堆垒素数论之旅（1）：奇数哥德巴赫猜想

王玉超
山东大学 基础数学博士

0. 写作“动机”

在本专栏的上一篇文章《勾股定理》中，Brown Chen提到了“拉格朗日四平方和定理”，即任何自然数都是某四个整数的平方和。这个问题研究的是自然数的表法问题，也就是把一个自然数写成某些特定的数的和。这一类问题是堆垒数论（Additive number theory）所要研究的核心问题。我们从堆垒数论的英文中就能看出其所要研究的问题。它还可以翻译为“加性数论”（与之相对应的是“乘性数论（Multiplicative number theory）”），不过我个人更喜欢“堆垒”这个更加直观的名称。

在本专栏更之前的文章《数学难题？先问问语文老师吧。》中，陳浩谈到了“比较”“无穷大”的问题。在堆垒素数论中，比较无穷大是一件很常见很重要的事情。当然，堆垒素数论中比较无穷大与陳浩所提到的略有不同，陳浩提到的问题多涉及实变函数，有关于集合等等。而堆垒素数论当中的比较无穷大一般是指对“阶”的估计。正是这种对无穷大的比较，或者说是阶的估计，在堆垒素数论领域相当多重要结果的证明中扮演了关键的角色。

以上算是让我决定写一整个关于堆垒素数论系列文章的原因。

现在给你一张沿途可以欣赏堆垒素数论精彩风景的列车的车票（免费的），你愿意上车吗？如果你愿意的话……

Welcome aboard!（这段话好中二的感觉……）

1. 人脑与电脑

“只有数学能处理无穷大，我们是这个星球上唯一会处理无穷大的存在。”——“刘建亚语录”

在我们欣赏堆垒素数论风采的时候，我们大家或许并不会轻松，需要让自己的大脑保持高速运作状态。作为热身，我们先来看一道练习题：

问题1：设n>0且n为一个偶数。求证n+1为一个奇数。

或许你会想“我靠这不坑爹嘛！这种小学生都会的题目！我不要浪费时间了，我要下车！”

先别太着急，如果想下车，等我们列车停靠在站点时候吧。

没错，我想这道题对小学生来说也并不困难。但是，请把自己想象成一台电脑，然后再来考虑这个问题，那么……

n取第一个正偶数n=2，n+1=3，3不可以被2整除，是一个奇数，结论成立；

n取下一个偶数n=4，n+1=5，5不可以被2整除，是一个奇数，结论成立；

……

发现问题没有？电脑并不能完成对所有偶数的验证，因为偶数有无穷多个，即使我们验证了n取一亿结论也成立，但是对于一亿零二，我们仍然尚未可知。

让我们来看一下奇数哥德巴赫猜想：

猜想：任一不小于于7的奇数都可以表示为三个素数之和。

我们可以验证：

7=2+2+3；

9=3+3+3；

……

甚至我们可以用电脑验证到一个很大很大的奇数，但我们仍然不知道在那之后的奇数是否仍然可以表示成三个素数之和。

所以说，要解决这个问题，很大的难点在于如何处理趋向于无穷时的情形。

2. 阶的估计

再来看下面这个问题。

问题2：设n是一个正整数，比较n的平方与n的大小。

我们需要指出，这仍然是一个电脑无法完全解决的问题。

我们可以作差比较，也可以求导比较。我们不妨来作差：

$$n^2 - n = n(n-1).$$

可以看出当n>1时，n的平方大于n。

问题3：设n是一个正整数，C是一个正数，比较n的平方与Cn的大小。

同样并不困难的，我们可以得到当n>C时，n的平方就比Cn大了。无论这个C有多大，可以是10的10次方甚至更大，随着n的增大，总会在超过某个数之后，n的平方大于n。

我们可以这么来解释，虽然当n趋于无穷大时n的平方与Cn都趋于无穷大，但是n的平方的阶比Cn的阶要大，所以n的平方增大的“速度”比Cn大的多。

为了更好地说明“阶”这个概念，我们引入记号“o”与"O"。

（因为我们主要关心正数，因此接下来的无穷符号均特指正无穷。）

定义1：若

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则称当x趋近于无穷时f(x)是g(x)的无穷小量，记为

$$f(x)=o(g(x)),\quad x\to\infty.$$

定义2：设g(x)>0，若存在常数A>0，使得

$$|f(x)|\le Ag(x),\quad x\to\infty.$$

那么我们记为

$$f(x)=O(g(x)),\quad x\to\infty.$$

在我们的问题2中，我们可以看出

$$Cn=o(n^2),$$

因此在n足够大之后，总会有

$$n^2-Cn>0.$$

或者我们也可以通过

$$Cn=O(n^{\frac{3}{2}})$$

来得到相同的结论。那么如果一个函数f(x)满足

$$f(x)=x^2+O(x),$$

我们就知道当x足够大的时候，f(x)必将大于0。

3. Vinogradov的三素数定理

定理1（Vinogradov[4]，1937）设n为一个正整数，记R(n)为将n表为三个素数之和的表法个数（举例：13=3+3+7=3+5+5，那么R(13)=2）。那么我们有

$$R(n)=\frac{n^2}{2(\log n)^3}\mathfrak{S}(n)+O(n^2(\log n)^{-4}),$$

其中

$$\mathfrak{S}(n)=\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

特别地，任一个足够大的奇数可以表成三个素数之和。

实际上，我们可以看出，当n为一个偶数时，因为2可以整除n，则有

$$\mathfrak{S}(n)=0.$$

而对于奇数n，由于2不能整除n，乘积中所出现的项均为正数，所以

$$\mathfrak{S}(n) > 0,$$

实际上可以得到其是一个不小于1/2的正数。再加上我们之前的讨论，可以看到R(n)表达式中等号右端第一项（称为主项（Main term））的阶比第二项（称为余项（Error term））的阶要高，那么，当n为奇数且充分大的时候，就有R(n)>0成立，也就是说表法个数大于0，至少有一种表法。这就证明了奇数哥德巴赫猜想对充分大的奇数成立。

那么到底要求多大的奇数呢？

最初Vinogradov给出的结论是对于

$$n \geq 3^{3^{15}} \approx 10^{6800000}$$

成立。想象一下1后面有680万个0。即使Liu和Wang[]在2002年的结果也要求n比10的1346次方大，也就是1后面有1346个0。这应该是已经超过了当前计算机的计算能力，但是验证有限多的情形总是一项能看到尽头的工作吧。

4. Hardy-Littlewood圆法

（本小节部分参考了Kumchev和Tolev的综述性文章[2]）

Hardy-Littlewood圆法是堆垒素数论中强有力的工具，我们通过展示三素数定理的证明来表明Hardy-Littlewood圆法的思想。

按照惯例，我们用一个记号：

$$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}.$$

此外，所有的小写p，无论带下标与否，都代表素数。
圆法的出发点为，当且仅当m=0时，

$$\int_0^1 e(m\alpha)d\alpha = 1,$$

而当m不等于0时，此积分为0。那么我们有

$$R(n) = \sum_{p_1,p_2,p_3 \leq n} \int_0^1 e((p_1+p_2+p_3-n)\alpha)d\alpha.$$

接下来，定义

$$f(\alpha) = \sum_{p \leq n} e(\alpha p),$$

那么有

$$R(n) = \int_0^1 f(\alpha)^3 e(-n\alpha)d\alpha.$$

接下去的重头戏就是完成对此积分的估计，得到一个主项以及一个阶比主项小的余项。

我们可以看到积分上下限为从0到1，也就是说\alpha从0变到1。有一个非常重要（但并不明显）的观察，那就是当\alpha靠近一个有理数，并且此有理数的分母不太大时，f(\alpha)就较大，其余情形下f(\alpha)都很小。

在我们继续演算之前，先来做一些记号。设B是一个充分大的正数，具体多大我们后面再来订。记大写的P（并不代表素数）为

$$P = (\log n)^B.$$

取a和q为正整数，满足

$$1 \leq a \leq q \leq P,$$

并且(a,q)=1（这里(a,q)表示a和q的最大公约数）。记

$$\mathfrak{M}(q,a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{P}{qn}, \frac{a}{q} + \frac{P}{qn}\right].$$

这些区间是两两不相交的。

我们指出，在将R(n)表为从0到1的积分之后，实际上我们可以将积分上下限变为任意长度为1的区间。具体来说，我们将其变为

$$[Pn^{-1}, 1 + Pn^{-1}].$$

然后我们将这个积分区间分成两部分，分别称为主区间（Major arcs）和余区间（Minor arcs）：

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \leq P} \bigcup_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}(q,a), \quad \mathfrak{m} = [Pn^{-1}, 1 + Pn^{-1}] \setminus \mathfrak{M}.$$

哲学意义上讲，主区间上的积分将出主项，余区间上的积分将出余项。

这里或许你会注意到一个很有趣的事情（或许没有），那就是主区间中“区间”对应的英文是“arcs（弧）”。

让我们来这样想一下，当\alpha从0变到1的时候，e(\alpha)是如何变化的？是不是恰好形成了一个单位圆？没错，这正是“圆法”名称的由来。而选取一些区间，对应过去恰好是一些圆弧，这就是选择这几个名称的原因。

好，现在我们有

$$R(n) = \int_{\mathfrak{M}} f(\alpha)^3 e(-n\alpha) d\alpha + \int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^3 e(-n\alpha) d\alpha.$$

接下去，我们将分别给出对这两个积分的估计。我们略去绝大多数技术细节，只给出大致的想法。

对主区间的估计将给出如下结果：

$$\int_{\mathfrak{M}} f(\alpha)^3 e(-n\alpha) d\alpha = \frac{n^2}{2(\log n)^3} \mathfrak{S}(n) + O(n^2 (\log n)^{-4}).$$

对于余区间的估计，我们会给出更多细节，因为会很有趣。对于余区间，我们想要得到一个上界。在余区间上f(\alpha)相对较小，我们直接取被积函数的绝对值（称被积函数的“模”更为恰当，因为被积函数是复的）。我们有

$$\left|\int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^3 e(-n\alpha)d\alpha\right| \leq \int_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|^3 d\alpha \leq (\sup_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|) \int_0^1 |f(\alpha)|^2 d\alpha.$$

注意到

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{p_1, p_2 \leq n} \int_0^1 e((p_1 - p_2)\alpha) d\alpha,$$

还记不记得我们圆法的起点，等号右端的积分，当且仅当p_1=p_2时等于1而其他时候等于0。因此

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{p \leq n} 1 \ll n(\log n)^{-1},$$

这里我们利用了素数定理。此外f(x)<<g(x)表示f(x)=O(g(x))。现在我们需要对余区间上的|f(\alpha)|给一个好的上界。很明显，如果简单地对所求和的每一项都取绝对值，得到的平凡上届是n(\log n)^{-1}，这不能解决问题。

因此，需要特别特别注意的是，给出好的非平凡上界是Vinogradov证明三素数定理的关键所在。他成功地给出了足够好的非平凡的上界，也直接导致了三素数定理的被证明。按照我的理解，我们所说的阶的估计是证明三素数定理逻辑上的关键，而此上界则是证明三素数定理技术上的关键！

我们知道余区间的定义跟P有关，所以此上界会跟P有关。Vinogradov的结果表明在余区间上，

$$f(\alpha) \ll (\log n)^3 (nP^{-\frac{1}{2}} + n^{\frac{4}{5}}) \ll n(\log n)^{3-\frac{B}{2}}.$$

之前我说过我们会在稍后取定B的值，我绝不会骗你，在这里，我们取定B大于等于12，那么3-B/2小于等于-3。

把这些余区间上的结果结合起来，我们得到了

$$\int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^3 e(-n\alpha) d\alpha \ll n(\log n)^{-4}.$$

最后把主区间和余区间上的结果结合起来，就能证明Vinogradov的三素数定理了。

5. 为什么不能证明偶数哥德巴赫猜想?

也许你心里在想，能否用Hardy-Littlewood圆法完全解决偶数哥德巴赫猜想呢?

答案是否定的。

为什么?

这里有一个原因。让我们回顾一下余区间的处理，有f的三次方，用最粗略的估计将得到阶n^3(\log n)^{-3}，主项的阶为n^2(\log n)^{-3}。也就是说，我们要节余一个n的方次，还要再节余

一丁点。我们提出一个f来，剩下两个f凑成一对。这一对可以节余n(\log n)^{-1}，再通过余区间上f的非平凡上界节余(\log n)的某些方次，达到目的。

那么如果我们不再有第三个变量，而只有两个变量，我们有的是f的平方，最粗略的估计得到的阶为n^2(\log n)^{-2}，此时对应的主项的阶为n(\log n)^{-2}，需要节余一个n的方次，还要再节余一丁点。如果不提出f来，两个能凑成一对节余n(\log n)^{-1}，没有其他的节余，不够；如果提出一个f来，剩下的那一个节余不了太多，离所需要的节余相去甚远。

需要指出，陈景润[1]证明的结果为

定理2（Chen，1973）设n为一个正偶数，记r(n)为将n表为n=p+P_2（P_2表示一个素因子不超过2个的正整数）的表法个数。存在一个n_0，当n不小于n_0时，我们有

$$r(n) > 0.67 \prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p>2\\p|n}}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\frac{n}{(\log n)^2}.$$

特别地，任一个足够大的偶数n可以表成n=p+P_2。

6. 写在后面的话

好了，我们的列车就要停靠第一个站点稍作休整。希望各位喜欢刚刚所看到的关于三素数定理的风景。我们下次再见！

7. 参考文献

[1] J.R. Chen, On the representation of large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes, Sci. Sinica 16 (1973), 157–176.

[2] A.V. Kumchev and D.I. Tolev, An invitation to additive prime number theory, Serdica Math. J. 31 (2005), no. 1-2, 1–74.

[3] M. C. Liu and T. Z. Wang, On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture, Acta Arith. 105 (2002), 133-175.

[4] I. M. Vinogradov, Representation of an odd number as the sum of three primes, Dokl. Akad. Nauk SSSR 15 (1937), 291–294, in Russian.

编辑于 2019-06-26 18:29

“实际上，我们可以看出，当n为一个偶数时，因为2可以整除n，则有𝔊(n)=0”
这个表述似乎有些问题，偶数可以拆成2+奇数+奇数，一样可能是3个素数，比如8=2+3+3，所以𝔊(8)=1

2022-12-16 回复 赞

兰伟勇
这是你自己写的吗
2019-09-30 回复 赞

不死鸟
如何收藏这篇文章?
2014-07-24 回复 赞

Eric King
完全没看懂………
2014-07-24 回复 赞

班明峰
“拉格朗日四平方和定理”，即任何自然数都是某四个整数的平方和。这个问题研究的是自然数的二进制的表法问题，电脑已经成功了还要证明，其实‘透过现象看本质’本质是：在A其中选择组合即可。是非常简单的问题;A是: 1/2/4/8/16/32/64/128/......二进制表述方法
2018-12-03 回复 赞

Limerence
马克
2014-05-09 回复 赞

嘉嘉
Helfgott宣称的对于奇数歌德巴赫的证明对吗?
2014-04-08 回复 赞

wzhscript
' 猜想：任一不小于于7的奇数都可以表示为三个素数之和。'这里貌似有输入错误，数学渣表示看不下去了。
2014-04-06 回复 赞

班明峰
搜索 班明峰 在人民网的我的个人主页开头的，证明哥德巴赫猜想不能够成立，的文章里有我的解决（猜想：任一不小于于7的奇数都可以表示为三个素数之和）问题的证明方法；是用逻辑学和数学证明的。
2018-12-03 回复 赞

Yuhang Liu
期待lz科普孪生素数猜想~
2014-03-19 回复 赞

王玉超 作者
I think I have already done this work. Here is the link: zhuanlan.zhihu.com/math....
2014-03-19 回复 赞

扬羽
三年法学生涯带我走了好远，已经完全忘光了数学·····
2014-03-18 回复 赞

刘文俊
赞 mark一下
2014-03-17 回复 赞

紫然
好棒！！！
2014-03-17
回复 赞

datou meng
N表示全部整数，N-M*M才对，N-M*M 之前还应该有N-MN
2014-03-17
回复 赞

datou meng
不好意思，发现一个逻辑错误，M应当是（正整数-1）的集合。我错了，看来还是不够认真。
2014-03-17
回复 赞

datou meng
（a+b+c）和(a+2)+(b+3)+(c+5)计算结果相差（2+3+5),再多加几个数，差仍然是只记多出的部分。n*n 和n*（n+1）以及n*(n+2)计算结果差多少是以n为基数来算的。
2014-03-17
回复 赞

datou meng
乘法相对于加法难以被理解的根本原因在于乘法是一维空间里的二维运算。改天有空我想找个地方把我想到的东西都写出来。
2014-03-17
回复 赞

> **王玉超** 作者
> 貌似加法也是吧……
> 2014-03-17
> 回复 赞

陆洋
刘建亚语录……当年被贵院老师虐得好惨
2014-03-16
回复 赞

datou meng
我看不懂，不过我有个想法。M表示全部正整数序列。M*M表示全部正整数两两相乘的积。M-(M*M)表示全部素数。“偶数表示为两素数的和”看作一个运算，M-(M*M)也看作一个运算。在全部正整数范围内，这两个运算互为逆运算。
2014-03-16
回复 赞

> **王玉超** 作者
> 我没怎么看懂
> 2014-03-17
> 回复 赞

骰子
楼主山大数院的?
2014-03-16
回复 赞

> **王玉超** 作者
> 是的
> 2014-03-16
> 回复 赞

点击查看全部评论 ›

文章被以下专栏收录

比生活简单多了
如果有人不相信数学是简单的，那是因为他们没有意识…