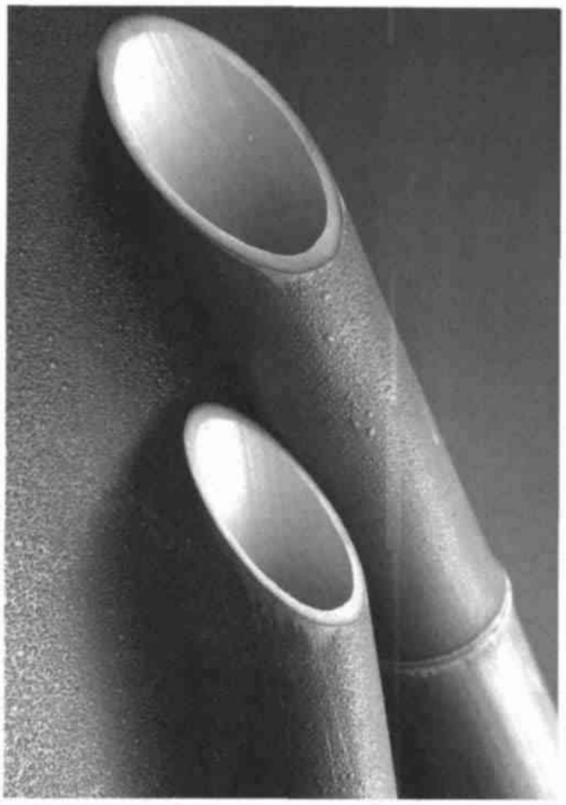
# 王文素论“翦管术”



王文素论

# “翦管术”

◆ 潘有发

“翦管术”即孙子的“物不知数”，首见于《孙子算经》卷下，这类问题，颇具猜谜味道，解法巧妙，在我国民间流传很广，宋周密（1232—1298）《志雅堂杂钞》（1290）卷下称之为“鬼谷算”、“隔墙算”，并有一首影射此问题解法的诗：

三岁孩儿七十稀，五留廿一事尤奇。

七度上元重相会，寒食清明便可知。

南宋数学教育家杨辉在《续古摘奇算法》（1275年）卷上称此类问题为“秦王暗点兵”并将其解法称为“翦管术”。严恭《通源算法》称为“管数”。我国已故数学史家严敦杰（1917—1988）生前在一次数学史会议上有一段十分生动形象的解释，他说：“把所求数看成一根长长的管子，三寸三寸剪多二寸，五寸五寸剪多三寸……这根管子到底有多长？程大位（1533—1606）《算法统宗》（1592）卷五称为“物不知总”又称“韩信点兵”，孙子歌曰：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝。

七子团圆正半月，除百令五便得知。

日本吉田光由（1598—1672）“塵劫记”（1672）卷三称为“百五算”。1754年谭文《数学寻源》卷四称为“太平莲灯”诗曰：

天下太平莲盏灯，元宵庆贺满城行。

街前街后看无厌，或高或低数不清。

初次三数恰算尽，次将五数四盏剩。

盏如七数只存六，满目红光闹盈盈。

三数算尽不必下，五数一剩二十一。

剩四当下八十四，七数一剩一十五。

剩六当下九十零，三并共下百七四。

减满法去一百五，余得莲灯六十九。

杨辉在《续古摘奇算法》卷上引录了孙子的物不知数问题，并续了四个类似的问题，但对其解法仍照录《孙子算经》的原文，未作进一步的发挥阐述。明初数学家吴敬在《九章算法比类大全》（1450年）照录了杨辉的四个问题，也未作进一步的发挥阐述。在我国及世界上首次系统地论述这一问题解法的是南宋数学家秦九韶（约1202—1261），在其所著《数书九章》（1247年）一书

中，用“大衍求一术”解决了这一问题。应该郑重指出，秦九韶的大衍总数术，是我国数学史上一枝绚丽的独秀，在国内是可以与刘徽“割圆术”，刘徽—祖“球积术”，贾宪——刘益——秦九韶“增乘开方法”，秦九韶“正负开方术”，李冶（1192——1279）“天元术”，朱世杰“四元术”等相比美。在世界数学史上，也是出类拔萃的，外国人称为“中国剩余定理”。又称为高斯定理。

秦九韶的“大衍求一术”，利用我国古代传统数学中的“更相减损术”，两两连环求等，避开了西方数学中求诸定母两两互质的特殊情况，巧妙地得出了一般通用的解法，吴文俊教授对此有高度的评价，他说：“这个寓理于算不证自明的方法，是完全构造性与机械化的，尽可以据此编成程序上机实施〔1〕。

秦九韶的《数书九章》一书，长时期以来，只有少数抄本传世，直到公元1842年才被收入“宜稼堂丛书”正式刻印出版〔2〕。王文素自然无缘阅读此书。但他经过长时期的独立艰苦专研，逐步领悟到“翦管术”的精髓，得出这一问题的解法，成为我国及世界数学史上第二位解决这一问题的学者，他的方法，第一术与秦九韶相同，而第二、三、四术则是独创。虽然只在《算学宝鉴》卷二十二中，只用了一条篇幅，但意义却是十分重大的，不亚于他的“表算法”，也符合吴文俊教授的论断“可以据此编成程序，上机实施”（详见《算学宝鉴校注卷22注解》）。与二百七十多年以后，公元1801年德国数学家高斯（C、F、Gauss1777—1855）在《算术研究》一书中所公布的一次同余式组的解法的思路，殊途同归，不谋而合。〔3〕

《算学宝鉴》卷二十二，第一百二十六条翦管，专门论述一次同余式组的解法，此卷记载3首歌诀11个问题。他说：“尝疑此术以三五七为题者，术云‘三数剩一下七十，五数剩一下二十一①，七数剩一下十五。’愚谓此数，不知自何而得，思之即久，忽得拙法，未知是否。且如三、五、七者，令三，五相乘得一十五数，以七除之余一，故术曰‘七数余一下十五’；又另以三、七相乘得二十一，以五除之余一，故曰‘五数余一下二十一’；又另以五、七相乘得三十五，以三除之余二，不可，再下三十五，以三除之，方才余一，故曰‘三数余一下七十’。各以下数乘各余数，并之为实，另以三、五、七连乘得一百五为满数，去之，余不满法者，为原总物数，余皆仿此。凡数犯相可约者，不可同题，如有三不可用六、九；有四不可用八之类。”诗曰：

求原母子有根基，众母连乘满数齐。

三母问题乘两母，其余一母去除之。

惟余一者方堪下，以子乘来并实奇。

满数去之余剩数，便为原总数无疑。②

设 $m_1$、$m_2$、$m_3$ 为三个正整数，且为 $m_1 < m_2 < m_3$ 的除数，$r_1$、$r_2$、$r_3$ 依次为三个相应地余数。王文素依次称除数 $m_1$、$m_2$、$m_3$ 为“少母、中母、多母（秦九韶称“定母”）”，依次称余数 $r_1$、$r_2$、$r_3$ 为“少子、中子、多子（秦九韶称为“余数”）”，称三除数 $m_1$、$m_2$、$m_3$ 的连乘积为“满数（秦九韶称为“衍母”）”。并设 $a_1$、$a_2$、$a_3$、为满足下列条件的三整数（式中 k 为正整数）。

$a_1$ 为 $km_2$、$m_3$，以 $m_1$ 除余 1；

$a_2$ 为 $km_1$、$m_3$，以 $m_2$ 除余 1；

$a_3$ 为 $km_2$、$m_1$，以 $m_3$ 除余 1（秦九韶称：$m_2m_3$，$m_1m_3$，$m_1m_2$ 为“衍数”）此即“三母问题乘两母，其余一母去除之，惟余一者方堪下”。则此三除数一次同余式组问题王文素用满数法可表示如下：

$$N = a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 - P(m_1m_2m_3) \qquad (1)$$

（式中 P 为使 N 为最小正整数解时去满数的倍数）此即“满数去之余剩数，便为原总数无疑”。

王文素还研究了只有两个除数（二母）：$m_1$、$m_2$ 和四个除数（四母）$m_1$、$m_2$、$m_3$、$m_4$ 的问题。

例1：二母题：

有物不知总数，以七七数之，余三；以九九数之，余五。问：总数几何？

答曰：五十九。

此即：$N \equiv r_1 (\mathrm{mod}\, m_1) \equiv r_2 (\mathrm{mod}\, m_2)$

王文素的公式为：

$$N = a_1r_1 + a_2r_2 - p(m_1m_2) \qquad (2)$$

（式中 $a_1$ 是 $m_2$ 的整倍数，以 $m_1$ 除余 1；$a_2$ 是 $m_1$ 的整倍数，以 $m_2$ 除余 1。）

题中：$m_1 = 7$，$m_2 = 9$；$r_1 = 3$，$r_2 = 5$。$a_1$ 为 36（9 的 4 倍，用 7 除余 1），$a_2$ 为 28（7 的 4 倍，用 9 除余 1），满数为：$m_1m_2 = 7 \times 9 = 63$，P 为 3，即：$N = 36 \times 3 + 28 \times 5 - 3 \times 63 = 59$

例2：四母题

物不知总数为实，以三除之，余一；以四除之，余

二；以五除之，余三；以七除之，余四。问：总物几何？

答曰：二百九十八

此即：$N\equiv 1(\mathrm{mod}3)\equiv 2(\mathrm{mod}4)\equiv 3(\mathrm{mod}5)\equiv 4(\mathrm{mod}7)$

王文素的公式为：

$$N=a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3+a_4r_4-p(m_1m_2m_3m_4) \quad (3)$$

题中：$m_1=3, m_2=4, m_3=5, m_4=7; r_1=1, r_2=2, r_3=3, r_4=4$

$a_1=2 \quad m_2m_3m_4=2\times4\times5\times7= \quad 280$

$a_2=2 \quad m_1m_3m_4=2\times3\times5\times7= \quad 210$

$a_3=12 \quad m_1m_2m_4=12\times3\times4\times7= \quad 1008$

$a4=8 \quad m_1m_2m_3=8\times3\times4\times5= \quad 4480 \ (+$

$1978$

$N=1978-4\times(3\times4\times5\times7)$

$=1978-4\times420$

$=298$

在一般情况下，设除数为 $m_1$、$m_2$、$m_3\cdots\cdots m_K$（$K\geqslant 2$），满数（除数的连乘积）为 M，则王文素的算式可表示为：

$$N=a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3+\cdots\cdots a_Kr_K-pM \quad (4)$$

上述四式，与秦九韶“大衍总数术”、“大衍求一术”公式：

$$N=(\sum_{j=1}^{m}r_jk_j\frac{M}{aj})-PM(0\leqslant N\leqslant M)$$

此式所表达的关于 N 的最小正整数解的认识和解法是一致的，与高斯的解法也是一致的。“编成程序，即可上机实施。”

王文素还首创了与满数法不同的两种新解法及分段法：

1. 不用满数

以少（母）减多（母）法：

诗曰：

求原母子另推详，以少减多要合题；

不合再加多母数，合其题者总无疑；

或将三母为题问，余母除前二总宜；

不合相乘前母并，合其题者总才知。

术曰：先下多母多子，以少母少子约之，合其题者为二母总数

以三母题，先以二母如前求之，得二母小总，以所余一母约之，合题者即是；或不合，以先求二母相乘，并之再约。四母以上者，次第求之。

设 $N\equiv r_1(\mathrm{mod}m_1)\equiv r_2(\mathrm{mod}m_2)$

$N=m_1x+r_1$

$N=m_2y+r_2$

$\therefore m_1x+r_1=m_2y+r_2$

$$\therefore X=\frac{m_2y+r_2-r_1}{m_1}$$

式中当 $\frac{1m_21}{m_1}>1$，$r_2-r_1$ 为整数时，由 y 确定 x 比较容易，用珠算盘屡加 y 值乘 $m_2$ 的方法，很容易确定 X 值，例如前例 1 二母题中，$7X+3=9y+5$ 用少母 7 约除，当 y 为 0 时，不合题意；当 y 值由 1 逐步增至 6 时与 9 相乘为 54，加少子 5 为 59，用 7 约除恰余 3，合问。

2.（不用满数）以多（母）减少（母法）法：

诗曰：

求原母子细踌躇，多母之余减少余；

不勾减时加少母，减余为实且傍居；[3]

别将二母相差数，为法将前寄实除；

除尽数乘多母数，加多余子总无虑。

术曰：先下少子，以多子减之，或不勾[3]再加少母减之，余为实。别置多母，以少母去之，余为法。以法除实，务令除尽；不尽再加少母，以除得之数而乘多母，搭入多子为二母原总数。如三母题，先以二母如前求之，得二母小总为多子，以二母相乘为多母，与所母子如前求之。母多者，递以求之。

设 $m_1x+r_1=m_2y+r_2$

两端各减：$m_1y$ 得：

$m_1x-m_1y+r_1=m_2y-m_1y+r_2$

$$\therefore y=\frac{m_2(x-y)+r_1-r_2}{m_2-m_1}$$

使 $x-y$ 为最小值，得 y 代入 $m_2y+r_2$ 即得 N 的最小值。下题应用此法最佳。

例 3（即书中例 10）秦王（李世民，公元 626—649 年在位）传令点军题（即秦王暗点兵）为：

昔唐太宗点军，传令下营。每一千一[4]人为一营，只剩一名；每一千二人为一营，只剩四名。问：总军几何？

答曰：一百万。

设总军为 N 名，则：

$N\equiv 1(\mathrm{mod}1001)\equiv 4(\mathrm{mod}1002)$

$N=1001x+1, N=1002Y+4,$

$$y=\frac{1001(x-y)+1-4}{1002-1001}$$

使 $x-y=1$　　$y=998$

总军人数：$N=998\times1002+4=1000000$

对于三、四个以上除数的问题，王文素创用一种分步依次求解的方法。即先用上述二同余数题的解法，以二同余数为新的子，以二除数之积为新母与另一除数，余数建立新的同余式，依次求解。这是一特大创新。例如前述例二四母题，王文素的解法是：

第一步：

先下五除($m_3$)余三($r_3$)，以七除($m_4$)余四($r_4$)减之，不足，加上母五($m_3=5$)共八($3+5=8$)，减之，余四($8-4=4$)为实，别置七以五去之余二($m_4-m_3=7-5=2$)为法，除实得二($4\div2=2$)，以七乘之得一十四，($2\times7=14$)，加入子四，共一十八($14+4=18$)，为二率之子。另以五、七相乘得三十五($5\times7=35$)为二率母。

第二步：

另下四除($m_2$)余二($r_2$)，以二率子十八减之，不足，加母四。凡四次，下十六，共一十八($4\times4+2=18$)，以十八减之，适尽($18-18=0$)，仍以十八又为三率子，另以母四乘二率母三十五得一百四十($4\times35=140$)为三率母。

第三步：

另下三除($m_1$)余一($r_1$)，加母三，凡六次，下一十八，共一十九($3\times6+1=19$)，以三率子十八减之，余一($19-18=1$)为实，另置三率母一百四十，以母三去之，余二为法。除实一不尽。加母三得四($1+3=4$)，以法二除之，得二。以三率母一百四十乘之，得二百八十，加三率子十八，共二百九十八，为原总实物，合问。

上述解法，可归结为：

① $N\equiv3(\mathrm{mod}5)\equiv4(\mathrm{mod}7)\equiv18$

$5z+3=7u+4=18$

用少母5约除 u，当 $u=2$ 时，$7\times2=14$，$14+4=18$，用5除余3

② $N\equiv2(\mathrm{mod}4)\equiv18(\mathrm{mod}35)\equiv158$

$4y+2=35v+18=158$

用少母4约除 v，当 $v=2$ 时，$35\times4=140$，$140+18=158$，用4除余2

③ $N\equiv1(\mathrm{mod}3)\equiv18(\mathrm{mod}35\times4)\equiv298$

$3x+1=140w+18=298$

用少母3约除 w，当 $w=2$ 时，$140\times2=280$，$280+18=298$，用3除余1，合问。

或者：① $N\equiv22(\mathrm{mod}3\times4)\equiv22(\mathrm{mod}12)$

$3x+1=4y+2=22$

用少母3约除 y，当 $y=5$ 时，$4\times5=20$，$20+2=22$，用3除余1

② $N\equiv53(\mathrm{mod}5\times7)\equiv53(\mathrm{mod}35)$

$5z+3=7u+4=53$

用少母5约除 u，当 $u=7$ 时，$7\times7=49$，$49+4=53$，用5除余3

此即：$N=12v+22=35w=298$

参考资料：

(1) 吴文俊《从 <数书九章> 看中国传统数学构造与机械化的特色》，载《秦九韶与 <数书九章>》，北师大出版社。1987年4月

(2) 李迪《<数书九章> 流传考》载《秦九韶与 <数书九章>》或李迪《中国数学通史》(宋元卷)江苏教育出版社 1999年11月

(3) 钱宝琮(1892—1974)《中国数学史》P77—78，科学出版社 1964年11月

梁宗巨(1924—1995)《世界数学史简编》，辽宁人民出版社 1981年

(4) 袁向东、李文林《<数书九章> 中大衍类问题及衍总数术》，载《秦九韶与 <数书九章>》李迪《中国数学通史》(宋元卷)参见(2)

(5) 赵擎寰《明王文素 <算学宝鉴> 浅析》，载《王文素与 <算学宝鉴> 研究》山西人民出版社 2002年5月

(6) 宜稼堂本，商务印书馆．丛书集成本《数书九章》

(7)《算学宝鉴校注》科学出版社，2008年8月

注解：

①原文脱“一”字，今依意校补

②原文为“移”，今依意校改

③勾通“够”《西游记》，第五回：“大圣吃勾了多时”

④原题此处脱“一”字，依细草核补

作者单位：黑龙江省克山县第四中学