，但真正有价值的不多，有如“野云孤飞，去留无迹”。文气已尽，再无新的比兴了。当时有拓扑学者做群作用于流形的研究，确也得到某些人的重视。但是到了80年代，值得怀念的工作只有博特 (Bott) 的局部化定理。能经得起时间考验的工作寥寥无几，政府评审人才应当以此为首选。历年来以文章篇数和被引用多寡来做指标，使得国内的数学工作者水平大不如人，不单与自然隔绝，连华丽的文章都难以看到。

【数学的演化】

王国维说：“四言敝而有楚辞，楚辞敝而有五言，五言敝而有七言，古诗敝而有律绝，律绝敝而有词。盖文体通行既久，染指遂多，自成习套。豪杰之士亦难于其中自出新意，故遁而作他体以自解脱。一切文体所以始盛中衰者，皆由于此，故谓文体后不如前，余未敢言。但就一体论，则此说固无以易也。”

数学的演化和文学有极为类似的变迁。从平面几何至立体几何，至微分几何等等，一方面是工具得到改进，另一方面是对自然界有进一步的了解，将原来所认识的数学结构的美发挥尽至后，需要进入新的境界。江山代有人才，能够带领我们进入新的境界的都是好的数学。上面谈到的高维拓扑文气已尽，假使它能与微分几何、数学物理和算术几何组合变化，亦可振翼高翔。

我在香港念数学时，读到苏联数学家盖尔范德（I. Gelfand）的看法，用函数来描述空间的几何性质，使我感触良深，以后在研究院时才知道。代数几何学家也用有理函数来定义代数空间，于是我猜想一般的黎曼流形应当也可以用函数来描述空间的结构。但是为了深入了解流形的几何性质，我们需要的函数必需由几何引出的微分方程来定义。可是一般几何学家厌恶微分方程，我对它却情有独钟，与几个朋友合作将非线性方程带入几何学，开创了几何分析这门学问，解决了拓扑学和广义相对论一些重要问题。在1981年时我建议友人哈密顿（Hamilton）用他创造的方程去解决三维拓扑的基本结构问题，二十多年来他引进了不少重要的工具，运用上述我和李伟光在热方程的工作，深入地了解了奇异点的产生。两年前俄国数学家普雷尔曼（Perelman）更进一步地推广了这个理论，很可能完成了我的愿望，将几何和三维拓扑带进了新纪元。

当一个大问题悬而未决的时候，我们往往以为数学之难莫过于此。待问题解决后，前途豁然开朗，看到比原来更为灿烂的火花，就会有不同的感受。

这点可以跟《庄子·秋水篇》比较：“秋水时至，百川灌河，泾流之大，两涘渚崖之间，不辩牛马。于是焉河伯欣然自喜，以天下之美为尽在己，顺流而东行，至于北海，东面而视，不见水端，于是焉河伯始旋其面目，望洋向若而叹曰：‘野语有之曰：闻道百，以为莫已若者，我之谓也。且夫我尝闻少仲尼之闻，而轻伯夷之义者，始吾弗信，今我睹子之难穷也。吾非至于子之门，则殆矣。吾长见笑于大方之家。’”

科学家对自然界的了解，都是循序渐进，在不同的时空自然会有不同的感受。有学生略识之无后，不知创作之难，就连陈省身先生的大作都看不上眼，自以为见识更为丰富，不自见之患也。人贵自知，始能进步。

庄子：“今尔出于崖涘，观于大海，乃知尔丑，尔将可与语大理矣。”

我曾经参观德国的格丁根大学，看到19世纪和20世纪伟大科学家的手稿，他们传世的作品只是他们工作的一部分，很多杰作都还未发表，使我深为惭愧而钦佩他们的胸襟。今人则不然，大量模仿，甚至将名作稍为改动，据为己有，尽快发表。或申请院士，或自炫为学术宗匠，于古人何如哉。

【数学的感情】

为了达到深远的效果，数学家需要找寻问题的精华所在，需要不断地培养我们对问题的感情和技巧，这一点与孟子所说的养气相似。气有清浊，如何寻找数学的魂魄，视乎我们的文化修养。

白居易说：“圣人感人心而天下和平，感人心者，莫先乎情，莫始乎言，莫切乎声，莫深乎义……未有声入而不应，情交而不感者。”

严羽《沧浪诗话》：“盛唐诸公唯在兴趣，羚羊挂角，无迹可求。故其妙处透澈玲珑，不可凑拍，如空中之音，相中之色，水中之影，镜中之像，言有尽而意无穷。”

我的朋友哈密顿先生，他一见到问题可以用曲率来推动，他就眉飞色舞。另外一个澳洲来的学生，见到与爱因斯坦方程有关的几何现象就赶快找寻它的物理意义，兴奋异常，因此他们的文章都是清纯可喜。反过来说，有些成名的学者，文章甚多，但陈陈相因，了无新意。这是对自然界、对数学问题没有感情的现象，反而对名位权利特别重视。为了院士或政协委员的名衔而甘愿千里仆仆风尘地奔波，在这种情形下，难以想象他们对数学、对自然界有深厚的感情。

数学的感情是需要培养的，慎于交友才能够培养气质。博学多闻，感慨始深，堂庑始大。欧阳永叔说：“人间自是有情痴，此恨不关风与月。”“直须看尽洛城花，始与东风容易别。”能够有这样的感情，才能够达到晏殊所说：“昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路。”

浓厚的感情使我们对研究的对象产生直觉，这种直觉看对象而定，例如在几何上叫做几何直觉。好的数学家会将这种直觉写出来，有时可以用来证明定理，有时可以用来猜测新的命题或提出新的学说。

但数学毕竟是说理的学问，不可能极度主观。《诗经》中的《蓼莪》、《黍离》，屈原《离骚》、《九江》，汉都尉河梁送别，陈思王归藩伤逝，李后主忆江南，宋徽宗念故宫，俱是以血书成、直抒胸臆，非论证之学所能及也。

【数学的应用】

王国维说：“诗人对宇宙人生须入乎其内，又须出乎其外。入乎其内，故能写之，出乎其外，故能观之，入乎其内，故有生气，出乎其外，故有高致。美成能入而不能出，白石以降，二事皆未梦见。”“词之雅郑，在神不在貌。永叔少游虽作艳语，终有品格，方之美成，便有淑女与倡伎之别。”

数学除与自然相交外，也与人为的事物相接触，很多数学问题都是纯工程上的问题。有些数学家毕生接触的都是现象界的问题，可谓入乎其内。大数学家如欧拉、傅里叶、高斯、维纳、冯·诺伊曼等都能入乎其内，出乎其外，既能将抽象的数学在工程学上应用，又能在实用的科学中找出共同的理念而发展出有意义的数学。反过来说，有些应用数学家只用计算器作出一些计算，不求甚解，可谓二者皆未见矣。

傅里叶在研究波的分解时，得出傅里叶级数的展开方法，不但成为应用科学最重要的工具，在基本数学上的贡献也是不可磨灭的。近代孤立子的发展和几何光学的研究，都在基本数学上占了一个重要的位置。

应用数学对基本数学的贡献可与元剧比较。王国维评元剧：“其作剧也，非有藏之名山，传之其人之意也，彼以意兴之所至为之，以自娱娱人，关目之拙劣，所不问也；思想之卑陋，所不讳也；人物之矛盾，所不顾也。彼但摹写其胸中之感想与时代之情状，而真挚之理与秀杰之气时流露于其间。”

例如金融数学旨在谋利，应用随机过程理论，间有可观的数学内容。正如王国维评古诗“何不策高足，先据要路津，无为久贫贱，轲长苦辛”，认为“无视其鄙者，以其真也”。伟大的数学家高斯就是金融数学的创始人，他本人投资股票而获利；克莱因则研究保险业所需要的概率论。

【数学的训练】

好的数学家需要领会自然界所赋予的情趣，因此也须向同道学习他们的经验。然而学习太过，则有依傍之病。顾亭林云：“君诗之病在于有杜，君文之病在于有韩，欧。有此蹊径于胸中，便终身不脱依傍二字，断不能登峰造极。”

数学家如何不依傍才能做出有创意的文章？

屈原说：“纷吾既有此内美兮，又重之以修能。”

如何能够解除名利的束缚，俾欣赏大自然的直觉毫无拘束地表露出来，乃是数学家养气最重要的一步。

贾谊说：“独不见夫鸾凤之高翔兮，乃集大皇之野。循四极而回周兮，见盛德而后下。彼圣人之神德兮，远浊世而自藏。使麒麟可得羁而系兮，又何以异乎犬羊。”

媒体或一般传记作者喜欢说某人是天才，下笔成章，仿佛做学问可以一蹴而就。其实无论文学和数学，都需要经过深入的思考才能产生传世的作品。柳永说：“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴。”

一般来说，作者经过长期浸淫，才能够出口成章，经过不断推敲，才有深入可喜的文采。王勃《滕王阁序》，丽则丽矣，终不如陶渊明《归去来辞》、庾信《哀江南赋》、曹植《洛神赋》诸作来得结实。文学家的推敲在于用字和遣辞。张衡两京、左思三都，构思十年，始成巨构，声闻后世，良有以也。数学家的推敲极为类似，由工具和作风可以看出他们特有的风格。传世的数学创作更需要有宏观的看法，也由锻炼和推敲才能成功。

曹丕说：“古人贱尺璧而重寸阴，惧乎时之过已，而人多不强力；贫贱则慑于饥寒，富贵则流于逸乐，遂营目前之务，而遗千载之功。日月逝于上体貌衰于下。忽然于万于迁化，斯志士之大痛也。”

三十年来我研究几何空间上的微分方程，找寻空间的性质，究天地之所生，参万物之行止。乐也融融，怡然自得，溯源所自，先父之教乎。

编辑于 2020-06-05 17:14

丘成桐（数学家）


中国文学

数学哲学

写下你的评论...

1 条评论

默认 最新



知乎用户NKtEou

作者

物理学与数学的哲学思想，最根本的还是学者对自己生命的认知。这一点，丘成桐说的十分透彻。

2020-06-05

回复

2

推荐阅读

- 有关丘成桐“大谈数学的哲学”

这句话似乎在某种程度上被滥用了，我们来看完整的原文和相关采访，重新思考丘成桐先生想说什么： 原文：就举办大学生数学竞赛致数学同仁的一封信 尊敬的同仁， 我们最近倡议举办大学生…

竺道梓
- 丘成桐：几十年人文教育缺失，多数中国数学家只能“萧规曹…

情感是科学发现的原动力。我遇见过很多大科学家，尤其是有原创性的科学家，对文艺都有涉猎。他们的文笔流畅，甚至可以媲美文学家的作品。而出色的理文创作，必须有浓厚的感情和理想。文艺…

数学经纬网



数学之美：当代最伟大数学家回顾过去百年的数学

林辉

发表于扑克投资家