

# 堆垒数论

在数论中，**堆垒数论**（additive number theory）也稱為**堆疊數論**或**加性數論**，研究整數的子集合，以及其在加法下的特性。堆垒数论的領域也包括對於有加法的阿贝尔群及交換半群的研究。堆垒数论和組合数论及几何数论有密切的關係。其中主要研究的二個物件分別是阿贝尔群*G*中二個子集*A*及*B*的和集

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

以及*A*的*h*重和集

$$hA = \underbrace{A + \cdots + A}_h.$$

有二個主要的子領域，描述如下。

目录

1 堆垒数论

2 加性組合學

3 相關條目

4 參考資料

5 外部連結

## 堆垒数论

此領域主要關注整數的直接問題，也就是由*A*的結構來判斷*hA*的結構。例如假設*A*是個固定的子集，判斷哪些元集可以表示為*hA*的和<sup>[1]</sup>。此領域有二個經典的問題，一個是哥德巴赫猜想（猜想2*P*包括了所有大於2的偶數，其中*P*為質數）以及華林問題（確認*h*要多大才能確保*hA<sub>k</sub>*包括所有正整數，其中

$$A_k = \{0^k, 1^k, 2^k, 3^k, \ldots\}$$

是*k*次方的集合）。其中許多問題都使用了源自哈代-李特爾伍德圓法及筛法的工具。例如Vinogradov證明了每一個夠大的奇數都可以表示為三個質數的和，以及所有夠大的偶數都可以表示都可以表示為四個質數的和。希爾伯特證明，對於每一個大於1的整數*k*，每一個非負整數都是有限個*k*次方數的和。一般而言，非負整數的集合*A*，若可以讓*hA*包括所有的正整數，*A*會稱為*h*階的基底（basis of order *h*），若*hA*包括所有夠大的整數，*A*會稱為漸近基底（asymptotic basis）。許多近期的研究是關注有限階漸近基底的一般特性。例如，若集合*A*是*h*階漸近基底，而集合*A*的真子集都不是*h*階漸近基底，則集合*A*稱為*h*階的最小漸近基底。而埃尔德什-图兰堆垒基猜想也是有關漸近基底的猜想。

## 加性組合學

第二個領域主要是關注反問題，多半是和多個比整數範圍要廣的群有關，假設已知*A+B* sumset的資訊，目的是要找到個別集合*A*和*B*的資訊<sup>[2]</sup>。（最近此子領域常用的名稱為加性組合學）。和上述有關基底的問題不同，此領域處理的多半是有限個子集而不是無限個。典型的問題是二個子集的sumset有很小的勢（和|*A*|和|*B*|相比），二個子集有什麼樣的結構。在整數的例子中，經典的Freiman問題用多維算術級數提供了有力的部分答案。另一個典型的問題是要將|*A+B*|的下限以|*A*|和|*B*|來表示。這類問題的例子有Erdős–Heilbronn猜想（針對restricted sumset）及柯西–達文波特定理。用來解決這類問題的方式來自各數學領域，例如組合學、遍历理论、分析、图论、群论、線性代數及多項式法。

## 相關條目

- 沙普利－福克曼引理：研究實向量空間子集的和集。
- 乘性數論

## 參考資料

- Nathanson (1996) II:1
- Nathanson (1996) II:6

- Henry Mann. Addition Theorems: The Addition Theorems of Group Theory and Number Theory Corrected reprint of 1965 Wiley. Huntington, New York: Robert E. Krieger Publishing Company. 1976. ISBN 0-88275-418-1.
- Nathanson, Melvyn B. Additive Number Theory: The Classical Bases. Graduate Texts in Mathematics **164**. Springer-Verlag. 1996. ISBN 0-387-94656-X. Zbl 0859.11002.
- Nathanson, Melvyn B. Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets. Graduate Texts in Mathematics **165**. Springer-Verlag. 1996. ISBN 0-387-94655-1. Zbl 0859.11003.
- Tao, Terence; Vu, Van. Additive Combinatorics. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **105**. Cambridge University Press. 2006.

## 外部連結

- Hazewinkel, Michiel (编), Additive number theory, 数学百科全书, Springer, 2001, ISBN 978-1-55608-010-4
- 埃里克·韦斯坦因. Additive Number Theory. MathWorld.

取自“<https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=堆垒数论&oldid=67488090>”