我国古代的卓越数学家李冶

是伯元

李冶（1192—1279），金朝、元朝间真定栾城（河北省栾城县）人，原名木子治，字仁卿，号敬斋。因与唐高宗同名，后更名为冶，是我国十三世纪卓越的数学家，与秦九韶、杨辉、朱世杰一起共称为宋元四大数学家。

1230年，李冶赴洛阳应试，中进士，授高陵（陕西省高陵县）主簿，末到职，后调任钧州（河南禹县）知事。1232年，钧州被蒙古兵攻占，便微服逃到北方。1234年，金灭，隐居山西崞县桐川、太原、平定及河北元氏等地专门研究数学。1248年完成“测圆海镜”12卷。1251年定居河北省元氏县封龙山下，收徒讲学，与元好问、张德辉交往密切，时人尊称为“龙山三友。”

1259年，他把前人的数学研究成果搜集起来加上自己的观点写成“益古演段”三卷，晚年完成了“敬斋古今黈”四十卷，他一生的著作中还有“泛说”四十卷，“壁书丛削”十二卷等，但大多己失传。

李冶一生清贫，“饥寒至不能自存”的日子时有出现，但他“仍处之泰然，以讲学著书为乐，”元世祖忽必烈曾多次召见，下诏要他当官，但他多次辞官不做，有人赋诗相赠：“一代文章老，李车归故山。露浓山月净，荷老野塘寒。茅屋己知足，布衣甘分间。世人学不得，须信古今难。”

李冶毕生致力于数学研究，对中国古代数学作出了重大的贡献，主要表现在以下四个方面：

一、小数记数法

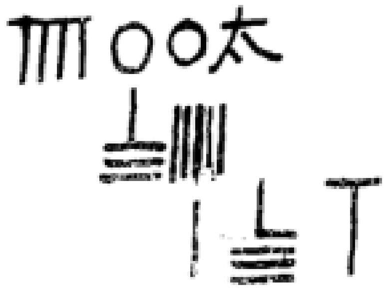
但运动量也不宜过大，如果消耗体力过大，就会影响到基本内容的进行。准备活动从开始到结束一般为十五分钟至二十分钟。脉搏跳动每分钟110次至130次左右，持续3—4分钟较为宜。这样可以在大脑中产生一定的痕迹效应，有利于正式项目的学习与锻炼。

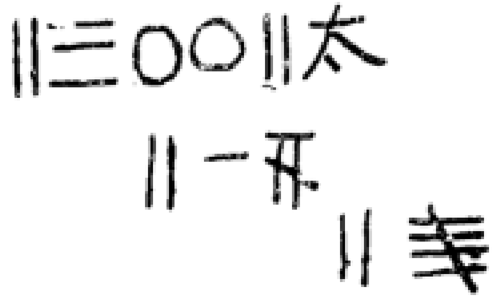
第三，准备活动应结合所学内容或锻炼项目进行。原则上说即要有一般性准备活动，又要有专门性准备活动。一般性准备活动是提高中枢神经系统的兴奋性，使全身各个主要器官都得到充分的活动；专门性的准备活动是调解各器官与神经中枢间的协调机能，把与教材，锻炼项目有关的肌群，关节和韧带都充分地拉开。如上武术课，除一般性的准备活动外，还应做各种压腿，摆腿、肩关节，腰部等准备活动。

需要指出的是，不可把柔韧性的训练与暖身活动混为一谈。在冬天，如果没有做暖身活动而直接进行拉肌肉和拉韧带的柔韧性训练，同样可能导致肌肉和韧带拉伤。

因此笔者认为，在冬季把慢跑作为暖身活动较好。跑到稍微出汗为止，然后再结合锻炼项目做一些专门性准备活动。这样就会既预防伤害事故的发生，又收到良好的锻炼效果。

在李冶以前的小数记数法，大体采用数名表示。《隋书》中把小数3.1415927丈记为3丈1尺4寸1分5厘9毫2秒7忽。宋代历法内有五日二十四刻二十九分三十秒三十小分表示5.24293030日，而李冶在《天元术》中加以改进，把各项的位数上下对齐，小数部分可立即看出。例如





相当于$1.96x^2+84x+900=0$，相当于$-2.5x^2-216x+23002=0$由筹码的位置明判明小数的记法，相当于小数点。对于纯小数，在缺位上加0，0加在左侧，如0 ≟下就是−0.96，0 0 Ⅲ就是−0.03，李冶的纯小数记法与现代记法只差一个小数点，这在世界数学史上也是一个辉煌的成就。

在西方，他们公认的小数发明者是比利时的斯台文。斯台文的小数表示法很繁琐，他在整数的最末一位数字的后面加一个圆圈，圈内写一个"0"字，以下每位小数之后都加一个圆圈，圈内依次写1，2，3，……，用以指明每个数字的位数。例如37.675，他写作3 7⓪6①7②5③

瑞士的布吉于1592年写成一算术手稿，系统应用了十进小数。他用一个圆圈在单位数字之下把整数部分和小数部分隔开，虽说比斯台文迟了七年，但比斯台文的十进小数记法有很大的进步，但他们对小数的表示法比李冶晚了三百多年。

二、最早对天元术进行系统叙述

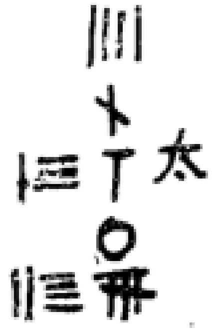
宋元以前的算书中都是用语言文字来描述方程的，我们看不到方程的形式，也看不到等号和其它运算符号，其列方程的过程是运用图形找出已知量与未知量之间的关系，方程的恒等变形也是通过图形的直观而进行的。运算过程是用语言文字解说，这种代数可以称之为语言代数。

古人在长期的实践和观察中，对开方等式的认识逐渐深化，概括抽象出"立天元一"和方程，现今流传有关天元早期的著作便是李冶的《测圆海镜》（公元1248年）十二卷，《益古演段》（公元1259年）三卷以及朱世杰于1299年和1303年分别著的《算学启蒙》和《四元玉鉴》。

"天元术"和现代列方程的方式极为类似，先"立天元为一某某"，相当于现代的设"X为某某"。然后根据问题中给出的条件，列出两个相等的代数式，将两式相减便得出一个一端为零的方程。天元术的表示方法也很简单，它常常是在一次项的旁边记一个"元"字，或在常数项旁记一个"太"字，《测圆海镜》规定常数项（太）在一次项（元）的下面，《益古演段》和以后的书籍中则规定"元"在太的下面。有了"元"字，就不记"太"字；有了"太"字，就不记"元"字，《测圆海镜中》记有：以虚数为天元，旁记元字。真数为太极，旁记太字，元下必太，太上必元。故有元字，不记太字。有太字，不记元字。其余各项，从排列次序就可以一目了然。如$x^2-960x+800=0$可记为

甲型第一式　　甲型第二式　　乙型第一式　　乙型第二式

宋元时期的数学家大都用乙型第二式，如用甲型，即太在元下时，则以太以下各行依次表示x^{-1}，x^{-2}，x^{-3}等负幂项的系数。如



表示方程$4x^2-x+136-248x^{-2}=0$

在李冶的《测圆海镜》中，它用算筹表示方程系数的筹式记录出来，使我们现在还能看到用数码表示的方程，改变了过去算书只用文字描述方程的面貌，使读者直接看到用符号表示的方程。它是近世符号代数的前身（以此为基础，朱世杰进一步发展到“立天、地、人、物”为四元，建立一套我国古代解四元高次方程组的方法。

从数学史上来说，天元术是当时世界上先进的代数。在欧洲，与天元术同性质的略语代数到十元世纪才出现，比我国晚了近二三百年。

三、解方程中的贡献。

李冶之前，人们研究的方程常数项只限于负数的情形，即常数项常放在方程的另一端，秦九韶著作中就有“实常为负”之说，李冶则推广到常数项为正数的情形。如《测圆海镜》卷四节五题就相当于解三次方程$x^3-140x^2+900x+80000=0$常数项是正数，方程中各项系数可正可负，常数项也可为负数。这种形式欧洲直到十六世纪下半期才出现，如比利时数学家斯台文在方程中用了正的和负的系数和常数项，比李冶晚了３００多年。

对于分式方程的解法，李冶采用“寄母”的方法，化分式为整式，然后按整式方程来求解。如《测圆海镜》卷三节七问相当于解方程。

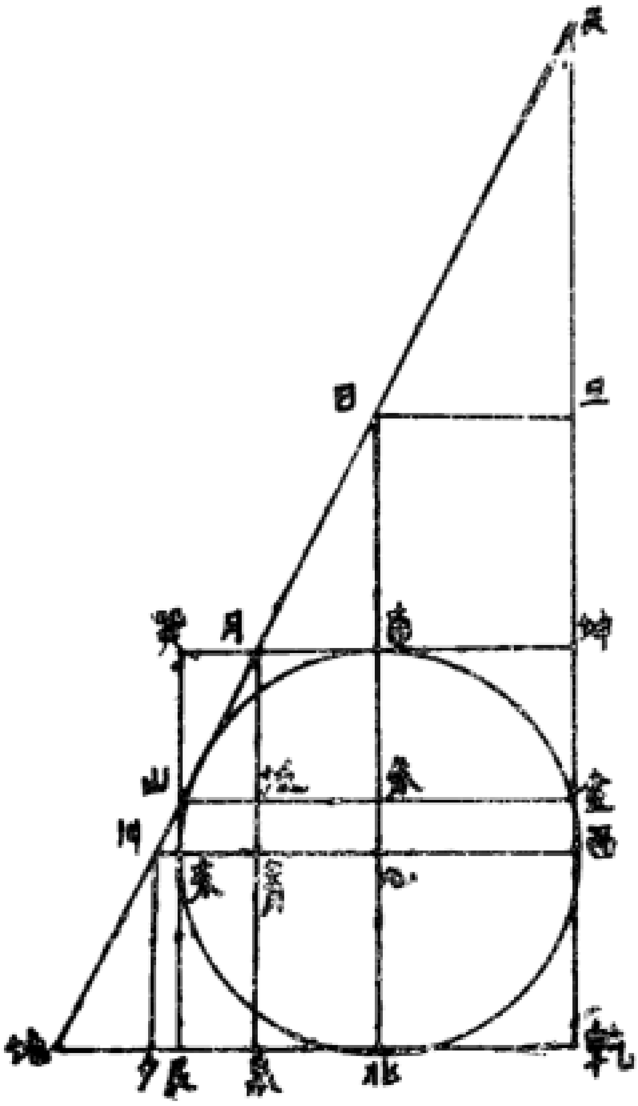
$-512x+\frac{7372800}{x}=0$其解法是“两边各乘以未知数的正指数幂，使其变成整式方程”，“如同一式被某数除时，暂寄其分母的道理。”

卷四第十七问相当于解方程$-165888\frac{1}{x}+198144+376x+x^2=0$它也是化成三次方程后解得$x=72$。这种方法对于解决实际问题有很大的帮助。

李冶还利用乘方消去根号，使根式化为有理式。这种方法与现代的无理方程的解法一样。

四、系统总结研究古代关于直角三角形和圆之间的关系

李冶在《测圆海镜》中提出了692条几何定理，现经证明有684条是正确的。书中有一百七十个问题，包括了在各种条件下求直角三角形内切圆、旁切圆的直径和勾、股、弦及其和



差的关系，把原来赵爽的研究向前推进了一大步，这是我国古代关于直角三角形与圆的知识的全面研究和总结。

容圆问题所用的总图，称为“圆城图式”，对于这图式说明为：“假令圆城一所，不知周径，四面开门，门外纵横各有十字大道。其西北十字道头定为乾地，其东北十字道头定为艮地，其东南十字道头定为巽地，其西南十字道头定为坤地。所有测望杂法，一一设向如后。”圆城图式中所标方向与现在习惯不一致，它是上南下北，左东右西。

书中将容圆问题分为九类，在第二卷中进行系统。（一）勾股容圆。解法是“以勾股相乘倍之为实，并以勾股幂以求弦，复加入勾股共以为法。”设直角三角形的三边勾、股、弦为a、d、c，内切圆直径$d=\frac{2ab}{a+b+c}$

（二）勾上容圆，△天川西中，圆心在勾边川西上，与股天西、弦天川两边相内切的圆 $d=\frac{2ab}{b+c}$

（三）股上容圆，△日地北中，圆心在股边日北上，与勾地北、弦日地两边相切的圆。$d=\frac{2ab}{a+c}$

（四）勾股上容圆，△日川心中，圆心既在勾边川心上，又在股边日心上与弦日川相切的圆。即圆心在直角顶点（心）上与弦相切的圆 $d=\frac{2ab}{c}$

（五）勾外容圆，对△天月坤而言，指勾边月坤之外的旁切圆。$d=\frac{2ab}{b+c-a}$

（六）股外容圆，对△山地艮而言，指股边山艮之外的旁切圆$d=\frac{2ab}{a+c-b}$

（七）弦外容圆，对△月山巽而言，指在弦边山巽之外的旁切圆$d=\frac{2ab}{a+b-c}$

（八）勾外容圆半，对△日月南而言，指圆心在弦边日南的延长线上与勾边、弦边的延长线相切的圆。$d=\frac{2ab}{c-a}$

（九）弦外容半圆，对△山川东而言，指圆心在勾边川东延长线上，与股边山东、弦边山川的延长线相切的圆。

此外还有一个弦上容圆问题。因在容圆总图上未绘有斜线（旦心泉），后人认为“洞渊九容”是包括弦上容圆的，而不包括“勾股容圆”因为勾股容圆是古法，非洞渊所创。

李冶在设△天地乾的各边长时也是别出心裁，非常巧妙。a=320，b=600，c=680，这三个数使得上面十容所指的三角形都是“勾股数组”所构成的三角形。求出的圆径都是240下面是八个三角形的勾股数。

三角形	天川西	日地北	日川心	天月坤	山地艮	山月巽	日月南	山川东
a	256	200	136	192	80	48	72	16
b	480	375	255	360	150	90	135	30
c	544	425	289	408	170	102	153	34

书中“十容”的圆径公式表达式也非常整齐，被除数都是勾股乘积的二倍，除数则是勾、股、弦三数中的一数、二数或三数的和差。

李冶用代数法解几何题也是我国古代数学家常用的方法，在世界数学史上也是属首创。西方直到十七世纪笛卡尔发明解析几何之后才做到这一点。

李冶所处的时代正是许多读书人以《四书》为做官的敲门砖，千方百计通过科举考试而达到做官享受荣华富贵的目的，而李冶却独具一格把高官厚禄看得非常淡漠，多次辞官不做。“积财千万，不如薄技在身，”“学问藏之身，身在即有余”。他把全部精力投入数学研究和普及数字教育事业之中，这也是我们今人值得学习的。

参考文献

（1）白尚恕译《测圆海镜》山东教育出版社1985年

（2）《数坛英豪》李心灿黄汉平编著科普出版社1989年

（3）夏树人孙道松编著《中国古代数学的世界冠军》重庆出版社1984

（4）何洛著“中国古代天元术的发生与发展”《数学通报》64年11月