从射雕到九章——在天大理学院物理系的通俗报告

林开亮 数学纵贯线 2017-12-12 19:56

本文是作者今年6月份在母校天津大学理学院给出的通俗报告的PPT截图。

从《射雕英雄传》到《九章算术注》

林开亮

西北农林科技大学理学院

2017年6月28日

感谢金永亮同学制作海报

《射雕英雄传》中的三道算术题

在《射雕英雄传》第 29 回“黑沼隐女”中, 金庸描写了一个因情场失意转而痴迷于算学(这无异于从一个泥潭爬出来, 又跳进另一个万丈深渊)的女侠瑛姑. 为了教训这个没有一点人情味的“神算子”, 古灵精怪的黄蓉在临走时, 给她留了三道算术难题(要让她想破脑壳也想不出来, 这招厉害吧! 不信, 你来替瑛姑接一招!):

> 黄蓉气极, 正欲反唇相讥, 一转念间, 扶着郭靖站起身来, 用竹棒在地下沙地上写了三道算题:
> 第一道是包括日, 月, 水, 火, 木, 金, 土, 罗, 计都的 *“七曜九执天竺笔算”;*
> 第二道是立方招兵支银给米题*(参见文献[6]);*
> 第三道是鬼谷算题*: “今有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二, 问物几何?”*

Remark. 新加坡国立大学数学系曾衡发(Chan Heng Huat)教授看到这一段想起了电视剧中黄蓉帮瑛姑解洛书(九宫格)的场景, 并点评说:“黄药师必定是一个聪明的算学家.” ■

“鬼谷算”与“鸡兔同笼”

- 第一题我不清楚. 第二题涉及高阶等差数列的求和, 是元代数学家朱世杰《四元玉鉴》(1303年)中的原题, 我们在别处有讨论. 见林开亮: 从高斯算 $1+2+3+\cdots+100$ 谈起(公众微信号遇见数学).
- 第三题“鬼谷算”, 学名叫“物不知数”问题, 出自《孙子算经》, 作者(是哪个“孙子”?)和成书年代都不清楚, 人们推测它成书于公元 4, 5 世纪, 在唐初, 曾名列于国子监算学教科书“算经十书”. (当时设科举考试, 专有“明算科考”, 晚唐废止.)
- “物不知数”问题颇有猜谜的味道, 流传到后世, 演绎为“秦王暗点兵”, “韩信点兵”, “鬼谷算” (“鬼谷”即春秋战国时代的兵家、纵横家鬼谷子，据《史记》记载，他是苏秦和张仪的老师)等各个版本.
- 《孙子算经》中的另一个有名问题是鸡兔同笼: “今有雉兔同笼, 上有三十五头, 下有九十四足, 问雉兔各几何?” (最后我们再回到这个问题, 本质上可以用《九章算术》中的方程术(消元法)求解.)

同余

为便于书写, 我们先介绍高斯(Gauss, 1777–1855)引进的同余记号.

高斯在其大作《数论探索》(1801 年)中引进的同余记号 $\equiv$, 也许是每一个学习初等数论的人遇到的第一个头等重要的观念.

Notation

设 a, b, m 是整数且 $m \neq 0$, 则记号

$$a \equiv b \pmod{m} \quad (\text{读作 } a \text{ 与 } b \text{ 模 } m \text{ 同余或 } a \text{ 模 } m \text{ 同余于 } b)$$

表示(在带余除法之下)a 除以 m 的余数等于 b 除以 m 的余数.
特别地, $a \equiv 0 \pmod{m}$ 相当于说 a 被 m 整除(除尽，即余数等于 0); 此时我们常记为

$$m \mid a \qquad (\text{读作 } m \text{ 整除 } a\ ).$$

否则记为 $m \nmid a$.
因此, $a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a-b)$.

举例

Example

例 1. 容易验证 $1777 \equiv 2017 \pmod{12}$, 这意味着高斯属鸡.

Example

例 2. 出生于 1642 年的牛顿(Newton),由

$$1642 \equiv 1642 + 360 \equiv 2002 \equiv 2014 \equiv 2014 - 120 \equiv 1894 (\mathrm{mod} 12)$$

可知, 牛顿属马. 历史记载, 那一年爆发了中日甲午战争.

Corollary

推论: 诞生于 1895 年的北洋大学堂属羊, 次年诞生的交通大学属猴.

Example

例 3. 我跟出生于 1911 年的陈省身是同一个属相, 你猜?

“鬼谷算”问题的现代表述

- 求一个正整数 x, 使得它同时满足以下三个条件:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

- 《孙子算经》中不仅给出了这个问题的通解, 而且给出了下述一般问题的通解(其中 r_1, r_2, r_3 为任意给定的整数):

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod 3, \\ x \equiv r_2 \pmod 5, \\ x \equiv r_3 \pmod 7. \end{cases}$$

为

$$x = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3 - 105k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Remark. 这里用 r_i 表示余数, 源自英文 remainder, 用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集, 源自德文 Zahlen. ■

70, 21, 15 与 105 从哪里来?

- 回到“鬼谷算”问题, 令

$$r_1 = 2, \qquad r_2 = 3, \qquad r_3 = 2$$

就有

$$x = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 105k = 233 - 105k$$

令 $k = 2$, 得到最小正整数解 $x = 233 - 210 = 23$.

- 明朝数学家程大位在《算法统宗》(1592 年)中将解法编成歌诀:

> 三人同行七十稀, 五树梅花廿一支,
> 七子团圆正半月, 除百零五便得知.

Problem

问题在于: *70, 21, 15* 与 *105* 这些数是怎么得来的?

中国剩余定理

孙子对"物不知数"(即鬼谷算)问题的解法, 蕴含了下述定理.

Theorem

中国剩余定理*(Chinese remainder theorem):*
设 $m_1, \ldots, m_n$ 是两两互素的正整数, 其乘积 $m_1 \cdots m_n$ 记为 M, 又设为 $r_1, \ldots, r_n$ 为给定的整数, 则存在唯一的小于 M 的非负整数 x, 使得

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{m_1}, \\ \quad \cdots, \\ x \equiv r_n \pmod{m_n}. \end{cases}$$

中国剩余定理

Remark.
(i)我们说两个正整数互素, 若它们的最大公因子等于 1. 例如 5 与 12 互素, 但 10 与 12 不互素. 事实上, $\gcd(10, 12) = 2$. 这里 gcd 是 greatest common divisor 的首字母缩写, 表示最大公因子. 类似的, 用lcm (least common multiple)表示最小公倍数, 于是, $\operatorname{lcm}(10, 12) = 60$.
(ii)以上是对中国剩余定理的通常表述, 但这并非中国剩余定理的全部, 真正的中国剩余定理乃是一个算法表述, 而且并不要求 $m_1, \ldots, m_n$ 两两互素. 这就是秦九韶在《数书九章》(1247年)中提出的"大衍总数术"(第一章). ■

秦九韶的诗

昆仑磅礴，道本虚一. 圣有大衍，微寓于易.
奇余取策，群数皆捐. 衍而究之，探隐知原.
数术之传，以实为体. 其书九章，惟兹弗纪.
历家虽用，用而不知. 小试经世，姑推所为.
述大衍第一.

注：由此可以推断，大衍求一术的背景是天文历法中的"上元积年"问题. 其书九章，惟兹弗纪："《九章算术》唯独没有记载它."
秦九韶《数书九章》是对《九章算术》的继承和发展.

(华罗庚在钱三强、赵九章面前出并对出的对联)

三强韩赵魏，九章勾股弦.

【钱三强(1913–1992)，赵九章(1907–1968)】"勾股"是《九章算术》的第九章内容。
延伸⇝清华大学1932年招生考试，陈寅恪命题中文，有一题是对联，上联是孙行者. 当时参与阅卷的陈省身给出一个上联：祖冲之. 你能猜出陈寅恪拟出的下联吗？

上元积年

所谓上元，是指一部历法的起算之日，它须同时满足三个条件：甲子日，月朔(即阴历每月初一)，冬至. 从一部历法的起算点到本年所积累的年数，就叫上元积年.
这个三个条件都是周期性的:

- 甲子日的周期是 $\mathrm{lcm}(10,12)=60$ 天，所谓"六十一甲子"，又所谓"花甲之年".
- 月朔日的周期是 29.5306 天(阴历每月的天数).
- 冬至日的周期是 365.2422 天.

因此，在通分之后，一般形式的同余方程组自然出现.

吴文俊对中国剩余定理的评价

数学，决不能认为是单纯作为推理训练之用的学问，更不能沦为数字游戏之学. 数学之所以重要，主要是因为能有助于人类认识自然，控制自然，为解决应用中产生的各种问题提供有效手段. 就这一点来说，比起欧几里得的数论，中国古代没有素数的数论并不逊色. 秦九韶《数书九章》中的中国剩余定理，就是我国古代数论的一项代表性成就.

——吴文俊，从《数书九章》看中国传统数学构造性与机械化特色，收入《秦九韶与《数书九章》》(北京师范大学出版社，1987年).

求一术

- 我不打算介绍(总程序)“大衍总数术”而只介绍其中的(关键“子程序”) “求一术”，这是一个极有用的算法.
- 求一术是用来求解同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的方法. 本质上，就是矩阵变换的方法. (另一种等价的方法涉及连分数，可参见华罗庚先生[3].)

Algorithm

求一术: 设整数 a, b 是互素，且 $b \neq 0$. 若

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}]{\text{第一行两个元素辗转相除}} \begin{bmatrix} 1 & * \\ u & * \end{bmatrix},$$

则 $x = u$ 满足同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$，且后者的通解为

$$x = u + bk, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

求一术的依据

求一术的依据可以表述为下述

Lemma

引理: 设 A 如上, 二阶整数矩阵

$$B = \begin{bmatrix} u & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

使得

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & * \\ v & * \end{bmatrix}$$

则 $v = u$, 且 $x = v$ 满足同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$.

线性代数复习: 初等变换与初等矩阵

- 对一个整数矩阵, 我们可以给出三类初等行变换: 交换两行, 对某一行乘上-1, 将某一行的一个整数倍加到另一行. 每一类初等行变换都对应于某一个矩阵, 称为初等矩阵(elementary matrix). 对矩阵实施其中一类初等行变换, 就相当于在矩阵左边乘以相应的初等矩阵.
- 类似的, 有三类初等列变换: 交换两列, 对某一列乘上-1, 将某一列的一个整数倍加到另一列. 每一类初等列变换也有对应的初等矩阵. 对矩阵实施其中一类初等列变换, 就相当于在矩阵右边乘以相应的初等矩阵.
- 利用类似的原理, 可以用初等变换的技巧来求方阵的逆, 这是线性代数的基本内容之一. 其思想最早可追溯至《九章算术》(成于公元 1 世纪左右, 作者不详), 其中的第八章方程就是介绍用行变换来消元解线性方程组, 称"方程术".
- 今天这里我们要讲的, 就是发端于《九章算术》的方程术.

举例: 回到“物不知数”

利用求一术, 可以有效地解释70, 21, 15 这三个数的由来.
例如, 70 实际上是

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3, \\ x \equiv 0 \pmod 5, \\ x \equiv 0 \pmod 7. \end{cases}$$

的最小正解. 为看出这一点, 令 $x = 35y$, 上述方程组显然等价于

Example

$$35y \equiv 1 \pmod 3$$

$$\begin{bmatrix} 35 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $y = -1 + 3k$, 从而 $x = 35y = -35 + 105k$, 为得到最小正解 70, 只需令 $k = 1$.

举例: 回到“物不知数”

类似地, 21 是

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3, \\ x \equiv 1 \pmod 5, \\ x \equiv 0 \pmod 7. \end{cases}$$

的最小正解.

而 15 是

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3, \\ x \equiv 0 \pmod 5, \\ x \equiv 1 \pmod 7. \end{cases}$$

的最小正解.

注: 详见蔡聪明老师的优美文章[1].

中国剩余定理与拉格朗日插值公式的类比

有一个与中国剩余定理的上述构造性证明有异曲同工之妙的结果, 即拉格朗日(Lagrange, 1795)插值公式.

Theorem

拉格朗日插值公式(Lagrange interpolation formula):
设 $x_1, \dots, x_n$ 是 n 个不同的数, 则对任意的 n 个数 $b_1, \dots, b_n$, 存在唯一的次数小于 n 的多项式 $f(x)$ 满足以下条件:

$$\begin{cases} f(x_1) = b_1, \\ \quad \cdots, \\ f(x_n) = b_n. \end{cases}$$

实际上, 可以明确写出拉格朗日多项式 f 的表达式, 留给有兴趣的读者.
提示: 先写出特解 $f_i (i = 1, \dots, n)$ 的表达式, 其中 f_i 满足 $f_i(x_j) = \delta_{ij}$(这里 δ_{ij} 是 Kronecker 符号). 因此, 诸 f_i 相当于"物不知数"问题中的70, 21, 15. 再用叠加原理. 参见[10].

一次丢番图(Diophantine)方程

解同余方程 $ax \equiv 1 \pmod b$ 的求一术可以推广来求解一般的丢番图方程

$$ax + by = c.$$

此时"求一术"可变形如下:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}]{\text{第一行两个元素辗转相除}} \begin{bmatrix} d & 0 & c \\ x_0 & s_0 & 0 \\ y_0 & t_0 & 0 \end{bmatrix}$$

则有以下结论:

Conclusion

(i) $d = \gcd(a, b)$ 是 a, b 的最大公因子;
(ii) $ax + by = c$ 有整数解 $\iff d | c$, 且此时其通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{c}{d} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} s_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \frac{c}{d} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} \frac{b}{d} \\ \frac{-a}{d} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

.

百鸡问题

该题出自中国古代约5–6世纪成书的《张邱建算经》，是全书的最后一题:

今有鸡翁一, 值钱伍; 鸡母一, 值钱三; 鸡雏三, 值钱一. 凡百钱买鸡百只, 问鸡翁, 母, 雏各几何?

今译如下:

Problem

百鸡问题: 已知公鸡一只卖5元, 母鸡一只卖3元, 小鸡三只卖1元. 现在一共有 100 元钱经费(要全部花完), 想买 100 只鸡. 问: 能买公鸡, 母鸡, 小鸡各几只?

百鸡问题第一种解法: 消元法 + 列变换

Solution

解: 设买公鸡, 母鸡, 小鸡各 $x, y, 3z$ 只, 于是有方程

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 100 \\ 5x + 3y + z &= 100 \end{aligned}$$

现在有三个未知数, 两个方程, 通过消元(比如第二式乘以 3 减去第一式)就得到

$$14x + 8y = 200$$

即

$$7x + 4y = 100$$

列变换法解二元一次丢番图方程

Solution

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 100 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第}1\text{列减去第}2\text{列的}1\text{倍}]{7=1\cdot 4+3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 100 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第}2\text{列减去第}1\text{列的}1\text{倍}]{4=1\cdot 3+1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 100 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第}1\text{列减去第}2\text{列的}3\text{倍}]{3=3\cdot 1+0} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 100 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{交换第}1\text{列与第}2\text{列}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 100 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

列变换法解二元一次丢番图方程

Solution

因此通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

由于 $x \geq 0, y \geq 0, z = 100 - 5x - 3y \geq 0$, 所以我们得到

$$25 \leq k \leq 28$$

从而令 $k = 25, 26, 27, 28$, 即得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 75 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 78 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 81 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 84 \end{bmatrix}.$$

化分数为分母更小的分数之和

作为求解 $ax+by=c$ 的应用, 我们来看高斯在《数论探索》中介绍的将分数化成真分数之和的问题:

Problem

问题: 设 $\frac{m}{n}$ 的分母 n 是两个互素的数 a, b 的乘积, 将 $\frac{m}{n}$ 写成两个分母分别为 a, b 的分数之和.

Solution

分析: 设

$$\frac{m}{n}=\frac{y}{a}+\frac{x}{b},$$

则有

$$ax+by=m.$$

用矩阵变换的技术求解即可.

举例

Example

例: 设 $\frac{m}{n}=\frac{58}{77}=\frac{y}{11}+\frac{x}{7}$, 则有 $11x+7y=58$.

$$\begin{bmatrix}11&7&58\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&7&58\\1&0&0\\-1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&58\\1&-1&0\\-1&2&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&58\\2&-1&0\\-3&2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&58\\2&-7&0\\-3&11&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=58\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-7\\11\end{bmatrix},\qquad k\in\mathbb{Z}$$

选择 k 使得 $0\le x<7$, 可以定出 $x\equiv 58\times 2\equiv 2\times 2\equiv 4 \pmod 7$, 此时 $y=\frac{58-11x}{7}=\frac{58-44}{7}=2$, 从而

$$\frac{58}{77}=\frac{y}{11}+\frac{x}{7}=\frac{2}{11}+\frac{4}{7}.$$

化分式为部分分式

上述结果可以推广为(见高斯《算术探索》309-311 目):

Theorem

定理: 设 $\frac{m}{n}$ 的分母 n 可分解为互素的数 $b_1, \ldots, b_s$ 的乘积, 则 $\frac{m}{n}$ 可以唯一写成

$$\frac{m}{n} = \frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_s}{b_s} + c$$

其中整数 a_i 满足 $0 < a_i < b_i$, c 是整数.

作为上述方法的类比, 可以得到将有理分式化成部分分式(积分常常需要如此)的算法. 此处从略. 通常的教科书中介绍的方法是待定系数法. 在文章[8]中, 笔者介绍了在求解非齐次的常系数线性微分方程(例如 $y'' + y = x^5$)时, 也可以用"求一术"有效地代替待定系数法.

线性丢番图方程组

我们可以将 $ax + by = c$ 的求解推广到一般的线性丢番图方程组 $Ax = b$. 基本的结果属于英国数学家 H. J. Smith (1861).

Theorem

整数矩阵的 *Smith* 标准型定理: 对任意的 $A \in M(m \times n, \mathbb{Z})$ 可用初等行变换(可逆阵 P)和列变换(可逆阵 Q)化成以下形式:

$$PAQ = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & & \alpha_r & & \vdots \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

其中 r 是 A 的秩, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 是正整数, 且满足 $\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \mid \alpha_r$.

整数矩阵的 Smith 标准型与不变因子

注: $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 是 由 A 唯一确定, 称为 A 的不变因子.
在 A 为 n 阶方阵 且 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ 的情形, 我们得到

Corollary

推论: 每个可逆整数矩阵可以写成初等矩阵的乘积.

以数论工作而著称的 H. J. Smith(1826–1883)是他那个时代最健谈的数学家之一, 我们来领略一下(徐源译《数学大师: 从芝诺到庞加莱》):

> 数论是人类最古老, 也许是最最古老的一个分支; 然而它的一些最深奥的秘密, 与其最平凡的真理是密切相连的.

H. J. Smith 是高斯的忠实粉丝和信徒, 关于他们以及下文即将提到的许多近代数学家的故事, 可见《数学大师》或潘澍原, 林开亮等译《数学巨匠》.

布尔巴基论线性丢番图方程组的历史

(Bourbaki *Elements of the History of Mathematics*)

求整系数线性方程组的整数解问题, 其特殊情形首先由*Hermite*考虑并解决, 而一般情形则由*H. J. Smith* 在 *1861* 年解决; 只是到了 *1878* 年, 后者的结果才被*Frobenius* 重新发现. *Frobenius* 是在 *Kronecker* 创立的一个宏大纲领的框架下展开的研究, *Weierstrass* 也参与到这一研究纲领中. 正是 *Kronecker* 在其工作中, 不经意地给出了实*(*复*)*系数的线性方程组的定理的确定形式, 这些结果也被《阿丽思漫游奇境记》*(Alice in Wonderland)*的著名作者, 以其独有的小心谨慎, 用一种晦涩的方式阐明了; 至于 *Kronecker*, 他不屑于发表其结果, 因而留给了他的同事和门徒; 甚至秩*(rank)*的术语, 也是等到 *Frobenius* 才引进的.

注: 著名作者即Charles Lutwidge Dodgson(1832–1898), 以笔名 Lewis Carroll 著称. 中译本, 赵元任(1892–1982), 《阿丽思漫游奇境记》.

线性丢番图方程组的矩阵变换解法

可以将 $ax + by = c$ 的求解方法推广到一般的线性丢番图方程组: $Ax = b$, 其中 $A \in M(m \times n, \mathbb{Z}), b \in \mathbb{Z}^m, x \in \mathbb{Z}^n$. 其原理如下:
设首先给出以下矩阵

$$\begin{bmatrix} A & b \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

设我们已求出可逆矩阵 $P \in GL(m, \mathbb{Z}), Q \in GL(n, \mathbb{Z})$ 使得

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PAQ & Pb \\ Q & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $PAQ = \mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0]$ 为 A 的 Smith 标准型, 而 $Pb = (\beta_1, \ldots, \beta_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_m)^T$, 则 $Ax = b$ 在变量替换 $y = Q^{-1}x$ 下等价于 $PAQy = Pb$, 即

$$\alpha_1 y_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_r y_r = \beta_r, \qquad 0 = \beta_{r+1} = \beta_{r+2} = \cdots = \beta_m.$$

从而我们有以下结论:

线性丢番图方程组的矩阵变换解法

Claim

(i) $Ax = b$ 有解的充要条件是:
$\alpha_1 \mid \beta_1, \ldots, \alpha_r \mid \beta_r$ 且 $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_m = 0$.
(ii)此时可按以下步骤解方程: 先解出 $y = [\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\beta_r}{\alpha_r}, k_1, \cdots, k_{n-r}]^T$, 其中 $k_i \in \mathbb{Z}$ 为任意常数. 进而通过 $x = Qy$ 求得 x. 事实上 $Ax = b$ 的通解为

$$x = \xi_0 + (k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}), \qquad (k_i \in \mathbb{Z}),$$

其中

$$\xi_0 = Q \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \\ \vdots \\ \frac{\beta_r}{\alpha_r} \\ 0_{n-r} \end{bmatrix}, \qquad \xi_1, \ldots, \xi_{n-r} \text{为 } Q \text{ 的后 } n-r \text{ 列}.$$

ξ_0 是方程 $Ax = b$ 的特解, 而 $\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

举例：重访百鸡问题

Problem

回到百鸡问题，

$$\begin{cases} x + y + 3z = 100 \\ 5x + 3y + z = 100 \end{cases}$$

此时我们要求解的方程是

$$AX = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

而

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

举例：重访百鸡问题

Solution

解：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 100 \\ 5 & 3 & 1 & 100 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 100 \\ 0 & -2 & -14 & -400 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & -2 & -14 & -400 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & -2 & 0 & -400 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

举例: 重访百鸡问题

Solution

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$. 令 $k = 25, 26, 27, 28$, 即得到对应的

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 + 4k \\ 200 - 7k \\ 3k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 75 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 78 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 81 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 84 \end{bmatrix}.$$

注: 《张丘建算经》中写出的"鸡翁每增四, 鸡母每减七, 鸡雏每益三", 就是上面所给出的参数 k 的系数向量的各分量 $4, -7, 3$.

将同余方程组归结为线性丢番图方程组

正如我们前面注意到的, 原本用来求解同余方程 $ax \equiv 1 \pmod b$ 求一术, 稍加变换就可以用来求解丢番图方程 $ax + by = c$, 前一个问题实际上是后一个问题的特例. 类似地, 现在我们既然能够求解任意的丢番图方程组, 特别地, 我们就能求解中国剩余定理中考虑的同余方程组.

Problem

问题: 设 $m_1, \ldots, m_n$ 是给定的正整数, $r_1, \ldots, r_n$ 是给定的整数, 求解

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{m_1}, \\ \quad \cdots, \\ x \equiv r_n \pmod{m_n}. \end{cases}$$

将同余方程组归结为线性丢番图方程组

Solution

分析: 引入辅助变量

$$x_i = \frac{x - r_i}{m_i}, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

则上述同余方程组等价于关于 $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的丢番图方程

$$\begin{cases} x - m_1 x_1 = r_1, \\ \quad \cdots, \\ x - m_n x_n = r_n \end{cases}$$

而这个问题可用方程术愉快地解决!

举例: 重访"鬼谷算"问题

作为例子, 我们来重解"鬼谷算"问题.
如前所述, 通过引进辅助变量

$$x_1 = \frac{x-2}{3}, \qquad x_2 = \frac{x-3}{5}, \qquad x_3 = \frac{x-2}{7},$$

一次同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

的求解等价于下述

Problem

问题: 求解关于 x, x_1, x_2, x_3 的线性丢番图方程组:

$$\begin{cases} x - 3x_1 = 2, \\ x - 5x_2 = 3, \\ x - 7x_3 = 2. \end{cases}$$

举例: 重访"鬼谷算"问题

Solution

此时我们要求解的方程是

$$AX = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

而

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

举例: 重访"鬼谷算"问题

Solution

经七八步初等变换后, 有

$$\begin{bmatrix} A & b \\ I_4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} [I_3, 0] & Pb \\ Q & 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 15 & 105 \\ 0 & 2 & 5 & 35 \\ 0 & 1 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \end{bmatrix}, \qquad Pb = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 15 & 105 \\ 0 & 2 & 5 & 35 \\ 0 & 1 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 105 \\ 35 \\ 21 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -82 + 105k \\ -28 + 35k \\ -17 + 21k \\ -12 + 15k \end{bmatrix}$$

思考题: 动动手

Problem

有一筐鸡蛋,
1个1个拿, 正好拿完;
2个2个拿, 还剩 1 个;
3个3个拿, 正好拿完;
4个4个拿, 还剩 1 个;
5个5个拿, 还差 1 个;
6个6个拿, 还剩 3 个;
7个7个拿, 正好拿完;
8个8个拿, 还剩 1 个;
9个9个拿, 正好拿完.
问*:* 筐里最少有多少鸡蛋*?*

Smith 标准型的其它应用

除了求解线性丢番图方程组, Smith 标准型还有多种应用, 特别要指出的, 有:

- 有限生成 Abel 群的结构定理(见[5], 应用于拓扑学中的同调群, 就得到相应的拓扑不变量, 如 Betti 数就是相应的整数矩阵的秩.

Abel, 阿贝尔, *1802–1829*, 挪威数学家. *Abel* 群即交换群. *20* 世纪数学的一个主旋律*(*见 *Atiyah* 的通俗报告《二十世纪的数学》*)*, 就是伴随着从数*(*经典力学*)*到矩阵*(*量子力学*)*的推广而出现的非交换化*;* 例如 *Maxwell* 理论的非交换化即 *Yang-Mills* 理论*;* $ax = b$ 的最简单的非交换化版本*(*从整数到整数矩阵*)*即我们这里所讨论的丢番图方程 $Ax = b$*(*也等价于 $AX = B$*)*.

The most natural way to a "noncommutative" generalization of some theory is to replace numbers by matrices.——沙法列维奇

- 量纲分析(Dimensional Analysis, 鉴于其重要性, 我们将专门撰文详细讨论.)

Smith 标准型的多项式版本及其应用

上一节关于整数的结果，可以平移到多项式. 特别的，对于以多项式为元素的矩阵 $A \in M(n \times n, F[\lambda])$，我们也有 Smith 标准型，这个结果在高等代数教材(例如，见北京大学数学系编《高等代数》第八章)中一般称为 λ-矩阵在初等变换下的标准型. 该结果与下述

Theorem

定理: 设 $A, B \in M(n \times n, F)$，则 A, B 相似当且仅当 $\lambda I - A, \lambda I - B \in M(n \times n, F[\lambda])$ 有相同的不变因子.

联合使用，可以得到许多非凡的结果，例如:

Corollary

推论1: 方阵 A 与其转置 A^T 相似.

Corollary

推论2: 在相似变换下，任意复方阵有 *Jordan* 标准型.

整数与多项式之类比

整数(有理数)与多项式(有理函数)有诸多相似之处，例如都有带余除法，我们这里的重点放在整数，多项式的情形读者可以自行类推. 例如，可以发现，中国剩余定理的多项式版本并不是拉格朗日插值定理，而是:

Theorem (中国剩余定理的多项式版本)

设 $F[X]$ 中的多项式 $p_1(X), \ldots, p_n(X)$ 两两互素. 对每个 $i = 1, \ldots, n$，记 $p_i(X)$ 的次数为 d_i，令 $D = d_1 + \cdots + d_n$. 设多项式 $r_1(X), \ldots, r_n(X)$ 满足: 对每个 $i = 1, \ldots, n$ 有 $r_i(X)$ 的次数小于 d_i. 则存在唯一的次数小于 D 的多项式 $p(X)$，满足对每个 $i = 1, \ldots, n$ 有，$p(X)$ 除以 $p_i(X)$ 的余式等于 $r_i(X)$.

据 19 世纪数学家、数学史家 F. Klein 讲，首先提出数论与函数论之类比的，是 Kronecker，而由 Dedekind 和 H. M. Weber 发表于 1882 年的一篇长文中首次阐明. 这一主旋律发展至今，演变成著名的 Langlands 纲领. 一个通俗的介绍，可见 E. Frenkel《爱与数学》.

用矩阵变换求解线性方程组

几乎不用说的是, 上述方法也可以用来求解通常的线性方程组 $Ax=b$, 其中 $A\in M(m\times n,F), b\in F^m, x\in F^n$. 其原理如下:

Algorithm

解线性方程组 $Ax=b$ 的方程术: 设我们求出可逆矩阵 $P\in GL(m,F), Q\in GL(n,F)$ 使得

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & b \\ I_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PAQ & Pb \\ Q & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $PAQ=\mathrm{diag}[1,\ldots,1,0,\ldots,0]$ 为对角元全部为 1 的 $m\times n$ 矩阵, $Pb=[\beta_1,\ldots,\beta_r,\beta_{r+1},\ldots,\beta_m]^T$.
则 $Ax=b$ 在变量替换 $y=Q^{-1}x$ 下等价于

$$y_1=\beta_1,\cdots,y_r=\beta_r, \qquad 0=\beta_{r+1}=\beta_{r+2}=\cdots=\beta_m$$

由此确定出 $y'=(\beta_1,\ldots,\beta_r,k_1,\cdots,k_{n-r})$, 其中 $k_i\in F$ 为任意常数. 进而通过 $x=Qy$ 求得 x.

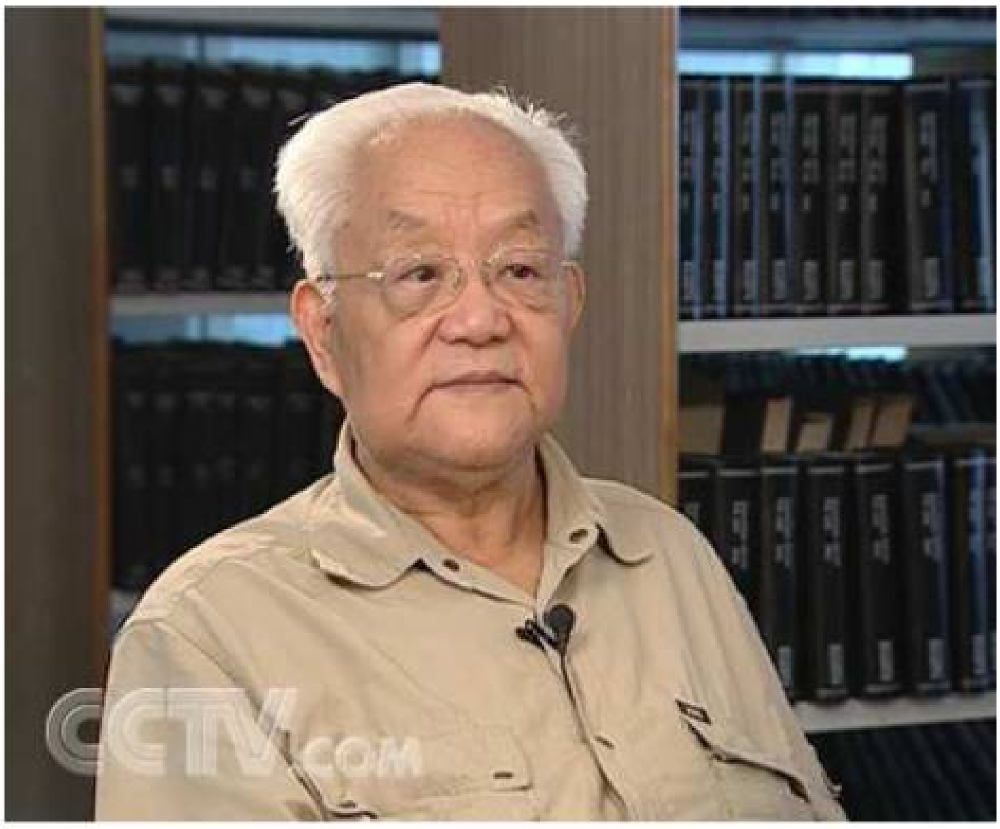
吴文俊先生对刘徽的评价

上述方法归于 刘徽(225 - 295), 它比《九章》中的“方程术”(高斯消去)更漂亮. 因为它同时使用行变换和列变换, 从而无须回代.

(吴文俊: 纪念刘徽注《九章算术》1750 周年国际学术研讨会)

《九章算术》是中国古代最重要的数学经典, 刘徽在 *1750* 年前撰写的《九章算术注》是最重要的《九章注》. 它不仅为《九章》提供了理论基础, 而且贡献了很多深刻的创造. 如他天才地提出并证明了阳马和鳖臑的体积之比为 *2* 比 *1* 的原理, 同时将多面体体积理论建立在这一原理的基础之上, 这种思想与希尔伯特著名的 *23* 个问题中第三问题若合符节. 为表彰他的历史功绩, 本人曾提议把这个原理称为刘徽原理, 获得了学术界的赞同. 又如刘徽创立割圆术, 以极限思想和无穷小分割方法证明圆面积公式, 同时开创了求圆周率的科学方法, 为后来祖冲之求出领先世界近千年的圆周率开辟了道路. 刘徽的非凡创造和科学精神，为以后我国古代数学的进步和发展奠定了基础, 也奠定他在世界数学史上的大师地位. 从对数学的贡献的角度来衡量, 刘徽应该与欧几里得、阿基米德等数学大师相提并论.

吴文俊先生



吴文俊（1919-2017）

CCTV《大家》访谈吴文俊(搜索"数学家吴文俊: 我的不等式")

> 总的一句话, 中国这个数学的道路跟西方欧几里得的传统公理化的数学道路是不一样, 中国的数学是另外一套, 中国没有什么公理, 没有什么公理系统, 根本不考虑定理. 中国主要是解决问题, 这是我的分析了. 开头也是不懂, 因为它的古文的文字我就看不懂, 我先看通俗的, 然后再看原文, 因为古文的专门名字跟现在是完全大不相同了. 就这样慢慢一点一点弄懂. 所以中国的古代数学, 为了要解决形形色色的问题, 自然而然引到解方程. 那么中国的解方程它是这样子的, 是一步一步地做, 第二步怎么样, 第三步怎么样, 要用现代的语言来讲, 就是程序. 根据算法, 用现在的话, 你就可以变成程序, 输到机器里面, 让它一步一步去做, 最后给出要求的解答, 这是中国古代的数学.

关联⇝:《6名往届高考状元1分险胜智能机器人》,2017年文科数学,
结果: 状元平均 135 分(55分钟完成); 机器人 134 分(10分钟搞定)]

反思: 中国古代数学为什么没有素数的观念?

一言以蔽之, 中国古代数学是“算”出来的, 是“寓理于算”(李继闵语). 素数的观念中国古人未必没有, 但他们不会明确提出来, 因为他们根本没有一个算法来判定一个给定的数是否为素数. 吴文俊先生特别强调, “中国古代数学, 就是一部算法大全. ”中国古代数学只有一个关键字, 即术, 也就是吴文俊先生访谈中提到的程序或算法. 所以我们有许多经典都带一个术字: 《九章算术》, 《缀术》(祖冲之, 祖暅父子, 已失传) 而《数书九章》的原名也叫《数术大略》.

中国古代数学中, 没有单纯的“存在”一说, 所有东西都是可算、可构造的, 否则就没有立足之地, 如素数, 算术基本定理(照此哲学, 中国古代数学家不大可能接受上帝与魔鬼的观念, “子不语怪力乱神”.). 这是中国古代数学的传统(构造性、机械化)! 正是这一传统决定了, 中国古代数学无素数、但有互素的概念.

因此像我们前面引用的对中国剩余定理的通常表述, 都不能视为是正宗的中国古代数学. 中国古代数学的表述, 从来都是“怎么说就怎么做”, 而绝不会出现像西方数学中偶尔出现的“嘴上说一套, 做的又是另一套”的情况, 例如“待定系数法”(参见[8]).

正版的中国剩余定理(请支持正版!)

Theorem

中国剩余定理(正版): 设 $m_1, \ldots, m_n$ 是给定两两互素的正整数, 其乘积 $m_1 \cdots m_n = M$. 又设 $r_1, \ldots, r_n$ 为给定的整数. 对每个 $i = 1, \ldots, n$, 令 k_i 是用求一术确定的方程 $\frac{M}{m_i} k_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ 的解, 则

$$x = \left(\frac{M}{m_1} k_1 r_1 + \cdots + \frac{M}{m_n} k_n r_n\right) + kM \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

是以下同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{m_1}, \\ \quad \cdots, \\ x \equiv r_n \pmod{m_n}. \end{cases}$$

的通解.

复兴版的中国剩余定理(请宣传复兴版！)

Theorem

中国剩余定理*(复兴版)*: 设 $m_1, \ldots, m_n$ 是给定的正整数, $r_1, \ldots, r_n$ 为给定的整数. 则同余方程组

$$\left\{\begin{array}{ll} x \equiv r_1 & \pmod{m_1}, \\ \quad \cdots, & \\ x \equiv r_n & \pmod{m_n}. \end{array}\right. \tag{1}$$

的解 x, 由线性丢番图方程组

$$\left\{\begin{array}{l} x - m_1 x_1 = r_1, \\ \qquad \cdots, \\ x - m_n x_n = r_n \end{array}\right. \tag{2}$$

的解 $(x, x_1, \ldots, x_n)$ 的第一个分量确定. 并且 *(2)* 可以用"方程术"求解.

吴文俊语录

吴文俊: 中国古代数学自成一体, 不仅与西方理论是完全不同的思路, 而且对现代数学很有启迪. *1977* 年, 我发表了《中国古代数学对世界文化的伟大贡献》, 明确指出近代数学之所以能发展到今天, 主要是靠中国*(*式*)*的数学而非希腊*(*式*)*的数学, 决定数学历史发展进程的主要是靠中国*(*式*)*的数学而非希腊*(*式*)*的数学. *1987* 年我发表了更加重要的《中国传统数学的再认识》, 引起了数学界的极大兴趣. 这是对数学史正本清源的研究, 使人们认识到中国古代数学曾有过辉煌成就. 最早的几何学、最早的方程组、最古老的矩阵等等, 翻开历史, 中国曾经是一个数学的国度, 中国数学在世界上的位置远比今天靠前. 祖冲之、刘徽、《九章算术》、《周髀算经》、《四元玉鉴》 等一批大家和著作, 使中国数学曾经处于世界巅峰. 正是由于这些辉煌, 中国数学, 不仅要振兴, 更要复兴*!*

——黄祖宾, 走进吴文俊院士

张景中院士解鸡兔同笼问题

Problem

鸡兔同笼问题: 设鸡兔同笼, 共有*35* 个头, *94* 条腿. 问: 鸡、兔各几只?

对于这个问题, 张景中院士提出了一个巧妙的解答, 没有学过方程的小学生就能明白:

Solution

鸡有 *2* 条腿, 兔有 *4* 条腿, 出现了不平等. 但实际上, 也是平等的: 本来鸡也有 *4* 条"腿", 只是其中 *2* 条是翅膀. *35* 个头本来应该有 $35 \times 4 = 140$条腿, 为什么只有 *94* 条腿呢? 因为翅膀不算腿, 所以有 $140 - 94 = 46$ 只翅膀, 从而鸡有 $46 \div 2 = 23$ 只, 兔子有 $35 - 23 = 12$ 只.

小结

Summary

本报告主要讲了两个问题物不知数问题与百鸡问题及其推广, 我们指出, 百鸡问题的推广实际上包含了物不知数问题的推广. 而用以求解百鸡问题的方法其实, 就是求解鸡兔同笼问题的方法, 即矩阵变换, 这可追溯到《算术九章》的方程术.

(吴文俊《中国数学史的新研究》, 1986 年 ICM 报告)

毫无疑问, 代数乃是中国传统数学更为发达的分支. 应该指出, 在古代, 代数实质上等同于方程求解. 解方程的问题似来源于两个方面. 一个来源是商业贸易和货物交换, 它导致远古的盈亏术直到《九章算术》第八章所描述的方程术. 这一章详述了线性联立方程组的解法并引进了负数. 按现代语言, "方程"这一术语的最好解释就是"方阵". 实际上, "方"的字面意义为正方形或矩形. "程", 按刘徽在《九章算术注》里的解释, 就是把数据在盘上摆成矩阵: "并列为行, 故谓之方程". 因此, 解法(方程术)便是纵横移动算筹, 按现代术语, 那就是消去法(矩阵变换). 在《九章算术注》中, 可以找到逐步将方阵化为标准型的详细步骤的例子.

延伸阅读

[1]蔡聪明, 谈韩信点兵问题, 《科学月刊》第29卷第9期. 电子版可见数学知识网站: http://episte.math.ntu.edu.tw/
[2]高斯, 《算术探索》, 潘承彪, 张明尧译, 哈尔滨工业大学出版社, 2011 年.
[3]华罗庚, 《从孙子的"神奇妙算"谈起》, 科学出版社, 2002年.
[4]华罗庚, 《数论导引》=《华罗庚文集: 数论卷 II》, 科学出版社, 2010年.
[5]N. Jacobson(雅各布森, 贾柯勃逊), 《基础代数》, 《抽象代数学》. 关于模论的章节.
[6]林开亮, 从金庸武侠到陈省身, 微信公众号数学爱好者俱乐部.
[7]林开亮, 中国古代数学只有一个关键字, 你知道吗? 微信公众号环球科学, 中科院物理所.
[8]林开亮, 教你一招第3期: 化非齐次常系数线性微分方程为代数同余方程, 微信公众号数学纵贯线(ID: we-love-math).
[9]林开亮, 数学, 在你心中是问号还是惊叹号? 微信公众号赛先生.
[10]G. Pólya(波利亚), 《数学的发现》第 4 章, 叠加.

致谢

Acknowledgement (致谢)

- 感谢天津大学物理系刘云朋教授的邀请, 使我有机会回母校跟各位老师和同学交流. 准备这个报告, 勾起我对青春岁月的许多美好回忆. 报告中讨论的问题("物不知数"、"鸡兔同笼")与技术(矩阵的初等变换), 我不止一次被问到过, 也多次用过, 这一次有机会借准备报告而厘清了脉络.
- 感谢理学院各位老师特别是周泽华教授、田代军教授、戴伍圣教授、史国良教授对我一直以来的悉心栽培和支持鼓励.
- 感谢美国劳伦斯伯克利国家实验室邵美悦博士, 新加坡国立大学数学系曾衡发教授, 上海交通大学数学系吴耀琨教授, 北京交通大学数学系郑豪博士, 中央民族大学数学系王兢教授, 解放军电子工程学院周青松教授, 香港城市大学电子工程系陈关荣教授, 西北大学数学系曲安京教授, 浙江大学数学系蔡天新教授在笔者准备报告过程中提供的帮助!
- 笔者受益的著作很多, 特别要提到的, 是吴文俊先生论中国古代数学史的文章和钱宝琮先生的《中国数学史》.

剧终

谢谢各位老师和同学聆听笔者的报告，请大家多多指教！

联系方式:　邮箱　kailiang_lin@163.com;
　　　　　微信公众号　数学纵贯线 (ID: we-love-math)

我的微信公众号

欢迎各位喜欢分享美妙数学的朋友投稿，邮箱如上！