المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

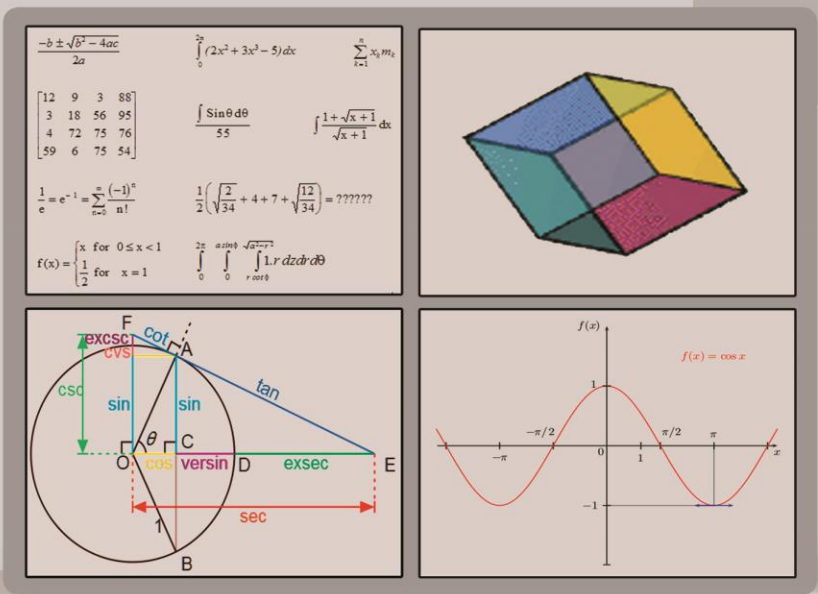
المعاهد الصناعية الثانوية

الحقيبة التدريبية:

الرياضيات العامة

022 ريض

في جميع التخصصات



مقدمة

الحمد لله وحده،والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد بن عبدالله وعلى آله وصحبه، وبعد:

فتسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على الله ثم على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي؛ لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً .

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته، وقد تمثّلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثّل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثّل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعيةً في تحقيق متطلباته الأساسية .

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية **الرياضيات التمهيدية** لمتدربي دبلوم للمعاهد الصناعية الثانوية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص .

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب ميسر يخلو من التعقيد، مدعم بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات .

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه، إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

الفهـــرس

تمهيد

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد الأنبياء والمرسلين، نبينا محمد عليه وعلى آله وصحبه أجمعين أفضل الصلاة وأزكى التسليم، أما بعد :

فبتوفيق من الله، تم تأليف هذه الحقيبة التدريبية الخاصة بالرياضيات التمهيدية للفصول الأول والثاني والثالث للمعاهد المهنية الصناعية الثانوية، و قد جاءت الحقيبة التدريبية منسجمة مع سياسة التدريب التقني والمهني في المملكة، من خلال تحقيقها للأهداف العامة للتدريب التقني والمهني، كما جاءت وفق المقرر الجديد الذي اعتمدته المؤسسة العامة للتدريب التقني و المهني مؤخراً.

ولقد راعينا في هذه الحقيبة أن تكون المفاهيم الأساسية سهلة و دقيقة في نفس الوقت ، وعرضها بصورة تساعد المتدرب على التعلم الذاتي، ولهذا فإننا نوصي المتدرب أن يولي اهتماماً جاداً بالتعريفات و النظريات الأساسية، وأن يتأنى في فهمها الفهم الصحيح، وأن يبذل جهدا حقيقياً في حل التدريبات و التمارين لتتأتى له ثمرة دراسته .

تضم هذه الحقيبة وحدتين هما :

الوحدة الأولى	حساب المثلثات
الوحدة الثانية	مبادئ الإحصاء

أملنا أن تحقق هذه الحقيبة الهدف الذي من أجله أُعدِّت، وهو إكساب المتدرب المعارف و المعلومات الرياضية التي لها صلة بمجال دراسته وعمله، و توسيع مدارك المتدرب و تنمية ملكة التفكير و الإبداع لديه .

ختاماً نأمل أن يوافينا إخواننا المدربون بما يرونه من ملحوظات حول الحقيبة من خلال التطبيق الميداني لها .

والله الموفق

الوحدة الأولى

حساب المثلثات

الهدف العام :
القدرة على إيجاد بعض الأبعاد المعقدة بواسطة الدوال المثلثية .

الأهداف التفصيلية:
عندما تكمل هذه الوحدة يجب على المتدرب أن يكون قادراً وبكفاءة على:
١ـ معرفة الدوال المثلثية.
٢ـ استخدام المثلث القائم الزاوية في إيجاد قيم الدوال المثلثية.

٣ـ استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد قيمة الدوال المثلثية و الزوايا.
٤ـ حساب الارتفاعات والأبعاد .

حساب المثلثات

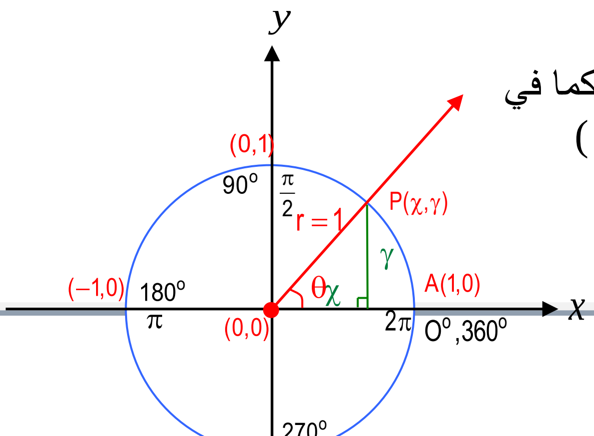
هو فرع من فروع الرياضيات يعالج العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات والخصائص، والتطبيقات العملية للدوال المثلثية، وينقسم حساب المثلثات إلى فرعين: حساب المثلثات المستوية ويتعامل مع أشكال تقع بأكملها في مستوى واحد، وحساب المثلثات الكروية ويتعامل مع المثلثات التي تعتبر جزءا أو مقطعا من سطح كرة .

وقد كانت أولى التطبيقات العملية لحساب المثلثات في مجالات الملاحة والمساحة والفلك حيث كانت المشكلة الكبرى في كل هذه المجالات تحديد مسافة غير معلومة مثل المسافة بين الأرض و القمر أو مسافة لا يمكن حسابها بصورة مباشرة مثل المسافة التي تغطي بحيرة كبيرة.

ومن بين التطبيقات العملية الأخرى لحساب المثلثات استخدام هذا العلم في الفيزياء والكيمياء وكل فروع الهندسة تقريباً خاصة في دراسة الظواهر المتكررة مثل الموجات الصوتية أو تدفق تيار متناوب.

الدوال المثلثة الأساسية :

إذا رسمنا دائرة على المستوى الإحداثي كما في الشكل (1) مركزها نقطة الأصل $(0,0)$ ونصف قطرها وحدة الطول فإننا نسميها دائرة الوحدة و معادلتها $x^2+y^2=1$



و محيطها يساوي 2π
ولو رسمنا الزاوية $\angle AOP$ بوضع قياسي ،
وكانت النقطة $P(x,y)$ نقطة تقاطع الضلع النهائي
للزاوية مع دائرة الوحدة و كان قياس الزاوية يساوي θ
فإنه يمكن تعريف الدوال الآتية:

1) دالة الجيب $(\sin e)$ ويرمز لها بالرمز $(\sin)$ وتعرف كالتالي:

$$\sin\theta = y$$

2) دالة جيب التمام $(Cosine)$ و يرمز ل ها بالرمز (Cos) و تعرف كالتالي:

$$Cos\theta = x$$

3) دالة الظل $(Tangent)$ و يرمز لها بالرمز (Tan) وتعرف كالتالي:

$$Tan\theta = \frac{y}{x}$$

بمعنى أن

$$Tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta}$$

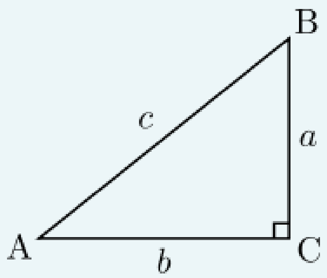
و تسمى هذه الدوال بالدوال المثلثية الأساسية.

نظـرية فيثــاغــورث :

نـظــريــة : في أي مثلث قائم الزاوية يكون مجموع مربعي طولي الضلعين المحاذيين للزاوية القائمة يساوي مربع طول الوتر.

سُميت هذه النظرية على العالم فيثاغورث الذي كان رياضياً، وفيلسوفاً، وعالم فلك في اليونان القديمة .

إذا كان لدينا مثلث ABC قائم الزاوية في C، حسب نظرية فيثاغورث يكون لدينا:



$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

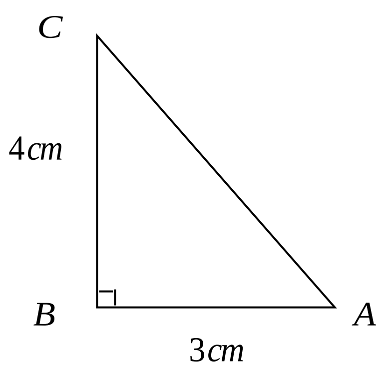
تستخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد طول ضلع مثلث قائم الزاوية بمعرفة طول الضلعين الآخرين.

مثـــال

في مثلث ABC قائم الزاوية في B اذا كان $|BC|=4cm$, $|BA|=3cm$

أوجد $|AC|$.

الحــل : من نظرية فيثاغورس :



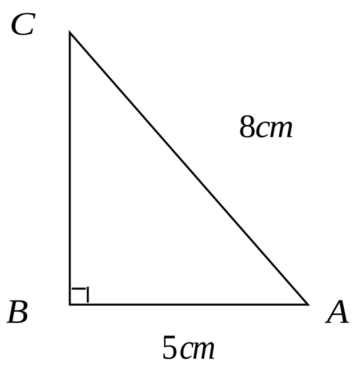
$$|AC|^2 = |BA|^2 + |BC|^2$$
$$|AC|^2 = 4^2 + 3^2$$
$$|AC|^2 = 16+9$$
$$|AC|^2 = 25$$
$$\sqrt{|AC|^2} = \sqrt{25}$$
$$\therefore |AC| = 5cm$$

مثـــال

في مثلث ABC قائم الزاوية في B اذا كان $|AC|=8cm$, $|BA|=5cm$

أوجد $|BC|$.

الحـــل : من نظرية فيثاغورس :



$$|AC|^2 = |BA|^2 + |BC|^2$$
$$8^2 = 5^2 + |BC|^2$$
$$64 = 25 + |BC|^2$$
$$64-25 = |BC|^2$$
$$39 = |BC|^2$$
$$\sqrt{39} = \sqrt{|BC|^2}$$
$$|BC| = 6.24cm$$

تطبيق فصلي (1)

في مثلث ABC قائم الزاوية في B اذا كان

$|AC|=10cm$, $|Bc|=6cm$ أوجد $|BC|$ ؟

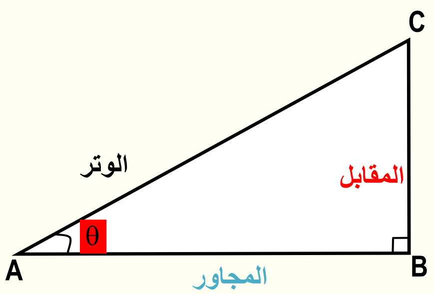
العلاقة بين الدوال المثلثية و المثلث قائم الزاوية

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية ، فان الدوال المثلثية تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور للزاوية .

$$Sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$Cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$Tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

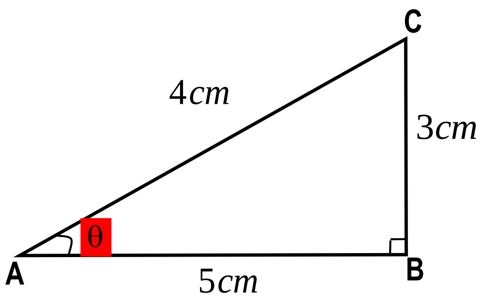


نطلق على قيم الدوال المثلثية في المثلث قائم الزاوية ((النسب المثلثية)) وذلك لأنها نسب بين أطوال أضلاع المثلث القائم.

مثـــال

في الشكل المقابل أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية θ في المثلث ABC :

الحــل :



$$Sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{3}{5}$$

$$Cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{4}{5}$$

$$Tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{3}{4}$$

مثـــال

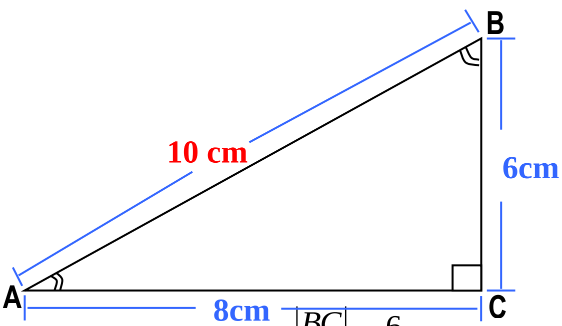
ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه $|BC| = 6cm$, $|AC| = 8cm$

أوجد ما يلي : $SinA$, $CosA$, $TanA$, $SinB$, $CosB$, $TanB$

الحــل :

من نظرية فيثاغورس :

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$
$$|AB|^2 = 8^2 + 6^2$$
$$|AB|^2 = 64 + 36$$
$$|AB|^2 = 100$$
$$\sqrt{|AB|^2} = \sqrt{100}$$
$$\therefore |AB| = 10 \ cm$$



$$Sin A = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{6}{10} \quad , \quad Cos A = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{8}{10} \quad , \quad Tan A = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{6}{8}$$

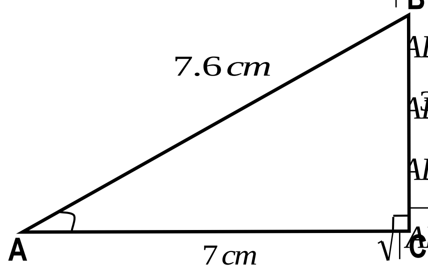
$$Sin B = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{8}{10} \quad , \quad Cos B = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{6}{10} \quad , \quad Tan B = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{8}{6}$$

مثـــال

ABC مثلث قائم الزاوية في B فيه $Tan\,A=\frac{3}{7}$ أوجد $Sin\,A$

الحــل :

$$\because\ Tan\,A=\frac{3}{7}=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$



$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$$
$$|AB|^2=7^2+3^2$$
$$|AB|^2=49+9$$
$$|AB|^2=58$$
$$\sqrt{|AB|^2}=\sqrt{58}$$
$$\therefore |AB|=7.6\ cm$$

$$Sin\,A=\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{3}{7.6}$$

تطبيق فصلي (2)

ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه $|AC|=5cm\ ,\ |BC|=7cm$

أوجد ما يلي : $Sin\,A\,,\,Cos\,A\ \ ,\ Tan\,B$

استخدام الحاسبات :

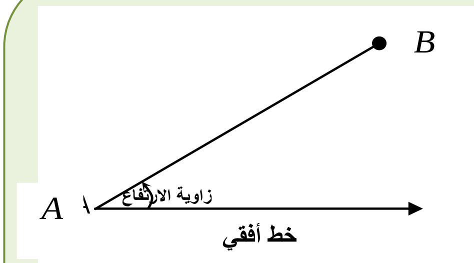
لقد وفرت الحاسبات الصغيرة والتي يمكن بواسطتها الحصول على قيم الدوال المثلثية و اللوغاريتمات وغيرها من العمليات الحسابية الأخرى الكثير من الجهد على الدارسين و الباحثين، ويمكن استخراج قيم الدوال المثلثية بواسطة مفاتيح لهذه الدوال وهي:

$\boxed{\text{Sin}}$, $\boxed{\text{Cos}}$, $\boxed{\text{Tan}}$ ، و لتعدد أنواع الحاسبات ذات الطرق المختلفة فإنه يصعب علينا هنا أن نوضح كيفية استعمال كل آلة، لكن يوجد مع كل حاسبة كتيب تعليمات يشرح طريقة استعمالها كما يمكن للمتدرب الاستعانة بمعلمه في ذلك .

زاوية الارتفاع :

زاوية الارتفاع من النقطة A إلى النقطة B (A أعلى) :

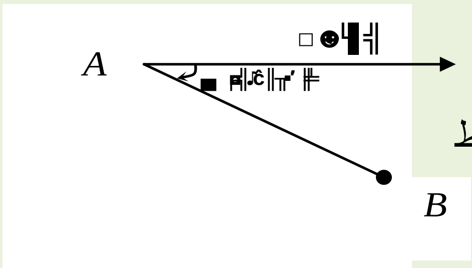
هي الزاوية الحادة التي يكونها المستقيم AB و الخط الأفقي المار بالنقطة A .



زاوية الانخفاض :

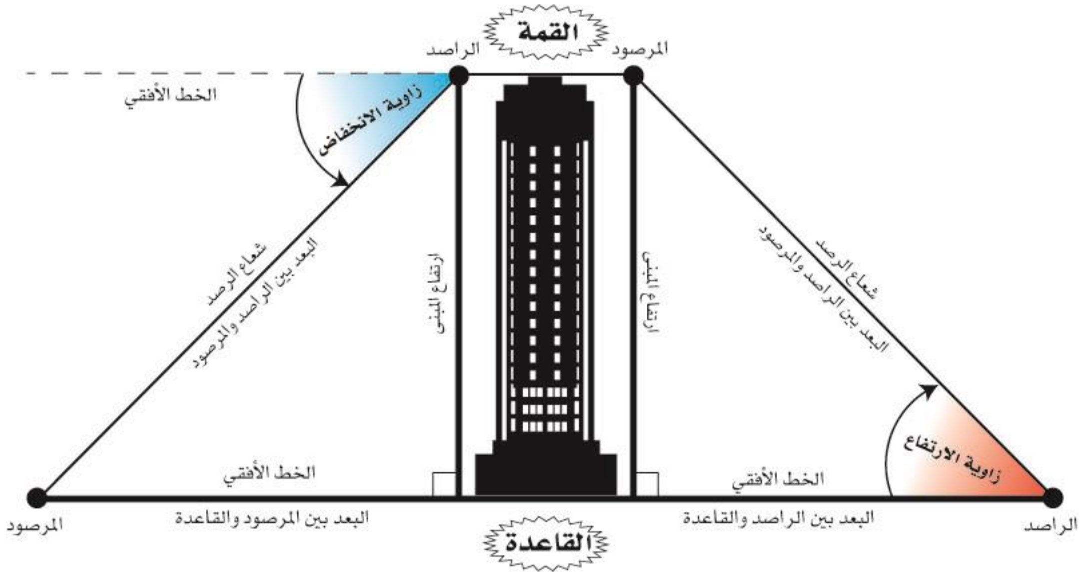
زاوية الانخفاض من النقطة A إلى النقطة B (A أسفل) :

الزاوية الحادة التي يكونها المستقيم AB و الخط الأفقي المار بالنقطة A .



ملحوظة: زاوية الارتفاع و الانخفاض تقاس دائما من الأفق.

الشكل التالي يوضح زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض :



ملاحظة: زاوية الارتفاع (أو الانخفاض) تكون محصورة بين الخط الأفقي المار بالراصد (أوالمرصود) وشعاع الرصد .

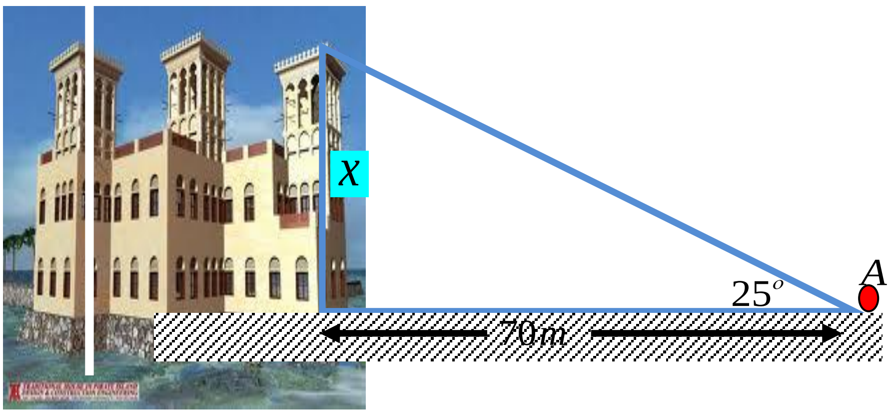
مثـــال

من نقطة A تبعد عن قاعدة مبنى 70 متراً ، نجد أن زاوية الارتفاع للمبنى هي 25^o فما ارتفاع المبنى ؟

الحـــل :

نفرض أن x هي ارتفاع المبنى

و $\theta = 25^\circ$ زاوية الارتفاع



$$Tan\,25^{o} = \frac{x}{70}$$

$$\Rightarrow \quad x = (70\,)Tan\,25^{o}$$

$$x = (70\,)\,(0.466)$$

$$x = 32.62\,m$$

$\therefore$ ارتفاع المبنى هو 32.62 متراً

مثـــال

سلم سيارة إطفاء طوله 17 متراً يصل إلى سطح مبنى ارتفاعه 14 متراً عن سطح الأرض، ما الزاوية التي يُكوِّنها السلم مع سطح الأرض ؟

الحــل : نفرض أن θ هي الزاوية التي يكونها السلم مع سطح الأرض

$$Sin\theta = \frac{14}{17}$$

$$\Rightarrow \quad Sin\theta = 0.82353$$

$$\Rightarrow \quad \theta = Sin^{-1}(\,0.82353)$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 55.44^{o}$$

$\therefore$ زاوية ارتفاع السلم هي 55.44^{o}

تطبيق فصلي (3)

ترتفع قمة برج إرسال $120m$ فوق سطح البحر . إذا كانت زاوية الانخفاض من قمة البرج إلى سفينة عابرة 25^{o} . أوجد المسافة من قاعدة البرج إلى السفينة .

تمـــــــارين عــــامــــــة

1)مثلث ABC قائم في B فيه $|BC|=6cm$, $|AC|=10cm$ ، أوجد النسب المثلثية التالية: $TanC$, $CosC$, $SinC$, $TanA$, $CosA$, $SinA$

2)المثلث ABC قائم الزاوية في C فيه $Cos\,A=\frac{3}{5}$, $|BC|=9cm$.

أ- أوجد طول $|BC|$, $|AB|$

ب- أوجد النسب المثلثية التالية

$Sin\,A$, $Cos\,A$, $Tan\,A$, $SinB$, $CosB$, $TanB$

3) من نقطة على بعد $100m$ من قاعدة برج كان قياس زاوية ارتفاع قمة البرج 35^o .
أوجد ارتفاع البرج.

4) إذا كان قياس زاوية ارتفاع قمة مبنى من نقطة على بعد 50 m من قاعدته يساوي 58^o فما هو ارتفاع المبنى ؟ وإذا رصد رجل من قمة المبنى نفسه جسماً يبعد عن قاعدة المبنى 40m فأوجد زاوية انخفاض الجسم عندئذ .

الوحدة الثانية

الإحصاء

الهدف العام :

معرفة علم الإحصاء واستخداماته في تسهيل معرفة البيانات عن طريق المدرج التكراري والدوائر وكذلك استخدامات الوسط الحسابي .

الأهداف التفصيلية:

عندما تكمل هذه الوحدة يكون المتدرب قادراً وبكفاءة على :

١ـ رسم المدرج التكراري والدوائر البيانية .

٢ـ إيجاد قيمة الوسط الحسابي للبيانات المبوبة والغير مبوبة .

الإحـــصـــــاء

مقدمة :

يُعتبر علم الإحصاء في الوقت الحالي واحداً من أهم العلوم الحديثة التي تلعب دوراً حيوياً في كثير من العلوم والدراسات المختلفة. كما يُعتبر الإحصاء من أقدم العلوم حيث ظهر مع حاجة الإنسان الأولى للتعامل مع القيم والأعداد لتسيير الحياة اليومية. فالتاجر يسعى إلى حصر وحفظ البيانات المتعلقة بتجارته والمزارع يقوم دوماً بإحصاء الإنتاج والمعلومات الأخرى المتعلقة كعدد الأشجار وأوقات الحصاد والبذر وغيرها من المعلومات والبيانات ذات العلاقة.

ومع التطور الهائل في العلوم كافة في أواخر القرن العشرين تطور علم الإحصاء ليستفيد من تقنيات الحاسب الآلي بشكل يجعله العلم الأكثر تداخلاً مع العلوم الأخرى المختلفة، حيث أصبح يستخدم علم الإحصاء في العلوم التجارية وعلوم الطب والهندسة والأدب وجميع العلوم الأخرى دون استثناء. كما ساهم عصر المعلومات والانفتاح العالمي الحديث في إبراز أهمية تفعيل عملية التعامل مع البيانات بأسلوب يضمن السيطرة عليها وقراءتها، مما كان له الأثر الواضح على تطور علم الإحصاء كونه العلم الذي يحقق تلك الغاية. كما اتجهت كثير من العلوم والدراسات الأكاديمية والبحثية لاسيما التطبيقية إلى استخدام علم الإحصاء من خلال حصر بيانات مشكلة البحث والتعامل معها إحصائياً للوصول إلى فهم أفضل وحلول موضوعية.

يتم الاستفادة من علم الإحصاء في مجالات متنوعة تشمل ميادين عديدة كالصناعة والزراعة والطب والبحوث وغيرها من مجالات الإدارة والأعمال والعلم بشكل عام. ويتم

تطبيق الأساليب الإحصائية في الجوانب المختلفة للصناعة كمراقبة جودة المنتجات وتسويقها والتخزين وتشغيل خطوط الإنتاج. كما يتم استخدام علم الإحصاء في المجال الطبي لدراسة الأمراض المختلفة والبحث في مسبباتها وطرق علاجها. وفي مجال الزراعة يتم بحث إحصاءات الثروة الحيوانية والنباتية ودراسة العلاقة بين أنواع الأسمدة والأساليب الزراعية المختلفة وزيادة الإنتاج. كما يتم دراسة السكان والمساكن من خلال الإحصاء الديموجرافي، حيث يتم التركيز على القوى العاملة وخصائصها والأجور والدخل والإنفاق. أما في مجال الأعمال والتجارة فان الإحصاء يلعب دوراً حيوياً يتمثل في دراسة السوق واتجاهات المستهلكين ودراسات الأسعار وكميات لإنتاج.

والإحصاء في اللغة يعنى "العد الشامل" حيث أنه يتعامل مع الأعداد أو البيانات الكميـة ، فنحن إذا أردنا جمع بيانات عن شيء ما أو مكان معين مثل مدرسة أو جامعة أو مستشفى مثلاً فإن ذلك يتم بإحدى صورتين الأولى كيفية، والثانية كمية .

وعلم الإحصاء يتعامل مع البيانات الكمية أو الرقمية فقط، ويمكنه أيضاً التعامل مع البيانات الكيفية فعلم الإحصاء يتعامل مع الظواهر أياً كان نوعها تعاملاً كمياً وكيفياً أيضاً ، ذلك لأن الأرقام لابد أن يكون لها مدلولات، فالتعامل الكيفي يترتب عليه التعامل الكمي والعكس في كثير من الحـالات .

تـعــريف : علم الإحصاء هو ذلك الفرع من العلوم الذي يختص بالطرق العلمية لجمع البيانات و تنظيمها و تلخيصها و عرضها وتحليلها؛ وذلك للوصول إلى نتائج مقبولة و قرارات سليمة على ضوء هذا التحليل .

من التعريف السابق لعلم الإحصاء يتضح لنا أن العمليات الإحصائية تتم في أربع خطوات تتمثل في :

١ ـ جمع البيانات الرقمية أو العددية .

٢ ـ تنظيم البيانات في صورة جداول (العرض الجدولي) أو رسوم بيانية (العرض البياني) ، أو الاثنين معاً .

٣ ـ وصف البيانات باستخدام مفاهيم إحصائية معينة .

٤ ـ الاستدلال من البيانات على نتائج معينة يراد الوصول إليها .

الجدول والتوزيع التكراري

يهدف التوزيع التكراري إلى تبسيط العمليات الإحصائية وذلك بتبويبها في صورة مناسبة تيسر إجرائها بسرعة ودقة، ويهدف أيضًا إلى إعادة صياغة البيانات العددية صياغة علمية توضح أهم مميزاتها الرئيسية وذلك بعرض الظواهر الرقمية بطريقة مبسطة تعتمد على تبويبها .

العلاقات التكرارية هي نوع من الإحصاء البسيط جدًا لمعرفة تكرار كل درجة وردت في سلسلة من الأرقام، وتعتمد فكرة تنظيم البيانات في جدول تكراري على حساب عدد مرات تكرار الأعداد، وأفضل طريقة لإجراء التكرار هي طريقة "العلامات التكرارية" التي تعتمد على كتابة خط مائل (/) أمام العدد في كل مرة يتكرر فيها، وعندما يبلغ عدد الخطوط خمسة فإننا نكتب الخط الخامس في عكس ميل الخطوط الأربعة بحيث يتقاطع معها جميعًا ويحولها بذلك إلى حزمة خماسية من الخطوط المائلة .

مثـــال

تمثل البيانات التالية تقديرات 25 طالبًا في مادة الإحصاء وهي :

جيد	مقبول	جيد جدًا	مقبول	ممتاز
مقبول	جيد	ضعيف	جيد	جيد جدًا
جيد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد
مقبول	جيد	مقبول	جيد	جيد جدًا
ضعيف جدًا	مقبول	ضعيف جدًا	ضعيف	مقبول

المطلوب : ضع هذه التقديرات في جدول تكراري .

الحـــل :

خطوات تكوين الجدول التكراري :

- يتم رسم جدول تكراري مكون من ٣ أعمدة .
- ترتب التقديرات (أو الدرجات) ترتيبًا تصاعديًا في العود الأول للجدول.

- يتم حساب عدد مرات تكرار كل تقدير ووضع خط مائل في العمود الثاني الخاص بالعلامات التكرارية في كل مرة يتكرر فيها التقدير مع مراعاة تكوين حزم خماسية في حالة تكرار التقدير ٥ مرات .
- بعد اكتمال خانة العلامات تحول العلامات إلى درجات تساوي مجموع العلامات لكل تقدير، وتوضع الدرجات في العمود الأخير ويسمى هذا العمود بالتكرارا .

والجدول التالي يوضح كيفية تنظيم التقديرات السابقة في جدول تكراري للتقديرات :

التقدير	العلامات التكرارية	التكرار
ضعيف جدًا	//	2
ضعيف	///	3
مقبول	/// ~~////~~	8
جيـد	// ~~////~~	7
جيد جدًا	///	3
ممتاز	//	2
مجموع التكرار		25

وباستبعاد عمود العلامات التكرارية فإننا نحصل على ما يسمى بالجدول التكراري البسيط، وسُمي بسيطًا لأن البيانات موزعة حسب صفة واحدة هي التقديرات .

الـرسـوم الـبيـانية

الرسم (العرض) البياني للبيانات، هو أحد الطرق التي يمكن استخدامها في وصف البيانات، من حيث شكل التوزيع ومدى تمركز البيانات، وفي كثير من النواحي التطبيقية يكون العرض البياني أسهل وأسرع في وصف الظاهرة محل الدراسة، وتختلف طرق عرض البيانات بيانياً حسب نوع البيانات المبوبة في شكل جدول تكراري، وفيما يلي عرض للأشكال البيانية المختلفة .

١ - المدرج التكرار ي.

نرسم المدرج التكراري على محورين متعامدين إحداهما أفقي يمثل الفئات والثاني رأسي يمثل التكرار ، وتكون وحدة القياس على كل محور متناسقة مع بعضها

البعض . نرسم مستطيلات متلاصقة على الفئات قاعدتها طول الفئة محسوباً من الحدود الحقيقية، وارتفاعاته عبارة عن تكرار هذه الفئات .
فمثلاً بالنسبة للفئة الأولى يكون المستطيل قاعدته بادئه من الحد الأدنى للفئة الأولى، ومنتهية بالحد الأدنى للفئة الثانية، وارتفاع المستطيل هو تكرار الفئة الأولى . وهكذا لباقي المستطيلات التي تمثل باقي التكرارات .

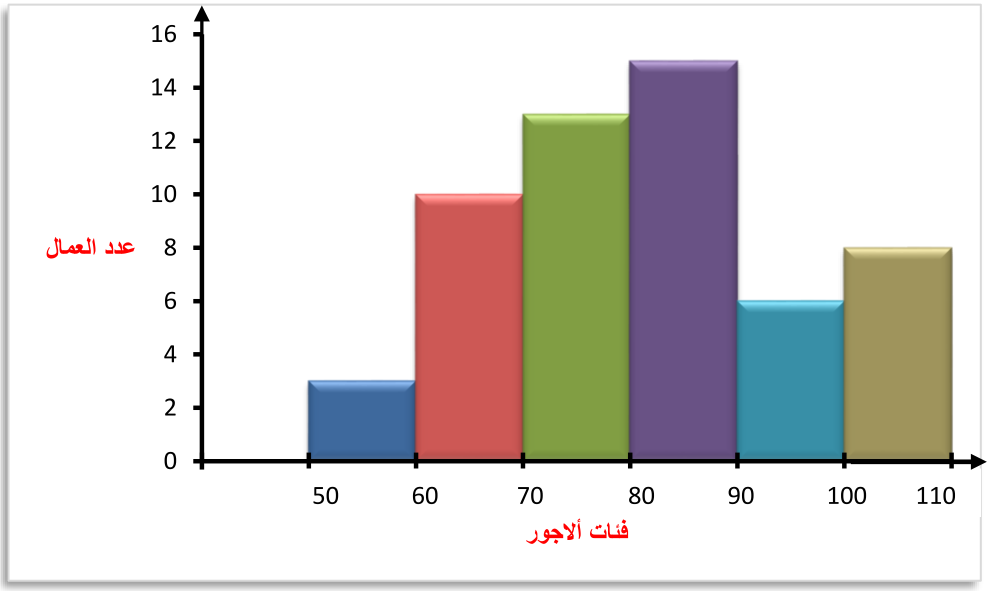
مثـــال

فيما يلي أجور 55 عاملاً في إحدى المؤسسات بالريال في اليوم الواحد :

فئات الأجور	50-	60-	70-	80-	90-	100-110	المجموع
عدد العمال	3	10	13	15	6	8	55

ارسم المدرج التكراري .

الحـــل :



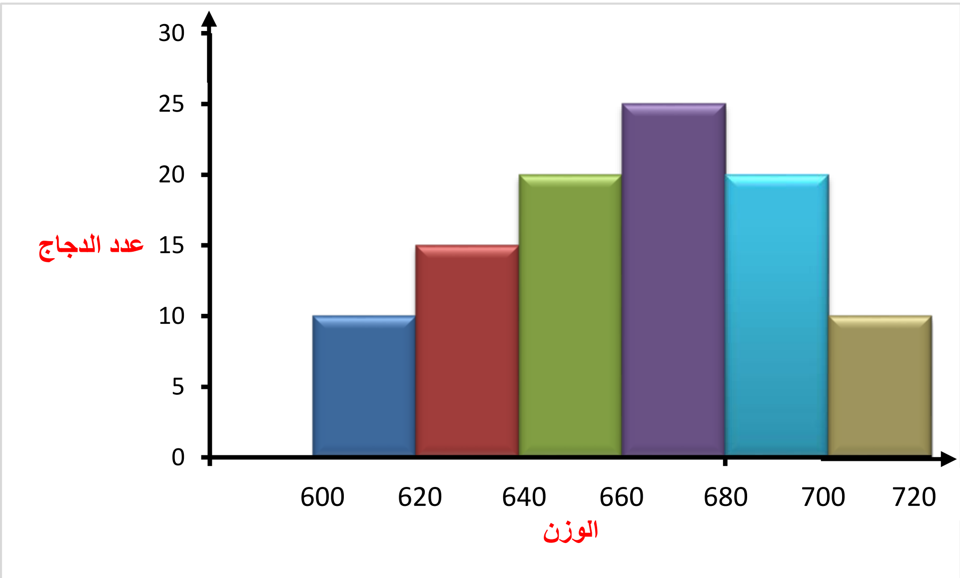
مثـــال

فيما يلي التوزيع التكراري لأوزان 100 عينة من الدواجن حجمها بالجرام، اختيرت من أحدى المزارع بعد 45 يوم .

الوزن	600-	620-	640-	660-	680-	700-720	المجموع
عدد الدجاج (التكرار)	10	15	20	25	20	10	100

ارسم المدرج التكراري .

الحــل :



تطبيق فصلي (1)

الجدول التكرار التالي يبين درجات 95 متدربا حصلوا عليها في أحد الاختبارات :

الدرجات	0-	20-	40-	60-	80-100	المجموع
التكرار	4	12	25	44	20	95

ارسم المدرج التكراري .

٢ -الرسوم الدائرية .

وهي عبارة عن دائرة تقسم إلى قطاعات زواياها المركزية تتناسب مع القراءات ويمكن حساب الزاوية الخاصة بقطاع يمثل قراءة من القراءات من القانون التالي :

$$\text{الزاوية المركزية} = \frac{\text{القراءة نفسها}}{\text{مجموع القراءات}} \times 360^{o}$$

أو

$$\text{الزاوية المركزية} = \frac{\text{التكرار للفئة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 360^{o}$$

ولحساب النسبة المئوية :

$$\text{النسبة المئوية} = \frac{\text{التكرار للفئة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 100$$

مثـــال

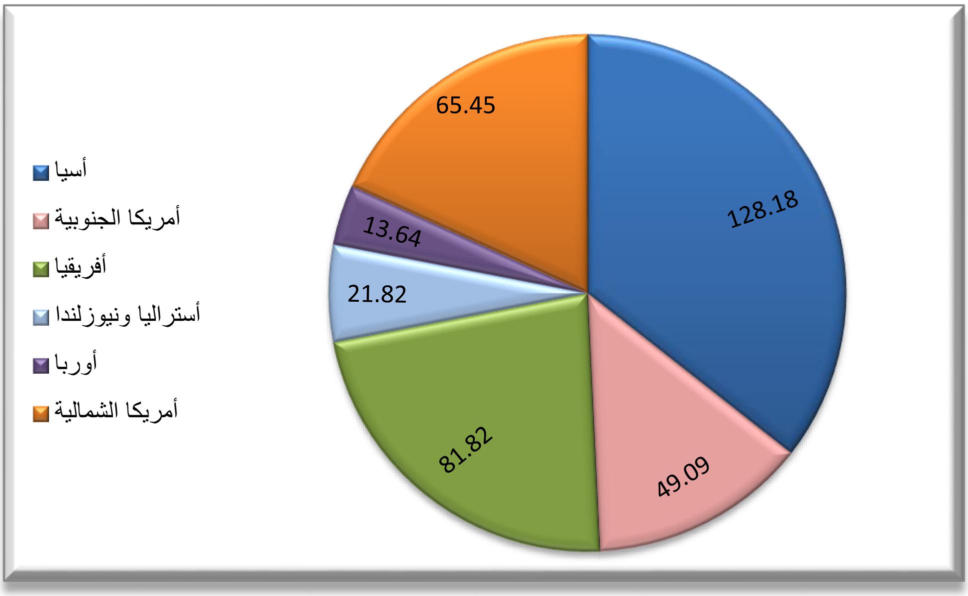
الجدول التالي يمثل تقريباً مساحات القارات في العالم مثلها بالرسوم الدائرية :

القارة	المساحة بالمليون كم ^{2}
أسيا	47
أمريكا الجنوبية	18
أفريقيا	30

أستراليا ونيوزلندا	8
أوربا	5
أمريكا الشمالية	24
المجموع	132

الحــل :

القارة	المساحة بالمليون كم ^{2}	الزاوية المركزية
أسيا	47	$\frac{47}{132}\times 360^o = 0.35\times 360^o = 128.18^o$
أمريكا الجنوبية	18	$\frac{18}{132}\times 360^o = 0.13\times 360^o = 49.09^o$
أفريقيا	30	$\frac{30}{132}\times 360^o = 0.22\times 360^o = 81.82^o$
أستراليا ونيوزلندا	8	$\frac{8}{132}\times 360^o = 0.06\times 360^o = 21.82^o$
أوربا	5	$\frac{5}{132}\times 360^o = 0.03\times 360^o = 13.64^o$
أمريكا الشمالية	24	$\frac{24}{132}\times 360^o = 0.18\times 360^o = 65.45^o$
المجموع	132	360^o



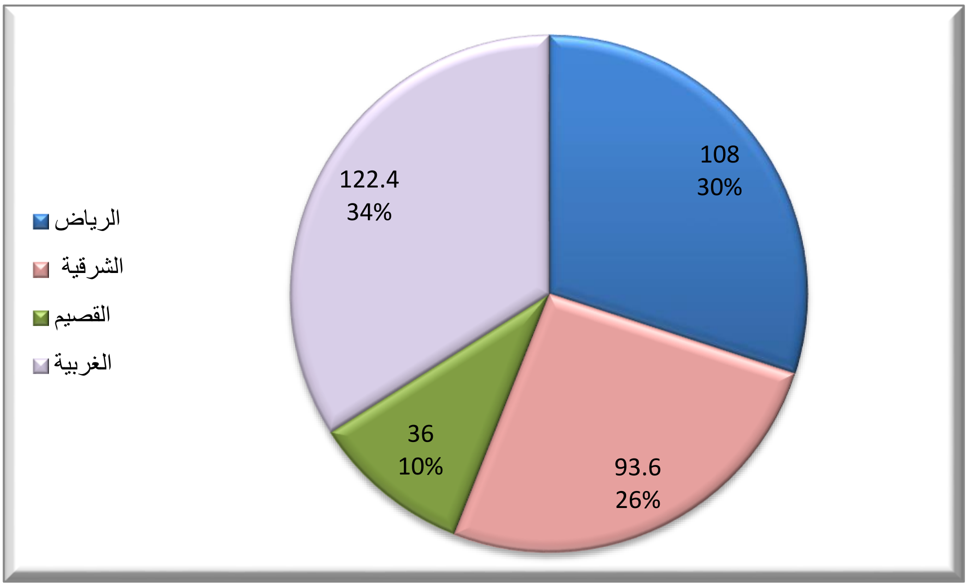
مثـــال

الجدول التكراري التالي يبين توزيع عينة حجمها 500 أسرة حسب المنطقة التي تنتمي إليها، مثلها بالرسوم الدائرية :

المنطقة	الرياض	الشرقية	القصيم	الغربية	المجموع
عدد الأسر(التكرار)	150	130	50	170	500

الحــل :

المنطقة	عدد الأسر (التكرار)	الزاوية المركزية	النسبة المئوية
الرياض	150	$\frac{150}{500}\times 360^o = 0.3\times 360^o = 108^o$	$\frac{150}{500}\times 100 = 0.3\times 100 = 30\%$
الشرقية	130	$\frac{130}{500}\times 360^o = 0.26\times 360^o = 93.6^o$	$\frac{130}{500}\times 100 = 0.26\times 100 = 26\%$
القصيم	50	$\frac{50}{500}\times 360^o = 0.1\times 360^o = 36^o$	$\frac{50}{500}\times 100 = 0.1\times 100 = 10\%$
الغربية	170	$\frac{170}{500}\times 360^o = 0.34\times 360^o = 122.4^o$	$\frac{170}{500}\times 100 = 0.34\times 100 = 34\%$
المجموع	500	360^o	100%



تطبيق فصلي (2)

الجدول التالي يمثل عدد الأشخاص المتبرعين للدم مثلها بالرسوم الدائرية :

فصيلة الدم	A	AB	O	المجموع
العدد (التكرار)	20	40	60	120

مقاييس النزعة المركزية

تُسمى مقاييس النزعة المركزية بمقاييس الموضع أو المتوسطات، وهى القيم التي تتركز القيم حولها، ومن هذه المقاييس، الوسط الحسابي، والمنوال، والوسيط،

والوسط الهندسي، والوسط التوافقي، والرباعيات.
سنكتفي في هذا المقرر بدراسة الوسط (المتوسط) الحسابي .

الوسط (المتوسط) الحسابي
المتوسط أو الوسط الحسابي يعتبر من أهم مقاييس النزعة المركزية و الأكثر شهرةً والأكثر استخداماً في الإحصاء والحياة العملية إذ يستخدم عادةً في الكثير من المقارنات بين الظواهر المختلفة. ويمكن حسابه للبيانات المبوبة وغير المبوبة ، كما يلي :

أولا: الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة :

تعـــريف : إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات للمتغير X وهي $x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n$ فان الوسط الحسابي يساوي حاصل جميع المشاهدات أو البيانات مقسوما على عددها . ويرمز له بالرمز $\bar{x}$ (ويقرأ x bar) .

بحيث الوسط الحسابي للقيم $x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n$ بالعلاقة التالية :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ابي

حيث يدل الرمز Σ على المجموع .

مثـــال

فيما يلي درجات 8 طلاب في مقرر الرياضيات .

40 ، 36 ، 40 ، 35 ، 37 ، 42 ، 32 ،34

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لدرجة الطالب في الامتحان .

الحـــل :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$
$$= \frac{34+32+42+37+35+40+36+40}{8}$$
$$= \frac{296}{8}$$
$$= 37$$

أي أن الوسط الحسابي لدرجة الطلاب في اختبار الرياضيات يساوي 37 درجة .

تطبيق فصلي (3)

فيما يلي أوزان 6 متدربين في احد الفصول .أوجد الوسط الحسابي :

60 , 55 , 73 , 65 , 50 , 81

تطبيق فصلي (4)

الجدول التالي يمثل عدد المخالفات في تجاوز الإشارة وهي حمراء عند إحدى الإشارات المرورية . أوجد المتوسط لعدد المخالفات :

اليوم	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
عدد المخالفات	120	90	80	85	100	150	200

ثانياً: الوسط الحسابي للبيانات المبوبة :

إذا كان لدينا عدد k من الفئات ذات المراكز $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ولها تكرارات $f_1, f_2, \ldots, f_k$ على الترتيب ، فإن الوسط الحسابي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

مثـــال

الجدول التالي يعرض توزيع 40 متدرباً حسب أوزانهم :

فئات الوزن	40-	50-	60-	70-	80-	90-100	المجموع
عدد المتدربين	4	7	13	10	5	1	40

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي .

الحـــل :. اكتب المعادلة هنا

لحساب الوسط الحسابي يجب اتباع الخطوات التالية :

١- حساب مراكز الفئات x .

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الادنى للفئة الثانية} + \text{الحد الادنى للفئة الأولى}}{2}$$

٢-ضرب مركز الفئة في التكرار المناظر له $(x\ f)$، وحساب المجموع $\sum xf$

٣- حساب الوسط الحسابي بتطبيق العلاقة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

فئات الوزن	التكرارات f	مراكز الفئات x	$x\ f$
40-	4	$\frac{40+50}{2}=\frac{90}{2}=45$	$4\times45=180$
50-	7	$\frac{50+60}{2}=\frac{110}{2}=55$	$7\times55=385$
60-	13	$\frac{60+70}{2}=\frac{130}{2}=65$	$13\times65=845$
70-	10	$\frac{70+80}{2}=\frac{150}{2}=75$	$10\times75=750$
80-	5	$\frac{80+90}{2}=\frac{170}{2}=85$	$4\times85=340$

90-100	1	$\frac{90+100}{2}=\frac{190}{2}=95$	$1\times95=95$
المجموع	$\sum f=40$		$\sum x\cdot f=2595$

إذن الوسط الحسابي لوزن المتدربين هو :

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i f_i}{\sum_{i=1}^{6}f_i}=\frac{2595}{40}=64.87\ k.g$$

أي أن متوسط وزن المتدرب يساوي $64.87\ k.g$

تطبيق فصلي (5)

الجدول التالي يبين درجات 115 متدربا حصلوا عليها في أحد الاختبارات . احسب الوسط الحسابي

الدرجات	0-	20-	40-	60-	80-	90-100	المجموع
عدد المتدربين (التكرار)	4	12	25	44	20	10	115

تمـــــــارين عـــــامــــــة

1- عرِّف علم الإحصاء .

2- الجدول التكرار التالي يبين عينة من أطوال 50 متدربا بالسنتيمتر في المعهد الملكي :

الطول	-135	-145	-155	-165	-175	-185	195-205	المجموع
التكرار	2	7	15	10	8	5	3	50

أ- ارسم المدرج التكراري .

ب- أوجد الوسط الحسابي .

3- الجدول التالي يمثِّل تقديرات المتدربين في مقرر الرياضيات :

التقدير	ممتاز	جيدجدا	جيد	المجموع
العدد (التكرار)	30	70	20	120

مثِّل البيانات السابقة في رسم دائري .

4- فيما يلي درجات 10 متدربين في مقرر الفيزياء :

45 , 33 , 25 , 50 , 38 , 47 , 12 , 19 , 40 , 33

أوجد الوسط الحسابي لدرجات المتدربين .

5-فيما يلي درجات الحرارة لخمس مدن في المملكة العربية السعودية خلال فصل الشتاء :

15 , 10 , 3 , 1 , 9

أوجد الوسط الحسابي لدرجات الحرارة .

6- فيما يلي أجور 70 عاملاً في إحدى المؤسسات بالريال في اليوم الواحد .

فئات الأجور	50-	60-	70-	80-	90-	100-110	المجموع
عدد العمال	3	10	13	15	6	8	55

أ -ارسم المدرج التكراري .

ب -احسب الوسط الحسابي .

7- الجدول التالي يمثل انتاج 20 مزرعة بالطن لمحصول ما .

الفئات (الناتج بالطن)	1-	4-	7-	10-	13-16	المجموع
التكرار (عدد المزارع)	2	3	8	5	2	20

أ- ارسم المدرج التكراري .

ب- احسب الوسط الحسابي .

المراجـع

اسم المرجع	المؤلف
الرياضيات في الاقتصاد والإدارة	أحمد بن محمد
حساب التفاضل والهندسة التحليلية	د. إبراهيم سريمني

المنجد في الرياضيات	أحمد و مصطفى عاشور
calculus " solution manual	**ross l.finneyio**
مبادئ الاحصاء والاحتمالات	د. عدنان بري ، د. مجمود هندي
ملخص شوم ايزي (الهندسة)	ريتش ، بارنيب