# 第一期分类汇总版

总编：薛家兵

编者：史　健 史军军 李　问 李宪洲

张建党 罗玉聪 孟显智 赵　钊

郝立涛 覃　荣 焦子奇

按姓氏笔画排序，排名不分先后！

（内部资料，严禁商用）

# 群介绍

本群以全国名校试卷研究为主，每周对 2-3 套名校试卷的 10，11，12，15，16，所有解答题，进行解析，每月对解析的试卷进行分类汇总，期待每位老师积极参与刷题，提供多解，我认为能找到一群一起刷题，志同道合的人是数学老师的幸事，同时我们会对各位老师的提供的解法进行署名，对参与编辑的老师分享 word 文件，参与当月编辑 60 % 以上者，分享本月汇总 word 文档。

本群解析目标是服务教学，服务学生，请老师们积极提供身边的月考题，让我们一起解析，一起分享，对第一位提供试卷被采用者，我们为老师分享 word 版解析文件，多次分享者我们为老师分享当月 word 汇总文件，

总之越分享越强大，好的群需要大家共同建设，好的资料需要大家共同参与，合作共赢。

欢迎扫码加入我们！或者搜索群号：140812546 ！

# 群内相关活动介绍

多解

- 试卷成品发布后，可以补充解法，要求私发已整理好的 word，并注意署名，模板不做要求，配色按照原方案执行。
- 为了相对公平起见，每套补充解法两道以上可分享该套的电子版压缩包文件。
- 提供多解只可获取该套电子版文件，不计入参与试卷编辑次数。
- 如果有补充重复的方法以较早发送为先，时间以发送到 QQ 的显示时间为准。
- 所有补充的多解请私发给河北邯郸焦子奇（QQ：3031078590）审核。

相似题

- 试卷发布后，开始征集相似题，要求私发 word，要求配有解析，并尽量提供多解，如果不多解至少提供一种自己认为最好的解法，解法以通性通法为主。
- 补充相似题并提供最优解或多解的，可获取该题 Word 文件。
- 所有相似题请私发给陕西西安赵钊审核。

透解千题

- **理念：**大家参与群题解析，或者日常教学中，总有一两个题你非常有想法，这道题来自什么改编，怎样一步一步低难度或增加难度，或者这道题由课本某个公式、定理逐步深化演变而来，灵感总在一瞬间，但我们大多是因为忙碌而忙碌着没注意总结，或者说差那么一个平台和一个机遇和一群志同道合的人，大家学生时代都是才华横溢的写作高手，如果能把这个思维过程写下来，由一道题推广到一类题，再慢慢升华，找到其本质，这个对于教师的成长无疑是巨大的，是成为真正的教研型教师必经之路，如果能在这个基础上把题目的难易变化，思路的来龙去脉说清楚，再配以同类题练习，这就是精品。
所以希望大家每月有灵感的时候及时进行总结，相互交流，发予群主，然后大家汇总共享，相互学习，共同进步，这是思维的碰撞，是思想的交流，也是我最期待的教辅。
- **参与要求：**群内老师可以选取该月您喜欢的一个（或一些）题目进行整合，写出来这道题来龙去脉，题不怕难，怎样能越解越简单这才难，也可以是教学过程中的某些感悟，如题目的由课本什么公式、定理、考点逐步演变而来，怎样一步一步加难，再配以同类题，把思维的过程展现出来，这就是数学的美。
- **汇总：**每月汇总 word 文件，由参与者共享，第一次参与者稿件由全国名校编辑团队审核，审核通过后邀请参与者加入透解千题群（全国名校试卷编辑分群），群内为大家免费提供各大报刊杂志电子版，海量资源供参与者参考，同时在群内积极研讨给位老师的心得，并给与补充更多想法，再次修改后，形成最终版。

# 目录

# 模块二 函数 1

**考点 1 映射**

**1．** AAA

**考点 2 函数的概念**

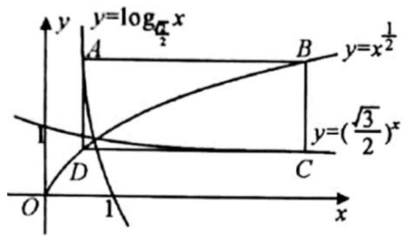
**2．** AAA

**考点 3 函数的定义域**

**3．** AAA

**考点 4 函数的解析式**

**4．** （四川 2020 届高三联合诊断考试理科）如图，在第一象限内，矩形 $ABCD$ 的三个顶点 $A,B,C$ 分别在函数 $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x, y=x^{\frac{1}{2}}, y=(\frac{\sqrt{3}}{2})^x$ 的图象上，且矩形的边分别平行于两坐标轴，若点 $A$ 的纵坐标是 2，则点 $D$ 的坐标为________.




【考点】初等函数的定义.

【命题意图】本题较新颖，但属于基础题，考查了初等函数解析式的应用.

【答案】$(\frac{1}{2},\frac{9}{16})$.

解析：湖北十堰郝清鹏

解法：依题意有 $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x=2$，$\therefore x=\frac{1}{2}$，由 $x^{\frac{1}{2}}=2$ 得 $x=4$，$\therefore y_D=y_C=(\frac{\sqrt{3}}{2})^4=\frac{9}{19}$，

所以点 $D$ 的坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{9}{16})$.

【解析点评】根据点 $A$ 的纵坐标及各点间关系，逐步求出点 $D$ 的坐标.

**5．** AAA

**考点 5 函数的图象**

**6．** AAA

**考点 6 函数的值域**

**7．** AAA

**考点 7 函数的单调性**

**A 组：直用**

**8.** （2020 届四省名校第一次联考理数）已知函数 $f\left(x\right)=3^{x}+3^{-x}+\log_{3}\left(3^{|x|}-1\right)$，则

A．$f\left(\log_{5}\frac{1}{4}\right)>f\left(-\sqrt[3]{3}\right)>f\left(\sqrt{2}\right)$　　B．$f\left(-\sqrt[3]{3}\right)>f\left(\log_{5}\frac{1}{4}\right)>f\left(\sqrt{2}\right)$

C．$f\left(\sqrt[3]{3}\right)>f\left(-\sqrt{2}\right)>f\left(\log_{5}\frac{1}{4}\right)$　　D．$f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)>f\left(\log_{5}\frac{1}{4}\right)$

【知识内容】函数值大小比较

【考查意图】本题主要是考查了函数的性质---奇偶性、单调性知识，属于中档题.

【答案】C

解析：浙江宁波赖庆龙

由已知函数 $f\left(x\right)$ 是 $\left\{x\mid x\neq 0\right\}$ 上的偶函数，且在 $\left(-\infty,0\right)$ 单调递减，在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，

因为 $3^{2}>2^{3}$，所以 $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}>1>\log_{5}4$，所以 $f\left(\sqrt[3]{3}\right)>f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\log_{5}4\right)$，

即 $f\left(\sqrt[3]{3}\right)>f\left(-\sqrt{2}\right)>f\left(\log_{5}\frac{1}{4}\right)$，故选项 $C$ 正确.

【解析点评】先求函数定义域，判断函数的奇偶性，进一步确定单调性，然后比较自变量的大小，紧扣函数性质进行解答.

**9.** （巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）已知 $a=\log_{7}2$，$b=\log_{0.7}0.2$，$c=0.7^{0.2}$，则 $a,b,c$ 的大小关系为（　　）

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【考点】比较大小

【命题意图】比较对数与幂大小，利用函数单调性寻找每个数学的估算范围，属于简单题.

答案：A.

解析：陕西西安赵钊

解法：因为 $\log_{7}1<\log_{7}2<\log_{7}7$，所以 $0<a<1$；

$\log_{0.7}0.7<\log_{0.7}0.2$，所以 $b>1$；

$0<0.7^{0.2}<0.7^{0}$，所以 $0<c<1$；

而 $\log_{7}2<\log_{7}\sqrt{7}=\frac{1}{2}$，且 $0.7^{0.2}>0.5^{0.2}>0.5^{1}=\frac{1}{2}$；

故 $a<c<b$，故选 A.

【解析点评】利用函数单调性，借助于三个数 $0,1,\frac{1}{2}$，进行估算定位.

**10.** AAA

**B 组：恒成立问题**

**11．（昆明市第一中学 2020 届高三摸底考试理数）**偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上为减函数，若不等式 $f(1-ax)<f(2+x^2)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是（　　）．

A.$(-2\sqrt{3},2)$　　B.$(-2,2\sqrt{3})$　　C.$(-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$　　D.$(-2,2)$

【考点】函数（不等式恒成立问题）．

**答案：D．**

解析：（湖北十堰郝清鹏）

因为 $f(x)$ 为偶函数，由题意可知，$f(|1-ax|)<f(2+x^2)$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $|1-ax|<2+x^2$，从而 $-2-x^2<1-ax<2+x^2$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，可得 $a^2<12$ 且 $a^2<4$，所以 $-2<a<2$，选 D．

**12．**（贵阳第一中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）若不等式 $\left|\ln x+\dfrac{1}{x}-m\right|\le m+e$（$e$ 为自然对数的底数）对 $x\in\left[\dfrac{1}{e^2},1\right]$ 成立，则实数 $m$ 的取值范围是

A. $\left[\dfrac{e^2-e-2}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[\dfrac{e^2-e-2}{2},\dfrac{e^2-1}{2}\right)$

C. $\left[\dfrac{e^2-e-2}{2},\dfrac{e^2-1}{2}\right]$　　D. $[1,+\infty)$

【考点】函数单调性（不等式恒成立问题）．

**答案：A．**

【命题意图】本题考查了含绝对值不等式恒成立问题，属于中等题.

**解析：浙江宁波赖庆龙**

解法 1：设 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x},x\in\left[\dfrac{1}{e^2},1\right]$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $x\in\left[\dfrac{1}{e^2},1\right]$ 上单调递减，

所以 $f(x)\in[1,e^2-2]$，所以 $\ln x+\dfrac{1}{x}-m\in[1-m,e^2-2-m]$，

为使不等式 $\left|\ln x+\dfrac{1}{x}-m\right|\le m+e$ 对 $x\in\left[\dfrac{1}{e^2},1\right]$ 成立，则 $\left|\ln x+\dfrac{1}{x}-m\right|_{\max}\le m+e$

而 $\left|\ln x+\dfrac{1}{x}-m\right|_{\max}=\max\{|1-m|,|e^2-2-m|\}$，

所以 $\begin{cases}|1-m|\le m+e\\|e^2-2-m|\le m+e\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m\ge\dfrac{1-e}{2}\\m\ge\dfrac{e^2-e-2}{2}\end{cases}$

所以 $m\in\left[\dfrac{e^2-e-2}{2},+\infty\right)$，故选 A．

**解法 2：** 设 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x},x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0$

所以 $f(x)$ 在 $x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ 上单调递减，所以 $f(x)\in\left[1,e^2-2\right]$

为使不等式 $\left|\ln x+\frac{1}{x}-m\right|\le m+e$ 对 $x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ 成立

即 $-m-e\le m-f(x)\le m+e$ 对 $x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ 成立

所以 $m\ge\frac{f(x)-e}{2}$ 对 $x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ 成立，即 $m\ge\frac{f(x)_{\max}-e}{2}=\frac{e^2-e-2}{2}$

所以 $m\in\left[\frac{e^2-e-2}{2},+\infty\right)$，故选 A.

**解法 3：** 设 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x},x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0$

所以 $f(x)$ 在 $x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ 上单调递减，所以 $f(x)\in\left[1,e^2-2\right]$

为使不等式 $\left|\ln x+\frac{1}{x}-m\right|\le m+e$ 对 $x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ 成立

即不等式 $|m-t|\le m+e$ 对 $t\in\left[1,e^2-2\right]$ 成立

当 $m\le1$ 时，$t-m\le m+e$ 对 $t\in\left[1,e^2-2\right]$ 成立，即 $m\ge\left(\frac{t-e}{2}\right)_{\max}=\frac{e^2-e-2}{2}$，不符

当 $m\ge e^2-2$ 时，$m-t\le m+e$ 对 $t\in\left[1,e^2-2\right]$ 成立，显然恒成立

当 $1<m<e^2-2$ 时，$g(t)=|t-m|=\begin{cases}m-t,1\le t<m\\t-m,m<t\le e^2-2\end{cases}$

只需 $\max\left\{m-1,e^2-2\right\}\le m+e$，即 $\begin{cases}m-1\le m+e\\e^2-2-m\le m+e\end{cases}$

所以 $m\in\left[\frac{e^2-e-2}{2},+\infty\right)$，故选 A.

【解析点评】解法一利用函数的整体性，抓住关键点处的单调函数值不超过 $m+\mathrm{e}$ ，解两个含绝对值不等式；解法二利用函数的整体性，求出 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x},x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]$ 的范围，再利用绝对值的基本解法，分离参变量；解析三对参数进行讨论，目的是寻找函数的最大值。以上方法都值得一学.

**13．**（巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）已知$a\in R$，函数$f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2a, x\le 1,\\ x-a\ln x, x>1,\end{cases}$且对任意的实数$x$，$f(x)\ge 0$恒成立，则$a$的取值范围为（　　）

A. $[0,2]$　　　　B. $[0,e]$　　　　C. $[1,2]$　　　　D. $[1,e]$

【考点】分段函数

【命题意图】考查了含参的分段函数恒大于或等于 0 时，求参数范围，属于中等题.

【答案】B

解析：浙江宁波赖庆龙

解法 1：分类讨论

当$x\le 1$时，函数$f(x)=x^2-ax+2a$，其图象为开口向上，对称轴为$x=\frac{a}{2}$的抛物线在$x\le 1$上的图象，当$x>1$时，$f(x)=x-a\ln x$，$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，

①当$a\ge 2$时，$\frac{a}{2}\ge 1$，所以$f(x)$在$(-\infty,1],(1,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增，

所以$\begin{cases}f(1)\ge 0\\ f(a)\ge 0\end{cases}$，解得$2\quad a\quad e$；

②当$1<a<2$时，$\frac{a}{2}<1$，所以$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right],(1,a)$上单调递减，在$\left(\frac{a}{2},1\right),(a,+\infty)$上单调递增，所以$\begin{cases}f|\frac{a}{2}|\ge 0\\ f(a)\ge 0\end{cases}$，解得$1<a<2$；

③当$a\le 1$时，$\frac{a}{2}<\frac{1}{2}$，所以$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right]$上单调递减，在$\left(\frac{a}{2},1\right),(1,+\infty)$上单调递增，所以$\begin{cases}f|\frac{a}{2}|\ge 0\\ f(1)\ge 0\end{cases}$，

解得$0\quad a\quad 1$；

综上，实数$a$的取值范围是$0\quad a\quad e$，故选项 B 正确.

解法 2：参变分离

当$x\le 1$时，$f(x)=x^2-ax+2a\ge 0$恒成立，即$a\ge\frac{x^2}{x-2}$恒成立，

设$t=x-2$，则$t\le -1$，记$g(t)=t+\frac{4}{t}+4, t\le -1$，则函数$g(t)$在$(-\infty,-2)$单调递增，在$[-2,-1]$单调递减，则$g(t)_{\max}=g(-2)=0$，所以$a\ge 0$；

当$x>1$时，$f(x)=x-a\ln x\ge 0$恒成立，则$a\le\frac{x}{\ln x}$恒成立，

设$h(x)=\frac{x}{\ln x}, x>1$，因为$h'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，所以$h(x)$在$(1,e)$单调递减，在$(e,+\infty)$单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(e)=e$，所以 $a\le e$；

综上，实数 $a$ 的取值范围是 $0\quad a\quad e$，故选项 B 正确.

解法 3：特殊值排除法

当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2,x\le 1,\\ x,x>1.\end{cases}$ 显然满足对任意的实数 $x$，$f(x)\ge 0$ 恒成立，

当 $a=e$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2-ex+2e,x\le 1,\\ x-e\ln x,x>1.\end{cases}$ 在 $(-\infty,1],(1,e]$ 单调递减，在 $[e,+\infty)$ 单调递增，

则 $f(x)_{\min}=\min\{f(1),f(e)\}=0$，所以满足对任意的实数 $x$，$f(x)\ge 0$ 恒成立，、

从而选项 B 正确.

**【解析点评】解法 1：主要是寻找函数的最小值大于或等于 0，求参数范围；解法 2：主要是利用参数全分离，构造新的已知函数，直接求参数范围；解法 3：主要在特殊情况下的不等式恒成立，这也是做选择题的一种好的方法.**

**14．** A

**C 组：可成立问题**

**15．（昆明市第一中学 2020 届高三摸底考试理数）**若存在 $x_0\in(0,1)$，满足 $\ln\dfrac{(x_0+1)}{2}>2a(x_0-1)$，则实数 $a$ 的取值范围是（　　）.

A. $\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　C. $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$

【考点】函数可成立问题.

**答案：A.**

解析：（陕西西安赵钊）

解法一：【官方解答】

设 $f(x)=\ln(x+1)$，$g(x)=2a(x-1)+\ln 2$，则它们函数图象的一个公共点为 $A\ (1,\ln 2)$，

函数 $f(x)=\ln(x+1)$ 在点 $A$ 处的切线斜率为 $f'(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，

所以在 $A$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}(x-1)+\ln 2$，

所以要存在 $x_0\in(0,1)$ 满足 $\ln(x_0+1)>2a(x_0-1)+\ln 2$，则 $2a>\dfrac{1}{2}$，

所以 $a$ 取值范围是 $\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$，选 A.

解法二：（分离参数+最值讨论+洛必达法则）

彻底换元：令 $\frac{(x_0+1)}{2}=t$，

由题知：存在 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $\ln t>4a(t-1)$．即：$4a>\frac{\ln t}{t-1}$ 在 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 有解．

构造 $g(t)=\frac{\ln t}{t-1},t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，由于 $g'(t)=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}$，

令 $h(t)=1-\frac{1}{t}-\ln t,t<1$，则 $h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\frac{t^2-t+1}{t^2}>0$，故 $h(t)<h(1)=0$，故 $g'(t)<0$．

即：$g(t)$ 单调递减，由洛必达法则知 $\lim\limits_{t\to1}\frac{\ln t}{t-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{\frac{1}{t}}{1}=1$．

故 $4a>\frac{\ln t}{t-1}$ 在 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 有解知，$4a>1$，即 $a\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

**解法三：（构造作差+分类讨论）**

彻底换元：令 $\frac{(x_0+1)}{2}=t$，

由题知：存在 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $\ln t>4a(t-1)$．即 $g(t)=\ln t-4a(t-1)>0$ 有解．由于 $g(1)=0$

而 $g'(t)=\frac{1}{t}-4a$ 单调递减，所以 $g'(t)>1-4a$

①当 $a\le\frac{1}{4}$ 时，$g'(t)>0$，此时 $g(t)$ 在 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 单调递增，所以 $g(t)<0$ 恒成立，舍去．

②当 $a>\frac{1}{4}$ 时，令 $g'(t)=\frac{1}{t}-4a<0$ 得：$t\in(\frac{1}{4a},1)$，即 $g(t)$ 在 $t\in(\frac{1}{4a},1)$ 单调递减．

此时，$g(t)>0$ 恒成立，故存在 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $g(t)>0$ 有解．

综上：$a>\frac{1}{4}$

**解法四：（特值验证）**

小题做法：首先，彻底换元：令 $\frac{(x_0+1)}{2}=t$，由题知：存在 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $\ln t>4a(t-1)$．

由于 $\ln t\le(t-1)$ 对任意实数 $t$ 成立，故考虑 $a=\frac{1}{4}$ 时，不难发现 $t\in(\frac{1}{2},1)$ $\ln t<(t-1)$，故排除 BD．　而 $a=0$ 时，$\ln t>0$ 无解，排除 C．　综上：选 A．

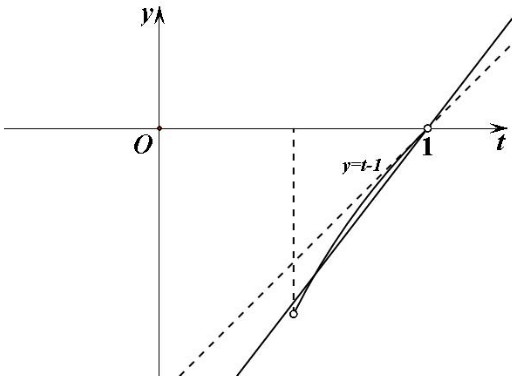
**解法 5：（半分离）换元+数形结合法（广西玉林徐文才）**

令 $t=\frac{x_0+1}{2}$，由 $x_0\in(0,1)$ 可知 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

原命题等价于：存在 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $\ln t>4a\left(t-1\right)$

等价于函数 $y=\ln t$，$t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 的图像上至少存在一点在直线 $y=4a\left(t-1\right)$ 的上方

因为直线 $y=4a\left(t-1\right)$ 过定点 $\left(1,0\right)$，$y=\ln t$ 也过点 $\left(1,0\right)$，且在 $\left(1,0\right)$ 处的切线方程为 $y=t-1$




结合图像可知 $4a>1$，即 $a>\frac{1}{4}$，即 $a$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$.

**16.** （巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）已知 $a\in R$，函数 $f(x)=ax^3-x$，若存在 $t\in R$，使得 $|f(t+2)-f(t)|\le 2$，则实数 $a$ 的最大值为__________

【考点】纵坐标差

【命题意图】含参函数平移前后的纵坐标差，是 2019 年浙江高考真题 T16 改编而来，属于中等题.

**答案：** $2$.

**解析：浙江衢州汪强**

**解法 1：** $|f(t+2)-f(t)|=|a(6t^2+12t+8)-2|\le 2\Leftrightarrow 0\le a(6t^2+12t+8)\le 4\Leftrightarrow 0\le a\le\frac{4}{6t^2+12t+8}$ 有解，故 $a\le(\frac{4}{6t^2+12t+8})_{\max}=2$.

**解析：浙江湖州史健**

**解法 2：** $|f(t+2)-f(t)|=|a(6t^2+12t+8)-2|\le 2$ 有解，

设故 $x=6t^2+12t+8,t\in R$，则 $x=6(t+1)^2+2\geqslant 2$

不等式 $|ax-2|\le 2$ 有解，所以 $\begin{cases}a>0\\2a-2\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow 0<a\leqslant 2$

【解析点评】解法一：采用参变量全分离法，寻找不等式成立的条件，进而求出参数的最大值；解法二：主要是延续浙江高考中含绝对值问题常见处理方法，化为“一次的绝对值问题”.

**17.** AAA

**考点 8 函数的奇偶性**

**18.** （巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）已知 $f(x)=(x-4)^2\sin\omega x$，且 $f(x+a)$ 为偶函数，则 $\omega$ 的值可能为（　　）

A. $\frac{3\pi}{8}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\pi$

【考点】函数性质（奇偶性）

【命题意图】考查了函数平移后为偶函数时，求平移单位，属于中等题.

答案：A.

解析：陕西西安赵钊

解法：因为 $f(x+a)$ 为偶函数，所以 $g(x)=f(x+a)=(x+a-4)^2\sin(\omega(x+a))$ 为偶函数，

由 $g(x)=g(-x)$ 知：$a=4$ 且 $a\omega=4\omega=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，即：$4\omega=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$

解得：$\omega=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},k\in Z$，故 $\omega=\frac{\pi}{8}$，故选 A.

【解析点评】根据函数性质，求参数取值，三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的初相 $\varphi$ 的作用：一，当初相为 $k\pi(k\in Z)$ 时，不改变函数名称；二，当初相为 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时，改变函数名称；就是诱导公式中常说的“奇变偶不变，符号看象限”.

**19.** AAA

**考点 9 函数的周期性**

**20.** （吉林省长春市 2020 届高三质量检测（一）理科数学）已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，且满足 $f(2+x)+f(x)=0$，当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=-x^2-2x$，则当 $x\in[4,6]$ 时，$y=f(x)$ 的最小值为（　　）.

A．$-8$　　B．$-1$　　C．$0$　　D．$1$

【考点】函数的奇偶性、周期性.

【命题意图】本题通过求函数在指定区间上的最值，考查了函数的对称性（奇偶性）与周期性间关系与应用.

答案：B.

解析：（浙江嘉兴陈国伟）

解法 1：由 $f(2+x)+f(x)=0$ 得函数的周期为 4，又当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=-x^2-2x$，且 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数∴ $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$，

∴当 $x\in[4,6]$ 时，$f(x)=f(x-4)=(x-4)^2-2(x-4)=x^2-10x+24$

此时 $f(x)$ 的最小值为 $f(5)=-1$.

解法 2：由周期为 4，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值即为 $f(x)$ 在 $[4,6]$ 上的最小值

解法 3：由函数的性质可直接画出在 $[4,6]$ 上的图像，数形结合即可.

【解析点评】本题重点考查的函数周期性的应用．解法 1 根据周期性求出函数在指定区间上的解析式后求最值；解法 2 根据周期性，将指定区间上的最值转化解析式已知的区间上的最值，更简洁些；解法 3 根据对称性作图后解答，更直观些．

对于条件复杂的求解析式问题，解法 3 可能更容易掌握，不妨试解下题：

定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(3+x)=f(3-x)$，若当 $x\in(0,3)$ 时，$f(x)=2^x$，求当 $x\in(-6,-3)$ 时，$f(x)$ 的解析式．答案：$f(x)=-2^{x+6}$．

21．AAA

考点 10 函数的零点

22．（云南师大附中 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）函数 $g(x)$ 的图像如图 2 所示，则方程 $g(g(x^3))=0$ 的实根个数为（　　）．

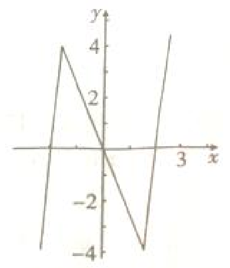


图 2

A．3　　B．6　　C．9　　D．12

【考点】零点（复合函数零点问题）．

答案：C.

解析：（四川绵阳孙莉）

令 $t=x^3$，$u=g(t)$，则由 $g(g(x^3))=0$，有 $g(u)=0$，由图象知：

有三个根 $u_1$，$u_2$，$u_3$，分别令 $u_1=g(t)$，$u_2=g(t)$，$u_3=g(t)$ 解出有 9 个 $t$ 符合方程，再令 $t=x^3$ 解出相应 $x$ 的根的个数为 9 个，故选 C.

23．已知函数 $f(x)=\begin{cases}4x(1-x),0\le x\le 1\\ \log_{2019}x,x>1\end{cases}$，若 $a,b,c$ 互不相等，且 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 $a+b+c$ 的取值范围是（　　）

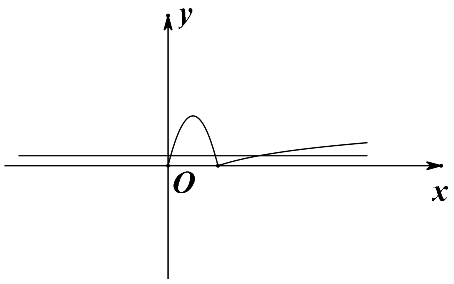
A．$(1,2020)$　　B．$(1,2019)$　　C．$(2,2020)$　　D．$(2,2019)$

【知识内容】函数零点问题

【考查意图】本题主要是考查了二次函数的对称性，属于中档题．

答案：C

解析：（浙江嘉兴温福长）




如图所示，$a+b=1$，图象有三个点函数值相等，那么$f\left(c\right)\in\left(0,1\right)$

即$\log_{2019}c\in\left(0,1\right)$，解得$c\in\left(1,2019\right)$

所以$a+b+c\in\left(2,2020\right)$

故选 C．

【解析点评】利用二次函数的对称性，得到两个零点的和为定值，再结合对数函数性质，解决第三个零点的范围，从而使得问题得以解决．

**24．** AAA

**考点 11 与函数有关的创新题**

**25．**（四川 2020 届高三联合诊断考试理科）设$x,y\in\mathbf{R}$，定义$x\otimes y=x\left(a-y\right)$（$a\in\mathbf{R}$且$a$为常数），若$f\left(x\right)=e^{x}$，$h\left(x\right)=\ln x$，$g\left(x\right)=e^{-x}+2x^{2}$，$F\left(x\right)=f\left(x\right)\otimes g\left(x\right)$．下述四个命题：

①$g\left(x\right)$不存在极值；

②若函数$y=kx$与函数$y=\left|h\left(x\right)\right|$的图像有两个交点，则$k=\dfrac{1}{e}$；

③若$F\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上是减函数，则实数$a$的取值范围是$\left(-\infty,-2\right]$；

④若$a=-3$，则在$F\left(x\right)$的图像上存在两点，使得在这两点处的切线互相垂直．

其中所有真命题的编号是（　　）．

A．①③④　　　　B．②③④　　　　C．②③　　　　D．②④

【考点】新定义、函数综合问题．

【命题意图】本题借助新定义，考查了函数单调性、极值、零点、切线等问题，属于难题．

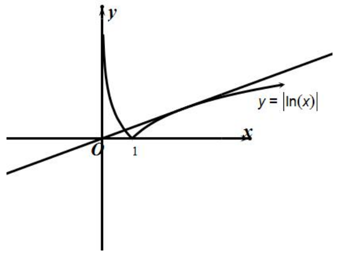
【答案】C．

解析：湖北十堰郝清鹏

解法：$\because g\left(x\right)=e^{-x}+2x^{2}$，$\therefore g'\left(x\right)=-e^{-x}+4x$，$\therefore g''\left(x\right)=e^{-x}+4>0$，

$\therefore g'\left(x\right)=-e^{-x}+4x$在$R$上单调递增，又$\because g'\left(0\right)=-1<0$，$g'\left(1\right)=-\dfrac{1}{e}+4>0$，

∴ $\exists x_0\in(0,1)$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，∴ $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $g(x)_{极小值}=g(x_0)$，∴①错；




显然当 $k>0,0<x<1$ 时，函数 $y=kx$ 与函数 $y=\left|h\left(x\right)\right|$ 的图像有一个交点，当 $x>1$ 时，$y=\left|h\left(x\right)\right|=\ln x$，设曲线 $y=\left|h\left(x\right)\right|=\ln x(x>1)$ 上过原点的切线的切点为 $\left(x_0,y_0\right)$，则切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，∵切线过原点，∴ $0-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(0-x_0)$，即 $\ln x_0=1$，∴ $x_0=e$，∴ $k=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{e}$，②对；

∵ $F\left(x\right)=f\left(x\right)\otimes g\left(x\right)=e^x(a-e^{-x}-2x^2)$，

∴ $F'\left(x\right)=e^x(a-2x^2-4x)$，令 $F'\left(x\right)\le 0$，则 $a\le 2x^2+4x=2(x+1)^2-2$ 恒成立，即 $a\le[2(x+1)^2-2]_{\min}$．∵ $2(x+1)^2-2\ge -2$，∴ $a\le -2$，即 $a\in(-\infty,-2]$，∴③正确；

∵ $a=-3\in(-\infty,-2]$，∴ $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

∴ $F'\left(x\right)=-e^x(2x^2+4x+3)=-2e^x[(x+1)^2+\frac{1}{2}]<0$，设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是其图象上任意两点，则 $F'\left(x_1\right)\cdot F'\left(x_2\right)>0$ 恒成立，∴ $a=-3$ 时，在 $F\left(x\right)$ 的图像上不存在两点，使得在这两点处的切线互相垂直．∴④错．故选择 C．

**【解析点评】本题实际是多选题，根据设问，逐个考查每个命题的真假．**

**26．** AAA

# 模块三 导数 1

**考点 12 导数的概念**

**27．** AAA

**考点 13 导数的几何意义**

**28.** （贵阳第一中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=e^x+\dfrac{a}{e^x}$ 的导数是 $f'(x)$，且 $f'(x)$ 是偶函数，若曲线 $y=f(x)$ 的一条切线的斜率是 $\dfrac{5}{2}$，则切点的横坐标为__________.

**答案：** $x_0=\ln 2$ **或** $x_0=-\ln 2$.

【考点】导数切线问题.

【命题意图】本题考查了两个函数的图象是否存在关于坐标轴的对称位置，属于简单题.

**解析：湖北十堰郝清鹏**

$\because f'(x)=e^x-\dfrac{a}{e^x}$ 且 $f'(x)$ 是偶函数，$\therefore a=-1$. 设切点为 $(x_0,y_0)$，则 $f'(x_0)=e^{x_0}+\dfrac{1}{e^{x_0}}=\dfrac{5}{2}$

解得 $x_0=\ln 2$ 或 $x_0=-\ln 2$.

【解析点评】先求出函数的导函数，然后根据偶函数性质，求出参数 $a$ 的值，最后解方程，求出切点的横坐标；当然我们也可以根据原函数与导函数的之间奇偶性关系，若原函数是奇函数，则其导函数为偶函数；若原函数是偶函数，则其导函数是奇函数，这样可以先求参数 $a$ 的值，然后求导、解方程.

**29.** （巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）已知函数 $y=e^x$ 上任意一点 $P(x_0,e^{x_0})$，在 $P$ 点处的切线 $l_1$ 交 $x$ 轴于点 $A$，$l_2$ 过点 $P$ 且 $l_1\perp l_2$，$l_2$ 与 $x$ 轴交于点 $B$，则线段 $AB$ 长度的取值范围为___________.

【考点】切线

【命题意图】考查了函数切线，用切点坐标表示线段的长，再求其范围，属于简单题.

【答案】$(1,+\infty)$

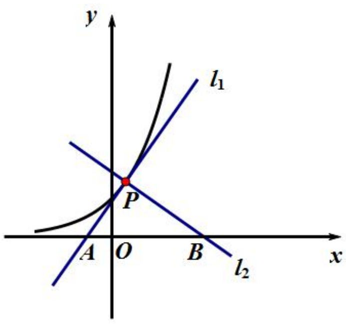
**解析：浙江宁波赖庆龙**

解法： 由已知，直线 $l_1$ 的方程为 $y=e^{x_0}\cdot x+e^{x_0}-x_0\cdot e^{x_0}$，则 $A(x_0-1,0)$，

直线 $l_2$ 的方程为 $y=-\dfrac{1}{e^{x_0}}\cdot(x-x_0)+e^{x_0}$，则 $B\left(e^{2x_0}+x_0,0\right)$，

则 $|AB|=\left|e^{2x_0}+x_0-(x_0-1)\right|=e^{2x_0}+1>1$，

所以答案为 $(1,+\infty)$.




【解析点评】先求切线 $l_1$、$A$ 点坐标和与之垂直的直线 $l_2$、$B$ 点坐标，然后表示 $|AB|$，借助于 $e^{2x_0}>0$ 恒成立，从而求出 $|AB|$ 的范围.

**30.** AAA

**考点 14 导数在研究函数单调性中的应用**

**31．**（四川 2020 届高三联合诊断考试理科）已知定义在 **R** 上的函数 $y=f(x-1)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数）恒成立，若 $a=\left(\sin\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\sin\frac{1}{2}\right)$，$b=(\ln 2)\cdot f(\ln 2)$，$c=\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\right)$，则 $a,b,c$ 的大小关系是（　　）．

A．$a>b>c$　　　B．$b>a>c$　　　C．$c>a>b$　　　D．$a>c>b$

【考点】导数与函数的单调性．

【命题意图】本题考查了求导公式的逆向应用及导数的几何意义．

答案：A

解法 1:（浙江宁波赖庆龙）由已知得，函数 $f(x)$ 是 **R** 上的偶函数，因为当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$，

所以构造函数 $g(x)=xf(x)$，得 $g'(x)=x+xf'(x)<0$，所以 $g(x)$ 是 R 上的奇函数，且在 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)$ 是 R 上的减函数，

因为 $\sin\frac{1}{2}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ln 2>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2},\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$，所以 $\sin\frac{1}{2}<\ln 2<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$，

所以 $g\left(\sin\frac{1}{2}\right)>g(\ln 2)>g\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\right)$，即 $a>b>c$，

故选项 A 正确．

解法 2：特例法（广西玉林徐文才）

根据题意，取 $f(x)=-1$，则 $f(x-1)=-1$，该函数的图象关于直线 $x=1$ 对称成立，且当 $x<0$ 时，$f(x)+xf'(x)=-1+0<0$ 也成立；此时 $a=-\sin\frac{1}{2}$，$b=-\ln 2$，$c=-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-2$

易知 $0<\sin\frac{1}{2}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}=\ln\sqrt{e}<\ln 2<\ln e=1$，所以 $-\frac{1}{2}<a=-\sin\frac{1}{2}<0$，$-1<b=-\ln 2<-\frac{1}{2}$，

而 $c=-2$

所以 $a>b>c$，故选 A．

【解析点评】由题设结构，逆用求导公式构造可导的积函数，然后根据导数的几何意义比较大小．本题关键是要熟练几个常见的“函数组合体”的导函数结构．

**32．** AAA

**考点 15 导数在研究函数极值最值中的应用**

**D 组：选择**

**33．**（唐山市 2019—2020 学年度高三摸底考试理数）设函数 $f\left(x\right)=\left(\mathrm{e}^{x-m}-ax\right)\left(\ln x-ax\right)$，若存在实数 $a$ 使得 $f\left(x\right)<0$ 恒成立，则实数 $m$ 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,0\right]$　　　B．$\left[0,2\right)$　　　C．$\left(2,+\infty\right)$　　　D．$\left(-\infty,2\right)$

【考点】导数、最值问题（逆用）．

【命题意图】本题借助不等式恒成立，考查导数在求函数最值中的技巧．

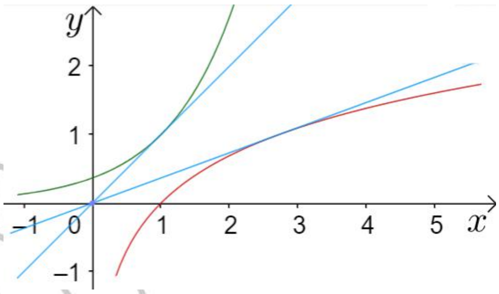
答案：D．

解析：

解法 1（陕西西安郝立涛）：

设 $A(x_0,\mathrm{e}^{x_0-m})$，则 $k_{OA}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_0-m}}{x_0}$，令 $y=\mathrm{e}^{x-m}$，则 $y'|_{x=x_0}=\mathrm{e}^{x_0-m}$，令 $\mathrm{e}^{x_0-m}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_0-m}}{x_0}$，得 $x_0=1$，

$\therefore$ $y=\mathrm{e}^{x-m}$ 过原点的切线斜率为 $k=\mathrm{e}^{1-m}$；




设 $B(x_1,\ln x_1)$，则 $k_{OB}=\dfrac{\ln x_1}{x_1}$，令 $y=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $y'|_{x=x_1}=\dfrac{1}{x_1}$，令 $\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{\ln x_1}{x_1}$，则 $x_1=\mathrm{e}$，

$\therefore$ $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 过原点的切线斜率为 $k_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．

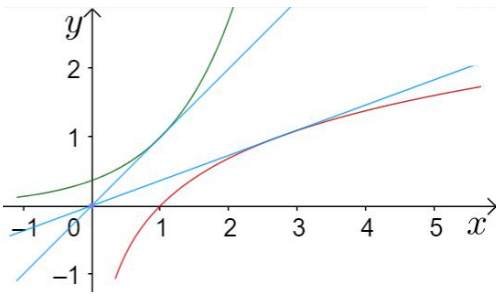
当 $0<a<\mathrm{e}^{1-m}$ 时，$\mathrm{e}^{x-m}-ax>0$；当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$\ln x-ax<0$，此时有 $\left(\mathrm{e}^{x-m}-ax\right)\left(\ln x-ax\right)<0$ 恒成立，

$\therefore$ $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<\mathrm{e}^{1-m}$，得 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^{1-m}$，故 $m<2$，故选择 D．

解法 2（云南普洱薛家兵）：

由 $\left(\mathrm{e}^{x-m}-ax\right)\left(\ln x-ax\right)<0$，得 $\begin{cases}\mathrm{e}^{x-m}-ax>0\\ \ln x-ax<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\mathrm{e}^{x-m}-ax<0\\ \ln x-ax>0\end{cases}$（舍去），

$\therefore$ $\begin{cases}\mathrm{e}^{x-m}>ax\\ \ln x<ax\end{cases}$．




如图所示，$y=\ln x$ 过原点的切线方程为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$．

设 $h(x)=\mathrm{e}^{x-m}$，则当 $m<0$ 时，$\mathrm{e}^{x-m}>ax$ 恒成立，当 $m>0$ 时，由 $h(x)=\mathrm{e}^{x-m}$ 与 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ 相切得切点 $(1,\mathrm{e}^{1-m})$ 且 $m=2$，依题意有 $m<2$，即 $m\in(-\infty,2)$．

解法 3（河南郑州张建党）：

$f\left(x\right)=\left(\mathrm{e}^{x-m}-ax\right)\left(\ln x-ax\right)<0\Leftrightarrow\left(a-\dfrac{\mathrm{e}^{x-m}}{x}\right)\left(a-\dfrac{\ln x}{x}\right)<0$．

令 $m\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x-m}}{x}$，$n\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$，

由 $m'(x)=\dfrac{e^{x-m}(x-1)}{x^2}$，知 $m(x)_{\min}=m(1)=e^{1-m}$；

由 $n'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，知 $n(x)_{\max}=n(e)=\dfrac{1}{e}$；

于是，存在存在实数 $a$ 使得 $\left(a-\dfrac{e^{x-m}}{x}\right)\left(a-\dfrac{\ln x}{x}\right)<0$ 恒成立，等价于 $\dfrac{1}{e}<e^{1-m}$，得 $m<2$.

故实数 $m$ 的取值范围是 $(-\infty,2)$，选 D.

【点评】解决不等式恒成立问题的最常用方法是分离参数与数形结合.

数形结合的优点是将待求问题直观化，分离参数的优点是构造的新函数往往更简洁易解.

三个解答方法均先将不易处理的问题等价转换，方法 1 与方法 2 均是数形结合，借助临界情况求出参数的取值范围，方法 3 分离参数，配凑常见的函数.

如果熟知几个常见的函数（$y=xe^x$，$y=\dfrac{e^x}{x}$，$y=x\ln x$，$y=\dfrac{\ln x}{x}$，$y=e^x-x-1$，$y=x-1-\ln x$，$y=\dfrac{\sin x}{x}$ 等）的性质，解答时会更快些.

**34.** （吉林省长春市 2020 届高三质量检测（一）理科数学）已知函数 $f(x)=(x^2-2x)e^{x-1}$，若当 $x>1$ 时，$f(x)-mx+1+m\le 0$ 有解，则 $m$ 的取值范围为（　　）.

A. $m\le 1$　　　　B. $m<-1$　　　　C. $m>-1$　　　　D. $m\ge 1$

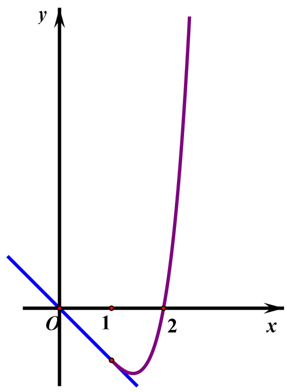
【考点】导数在最值中的应用.

【命题意图】本题通过可成立逆向求参，考查了导数在解决函数最值中的应用.

答案：C.

解析：（浙江宁波赖庆龙）

解法 1：半分参，定曲动直




当 $x>1$ 时，$f(x)-mx+1+m\le 0$ 有解，即 $f(x)\le m(x-1)-1$ 有解，

因为 $f'(x)=e^{x-1}(x^2-2)$，所以 $f(x)$ 在 $(1,\sqrt{2})$ 单调递减，

在 $[\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增，其图象如图所示：

函数 $f(x)=(x^2-2x)e^{x-1}$ 在 $(1,-1)$ 处的切线方程为 $y=-x$，

为使当 $x>1$ 时，$f(x)-mx+1+m\le 0$ 有解，只需 $m>-1$，故选项 C 正确.

解法 2：特殊值，排除

当 $m=0$ 时，$g(x)=f(x)-mx+1+m=(x^2-2x)e^{x-1}+1$，因为 $g'(x)=e^{x-1}(x^2-2)$，所以 $g(x)$ 在 $(1,\sqrt{2})$ 单调递减，在 $[\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增，而 $g(1)=0$，$g(\sqrt{2})<0$，所以 $g(x)<0$ 有解，符合题意，故选项 B 和 D 错误；

当 $m=-1$ 时，$g(x)=f(x)-mx+1+m=(x^2-2x)e^{x-1}+x$，因为 $g'(x)=e^{x-1}(x^2-2)+1$，

$g''(x)=e^{x-1}(x^2+2x-2)>0$，所以 $g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $g'(x)>g'(1)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(1)=0$，所以 $g(x)<0$ 无解，不符合题意，

故选项 A 错误；

综上，选项 C 正确．

**解法 3：参变分离**

当 $x>1$ 时，$f(x)-mx+1+m\le 0$ 有解，即 $f(x)\le m(x-1)-1$ 有解，令 $t=x-1>0$，

则 $m\ge \dfrac{e^t(t^2-1)+1}{t}$ 有解，设 $g(t)=\dfrac{e^t(t^2-1)+1}{t}(t>0)$，

因为 $g'(t)=\dfrac{e^t(t^3+t^2-t+1)-1}{t^2}$，再设 $h(t)=e^t(t^3+t^2-t+1)-1$，

则 $h'(t)=e^t(t^3+4t^2+t)=te^t(t^2+4t+1)>0$，所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(t)>h(0)=0$，即 $g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，设 $\varphi(t)=e^t(t^2-1)$

所以 $g(t)>\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t(t^2-1)+1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}=\varphi'(0)=-1$，所以 $m>-1$，

故选项 C 正确．

**解法 4：（河南郑州赵永帅）** $f(x)+1\leqslant m(x-1)\Rightarrow m\ge\dfrac{(x^2-2x)\mathrm{e}^{x-1}+1}{x-1}$．

当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{(x^2-2x)\mathrm{e}^{x-1}+1}{x-1}\to "\dfrac{0}{0}"$

$\therefore m>\dfrac{(x^2-2)\mathrm{e}^{x-1}}{1}\Big|_{x=1}=-1$．

**【解析点评】解答不等式恒成立与不等式可成立，最常用的方法是分离参数与数形结合．一般情况下分离参数（半分参或全分参）更简洁些．分离参数是将待求问题转化成一条动直线与定曲线位置关系问题（定直动曲），或转化两条曲线的位置关系问题（一般第一转化方法更简）．特值排除法、极值情况或临界情况求范围端点法，也是常用方法．**

**解法 4 利用洛必达法则，最简洁，加上证明函数** $y=\dfrac{(x^2-2x)e^{x-1}+1}{x-1}$ **单调递增才严谨．**

**35．**

**E 组：填空**

**36．** 卷

**F 组：解答题**

**37.** （昆明市第一中学 2020 届高三摸底考试理数）（本题类 2019 全国 3 卷）

已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-1\right)e^{x}+a\ln\left(x+1\right)-ax+b$，$x\in\left[0,1\right]$.

（Ⅰ）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（Ⅱ）是否存在 $a$，$b$，使得函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上的最小值为 $-1$，最大值为 $1$？若存在，求出 $a$，$b$ 的所有值；若不存在，请说明理由.

参考数据：$\ln 2\approx 0.693$.

**【考点】导数在研究函数最值中的应用.**

**答案：**（Ⅰ）当 $a\le 1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递增；当 $a\ge 2e$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递减；当 $1<a<2e$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left[0,x_0\right]$ 上单调递减，在 $\left[x_0,1\right]$ 上单调递增，其中 $x_0\in\left(0,1\right)$，且满足 $\left(x_0+1\right)e^{x_0}=a$；（Ⅱ）当 $a=\dfrac{1}{\ln 2-1}$ 且 $b=0$ 时，或当 $a=\dfrac{3}{1-\ln 2}$ 且 $b=2$ 时，可以使得函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 的最小值为 $-1$ 且最大值为 $1$.

**解析：（河南郑州张建党）**

（Ⅰ）$f'\left(x\right)=xe^{x}+\dfrac{a}{x+1}-a=\dfrac{x}{x+1}\left[\left(x+1\right)e^{x}-a\right]$，

令 $g\left(x\right)=\left(x+1\right)e^{x}-a$，$x\in\left[0,1\right]$，则 $g'\left(x\right)=\left(x+2\right)e^{x}>0$ 在 $\left[0,1\right]$ 恒成立，

故 $g\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递增.

（ⅰ）若 $a\le 1$，则 $g\left(x\right)\ge g\left(0\right)=1-a\ge 0$，则 $f'\left(x\right)=\dfrac{x\cdot g\left(x\right)}{x+1}\ge 0$，得 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递增；

（ⅱ）若 $a\ge 2e$，则 $g\left(x\right)\le g\left(1\right)=2e-a\le 0$，则 $f'\left(x\right)=\dfrac{x\cdot g\left(x\right)}{x+1}\le 0$，得 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递减；

（ⅲ）若 $1<a<2e$，则 $g\left(0\right)=1-a<0$，$g\left(1\right)=2e-a>0$，又 $g\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递增，结合零点存在性定理知：存在唯一实数 $x_0\in\left(0,1\right)$，使得 $g\left(x_0\right)=\left(x_0+1\right)e^{x_0}-a=0$，

当 $x\in\left[0,x_0\right]$ 时，$g\left(x\right)<0$，则 $f'\left(x\right)<0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,x_0\right]$ 上单调递减，

当 $x\in\left[x_0,1\right]$ 时，$g\left(x\right)\ge 0$，则 $f'\left(x\right)\ge 0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left[x_0,1\right]$ 上单调递增.

综上，当 $a\le 1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递增；当 $a\ge 2e$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上单调递减；当 $1<a<2e$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left[0,x_0\right]$ 上单调递减，在 $\left[x_0,1\right]$ 上单调递增，其中 $x_0\in\left(0,1\right)$，且满足 $\left(x_0+1\right)e^{x_0}=a$.

………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知：

（i）若 $a\le 1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，故 $f(x)_{\min}=f(0)=b-1=-1$，得 $b=0$，

$f(x)_{\max}=f(1)=a\ln 2-a+b=1$，解得 $a=\dfrac{1}{\ln 2-1}<1$，满足题意.

（ii）若 $a\ge 2\mathrm{e}$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，故 $f(x)_{\max}=f(0)=b-1=1$，得 $b=2$，

$f(x)_{\min}=f(1)=a\ln 2-a+b=-1$，解得 $a=\dfrac{3}{1-\ln 2}\approx 9.772>2\mathrm{e}$，满足题意.

（iii）若 $1<a<2\mathrm{e}$，令 $h(x)=\ln(x+1)-x$，$x\in[0,1]$，则 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+ah(x)+b$.

由 $h'(x)=\dfrac{-x}{x+1}\le 0$，知 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，所以，$h(x)\le h(0)=0$.

令 $u(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+h(x)+b$，$x\in[0,1]$ 注1，由（Ⅰ）知 $u(x)\le u(1)=\ln 2-1+b$；

【注 1：函数 $u(x)$ 就是 $a=1$ 时的 $f(x)$，在 $[0,1]$ 上单调递增.】

令 $v(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}h(x)+b$，$x\in[0,1]$ 注2，由（Ⅰ）知 $v(x)\ge v(1)=2\mathrm{e}(\ln 2-1)+b$；

【注 2：函数 $v(x)$ 就是 $a=2\mathrm{e}$ 时的 $f(x)$，在 $[0,1]$ 上单调递减.】

因为 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+ah(x)+b$，$h(x)\le 0$，且 $1<a<2\mathrm{e}$，

所以，$v(x)<f(x)<u(x)$，则 $f(x)_{\max}<\ln 2-1+b$，$f(x)_{\min}>2\mathrm{e}(\ln 2-1)+b$，

故 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}<(2\mathrm{e}-1)(1-\ln 2)\approx 1.362<2$，故对任意 $a\in(1,2\mathrm{e})$，

不存在实数 $b$ 能使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 $-1$ 且最大值为 $1$.

综上，当 $a=\dfrac{1}{\ln 2-1}$ 且 $b=0$ 时，或当 $a=\dfrac{3}{1-\ln 2}$ 且 $b=2$ 时，可以使得函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 $-1$ 且最大值为 $1$.

**38.** （贵阳第一中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+\ln x$.

（1）若 $a=-1$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值是 $-3$，求 $a$ 的值；

（3）记 $g(x)=2f(x)+(a-1)\ln x+1$，当 $a\le -2$ 时，若对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，总有 $|g(x_1)-g(x_2)|\ge k|x_1-x_2|$ 成立，试求 $k$ 的最大值.

【考点】导数函数的单调性、最值.

【命题意图】本题考查了函数的单调性与最值；以及函数构造求参数最大值，属于中等题.

解析：四川凉山罗永云

（1）$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-x^2+1}{x}$，

令 $f^{'}(x)=0$，则 $x_1=1,x_2=-1$（舍去），

当 $x\in(0,1)$ 时，$f^{'}(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f^{'}(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数.

(2) $\because f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+\ln x$，则 $f^{'}(x)=ax+\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^2+1}{x}(0<x\le 1)$，

①当 $a\ge 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

故在 $\left(0,1\right]$ 上的最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}a=-3$，显然不合题意；

②若 $\begin{cases}a<0,\\ \sqrt{-\dfrac{1}{a}}\ge 1,\end{cases}$ 即 $-1\le a<0$ 时，$\left(0,1\right]\subseteq\left(0,\sqrt{-\dfrac{1}{a}}\right]$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,1\right]$ 上是增函数，

故在 $\left(0,1\right]$ 上的最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}a=-3$，不合题意，舍去；

③若 $\begin{cases}a<0,\\ \sqrt{-\dfrac{1}{a}}<1,\end{cases}$ 即 $a<-1$ 时，则 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-\dfrac{1}{a}})$ 上是增函数，在 $(\sqrt{-\dfrac{1}{a}},1)$ 上是减函数，

故在在 $\left(0,1\right]$ 上的最大值为 $f(\sqrt{-\dfrac{1}{a}})=-\dfrac{1}{2}+\ln\sqrt{-\dfrac{1}{a}}=-3$，解得 $a=-e^5$，符合，

综合①②③得 $a=-e^5$.

**解法 2：（广西玉林徐文才）**

当 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right]$ 上的最大值是 $-3$ 时

一方面，对 $\forall x\in\left(0,1\right]$，恒有 $f\left(x\right)\leqslant -3$，即 $\dfrac{1}{2}ax^2+\ln x\leqslant -3$，也就是 $-\dfrac{1}{2}a\geqslant\dfrac{\ln x+3}{x^2}$

所以 $-\dfrac{1}{2}a\geqslant\left(\dfrac{\ln x+3}{x^2}\right)_{\max}$ ①

另一方面 $\exists x_0\in\left(0,1\right]$，使得 $f\left(x_0\right)=-3$，即将 $-\dfrac{1}{2}a=\dfrac{\ln x_0+3}{x_0^{\ 2}}$

所以 $-\dfrac{1}{2}a$ 为函数 $y=\dfrac{\ln x+3}{x^2}$ 值域内的一个值②

由①②可知 $-\dfrac{1}{2}a=\left(\dfrac{\ln x+3}{x^2}\right)_{\max}$

记 $g\left(x\right)=\dfrac{\ln x+3}{x^2}\left(0<x\leqslant 1\right)$，则有 $g'\left(x\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x^2-2x\left(\ln x+3\right)}{x^4}=\dfrac{-2\ln x-5}{x^3}$

令 $g'\left(x\right)=0\Rightarrow -2\ln x-5=0$，解得 $x=e^{-\frac{5}{2}}<1$

所以当 $0<x<e^{-\frac{5}{2}}$ 时，$g'\left(x\right)>0$，当 $e^{-\frac{5}{2}}<x<1$ 时，$g'\left(x\right)<0$

所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,e^{-\frac{5}{2}}\right)$ 上单调递增，在 $\left[e^{-\frac{5}{2}},1\right]$ 上单调递减

所以 $g(x)_{\max}=g\left(e^{-\frac{5}{2}}\right)=\dfrac{\ln e^{-\frac{5}{2}}+3}{\left(e^{-\frac{5}{2}}\right)^2}=\dfrac{-\frac{5}{2}+3}{e^{-5}}=\dfrac{e^5}{2}$

所以 $-\dfrac{1}{2}a=\dfrac{e^5}{2}\Rightarrow a=-e^5$ .

（3） $g(x)=2f(x)+(a-1)\ln x+1$，则 $g'(x)=\dfrac{a+1}{x}+2ax=\dfrac{2ax^2+a+1}{x}$，

当 $a\le-2$ 时， $g'(x)<0$，故 $a\le-2$ 时， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

不妨设 $0<x_1\le x_2$， 则 $g(x_2)\le g(x_1)$，

故 $|g(x_1)-g(x_2)|\ge k|x_1-x_2|$ 等价于 $g(x_1)-g(x_2)\ge k(x_2-x_1)$，

即 $g(x_1)+kx_1\ge g(x_2)+kx_2$， 记 $\phi(x)=g(x)+kx$， 从而 $\phi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

由 $\varphi(x)=(a+1)\ln x+ax^2+kx+1$， 得 $\varphi'(x)=\dfrac{2ax^2+kx+a+1}{x}\le 0$， 故 $k\le-2ax+\dfrac{-(a+1)}{x}$ 恒成立，

$\because -2ax+\dfrac{-(a+1)}{x}\ge 2\sqrt{2a(a+1)}$， 又 $h(a)=2a(a+1)$ 在 $\left(-\infty,-2\right]$ 上单调递减

$\therefore h(a)\ge h(-2)=4$， $\therefore -2ax+\dfrac{-(a+1)}{x}\ge 2\sqrt{2a(a+1)}\ge 4$， $\therefore k\le 4$ .

故 $a\le-2$ 时， $k$ 的最大值为 $4$ .

【解析点评】第一问主要是考查了给定函数的单调性；第二问主要是考查了给定函数最大值，求参数的值，富有逻辑推理过程；第三问主要考查了构造新函数 $\varphi(x)=g(x)+kx$，利用它是减函数，借助于导数 $\varphi'(x)\le 0$ 恒成立，求出参数 $k$ 的最大值. 当然第二问我们可以采用恒成立方法求参数的值、第三问我们也可以采用洛必塔法则求解，可以尝试一下.

**39.** （唐山市 2019—2020 学年度高三摸底考试理数）已知函数 $f(x)=x\sin x$， $x\in(0,\pi)$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，且 $g(x)=f'(x)$，证明：

（1） $g(x)$ 在 $\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 内有唯一零点 $t$；

（2） $f(x)<2$ .

（参考数据： $\sin 2\approx 0.9903$， $\cos 2\approx-0.4161$， $\tan 2\approx-2.1850$， $\sqrt{2}\approx 1.4141$， $\pi\approx 3.14$ ）

【考点】导数在零点、最值问题中的应用.

答案：见解析.

【命题意图】本题意在考查导数在解决函数零点问题，函数最值，或证明不等关系中的应用.

解析：四川绵阳孙莉

解法： （1） $g(x)=f'(x)=x\cos x+\sin x$ .

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时， $g(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内没有零点.

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时， $g'(x)=2\cos x-x\sin x$，又 $\cos x<0$， $x\sin x>0$，

所以， $g'(x)<0$， $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减.

又 $g(2)=(2+\tan 2)\cos 2>0$， $g\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 内有唯一零点 $t$.

（2）由（1）得， $x\in(0,t)$， $g(x)>0$，所以 $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(t,\pi)$ 时， $g(x)<0$，所以 $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(t)=t\sin t$.

$f'(t)=t\cos t+\sin t$， $f''(t)=2\cos t-t\sin t$， $t\in\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$， $f''(t)<0$， $f'(t)$ 在 $\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减，

令 $f'(t)=0$ 得 $t=-\tan t$，所以 $f(t)=-\tan t\cdot\sin t$，

所以 $f(t)-2=\dfrac{-\sin^2 t-2\cos t}{\cos t}=\dfrac{\cos^2 t-2\cos t-1}{\cos t}=\dfrac{(\cos t-1)^2-2}{\cos t}$， $t\in\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$， $\cos t\in\left(-\dfrac{1}{2},\cos 2\right)$，

所以 $(\cos 2-1)^2-2=(-1.4161)^2-(\sqrt{2})^2>0$，即 $\dfrac{(\cos 2-1)^2-2}{\cos t}<0$，

所以 $f(t)-2<0$，所以 $f(x)<2$ 得证.

【解析点评】第一问借助连续函数性质（零点存在定理）证明命题成立，第二问在第一问的基础上，通过多次求导后确定 $f(x)$ 的单调性，最终证明不等式 $f(x)<2$ 成立.

**40.** （本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$

（1）若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 是单调函数，求 $a$ 的值；

（2）若对 $x\in[0,1]$， $f(x)\le 1$ 恒成立，求 $f(\dfrac{1}{2})$ 的取值范围.

**【知识内容】导数三次函数**

**【考查意图】本题主要是考查了三次函数单调时求参数取值范围；不等式恒成立求双参数范围，属于中档题.**

**解析：（浙江衢州汪强）**

（1）**解法 1：** $f(x)=2x^3-ax^2+b$，则 $f'(x)=6x^2-2ax=6x(x-\dfrac{a}{3})$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$， $x_2=\dfrac{a}{3}$.

$a=0$时，$f'(x)=6x^2\geq 0$，$f(x)$在$R$上单调，则在$[-1,1]$是单调.

$a>0$时，$f(x)$在$[-1,0)$上单调递增，在$(0,\frac{a}{3})$上单调递减，则$f(x)$在$[-1,1]$不是单调函数，不符合题目.

$a<0$时，$f(x)$在$(\frac{a}{3},0)$上单调递减，在$(0,1]$上单调递增，则$f(x)$在$[-1,1]$不是单调函数，不符合题目.

综上，$a=0$.

**解法 2：（广西玉林徐文才）**因为$f\left(x\right)=2x^3-ax^2+b$，所以$f'\left(x\right)=6x^2-2ax$

设$g\left(x\right)=6x^2-2ax$，$x\in\left[-1,1\right]$，该函数的图象是一个开口向上抛物线的一部分

因为$f\left(x\right)$在$\left[-1,1\right]$是单调函数，所以$f'\left(x\right)\geqslant 0$恒成立或$f'\left(x\right)\leqslant 0$恒成立

①当$f'\left(x\right)\geqslant 0$恒成立时，任意$x\in\left[-1,1\right]$，恒有$g\left(x\right)\geqslant g\left(0\right)$，所以$g\left(0\right)$为二次函数$g\left(x\right)$的最小值

所以$x=0$为二次函数$g\left(x\right)=6x^2-2ax$的对称轴，所以$\frac{2a}{2\times 6}=0\Rightarrow a=0$；

②当$f'\left(x\right)\leqslant 0$恒成立时，任意$x\in\left[-1,1\right]$，恒有$g\left(x\right)\leqslant g\left(0\right)$，所以$\begin{cases}g\left(-1\right)\leqslant 0\\g\left(1\right)\leqslant 0\end{cases}$，即$\begin{cases}6+2a\leqslant 0\\6-2a\leqslant 0\end{cases}$，无解

综上可知$a=0$；

**解法 3：（广西玉林徐文才）**因为$f\left(x\right)=2x^3-ax^2+b$，所以$f'\left(x\right)=6x^2-2ax$

若$f\left(x\right)$在$\left[-1,1\right]$不是单调函数，则$f\left(x\right)$在区间$\left(-1,1\right)$上存在极值点，

所以$f'\left(x\right)=0$在$x\in\left(-1,1\right)$上存在变号零点，又$f'\left(0\right)=0$

所以$\Delta=4a^2-0>0$，解得$a>0$或$a<0$

所以$f\left(x\right)$在$\left[-1,1\right]$不是单调函数时，$a$的取值范围是$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

所以当$f\left(x\right)$在$\left[-1,1\right]$是单调函数时，$a$的值为$0$.

（2）以导函数$f'(x)$的两个零点为界点讨论：

①$a=0$时，$f(x)=2x^3+b$在$[0,1]$上单调递增，在$x\in[0,1]$上$f(x)\leq 1$恒成立$\Rightarrow\begin{cases}f(0)\leq 1\\f(1)\leq 1\end{cases}$，

②$0<a<3$时，$0<\frac{a}{3}<1$，$f(x)$在$[0,\frac{a}{3}]$上单调递减，在$[\frac{a}{3},1]$上单调递增，在$x\in[0,1]$上$f(x)\leq 1$恒成立

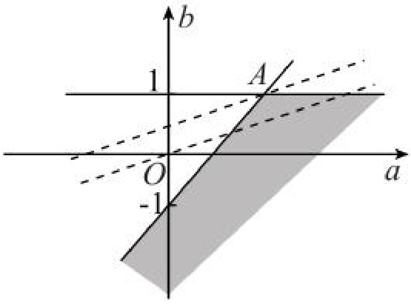
$\Rightarrow\begin{cases}f(0)\leq 1\\f(1)\leq 1\end{cases}$，

③$a>3$时，$\frac{a}{3}\geq 1$，$f(x)$在$[0,\frac{a}{3}]$上单调递减，则在$[0,1]$上单调递减，在$x\in[0,1]$上$f(x)\leq 1$恒成立

$\Rightarrow\begin{cases}f(0)\leq 1\\f(1)\leq 1\end{cases}$， ④$a<0$时，$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，则在$[0,1]$单调递增，在$x\in[0,1]$上$f(x)\le 1$恒成立$\Rightarrow\begin{cases}f(0)\le 1\\ f(1)\le 1\end{cases}$，

整合①②③④，在$x\in[0,1]$上$f(x)\le 1$恒成立$\Rightarrow\begin{cases}f(0)=b\le 1\\ f(1)=2-a+b\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b\le 1\\ b\le a-1\end{cases}$，

在平面直角坐标新$aOb$中作出不等式组$\begin{cases}b\le 1\\ b\le a-1\end{cases}$表示的平面区域（可行域）如下图：




设$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a+b=z$，则$b=\frac{1}{4}a+(z-\frac{1}{4})$，当直线$b=\frac{1}{4}a+(z-\frac{1}{4})$经过$A$时，截距$(z-\frac{1}{4})$最大，

此时$z$最大.由$\begin{cases}b=1\\ b=a-1\end{cases}$，解得最优解为$A(1,2)$.

当$f(\frac{1}{2})_{\max}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times 2+1=\frac{3}{4}$，当直线$b=\frac{1}{4}a+(z-\frac{1}{4})$向$y$轴负方向无限平移时，截距$(z-\frac{1}{4})\to-\infty$，

此时$z\to-\infty$.所以$f(\frac{1}{2})$的取值范围是$(-\infty,\frac{3}{4}]$

**解法 2：（广西玉林徐文才）**

因为$f(x)=2x^3-ax^2+b$，所以$f'(x)=6x\left(x-\frac{a}{3}\right)$

当$f(x)$在$[0,1]$上单调时，$f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(1)\}$

当$f(x)$在$[0,1]$上不单调时，$0<\frac{a}{3}<1$，当$0<x<\frac{a}{3}$时，$f'(x)<0$；当$\frac{a}{3}<x<1$时，$f'(x)>0$

所以函数$f(x)$在$\left[0,\frac{a}{3}\right]$上单调递减，在$\left[\frac{a}{3},1\right]$上单调递增

所以函数$f(x)$在$[0,1]$上的最大值$f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(1)\}$

因为对$\forall x\in[0,1]$，$f(x)\leqslant 1$恒成立，所以$f(x)_{\max}\leqslant 1$，所以$\max\{f(0),f(1)\}\leqslant 1$

所以$\begin{cases}f(0)\leqslant 1\\ f(1)\leqslant 1\end{cases}$，即$\begin{cases}b\leqslant 1\\ 2-a+b\leqslant 1\end{cases}$，即$\begin{cases}b\leqslant 1\\ b-a+1\leqslant 0\end{cases}$

而$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-a\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+b=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a+b=\frac{1}{4}(b-a+1)+\frac{3}{4}b$

由$\begin{cases} b\leqslant 1 \\ b-a+1\leqslant 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{3}{4}b\leqslant\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\left(b-a+1\right)\leqslant 0 \end{cases}\Rightarrow\frac{1}{4}\left(b-a+1\right)+\frac{3}{4}b\leqslant\frac{3}{4}$，即$f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{3}{4}$

所以$f\left(\frac{1}{2}\right)$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{3}{4}\right]$. :

**【解析点评】第一问是根据函数的导数恒大于等于 0、恒小于或等于 0 解决参数范围；第二问根据不等式恒成立问题，找到双参数满足的约束条件，采用线性规划知识给予解决.**

**41．** 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2,a\in\mathrm{R}$.

（1）当$a=2$时，求曲线$y=f(x)$在点$\left(3,\ f(3)\right)$处的切线方程；

（2）设函数$g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$，讨论$g(x)$单调性并判断有无极值，有极值时求出极值.

**【考点】导数在求切线方程、极值最值问题中的应用.**

**【知识内容】导数综合题**

**【考查意图】本题主要是考查了切线方程求解、讨论多项式函数与三角函数结合有无极值问题，属于中档题.**

**解析：（湖北来凤李光荣）**

解析：（1）由题意，$f'(x)=x^2-ax$，当$a=2$时，$f(3)=0$，$f'(x)=x^2-2x$，所以$f'(3)=3$

因此，曲线$y=f(x)$在点$\left(3,f(3)\right)$处的切线方程是$y=3(x-3)$，即$3x-y-9=0$.

（2）因为$g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$，

所以$g'(x)=f'(x)+\cos x-(x-a)\sin x-\cos x=x(x-a)-(x-a)\sin x=(x-a)(x-\sin x)$

令$h(x)=x-\sin x$，则$h'(x)=1-\cos x\geq 0$

所以$h(x)$在$\mathrm{R}$上单调递增.

因为$h(0)=0$，所以当$x>0$，$h(x)>0$；当$x<0$，$h(x)<0$.

①当$a<0$时，$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$

当$x\in\left(-\infty,0\right)$时，$x-a<0$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

当$x\in\left(a,0\right)$时，$x-a>0$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$x-a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

所以，当$x=a$时，$g(x)$取到极大值，极大值是$g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，

当$x=0$时，$g(x)$取到极小值，极小值是$g(0)=-a$.

②当$a=0$时，$g'(x)=x(x-\sin x)$

当$x\in\left(-\infty,+\infty\right)$时，$g'(x)\geq 0$，$g(x)$单调递增；

所以 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递增，无极大值也无极小值．

③当 $a>0$ 时，$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$，

当 $x\in\left(-\infty,0\right)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(0,a\right)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(a,+\infty\right)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

所以，当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取到极大值，极大值是 $g(0)=-a$

当 $x=a$ 时，$g(x)$ 取到极小值，极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，

综上所述：

当 $a<0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,a\right)$ 和 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(a,0\right)$ 上单调递减，函数既有极大值，又有极小值，极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，极小值是 $g(0)=-a$．

当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递增，无极值．

当 $a>0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 和 $\left(a,+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,a\right)$ 上单调递减，函数既有极大值，又有极小值，极大值是 $g(0)=-a$，极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$．

**解析：（云南昆明孙国庆）**

（2）$g\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+\left(x-a\right)\cos x-\sin x,\ g'\left(x\right)=\left(x-\sin x\right)\left(x-a\right).$

令 $h\left(x\right)=x-\sin x,h'\left(x\right)=1-\cos x\geq 0.\ \therefore h\left(x\right)$ 在 $R$ 上单调递增，又 $h\left(0\right)=0.$

$\therefore x\in\left(-\infty,0\right),h\left(x\right)<0;x\in\left(0,+\infty,\right),h\left(x\right)>0.$

当 $a=0$ 时,$g'\left(x\right)\geq 0,g\left(x\right)$ 在 $R$ 上上单调递增，$g\left(x\right)$ 无极值;

当 $a>0$ 时,则 $x\in\left(-\infty,0\right),\left(a,+\infty\right),g'\left(x\right)>0,g\left(x\right)$ 上单调递增;

$x\in\left(0,a\right),g'\left(x\right)<0,g\left(x\right)$ 上单调递减;

$\therefore g\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处取得极大值 $g\left(0\right)=x-a;$

$\therefore g\left(x\right)$ 在 $x=a$ 处取得极小值 $g\left(a\right)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3-\sin a=-\frac{1}{6}a^3-\sin a.$

当 $a<0$ 时,则 $x\in\left(-\infty,a\right),\left(0,+\infty\right),g'\left(x\right)>0,g\left(x\right)$ 上单调递增;

$x\in\left(a,0\right),g'\left(x\right)<0,g\left(x\right)$ 上单调递减.

$\therefore g\left(x\right)$ 在 $x=a$ 处取得极大值 $g\left(a\right)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3-\sin a=-\frac{1}{6}a^3-\sin a;$

$\therefore g\left(x\right)$在$x=0$处取得极小值$g\left(0\right)=x-a.$

【解析点评】第一问利用给定参数值，求已知函数的切线问题；第二问分类讨论，判断导函数的正负，从而确定原函数的单调性.

**42.** （巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（二）理数）已知函数$f(x)=(x+1)e^{\frac{1}{2}x^2-x}-1$.

（1）求$f(x)>0$的解集；

（2）若$x\in R$时，$2e^{mx^2+x}\geqslant e^{2x}+1$恒成立，求实数$m$的取值范围.

【考点】导数的综合应用

【命题意图】本题考查了学生利用导数确定单调性的方法、考查学生灵活运用导数工具去分析、解决问题的能力. 综合考查学生逻辑推理能力、运算求解能力和分类讨论、转化划归的数学思想.

解析:（湖南郴州郭俊）

（1）因为$f(x)=(x+1)e^{\frac{1}{2}x^2-x}-1$，则$f'(x)=x^2e^{\frac{1}{2}x^2-x}$，

所以$x\in\mathbf{R}$时，$f'(x)\geqslant 0$，所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，又$f(0)=0$，

所以$x\in(-\infty,0)$时，$f(x)<0$，$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)>0$，则$f(x)>0$的解集为$(0,+\infty)$.

（2）解法 1：（构建函数+分类讨论 1）因为$x\in\mathbf{R}$时，$2e^{mx^2+x}\geqslant e^{2x}+1$恒成立，等价于$\dfrac{2e^{mx^2+x}-1}{e^x}\geqslant e^x$恒成立，即$2e^{mx^2}\geqslant e^x+\dfrac{1}{e^x}(x\in\mathbf{R})$，因为都是偶函数，

所以只需$x\in[0,+\infty)$时，$2e^{mx^2+x}-e^{2x}-1\geqslant 0$成立即可.

令$F(x)=2e^{mx^2+x}-e^{2x}-1$，$F(0)=0$，

$F'(x)=2(2mx+1)e^{mx^2+x}-2e^{2x}=2e^{2x}[(2mx+1)e^{mx^2-x}-1]$，$F'(0)=0$，

令$G(x)=(2mx+1)e^{mx^2-x}-1$，$G(0)=0$，

$G'(x)=2me^{mx^2-x}+(2mx+1)(2mx-1)e^{mx^2-x}=(4m^2x^2+2m-1)e^{mx^2-x}$.

（ⅰ）当$2m-1\geqslant 0$，即$m\geqslant\dfrac{1}{2}$时，$G'(x)\geqslant 0$，所以$G(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

又因为$G(0)=0$，所以$x\in[0,+\infty)$时，$G(x)\geqslant 0$，即$F'(x)\geqslant 0$，

所以$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，又因为$F(0)=0$，

所以$x\in[0,+\infty)$时，$F(x)\geqslant 0$，所以$m\geqslant\dfrac{1}{2}$时满足要求；

（ⅱ）当$m=0$，$x=1$时，$2e<e^2+1$，不成立，所以$m\neq 0$；

（ⅲ）当$2m-1<0$且$m\neq 0$时，即$m<\dfrac{1}{2}$且$m\neq 0$时，

$x\in\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$在$\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$上单调递减，

又因为$G(0)=0$，所以$x\in\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$时，$G(x)<0$，即$F'(x)<0$，

所以$F(x)$在$\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$上单调递减，又因为$F(0)=0$，

所以$x\in\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$时，$F(x)<0$，所以$m<\dfrac{1}{2}$且$m\neq 0$时不满足要求，

综上所述，实数$m$的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

**解法 2：(构建函数+分类讨论 2）**因为$x\in\mathbf{R}$时，$2e^{mx^2+x}-e^{2x}-1\geqslant 0$恒成立.

令$F(x)=2e^{mx^2+x}-e^{2x}-1$，$F'(x)=2(2mx+1)e^{mx^2+x}-2e^{2x}=2e^{2x}[(2mx+1)e^{mx^2-x}-1]$，

令$G(x)=(2mx+1)e^{mx^2-x}-1$，$G'(x)=(4m^2x^2+2m-1)e^{mx^2-x}$.

（i）当$2m-1\geqslant 0$，即$m\geqslant\dfrac{1}{2}$时，$G'(x)\geqslant 0$，所以$G(x)$在$(-\infty, +\infty)$上单调递增，

又因为$G(0)=0$，所以$x\in(-\infty, 0)$时，$G(x)<0$，$x\in(0, +\infty)$时，$G(x)>0$，

即$x\in(-\infty, 0)$时，$F'(x)<0$，$x\in(0, +\infty)$时，$F'(x)>0$，

所以$F(x)$在$(-\infty, 0)$上单调递减，在$(0, +\infty)$上单调递增，且$F(0)=0$，

所以$x\in\mathbf{R}$时，$F(x)\geqslant 0$，所以$m\geqslant\dfrac{1}{2}$时满足要求；

（ii）当$m=0$，$x=1$时，$2e<e^2+1$，不成立，所以$m\neq 0$；

（iii）当$2m-1<0$且$m\neq 0$时，即$m<\dfrac{1}{2}$且$m\neq 0$时，

$x\in\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$在$\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$上单调递减，

又因为$G(0)=0$，所以$x\in\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$时，$G(x)<0$，即$F'(x)<0$，

所以$F(x)$在$\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$上单调递减，又因为$F(0)=0$，

所以$x\in\left(0, \dfrac{1-2m}{2|m|}\right)$时，$F(x)<0$，所以$m<\dfrac{1}{2}$且$m\neq 0$时不满足要求，

综上所述，实数$m$的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

**解法 3：（端点效应）** 因为 $x\in\mathbf{R}$ 时，$2e^{mx^2+x}\geqslant e^{2x}+1$ 恒成立，等价于 $\dfrac{2e^{mx^2+x}-1}{e^x}\geqslant e^x$ 恒成立，即 $2e^{mx^2}\geqslant e^x+\dfrac{1}{e^x}(x\in\mathbf{R})$，因为都是偶函数，所以只需 $x\in[0,+\infty)$ 时，$2e^{mx^2+x}-e^{2x}-1\geqslant 0$ 成立即可.

（ⅰ）当 $m\leqslant 0$ 时，$2e^{mx^2}\leqslant 2$，$e^x+\dfrac{1}{e^x}\geqslant 2$，所以 $m\leqslant 0$ 时不成立；

（ⅱ）当 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，令 $F(x)=2e^{mx^2+x}-e^{2x}-1$，

$F'(x)=2(2mx+1)e^{mx^2+x}-2e^{2x}=2e^{2x}[(2mx+1)e^{mx^2-x}-1]$.

令 $G(x)=(2mx+1)e^{mx^2-x}-1$，又因为 $x\in[0,+\infty)$，所以 $G(x)\geqslant(x+1)e^{\frac{1}{2}x^2-x}-1$，

由（1）知 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$G(x)\geqslant 0$，所以 $F'(x)\geqslant 0$，

即 $x\in[0,+\infty)$ 时，$F(x)$ 单调递增，又因为 $F(0)=0$，所以 $F(x)\geqslant 0$，

所以 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，满足要求；

（ⅲ）当 $m\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，

$G(x)=(2mx+1)e^{mx^2-x}-1=e^{\ln(2mx+1)+mx^2-x}-1<e^{2mx+mx^2-x}-1=e^{x(mx+2m-1)}-1$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{m}-2\right)$ 时，$e^{x(mx+2m-1)}-1<0$，所以 $F(x)$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{1}{m}-2\right)$ 上单调递减，

则 $x\in\left(0,\dfrac{1}{m}-2\right)$ 时，$F(x)<F(0)=0$，所以 $m\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 不成立，

综上所述，实数 $m$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

**解法 4：（二次导+分类讨论）** 因为 $x\in\mathbf{R}$ 时，$2e^{mx^2+x}\geqslant e^{2x}+1$ 恒成立，即当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$2e^{mx^2+x}-e^{2x}-1\geqslant 0$ 成立. 令 $F(x)=2e^{mx^2+x}-e^{2x}-1$，即 $x\in\mathbf{R}$ 时，$F(x)\geqslant 0$，

所以 $F(1)=2e^{m+1}-e^2-1\geqslant 0$，$m+1\geqslant\ln\dfrac{e^2+1}{2}$，即 $m\geqslant\ln\dfrac{e^2+1}{2}-1>0$.

$F'(x)=2(2mx+1)e^{mx^2+x}-2e^{2x}=2e^{2x}[(2mx+1)e^{mx^2-x}-1]$，$F'(0)=0$，

令 $G(x)=(2mx+1)e^{mx^2-x}-1$，$G(0)=0$，

$G'(x)=2me^{mx^2-x}+(2mx+1)(2mx-1)e^{mx^2-x}=(4m^2x^2+2m-1)e^{mx^2-x}$.

（ⅰ）当 $2m-1\geqslant 0$，即 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$G'(x)\geqslant 0$，所以 $G(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $G(0)=0$，所以 $x\in[0,+\infty)$ 时，$G(x)\geqslant 0$，即 $F'(x)\geqslant 0$，

所以 $F(x)$ 在. .上单调递增，又因为 $F(0)=0$，

所以 $x\in[0,+\infty)$ 时，$F(x)\geqslant 0$，所以 $m\geqslant\frac{1}{2}$ 时满足要求；

（ii）当 $0<m<\frac{1}{2}$ 时，$x\in\left(0,\ \frac{1-2m}{2|m|}\right)$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)$ 在 $\left(0,\ \frac{1-2m}{2|m|}\right)$ 上单调递减，

又因为 $G(0)=0$，所以 $x\in\left(0,\ \frac{1-2m}{2|m|}\right)$ 时，$G(x)<0$，即 $F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $\left(0,\ \frac{1-2m}{2|m|}\right)$ 上单调递减，又因为 $F(0)=0$，

所以 $x\in\left(0,\ \frac{1-2m}{2|m|}\right)$ 时，$F(x)<0$，所以 $0<m<\frac{1}{2}$ 时不满足要求，

综上所述，实数 $m$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$.

**解法 5：（分参构建函数求最值硬怂+洛必达）**

当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$2e^{mx^2+x}\geqslant e^{2x}+1$，即 $e^{mx^2+x}\geqslant\frac{e^{2x}+1}{2}$，即 $mx^2+x\geqslant\ln\frac{e^{2x}+1}{2}$，

当 $x=0$ 时，$m\in\mathbf{R}$ 都成立；

当 $x\neq 0$ 时，$m\geqslant\dfrac{\ln\frac{e^{2x}+1}{2}}{x^2}-\dfrac{1}{x}$，令 $g(x)=\dfrac{\ln\frac{e^{2x}+1}{2}}{x^2}-\dfrac{1}{x}$，

$$g'(x)=\frac{\left(\ln\frac{e^{2x}+1}{2}\right)'x^2-\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)\cdot 2x}{x^4}+\frac{1}{x^2},$$

$$g'(x)=\frac{\frac{2xe^{2x}}{e^{2x}+1}-2\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)+x}{x^3}，\text{令 } h(x)=\frac{2xe^{2x}}{e^{2x}+1}-2\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)+x,$$

$$h'(x)=\frac{(2xe^{2x})'(e^{2x}+1)-2xe^{2x}\cdot(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2}-2\cdot\frac{2}{e^{2x}+1}\cdot\frac{2e^{2x}}{2}+1$$

$$=\frac{(4x+2)e^{2x}(e^{2x}+1)-4xe^{2x}\bullet e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}-\frac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}+1$$

$$=\frac{4xe^{2x}+2e^{2x}\bullet e^{2x}+2e^{2x}-4e^{2x}(e^{2x}+1)+(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{4xe^{2x}-e^{2x}\bullet e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)^2},$$

令 $F(x)=4xe^{2x}-e^{2x}\bullet e^{2x}+1$，$F'(x)=(8x+4)e^{2x}-4e^{2x}\bullet e^{2x}=4e^{2x}(2x+1-e^{2x})\leqslant 0$,

所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递减的函数，又因为 $F(0)=0$，

所以 $x\in(-\infty,\ 0)$ 时，$F(x)>0$，$x\in(0,\ +\infty)$ 时，$F(x)<0$，

即 $x\in(-\infty,\ 0)$ 时，$h'(x)>0$，$x\in(0,\ +\infty)$ 时，$h'(x)<0$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调递增，在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，且 $h(0)=0$，

所以 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $h(x) < 0$ ， $x \in (0, +\infty)$ 时， $h(x) < 0$ .

又因为 $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^3}$ ，所以 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $g'(x) > 0$ ， $x \in (0, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由洛必达法则： $x \to 0$，$g(x) = \dfrac{\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{2x} = \dfrac{(e^{2x}-1)'}{[2x(e^{2x}+1)]'} = \dfrac{2e^{2x}}{2(e^{2x}+1)+4xe^{2x}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$,

所以 $m \geqslant \dfrac{1}{2}$，即实数 $m$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

**解法 6：** 因为 $x \in \mathbf{R}$ 时， $2e^{mx^2+x} \geqslant e^{2x}+1$ 恒成立，等价于 $\dfrac{2e^{mx^2+x}-1}{e^x} \geqslant e^x$ 恒成立，

即 $2e^{mx^2} \geqslant e^x + \dfrac{1}{e^x}(x \in \mathbf{R})$ ，因为都是偶函数，

所以只需 $x \in [0, +\infty)$ 时， $2e^{mx^2+x} - e^{2x} - 1 \geqslant 0$ 成立即可.

因为 $e^x + \dfrac{1}{e^x} \geqslant 2$ ，故 $2e^{mx^2} \geq 2$ 得 $m \geq 0$ ，

令 $F(x) = 2e^{mx^2+x} - e^{2x} - 1$ ，

则 $F'(x) = 2(2mx+1)e^{mx^2+x} - 2e^{2x} = 2e^{2x}[(2mx+1)e^{mx^2-x} - 1] = 2e^{2x}[e^{\ln(2mx+1)+mx^2-x} - 1]$ ，

由（1）可得 $\ln(x+1) + \dfrac{1}{2}x^2 - x \geq 0$ ，

（ i ）当 $m \geqslant \dfrac{1}{2}$ 时， $F'(x) = 2e^{2x}[e^{\ln(2mx+1)+mx^2-x} - 1] \geq 2e^{2x}[e^{\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x} - 1] \geq 2e^{2x}(e^0 - 1) = 0$ ，

即 $x \in [0, +\infty)$ 时， $F(x)$ 单调递增，又因为 $F(0) = 0$，所以 $F(x) \geqslant 0$ ，

（ ii ）当 $0 \leq m < \dfrac{1}{2}$ 时， $\ln(2mx+1) + mx^2 - x \leq 2mx + mx^2 - x = x(mx+2m-1)$ ，

当 $x \in \left(0, \dfrac{1}{m} - 2\right)$ 时， $\ln(2mx+1) + mx^2 - x < 0$ ，则 $F'(x) < 0$ ，

所以 $F(x)$ 在 $x \in \left(0, \dfrac{1}{m} - 2\right)$ 上单调递减，

则 $x \in \left(0, \dfrac{1}{m} - 2\right)$ 时， $F(x) < F(0) = 0$，所以 $m \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 不成立，

综上所述，实数 $m$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

**解法 7：** 因为 $x \in \mathbf{R}$ 时， $2e^{mx^2+x} \geqslant e^{2x}+1$ 恒成立，等价于 $\dfrac{2e^{mx^2+x}-1}{e^x} \geqslant e^x$ 恒成立，

即 $2e^{mx^2} \geqslant e^x + \dfrac{1}{e^x}(x \in \mathbf{R})$ ，因为都是偶函数，

所以只需 $x\in[0,+\infty)$ 时，$2e^{mx^2+x}-e^{2x}-1\geqslant 0$ 成立即可.

当 $m\le 0$ 时，$2e^{mx^2}\geqslant e^x+e^{-x}$ 不恒成立，不合题意.

当 $m>0$ 时，则有 $\ln 2+mx^2\geqslant \ln(e^x+e^{-x})$，

令 $g(x)=mx^2-\ln(e^x+e^{-x})+\ln 2$，

则 $g'(x)=2mx-\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，

则 $g''(x)=2m-\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$， 易知 $\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\le 1$，

（i）当 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$g''(x)=2m-\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\ge 0$，

所以 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，即 $g'(x)\ge g'(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)\ge g(0)=0$

（ii）当 $0\le m<\dfrac{1}{2}$ 时，令 $g''(x)=2m-\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=0$，得 $x=\ln\dfrac{\sqrt{\dfrac{2}{m}}+\sqrt{\dfrac{2}{m}-4}}{2}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{\dfrac{2}{m}}+\sqrt{\dfrac{2}{m}-4}}{2}\right)$ 时，$g''(x)=2m-\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\le 0$，

则 $g'(x)\le g'(0)=0$，从而 $g(x)\le g(0)=0$，

综上所述，实数 $m$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

**解法 8：（解析：云南昆明孙国庆）**

令 $f(x)=2e^{mx^2+x}-(e^{2x}+1),\because f(0)=0,f'(x)=2(2mx+1)e^{mx^2+x}-2e^{2x}$,

又 $f'(0)=0.\ f''(x)=2[2m+(2mx+1)]e^{mx^2+x}-4e^{2x},\therefore f''(0)\ge 0\Rightarrow m\ge\dfrac{1}{2}$.

令 $g(m)=2e^{mx^2+x}-(e^{2x}+1)$,显然 $g(m)\nearrow,\therefore g(m)\ge g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2e^{\frac{1}{2}x^2+x}-(e^{2x}+1)$.

令 $h(x)=2e^{\frac{1}{2}x^2+x}-(e^{2x}+1)$. 现在只需证明 $h(x)\ge 0$ 即可.

$h'(x)=2(x+1)e^{\frac{1}{2}x^2+x}-2e^{2x}=2e^x\left[\left((x+1)e^{\frac{1}{2}x^2}-e^x\right)\right]$.

令 $t(x)=(x+1)e^{\frac{1}{2}x^2}-e^x$,

①: 当 $x\le -1,t(x)<0,h'(x)<0,h(x)\swarrow$;

②: 当 $-1<x\le 0$，$0<x+1\le 1, e^{\frac{1}{2}x^2}\le e^x$, $\therefore t\left(x\right)\le 0, h'\left(x\right)\le 0, h\left(x\right)\swarrow$;

③: 当 $x\ge 2$，$e^{\frac{1}{2}x^2}\ge e^x, x+1\ge 3, t\left(x\right)>0, h'\left(x\right)>0, h\left(x\right)\nearrow$;

④: 当 $0<x<2$, 令 $t'\left(x\right)=\left(x^2+x+1\right)e^{\frac{1}{2}x^2}-e^x$, $t''\left(x\right)=\left(x^3+x^2+3x+1\right)e^{\frac{1}{2}x^2}-e^x$,

$$t'''\left(x\right)=\left(x^4+x^3+6x^2+x+3\right)e^{\frac{1}{2}x^2}-e^x>3e^{\frac{1}{2}x^2}-e^x>e^{\frac{1}{2}x^2+1}-e^x>0.$$

$\therefore t''\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\right)\nearrow$，$t''\left(x\right)>t\left(0\right)=0$, $\therefore t'\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\right)\nearrow$，$t'\left(x\right)>t\left(0\right)=0$,

$\therefore t\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\right)\nearrow$，$t\left(x\right)>t\left(0\right)=0$, $\therefore h'\left(x\right)>0$. $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\right)\nearrow$.

综上：当 $x<0, h'\left(x\right)<0, h\left(x\right)\swarrow$; 当 $x>0, h'\left(x\right)>0, h\left(x\right)\nearrow$.

$$\therefore h\left(x\right)\ge h\left(0\right)=0,$$

综上，$m\ge\frac{1}{2}$.

**【解析点评】几种方法涵盖了恒成立问题的常见解法，分离参数、确定必要条件分类讨论、等．方法 6 最为巧妙，不仅利用了第一问的结果，使得讨论简单并且又巧妙的放缩使问题简化．**

**43．** AAA

**考点 16 导数在研究函数零点中的应用**

**A 组：选择**

**44．**（贵阳第一中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）已知函数 $f(x)=-x^2+1+a$（$\frac{1}{e}\le x\le e$,e 是自然对数的底数）与 $g(x)=2\ln x$ 的图象上存在关于 $x$ 轴对称的点，则实数 $a$ 的取值范围是（　）

A. $[0,e^2-3]$　　B. $[1,e^2-3]$　　C. $[1,e^2-2]$　　D. $[e,e^2-2]$

【考点】导数零点问题.

答案：A.

【命题意图】本题考查了两个函数的图象是否存在关于坐标轴的对称位置，属于中等题.

解析：湖北十堰郝清鹏

根据题意，若函数 $f(x)=-x^2+1+a$（$\frac{1}{e}\le x\le e$,e 是自然对数的底数）与 $g(x)=2\ln x$ 的图像上存在关于 $x$ 轴对称的点，则方程 $-x^2+1+a=-2\ln x$ 在区间 $[\frac{1}{e},e]$ 上有解.

$$-x^2+1+a=-2\ln x，即 a+1=x^2-2\ln x$$

∴方程 $a+1=x^2-2\ln x$ 在区间 $[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$ 上有解，设函数 $h(x)=x^2-2\ln x$

其导数 $h'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$，又 $x\in[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$

∴ $h'(x)=0$ 在 $x=1$ 有唯一的极值点

易知：当 $x\in[\frac{1}{\mathrm{e}},1]$ 时，$h'(x)\le 0$，$h(x)$ 为减函数，当 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 时，$h'(x)\ge 0$，$h(x)$ 为增函数

∴函数 $h(x)=x^2-2\ln x$ 有最小值 $h(1)=1$. 又 $h(\frac{1}{\mathrm{e}})=(\frac{1}{\mathrm{e}})^2+2,h(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-2$，比较得 $h(\frac{1}{\mathrm{e}})<h(\mathrm{e})$

∴函数 $h(x)=x^2-2\ln x$ 有最大值 $h(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-2$

∴函数 $h(x)=x^2-2\ln x$ 在区间 $[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$ 上的值域为 $[1,\mathrm{e}^2-2]$，若方程 $a+1=x^2-2\ln x$ 在区间 $[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$ 上有解，

必有 $1\le a+1\le \mathrm{e}^2-2$，即 $0\le a\le \mathrm{e}^2-3$，∴实数 $a$ 的取值范围是 $[0,\mathrm{e}^2-3]$　故选 A .

【解析点评】解法中主要利用了对称性思路，化“点”的对称为“两函数”交点情况，再利用参变量分离，研究参数 $a$ 的取值范围，值得一学.

**45.** 直线 $x=a$（$a>0$）分别与曲线 $y=2x+1$，$y=x+\ln x$ 相交于 $A,B$ 两点，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

**【知识内容】纵向距离**

**【考查意图】本题主要是考查了两函数的纵向距离问题，属于中档题.**

**答案：** B

**解析：（浙江嘉兴温福长）**

解析：由题意可知：$|AB|$ 为 $y=2x+1$ 与 $y=x+\ln x$ 的纵距离

即 $|AB|=\left|2x+1-\left(x+\ln x\right)\right|=\left|x+1-\ln x\right|$

令 $f\left(x\right)=x+1-\ln x$，$f'\left(x\right)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 单调递减，在 $\left[1,+\infty\right)$ 单调递增.

$f\left(x\right)_{\min}=f\left(1\right)=2$

所以 $|AB|_{\min}=2$，故选 B.

【解析点评】利用构造函数，解决纵坐标距离问题.

**B 组：填空**

**46.** （巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（二）理数）已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}+a, f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，若关于 $x$ 的方程 $f'(x)-\frac{f(x)}{x+1}=0$ 有两个不等的根，则实数 $a$ 的取值范围是______________.

【考点】导数与零点问题

【命题意图】此题对学生能力要求较高，是拉开学生得分档次的题目. 本题考查了学生利，导数确定单调性的方法、函数零点存在性定理，考查学生灵活运用导数工具去分析、解决问题的能力.

答案： $a<\frac{1}{4}-\ln 2$.

解析： （江苏镇江陶启武）

因为 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}+a$ ， $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ 代入 $f'(x)-\frac{f(x)}{x+1}=0$ ，得 $\frac{x-1}{x^2}-\frac{\ln x+\frac{1}{x}+a}{x+1}=0$ ，化简得 $1-\frac{1}{x^2}-\ln x-\frac{1}{x}-a=0$ ，所以 $a=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\ln x\ (x>0)$.

令 $g(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\ln x$， $g'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}=\frac{-x^2+x+2}{x^3}=-\frac{(x-2)(x+1)}{x^3}$，

所以在 $x\in(0,\ 2)$ 时，$g'(x)>0$，在 $x\in(2,\ +\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ 2)$ 上单调递增，在 $(2,\ +\infty)$ 上单调递减. 因为 $g(2)=\frac{1}{4}-\ln 2$，当 $x\to 0$ 时， $g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时， $g(x)\to-\infty$，因为 $a=g(x)$ 有两个不同的根，所以实数 $a$ 的取值范围是 $a<\frac{1}{4}-\ln 2$.

【解析点评】该方法将参数分离，然后利用导数研究分离后的函数的性质，结合图像，确定参数的范围，是解决类似问题的一种通法。若将 $a=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\ln x$ 式处理成 $a=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln\frac{1}{x}$ ，构造 $x^2+x+a-1=\ln x$，凹凸两个函数恰有一个零点，通过公切线策略，计算量会小.

**C 组：解答题**

**47.** （云南师大附中 2020 届高考适应性月考卷(一)理数）已知 $f\left(x\right)=e^x$，$g\left(x\right)=\ln x$，若点 $A$ 为函数 $f\left(x\right)$ 上的任意一点，点 $B$ 为 $g\left(x\right)$ 上任意一点.

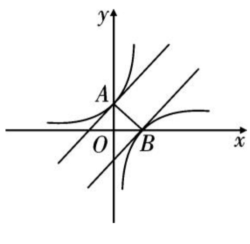
（1）求 $A,B$ 两点之间距离的最小值；

（2）若 $A,B$ 为函数 $f\left(x\right)$ 与函数 $g\left(x\right)$ 公切线的两个切点，求证：这样的点 $B$ 有且仅有两个，且满足条件的两个点 $B$ 的横坐标互为倒数.

【考点】导数（零点问题）.

答案： （1） $\sqrt{2}$； （2）见解析.

解析： （四川成都李鑫）




（1）由 $f(x)=e^x$，则 $f(x)$ 在点 $(0,\ 1)$ 处的切线为 $y=x+1$，

又 $g(x)=\ln x$，则 $g(x)$ 在点 $(1,\ 0)$ 处的切线为 $y=x-1$，

由于 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 与 $g(x)=\ln x$ 互为反函数，即函数图象关于 $y=x$ 对称，如图 8，

故而 $A$，$B$ 两点间的距离的最小值即为 $(0,\ 1)$ 与 $(1,\ 0)$ 之间的距离，

图 8

所以 $A$，$B$ 两点间的距离的最小值为 $\sqrt{2}$ .

（2）设 $A(x_1,\ \mathrm{e}^{x_1})$，$B(x_2,\ \ln x_2)$，

则 $f(x)$ 在 $A(x_1,\ \mathrm{e}^{x_1})$ 处的切线为 $y-\mathrm{e}^{x_1}=\mathrm{e}^{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\mathrm{e}^{x_1}x+\mathrm{e}^{x_1}(1-x_1)$，

$g(x)$ 在 $B(x_2,\ \ln x_2)$ 处的切线为 $y-\ln x_2=\dfrac{1}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\dfrac{1}{x_2}x+\ln x_2-1$，

所以 $\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1}=\dfrac{1}{x_2},\\ \mathrm{e}^{x_1}(1-x_1)=\ln x_2-1,\end{cases}$ 则 $1+x_2=(x_2-1)\ln x_2$，

要证这样的点 $B$ 有且仅有两个，需证上式有且两个解；

令 $h(x)=(x-1)\ln x-x-1$，下证 $h(x)=0$，有且仅有两个解，

由 $h'(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$，因为 $y=\ln x$ 单调递增，$y=\dfrac{1}{x}$ 单调递减，所以 $h'(x)$ 单调递增，

又 $h'(1)=-1<0$，$h'(2)=\ln 2-\dfrac{1}{2}>0$，故存在唯一的 $x_0\in(1,\ 2)$，使得 $h'(x_0)=0$，

故而，当 $x\in(0,\ x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,\ +\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

又 $h(x_0)<h(1)=-2$，$h(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2-3>0$，

所以 $h(x)=0$ 在 $(x_0,\ +\infty)$ 上有唯一的根；

记为 $h(\alpha)=0$，由 $\alpha>x_0>1$，则 $\dfrac{1}{\alpha}<1<x_0$，

又 $h\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)-\dfrac{1}{\alpha}-1=\dfrac{h(\alpha)}{\alpha}=0$，

故 $\dfrac{1}{\alpha}$ 是 $h(x)=0$ 在 $(0,\ x_0)$ 上的唯一根，

所以 $h(x)=0$，有且仅有两个解，

综上所述，这样的点 $B$ 有且仅有两个，且满足条件的两个点 $B$ 的横坐标互为倒数.

**48.** （吉林省长春市 2020 届高三质量检测（一）理科数学）已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x$ , $g(x)=x-\ln x-\dfrac{3}{\mathrm{e}}$ .

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）令 $h(x)=mf(x)+g(x)\ (m>0)$ 两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1+e>x_2+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ .

**【考点】导数与单调性、导数与函数零点.**

**【命题意图】本题重点考查导数在研究函数单调性中的应用，即定量找点。**

**答案：（1）$f(x)$ 单调递减区间是 $(0,1)$，单调递增区间是 $[1,+\infty)$；（2）面详见解析.**

**解析：（湖北武汉汪国振）**

**解法 1：**（1）由题可知 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$，

$f'(x)$ 单调递增，且 $f'(1)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\geqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$；

因此 $f(x)$ 单调递减区间是 $(0,1)$，单调递增区间是 $[1,+\infty)$.

（2）由 $h'(x)=m(1+\ln x-\dfrac{1}{x})+1-\dfrac{1}{x}$ 且 $m>0$ 可知，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\geqslant 1$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 单调递增.

由 $h(x)=m(x-1)\ln x+x-\ln x-\dfrac{3}{e}$ 有两个零点可知，$h(x)$ 的最小值为 $h(1)=1-\dfrac{3}{e}<0$.

当 $x=\dfrac{1}{e}$ 时，$h(\dfrac{1}{e})=m(\dfrac{1}{e}-1)(-1)+\dfrac{1}{e}-(-1)-\dfrac{3}{e}=\dfrac{m(e-1)+e-2}{e}>0$，

可知 $h(x)$ 在 $(\dfrac{1}{e},1)$ 上存在一个零点；

当 $x=e$ 时，$h(e)=m(e-1)+e-1-\dfrac{3}{e}>0$，

可知 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 上也存在一个零点；

因此 $x_2-x_1<e-\dfrac{1}{e}$，即 $x_1+e>x_2+\dfrac{1}{e}$.

**解法 2：（云南昆明孙国庆）**

（1）$f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x-\dfrac{1}{x}+1\ (x>0)$, 显然 $f'(x)\nearrow$. 又 $f'(1)=0$.

$\therefore x\in(0,1), f'(x)<0, f(x)\searrow; x\in(1,+\infty), f'(x)>0, f(x)\nearrow$.

（2）$h(x)=m(x-1)\ln x+x-\ln x-\dfrac{3}{e}$. $\therefore h'(x)=m\ln x+(m+1)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$.

又 $m>0, \therefore h'(x)\nearrow, \because h'(1)=0$.

$\therefore x\in(0,1), h'(x)<0, h(x)\swarrow; x\in(1,+\infty), h'(x)>0, h(x)\nearrow$.

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=-\dfrac{3}{e}<0$.

$h\left(\dfrac{1}{e}\right)=m\left(\dfrac{1}{e}-1\right)\cdot(-1)+\dfrac{1}{e}+1-\dfrac{3}{e}=m\left(1-\dfrac{1}{e}\right)+1-\dfrac{2}{e}>0, \therefore \exists x_1\in\left(\dfrac{1}{e},1\right), h(x_1)=0;$

$h(e)=m(e-1)+e-1-\dfrac{3}{e}>0, \exists x_2\in(1,e), h(x_2)=0;$

$\therefore x_1-x_2>\dfrac{1}{e}-e$, 即 $\therefore x_1+e>x_2+\dfrac{1}{e}$. 证毕！

【解析点评】本题第一为问常见求单调区间问题，非常容易入手．第二问难点在于双变量作为掩护，但第二问本质为近年来全国卷中经常出现的零点存在性问题．只要观察到结论中 $x_1+e>x_2+\frac{1}{e}$ 等价变形为 $x_2-x_1<e-\frac{1}{e}$，结合零点存在问题，自然会想到为优先赋值 $x=e$ 和 $x=\frac{1}{e}$ 俩个值．

需要注意的是，不少题求导后不能通过因式分解来判断导函数的符号，但这些题不有少情况下导函数分组后各组符号相同，因而导函数的符号可（易）判断．如本题第二问，无论将导函数写成 $h'(x)=m(1+\ln x-\frac{1}{x})+1-\frac{1}{x}$，或写成 $h'(x)=m\ln x+(m+1)\left(1-\frac{1}{x}\right)$，导函数被分成的两组始终同号，因为导函数符号可判断．

**49.** （四川 2020 届高三联合诊断考试理科）已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-a\ln x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2]$ 内恰有两个零点，求 $a$ 的取值范围．

【考点】导数与函数的零点．

【命题意图】本题考查了导数在研究函数单调性中的应用，考查了导数研究函数零点问题中的逆向应用．

【答案】（1）见解析；（2）$\left(e,\frac{e^4}{4}\right]$．

解析：四川凉山罗永云

解法：（1）由 $f(x)=\frac{x^2}{2}-a\ln x$，得 $f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}(x>0)$

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$ （舍去）

当 $0<x<\sqrt{a}$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 单调递减；

当 $x>\sqrt{a}$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 单调递增．

综上：当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 单调递增．

（2）解法 1：当 $a\le 0$ 时，由（1）知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

故 $f(x)$ 在 $(1,e^2]$ 内至多有一个零点，不合题意．

当 $a>0$ 时，由（1）知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(\sqrt{a})=\frac{a(1-\ln a)}{2}$．

若 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2]$ 内恰有两个零点，则

需满足$\begin{cases}1<\sqrt{a}<e^2\\ f(\sqrt{a})<0\\ f(1)>0\\ f(e^2)\geq 0\end{cases}$，即$\begin{cases}\dfrac{a(1-\ln a)}{2}<0\\ 1<a<e^4\\ \dfrac{1}{2}>0\\ \dfrac{e^4}{2}-2a\geq 0\end{cases}$，整理得$\begin{cases}1<a<e^4\\ a>e\\ a\leq\dfrac{e^4}{4}\end{cases}$，$\Rightarrow e<a\leq\dfrac{e^4}{4}$

故 $a$ 的取值范围为$\left(e,\dfrac{e^4}{4}\right]$.

**解法 2（参变分离）：** 由题 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,e^2\right]$ 内恰有两个零点，

则 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}-a\ln x=0$ 在 $\left(1,e^2\right]$ 上有两个根，即 $\dfrac{1}{2a}=\dfrac{\ln x}{x^2}$ 在 $\left(1,e^2\right]$ 上有两个根.

故当 $x\in\left(1,e^2\right]$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{2a}$ 与 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ 有两个交点.

$\because g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3},x\in\left(1,e^2\right]$，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{e}$.

当 $1<x<\sqrt{e}$ 时，$g'(x)>0$，则 $g\left(x\right)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 单调递增；

当 $\sqrt{e}<x<e^2$ 时，$g'(x)<0$，则 $g\left(x\right)$ 在 $(\sqrt{e},e^2)$ 单调递减.

又 $g\left(1\right)=0$，$g\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{1}{2e}$，$g\left(e^2\right)=\dfrac{2}{e^4}$.

则 $\dfrac{2}{e^4}\leq\dfrac{1}{2a}<\dfrac{1}{2e}$，$\Rightarrow e<a\leq\dfrac{e^4}{4}$.

故 $a$ 的取值范围为$\left(e,\dfrac{e^4}{4}\right]$.

**解法 3：云南昆明孙国庆**

解：（2）由已知 $f'\left(x\right)=x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-a}{x}\left(x>0\right)$.

① 当 $a\leq 0$ 时，$f'\left(x\right)>0$. 此时在 $x\in\left(1,e^2\right]$ 上最多只有一个零点，不符合题意，故舍去.

② 当 $a>0$ 时，$f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-a}{x}$. 此时 $x\in\left(0,\sqrt{a}\right),f'\left(x\right)<0;x\in\left(\sqrt{a},+\infty\right),f'\left(x\right)>0$.

$1^\circ$ 当 $\sqrt{a}\leq 1$ 时，即 $0<a\leq 1$, 此时 $f'\left(x\right)>0$ 在 $x\in\left(1,e^2\right]$ 上恒成立，$f\left(x\right)$ 最多只有一个零点，不符合题意.

$2^\circ$ 当 $\sqrt{a}\geq e^2$ 时，即 $a\geq e^4$，此时 $f'\left(x\right)<0$ 在 $x\in\left(1,e^2\right]$ 上恒成立，$f\left(x\right)$ 最多只有一个零点，不符合题意.

$3^\circ$ 当 $1<\sqrt{a}<e^2$ 时，即 $1<a<e^4$，当 $f\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{a\left(1-\ln a\right)}{2}<0$, 即 $e<a$. 又 $f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}>0$, $f\left(e^2\right)=\dfrac{e^2}{2}-2a\geq 0$.

即 $a\leq\dfrac{e^4}{4}$.

综上，要使 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2]$ 内恰有两个零点，$a\in\left(e,\dfrac{e^4}{4}\right]$.

解析：（云南昆明孙国庆）

（2）由已知 $f'(x)=x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-a}{x}(x>0)$.

① 当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$. 此时在 $x\in(1,e^2]$ 上最多只有一个零点，不符合题意，故舍去.

② 当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x^2-a}{x}$. 此时 $x\in(0,\sqrt{a}),f'(x)<0;x\in(\sqrt{a},+\infty),f'(x)>0$.

1° 当 $\sqrt{a}\le 1$ 时，即 $0<a\le 1$, 此时 $f'(x)>0$ 在 $x\in(1,e^2]$ 上恒成立，$f(x)$ 最多只有一个零点，不符合题意.

2° 当 $\sqrt{a}\ge e^2$ 时，即 $a\ge e^4$，此时 $f'(x)<0$ 在 $x\in(1,e^2]$ 上恒成立，$f(x)$ 最多只有一个零点，不符合题意.

3° 当 $1<\sqrt{a}<e^2$ 时，即 $1<a<e^4$，当 $f(\sqrt{a})=\dfrac{a(1-\ln a)}{2}<0$, 即 $e<a$. 又 $f(1)=\dfrac{1}{2}>0$,

$f(e^2)=\dfrac{e^2}{2}-2a\ge 0$. 即 $a\le\dfrac{e^4}{4}$.

综上，要使 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2]$ 内恰有两个零点，$a\in\left(e,\dfrac{e^4}{4}\right]$.

【解析点评】第一问含参函数单调性的讨论，对函数求导后，先考虑导函数恒为正（负）时参数的取值范围；再考在定义域内导函数的正负来确定函数单调性．属于高考常考题型．第二问解法一在第一问的基础上，借助数形结合思想讨论函数零点问题；解法二是借助参变分离方法，转化为常数函数与新的函数在给定区间上交点问题，也是借助数形结合思想求参数取值范围．属于中档题型．

**50．** AAA

**考点 17 导数与零点不等式**

**51．** AAA

**考点 18 导数与极值点不等式**

**52．**（巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）已知 $f(x)=e^x(x+1)-\dfrac{1}{2}ax^2-2ax(a>0)$.

（1）若 $a>e^{-2}$，求函数 $f(x)$ 的极值点；

（2）若 $x_0(x_0\ne -2)$ 是该函数的一个极值点，$f(-2)>e^{-2}$，求证：$f(x_0)\le 1$.

【考点】导数中极值

【命题意图】求极值点、极值范围，属于难题.

答案：（1）$f(x)$有极小值点$x=-2$，极大值点$x=\ln a$；（2）略.

**解析：江苏无锡李屹松**

解法：（1）$f'(x)=(x+2)(e^x-a)$，

当$a>e^{-2}$时，若$x\in(-\infty,-2)$或$(\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(-2,\ln a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

则$f(x)$有极大值点$x=-2$，极小值点$x=\ln a$.

（2）①当$a=e^{-2}$时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$单调递增，无极值点；

②当$0<a<e^{-2}$时，若$x\in(-\infty,\ln a)$或$(-2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

$x\in(\ln a,-2)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

$f(x)$有极小值点$x=-2$，极大值点$x=\ln a$.

由前述可知，$a\in(0,e^{-2})\cup(e^{-2},+\infty)$，$f(-2)=-e^{-2}+2a>e^{-2}\Rightarrow a>e^{-2}$，

$$f(x_0)=a\ln(a+1)-\frac{1}{2}a(\ln a)^2-2a\ln a=-\frac{1}{2}a(\ln a)^2-a\ln a+a,$$

令$t=\ln a>-2$，$f(\ln a)=g(t)=-\frac{1}{2}e^t(t^2+2t-2)$，$g'(t)=-\frac{1}{2}e^t(t^2+4t)$

则当$t\in(-2,0)$时，$g'(t)>0$，$g(t)$单调递增；$t\in(0,+\infty)$时，$g'(t)<0$，$g(t)$单调递减，

所以$g(t)\le g(0)=1$，即$f(x_0)\le 1$.

**【解析点评】第一问给定参数范围，求极值点；第二问主要探究极值范围，题中题，通过构造函数，求证极值不超过1，在隐零点问题，也经常出现类似解法.**

**53．**AAA

**考点19 定积分与微积分基本定理**

**54．**AAA

**55．**AAA

# 模块四 三角函数1

**考点20 弧度制及任意角的三角函数**

**56．** AAA

**考点 21　同角三角函数的基本关系及诱导公式**

**57．** AAA

**考点 22　三角函数的图象与性质**

**58．**（唐山市 2019—2020 学年度高三摸底考试理数）已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$，若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 上恰有 3 个极值点，则 $\omega$ 的取值范围是__________.

【考点】三角函数的图象与性质.

【命题意图】本题通过三角函数在指定区间上极值点情况，考查了三角函数的周期性与单调性.

答案：$\left(\dfrac{9}{8},\dfrac{13}{8}\right]$.

解析：河南郑州张建党

解：令 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\pm1$，即 $\omega x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，得 $x=\dfrac{\pi}{\omega}\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

所以，$f\left(x\right)$ 的极值点为 $x=\dfrac{\pi}{\omega}\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\left(k\in\mathbf{Z}\right)$.

又 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 上恰有 3 个极值点，

所以，这三个极值点只能是在 $k=0$，$k=1$，$k=2$，

所以，有 $\dfrac{\pi}{\omega}\left(2+\dfrac{1}{4}\right)<2\pi\le\dfrac{\pi}{\omega}\left(3+\dfrac{1}{4}\right)$，得 $\dfrac{9}{8}<\omega\le\dfrac{13}{8}$.

所以，$\omega$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{9}{8},\dfrac{13}{8}\right]$.

故答案为 $\left(\dfrac{9}{8},\dfrac{13}{8}\right]$.

【解析点评】根据极值点的定义，区间的端点一定不是函数的极值点，本题很容易忽略这一点，得出错误的约束条件 $\dfrac{\pi}{\omega}\left(2+\dfrac{1}{4}\right)\le2\pi<\dfrac{\pi}{\omega}\left(3+\dfrac{1}{4}\right)$，进而得出错误结果 $\left[\dfrac{9}{8},\dfrac{13}{8}\right)$.

**59．**（2020 届四省名校第一次联考理数）已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{2\pi}{3}\right)\left(\omega>0\right)$，

$x_1,x_2,x_3\in\left[0,\pi\right]$，且 $\forall x\in\left[0,\pi\right]$，都有 $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$，满足 $f(x_3)=0$ 的实数 $x_3$ 有且只有 3 个，给出下述四个结论：①满足题目条件的实数 $x_1$ 有且只有 1 个；②满足题目条件的实数 $x_2$ 有且只有 1 个；③ $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{10}\right)$ 上单调递增；④ $\omega$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{13}{6},\dfrac{19}{6}\right)$.

其中所有正确结论的编号是

A．①④　　B．②③　　C．①②③　　D．①③④

【知识内容】三角函数的性质

**【考查意图】本题主要是考查了含参三角函数，根据给定的条件，得到需要的数据，属于中档题.**

【答案】D

**解析：（湖北十堰郝清鹏）**

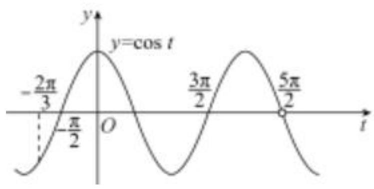
$\because \omega>0,x\in\left[0,\pi\right]$，$\therefore \omega x-\dfrac{2\pi}{3}\in\left[-\dfrac{2\pi}{3},\omega\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

设 $\omega x-\dfrac{2\pi}{3}=t$ 进行替换，作 $y=\cos t$ 的图象如下：

在 $\left[0,\pi\right]$ 上满足 $f(x_3)=0$ 的实数有且只有 3 个，即函数 $y=\cos t$ 在 $\left[-\dfrac{2\pi}{3},\omega\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 有且只有 3 个零点

由图象可知 $\dfrac{3\pi}{2}\le\omega\pi-\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{2}$，$\therefore\dfrac{13}{6}\le\omega<\dfrac{19}{6}$，结论④正确；

由图象知 $y=\cos t$ 在 $\left[-\dfrac{2\pi}{3},\omega\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上有且只有一个最小值点，




有一个或两个最大值点，结论①正确；结论②错误；

$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{10}\right)$ 时，$\omega x-\dfrac{2\pi}{3}\in\left(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\omega\pi}{10}-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

由 $\dfrac{13}{6}\le\omega<\dfrac{19}{6}$ 知 $\dfrac{\omega\pi}{10}-\dfrac{2\pi}{3}<-\dfrac{7\pi}{20}<0$

$\therefore y=\cos t$ 在 $\left(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\omega\pi}{10}-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{10}\right)$ 上单调递增，结论③正确.

综上，正确的有①③④，故选择 D.

【解析点评】利用三角函数的“母函数”，研究其性质，确定参数取值范围.

**60.** （巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（二）理数）已知 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})(\omega\in Z)$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{3}]$ 时 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 有唯一解，则满足条件的 $\omega$ 的个数是（　　）.

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

【考点】三角函数的性质

【命题意图】本题考查了三角函数的性质，分类讨论的数学思想，考查了学生的逻辑思维能力和运算能力。

**答案：D.**

解析：（浙江衢州汪强）

当$\omega>0$时，$\frac{5\pi}{6}\leqslant\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{6}$，即$2\leqslant\omega<6$，所以$\omega=2$，3，4，5；

当$\omega<0$时，$-\frac{11\pi}{6}<\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\leqslant-\frac{7\pi}{6}$，即$-6<\omega\leqslant-4$，$\omega=-5$，$-4$，故选 D.

**【解析点评】解法清晰简洁，通过对参数的讨论及解的唯一这个条件，列出参数的约束条件，进而确定参数.**

**61．** AAA

**考点 23 三角函数图象的变换**

**62．** AAA

**考点 24 三角函数模型的应用**

**63．** AAA

**考点 25 三角恒等变换**

**64．** （巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（二）理数）$\sin 20°+2\sin 20°\cos 40°=$__________.

【考点】三角恒等变换

【命题意图】本题以三角恒等变换为背景，考查学生对基本公式灵活运用的能力和计算能力.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：（浙江宁波赖庆龙）

解法 1：

$$\sin(40°-20°)+2\sin 20°\cos 40°=\sin 40°\cos 20°+\sin 20°\cos 40°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解法 2：

$$\begin{aligned}\sin 20°+2\sin 20°\cos 40°&=\sin 20°+\sin 20°\cos 40°+\sin 20°\cos 40°\\&=\sin 20°(\cos 40°+1)+\sin 20°\cos 40°\\&=2\cos^2 20°\sin 20°+\sin 20°\cos 40°\\&=\sin 40°\cos 20°+\sin 20°\cos 40°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

解法 3：

$$\sin 20^{\circ}+2\sin 20^{\circ}\cos 40^{\circ}=\sin 20^{\circ}+2\sin\left(30^{\circ}-10^{\circ}\right)\cos\left(30^{\circ}+10^{\circ}\right)$$

$$=\sin 20^{\circ}+2\left(\frac{1}{2}\cos 10^{\circ}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^{\circ}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^{\circ}-\frac{1}{2}\sin 10^{\circ}\right)$$

$$=\sin 20^{\circ}+\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sin 10^{\circ}\cos 10^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**解法 4：积化和差**

$$\sin 20^{\circ}+2\sin 20^{\circ}\cos 40^{\circ}=\sin 20^{\circ}+\sin\left(20^{\circ}+40^{\circ}\right)+\sin\left(20^{\circ}-40^{\circ}\right)=\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**解法 5：正弦平方差公式**

$$\sin 20^{\circ}+2\sin 20^{\circ}\cos 40^{\circ}=\sin 20^{\circ}+2\sin 20^{\circ}\sin 50^{\circ}=\sin 20^{\circ}+2\sin\left(35^{\circ}+15^{\circ}\right)\sin\left(35^{\circ}-15^{\circ}\right)$$

$$=\sin 20^{\circ}+2\sin^{2}35^{\circ}-2\sin^{2}15^{\circ}=\sin 20^{\circ}+\left(1-\cos 70^{\circ}\right)-\left(1-\cos 30^{\circ}\right)$$

$$=\sin 20^{\circ}-\sin 20^{\circ}+\cos 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**【解析点评】方法 1 和方法 3，通过条件角本身或特殊角建立起条件角的关联，进而进行化简求值，是非常好的思路.其他方法需要学生的知识面较宽，应该不是命题人的意图，不推荐.**

**65.** （巴蜀中学 2020 届高考适应性月考卷（二）理数）已知函数 $f(x)=\sin x\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+1$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期和最大值，并写出取得最大值时 $x$ 的集合;

（2）将 $f\left(x\right)$ 的函数图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位后得到的函数 $g\left(x\right)$ 是偶函数，求 $\varphi$ 的最小值.

**【考点】**三角函数性质和三角函数图像变换.

**【命题意图】**考查学生对基本知识和技能的掌握. 考查学生运算求解的能力.

**答案：** （1） $T=\pi$， $f(x)_{\max}=2$， $\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{\pi}{12}，k\in\mathbf{Z}\right\}$ ； （2） $\varphi=\frac{\pi}{12}$.

**解析：** （云南普洱薛家兵）

（1） $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+1=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$， 所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$， 当且仅当 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时， $f(x)$ 取得最大值为 $2$，

此时 $x$ 的集合为 $\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{\pi}{12}，k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（2） $g(x)=f(x+\varphi)=\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)+1$，

因为 $g(x)$ 是偶函数，所以 $2\varphi+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\varphi$ 的最小值为 $\varphi=\frac{\pi}{12}$.

**【解析点评】方法中规中矩，是解决此类问题的通法.**

**66.** AAA

**考点 26** 正弦定理、余弦定理及其应用

**G 组：解三角形**

**67.** **（昆明市第一中学 2020 届高三摸底考试理数）**已知在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=120^\circ, BC=2AC$.

（1）求$\tan A$的值;

（2）若$AC=1, \angle ACB$的平分线$CD$交$AB$于点$D$, 求$CD$的长.

**【考点】解三角形.**

**答案：**（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$|CD|=\frac{2}{3}$.

**解析：（云南昆明孙国庆）**

（1）过$B$作$BE\perp AC$的延长线于$E$, 设$AC=b$, 则$BC=2b$.

从而$CE=b, BE=\sqrt{3}b$. 所以$\tan A=\frac{BE}{AE}=\frac{\sqrt{3}b}{2b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）**解法一：**由$S_{\Delta ACB}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta BCD}$. 可知

即$\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin 60^\circ$，则$|CD|=\frac{2}{3}$.

**解法二：**由张角定理：$\frac{\sin 120^\circ}{CD}=\frac{\sin 60^\circ}{BC}+\frac{\sin 60^\circ}{AC}$. 即$\frac{\sqrt{3}}{2CD}=\frac{\sqrt{3}}{2\times 2}+\frac{\sqrt{3}}{2\times 1}$. 解得$|CD|=\frac{2}{3}$.

**解法三：**作$DM\perp AC$于$M$, $\because \tan A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 设$DM=\sqrt{3}t, AM=2t$.

又$\angle DCA=60^\circ$, $\therefore CM=\frac{DM}{\tan 60^\circ}=t. \therefore AC=2t+t=1$.

解得$t=\frac{1}{3}$, $\therefore CD=\frac{DE}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}$.

**解法四：**由法三知，$AD=\frac{1}{3}$, $\sin A=\frac{2}{\sqrt{7}}, \cos A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 在$\triangle ACD$中，由余弦定理，

$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos\angle BAC$. 解得$|CD|=\frac{2}{3}$.

**解法五：**由角平分线定理，$\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{1}$, 设$BD=2t, AD=t$.

在$\triangle ABC$中，由正弦定理，$\frac{AB}{\sin 120^\circ}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$, 解得$t=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

由角平分线定理，$CD^2=AC\cdot BC-BD\cdot AD$.

即$CD^2=1\times 2-\frac{\sqrt{7}}{3}\times\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{4}{9}$. 则$|CD|=\frac{2}{3}$.

**68.** （贵阳第一中学 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）已知函数 $f\left(x\right)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+1-2\sin^2 x$，$\left(x\in\mathbf{R}\right)$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $f\left(A\right)=\frac{1}{2}$，$b$，$a$，$c$ 成等差数列，且 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=9$，求边 $a$ 的值.

【考点】三角函数性质、解三角形.

【命题意图】本题考查了三角函数性质和解三角形，属于简单题.

答案：见解析.

解析：黑龙江七台河张树杰

（1）$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$\left(k\in Z\right)$.

$\therefore f\left(x\right)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$\left(k\in Z\right)$.

（2）由 $f\left(A\right)=\frac{1}{2}$，得 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$\because\frac{\pi}{6}<2A+\frac{\pi}{6}<2\pi+\frac{\pi}{6}$，$\therefore 2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

由 $b$，$a$，$c$ 成等差数列得 $2a=b+c$，$\because\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$，$\therefore bc\cos A=9$，$\therefore bc=18$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=\left(b+c\right)^2-3bc$，$\therefore a^2=4a^2-54$，$\therefore a=3\sqrt{2}$.

【解析点评】利用二倍角公式和辅助角公式，将函数化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ 形式，求出函数的单调区间；第二问主要是处理三角形的边角关系，利用余弦定理、等差中项和向量数量积定义解决边 $a$ 的值.

**69.** （唐山市 2019—2020 学年度高三摸底考试理数）$\triangle ABC$ 的内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{6}b^2\tan A$.

（1）证明：$b=3c\cos A$；

（2）若 $\tan A=2$，$a=2\sqrt{2}$，求 $S$.

【考点】正余弦定理.

答案：见解析.

【命题意图】本题通过证明三角形中的等量与求三角形面积，考查了同角三角函数之间关系、三角形面积公式、正弦定理等内容，

解析：

（1）由题意可得 $S=\frac{1}{6}b^2\tan A=\frac{1}{2}bc\sin A$，

故可得$b=3c\cos A$．

（2）方法 1（正弦定理）：因为$\tan A=2$，由此可得$\sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

由（1）可知$b=3c\cos A$，由正弦定理，得$\sin B=\sin\left(A+C\right)=3\sin C\cos A$，

化简可得$\tan A=2\tan C=2$，因此$C=\dfrac{\pi}{4}$，

又因为$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以，$c=\sqrt{5}$，进而$b=3\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=3$，

所以，$S=\dfrac{1}{6}b^2\tan A=3$．

方法 2（余弦定理）：因为$\tan A=2$，由此可得$\sin A=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

由（1）可知$b=3c\cos A=\dfrac{3}{\sqrt{5}}c$．

又$a=2\sqrt{2}$，代入$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得$8=\dfrac{9}{5}c^2+c^2-2\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}c\times c\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

解得$c=\sqrt{5}$，于是$b=\dfrac{3}{\sqrt{5}}c=3$，

所以，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times3\times\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=3$．

【解析点评】解答第一问时，由题设条件$S=\dfrac{1}{6}b^2\tan A$，自然想到三角形面积公式$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$．第二问方法 1 侧重于正弦定理，方法 2 侧重于余弦定理，均较方便地解决了问题．

**70．**的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$\tan A=\dfrac{4}{3}$，$\tan B=\dfrac{1}{3}$，$a=5$．

（1）求$\tan C$；

（2）求$\triangle ABC$中的最长边．

答案：（1）$-3$；（2）$\dfrac{15\sqrt{10}}{8}$

【知识内容】解三角形

【考查意图】本题主要是考查了三角形内角和定理、和差角公式、正弦定理，属于简单题．

解析：（黑龙江七台河张树杰）

解析：（1）因为$\tan C=\tan\left[\pi-\left(A+B\right)\right]=-\tan\left(A+B\right)=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\cdot\tan B-1}=\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}-1}=-3$．

（2）由（1）知$C$为钝角，所以$C$为最大角，$c$为最长边．

$\because\tan A=\dfrac{4}{3}$，$\therefore\sin A=\dfrac{4}{5}$,又$\tan C=-3$，$\therefore\sin C=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，根据正弦定理得：

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{5}{\frac{4}{5}}=\frac{c}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$，$\therefore c=\frac{15\sqrt{10}}{8}$.

【解析点评】根据三角形内角和定理，再结合正切的和角公式，求出角 $C$ 的正切值；根据大边对大角与正弦定理求出最大边.

**71．** AAA

**H 组：三角形中的范围与最值问题**

**角**

**长度**

**72．**（吉林省长春市 2020 届高三质量检测（一）理科数学）已知△$ABC$ 的内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，$a=b\tan A\left(a>b\right)$，

（1）求证：△$ABC$ 是直角三角形；

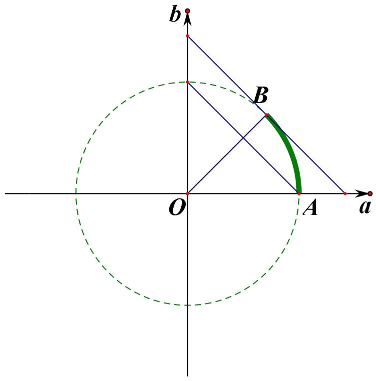
（2）若 $c=10$，求△$ABC$ 的周长的取值范围.

【考点】解三角形.

【命题意图】本题考查了求解三角形中最值常用的方法.

答案：（1）详见解析；（2）$\left(20,10+10\sqrt{2}\right)$.

解析：（辽宁盘锦刘扬）




（1）由正弦定理，得 $\sin A=\sin B\frac{\sin A}{\cos A}$，

所以，$\sin B=\cos A=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm A\right)$，得 $B=\frac{\pi}{2}\pm A$，

因为 $a>b$，所以 $A>B$，所以 $B=\frac{\pi}{2}-A$，

所以△$ABC$ 是直角三角形.

（2）解法 1：由（Ⅰ）得 $\angle C=\frac{\pi}{2}$，所以设 $a=c\sin A$，$b=c\cos A$，

$a+b=10\left(\sin A+\cos A\right)=10\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为 $a>b$，所以 $\frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)<1$，

所以 $10<10\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)<10\sqrt{2}$，

故△$ABC$ 周长的取值范围 $\left(20,10+10\sqrt{2}\right)$.

解法 2：由 $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，得 $a+b<\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}=10\sqrt{2}$，又 $c<a+b$，$10<a+b<10\sqrt{2}$

所以 $\triangle ABC$ 周长的取值范围 $\left(20,10+10\sqrt{2}\right)$.

解法 3：设 $P\left(a,b\right)$ $a>b>0$，则点 $P$ 在 $a^2+b^2=100$ 的一段弧 $\overset{\frown}{AOB}$ 上运动，由几何意义可知 $10<a+b<10\sqrt{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 周长的取值范围 $\left(20,10+10\sqrt{2}\right)$.

**【解析点评】在解三角形题型中，涉及求三角形面积或周长的最值，常用方法有函数方法（解法一），将待求目标整理成某个量（通常是边或角）的单元函数，然后在定义域内（易忽略导致错解）求最值；整理放缩（解法二），整体放缩是构造等量关系，将待求目标函数当成一个整体放缩（多用基本不等式放缩）；由临界情况或特殊情况确定目标函数的最值或取值范围端点值，方法三正是使用此法，但此法最好只在小题中使用.**

**面积**

**73.** **（云南师大附中 2020 届高考适应性月考卷（一）理数）**在 $\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，且满足 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

（1）求角 $B$ 的大小；

（2）若 $D$ 为 $AC$ 的中点，且 $BD=1$，求 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值.

**【考点】解三角形（三角形中范围与最值问题）.**

答案：（1）$B=\frac{\pi}{3}$；（2）$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解析：（四川泸州刁如金）

（1）由正弦定理及 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，得 $\sin B\sin A=\sin A\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，

由 $A\in(0,\ \pi)$，所以 $\sin A\neq 0$，则 $\sin B=\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$，

又 $B\in(0,\ \pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

（2）如图 6，由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，

又 $D$ 为 $AC$ 的中点，则 $2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，

所以 $4=a^2+c^2+2\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=a^2+c^2+ac\geqslant 3ac$，

则 $ac\leqslant\frac{4}{3}$，当且仅当 $a=c$ 时取等号，

所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

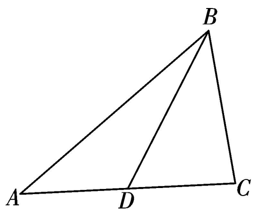


图 6

**74.** （2020 届四省名校第一次联考理数）$\triangle ABC$ 的内角 $A$，$B$，$C$，的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $\tan\frac{A}{2}(a\sin\frac{C}{2}+2b\cos\frac{A}{2})=a\cos\frac{C}{2}$

（1）求 $B$；

（2）若 $b=6$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

**【知识内容】解三角形**

**【考查意图】第（1）问主要是考查了利用三角形边、角等式中求出 $B$；第（2）问主要是给定角和所对的角，求三角形面积取值范围，属于中档题.**

**答案：**（1）$B=\frac{2\pi}{3}$；（2）$S_{\triangle ABC}\in\left(0,3\sqrt{3}\right]$.

**解析：（河南郑州赵永帅）**

解析：（1）$\tan\frac{A}{2}(a\sin\frac{C}{2}+2b\cos\frac{A}{2})=a\cos\frac{C}{2}$

$$a\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}+2b\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=a\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$2b\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=a\left(\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=a\cos(\frac{C+A}{2})$$

$$\therefore b\sin A=a\cos(\frac{C+A}{2})\Rightarrow \sin B\sin A=\sin A\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2})$$

$$\because A\in\left(0,\pi\right)\Rightarrow \sin B=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2})=\sin\frac{B}{2}\Rightarrow 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\Rightarrow\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\because B\in\left(0,\pi\right)\Rightarrow\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\frac{B}{2}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow B=\frac{2\pi}{3}$$

（2）**解法 1**：$B=\frac{2\pi}{3}$，$b=6$，

解析：由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{a^2+c^2-36}{2ac}=-\frac{1}{2}$

$a^2+c^2=36-ac\geq 2ac\Rightarrow ac\leq 12$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leq 3\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}\in\left(0,3\sqrt{3}\right]$

**解法 2**：

解析：由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$

$$\therefore a=4\sqrt{3}\sin A,c=4\sqrt{3}\sin C$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4\sqrt{3}\sin A\cdot 4\sqrt{3}\sin C=12\sqrt{3}\sin A\sin C$$

$$=12\sqrt{3}\sin A\sin C=12\sqrt{3}\sin A\sin\left(A+B\right)=12\sqrt{3}\sin A\sin\left(A+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$=18\sin A\cos A-6\sqrt{3}\sin^2 A=6\sqrt{3}\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)-3\sqrt{3}$

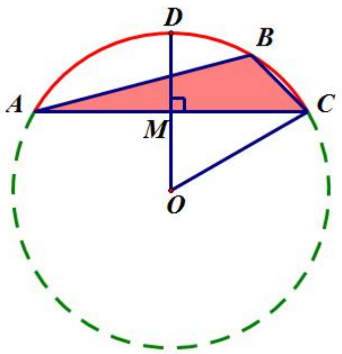
$\because A+C=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow A\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow 2A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)\Rightarrow\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$

$\therefore S_{\triangle ABC}\in\left(0,3\sqrt{3}\right]$

（2）解法 3：（解析人：浙江湖州史健）

由 $B=\dfrac{2\pi}{3}$，$b=6$，构造$\triangle ABC$的外接圆，其半径为$R=\dfrac{b}{2\sin B}=2\sqrt{3}$，

如图所示，$\triangle ABC$的外接圆为圆$O$，点$B$在劣弧$\overset{\frown}{AC}$上运动，




设$OD\perp BC$，交点为$M$，显然当点$B$在点$D$处面积最大；

当点$B$靠近点$A$或点$C$，面积接近 0，

$|OC|=2\sqrt{3},|MC|=3\Rightarrow|OM|=\sqrt{3},|DM|=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|DM|=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}\in\left(0,3\sqrt{3}\right]$

**【解析点评】第一问是一个常规问题，利用三角形边、角关系求出已知角；第二问中，解法 1 主要利用不等式知识解决三角形面积取值范围，解法 2 将三角形的边换成三角形的角，然后解决问题，解法 3 利用定边定角构造圆解决问题，用运动的观念解决静态问题.**

**点评：**针对第二问，求三角形面积，对于三角形没有要求可以优先考虑用均值定理求面积和周长的最大值，若对三角形有要求，比如锐角三角形，采用第二种解法会更容易一下.

**75.** （四川 2020 届高三联合诊断考试理科数学）$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，已知$\sin(A+C)\cos B=\sqrt{3}\cos^2 B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且$B$为锐角.

（1）求$B$.

（2）若$b=1$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

**【考点】三角恒等变换、余弦定理、基本不等式.**

**【命题意图】本题意在考查三角恒等变换、余弦定理在解三角形中的应用.**

**【答案】**（1）$\dfrac{\pi}{6}$；（2）$\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

**解析：四川泸州刁如金**

**解法：**（1）因为$\sin(A+C)\cos B=\sqrt{3}\cos^2 B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$2\sin(A+C)\cos B=\sqrt{3}\left(2\cos^2 B-1\right)$，又$A+B+C=\pi$，

所以$\sin 2B=\sqrt{3}\cos 2B$，即$\tan 2B=\sqrt{3}$，因为$B$为锐角，所以$2B\in(0,\pi)$，

所以$2B=\dfrac{\pi}{3}$，所以$B=\dfrac{\pi}{6}$.

（2）由（1）知 $B=\frac{\pi}{6}$，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，即 $a^2+c^2-\sqrt{3}ac-1=0$，

因为 $a^2+c^2\geq 2ac$，所以 $ac\leq 2+\sqrt{3}$（当且仅当 $a=c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 时取等号），所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leq\frac{2+\sqrt{3}}{4}$，

（当且仅当 $a=c=\frac{\sqrt{6}+2}{2}$ 时取等号），故 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$．

**解法 2：（广西玉林徐文才）**

由（1）可知 $B=\frac{\pi}{6}$，则 $A+C=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，所以 $C=\frac{5\pi}{6}-A$，则 $0<A<\frac{5\pi}{6}$

根据正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$

所以 $a=2\sin A$， $c=2\sin C=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-A\right)$

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot 2\sin A\cdot 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-A\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}$

$=\sin A\left(\sin\frac{5\pi}{6}\cos A-\cos\frac{5\pi}{6}\sin A\right)=\frac{1}{2}\sin A\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2 A$

$=\frac{1}{4}\sin 2A+\frac{\sqrt{3}}{4}(1-\cos 2A)=\frac{1}{4}\sin 2A-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2A+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$

因为 $0<A<\frac{5\pi}{6}$，所以 $-\frac{\pi}{3}<2A-\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$

所以当 $2A-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{5\pi}{12}$ 时，$\left(S_{\triangle ABC}\right)_{\max}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$．

**【解析点评】**第（1）利用二倍角公式，得到 $\tan 2B=\sqrt{3}$，即可求得 $B=\frac{\pi}{6}$；第（2）问是利用余弦定理和基本不等式求解最值．

**76．** AAA

**其它**

**77．** AAA