中国剩余定理

善科文库团队 2018-11-22 ◉3916

林开亮

在最近推出的两篇文章

① 微积分之前奏1：高阶等差数列的求和 (http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzIyNzUxMjE1Mw==&mid=2247492896&idx=1&sn=a8823a26a8b366f4099772f0da703fbc&chksm=e862bf16df1536002ad3502024b919ff91919d51e5ea7b2468464606f212ca40a768ca3d7470&scene=21#wechat_redirect)

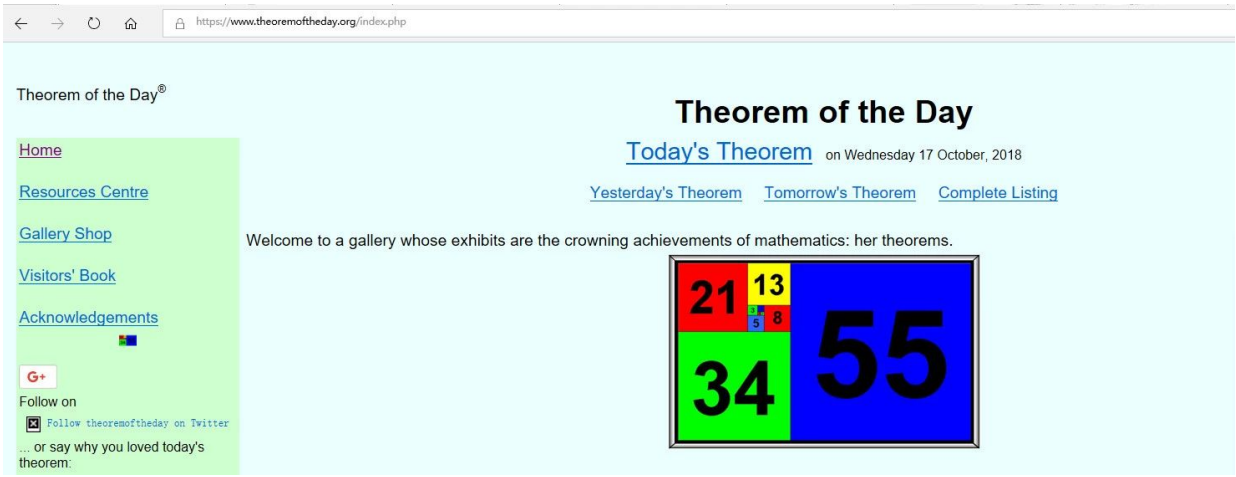
② 算命是胡扯，猜姓却不然 (http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzIyNzUxMjE1Mw==&mid=2247492234&idx=1&sn=9f6da59f601a29330cbf2ad0c55c4806&chksm=e862b8bcdf1531aa5c48c2c469e7fac4a0862a8cbd2d02f4831d2b67382fec16e138f3fda81d&scene=21#wechat_redirect)

中，我们都提到了中国剩余定理，虽然我曾在

从射雕到九章——在天大理学院物理系的通俗报告 (http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzU4NjAxNzg0MA==&mid=2247484388&idx=1&sn=824d2fb51f18cab9a7a81bae02f3da5e&chksm=fd80febbcaf777adf784c27e82824d581e4a9b37fe31677b3ce461fc61205b6198fbb46672dd&scene=21#wechat_redirect)

介绍过，但有点浮光掠影，我们想在此详细介绍一下。

我们期待，本文作为好玩的数学开创的头一个专栏——一周一定理——的开篇，能够打响第一炮。本专栏的开创，学习和借鉴了下述网页（感谢上海交通大学数学系吴耀琨教授向我们推荐）



有兴趣的读者，可以先浏览这个主页上的各个定理。欢迎各位读者为本专栏供稿，投稿邮箱在这里来，一起交流数学 (http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzIyNzUxMjE1Mw==&mid=2247492220&idx=1&sn=6a5da13b5b02991e93506b3e61dc3333&chksm=e862b84adf15315c46975876689c3cc0e8f6dcd8a986939c88c0c545a465f4b7fb230ff28a94&scene=21#wechat_redirect)。

好了，现在我们直奔主题。

中国剩余定理：设正整数 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 两两互素，则下述同余方程组

$$\begin{cases} x_1 \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ \cdots \\ x_n \equiv r_n \pmod{m_n} \end{cases} \tag{$\star$}$$

（其中 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 给定的整数）的整数解恰好是模

$$m = m_1 m_2 \cdots m_n$$

的一个剩余类。事实上，方程 ($\star$) 的通解为

$$x = r_1 M_1 x_1 + \cdots + r_n M_n x_n + kM, k \in \mathbb{Z} \tag{\#}$$

其中 $M_i = M/m_i$，而 x_i 是同余方程

$$M_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i} \tag{*i}$$

的一个特解，因而可以用求一术得出。

简单地说，中国剩余定理将一个同余方程组（$\star$）的求解，归结为多个一次同余方程（*i)的求解，而后者可以用求一术来求解。那么，什么是求一术呢？我们表述成一个算法的形式：

求解方程

$$ax \equiv 1 \pmod{b} (a, b \in \mathbb{Z}^+) \tag{♣}$$

的整数解的求一术：

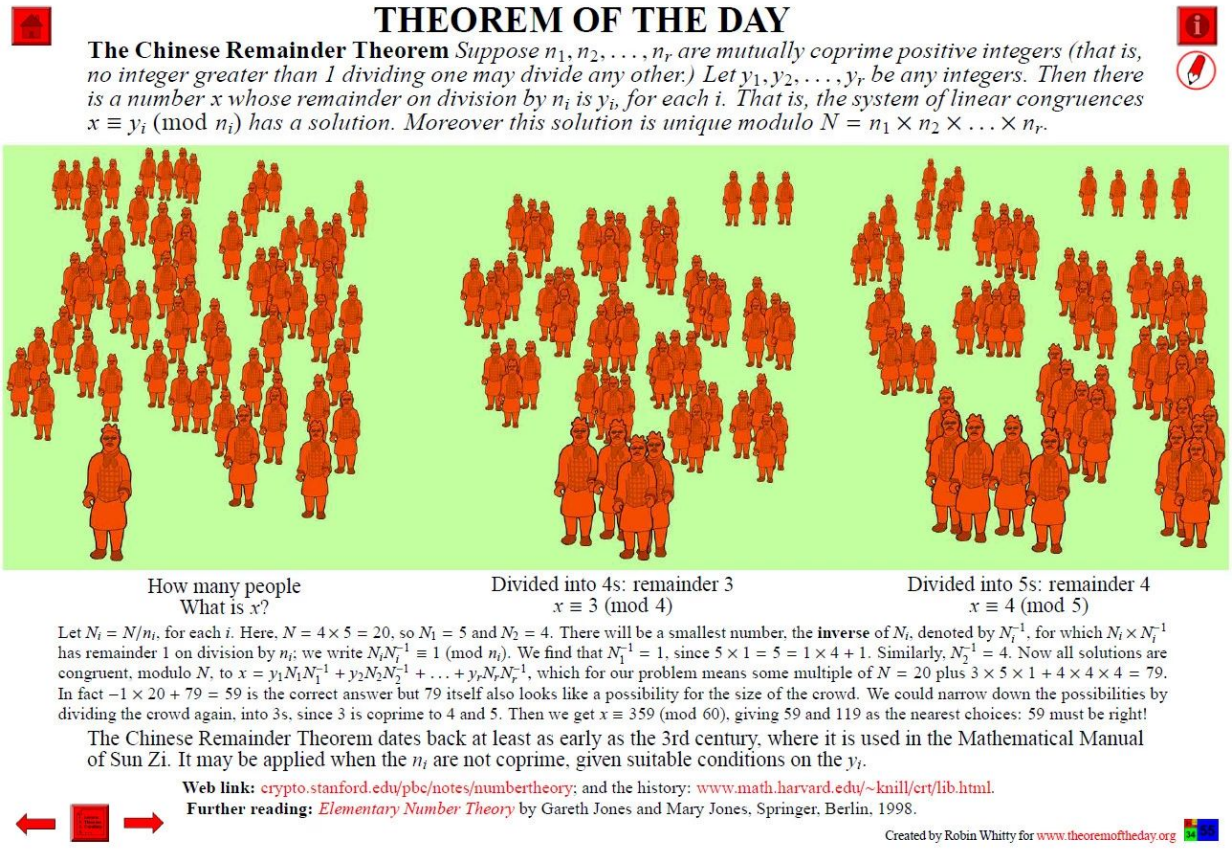
首先写出矩阵

$$A = \begin{vmatrix} ab \\ 10 \end{vmatrix}$$

然后对第一行两个元素辗转相除，并将对应的操作应用于第二行，直至第一行某个元素变成0（停止信号），此时观察第一行的另一个元素：若它恰好是1（正常信号），则它下方的那个数就是（♣）的一个特解；否则，（♣）无整数解。此外，若已得到（♣）的一个特解，比方说，$x = u$，那么，（♣）的通解为

$$x = u + bk, k \in \mathbb{Z} \tag{♠}$$

注：我们不打算证明求一术，它本质上就是解线性方程组的矩阵变换方法。我们指出，在中国古代还未出现0时，通常是用辗转相减（即“更相减损术”），所以最后终止的信号是，出现的等数（即最大公因子）为1，这就是求一术名称的来由（对此，请参见许光午和李宝[4]）。另一方面，注意到方程（♣）本质上是在求逆，所以，也许一个更恰当的称谓是求逆术。由此可以理解，为什么在下述网页中，作者用了逆的记号来表述结果：



好了，现在我们来实战吧。首先，我们解释上述网页中的例子，即我们要求解同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4, \\ x \equiv 4 \pmod 5. \end{cases} \tag{0}$$

为求解这个方程组，我们来求解两个更简单的方程组

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 4, \\ x \equiv 0 \pmod 5. \end{cases} \tag{1}$$

与

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 4, \\ x \equiv 1 \pmod 5. \end{cases} \tag{2}$$

先看（1），注意到（1）的第二个方程相当于说，x 是5的倍数，因此我们可以令

$$x = 5x_1, \quad (x_1 \in \mathbb{Z})$$

从而代入（1）的第一个方程，就把（1）整个转化为一次同余方程

$$5x_1 \equiv 1 \pmod 4 \tag{1*}$$

在这个特殊情况，我们可以直接看出（1*）的一个特解为

$$x_1 = 1$$

类似的，我们来求解方程组{2}, 注意到它的第一个方程相当于说

$$x = 4x_2, \quad (x_2 \in \mathbb{Z})$$

从而（2）可化为线性方程

$$4x_2 \equiv 1 \pmod 5 \tag{2*}$$

容易观察到，（2*）的一个特解为

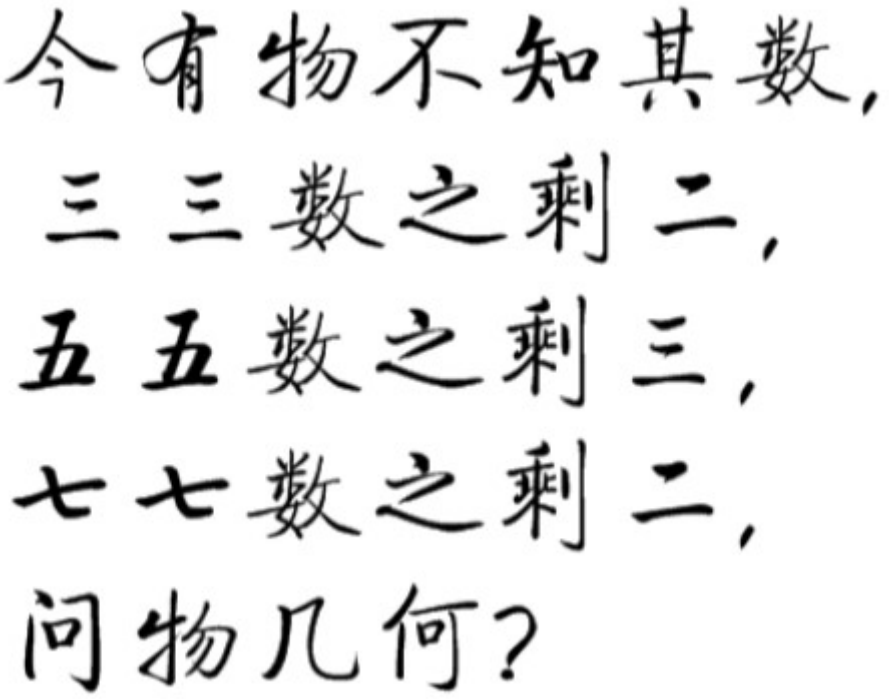
$$x_2 = -1$$

（注：当然你也可以取 $x_1 = 4$，就像上述网页中那样）

因此，根据中国剩余定理，原方程组{0}的通解为

$$\begin{aligned} x &= r_1 M_1 x_1 + r_2 M_2 x_2 + kM \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 5k \\ &= 20k - 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

最经典的一个例子，即金庸曾在《射雕英雄传》原著中引用的“鬼谷算题”：



我们留给有兴趣的读者自行研究，其求解步骤，可以参考从射雕到九章——在天大理学院物理系的通俗报告(http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzU4NjAxNzg0MA==&mid=2247484388&idx=1&sn=824d2fb51f18cab9a7a81bae02f3da5e&chksm=fd80febbcaf777adf784c27e82824d581e4a9b37fe31677b3ce461fc61205b6198fbb46672dd&scene=21#wechat_redirect)。

而在94版的射雕电视剧中，这个题目被编剧稍微改了改（参见下述链接最后部分），你能算出来吗，你猜神算子瑛姑能算出来吗？

延伸阅读：

[1]华罗庚，从孙子的“神奇妙算”谈起，数学小丛书，北京，科学出版社。

[2]蔡聪明，谈韩信点兵问题，《科学月刊》第29卷第9期。电子版可见数学知识网页：http://episte.math.ntu.edu.tw/ (http://episte.math.ntu.edu.tw/)

[3]项武义，從韓信點兵和勾股弦說起——漫談基礎數學的古今中外，《数学传播》，电子版 http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d211/21101.pdf (http://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d211/21101.pdf)（建议在谷歌浏览器打开网页版，并开启翻译功能。近日我们会推出该文的简体版）

[4]许光午，李宝，大衍求一术的算法意义与分析 https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1610/1610.01175.pdf (https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1610/1610.01175.pdf)

作者: 林开亮，西北农林科技大学理学院讲师

热门文章

1 俄国的数学普及和英才教育 (/article/article/index/id/436.html)

2 数学作为一门合乎需要的语言 (/article/article/index/id/559.html)

3 论无穷（2） (/article/article/index/id/573.html)

4 数学家欧拉：所有人的老师 (/article/article/index/id/112.html)

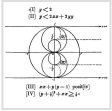
5 梅森素数为何这样重要 (/article/article/index/id/113.html)

最新发布

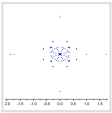
原创数学话剧《素数的故事》 2021版-直播回放视频 (/article/article/index/id/596.html)

原创数学话剧《费马大定理》 直播回放视频 (/article/article/index/id/595.html)

《开讲啦》 20200222 本期演讲者：张继平 (/article/article/index/id/586.html)



椭圆函数正篇：Gauss与AGM(6-2) (/article/article/index/id/579.html)



椭圆函数正篇：Gauss与AGM(6-1) (/article/article/index/id/577.html)