第 36 卷　第 1 期　　力 学 进 展　　Vol.36　No.1
2006 年 2 月 25 日　　ADVANCES IN MECHANICS　　Feb.25, 2006

时滞系统动力学近期研究进展与展望*,**

徐　鉴† 裴利军

同济大学航空航天与力学学院，上海　200092

摘　要　综述了 1999 年以来时滞系统动力学在力学、机械工程、航空航天、生态学、生物学、神经网络、激光、电子和信息技术、保密通讯和经济学等领域的研究进展，总结了其中的研究方法. 通过本文可以看出时滞系统普遍存在于自然和工程实际中，即使对已经非常熟悉的简单振子，考虑到时滞的影响，仍有许多问题有待作更深入的理论研究和新现象的发现. 针对以往研究中出现的问题，提出今后几年的发展方向、建议和展望，同时指出了在理论上急需解决的一些科学问题，例如以时滞反馈控制为中心的控制策略、非线性因素和时滞联合作用的影响、时滞导致的多级分岔使系统呈现出复杂动力学行为、以时滞状态变量耦合为中心构成的网络系统计算模型对系统的影响等问题都是非线性动力学系统所遇到的科学基础问题.

关键词　时滞系统，非线性动力学，时滞微分方程，分岔，混沌，复杂性

1 引　言

动力学是力学最古老最根本的部分，但也是不断出现新发现、新方向的领域. 现代动力学的发展表现出两个非常明显的特征. (1) 随着主动控制技术的飞速发展，人们越来越关注对力学系统主动施加控制后的各种性能指标与动力学性质. 车辆主动悬架系统、现代机械加工系统、按空气动力学特性受控的机翼、各种智能结构等，这些现代力学系统无一不是在控制的参与下工作的. 各种真实的受控系统，包括高速运动或低速运动下的大量动力系统、人机交互作用下的动力系统等，都可能具有明显的滞后效应. 例如，车辆主动悬架系统、金属切削颤振等问题中的控制环节都存在明显的时滞，这样形成的控制系统由于控制信号传输或控制设备自身存在的不可避免的某些缺陷，使得在控制与系统作动之间存在的时间差或时滞，于是形成的系统成为时滞动力系统，尽管在过去的处理中，人们常常忽略时滞并解决了许多问题，但随着对被控系统动力学行为要求越来越精确化，就需要考虑时滞对系统的影响，已经有结果表明，即使是毫秒级的时滞也会导致系统复杂的动力学行为. 另一方面，对于许多时滞系统，如果忽略时滞就会导致错误的结论. (2) 重要特征是力学和其他学科的相互融合、相互渗透. 如生物力学就是由生物学与力学的融合而形成的新兴交叉学科，研究的思路主要是运用力学理论和方法研究生物体的运动机理与控制. 如人体运动姿态及其控制是生物力学中的重要研究内容. 假设处于平衡态静止站立的人受到可以导致非常复杂晃动的扰动，这种扰动将会导致人从原平衡点移开. 在整个过程中，神经系统反应系统的输出导致一个具有时滞的负反馈，于是人运动的整个运动模式可以看成是一个非线性的时滞动力系统，姿态控制是一个避免可能振动 (Hopf 分岔) 的优化过程.

已有充分的证据表明，时滞系统普遍存在于自然和工程实际中，它的普遍性在于时滞的普遍性. 从自然界到人类社会、从自然科学、工程技术到社会科学，时间滞后 (delay, time delay, lag, 简称时滞) 现象无处不在. 无论何种时滞系统，随时间的演化不仅依赖于系统当前的状态，而且依赖于系统过去某一段时间的状态. 换句话说，系统过去某一段时间的状态对系统目前状态的影响存在一个时间上的滞后 (时滞).

收稿日期：2005-09-08，修回日期：2005-12-22
* 国家自然科学重点基金 (10532050) 和国家自然科学基金 (10472083) 资助项目
** 《力学进展》常务编委陆启韶推荐
† E-mail: xujian@mail.tongji.edu.cn

系统中的时滞可以被归结为下列情况之一或几种情况的组合：

(1) 系统变量的测量;

(2) 系统中的物理和化学性质;

(3) 信号传送 (传送时滞).

于是, 一个非常直观并且容易理解的问题被提出来, 即时滞或时滞长短是否会影响系统的动力学行为呢？另一方面，在几乎所有的受控系统中，特别是对于一个大系统，由于传输和测量的时间滞后，是否会对系统的群体动力学行为产生本质的影响？因此, 深入研究含时滞的力学系统的动力学特性不仅对认识这些系统本身具有重要的意义，也会对生物、生态、神经网络、物理学、电子与信息科学、机械工程、燃烧动力学、化学工程和经济等研究领域的研究起到促进作用.

基于上述动机, 本文针对与力学有关一些研究领域，对 1999 年以后时滞系统动力学的研究进展进行分类综述，总结了其中的研究方法. 针对研究中出现的问题, 对时滞非线性动力学今后几年的发展方向提出了建议和展望, 同时指出了在理论上急需解决的一些科学问题. 对 1999 年以前的研究动态，可以参看文献 [1].

2 时滞动力系统的特点和处理方法

与用映射和微分方程所描述的动力系统相比，时滞动力系统的运动不仅依赖于当前的系统状态，而且与过去一段时间的系统状态有关：决定系统行为的初始状态不再是系统在零时刻的状态，而依赖于零时刻之前某一时间段或者若干时间段的系统状态，这样的时间段称为 “时滞”. 时滞动力系统的数学模型是时滞微分方程，它是一类泛函微分方程 [2~9], 这类方程有其明显的特点：一方面，初值空间是全体连续函数泛函空间，以往的微分方程理论已经不适用；另一方面，由于时滞的出现，系统在平衡点附近的线性近似系统的特征方程就由一般的有限次多项式代数方程变为超越方程，特征根也由有限个变为无限多个，解空间也成为无限维.

对于时滞动力系统，即使是最简单的情形，其动力学也可能非常复杂. 例如，线性时滞动力系统的特征方程是含有指数函数的超越方程, 即使是一阶时滞动力系统，其特征方程也可能有一对纯虚根、两对纯虚根、甚至更多对纯虚根. 相应的非线性时滞系统可以发生 Hopf 分岔、Hopf-Hopf 分岔、Hopf-Hopf-Hopf 分岔等等，在这些 Hopf 分岔相互作用下的系统运动可能极为复杂. 又如，在无时滞情况下，一些简单非线性振动系统 (如无外激励的 Duffing 振子) 的动力学行为并不复杂，但只要对 Duffing 振子实施状态反馈控制, 控制过程中的时滞就会使振子产生非常复杂的动力学行为，如出现多个周期运动共存、周期运动与拟周期运动共存、混沌运动等现象.

时滞微分方程的特点使得对时滞动力系统研究难度大大增加，以往工程界通常采用忽略时滞的影响来简化问题，从 20 世纪 90 年代起，国内外工程界和学术界开始更加关注对时滞系统的研究. 根据时滞系统的特点和所研究的问题, 国内外学者主要采用以下一些方法.

2.1 平衡点的存在唯一性、稳定性分析方法

利用 M- 矩阵和同胚映射研究时滞动力系统平衡点的存在唯一性，如文 [10].

时滞微分动力系统的平衡点的局部稳定性的研究方法有：

(1) Rouché 定理、 Cooke 和 Grossman 方法，如文 [11];

(2) Nyquist 判定准则，如文 [12];

(3) Hughes 和 Hong 门点 (gate points) 定理 [13]: 可以判断哪个特征根最先穿越虚轴;

(4) Lyapunov 泛函，如文 [14];

(5) 线性矩阵不等式 (linear matrix inequalities, LMI) 方法，如文 [15];

(6) 描述 (descriptor) 型、“中立型表达” 等变换, 并构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 得到滞后型、中立型微分方程组的稳定性条件，如文 [16];

(7) 迭代分析法：直接根据系统的系数之间的积分估计，给出稳定性的代数判据，由此发展了大系统的分块估值比较法. 这种方法避免了构造 Lyapunov 函数之难，省去了大量繁难的计算，如文 [8];

(8) 维数划分法 (D-subdivision method): 对单时滞线性时不变系统, 可以得到时滞参数空间上的稳定性区域，如文 [17].

平衡点稳定性分析最基本的方法仍然是考察特征方程根的变化 [18].

2.2 时滞动力系统的 Hopf 分岔分析方法

时滞动力系统的 Hopf 分岔问题是时滞系统研究的主要问题之一, 包括 Hopf 分岔条件、分岔的方向、分岔周期解求解及其稳定性等. 研究方法有：

(1) 中心流形定理和规范形理论 [19]：该方法是一种经典方法，由于有着严密的数学基础，一直受到数学家的青睐, 方法不但可以得到分岔点领域内解的

分类动力学拓扑性质, 而且可以得到近似周期解的解析形式. 然而, 方法要求研究人员有相当好的数学基础知识, 在工程应用研究领域内受到一定限制.

(2) 离散 Lyapunov 泛函和不变流形理论：该方法是 Chen[20] 在研究时滞 Hopfield 人工网络模型时提出的, 用以求 Hopf 分岔产生的锁相周期解的极小不稳定性 (minimal instability) 和不稳定集. 方法基于经典的 Lyapunov 泛函方法, 通过结合稳定流形、不稳定流形理论, 拓展了经典 Lyapunov 泛函的应用范围.

(3) 弧长路径跟踪算法 (path-following): 该方法是数值计算技巧方面的, 将弧长作为参数, 利用其连续性, 并结合对周期运动的稳定性判定, 可以有效的获取分岔图, 确认通向混沌的道路. 方法于 1999 年前已经被广泛应用于非线性动力学的研究, 而 Raghothama 等 [21] 于 2002 年将方法改进后, 推广到时滞动力学的研究中.

(4) 特征函数方法 (describing function): 方法是 Uçar[22] 针对纯量时滞方程于 2003 年提出的, 主要是利用系统的势能, 类似于求线性系统的传递函数那样, 得到非线性时滞项的特征函数, 以便利用 Nyquist 判剧用以研究分岔周期解的存在性和特征, 预测其振幅和频率. 方法继承了传递函数法的优点, 然而, 方法对高维时滞系统的推广有相当的难度, 原因在于很难找到特征函数;

(5) 多尺度法和 IHB (incremental harmonic balance) 方法：这两种方法都是经典的方法, 共同的优点在于无需进行烦琐的中心流形约化, 如文 [21, 23]. 但是, 方法有其明显的缺陷. 多尺度方法应用的前提必须是弱非线性, 而且分岔参数的变化只能限制在分岔点的某个领域内. 而 IHB 方法需要解一组非线性代数方程, 能否得到解强烈依赖于初始迭代值的选取, 在实际应用中这样的选取完全取决于研究者的经验; 此外, 方法是否适用于时滞系统, 至今没有严格的数学证明.

(6) 摄动 - 增量法：该方法继承了多尺度方法的优点, 既无需计算中心流形和规范型, 同时克服了 IHB 方法的缺点, 如文 [24], 该方法目前仍然处于完善阶段.

2.3 同步分析和优化方法

目前对同步的分析方法是考察同步流形之差, 将问题转化为对平凡平衡点稳定性分析. 理论上成熟的分析方法仍然是 Krasovskii-Lyapunov 泛函分析方法, 相当多的研究工作是采用数值方法, 值得注意的方法是所谓的反概形 (retroactive scheme) 方法 [25] 和预测 - 反馈法 [26]. 这两种方法的背景、思路以及解决的问题范围将在本文第 5 节介绍.

2.4 其他

对于时滞连续系统、时滞随机系统动力学以及利用时滞反馈对混沌进行控制的研究, 也出现了一些有价值的理论研究方法, 可参考文献 [14, 27～31].

3 力学、机械学与航空航天时滞系统动力学

在工程技术研究和应用领域中 (如机械、航空航天、燃烧动力学等), 时滞微分动力系统也得到广泛的应用.

主动质量阻尼系统可以采取混合质量阻尼 (hybrid mass damper, HMD) 的形式或完全主动质量阻尼 (active mass damper, AMD) 的形式. 在主动质量阻尼系统中使用主动力, 通过增大设备的频率范围, 限制质量块的必要移动, 可以提高系统的有效性, 以减小动力响应和增强在风和地震等环境负载下 结构的实用性. 但是在主动控制中, 现有的技术还不能避免或消除主动力中的时滞. 时滞包括两部分：由于数字控制处理器内部数字数据的在线数据收集 (on-line data acquisition) 、过滤 (filtering) 、处理而引起的固定时滞; 依赖于和受控系统耦合的激励器的特定动力学的浮动时滞 (floating delay). 这 些 时滞对控制系统的性能有至关重要的影响. Chu 等 [32] 研究了时滞对受控质量阻尼单自由度系统的稳定性影响以及修正问题. 这个系统具有优化直接输出反馈, 取得了导致系统失稳的最大时滞 (即临界时滞) 的显式解和数值解, 然后用连续时间的方法分别定性描述了具有时滞和没有时滞的两自由度混合质量阻尼 (HMD) 或完全主动质量阻尼 (AMD) 标准系统. 为了和实践中计算机控制系统的数字操作相适应, 通过离散化来克服时滞造成的控制效应退化, 控制增益得到了补偿.

Liao 和 Chen[12] 研究了两时滞的谐波振子系统平凡平衡点的局部稳定性, 利用中心流形定理和规范型理论分析了其 Hopf 分岔, 发现了共振双 Hopf 分岔. 弱耦合振子中锁相解的解析方法对于研究、揭示生物振子之间的脉冲放电有重要意义. Bressloff 和 Coombes[27] 针对沿有局部时滞耦合的吸收 - 释放 (integrate-and-fire) 振子链的行波解, 提出了行波解的研究方法. 结果表明, 行波解的定性性态与固有频率的分布有关. 通过对锁相解的线性分析, 发现当振子间的耦合强度足够大时, 行波会失稳.

时滞无论大小都可以导致混沌. Wirkus 和 Rand[33] 研究了弱耦合的时滞 van der Pol 振

子模型的动力学. 首先利用平均法把系统转化为一个三维慢变 ODE (ordinary differential equation) 系统，然后由系统的对称性研究其平衡点的稳定性，再利用中心流形约化和规范型理论得到其完整的分岔集. 经典的 Chua 电路只能产生具有一个正 Lyapunov 指数的低维混沌，但是在时滞反馈下却可能产生高维混沌. Wang 等[34] 提出了一种时滞混沌判别方法，通过向 Chua 电路中加入小振幅的时滞反馈电压，发现产生了混沌. 通过这种方法，可以证明标准的 Chua 电路在指数稳定平衡点处混沌的鲁棒稳定性，并且时滞反馈电路的维数与时滞成正比，即大时滞可以产生高维混沌.

当地面在对飞行中的航天飞机进行控制时，数据的上下行传输会产生很大的时滞. 这个时滞对飞行速度极快的航天飞机来说是不可忽略的，它可能会降低飞机的性能，导致失稳. 因此，时滞对航天飞机动力学的影响和修正是一个非常重要的问题. Hong 和 Hughes[13] 研究了航天飞机驾驶系统中的时滞对其稳定性的影响. 首先研究了具有时滞速度反馈的单阻尼谐振子系统，得到了其闭型解. 通过研究门点 (gate point) 的穿越方向，得到了特征根穿越虚轴的条件，然后研究根的轨迹，得到时滞的稳定区间，画出了稳定性边界，发现了 Bellman 和 Cooke[35] 结果中的错误，并把此结果推广到了多模态情况.

依赖于时滞的记忆状态反馈控制可以应用于镇定线性时滞系统. 从时滞系统的无限维状态空间的观点来看，记忆控制器可以有无限种可能，可以期望比无记忆状态反馈控制器性能更好. 但是在进行计算和操作时，其无限维数是一个困难. Azuma 等 [15] 通过有限个线性矩阵不等式 (LMI) 研究了时滞线性系统的记忆状态反馈综合问题. 首先通过构造 Lyapunov 泛函，得到了系统和其闭环系统的稳定性充分条件，得到了无限维与参数有关的线性矩阵不等式 (LMI) 控制器综合条件. 但是这些条件在实际中却难以应用. 于是又将无限维的线性矩阵不等式 (LMI) 约化为有限维的，进而求解.

研究非线性动力系统的周期运动和亚谐运动对于揭示混沌的奥秘非常重要. 人们发展和改进了 brute-force 数值积分、数值 - 解析方法、 IHB 方法等来研究周期运动和亚谐运动. Raghothama 和 Narayanan[21] 利用 IHB 方法等研究了具有二次、三次、参数激励刚度项 (即时滞项) 的单自由度非线性系统的周期运动. 这个系统描述了非线性梁和板的一阶模态振动，利用 IHB 方法得到其周期解. 通过具有弧长参数的连续过程路径跟踪算法，得到了其响应图，并求解了这个系统倍周期分岔解.

非时滞参数对时滞微分动力系统也会有重要影响. Varela 等 [36] 用数值模拟方法研究了小噪音对 Langevin 率方程时滞音叉分岔的影响. 在平均情况下，所得结果与已有结果非常吻合，同时发现了在特定参数区域中，噪音水平会影响到系统的后验 (posterior) 演化和时滞.

在机械制造中，削片的移动过程常常伴随着称为再生颤振 (regenerative chatter) 的剧烈不稳定性，这种颤振对工件表面的抛光、工具和工件的几何形状都是有害的. 在研究中，人们发现当削片厚度变化较大时，颤振就会很显著. 但是对随机情况下的回转颤振则研究较少. Fofana[30] 研究了随机情况下，单自由度系统机械模型中回转颤振的影响. 首先由稳定性态的解析表达式，得到多时滞的稳定和不稳定区域. 利用 Hopf 分岔定理和中心流形定理，将描述随机颤振的方程组约化为二维 ODE, 再通过积分平均法和 Lyapunov 指数来研究该随机微分动力系统的稳定性.

已有结果表明，液体单推进剂火箭发动机舱中的燃烧动力学模型是一个不稳定的分布时滞系统. Zheng 和 Frank[37] 研究了分布时滞不确定的线性系统鲁棒稳定性问题和鲁棒稳定化问题，得到了分布时滞系统鲁棒稳定性条件，并给出了不确定系统的鲁棒稳定控制律设计方法. 这种方法被应用于液体单推进剂火箭发动机舱中的燃烧问题，发现当压力指数和最大时滞在特定区间变化时，燃烧可以被稳定化.

我国力学界学者在时滞系统动力学研究已经开展了近 10 年的工作. 早在 20 世纪 90 年代中期，徐鉴和陆启韶 [38,39] 通过理论研究，发现时滞作为参量对非线性振动系统的动力学行为有本质的影响. 此后，徐鉴和他的合作者 [18,24,40~56] 利用中心流形和摄动理论对非线性时滞系统进行约化，从理论上得到空间慢变量、时滞经外部扰动联合作用下的渐近解析解；发现时滞量可以作为 “控制开关”，导致系统出现复杂运动，也可以使复杂运动变成简单的运动，同时发现时滞动力系统通过倍周期分岔通向混沌的道路；发现时滞量对非线性系统具有类似周期性的作用影响；通过时滞量的调节，可以得到 Lorenz 系统蝴蝶状的混沌吸引子、螺旋状的 Chen 吸引子，同时还发现一种新的具有更高维数的 “蜗牛” 状的奇怪吸引子. 此外，也详细地研究了时滞导致的双 Hopf 分岔，构造了一种适应于强非线性系统的周期解和周期 2 解的渐近分析方法. 胡海岩和他的合作者 [57~70] 也

对时滞系统动力学进行了数年深入地探索和研究, 主要的研究成果有: 对于具有反馈时滞的非线性系统, 采用基因算法构造了抗噪能力达 10% 的参数辨识方法; 针对车辆悬架系统包含刚 - 柔耦合子系统的特点, 提出基于奇异摄动理论和慢变流形概念, 对高维非线性时滞系统进行降维, 形成了有效的刚柔耦合系统约化方法; 基于多项式理论, 系统地研究了时滞受控系统 (特别是高维多时滞受控系统) 的稳定性, 包括全时滞稳定性、短时滞稳定性、稳定性切换、区间稳定性, 给出了一系列代数判据, 成功地用于车辆主动底盘等时滞受控系统的动力学分析; 对具有时滞状态反馈的受迫 Duffing 系统, 给出了主共振、亚谐共振及其稳定性, 提出 Poincaré 板和不动弧段等概念, 构造了求解非线性时滞受控系统周期运动的打靶法, 将其与多尺度法相结合, 确定非线性时滞受控系统的周期运动等.

4 生态学、生理学、生物力学与神经网络时滞动力学研究

在种群动力学、传染病动力学、生物力学、神经网络的研究中, 出现了为数众多的时滞微分方程模型. 时滞对系统的影响, 包括了对平衡点 (全局、局部) 稳定性的影响、对平衡点分岔的影响、对分岔之间相互作用的影响、对混沌的影响等, 这些都是关注的焦点.

振荡性是种群动力学的一个重要特点, 反映了生态系统中种群密度的波动. 引起振荡的机理是研究的一个重点. Li[71] 研究了在自然波动的环境中, 如季节变化、食物供应、交配习惯等周期性变化的环境对时滞 Lotka-Volterra 竞争系统演化的影响. 他利用重合度理论的 Mawhin 连续性定理, 研究了该系统正周期解的存在性问题. Li 和 Kuang[72] 利用同样的方法研究了在环境周期性变化情况下, 时滞 Lotka-Volterra 合作系统周期解的存在性问题, 得到了种群密度波动的条件. Brenzansky 和 Braverman[28] 研究了具有多时滞的 Logistic 方程的振荡解和非振荡解, 利用比较定理得到了其判定准则和性质. “持久性” (persistence) 是描述了生态系统是否会崩溃, 是否可以长久存在下去的重要概念. 因此, 持久性条件的研究对于保持生物多样性、乃至生态系统的存在都有着重要作用. Xu 和 Chaplain[73] 在食物链系统中引入了由于消化产生的分布时滞, 利用构造 Lyapunov 泛函得到了系统的持久性、平衡点的吸引性条件. Gourley 和 Chaplain[14] 考虑了个体在种群中移动并分别具有分布时滞和离散时滞的资源情况下, 有限模型波前解的存在性问题, 利用 Fenichel 不变流形理论得到了波前解的存在性条件. 在对时滞 Logistic 人口模型的研究中, 陆启韶和他的合作者 [74,75] 发现, 成熟期滞后可以引起人口数量的失稳而进入周期性震荡, 这样的现象也出现在捕食 - 被捕食系统中.

传染病动力学研究是针对不同人群之间对传染病具有不同的响应. 常见的传染病动力学模型包括易感 - 患病 - 易感模型 (SIS 模型) 、易感 - 患病 - 康复 - 患病模型 (SIRS 模型) 、易感 - 患病 - 康复模型 (SIR 模型) 等. 传染病动力学研究的重点是寻找疾病消失的临界值, 即研究无病平衡点、地方病平衡点的稳定性以及传染病周期振荡的条件. Hethcote 和 Driessche[76] 针对由于移民导致易感者增加、或者易感者广义 Logistic 型增加的情况, 建立了性病等细菌性疾病的 SIS 时滞传染病模型, 利用全局稳定性定义和特征根得到了无病平衡点、地方病平衡点、灭绝平衡点的稳定性条件. 然而, 在现实中, 接触率不是常数, 原因是由于看到患病者比例增加, 担心染病, 易感者会改变个体行为, 同时患病程度也与患病者比例有关. 针对这样的观察, Driessche 和 Watmough[77] 研究接触率可变情况下 SIS 模型中各类平衡点的全局稳定性条件和分岔, 得到了传染病消失或者成为地方病的阈值. Tornatore 等 [78] 分别对具有分布时滞和没有分布时滞提出了随机 SIR 模型, 研究了无病平衡点的稳定性, 并发现由于引入了噪声, 发生传染病的阈值被改变了. 这表明噪声可以改变相应确定性系统的演化性态, 也表明了传染病模型中有必要考虑随机因素对其稳定性的影响. 注射疫苗是防治传染病的一种常见方法, 现实的许多病例表明有些疫苗的免疫性不是终生的. 当易感者接种过疫苗以后马上就具有免疫性, 过了较长时间以后免疫性失去, 重新变为易感者, 如流感疫苗和乙肝疫苗. 在这样的背景下, Greenhalgh 等 [79] 研究了这种非终生免疫对两种 SIRS 传染病模型稳定性的影响. 这两种 SIRS 模型中易感者和患病者的接触率是不同的, 一个是常数的, 另一个是人口数量的函数, 死亡率则都与人口密度有关. 他们研究了平衡解的稳定性和存在性, 发现会出现 Hopf 分岔, 即非终生免疫会导致传染病的周期性波动, 必须加以警惕、监控.

时滞微分方程 (组) 也越来越多的出现于对生理学规律的描述中. 如在免疫学中, 当机体出现了肿瘤细胞以后, 免疫系统会马上产生相应的效应细胞来消灭肿瘤细胞. 由于效应细胞在激活、成熟、运输过程

中会产生时滞，因此在两类细胞组成的动力学模型中应该考虑时滞的影响. Burić 和 Todorović[80] 就研究了时滞肿瘤细胞 - 效应细胞系统中平衡点的稳定性和分岔问题，表明时滞存在临界值，它使得效应细胞消亡或者出现周期波动，这与生物实际相符. 又如，医学研究已经表明，在糖尿病患者体内植入人工胰腺是治疗糖尿病的办法之一. 在人工胰腺作用下，人体内的血糖 - 胰岛素系统中会存在两个时滞，即人工胰腺的 "技术" 时滞和肝的生理时滞，因此系统的动力学模型为时滞微分方程. Engelborghs 等 [81] 研究了该系统唯一正平衡点的稳定性和分岔，我们近期的研究发现这两个时滞可以导致双 Hopf 分岔现象 [42].

在生物力学研究中，也出现了不少时滞微分方程 (组) 模型. 如人在静止站立时可以看作一个反向的线性摆，会受到神经系统的时滞负反馈和心跳、胃的收缩等自然扰动，形成的研究模型是一个关于人体姿态的时滞随机控制方程. 当扰动为白噪声，并且取平均的情况下， Yao 等 [82] 研究了系统的分岔过程，指出人体的姿态控制过程是一个避免可能振动 (Hopf 分岔) 的优化过程.

在实际生物神经网络 (real neural network) 和人工神经网络 (artificial neural network) 中，时滞微分方程 (组) 也得到了广泛应用 [82~85]. 由于神经元的有限开关 (switch) 速度会产生时滞，因此神经网络的群体动力学 (collective dynamics) 就不可避免的受到时滞的影响. 众所周知，无时滞 Hopfield 人工神经网络模型会向平衡点集收敛 [86]，但是时滞的出现会引起稳定的非线性振动，产生不同的网络计算性能. 网络的全局吸引子研究对于神经网络的分类记忆和关联记忆有重要作用. Chen 和 Wu[20] 利用 Lyapunov 泛函方法、不变流形研究了两饱和神经元 Hopfield 神经网络模型当平衡点失稳以后产生的锁相周期轨线的最小不稳定性和不稳定集，得到了锁相解的稳定性、锁相解与平衡点吸引盆的几何结构、不稳定流形闭包的几何结构. 一般情况下，两神经元之间的耦合时滞是不同的. 由于多时滞对系统影响的复杂性，人们常常对问题简化，例如两同性神经元组成的神经网络，可以假设它们的自反馈时滞相同，但是耦合时滞可以不同于自反馈时滞. Shayer 和 Campbell[87] 研究了自反馈时滞对该网络稳定性、分岔、多稳态的影响. 他们发现平衡点的稳定性只与耦合强度的乘积、耦合时滞的和有关，与耦合性质 (抑制性或兴奋性) 无关. 作为控制参数，自反馈时滞有一个临界值，如超越此值，系统失稳，出现余维 -1 分岔、平衡点失稳或镇定、3 种分岔相互作用、双 Hopf 分岔等现象. 对应到原神经网络，则会出现稳定、振动、周期触发、多周期触发等现象. 一个有趣的现象是当反馈参数满足一定条件时，即使没有耦合，神经网络也会周期触发. 这似乎蕴涵着深刻的物理意义，有待人们去解决. Wei 和 Ruan[11] 则研究了上述系统当耦合时滞相同时的特殊情况，利用 Rouché 定理和 Cooke-Grassman 方法得到了此系统的稳定性条件，分岔的研究则是基于中心流形定理和规范形理论. 在实际生物神经网络中，电信号的传播速度随空间不同而有差异，因此所产生的时滞应该为分布时滞，即同时到达的信号可能是过去一段时间内产生的. Thiel 等 [88] 就研究了具有分布时滞的海马趾苔状纤维体细胞 - 篮状细胞联合体模型、描述人体内白细胞浓度的广义 Mackey-Glass 模型的动力学. 通过 Runge-Kutta 法，观察到具有分布时滞的反馈可以起到使系统动力学简化的作用，即周期解可完全被平稳态取代. 由于分布时滞表示了电信号传导时间的多样性 (diversity)，因此在时滞调节不可避免的情况下，这种多样性将有重要的作用：即消除复杂、不规则的动力学行为. 这一结论也解释了为什么神经系统中非周期态、不规则态较少的原因. 值得强调的是， Thiel 的研究结果也表明，忽视神经元群体之间的差异而只关心其平均性质，对于研究神经系统动力学也许是不恰当的. 针对实际生物神经网络在生物结构上一般是非对称的， Chen[10] 研究了具有分布时滞、非对称神经网络的全局稳定性，利用 M- 矩阵和同胚映射得到其平衡点的存在唯一性条件，同时通过构造 Lyapunov 泛函得到其全局稳定性条件. 由于没有对激发函数、作用矩阵做任何限制，使得这一结果具有较大的普遍性. 陆启韶和他的合作者 [89] 在对两个同性神经元的时滞耦合系统动力学行为的研究中，通过数值方法发现了耦合时滞可以使两神经元混沌运动达到同步，这个结果为理论上进一步的研究奠定了基础和现象依据.

5 激光、电子与信息技术时滞系统动力学

在物理学的很多领域，如激光、微波、电子电路，以及信息技术领域 (如保密通讯、网络技术等) 中，时滞微分动力系统也得到了很广泛的应用. 同步的定义与分类、产生机理、控制与应用、稳定性与鲁棒稳定性以及混沌同步的产生机理、在保密通讯中的应用、控制与应用等是研究人员关注的热点.

在文 [90~98] 中作者研究了几种不同类型的同

步. 为方便读者理解, 这里简要介绍相互作用的系统中几种不同类型同步的概念 [91]. 两个或多个动力系统, 除了自身的演化以外, 其间还有强或弱的相互作用 (耦合), 这种作用既可以是单向的, 也可以是双向的. 当满足一定条件时, 耦合作用使这些系统的状态输出逐渐趋于完全相同, 称为完全同步. 广义意义上的同步还包括相同步 (phase synchronization) 、频率同步 (frequency synchronization) 、状态同步, 其中状态同步又包括广义同步 (generalized synchronization) 、滞后同步 (lag synchronization) 、预测同步 (anticipating synchronization). 相同步指响应系统与驱动系统振子的相诱导 (entrainment). 广义同步指响应系统和驱动系统的状态输出之间存在着某种泛函关系. 滞后同步指响应系统的状态输出除了在时间上以固定差值滞后于驱动系统外完全相同, 而预测同步则相反, 响应系统的输出超前于驱动系统. 它们都意味着两个系统在时移情况下状态的重合, 不过是分别与其过去状态或者未来状态重合. 对这几种同步, Brown 和 Kocarev[92] 给出了一种统一的定义. 激光模型中时滞是由激光在激光器之间的有限传播速度所确定的. 尽管时滞量会很小, 但是也会对系统的动力学产生影响. 局部同步是凝聚态激光的同步方式之一. 但是局部同步是如何产生的呢？基于单模态率方程组模型, Hohl 等 [90] 利用理论和实验的方法研究了耦合时滞相同的耦合半导体激光模型的概周期同步, 发现局部同步可以通过主 Hopf 分岔机制和次 Hopf 分岔机制产生, 并且时滞会引起不同形式的概周期同步. 当非混沌系和混沌 Ikeda 系统耦合时滞不等于被耦合时滞时, Shahverdiev 等 [91] 研究了滞后同步产生的条件和同步流形的稳定性条件. 非混沌系统由两个单自由度系统组成, 具有自反馈、相同的自反馈时滞以及耦合时滞. 他们利用 Krasovskii-Lyapunov 泛函方法得到的结果表明, 对于等同系统, 同步的滞后时间是耦合时滞与被耦合时滞的差; 对于更常见的非等同系统, 滞后时间则只是耦合时滞. 由于实际中一般都是非等同系统 (即使是近等同系统), 这个结论有普遍意义. 例如, 它可以解释实验中两激光器滞后同步的滞后时间是耦合时滞, 而与光在发射器外腔中的往返时间无关, 即由于它们的参数实际上并不相同, 为非等同系统, 因此滞后时间就是耦合时滞. Chen 等 [93] 研究了具有时滞信号耦合的两 Rössler 振子的相同步, 发现了相同步的一些性质: 时滞 (包括大时滞) 会引起相同步, 随着时滞的增加, 发生相同步的临界耦合强度会出现近似周期性变化; 当耦合强度固定不变时, 相同步区域与非相同步区域会接替出现. Voss[94] 研究了耗散混沌系统与其近等同系统的预测同步 (anticipating synchronization). 该耗散系统具有自反馈和单向耦合, 并且在反馈和耦合中都存在时滞. 他指出具有时滞反馈的耗散混沌系统可以驱动其近等同系统达到预测同步, 即与其任意远的未来状态同步. 预测同步是时滞反馈和耗散相互作用的结果, 具有全局稳定性、鲁棒稳定性, 也是 “与人的直觉相反的 (counterintuitive)” 的, 是非线性动力学中一种普遍的现象. 此外, 驱动系统即使没有时滞反馈项, 也会发生预测同步, 只是超前时间很小. 那么耦合时滞对预测同步的性质有何影响呢？ Masoller[95] 很好的回答了这个问题. 他以时滞 Mackey-Glass 系统和 Ikeda 系统为例, 研究了单向耦合等同时滞混沌系统的预测同步. 这两个系统为等同系统, 因此也有相同的时滞 τ. 在系统时滞 τ 大于耦合时滞 τ_2 情况下, 即使当参数较大时, 预测同步也会发生. 这表明耦合时滞的出现虽然改变了响应系统的结构, 但是并没有破坏预测同步, 只是使之不再完美. 目前研究较多的是两个耦合的振子的同步问题, 但是对于多个振子的耦合的情况, 同步有什么样的性质？ Choi 等 [96] 研究了耦合中的时滞对具有不同固有频率的耦合振子的影响. 选择的系统为时滞耦合 Kuramoto 振子系统 [97] 的推广形式. 通过研究 N 个耦合振子的相运动方程, 得到了自相容方程组 (self-consistency equations). 对自相容方程组的分析表明, 系统在非凝聚态和同步频率不同的凝聚态之间一般表现出连续跃迁. Heil 等 [98] 用数值和实验方法研究了时滞光学耦合、等同半导体激光系统的动力学. 结果表明很小的时滞 (次毫微秒级) 耦合都会导致混沌同步.

文 [25, 26] 中研究了同步的优化、控制与应用问题. Kouomou 和 Woafoa[25] 使用反概形 (retroactive scheme) 方法研究了 Duffing 振子系统时滞 / 非时滞同步的稳定性和优化问题. 通过 Floquet 理论得到了同步流形的稳定性边界, 以及出现同步时反馈系数的临界值, 分析了时滞和驱动开始时间对稳定性和同步时间的影响, 发现使得发生同步的最小反馈常数是时滞的周期函数. 离散的 Kalman 滤波器在环路时滞的影响下, 性能和稳定性会受到影响而不再优化. Patapoutian[99] 提出了一种改进的回路滤波器来使这种性能损失最小化, 可用于环路滤波同步器的设计. 在通过无线个人通信服务 (personal communication service, PCS) 网络支持实时多媒体服务时, 其误差控制模式存在着由于信号重新传输而产生的时滞, 并且会引起时滞抖动 (jitter) 问题. Liu 和

Zarki[100] 针对此问题，提出了一种混合自动重复请求 (frequently asked questions, FAQ) 的解决方案. 由于大尺度的波动会导致长期时滞变化，因此首先采用一种适应性的资源率控制机理来控制由于信号重新传输而产生的有效信道数据率波动，然后采用适应性的同步概形来 "补偿" 这种时滞. 通过数值方法考察了系统的性能演化, 发现端 - 端的时滞变小, 并且同步得以保持.

利用混沌同步实现保密通讯是一种全新的方法，达到混沌同步的方法则是研究的重点，这些方法有 Pecora-Carroll 方法、 Pyragas 外部反馈法，以及基于 OGY (Ott-Grebogi-York) 方法的参数扰动方法. 后者是利用参数扰动来控制不稳定周期轨线, 不足之处在于要求两个系统的混沌轨迹点非常靠近, 这对于实际系统显得太苛刻了. 因此，必须提出一种针对高维、快速混沌实验系统的同步方法. Liu 等 [26] 提出了一种基于 OGY 方法使得高维系统同步的 "预测 - 反馈法", 并对时滞系统的超混沌谐波同步进行了研究. 结果表明预测 - 反馈法可以使两个结构等价或不等价的系统非常有效、迅速的同步，即使两个系统的轨线相距甚远，反馈扰动也可以被 "打开". 该方法可以应用于某些实验系统, 并且可以使用该方法来编码、传输、解码，再利用时滞系统的多稳态来进一步改进保密通讯的效果, 即降低被探测率，增加保密性.

群体动力学 (collective dynamics) 研究由大量耦合非线性振子组成的大系统的动力学, 有助于揭示多自由度系统的复杂动力学. 近几年，由于时滞的广泛存在, 许多工作都考虑了时滞对该类动力系统动力学的影响. Reddy 等 [101] 详细研究了具有时滞耦合的两振子简单模型，通过数值和解析的方法得到了 "死岛" 或 "振幅死区" 、锁相等不同动力学特征的参数区域及其分岔图，他们的研究表明，即使两振子的频率完全相同，也会出现振幅死区，而且在耦合强度和时滞的参数空间中可以把这种振幅死亡的区域量化，这与无时滞动力系统有本质区别. 两耦合振子系统中, 任何一个振子的时间性态都可以揭示出这个大系统协同动力学的特征. 因此，对每个振子而言，系统中其他部分都可看作是协同反馈的 "源" 来对它进行自治驱动. 进一步， Reddy 等 [102] 又研究了线性和非线性时滞反馈对广义 Stuart-Landau 系统动力学的影响. 结果表明，线性时滞反馈会产生在大量耦合的极限环振子系统中常见的相移、频率压缩、多周期态、混沌等复杂现象，而非线性反馈 (二次项) 则会产生如混合态、相逆、径陷、相跃、螺旋解等有趣的动力学现象.

自 OGY 方法问世以来, 混沌控制一直是学术界关注的焦点之一, 这是因为通过研究混沌控制问题，不仅可以得到混沌产生的条件, 而且可以得到相同定性性态的混沌存在的条件. Uçar[22] 研究了可以产生混沌信号的单变量时滞系统, 利用描述函数方法和 Nyquist 准则研究其极限环的存在性和特征，得到系统的局部性态，并且研究了此系统的全局性态，即定性保持的混沌性态 (qualitative preserved chaotic behaviors, QPCB) 的条件. 所谓定性保持的混沌性态 (QPCB) 问题研究的是在模型中不同的参数区域中，定性相同的混沌性态是否会出现，以及参数之间是什么关系时才会出现. 即如果模型对一个范围内的参数表现出类似的混沌性态, 则称为定性保持的混沌性态, 否则称为单一混沌性态 (unique chaotic behaviors, UCB). Uçar 的结果表明，如果时滞与保持解模态之间满足正比关系时, 就会出现定性保持的混沌性态.

Voss[103] 使用一种简单的非线性滤波器, 可以把时滞反馈系统产生的解在时间上任意移动. 这个特点是由于滤波器链容许信号沿与链耦合相反的方向传播. 它可用于从数据中推断耦合的方向、预测伪随机序列、早期诊断时滞引起的不稳定性、混沌通讯等.

6 经济领域及其他时滞系统动力学

由于变量的随机本质、收集信息时的时滞、保险机构的财政约束、市场竞争的出现等原因，保险定价问题是一个十分棘手的问题. 对于其稳定性的研究，有助于揭示定价问题和不同定价机理的本质与联系. Zimbidis 和 Haberman[104] 研究了时滞和反馈对保险定价过程的综合影响. 把时滞因子看作自由参数，得到了稳定性条件和反馈因子的优化条件，并且使用控制论的工具，得到了时滞因子的一个临界值，大于此值稳定性就和反馈因子的选择无关. 针对一种价格呈现几何 Brown 运动的资产， Grassia[105] 考虑了市场时滞和投资反馈的影响，改进了基本的 Brown 运动模型，研究了金融市场中的时滞、反馈和遏制 (quenching) 现象. 当投资反馈足够大时，资本市场的动力学从缓慢的随机游动变为快变不稳定性态. 但是投资者出于自身利益考虑，会放弃即将崩溃的市场，或者涌向繁荣的市场而使之饱和，使得不稳定的失控性态受到遏制 (quenching)，这种遏制将足以保证资产价格在一段时期内有界.

一般情况下, 所观测到的信号或者是混沌的或者是周期的, 也存在既有混沌成份又有可重复成份的半

混沌信号．　Berezowski 和 Grabski[106] 发现触发态 (flip-flop) 系统的状态变量可以产生半混沌信号，即时间序列中即有混沌成份又有周期成份，即有可预测成份又有不可预测成分．

混沌时间序列重构是非线性动力学研究中的一个前沿性问题．　Takens 嵌入定理是分析非线性确定性动力学系统时间序列的理论基础．它表明为探测、利用时间序列中原来认为是随机的那些确定性态，可以对原数据集重新检查或构造新实验，即重构原系统．这就产生了一个新的研究分支 —— 混沌时间序列分析．但是这个定理要求动力学和观测都是自洽的，即与时间和任何外部因素都无关．这个要求在实际中一般不成立．　Stark[107] 研究了该定理在实际中的推广形式，即对确定性受迫系统的时滞 “嵌入” 问题，证明了受迫系统在受迫未知和人为强迫两种情况下可以使用 Takens 嵌入定理的条件．这样就把 Takens 嵌入定理推广到了实际系统中，建立了分析非线性随机系统时间序列的新框架．这个结论为分析实际非线性系统的混沌吸引子提供了可能，但是它仅适用于低维系统．事实上，如果维数大于 5，混沌吸引子就不能通过时间序列分析来确认，因为需要天文数字的数据量和极低的噪音水平．更有效的分析高维混沌的方法是否存在呢？ Bünner 等 [108] 研究了将具有一个时滞反馈多组分系统向高维时滞系统映射的问题．嵌入空间的维数证明与时滞、吸引子的维数无关，因此提出的关于高维混沌情况下标准嵌入技巧的方法很有效．虽然当时滞映射被用来复制连续时间系统的动力学时，映射不是精确的，但是误差可以控制在一定范围之内．

Fridman[16] 通过构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函、采用 “中立型表达” 等变换，研究了线性滞后和中立型时滞微分方程组的稳定性，得到了系统的稳定性条件．这些条件可能与时滞有关，也可能与之无关．

Harrington 和 Socolar[29] 使用时滞反馈的空间局部形式，可使一维系统的平面波解稳定，由于扰动的出现，时滞反馈不能使二维系统的平面波解稳定．

Just 在文 [31] 中研究了系数时变、线性齐次的时滞系统的 Floquet 特征值谱的问题．利用连续分数展开方法，讨论了最大特征值与系统参数的关系，结果表明通过时滞反馈可以改善对混沌的控制．

7 展　望

从上面的综述中可以看出，与通常的力学和物理学中的非线性系统相比，时滞系统具有显著不同的特点，它不同于由偏微分方程描述的动力学系统，显然，研究难度更大．无论是离散系统 (常微分方程) 还是连续体系统 (偏微分方程) 的研究方法都不能直接用于时滞系统的研究中，在研究中要遇到来自非线性、时滞以及计算方法的匮乏诸方面的困难．另一方面，从现有的研究中已经知道，非线性时滞动力系统可以表现出比无时滞非线性系统更为复杂和丰富的动力学行为．国内外对时滞动力系统的动力学研究主要还是集中在几个典型的问题方面，结论相对是平凡的，还鲜有新现象的报道．人们对时滞系统动力学的认识还很有限．数值模拟结果显示，对某些特定的参数和初值条件，具有时滞的单自由度自治 Duffing 振子似乎也能呈现出生命科学中 FitzHugh-Nagumo 等模型的某些动力学特性．这表明，即使对我们已经非常熟悉的简单振子，考虑到时滞的影响，仍有许多问题有待我们作更深入的理论研究，仍然可能有许多新的现象有待我们去发现．例如以时滞反馈控制为中心的控制策略、非线性因素和时滞联合作用的影响、时滞导致的多级分岔使系统呈现出复杂动力学行为、以时滞状态变量耦合为中心构成的网络系统计算模型对系统的影响等问题都是非线性动力学系统所没有遇到的科学基础问题．我们认为，以下 4 个方面将是今后几年时滞系统动力学研究关注的热点问题：

(1) 以时滞反馈为中心的控制与鲁棒控制

在线性时滞系统的状态反馈控制综合问题中，从时滞系统的无限维状态空间的观点来看，记忆反馈控制器的使用可以期望能够取得比无记忆状态反馈控制器更好的性能．而目前大多限于使用有限维的 LMI 方法，难以用于记忆控制反馈综合问题．因此，如何把无限维的线性矩阵不等式约化，使用对有限个线性矩阵不等式的解来构造无限维线性矩阵不等式的解这一关键性问题仍然受到关注．从非线性动力学的角度出发，分岔控制与混沌控制也对系统参数非常敏感，这就要求系统的动力学特性是鲁棒的，施加的控制也具有鲁棒性．只有当系统的动力学与控制具有鲁棒性时，才是工程上现实可行的．因此，如何有效地分析这些不确定因素对时滞系统的动力学的影响，研究对含不确定因素的系统的控制，确保系统正常的工作性能且使其动力学特性与控制对建模不确定性和干扰具有鲁棒性，也是一个基本的应用基础研究课题，但到目前为止，除了有关线性时滞系统的鲁棒稳定性的研究外，尚未见到非线性时滞系统的鲁棒动力学与控制方面的研究成果．

(2) 非线性因素和时滞联合作用的影响

随着科学研究时空观的建立，人们已经认识到，

系统动力学行为不仅受空间结构参数的影响,而且受时间空间参数上的影响,对于非线性时滞动力系统而言,空间尺度上的非线性、时间尺度上外部干扰以及时滞是最重要的 3 个影响因素,这种实际系统的研究将是非常困难的,常常是忽略某个因素对系统的模型进行近似处理. 于是,在应用基础方面的问题就是考虑 3 个因素中某两个对系统的联合作用的耦合效果. 众所周知,非线性可以导致系统出现分岔、概周期和混沌运动. 而时滞可以导致系统甚至是线性系统的分岔,这种由时间和空间参数变化导致的分岔在系统动力学响应过程中是如何耦合的?从空间的观点出发,由分岔导致的稳态运动是在某个不变流形上,这样的流形可以依赖于空间参数,也可以依赖于时间尺度上的参数,如何描述这两种不同的流形成为问题的基础.

(3) 时滞导致的多稳态运动、多级分岔和复杂动力学

在对通常的力学和物理学中的非线性动力系统的研究过程中,从 20 世纪 70 年代以来,人们利用现代数学和先进计算技术,通过一些典型的非线性范例,发现了包括混沌、分形、孤立子在内的大量非线性新现象,提出和建立了基本的理论框架,伴随着计算机科学的发展,逐步认识了参数扰动引起非线性系统复杂动力学行为的机理,即是由于参数变化引起系统不断失稳所致. 对于时滞动力系统,近年的研究结果表明,时滞可以导致的多个同级分岔,多级分岔等,从而使系统呈现多稳态运动、不同频率的稳态运动甚至复杂动力学行为等. 初看起来,时滞引起系统这样的动力学行为已经导致复杂运动的机理似乎与无时滞的参数扰动相平行. 但是,我们最近在时滞对 Lorenz 系统影响的研究中发现,时滞可以导致 Lorenz 吸引子、 chen 吸引子,而且还发现一个新的“蜗牛”状的吸引子,这样的吸引子通过 Lorenz 系统中的参数变化是无法得到的. 于是,是否可以说时滞可以导致在空间中的新的流形结构. 如果结论成立,就必须研究时滞在导致这样结构的过程中的一些关键机制和原理,这样的研究即便是数值上的一些结果,也会在对信息和通讯安全研究领域提供重要的依据. 在应用基础研究方面,研究适应于时滞动力系统的 Melnikov 方法和 Shilnikov 方法也是亟待解决的问题.

(4) 含有耦合时滞状态变量的网络系统动力学

以网络为基础的科学活动和社会活动已经成为众多学科研究的热点和前沿领域,这就要利用网络技术,将地理上位置不同的计算设施、存储设备、仪器仪表等集成在一起,在全球或者全国建立起一个涉及各个研究领域的庞大的服务性网络,从而实现计算资源、数据资源和服务资源的有效聚合和广泛共享. 这样的环境可以抽象的理解为具有复杂拓扑结构的网络或图,计算设施、存储设备、仪器仪表和局域网络等是该网上的元素或者节点,它们之间的连接就是“几何图形”的边. 如此抽象出来的大规模的网络无所不在,所表现出的一般问题是:网络的结构构成和管理形式、网络的利用与控制、无序的成长性与动态有序的统一等. 由于节点之间的传输时间的时滞或者网络阻塞引起的时间滞后使得这样大规模的网络实际上是一个时滞的动力学系统. 如果每个节点出现不稳定性,则群体 (collective dynamics) 动力学行为就是某些分岔的组合. 由于网络计算环境集成了动力系统分岔类型和组合方式的多样性,这时的大系统会呈现出复杂的动力学行为. 那么时滞对系统的影响是怎样的,是否镇定系统,还是使系统出现更高层次的复杂性?如何考虑时滞因素的影响,建立一套适应大规模网络计算环境的同步或者协同工作的理论和模型、网络系统的构造方法、构建网络计算的协同工作模型?由此可见,建立动力学分析是网络环境系统的一个基本的核心问题,所涉及的多时间尺度和多层次动力学分析也是以往非线性动力学未遇到的新问题.

综上所述,通过对以时滞反馈控制为中心的控制策略、非线性因素和时滞联合作用的影响、时滞导致的多级分岔使系统呈现出复杂动力学行为和以时滞状态变量耦合为中心构成的网络系统计算模型对系统的影响等诸方面的研究,不仅可以解决这些应用研究领域内的一些重要的前沿性科学问题,而且必将开辟时滞动力学理论与这些应用研究领域一些新的研究方向,同时也可以推动非线性时滞动力学自身的发展.

致谢 在写作本文过程中,胡海岩和王在华教授提供了部分的资料,并提出了许多宝贵的建议,作者表示由衷的感谢. 同时,作者还要感谢审稿人有益的建议.

参 考 文 献

1 胡海岩,王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展. 力学进展, 1999, 29: 501~512

2 秦元勋,王联,刘永清. 带有时滞的动力系统的运动稳定性. 北京:科学出版社, 1963

3 Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977

4 MacDonald N. Time Lags in Biological Models. Berlin:

Springer-Verlag, 1978
5 Stepan G. Retarted Dyanmical Systems. Harlow: Longman: 1989
6 Hale J K, Luncl S V. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1993
7 Diekmann O D, Gils S A V, Lunel S M V, Walther H O. Delay Equations. New York: Springer-Verlag, 1995
8 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用. 武汉：华中师范大学出版社, 2001
9 Hu H Y, Wang Z H. Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback. Berlin: Springer-Verlag, 2002
10 Chen Y. Global stability of neural networks with distrib - uted delays. *Neural Networks*, 2002, 15: 867～871
11 Wei J J, Ruan S G. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays. *Physica D*, 1999, 130: 255～272
12 Liao X F, Cheng G R. Local stability, Hopf and resonant codimension-two bifurcation in a harmonic oscillator with two time delays. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(8): 2105～2121
13 Hong T, Hughes P C. Effect of time delay on the stability of flexible structers with rate feedback control. *Journal of Vibration and Control*, 2001, 7: 33～49
14 Gourley S A, Chaplain M A J. Travelling fronts in a food-limited population model with time delay. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 2002, 132A: 75～89
15 Azuma T, Ikeda K, Kondo T, Uchida K. Memory state feedback control synthesis for linear systems with time delay via a finite number of linear matrix inequalities. *Computers and Electrical Engineering*, 2002, 28: 217～228
16 Fridman E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems and Control Letters*, 2001, 43: 309～319
17 Olgac N, Sipahi R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(5): 793～797
18 Xu J, Chung K W. Effects of time delayed position feedback on a van der Pol-Duffing oscillator. *Physica D*, 2003, 180: 17～39
19 Buono P L. Bélair J. Restrictions and unfolding of double Hopf bifurcation in functional differential equations. *J Diff Equa*, 2003, 189(1): 234～266
20 Chen Y, Wu J. Minimal instability and unstable set of a phase-locked periodic orbit in a delayed neural network. *Physica D*, 1999, 134: 185～199
21 Raghothama A, Narayanan S. Periodic response and chaos in nonlinear systems with parametric excitation and time delay. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 27: 341～365
22 Uçar A. On the chaotic behaviour of a prototype delayed dynamical system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 16: 187～194
23 Das S L, Chatterjee A. Multiple scales without center manifold reductions for delay differential equations near Hopf bifurcations. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 30(4): 323～335
24 Xu J, Chung K W. Delay reduced double Hopf bifurcation in a limit cycle oscillator: extension of a perturbation-incremental mehtod. *Dynamics of Continuous and Impulsive Systems B*, 2004, 11: 136～143
25 Kouomou Y C, Woafoa P. Stability and optimization of chaos synchronization through feedback coupling with delay. *Physics Letters A*, 2002, 298: 18～28
26 Liu Y W, Ge G M, Zhao H, Wang Y H, Gao L. Synchronization of hyperchaotic harmonics in time-delay systems and its application to secure communication. *Physical Review E*, 2001, 62(6): 7898～7904
27 Bressloff P C, Coombes S. Travelling waves in chains of pulse-coupled integrate-and-fire oscillators with distributed delays. *Physica D*, 1999, 130: 232～254
28 Berezanskya L, Bravermanb E. Oscillation properties of a logistic equation with distributed delay. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2003, 4: 1～19
29 Harrington I, Socolar J E S. Limitation on stabilizing plane waves via time-delay feedback. *Physical Review E*, 2000, 64: 056206
30 Fofana M S. Effect of regenerative process on the sample stability of a multiple delay differential equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 14: 301～309
31 Just W. On the eigenvalue spectrum for time-delayed Floquet problems. *Physica D*, 2000, 142: 153～165.
32 Chu S Y, Soong T T, Lin C C, Chen Y Z. Time-delay effect and compensation on direct output feedback controlled mass damper systems. *Earthquake Engng Struct Dyn*, 2002, 31: 121～137
33 Wirkus S, Rand R. The dynamics of two coupled van der Pol oscillators with delay coupling. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 30: 205～221
34 Wang X F, Zhong G Q, Tang K S, Man K F, Liu Z F. Generating chaos in Chua's circuit via time-delay feedback. *IEEE Transactions on Circuits and Systems——I: Fundmental Theory and Applications*, 2001, 48(9): 1151～1156
35 Bellman B, Cooke K L. Differential-Difference Equations. San Diego: Academic Press, 1963
36 Varela S, Masoller C, Sicardi A C. Numerical simulations of the effect of noise on a delayed pitchfork bifurcation. *Physica A*, 2000, 283: 228～232
37 Zheng F, Frank P M. Robust control of uncertain distributed delay systems with application to the stabilization of combustion in rocket motor chambers. *Automatica*, 2002, 38: 487～497
38 徐鉴. 非线性时滞、时变系统分岔和非线性模态研究：[博士后工作报告]. 北京：北京航空航天大学， 1996
39 徐鉴，陆启韶，黄克累. 一类 van der Pol 型时滞系统的稳定性和 Hopf 分岔. 见：庄逢甘主编. 现代力学与科技进步 —— 庆

祝力学学会成立 40 周年，现代力学与科技进步学术大会，北京，1997-08-26-28. 北京：清华大学出版社， 1997. 1551～1554
40 裴利军，徐鉴. Stuart-Landau 时滞系统非共振双 Hopf 分岔. 振动工程学报， 2005, 18(1): 24～29
41 裴利军，徐鉴. 神经网络时滞系统非共振双 Hopf 分岔及其广义同步. 力学季刊， 2005, 26(2): 269～275
42 裴利军，徐鉴. 糖尿病治疗模型中技术时滞诱发的双 Hopf 分岔. 力学季刊， 2005, 26(3): 291～293
43 Zhang Y Y, Xu J. Classification and computation of non-resonant double Hopf bifurcations and solutions in delayed van der Pol-Duffing system. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2005, 6(1): 69～74
44 Xu J, Chen Y S. Effects of time delayed velocity feedbacks on self-sustained oscillator with excitation. *Applied Math Mech,* 2004, 25(5): 499～512
45 Xu J, Yu P. Delay-reduced bifurcation in an nonautonmous system with delayed velocity feedbacks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(8): 2777～2798
46 徐鉴，陈予恕. 时滞速度反馈对强迫自持系统动力学行为的影响. 应用数学和力学， 2004, 25(5): 455～466
47 戴护军，徐鉴. 时滞对于参数激励系统周期运动的影响. 力学季刊， 2004, 25(3): 69～76
48 徐鉴，陆启韶. 非自治时滞反馈控制系统的周期解分岔和混沌，力学学报， 2003, 35: 443～451
49 Yu P, Yuan Y, Xu J. Study of double Hopf bifurcation and chaos for an oscillator with time delayed feedback. *Comunications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2002, 7: 69～91
50 徐鉴，时滞位移反馈引起系统周期和混沌振动. 力学学报， 2002, 34(增刊): 122～126
51 徐鉴，陆启韶，王乘. van der Pol-Duffing 时滞系统的稳定性和 Hopf 分岔. 力学学报， 2002, 32(1):112～116
52 徐鉴，陆启韶，黄玉盈. van der Pol 型时滞系统的两参数余维一 Hopf 分岔及其稳定性. 固体力学学报， 1999, 20(4): 297～302
53 Xu J, Lu Q S. Hopf bifurcation of time-delay Lienard equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(5): 939～951
54 徐鉴，陆启韶，黄玉盈. 时滞 Lienard 非线性系统的 Hopf 分岔. 非线性动力学学报， 1998, 5(4): 290～294
55 Xu J, Lu Q S, Huang K L. Controlling erosion of safe basin in nonlinear parametrically excited systems. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 12(3): 281～288
56 Bai L J, Jiang S Q, Xu J. Time-delay chaos based secure communication system. In: Research Center for Nonlinea Sience of Fudan University ed. CD-ROM Proceeding of 2003 Shanghai International Symposium on Nonlinear Science and Applications (Shanghai NSA 2003), Shanghai, 2003-11-09-13. ID 0462
57 Wang Z H, Hu H Y, Wang H L. Robust stabilization to nonlinear delayed systems via delayed state feedback: the averaging method. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 279(3-5): 937～953
58 Hu H Y. Using delayed state feedback to stabilize periodic Motions of an oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275(3-5): 1009～1025
59 Wang H L, Hu H Y. Global dynamics of duffing oscillator with delayed displacement feedback. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(8): 2753 ～ 2775
60 Wang H L, Hu H Y. Wang Z H. Hopf bifurcation of a kind of nonlinear oscillators with delayed velocity feedback. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 20(4): 426～434
61 Wang Z H, Hu H Y, Küpper T. Robust Hurwitz stability Test for linear systems with uncertain commensurate time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(8): 1389～1393
62 Hu H Y, Wang Z H. Nonlinear dynamics of controlled mechanical systems with time delays. *Progress in Natural Sciences*, 2000, 10(11): 801～811
63 Hu H Y, Wang Z H. Stability analysis of damped SDOF systems with two time delays in state feedback. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 214(2): 213～225
64 Hu H Y, Dowell E H, Virgin L N. Stability estimation of high dimensional vibrating systems under state delay feedback Control. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 214(3): 497～511
65 Hu H Y, Dowell E H, Virgin L N. Resonance of a harmonically forced Duffing oscillator with time delay state feedback. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 15(4): 311～327
66 Wang Z H, Hu H Y. Dimensional reduction for nonlinear time-delayed systems composed of stiff and soft substructures. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 25(4): 317～331
67 Wang Z H, Hu H Y. Stability switches of time delayed dynamic systems with unknown parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 233(2): 215～233
68 Wang Z H, Hu H Y. Delay-independent stability of retarded dynamic systems of multiple degrees of freedom. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 226(1): 57～81
69 Wang Z H, Hu H Y. Robust stability test for dynamic systems with short delays by using Pade approximation. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 18(3): 275～287
70 Wang Z H, Hu H Y. Stability of linear time variant dynamic systems with multiple time delays. *Acta Mechanica Sinica*, 1998; 14(3): 274～282
71 Li Y K. Periodic Solutions for Delay Lotka-Volterra Competition Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, 246: 230～244
72 Li Y K, Kuang Y. Periodic solutions of periodic delay lotka-volterra equations and systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, 255: 260～280
73 Xu R, Chaplain M A J. Persistence and attractivity in an N-species ratio-dependent predator-prey system with distributed time delays. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, 131: 59～80

74 Ma S Q, Lu Q S. Dynamics of a Logistic population model with maturation delay and nonlinear birth rate. *Discrete and Continuous Dyanmical Systems B*, 2005, 5(3): 735~752

75 Ma S Q, Lu Q S. Dynamical bifurcation for a predator-prey metapopulation models with delay. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2005, 6(1): 13~17

76 Hethcote H W, van den Driessche P. Two SIS epidemiologic models with delays. *J Math Biol*, 2000, 40: 3~26

77 van den Driessche J, Watmough J. A simple SIS epidemic model with a backward bifurcation. *J Math Biol*, 2000, 40: 525~540.

78 Tornatore E, Buccellato S M, Vetro P. Stability of a stochastic SIR system. *Physica A*, 2005, 354: 111~126

79 Greenhalgh D, Khan Q J A, Lewis F I. Hopf bifurcation in two SIRS density dependent epidemic models. *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, 39: 1261~1283

80 Burić N, Todorović D. Dynamics of delay-differential equations modelling immunology of tumor growth. *Chaos, Solitions and Fractals*, 2002, 13: 645~655

81 Engelborghs K, Lemaire V, Bélair J, Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay- differential equations arising from physiological modeling. *J Math Biol*, 2001, 42: 361~385

82 Yao W, Yu P, Essex C. Delayed stochastic differential model for quiet standing. *Phys Rev E*, 2001, 63: 021902

83 Liao X, Wong K, Wu Z. Bifurcation analysis on a two-neuron system with distributed delays. *Physica D*, 2001, 149: 123~141

84 Liao X, Li S, Wong K. Hopf bifurcfation on a two-neuron system with distributed delays: a frequency domain approach. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31: 299~326

85 Liao X, Li S, Chen G. Bifurcation analysis on a two-neuron system with distributed delays in the frequency domain. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 17: 545~561

86 Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1984, 81: 3088~3092

87 Shayer L P, Campbell S A. Stability, bifurcation, and multistability in a system of two coupled neurons with multiple time delays. *SIAM J Appl Math*, 2000, 61(2): 673~700

88 Thiel A, Eurich C W, Schwegler H. Stabilized Dynamics in Physiological and Neural Systems Despite Strongly Delayed Feedback. In: Dorronsoro J, ed. Artificial Neural Networks-ICANN 2002, vol. 2415 of Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 2002. 5~20

89 Wang Q Y, Lu Q S. Time delay-enhanced synchronization and regularization in two coupled chaotic neurons. *Chin Phys Lett*, 2005, 22(3): 543~546

90 Hohl A, Gavrielides A, Erneux T, Kovanis V. Quasiperiodic synchronization for two delay-coupled semiconductor lasers. *Physical Review A*, 2000, 59: 27~28

91 Shahverdiev E M, Sivaprakasam S, Shore K A. Lag synchronization in time-delayed systems. *Physics Letters A*, 2002, 292: 320~324

92 Brown R, Kocarev L. A unifying defination of synchronization for dynamical systems. *Chaos*, 2000, 10(2): 344~349

93 Chen J Y, Wong K W. Phase synchronization in coupled chaotic oscillators with time delay. *Physical Review E*, 2002, 66: 056203

94 Voss H U. Anticipating chaotic synchronization. *Physical Review E*, 2000, 61(5): 5115~5119

95 Masoller C. Anticipation in the synchronization of chaotic time-delay systems. *Physica A*, 2001, 295: 301~304

96 Choi M Y, Kim H J, Kim D. Synchronization in a system of globally coupled oscillators with time delay. *Physical Review E*, 2000, 61(1): 371~381

97 Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. New York: Springer- Verlag, 1984

98 Heil T, Fischer I, Elsässer W. Chaos Synchronization and spontaneous symmetry-breaking in symmetrically delay-coupled semiconductor lasers. *Physical Review Letters*, 2001, 86(5): 795~798

99 Patapoutian A. Application of kalman filters with a loop dealy in synchronization. *IEEE Transactions on Cmmunications*, 2002, 50(5): 703~706

100 Liu H, Zarki M E. Delay and synchronization control middleware to support real-time multimedia services over wireless PCS networks. *IEEE J on Slected Areas in Communications*, 1999, 17(9): 1660~1672

101 Reddy D V R, Sen A, Johnston G L. Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation. *Physica D*, 1999, 129: 15~34

102 Reddy D V R, Sen A, Johnston G L. Dynamics of a limit cycle oscillator under time delayed linear and nonlinear feedbacks. *Physica D*, 2000, 144: 335~357

103 Voss H U. A backward time shift filter for nonlinear delayed-feedback systems. *Physics Letters A*, 2001, 279: 207~214

104 Zimbidis A, Haberman S. The combined effect of delay and feedback on the insurance pricing process: a control theory approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2001, 28: 263~280

105 Grassia P S. Dealy, feedback and quenching in financial markets. *Eur Phys J B*, 2000, 17: 347~362

106 Berezowski M, Grabski A. Chaotic and non-chaotic mixed oscillations in a logistic system with delay and heat- integrated tubular chemical reactor. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 14: 97~103

107 Stark J. Delay Embeddings for forced systems. I. Deterministic Forcing. *J Nonlinear Sci*, 1999, 9: 255~332

108 Bünner M J, Ciofini M, Giaquinta A, et al. Reconstruction of systems with delayed feedback: I. Theory. *The European Physical Journal D*, 2000, 10: 165~176

ADVANCES IN DYNAMICS FOR DELAYED SYSTEMS *

XU Jian† PEI Lijun

School of Aerospace and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China

Abstract The studies from 1999 to now on dynamics of delayed systems are reviewed in this paper. They concern mechanics, mechanical engineering, aeronautics and astronautics, ecology, biology, neural network, laser, electronics, information technology, security communication, economics and so on. The typical methods and techniques are discaussed. It is shown that the delayed systems are ubiquitous in nature and engineering. Many new problems and phenomena need to be studied and explored even for some simple and known oscillators when the effects of delays on systems are considered. Based on some existing problems in the studies, some topics for future studies are suggested, for examples, control strategies focused on delayed feedbacks, effects of combining delay with nonlinearities on systems, delay induced multiple bifurcations and complex dynamics in systems, computing models focused on net systems with delayed coupling of state variables and so on. These problems should be addressed since they do not occur in nonlinear systems without delays.

Keywords delayed system, nonlinear dynamics, delayed differential equation, bifurcation, chaos, complexity

* The project supported by the National Natural Science Key Foundation of China (10532050) and the National Natural Science Foundation of China (10472083)

† E-mail: xujian@mail.tongji.edu.cn