不喜欢数学的人，因为他从未真正理解过数学——理解世界数学难题

2023-04-27 06:54

在1900年，德国数学家大卫·希尔伯特（David Hilbert）发布了23个数学难题。当时，这些问题都没有解决。希尔伯特希望这些问题能对20世纪的数学产生重大影响，实际上它们确实产生了影响。解决其中任何一个问题都会让你一举成名。

在希尔伯特的23个问题中，截至目前，只有少数几个问题尚未解决。不过，这取决于我们如何定义“未解决”，因为其中一些问题已经有了部分解决方案，而另一些问题被认为过于模糊而无法回答。

千禧年难题

2000年5月，克雷数学研究所公布了世界上最难且最具影响力的7个问题，并为每个正确解决方案提供100万美元奖金。这个列表如下:

在这7个问题中，只有黎曼猜想也在希尔伯特的23个问题中，使其成为数学领域的瑰宝。

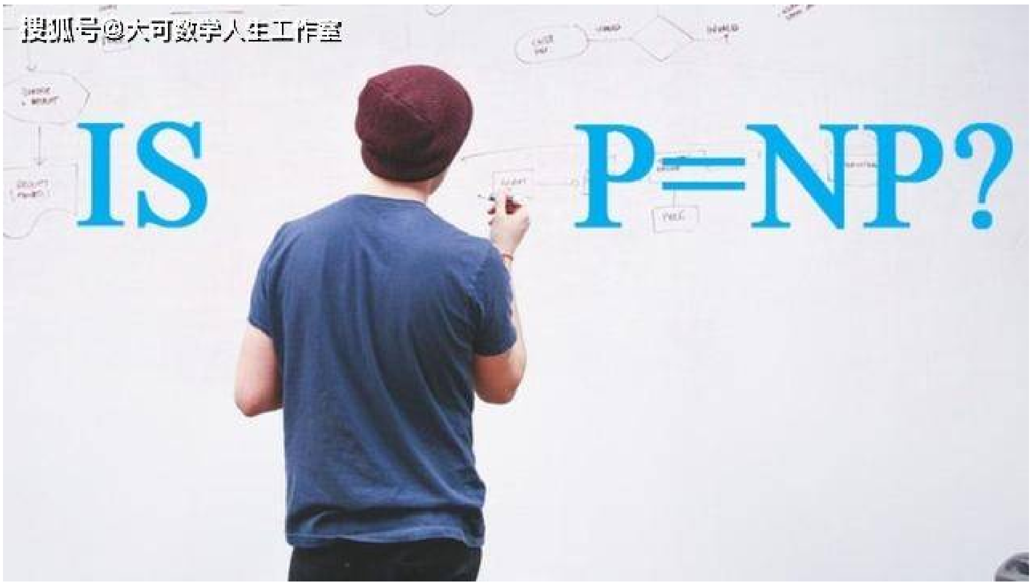
2003年，俄罗斯数学家格里戈里·佩雷尔曼（Grigori Perelman）解决了庞加莱猜想，该猜想在2006年被最终接受为正确解。佩雷尔曼拒绝了奖金和奖励。他认为这并不是他功劳，而是理查德·汉密尔顿（Richard Hamilton）的，因为正是他教给了格里戈里**里奇流**（Ricci flow，解决该猜想的关键工具）。

这些问题每个都需要花费数年的努力学习才能理解。有人甚至指出：

> 这可能是赚取100万美元最难的方式！

因此，让大多数人了解这些问题的本质对于任何老师来说都是一个巨大的挑战。以下所有解释都会直观易懂，旨在让读者了解问题的本质，而不是阐述严格的数学表述。我们将从计算机科学领域最难的问题开始，但从数学角度讲，这是最容易理解的问题。

P vs NP，对速度的需求



在60和70年代，人们开始意识到，让计算机程序运行并解决给定问题并不总是足够的。许多不同的算法可以解决相同的问题，但它们的运行时间可能相差很大。因此，寻求高效算法的竞赛开始了。

为了理解这个问题，我们需要对一些术语达成共识。

- **问题**：在计算机科学中，问题是我们希望计算机解决的任务，比如找到两个城市之间的最短路线或解决一个数独难题。
- **P**（多项式时间）：P指的是计算机可以相对快速解决的问题类别。更技术性地说，如果存在一个算法可以在基于输入大小的“合理”时间内解决问题，则问题属于P。“合理”通常定义为多项式时间，这意味着解决问题所需的时间以输入大小的多项式函数的速率增长。
- **NP**（非确定性多项式时间）：NP指的是计算机可以快速验证给定解决方案的问题。换句话说，如果有人给你一个NP问题的可能解决方案，你可以在多项式时间内检查它是否正确，但找到解决方案可能需要更长时间。注意：NP问题不是非P类问题。NP问题的另一个定义是，可以在多项式的时间里猜出一个解的问题。

显然，P类问题也属于NP。P vs NP的问题是，**NP中的每个问题是否也属于P**。换句话说，**如果我们可以快速验证解决方案，我们是否也可以快速找到解决方案？**

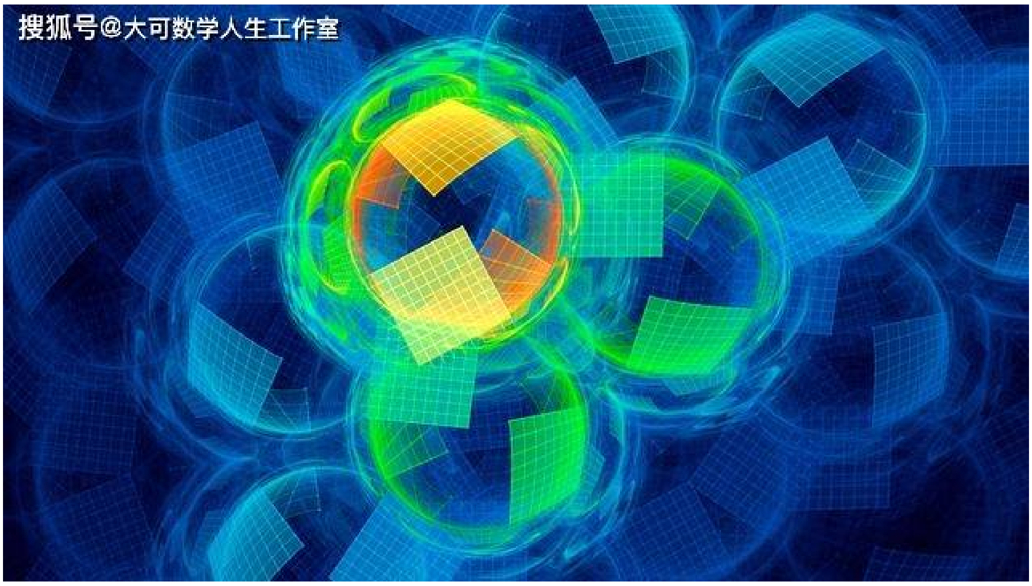
如果P=NP，这意味着我们可以快速验证解决方案的每个问题也可以快速解决。如果P不等于NP，那么有些问题我们可以快速验证解决方案，但我们无法快速找到解决方案。

解决P vs NP问题将对诸如密码学，优化和人工智能等领域产生重大影响。如果事实证明P = NP，许多目前被认为是“困难”的问题可以更有效地解决，从而在这些领域取得突破。

大多数计算机科学家认为P ≠ NP。正如麻省理工学院教授和复杂性研究员斯科特·艾伦森（Scott Aaronson）所说：

> 如果P = NP，那么世界将与我们通常认为的完全不同。在“创造性飞跃”中将没有特殊价值，解决问题与找到解决方案之间也没有根本差距。每个能欣赏交响乐的人都会是莫扎特；每个能识别出好的投资策略的人都会是沃伦·巴菲特。

庞加莱猜想， 揭开三维空间的秘密



庞加莱猜想是拓扑学领域的一个著名问题。

拓扑学是关于形状和空间性质的数学，不是关于形状的详细信息，如大小、距离和角度，而是更普遍的性质，如空间是否是一个整体（连通性）、其中是否有洞（孔）等。

为了理解庞加莱猜想，这里需要给单连通下个定义，

> 想象你有一个橡皮筋绕在一个形状周围。如果你可以将橡皮筋缩小到一个点，而不撕裂或抬起它离开表面，那么这个形状被认为是“单连通的”。

直观地说，一个空间或形状是单连通的，如果它只有一个部分且其中没有“洞”。

庞加莱猜想始于杰出的法国数学家亨利·庞加莱。1904年，庞加莱在研究三维空间及其拓扑性质时提出了以下猜想：

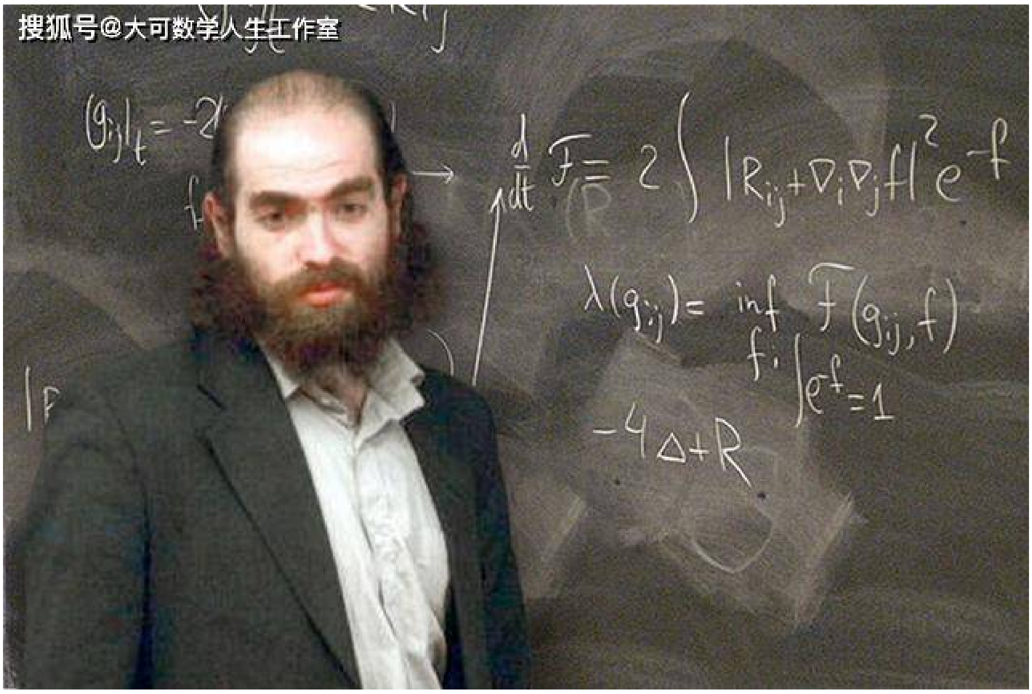
> 任何三维、单连通、封闭的形状（意味着它没有孔或边界）本质上都是一个球体。换句话说，如果你有一个单连通且封闭的三维形状，你可以在不撕裂或粘贴的情况下连续地

> 将其变形为一个球体。

这一点看似直观，但在数学上证明起来却是一项极具挑战性的任务。

20世纪60年代，史蒂芬·斯梅尔（Stephen Smale）解决了一个名为“斯梅尔猜想”的相关问题，适用于大于或等于5的维度（庞加莱猜想是3维）。这一突破给人们带来了希望，认为庞加莱猜想的解决方案可能就在眼前。后来，迈克尔·弗里德曼（Michael Freedman）解决了四维中的类似问题，这使他在1986年获得了菲尔兹奖。

尽管在更高维度取得了这些进展，但三维中的原始庞加莱猜想仍未解决。这个问题成为数学领域最著名和具有挑战性的问题之一，吸引了许多有才华的数学家尝试解决它。



突破终于在2002-2003年到来，当时俄罗斯数学家格里戈里·佩雷尔曼在互联网上发布了一系列论文，概述了使用理查德·S·汉密尔顿的**里奇流理论（Ricci flow）**证明该猜想，简而言之，**里奇流是一种使形状几何变得平滑的数学过程**。

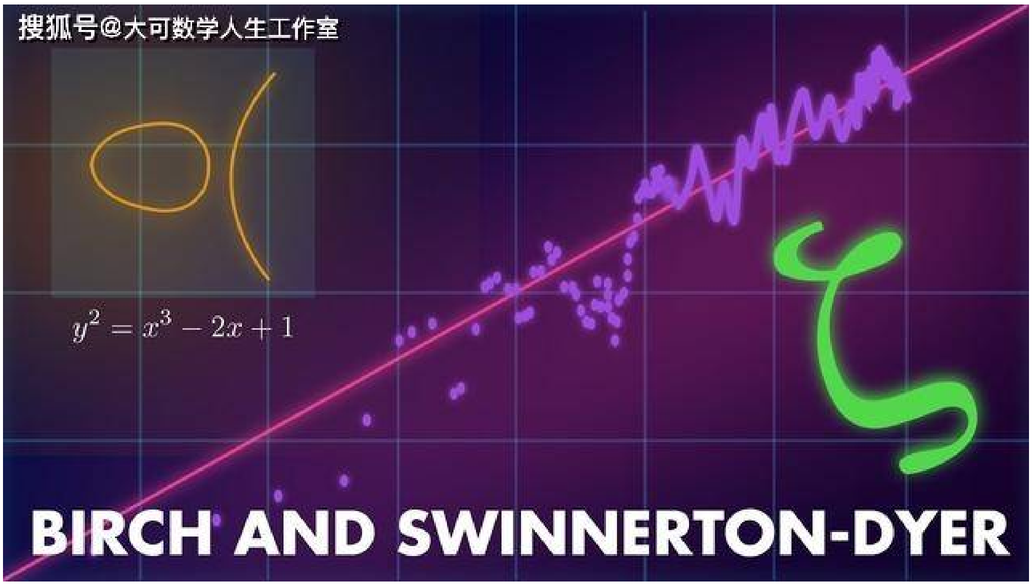
佩雷尔曼的工作在汉密尔顿的理念基础上进行了建设和扩展，以证明庞加莱猜想。佩雷尔曼的证明非常高深，数学家们花了好几年时间理解和验证它的正确性，2006年，专家小组最终确认了他的证明的有效性。

2006年8月，佩雷尔曼被授予菲尔兹奖。然而，他拒绝了这个奖项，后来还拒绝了来自克莱数学研究所的100万美元奖金，原因是他对荣誉或金钱并不感兴趣，还有一个论点是，这个荣誉应该归于汉密尔顿，因为他教会了佩雷尔曼里奇流理论。

庞加莱猜想的解决被认为是21世纪数学领域最重要的成就之一。**它进一步加深了我们对三维空间及其拓扑结构的理解，**可能对物理学和宇宙学等领域产生影响。

如今，庞加莱猜想已被解决，但千禧年难题列表上仍有其他6个未解决的问题。虽然这些问题对于大多数人来说可能非常复杂和抽象，但它们对于推动数学领域的发展以及提高我们对数学和现实世界的理解具有重要意义。这些问题可能需要数学家花费数年甚至数十年的时间进行研究，但解决它们将会为数学领域带来巨大的突破，对未来的科学发展产生深远的影响。

BSD猜想（贝赫和斯维讷通-戴尔猜想），椭圆曲线的奇妙性质



这个起源于20世纪60年代的猜想是一个关于椭圆曲线的数论问题。

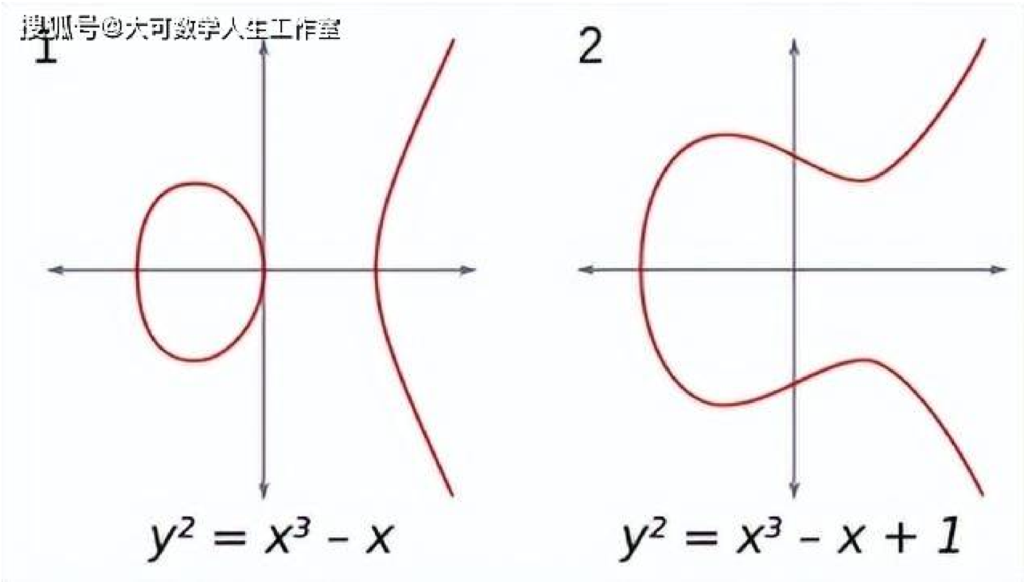
这些由非常简单的方程定义的曲线充满了神秘和优雅。事实上，描述它们的方程如此简单，即使是高中生也能理解。然而，尽管世界上一些最伟大的数学家付出了顽强的努力，关于它们的许多简单问题仍然没有解决。

椭圆曲线是一条对称曲线，通常写成

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

的形式，其中a和b是常数。椭圆曲线具有一些迷人的性质，在数学的各个领域都有应用，包括密码学。

当这些曲线在实数范围内考虑时，它们看起来如下：



事实证明，**数论中的一些数学问题可以转化为关于椭圆曲线的等价问题。通常这些问题与曲线上的有理点有关（即，两个坐标都是有理数）**。

然而，椭圆曲线最重要的特征是它们不仅仅是曲线，也不仅仅是几何图形。事实上，它们具有一种称为**阿贝尔群结构的代数结构**。

这些群包含有限个或无限个曲线上的有理点。称为**秩（rank）**的概念类（似于向量空间的维数）表示具有无限阶的独立基点（曲线上）的数量，**即我们可以通过群操作不断“加”这个点，而不会回到起点**。**如果曲线上只包含有限数量的有理点，则秩为零**。

计算椭圆曲线的秩是出了名的困难，但我们有一个由Mordell得到的很好的结果，告诉我们**秩总是有限的**。也就是说，我们**只需要有限数量的基点，就可以在曲线上生成所有有理点**。

BSD猜想将椭圆曲线上的有理点个数与与曲线相关的特定数学对象联系起来，称为**L函数**。猜想表明，通过检查L函数的性质，我们可以确定椭圆曲线上有理点的行为。更具体地说，猜想声**称L函数可以告诉我们是否有无穷多个有理点，仅有少数，还是根本没有**。

事实上，它说与之相关的L函数可以准确地告诉我们曲线的秩是什么。这就是BSD猜想。

尽管进行了大量的数值测试和寻找证明的研究，这个谜题仍然没有解决。

纳维-斯托克斯方程，流体运动的奥秘

纳维-斯托克斯方程方程是一组描述流体流动和与周围环境相互作用的数学方程。这些方程在气象学、工程学、医学和海洋学等各个领域发挥着至关重要的作用，帮助我们了解诸如天气模式、洋流、飞机翼上的气流以及药物在人体内的分布等现象。这是一个非常重要且具有实际应用的问题。

这个激动人心的领域的历史可以追溯到艾萨克·牛顿和莱昂哈德·欧拉。特别是牛顿关于粘度的工作以及欧拉关于欧拉方程的发展，描述了（非粘性）流体的运动，为未来的进步奠定了基础。

1822年，法国工程师和物理学家克劳德-路易·纳维（Claude-Louis Navier）通过考虑粘度（流体流动的阻力）扩展了欧拉的工作。纳维方程描述了粘性流体的运动，标志着流体动力学理解的重要进步。

在19世纪40年代，爱尔兰数学家和物理学家乔治·加布里埃尔·斯托克斯（George Gabriel Stokes）通过对已有方程进行一些修正和改进，进一步完善了纳维方程。如今，这些被称为纳维-斯托克斯方程方程的方程已成为所有流体动力学的基本方程。

这些方程简单地描述了已知的物理定律，如守恒定律和牛顿的第二定律。方程考虑了流体的速度、压力、密度和粘度以及作用在流体上的外部力，以预测其随时间的运动。虽然纳维-斯托克斯方程得到了广泛认可，但它们非常复杂，是一个**非线性偏微分方程系统**，使得寻找一般解变得极具挑战性。

多年来，研究人员已经开发出了各种方法来寻找纳维-斯托克斯方程的解，截至目前，仅对有限数量的简化案例存在精确的解析解。尽管纳维-斯托克斯方程在近两个世纪的各个领域中得到了成功应用，但**存在性和光滑性**问题仍然未解。该方程系统如下：

$$
\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho g_x\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho g_y\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho g_z
\end{aligned}
$$

人们通常会看到这些方程用向量符号表示，

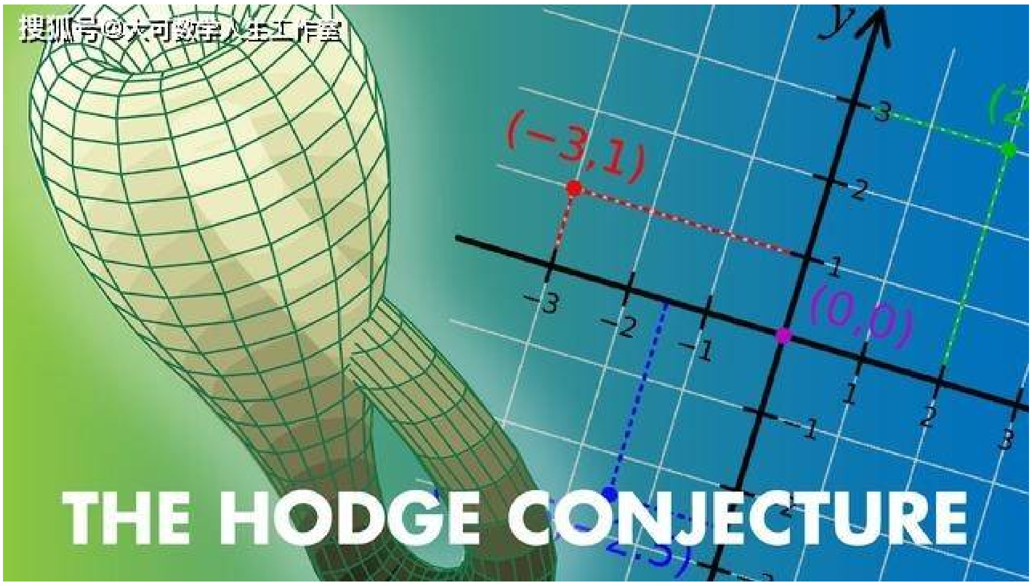
$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}$$

还有一个称为“质量守恒”的附加条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

寻找N-S方程的解激励了全球的数学家和研究人员，解决这个问题不仅将验证流体动力学的基础，而且可能推动科学、工程和技术的进步。

霍奇猜想，代数、几何与拓扑之间的桥梁



这个猜想可能是千禧年问题中最难理解的一个。霍奇猜想是代数几何中一个未解决的问题，代数几何是研究由代数方程定义的几何对象的性质和关系的数学分支。

要解释霍奇猜想，我们首先需要了解几个基本概念：

- 代数簇：这些是由代数方程定义的几何对象。例如，圆是由方程$x^2 + y^2 = r^2$定义的，其中r是半径。
- 子簇：这只是一个更大簇内的簇。例如，一个圆是一个半径相同的球体的子簇。
- 拓扑：这是研究形状和空间的一门学科，专注于在连续变形（如拉伸或弯曲）下保持不变的性质，而无需撕裂或粘合。
- 代数拓扑：这是一门使用代数工具研究拓扑空间的数学领域。**它像一本词典，可以将拓扑问题翻译成更简单的代数问题，更容易操作和理解**。特别地，我们可以使用群和环的性质来了解空间的拓扑。
- 上同调：这是一种将代数不变量（称为上同调群）分配给给定拓扑空间的方法。因此，它是一种用于研究代数簇和其他空间拓扑性质的数学工具。
- 上同调类：这些是上同调群的元素，它们以代数方式表示空间的拓扑特征。通过研究这些类之间的关系，我们可以深入了解拓扑空间本身的结构和性质。从某种意义上说，它们是这些多样性特征的数值不变量。

霍奇猜想涉及一种特殊类型的上同调类，称为**霍奇类**，它们携带额外的代数信息。

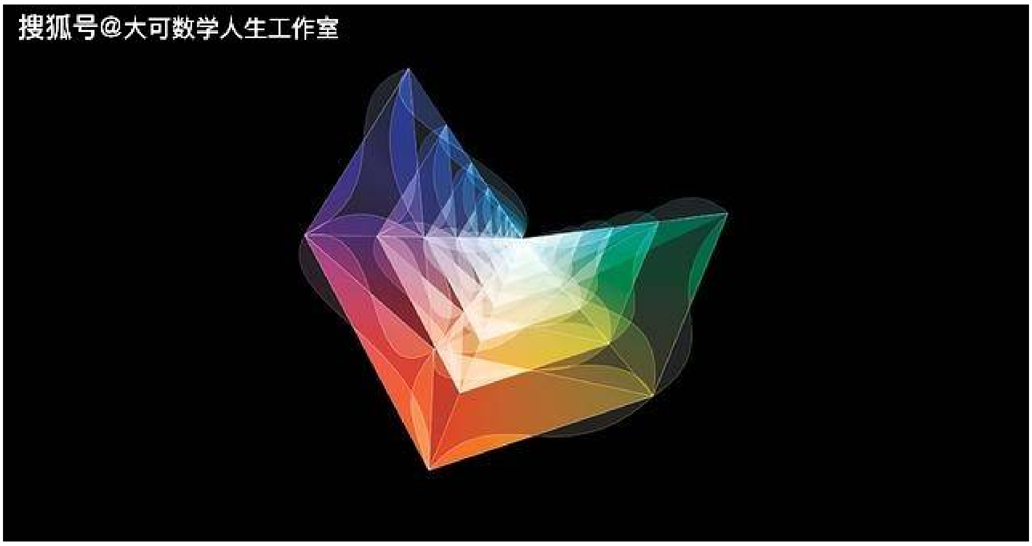
简单地说，霍奇猜想认为，**通过研究代数簇的代数结构（通过霍奇类），可以完全理解代数簇的某些拓扑性质**。

更具体地说，霍奇猜想声称，**在一种特定类型的代数簇（称为"射影复流形"）上的每个霍奇类实际上都是与子簇相关的上同调类的线性组合（加权平均）**。

降维说，**霍奇猜想断言，通过研究这些空间内部的漂亮形状（子簇），可以了解空间形状的基本信息，如孔的数量**。

霍奇猜想被认为是代数几何中的一个核心问题，因为它将为代数簇的代数和拓扑性质之间的深层联系提供依据。尽管许多数学家付出了努力，但仍未找到普遍适用的证明。

杨-米尔斯理论，自然的隐藏本质



这个问题也很难解释。不仅是因为问题的复杂性，还因为像任何量子理论一样，在我们人类看来，自然的外观和感觉与其在小尺度上的真实本质存在着根本的差异。

杨-米尔斯理论是由物理学家杨振宁和罗伯特·米尔斯于20世纪50年代提出的，**它构成了粒子物理的标准模型的基础**。

杨-米尔斯和**质量间隙**问题是理论物理中一个未解决的问题，涉及到亚原子粒子的行为和自然界的基本力量。因此，在解释这个问题之前，我们需要了解一些概念。

- 量子力学：这是物理学的一个分支，描述了原子和亚原子粒子等非常小尺度上的物质和能量的行为。20世纪初，物理学家发现自然在较低尺度上是固有的离散的。能量和物质不是连续的实体。然而，离散粒子在未测量时似乎具有波动性。当你确定它们的位置时，它们变得确定且类似于点状。那么这种波动性从哪里来呢？
- 量子场论：这个理论非常成功。它是一个将量子力学原理与研究高速运动物体行为的狭义相对论原理相结合的框架。物理场是一个在任何地方都具有值的物体，就像我们可以在地球上的任何地方测量重力一样。同样地，有一个电子场，如果这个场中有一个"涟

漪”，我们就称之为电子。所以在某种意义上，单个电子通过全局电子场与自然界的其他事物相连，而粒子本身只是基础场的一个激发部分。

每个粒子都有这样一个场。法拉第称之为“电场”，他观察到它会产生磁场。移动的电场会产生磁性，今天电场和磁场之间的相互作用形成了电磁场。相关的粒子被称为光子，这种现象被称为光。

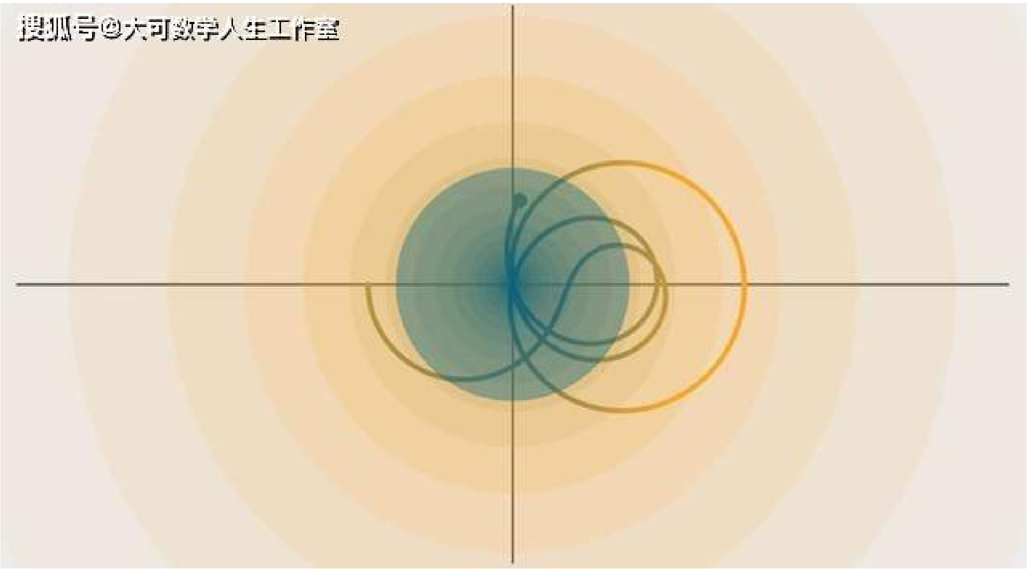
- 杨-米尔斯理论：这是一种量子场论，为描述粒子及其通过强力和弱力（以及相应的胶子场和W和Z玻色子场）之间的相互作用提供了数学框架。强力和弱力是自然界中四种基本力之一（另外两种是引力和电磁力）。

在量子场论中，粒子可以具有不同的能量级，包括一个基态，这是最低可能的能量级。**“质量间隙”是指通过杨-米尔斯理论相互作用的粒子的基态和第一个激发态之间的能量差**。简单来说，质量间隙是将粒子从其基态激发到更高能量级所需的最小能量。

这就像原子中的电子壳，电子可以通过吸收光子来激发。

杨-米尔斯和质量间隙问题要求给出一个严格的数学证明，证明杨-米尔斯理论中存在质量间隙，即证明通过强力或弱力相互作用的粒子之间的基态和第一个激发态之间存在最小的能量差。就这么简单！

黎曼猜想，质数的隐藏本质



希尔伯特本人曾经著名地说过：

> 如果我在睡了一千年后醒来，我的第一个问题是：黎曼猜想被证明了吗？

要了解黎曼猜想，我们需要了解黎曼ζ函数，它是一个全纯（复可微）函数，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

对于复数s，其中实部Re(s) > 1。

黎曼ζ函数很重要，因为它与质数分布有关，通过所谓的欧拉乘积相连。欧拉乘积首先由欧拉发现，他也是第一个找到ζ函数显式值的人。

100多年后，另一位数学天才伯恩哈德·黎曼证明了要解开质数之谜的关键在于把**欧拉的ζ函数当作复数函数**。

这使得黎曼能够在一个完全不同的层次上研究它。在这个问题上，欧拉被困住了，因为他只把这个函数看作是一个一维对象，所以**只看到了它的真实本质的阴影**。1859年，黎曼用复分析准确地看到了它，并勾勒出了如何利用它来研究数论的计划。

在世纪之交，这个计划由雅克·阿达马尔（Jacques Hadamard）和查尔斯·让·德·拉·瓦莱·普桑（Charles Jean de la Vallée Poussin）独立实施，导致了著名的**质数定理**的证明，质数定理告诉我们小于x的质数数量渐近等于x/ln(x)的函数。

这个计划使用了黎曼ζ函数和复分析。为了理解这个猜想，我们需要知道一些事情:

- 全纯函数f的解析延拓是扩展f的定义域的过程。事实证明，这样的扩展是唯一的，因此可以将在复平面的某些子集上达成一致的不同函数视为相同的函数，但以不同的方式定义。

> 全纯函数（holomorphic function）是复分析领域中的一个重要概念，是指在其定义域内的每一点都可微的复变函数。换句话说，全纯函数在其定义域内的每一点都满足某种平滑性条件，这使得函数在这些点附近的行为具有良好的性质。

- 我们可以使用这种解析延拓在除s=1之外的所有复数上定义黎曼ζ函数。也就是说，尽管上面的级数定义只对Re(s) > 1有意义，但我们可以用一种方法来评估Re(s)≤1且s≠1的复数上的黎曼ζ函数。
- 函数的零点是函数输出等于零的点。也就是说，一个点z，使得f(z)=0。
- 黎曼ζ函数的平凡零点是形如s=-2n（其中n是自然数）的零点。所有其他零点称为非平凡零点。

黎曼猜想是关于黎曼ζ函数的“零点”的猜想。黎曼猜想指出，**黎曼ζ函数的所有非平凡零的实部都等于1/2**。

换句话说，这个猜想声称ζ函数的所有非平凡零都位于复平面上的一个特定垂直线上。这条线被称为“**临界线**”。

为了说明它在数论方面的重要性，黎曼自己用谐波分析找到了一个关于实数x下的质数数量π(x)的精确公式。在这个公式中，ζ函数的零点起着控制π(x)的波动/不确定性的作用，**因此它们包含了关于数轴上质数分布的信息**。

如果被证明为真，它将帮助我们了解质数在数线上的分布规律。这将对数论、密码学以及其他依赖于质数性质的数学领域产生重大影响。

尽管这个问题已经被研究了160多年，许多数值计算也支持这个猜想，但迄今为止还没有人能够为黎曼猜想提供一个严格的数学证明。