المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

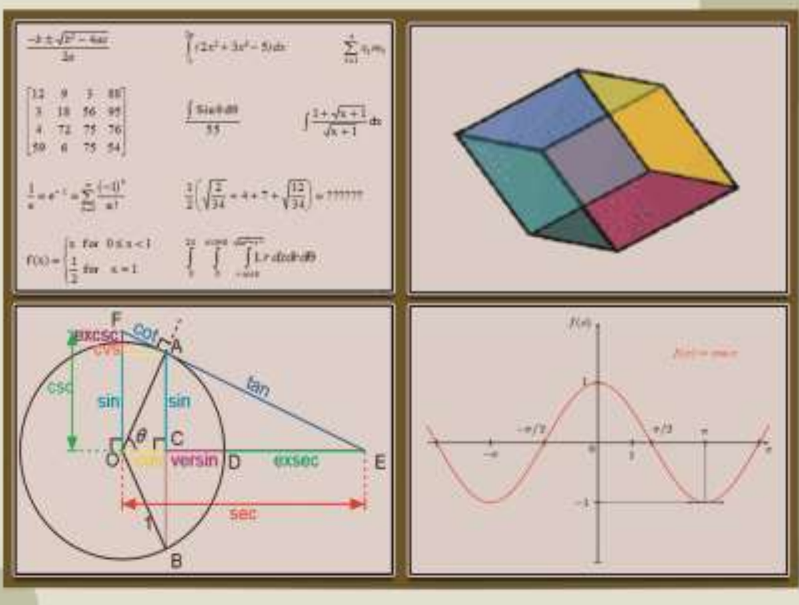
الكليات التقنية

الحقيبة التدريبية :

الرياضيات التخصصية

١١٤ ريض

الكترونيات/كهرباء/تبريد وتكييف/لحام/انتاج/اتصالات



مقدمة

الحمد لله وحده،والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد بن عبدالله وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على الله ثم على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " رياضيات تخصصية " لمتدربي الكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجلً أن تسهم بالشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، مدعم بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه؛ إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

الفهـــرس

تمهيد

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسوله رائد البشرية ومعلمها الأول، ورحمة الله المهداة إليها، لتخرج به من الظلمات إلى النور، وعلى من والاه واهتدى بهديه إلى يوم الدين، أما بعد.

فإن مقرر رياضيات تخصصية يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لمتدربي الإلكترونيات، الكهرباء،الاتصالات وبعض التخصصات في قسم الميكانيكا لتعليم المتدرب المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية.
ولقد ارتئينا

_ خدمة للأهداف التربوية_ إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها المتدرب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصاً منا على إيصال المعلومة الواضحة للمتدرب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة والمسائل المباشرة والتي يمكن أن يتعرض لها المتدرب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح. لقد تم تحرير حلول التمارين بدقة وكان الشاغل الرئيسي هو تعويد المتدرب استيعاب القوانين الأساسية للرياضيات وتمكنه من كيفية استعمالاتها في مسائل مختلفة للرفع من مهاراته وقدراته ومنهجيته في تحرير الحلول والربط بين هذه القوانين والمسائل التطبيقية. ودراسة هذا المقرر ستمكن المتدرب من:

- الإلمام بفهم قواعد التفاضل وتطبيقاته المختلفة.
- الإلمام بأنواع التكامل وطرق حسابه وتطبيقاته في حساب المساحات.

ولتحقيق هذه الأهداف بإذن الله تعالى فقد قسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى ثلاثة وحدات رئيسة:

فالوحدة الأولى تُعنى بتعريف المتدرب بأساسيات الرياضيات كالنهايات واتصال الدوال ،وتهدف هذه الوحدة الى اعداد المتدرب لدراسة موضوعي التفاضل والتكامل. وقد قسمت هذه الوحدة إلى فصلين: الفصل الأول سيتطرق إلى تعريف النهاية وكيفية حسابها كما يتطرق إلى حالات عدم التعين وكيفية إزالتها، أما الفصل الثاني فسيتطرق لتعريف الاتصال وبعض خصائص اتصال الدوال.

ثم الوحدة الثانية وخصصت لدراسة موضوع التفاضل وتطبيقاته، وتهدف هذه الوحدة إلى تحقيق هذا الغرض. وقد قسمت هذه الوحدة إلى فصلين: الفصل الاول سيتطرق إلى تعريف المشتقة والتعريف الهندسي للمشتقة وتفاضل الدوال (كثيرات الحدود-الدوال المثلثية-الدوال الأسية و اللوغارتمية) كما يتطرق إلى التفاضل الضمني والمشتقات العليا، أما الفصل الثاني فسيتطرق للتعريف بالقيم الصغرى والعظمى للدالة، وكيفية استعمال اختبار المشتقة الأولى و الثانية لمعرفة القيم الصغرى والعظمى المحلية لمنحنى الدالة.

ومن المفيد جداً في دراستنا للنماذج الرياضية لمسألة في العلوم التطبيقية النظر إلى بيان الدوال التي تعتمد كنماذج لتلك المسألة: ولهذا الغرض فإن هذا الفصل سيتطرق إلى الرسم البياني لمنحنيات الدوال انطلاقا من تعيين القيم الصغرى والعظمى المحلية ونقاط الانعطاف إن وُجدت لهذه الدوال ودراسة متغيرات الدالة،وتطبيقات على القيم الصغرى والعظمى المحلية، وكيفية استعمالاتها في المسائل التطبيقية المختلفة، وطرق دراستها بناءا على قوانين المشتقات.

أما الوحدة الثالثة فتهدف لمعرفة المتدرب بالتكامل المحدود والغير محدود وقدرته على تكامل دوال أساسية باستخدام طرق التكامل المختلفة، وتمكنه من حساب المساحات تحت المنحنيات باستخدام التكامل : ولهذا الغرض نشرح في هذه الوحدة معنى التكامل ، ونتطرق لقوانين التكامل، وكيفية حساب تكامل الدوال الجبرية و المثلثية و الأسية، كما

نتعرض إلى طريقة التكامل بالتجزئة وطريقة التكامل بالكسور الجزئية،.وأخيرا نتطرق للتعريف بالتكامل المحدود وكيفية تطبيقه لحساب المساحات تحت المنحنيات.

والله الموفق

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

اسم الوحدة: النهايات والاتصال

الهدف العام:
معرفة مفهوم النهايات والاتصال ،وكيفية حساب النهايات، والالمام بخصائص الاتصال.

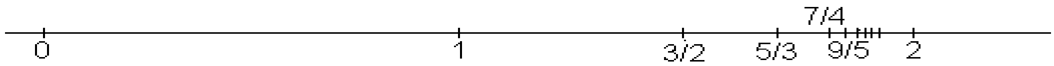
الأهداف التفصيلية:
بعد دراسة هذه الوحدة يكون المتدرب قادر وبكفاءة _بإذن الله_على:
١. الالمام بمفهوم النهاية وكيفية حسابها.
٢. معرفة مفهوم اتصال الدوال وخواصه.

الفصل الأول: النهايات

تمهيد
إن مفهوم النهاية من أهم المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي وهو مفهوم يتعلق بسلوك دالة عندما يقترب متغيرها نحو عدد معين أو نحو اللانهاية.
سنبدأ بدراسة نهاية المتتالية عندما يقترب متغيرها نحو اللانهاية باختصار شديد كمقدمة لدراسة نهاية الدالة.
نهاية المتتالية:
مثال ١: إذا وقعت النقط المتتالية التي تعطي بحدود المتتالية $\left\{2-\frac{1}{n}\right\}$.

$$1,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{9}{5},\frac{11}{6},\frac{13}{7},\frac{15}{8},\frac{17}{9}\ldots,2-\frac{1}{n},\ldots \qquad (1)$$

على خط الأعداد الحقيقية فإننا نلاحظ أنها تتجمع حول النقطة 2 بطريقة ما بحيث أننا نجد نقطاً من المتتالية بعدها عن 2 أقل من أي عدد موجب محسوب مهما كان هذا العدد صغيراً.



فمثلاً النقطة $\frac{2001}{1001}$ وجميع النقط التي تليها تكون على بعد أقل من 10^{-3} عن 2
والنقطة $\frac{20000001}{10000001}$ وجميع النقط التي تليها على بعد أقل من10^{-6} عن 2
وهكذا.فعندما يقترب n من اللانهاية فإن الحد العام لهذه المتتالية يقترب من العدد 2 ويبقى قريباً من 2. إن هذا يعني أن الحد العام للمتتالية يمكنه أن يكون قريبا من 2 بقدر ما نريد شريطة أن يكون n كبيرا بقدر كافي. و نشير إلى هذا الأمر بقولنا إن نهاية المتتالية هي العدد2.
وإذا كان x متغيراً، مداه المتتالية (1)، فإننا نقول أن x تقرب من 2 كنهاية لها أو أن x تؤول إلى 2 كنهاية لها وتكتب $x \to 2$.
إن المتتالية (1) لا تحتوي على نهايتها وهي العدد 2 كأحد حدودها.
مثال ٢: إن المتتالية $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{6}, ...$ ، فإنها تؤول إلى 1 كنهاية لها وأن كل حد فردى يساوي 1. ولذا نرى أنه يمكن للمتتالية أن تبلغ نهايتها وقد لا يمكنها ذالك.

غير أننا سنفهم فيما يلي من أن $x \to a$ تستلزم أن $x \neq a$ أي أنه ينبغي أن ندرك أن أي متتالية مفروضة اختيارية لا تحتوي نهايتها كأحد حدودها.

نهاية الدالة:

مثال ٣: لنفرض أن $x \to 2$ على المتتالية (1)
عندئذ $f(x) = x^2 \to 4$ على المتتالية

$$1, \frac{9}{4}, \quad \frac{25}{9}, \quad \frac{49}{16}, \quad \frac{81}{25}, \quad \frac{121}{36}, \quad \frac{169}{49}, \quad \frac{225}{64}, \quad \frac{289}{81} \dots, (2 - \frac{1}{n})^2,$$

أي أن $f(x)$ تقترب من العدد 4 لما يقترب x من العدد 2
مثال ٤: لنجعل $x \to 2$ على المتتالية

$$2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \dots, 2 + (0.1)^n, \dots \qquad (2)$$

فعندئذ $f(x) = x^2 \to 4$ على المتتالية
$4.41, 4.0401, 4.004001, \dots, (2 + (0.1)^n)^2, \dots$ ويبدو من المعقول أن نقبل أنx^2 تقترب من 4 كنهاية لها عندما تقترب x من 2 كنهاية لها.
ونقول أن نهاية x^2 عندما تقترب x من 2 تساوي 4 و تكتب $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

تعريف

لتكن A مجموعة جزئية (مجال أو اجتماع عدة مجالات) من مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$
و f دالة من A في $\Re$
نقول أن الدالة $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \Re$ تنتهي إلى $\boldsymbol{b} \in \Re$ عندما تنتهي x إلى النقطة $\boldsymbol{x_0} \in \mathbf{A}$ ونرمز لذلك بـ

$\lim_{x\to x_0} f(x) = b$ أو $f(x) \to b$ عندما $x \to x_0$ إذا تحقق الشرط التالي:

من أجل كل عدد حقيقي موجب ε يمكن إيجاد عدد حقيقي موجب آخر $\delta=\delta(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$x \in A \text{ و } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

يعني أن $f(x)$ تقترب من b عندما تقترب x تقترب من x_0

والبحث عن نهاية دالة هو البحث عن قيمة تقترب إليها الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من عدد x_0

حساب نهاية الدالة:

لحساب نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to a$ نعوض في هذه الدالة عند $x = a$ وقد نحصل عليها وقد لا نحصل عليها، عندئذ نتبع طرق أخرى سنتطرق إليها في ما بعد .

مثال ٥: لتكن $f(x) = x^3$، احسب نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 2

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^3 = 8$$

وهذا يعني أن $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من العدد 2

مثال ٦: إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \neq 2 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$ أوجد $\lim_{x\to 2} f(x)$

الحل: نلاحظ هنا أنه إذا كان $x \to 2$ هذا يعني أن $x \neq 2$

إذاً $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$

النهايتان اليمنى واليسرى:

إن قيمة x عندما $x \to 2$ على المتتالية (1)، هي باستمرار أصغر من 2 وعلى هذا فإننا نقول x تقترب من 2 من اليسار وتكتب $x \to 2^-$. وبالمثل قيمة x عندما $x \to 2$ على المتتالية (2) هي باستمرار أكبر من 2. ونقول في مثل هذه الحالة أن x تقترب من 2 من اليمين وتكتب $x \to 2^+$.

- النهاية من اليسار للدالة $f(x)$ هي نهاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a من اليسار(أي بقيم أصغر) ونرمز لها ب $\lim_{x\to a^-} f(x)$ أو $\lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x)$
- النهاية من اليمين للدالة $f(x)$ هي نهاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a من اليمين (أي بقيم أكبر) ونرمز لها ب $\lim_{x\to a^+} f(x)$ أو $\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x)$

ومن الواضح أن وجود العبارة $\lim_{x\to a} f(x)$ تستلزم وجود تساوى كل من نهاية اليسار $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ونهاية اليمين $\lim_{x\to a^+} f(x)$

و أن وجود نهاية من اليمين (اليسار) لا يستلزم وجود نهاية من اليسار (اليمين).

مثال ٧: إن مجال التعريف للدالة $f(x)=\sqrt{9-x^2}$هو الفترة $-3 \le x \le 3$ فإذا كان a أي عدد في الفترة المفتوحة$-3 < x < 3$ فإن$\lim_{x\to a}\sqrt{9-x^2}$ موجودة وتساوي $\sqrt{9-a^2}$ لنعتبر الآن $a=3$ ولنجعل x تقترب من 3 من اليسار(أي بقيم أصغر) أولا فنجد أن $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$ أما إذا جعلنا x تقترب من 3

من اليمين(أي بقيم أكبر) فإننا نجد أن $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة لأن $\sqrt{9-x^2}$ يكون *تخيلياً عندما $x>3$ وبالتالي فإن* $\lim_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}$ *غير موجودة.*

بالمثل لما نعتبر $a=-3$ نجد أن $\lim_{x\to -3^+}\sqrt{9-x^2}$ موجودة و مساوية للصفر ولكن $\lim_{x\to -3^-}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة وبالتالي $\lim_{x\to -3}\sqrt{9-x^2}$ غير موجودة.

مثال ٨: أوجد $\lim_{x\to 3}f(x)$ إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2-5, & x\le 3\\ \sqrt{x+13}, & x>3\end{cases}$

الحل: عندما تقترب x إلى العدد *3* من اليسار فإن عبارة الدالة $f(x)$ هي $f(x)=x^2-5$ وبالتالي $\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-5)=3^2-5=4$

وعندما تقترب x إلى العدد *3* من اليمين فإن عبارة الدالة $f(x)$ هي $f(x)=\sqrt{x+13}$ وبالتالي

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(\sqrt{x+13}\right)=\sqrt{3+13}=4$$

نلاحظ أن النهايتين من اليمين ومن اليسار متساويتين ومنه فإن $\lim_{x\to 3}f(x)=4$

مثال ٩: أوجد $\lim_{t\to 0}g(t)$ إذا كانت $g(x)=\begin{cases} t^2, & t\ge 0\\ t-2, & t<0\end{cases}$

الحل: عندما تقترب t إلى العدد *0* من اليسار فإن عبارة الدالة $g(t)$ هي $g(t)=t-2$ وبالتالي

$$\lim_{t\to 0^-}g(t)=\lim_{t\to 0^-}(t-2)=0-2=-2$$

عندما تقترب t إلى العدد *0* من اليمين فإن عبارة الدالة $g(x)$ هي $g(x)=t^2$ وبالتالي

$$\lim_{t\to 0^+}g(t)=\lim_{t\to 0^+}(t^2)=0^2=0$$

إذاً النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار ومنه فليس للدالة نهاية عند هذه النقطة.

نظريات في النهايات

1) **نهاية مجموع دالتين**

لتكن الدالة $F(x)=f(x)+g(x)$ حيث $f(x)$، $g(x)$ دالتين في x فإن

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

مثال ١٠:

$$\lim_{x\to -2}(6x^3+5x^2)=\lim_{x\to -2}6x^3+\lim_{x\to -2}5x^2$$
$$=6(-2)^3+3(-2)^2=-48+12=-36$$

2) نهاية فارق دالتين

لتكن الدالة $F(x) = f(x) - g(x)$ حيث $f(x)$ ،$g(x)$ دالتين في x فان

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال ١١:

$$\lim_{x\to 1}(2x^4 - x^3) = \lim_{x\to 1} 2x^4 - \lim_{x\to 1} x^3 = 2(1)^4 - (1)^3 = 1$$

وعموما إذا كانت الدالة

$$F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \cdots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$$

حيث $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_{n-1}(x), f_n(x)$ عبارة عن دوال في x فإن

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \lim_{x\to a} f_3(x) \pm \cdots \pm \lim_{x\to a} f_{n-1}(x) \pm \lim_{x\to a} f_n(x)$$

مثال ١٢: *لتكن الدالة* $F(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x$ فأوجد $\lim_{x\to 1} F(x)$

الحل

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x = \lim_{x\to 1} x^4 - \lim_{x\to 1} 2x^3 + \lim_{x\to 1} 3x^2 + \lim_{x\to 1} x$$
$$= (1)^4 - 2(1)^3 + 3(1)^2 + 1 = 3$$

3) نهاية جداء دالتين

لتكن الدالة $F(x) = f(x)g(x)$ حيث $f(x), g(x)$ دوال في x فإن

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}\big(f(x) \times g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال١٣: لتكن $F(x) = (-2x^3 - 1)(5x^2 + 1)$ فاوجد $\lim_{x\to -1} F(x)$

الحل:

$$\lim_{x\to -1} F(x) = \lim_{x\to -1}(-2x^3 - 1)(5x^2 + 1)$$
$$= \lim_{x\to -1}(-2x^3 - 1) \times \lim_{x\to -1}(5x^2 + 1)$$
$$= (-2(-1)^3 - 1)(5(-1)^2 + 1) = 6$$

وعموماً إذا كان $F(x)$ عبارة عن جداء عدة دوال

$$F(x) = f_1(x) \times f_2(x) \times f_3(x) \times \dots \times f_n(x)$$

فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \times \lim_{x\to a} f_2(x) \times \lim_{x\to a} f_3(x) \times \dots \times \lim_{x\to a} f_n(x)$$

4) نهاية قسمة دالتين

و x دالتين في $f(x),g(x)$ حيث $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ لتكن الدالة

$$\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

فإن

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

مثال١٤: لتكن الدالة $F(x)=\frac{2x+6}{5x^2-1}$ فأوجد $\lim_{x\to 0} F(x)$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x+6}{5x^2-1}=\frac{\lim_{x\to 0}(2x+6)}{\lim_{x\to 0}(5x^2-1)}=\frac{6}{-1}=-6$$

مثال ١٥ : أوجد النهايات التالية:

$$1)\lim_{x\to 0}(2x^3+5x+2)\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2+x}{2x}\right)^4\qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x}{x+1}\qquad 4)\ \lim_{x\to 3} 7$$

الحل:

$$1)\lim_{x\to 0}(2x^3+5x+2)=2(0)^3+5(0)+2=2$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2+x}{2x}\right)^4=\left(\frac{4(1)^2+1}{2(1)}\right)^4=\left(\frac{5}{2}\right)^4=\frac{625}{16}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x}{x+1}=\frac{3(1)^2+2(1)}{1+1}=\frac{5}{2}$$

$$4)\ \lim_{x\to 3} 7=7$$

حالات عدم التعيين

$$1)\lim_{x\to a} f(x) = \infty \times 0\ ,\ 2)\lim_{x\to a} f(x) = \infty - \infty\ ,3)\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\infty}{\infty}\ ,4)\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$$

في هذه الحالات تكون النهاية غير معينة وهناك طرق لإزالة عدم التعيين ، وهناك حالات عدم التعيين أخرى سوف لا نتطرق إليها في هذا المستوى

أولاً: عدم التعيين $\frac{0}{0}$: ويزال بالتحليل وقسمة البسط على المقام وبالاختصار أو بالقيام بعملية طرح أو جمع أو باستعمال طرق أخرى.

مثال ١٦: احسب النهاية التالية:

$$1)\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}\ ,\qquad 2)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$$

$$3)\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2}\ ,\qquad 4)\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$$

$$5)\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}\ ,\qquad 6)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}$$

$$7)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}\ ,\qquad 8)\lim_{y\to 1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}}$$

الحل:

1) عدم التعيين $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{0}{0}$

يجب إزالة عدم التعيين

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = (x+3) \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$$

2) عدم التعيين $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}(x-1) = 1\ .$$

3) عدم التعيين $\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+4x^2}{x^4+3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(2x^2+4)}{x^2(x^2+3)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+4}{x^2+3} = \frac{4}{3}$$

4) عدم التعيين $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-2)}{(x-3)} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}\ .$$

5) عدم التعيين $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(2x+4)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}2x-4 = 10$$

6) عدم التعيين

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2} = \frac{0}{0}$$

باستخدام القسمة المطولة نحصل على:

$$\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2} = \frac{(x^2+4x+4)(x+2)}{x+2} = (x^2+4x+4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2} = \lim_{x\to -2}x^2+4x+4 = 0$$

7) عدم التعيين $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}x^2+x+1 = 3$$

8) عدم التعيين $\lim_{y\to 1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{y\to 1}\frac{1-y}{1-\sqrt[3]{y}} = \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\sqrt[3]{y}-1}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{(\sqrt[3]{y}-1)\left[(\sqrt[3]{y})^2+\sqrt[3]{y}+1\right]}{\sqrt[3]{y}-1} = \lim_{y\to 1}(\sqrt[3]{y})^2+\sqrt[3]{y}+1 = 3$$

ثانياً: عدم التعين $\frac{\infty}{\infty}$: لإزالة عدم التعين $\frac{\infty}{\infty}$ عندما يؤول المتغير x إلى ∞، نقسم البسط والمقام على المتغير
حاملاً أكبر أس في المقام

نظرية ١: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}} = 0$ حيث α عدد موجب

مثال ١٧: لدينا $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^5} = 0$

نظرية ٢ :

$$\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \infty$$

مثال١٨: $\lim_{x\to\infty}(4x^2+2x+5) = \infty$

مثال ١٩: احسب

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}$$

الحل: عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ ،نقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2/x^2}{x^2/x^2+1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+0} = 1$$

مثال ٢٠: احسب النهاية التالية:

$$1)\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^3} \qquad 2)\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+3}{x^2} \qquad 3)\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}}$$

1) عدم التعيين $\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^3} = \frac{\infty}{\infty}$
نقسم حدود الدالة على x^3 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x/x^3+5/x^3}{x^3/x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2+5/x^3}{1} = \frac{0+0}{1} = 0$$

2) عدم التعيين $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$

نقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5/x^2+3/x^2}{x^2/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3/x^2}{1} = \infty$$

3) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{6x-8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

ثالثاً: عدم التعيين $0\times\infty$ و$(\infty-\infty)$. لإزالة عدم التعيين $0\times\infty$ و$(\infty-\infty)$. نطبق طريقة التحليل الجبري ثم نقوم بالاختصار و القيام بعملية الضرب و القسمة في حالة وجودهما .

مثال ٢١: احسب النهاية التالية:

$$1)\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right) \qquad 2)\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right) \qquad 3)\lim_{h\to 0} h\left(1+\frac{1}{h}\right)$$

الحل:

1) عدم التعيين $\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right) = 0\times\infty$

$$\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x(x-1)}\right) = \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\quad\left(3+\frac{2}{(x-1)}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(3+\frac{2}{(x-1)}\right) = 3+\frac{2}{0-1} = 1$$

2) عدم التعيين $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right) = \infty-\infty$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(3-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \infty\times\frac{5}{2} = \infty$$

3) عدم التعيين

$$\lim_{h\to 0} h\left(1+\frac{1}{h}\right) = 0\times(1+\infty) = 0\times\infty$$

$$\lim_{h\to 0} h\left(1+\frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to 0} h\left(\frac{h+1}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1$$

نظرية ٣: إذا كانت لدينا $f(x) = x^n-a^n$, $g(x) = x-a$ حيث $\lim_{x\to a} g`(x) \neq 0$

فإن
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f`(x)}{g`(x)}$$

مثال ٢٢: احسب $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

الحل:
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1}=12$$

مثال ٢٣: احسب $\lim_{x\to -4}\frac{x^3-64}{x+4}$

الحل:
$$\lim_{x\to -4}\frac{x^3-64}{x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1}=48$$

نهايات بعض الدوال المشهورة

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1\ ,\qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2.718$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{x}=0\ ,\qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x}=1\ ,\qquad 5)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{ln\,x}=1\ .$$

تمارين تدريبية: احسب النهايات التالية:

$$1)\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+1)\qquad 2)\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-5x+3}{x-4}\qquad 3)\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x-2}$$

$$4)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+1}\qquad 5)\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}\qquad 6)\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2-1}{x+2}$$

$$7)\lim_{x\to 1}f(x)\ \ ,f(x)=\begin{cases}-1\ ,x\neq -1\\ -3\ ,x=-1\end{cases}\qquad 8)\lim_{x\to 1}(x-1)\sqrt{x-3}\qquad 9)\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+2/x}$$

$10) \lim_{x\to 1} f(x) \quad f(x) = \begin{cases} x-1\,, x \le 3 \\ 3x-7\,, x > 3 \end{cases}$ $\quad 11) \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x-7}{x^2-4}$ $\quad 12) \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x-10}{3x^3-1}$

$13) \lim_{y\to x} \frac{2-y}{\sqrt{7+6y^2}}$ $\quad 14) \lim_{x\to\infty} \frac{2-5/x}{4+5/x^2}$ $\quad 15) \lim_{s\to x} \sqrt[3]{\frac{3s^7-4s^5}{2s^7+1}}$

$16) \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$ $\quad 17) \lim_{x\to 5} \sqrt{x^3-3x-1}$ $\quad 18) \lim_{x\to\infty} \frac{2x-7}{4x^2-2x+1}$

الفصل الثاني: الاتصال

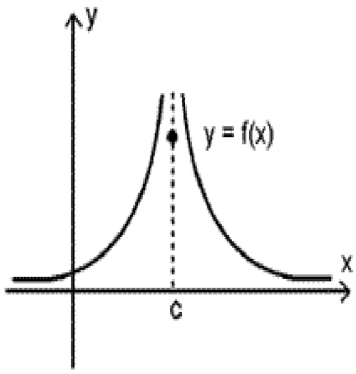
تمهيد

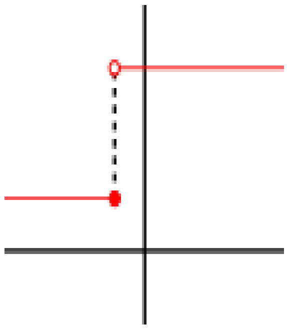
إن مفهوم اتصال الدوال من المفاهيم الهامة والاساسية في التحليلي الرياضي وهو مفهوم معني بمعرفة سلوك منحنى الدالة خلال فترة محددة .

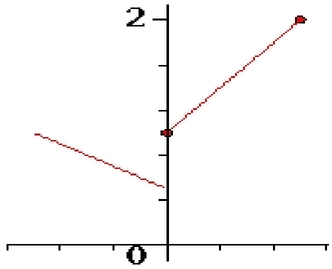
تعريف ١

عندما نقول ان الدالة متصلة فنحن نعني ان منحنى الدالة مستمر دون انقطاع خلال الفترة المعطاة . أو بصيغة أخرى الدالة معرفة لجميع القيم في الفترة المعطاة .

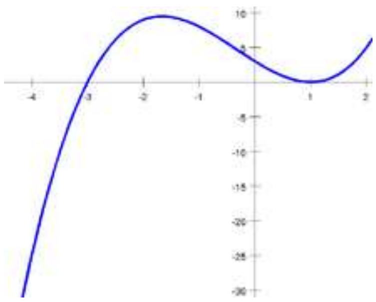
مثال ١ : الدوال التالية كلها دوال غير متصلة :

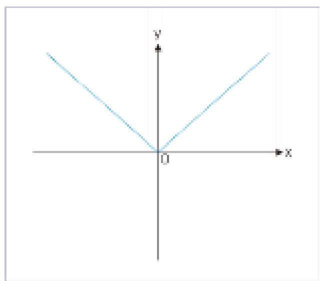


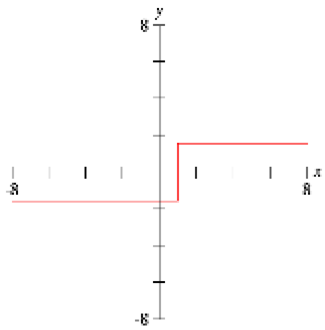




مثال ٢ : الدوال التالية كلها دوال متصلة :







تعريف٢

الدالة f متصلة عند النقطة c اذا تحقق

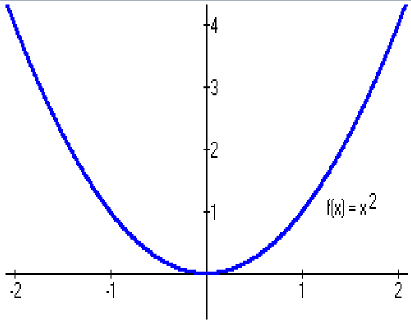
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

مثال ٣ : ادرس اتصال الدالة $f(x) = x^2$ عند النقطة $c = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 = f(0)$$

اذاً $f(x)$ متصلة عند $c=0$

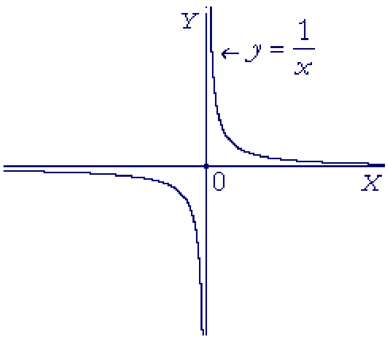
بالاضافة لذلك يمكن إثبات ذلك من خلال الرسم لمنحنى $f(x)$



مثال ٤: ادرس اتصال الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ عند النقطة $c = 0$

نلاحظ أن $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{0}$

غير موجودة وبالتالي $f(x)$ غير متصلة ، بالاضافة لذلك يمكن اثبات ذلك من خلال الرسم لمنحنى $f(x)$



مثال ٥: ادرس اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \le 1 \\ \sqrt{x+3} \quad , x > 1 \end{cases}$ عند $c=1$.

الحل:

من الواضح أن $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

ولكن $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

وهذا يعني $\lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة وبالتالي $f(x)$ غيرمتصلة عند $c=1$.

مثال ٦: ادرس اتصال الدالة $f(x) = |x|$ عند $c = 0$.

$)f(x) = \frac{x}{x^2-1}, c = 1, \qquad 3)f(x) = \sqrt{9 - x^2}, c = 3$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}|x| = |0| = 0 = f(0)$$

اذاً $f(x)$ متصلة عند $c=0$.

مثال ٧: ادرس اتصال الدالة $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ عند $c = 1$.

الحل:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0}$$

غير موجودة وبالتالي $f(x)$ غير متصلة عند $c= 1$.

مثال ٨: ادرس اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ عند $c = 3$.

الحل:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{9-x^2}$$

غير موجودة وبالتالي $f(x)$ غير متصلة عند $c= 3$.

تعريف ٣

نقول عن الدالة $f(x)$ انها متصلة خلال الفترة $[a,b]$ اذا كانت متصلة لكل $c \in [a,b]$.
وبمعنى آخر اذا حققت الشروط التالية :

١- $f(x)$ متصلة لكل c حيث $a < c < b$.

٢- $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

مثال ٩: ادرس اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ خلال الفترة $[-3,3]$.

الحل:

من الواضح ان

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-c^2} = f(c) \quad \forall c \in (-3,3)$$

كذلك

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(-3)^2} = 0 = f(-3)$$

و

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3)^2} = 0 = f(3)$$

وبالتالي $f(x)$ متصلة على الفترة $[-3,3]$

مثال١٠: ادرس اتصال الدالة $f(x) = 3^x$ خلال الفترة $[0,2]$.

الحل:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} 3^x = 3^c = f(c) \quad \forall c \in (0,2)$$

كذلك
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3^0 = 1 = f(0)$$

ايضاً
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3^2 = 9 = f(2)$$

وبالتالي $f(x)$ متصلة على الفترة $[0,2]$.

مثال١١: ادرس اتصال الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ خلال الفترة $[0,1]$.

الحل:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{c^2 - 1} = f(c) \quad \forall c \in (0,1)$$

كذلك

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{0^2 - 1} = -1 = f(0)$$

ولكن
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0}$$

غير موجودة وبالتالي $f(x)$ غيرمتصلة على الفترة $[0,1]$.

مثال١٢: ادرس اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{x-1}$ خلال الفترة $[1,5]$.

الحل:

نلاحظ ان
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{x-1} = \sqrt{c-1} = f(c) \quad \forall c \in (1,5)$$

كذلك

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0 = f(1)$$

ايضاً

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \sqrt{x-1} = 2 = f(5^-)$$

وبالتالي $f(x)$ متصلة على الفترة $[1,5]$.

خواص الاتصال:

نظرية ١:

١ - أي كثيرة حدود f متصلة لكل $c \in \boldsymbol{R}$.

٢-الدالة $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ متصلة لكل c حيث $g(c) \neq 0$.

مثال١٣ : الدوال التالية هي دوال متصلة

$$1)f(x) = 2x^2 + 2x - 5, \quad 2)f(x) = \frac{x}{x-5}, [-4,4], \quad 3)f(x) = \frac{1}{x}, (0,\infty)$$

نظرية ٢:

لتكن f,g دالتين متصلتين عند العدد c . فإن الدوال التالية متصلة عند العدد c :

$$1)\ f+g, \quad 2)\ f-g\ , \quad 3)\ fg, \quad 4)\ \frac{f}{g}\ , \qquad g(c) \neq 0$$

مثال ١٤ : الدوال التالية هي دوال متصلة

$$1)f(x) = (2x^2 + x)^6 - 5x\ , c = 1 \qquad 2)f(x) = (x+1)\left(\frac{1}{x}\right), c = -1$$

$$3)f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2}, c = 3 \qquad 4)f(x) = x - \frac{2x}{x^2+1}(8x), c = 2$$

نظرية ٣:

لتكن g دالة متصلة عند العدد c ، f متصلة عند $g(c)$. فان

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right)$$

مثال١٥ : احسب نهاية الدالة $f(x) = \sqrt[5]{\frac{1}{x}}$ عند $c=1$.

الحل:

من الواضح ان $g(x)=\frac{1}{x}$ متصلة عند $c=1$ ، لنضع $f(x)=\sqrt[5]{x}$ وهي دالة متصلة على $g(1)=1$. وبالتالي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\sqrt[5]{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}}=\sqrt[5]{1}=1$$

تمارين تدريبية :

ابحث اتصال الدوال التالية

1) $f(x)=x^2+2x+1,$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}\ ,c=2$

3) $f(x)=(x^2+9x)^6, c=0$

4) $f(x)=(x^2+2)(x+1)^3$

5) $f(x)=\frac{1}{x-5}\ ,c=5\ ,$

6) $f(x)=\begin{cases}1 & ,x=0\\ 0 & ,x\neq 0\end{cases}, c=0$

7) $f(x)=\frac{x}{x-9}\ ,[0,3]$

8) $f(x)=(x^2+2),[-2,2],$

9) $f(x)=\frac{8x}{x^2-3x},[0,3]\ ,$

10) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+1}},[0,3]$

الوحدة الثانية

التفاضل وتطبيقاته

الهدف العام: معرفة كيفية حساب التفاضل وحل المسائل باستخدام التفاضل

الأهداف التفصيلية:

بعد دراسة هذه الوحدة يتمكن المتدرب_بإذن الله_ من:

- الالمام بمفهوم قواعد التفاضل وكيفية حساب بعض الدوال الهامة.
- التعامل مع تطبيقات الاشتقاق لحساب القيم الصغرى والعظمى للدالة .
- القدرة على تمثيل منحنيات الدوال .

الفصل الأول: التفاضل

تعريف ١

ليكن I مجالا من $\Re$، x_0 نقطة من I،$x_0 \neq I$ و $f: I \to \Re$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عندx_0 إذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$

و تسمى b مشتقة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f`(x_0)$

و نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I وتسمى الدالة $f: I \to \Re$

$x \to f`(x)$ بالمشتقة الأولى للدالة f

***ملاحظة*١**: f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b و تابع ε لمتغير حقيقي بحيث من أجل كل $(x_0 + h)$ يكون لدينا

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + bh + h\varepsilon(h), \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

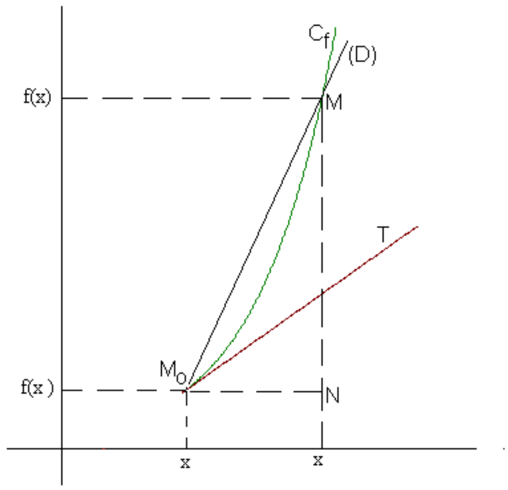
ملاحظة٢: $f`(x_0) \neq \left(f(x_0)\right)`$

١. التفسير الهندسي لمفهوم المشتقة

مشتقة f عند x_0 هو ميل المماس للمنحني C_f الممثل لـ f عند النقطة M_0 ذات الإحداثية $(x_0, f(x_0))$

$$\text{ميل المستقيم } (D) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\overline{M_0M}}{\overline{M_0N}}$$

عندما يؤول x إلى x_0 نلاحظ أن المستقيم (D) يؤول إلى M_0T المماس لـ C_f عند M_0



. تعريف المشتقة

إذاكانت الدالة$y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن المشتقة الأولى للدالة= y $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويرمز لها بإحدى الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \text{ او } \frac{df}{dx} \text{ او } \frac{d}{dx}[f(x)] \text{ او } f`(x) \text{ او } y`$$

ومنه فلإيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف نتبع الخطوات التالية:

١) نحسب مقدار تغير الدالة $f(x)$ إلى $f(x+\Delta x)$

٢) نحسب الفارق $f(x+\Delta x)-f(x)$

٣) نحسب متوسط التغير $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ بقسمة $f(x+\Delta x)-f(x)$ على Δx

٤) وأخيراً نوجد المشتقة بحساب النهاية

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

مثال ١: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = 2x + 5$

الحل:

١) نحسب مقدار تغير الدالة $f(x)$ إلى $f(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x) + 5$$

٢) نحسب الفارق $f(x+\Delta x)-f(x)$

$$f(x+\Delta x)-f(x) = 2(x+\Delta x) + 5 - (2x+5)$$
$$= 2x + 2\Delta x + 5 - 2x - 5 = 2\Delta x$$

٣) نحسب متوسط التغير $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ بقسمة $f(x+\Delta x)-f(x)$ على Δx

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

٤) وأخيراً نوجد المشتقة بحساب النهاية $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ،

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = 2$$

ونتطرق إلى حلول الأمثلة التالية باختصار ويمكن للمتدرب تفصيلها كما هو موضحا في المثال الأول .

مثال ٢: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = x^2 + 2$

الحل:

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 2 - (x^2+2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2) - (x^2 + 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

مثال ٣ : أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة

$$w = 1.2 - 0.3m^2$$

الحل:

$$w` = \frac{dw}{dm} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{w(m + \Delta m) - w(m)}{\Delta m}$$

$$= \lim_{\Delta m \to 0} \frac{(1.2 - 0.3(m + \Delta m)^2) - (1.2 - 0.3m^2)}{\Delta m}$$

$$= \lim_{\Delta m \to 0} \frac{(1.2 - 0.3m^2 - 0.6m\Delta m - 0.3(\Delta m)^2) - (1.2 - 0.3m^2)}{\Delta m}$$

$$= \lim_{\Delta m \to 0} \frac{-0.6m\Delta m - 0.3(\Delta m)^2}{\Delta m} = \lim_{\Delta m \to 0} -0.6m - 0.3\Delta m = -0.6m$$

مثال ٤: أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة

$$s = 2 + 3t^2$$

الحل:

$$s` = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 + 3(t + \Delta t)^2 - 2 - 3t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 + 3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2 - 3t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} 6t + 3\Delta t = 6t$$

مثال٥: أوجدالمشتقةالأولى باستخدام التعريف للدالة $f(x) = \sqrt{3x - 7}$

الحل:

$$f\,`(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{3(x + \Delta x) - 7} - \sqrt{3x - 7}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}-\sqrt{3x-7}}{\Delta x}\frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(x+\Delta x)-7-3x+7}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3}{\sqrt{3(x+\Delta x)-7}+\sqrt{3x-7}} = \frac{3}{\sqrt{3x-7}+\sqrt{3x-7}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$$

٣. القوانين العامة للمشتقات

القانون ١: اشتقاق الدوال ذات الأس n

لتكن الدالة: $y = f(x) = x^n$

فإن $y` = nx^{n-1}$

مثال ٦: إذا كانت $y = x^3$

فإن $y` = 3x^{3-1} = 3x^2$

مثال ٧: إذا كانت $y = x^{-4}$

فإن $y` = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

ومنه فان مشتقة $y = x$ تساوي العدد 1

لأن $y = x \Rightarrow y` = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

القانون ٢: مشتق الدالة الثابتة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هو $y` = 0$

مثال ٨: إذا كانت $y = 7$ فإن $y` = 0$ و إذا كانت $y = -5$ فإن $y` = 0$

القانون ٣: مشتق الدالة $y = ax^n$ هو $y` = nax^{n-1}$

مثال ٩: إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y` = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ١٠: أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل:

لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذاً $y` = \frac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

القانون ٤: مشتقة مجموع أو فوارق دوال

لتكن الدالة$F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \mp f_2(x) \mp \cdots \mp f_{n-1}(x) \mp f_n(x)$
حيث $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n$ دوال قابلة للاشتقاق فإن

$$F`(x) = f`_1(x) \mp f`_2(x) \mp \cdots \mp f`_{n-1}(x) \mp f`_n(x)$$

مثال ١١: لتكن الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$
فإن $y` = -3 \times 4x^{-4} - 2 \times 5x + 7 = -12x^{-4} - 10x + 7$

القانون ٥: مشتقة جداء دالتين
إذا كانت الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x).f_2(x)$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$.فإن

$$F`(x) = f`_1(x).f_2(x) + f_1(x).f`_2(x)$$

مثال ١٢: لتكن الدالة $F(x) = (3x-2)(4x+1)$
فإن $F`(x) = 3(4x+1) + 4(3x-2) = 12x + 3 + 12x - 8$

$$= 24x - 5$$

القانون ٦: مشتقة قسمة دالتين
لتكن الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$حيث $f_1(x), f_2(x)$ قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$ و$f_2(x) \neq 0$. فإن

$$F`(x) = \frac{f`_1(x)f_2(x) - f_1(x)f`_2(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$$

مثال ١٣: أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{8x^2}{x-1}$ حيث $x \neq 1$
الحل: لدينا

$$f_1(x) = 8x^2 \Rightarrow f`_1(x) = 16x \,, f_2(x) = x - 1 \Rightarrow f`_2(x) = 1$$

إذاً

$$F`(x) = \frac{f`_1(x)f_2(x) - f_1(x)f`_2(x)}{\left(f_2(x)\right)^2} = \frac{16x(x-1) - 8x^2 \times 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{16x^2 - 16x - 8x^2}{(x-1)^2} = \frac{8x^2 - 16x}{(x-1)^2}$$

القانون ٧: مشتقة الدالة التي تكتب على الشكل $F(x) = \left(f(x)\right)^n$
إذا كانت $F(x) = \left(f(x)\right)^n$ حيث الشكل $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن

$$F`(x) = n\left(f(x)\right)^{n-1} f`(x)$$

مثال ١٤: أوجد مشتقة الدالة $y = 4(2x^2 + 3x - 2)^2$
الحل:

لدينا $f(x) = 2x^2 + 3x - 2 \Rightarrow f`(x) = 4x + 3$

إذاً

$$y` = 2 \times 4(2x^2 + 3x - 2)(4x + 3) = 8(2x^2 + 3x - 2)(4x + 3)$$

القانون ٨: مشتق مقلوب دالة:

لتكن $g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق و$g(x) \neq 0$ عند كل نقاط I من $\Re$ و $f(x) = \frac{1}{g(x)}$. فإن

$$f`(x) = \frac{-g`(x)}{(g(x))^2}$$

مثال ١٥: لتكن

$$g(x) = 2x - 1 \quad x \neq \frac{1}{2} \text{ و } f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{2x-1}$$

$$\Rightarrow f`(x) = \frac{-g`(x)}{(g(x))^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

القانون ٩: مشتق الدوال المركبة

إذاكانت الدالة $Z = f(y)$ حيث $y = g(x)$

أي أن $Z = f(g(x))$ فإن $\frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dy}\frac{dy}{dx}$

مثال ١٦: لتكن الدالة $Z = y^3 + 2y + 4$ و $y = 5x^2$

فان $\frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dy}\frac{dy}{dx} = (3y^2 + 2)(10x)$

نعوض y بـ $5x^2$ فيكون لدينا $\frac{dZ}{dx} = [3(5x^2)^2 + 2]10x = 10x(75x^4 + 2)$

٤. قواعد اشتقاق الدوال المثلثية

١) إذا كانت الدالة $y = sin\,u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن $y` = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(sin\,u)}{du}\frac{du}{dx} = cos\,u\frac{du}{dx}$

٢) إذا كانت الدالة $y = cos\,u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y` = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(cos\,u\,)}{du}\frac{du}{dx} = -\,sin\,u\frac{du}{dx}$$

مثال١٩ : إذا كانت الدالة $y = sin(2x^3 - 3)$

فإن $y` = 3 \times 2x^2\,cos(2x^3 - 3) = 6x^2\,cos(2x^3 - 3)$

مثال٢٠ : أوجد مشتقة الدالة $y = cos(2\theta^3 - 3\theta^{-2})$

الحل:

لدينا $u = 2\theta^3 - 3\theta^{-2} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = 6\theta^2 + 6\theta^{-3}$

إذاً $y` = -(6\theta^2 + 6\theta^{-3})\, sin(2\theta^3 - 3\theta^{-2})$

٣) إذا كانت الدالة $y = tan\, u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y` = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(tan\, u\,)}{du}\frac{du}{dx} = sec^2u\frac{du}{dx}$$

٤) إذا كانت الدالة $y = cot\, u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y` = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(cot\, u\,)}{du}\frac{du}{dx} = -csc^2u\frac{du}{dx}$$

مثال٢١ : إذا كانت $y = tan\, x^{-2}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

لدينا $u = x^{-2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x^{-3}$

إذاً $y` = -2x^{-3}sec^2x^{-2}$

مثال ٢٢: احسب مشتقة الدالة $y = cot\, 3x$

الحل: لدينا $u = 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

ومنه فإن $y` =-3csc^2 3x$

٥) إذا كانت الدالة $y = sec\, u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y` = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(sec\, u\,)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}\tan u\, \sec u$$

٦) إذا كانت الدالة $y = \csc u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y` = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(csc\, u\,)}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u\, \csc u$$

مثال ٢٣: احسب مشتقة الدالة $y = sec\theta^2$

الحل:

لدينا $u = \theta^2 \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = 2\theta$

ومنه $y` = 2\theta\tan\theta^2\, \sec\theta^2$

مثال٢٤: احسب مشتقة الدالة $y = cscx^3$

الحل:

لدينا $u = x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$

ومنه $y` = -3x^2 cotx^3 cscx^3$

مثال ٢٥: احسب مشتقة الدالة $y = csc(2x^5 - 3)$

الحل:

لدينا $u = 2x^5 - 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 10x^4$

$$y` = -10x^4 cot(2x^5 - 3)csc(2x^5 - 3)$$

مثال: احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

$$1)y = sin^5 3x^2 \qquad 2)y = xtan\frac{1}{x} \qquad 3)y = sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$4)y = \frac{1}{x^2 sin^3 x} \qquad 5)y = (x^4 - cotx)^3 \quad 6)y = \sqrt{1 + cos^2 x}$$

$$7)y = (sinx - cosx)^2 \qquad 8)y = \sqrt{cscx^3}$$

الحل:

$$1)y = sin^5 3x^2$$

$$y` = 5sin^4 3x^2(6x)cos3x^2 = 30xsin^4 3x^2 cos3x^2$$

$$2)y = xtan\frac{1}{x}$$

$$y` = tan\frac{1}{x} - x\frac{1}{x^2}\ sec^2\frac{1}{x} = tan\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ sec^2\frac{1}{x}$$

$$3)y = sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$y` = \frac{5}{2}(2x+1)^{\frac{3}{2}}(2)tan(2x+1)^{\frac{5}{2}}sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$= 5\,(2x+1)^{\frac{3}{2}}tan(2x+1)^{\frac{5}{2}}sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$4)y = \frac{1}{x^2 sin^3 x}$$

$$y` = -\frac{2xsin^3 x + 3x^2 sin^2 xcosx}{(x^2 sin^3 x)^2} = -\frac{2sinx + 3xcosx}{x^3 sin^4 x}$$

$$5)y = (x^4 - cotx)^3$$

$$y` = 3(x^4 - cotx)^2(4x^3 + csc^2 x)$$

$$6)y = \sqrt{1 + cos^2 x} = (1 + cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y` = \frac{1}{2}(1+cos^2x)^{-\frac{1}{2}}(-2cosx\, sinx)$$

$$= -(1+cos^2x)^{-\frac{1}{2}}cosx\, sinx = \frac{-cosx\, sinx}{\sqrt{1+cos^2x}}$$

$7) y = (sinx - cosx)^2$

$$y` = 2(sinx - cosx)(cosx + sinx) \quad = 2(sin^2x - cos^2x))$$

$8) y = \sqrt{cscx^3} = (cscx^3)^{\frac{1}{2}}$

$$y` = \frac{1}{2}(cscx^3)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)(-cotx^3cscx^3)$$

$$= -\frac{3}{2}x^2csc^{-\frac{1}{2}}x^3cotx^3cscx^3 = -\frac{3}{2}x^2csc^{\frac{1}{2}}x^3cotx^3$$

تمرين تدريبي*:* احسب مشتقة الدوال التالية:

$1) f(x) = sin^3x$ $\quad 2) f(x) = tan4x^2$ $\quad 3) f(x) = sec2x^3$

$4) y = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 3cscx}$ $\quad 5) y = \sin x\, cot\left(\frac{1}{x} - x^2\right)$ $\quad 6) f(x) = cos^2(3\sqrt{x})$

$7) y = (x^3 - 7)\, sin(x^2 - 1)$ $\quad 8) y = tan\left[(2x-1)^{\frac{-1}{3}}\right]$ $\quad 9) y = tan4x^2$

$10) f(x) = 2sec^2x^7$ $\quad 11) y = \sqrt[3]{2 + tanx^2}$ $\quad 12) y = \sqrt[3]{2 + sinx^3}$

$13) y = 4cot^4x$ $\quad 14) y = csc4x^2 + 2sinx^2$ $\quad 15) y = cos^3\left(\frac{x}{x+1}\right)$

٥ . اشتقاق الدوال الأسية:

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = ba^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y` = ba^u\, ln\, au`$$

مثال ٢٦: اشتق الدالة المعرفة كما يلي: $y = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)}$

الحل:

$$y = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)}\, ln\, 2(6x+4) = (48x+32)2^{(3x^2+4x+5)}\, ln\, 2$$

القانون ٢: اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي $e \cong 2.718$

إذا كانت لدينا الدالة $y = be^{u}$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y` = be^{u}u`$$

مثال٢٧: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 8e^{2x+1}$

الحل:

$$y` = 8 \times 2e^{2x+1} = 16e^{2x+1}$$

مثال ٢٨: إذا كانت $y = -5e^{sinx}$

فإن $y` = -5cosxe^{sinx}$

٢,٥ قوانين اشتقاق الدوال اللوغارتمية

القانون ١: إذا كانت لدينا الدالة $y = b\,log_{a}\,u$ حيث $a > 0, a \neq 1$ ولتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي:

$$y` = b\frac{u`}{u}log_{a}\,e$$

مثال٢٩ : احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 3\,log(6x^{5})$

الحل:

$$y` = \frac{3\,(30x^{4})log\,e}{6x^{5}} = \frac{15}{x}log\,e\ .$$

القانون ٢: إذا كانت لدينا الدالة $y = ln\,u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x فإن

$$y` = \frac{u`}{u}$$

مثال ٣٠: اشتق الدالة التالية: $y = e^{-x} \ln x^2$

الحل:

$$y` = -e^{-x} \ln x^2 + \frac{2x}{x^2} e^{-x} = \left(\frac{2}{x} - \ln x^2\right) e^{-x}$$

مثال٣١: احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

$1) y = 5^{3x^2}$ $\quad 2) y = e^{-2x} \sin 3x$ $\quad 3) y = \ln(x+3)^2$

$4) y = e^{-x} \ln x$ $\quad 5) y = \ln^2(x+3)$ $\quad 6) y = x^2 3^x$

$7) y = \log_3(3x^2 - 5)$ $\quad 8) y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

الحل:

$1) y = 5^{3x^2}$

$y` = 6x 5^{3x^2} \ln 5$

$2) y = e^{-2x} \sin 3x$

$y` = 3e^{-2x} \cos 3x - 2e^{-2x} \sin 3x = e^{-2x}(3 \cos 3x - 2 \sin 3x)$

$3) y = \ln(x+3)^2 = 2 \ln(x+3)$

$$y` = 2\frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+3}$$

$4) y = e^{-x} \ln x$

$$y` = -e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x} = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$$

$5) y = \ln^2(x+3)$

$$y` = 2\ln(x+3)\frac{1}{x+3} = \frac{2\ln(x+3)}{x+3}$$

$6) y = x^2 3^x$

$$y` = 2x3^x + x^2 3^x \ln 3 = x3^x(x \ln 3 + 2)$$

$7) y = \log_3(3x^2 - 5)$

$$y` = \frac{1}{3x^2 - 5} \log_3 e\,(6x) = \frac{6x}{3x^2 - 5} \log_3 e$$

$8) y = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$y` = \frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\left[1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right]$$

$$= \frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\left[1 + x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] \times \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

تمرين تدريبي : احسب مشتقة الدوال التالية:

$1) y = t^3\, ln(e^{5t}-1) \quad 2) y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad 3) y = e^{x^2 - sin\,2x}\, tan\,x$

$4) y = \sqrt[3]{x^2+2x-3}\ csc\,x \quad 5) y = x^2 2^{3\,tan\,x} \quad 6) y = x^3\, ln\sqrt{x}$

$7) y = \frac{e^{-x}+cos\,x}{2e^{-2x-3\,ln\,x}} \quad 8) y = sec\,x^3\, ln(x-3) \quad 9) y = x(ln\,x)^2$

$10) y = sin\,x\, ln\frac{2x-3}{\sqrt{x^3+1}} \quad 11) y = e^{3\,ln\,cos\,2x} \quad 12) y = \sqrt{2 - ln\,x^3}$

$13) y = \frac{log\,x^2}{x} \quad 14) y = \frac{tan\,x - x^2}{3^{csc\,x}} \quad 15) y = x\, ln\frac{e^x\sqrt{2x-3}}{x^2}$

$16) y = e^{1+tan\,2x} \quad 17) y = x^4\, ln(x^3-1) \quad 18) y = x^3\, log_2(2x^3-1)$

$19) y = e^{sin\,2x}\, cos(-x^2) \quad 20) y = \frac{3e^{2x}-1}{ln(x^2+5)} \quad 21) y = \frac{3\,cot\,e^{2x}}{2\,ln(x^2+3)}$

$22) y = e^{cos\,3x}\, cot\left(\frac{1}{x} - x^2\right) \quad 23) y = ln(3x^4 - 5x^2 + 7x - 1)$

$24) y = (x^2+5x+1)\, log_5(x+3)$

٦. معادلة المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى

معادلة الخط المستقيم ذو الميل m والمار بالنقطة (x_0, y_0) تعطى بما يلي :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال ١٧: اكتب معادلة المماس للمنحني $y = x^2 + 2$ عند النقطة *(-1,3)*

الحل: ميل المماس عند النقطة *(-1,3)* هو مشتق الدالة عند هذه النقطة

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(-1,3)} = 2x\Big|_{(-1,3)} = 2(-1) = -2$$

معادلة المماس هي

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = m(x + 1) \Rightarrow y - 3 = -2(x + 1) = -2x - 2$$

$$\Rightarrow y = -2x - 2 + 3 \Rightarrow y = -2x + 1$$

مثال ١٨: اكتب معادلة العمودي على المماس للمنحني $y = x^2 + 2$ عند النقطة $(-1,3)$

الحل: لتكن m ميل المماس و m_1 ميل العمودي عليه إذن $m \times m_1 = -1$ أي أن $m_1 = \frac{-1}{m}$

من المثال السابق ميل المماس $m = -2$ فان ميل العمودي عليه $m_1 = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

مثال ١: اشتق الدوال الآتية:

$$1) y = \sqrt[5]{x^{13} + 13 + x^{-13}} \qquad 2) y = \left(\frac{x+2}{x^2 + 3x}\right)^2 \qquad 3) y = \sqrt{\frac{4}{x^3} - \sqrt{3x}}$$

$$4) y = (4x^2 - 3)^2(x + 5) \qquad 5) f(x) = \frac{2x^2 - 3}{(x^2 + 7)^{\frac{1}{3}}} \qquad 6) f(t) = \sqrt{\frac{3t^2 - 4}{2t + 5}}$$

الحل:

$$1)y=\sqrt[5]{x^{13}+13+x^{-13}}=(x^{13}+13+x^{-13})^{\frac{1}{5}}$$

$$y`=\frac{1}{5}(13x^{12}-13x^{-14})(x^{13}+13+x^{-13})^{\frac{-4}{5}}$$

$$2)y=\left(\frac{x+2}{x^2+3x}\right)^2$$

$$y`=2\left(\frac{x+2}{x^2+3x}\right)\left[\frac{(x^2+3x)-(2x+3)(x+2)}{(x^2+3x)^2}\right]$$

$$=2\left(\frac{x+2}{x^2+3x}\right)\left[\frac{x^2+3x-2x^2-4x-3x-6}{(x^2+3x)^2}\right]$$

$$=\frac{-2(x+2)(x^2+4x+6)}{x^3(x+3)^3}$$

$$3)y=\sqrt{\frac{4}{x^3}}-\sqrt{3x}\Rightarrow y=\left(\frac{4}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}-(3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y`=\frac{-4\times 3x^2}{(x^3)^2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-6}{x^4}\left(\frac{4}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-3}{x^4}\sqrt{x^3}-\frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

$$4)y=(4x^2-3)^2(x+5)$$

$$y`=16x(4x^2-3)(x+5)+(4x^2-3)^2$$

$$=(4x^2-3)(16x(x+5)+4x^2-3)$$

$$=(4x^2-3)(16x^2+80x+4x^2-3)$$

$$=(4x^2-3)(20x^2+80x-3)$$

$$5)f(x)=\frac{2x^2-3}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

$$f`(x) = \frac{4x(x^2+7)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(2x^2-3)(x^2+7)^{\frac{-2}{3}}(2x)}{\left[(x^2+7)^{\frac{1}{3}}\right]^2}$$

$$= \frac{4x - \frac{2}{3}x(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

$$6) f(t) = \sqrt{\frac{3t^2-4}{2t+5}} = \left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f`(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{6t(2t+5) - 2(3t^2-4)}{(2t+5)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2t+5}{3t^2-4}}\left(\frac{3t^2+15t+4}{(2t+5)^2}\right)$$

مثال ٢ : إذا كان$y = \frac{4}{3}\pi r^2$ ، $r = 1 + 2t$ ، اوجد $\frac{dy}{dt}$

الحل: لدينا $y = \frac{4}{3}\pi r^2$ ، $r = 1 + 2t$ وبالتالي فإن $y = \frac{4}{3}\pi(1+2t)^2$

ومنه $\frac{dy}{dt} = 2 \times \frac{4}{3}\pi(1+2t)(2) = \frac{16}{3}\pi(1+2t)$

مثال ٣: اذا كانت $s = f(t) = 2t^3 + 5(m)$ هي معادلة المسافة بدلالة الزمن. أوجد السرعة الآنية عند اللحظة $t = 5\ seconds$.

الحل: السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة s بالنسبة للزمن t وتعطي بالمشتقة$\frac{dy}{dt} = 6t^2$

السرعة الآنية عند اللحظة $t = 5\ seconds$ هي:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=5} = 6 \times 5^2 = 150\ m/s$$

تما رين :

تمرين ١ : احسب باستعمال التعريف مشتقة الدوال التالية:

$1) y = 3x + 7$ $\quad 2)\ y = \sqrt{x-5}$ $\quad 3) y = 2\sqrt{t+3}$

$4) y = -x^2 + 5x - 2$ $\quad 5) y = x^2 + 4x$ $\quad 6) y = x^3 - 1$

تمرين ٢ : أوجد المشتقة الأولى لما يلي:

$1)y=(2x^3-7)(3x^2)$ $2)\ y=\dfrac{2x^2-5}{3x}$ $3)y=\dfrac{2}{3x^2-7x}$

$4)y=(2x^4-3)^3$ $5)y=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{3}{2}}$ $6)y=\left(\dfrac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$

$7)y=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+2.5}}$ $8)y=x^2\sqrt{x-1}$ $9)y=(2x^3-4x+7)^{-2}$

$10)y=\left(4x^2\sqrt{x^3}\right)^{\frac{1}{4}}$ $11)y=2x^{-3}+7x^{-5}$ $12)y=\dfrac{1}{x+2}-x$

$13)y=\dfrac{(3x-2)(x+7)}{3x-1}$ $14)y=\dfrac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$ $15)y=x^3(5x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$

تمرين ٣: اذا كانت s معادلة المسافة معطاة بدلالة الزمن t أوجد السرعة الآنية عند اللحظة المعطاة

$1)s=(1.4t^2)(3t+2), t=2s$ $2)s=\dfrac{3.8t^3}{2t+7}, t=2s$

تمرين ٤ : أوجد ميل المماس للمنحنيات المعطاة عند النقاط المحددة

$1)y=(3x^2-4x+1)(5x^2+2), x=3$ $2)y=\dfrac{(2x-1)(4x^3)}{5x+1}, x=-1$

$3)y=x^2\sqrt{x-1}, x=2$ $4)\ y=\frac{2x^3}{(3x-5)(x+2)}, x=1$

تمرين٥:

اكتب معادلتي المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى المعطى عند النقطة المعطاة

$1)3x-2y+4=0; (2,4)$ $2)y=4-x+3x^2; (-1,8)$

$3)y=x^4-2x^2; (2,8)$

٧. الاشتقاق الضمني

تعرف الدالة في بعض الحالات بمعادلة من الشكل $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y

$$xy=1 \qquad (1)$$

إحدى الطرق لحساب المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ هي كتابة المعادلة *(1)* من الشكل:

$$y = \frac{1}{x} \qquad (2)$$

ومنه يمكن حساب المشتقة كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{x^2}$$

كما أنه يوجد إمكانية أخرى وذلك باشتقاق طرفي المعادلة *(1)* قبل كتابة y بدلالة دالة في المتغير x ، باعتبارها دالة قابلة للاشتقاق(وإن كان ليس دائما هو الحال)، ومنه فإن:

$$\frac{dy}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

ثم نستخرج $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x, y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

نعوض *(2)* في العبارة الأخيرة فنحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

- الطريقة الثانية لحساب المشتقة تسمى بالاشتقاق الضمني وتستعمل في حساب مشتقة دالة معرفة بشكل ضمني بمعادلة من الشكل: $f(x, y) = 0$

دون حل هذه المعادلة وذلك باشتقاق طرفي هذه المعادلة ثم نستخرج قيمة المشتقة $y`$ بدلالة x, y

- ويستعمل الاشتقاق الضمني خاصة عندما يصعب أو لا يمكن كتابة y بدلالة المتغير x وعندها نكتفي في حساب المشتقة $y`$ بكتابة عبارتها بدلالة x, y

قاعدة

اذا كانت المعادلة $f(x, y) = 0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y فإن اشتقاق y^n بالنسبة لـx يعطى بما يلي:

$$\frac{d(y^n)}{dx} = ny^{n-1}y`$$

إننا اشتققنا y ضمنيا بالنسبة لـx و ذلك باعتبار y دالة في x معرفة بشكل ضمني بالمعادلة المعطاة $f(x, y) = 0$

مثال٣١: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في ما يلي :

$$xy^3 - 3x^2 = xy + 5 \qquad (1)$$

الحل:

نشتق طرفي المعادلة (1) فنحصل على:

$$y^3 - 3xy^2y` - 6x = y + xy`$$
$$\Rightarrow 3xy^2y` - xy` = y - y^3 + 6x$$
$$\Rightarrow y`[x(3y^2 - 1)] = y - y^3 + 6x$$
$$\Rightarrow y` = \frac{y - y^3 + 6x}{x(3y^2 - 1)}$$

مثال٣٢: ليكن $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ أوجد المشتقة الأولى $y`$

الحل:

نشتق طرفي المعادلة المعطاة فنحصل على:

$$2x - 2y - 2xy` + 2yy` = 0$$
$$\Rightarrow y`(2y - 2x) = 2y - 2x \Rightarrow y` = 1$$

مثال٣٣: استخدم الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة الأولى فيما يلي:

$$1) 5y^2 + \sin y = x^2 \quad 2) \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1 \quad 3) x^2 = \frac{x + y}{x - y} \quad 4) x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - y = 1$$

الحل:

1) نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـx فنحصل على

$$10yy` + y`\cos y = 2x \Rightarrow y`(10y + \cos y) = 2x$$
$$\Rightarrow y` = \frac{2x}{10y + \cos y}$$

٢) باتباع نفس الخطوات السابقة يكون لدينا ما يلي:

$$-y^{-2}y` - x^{-2} = 0 \Rightarrow y` = -\frac{x^{-2}}{y^{-2}} = -\frac{y^2}{x^2}$$

٣) كذلك

$$2x = \frac{(1 + y`)(x - y) - (1 - y`)(x + y)}{(x - y)^2}$$
$$\Rightarrow 2x(x - y)^2 = y`(x - y + x + y) + x - y - x - y$$
$$\Rightarrow 2x(x - y)^2 = y`(2x) - 2y$$
$$\Rightarrow y` = \frac{2x(x - y)^2 + 2y}{2x} \Rightarrow y` = (x - y)^2 + \frac{y}{x}$$

٤) اخيراً

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y`-y`=0\Rightarrow y`\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}+1\right)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y`=\frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}+1\right)}$$

يمكن استخدام الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة لدوال لم نتطرق إليها من قبل أو يصعب معرفة قانون المشتقة لها كما هو موضح في المثال التالي:.

مثال ٣٤: أوجد $y`$ إذا كان $y=x^x$

الحل:

لدينا $y=x^x\Rightarrow ln\,y=ln\,x^x=x\,ln\,x$

نشتق الطرفين فنحصل على:

$$\frac{y`}{y}=ln\,x+x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{y`}{y}=ln\,x+1\Rightarrow y`=y(ln\,x+1)$$

نعوض قيمة $y=x^x$ إذن يصبح لدينا $y=x^x(ln\,x+1)$

مثال ٣٥: اكتب معادلتي المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى $x^2+y^2=25$ عند النقطة *(3,4)*

الحل: نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x فيكون لدينا

$$2x+2yy`=0\Rightarrow 2yy`=-2x\Rightarrow y`=-\frac{x}{y}$$

$$m=\frac{dy}{dx}\bigg|_{(3,4)}=-\frac{3}{4}$$

معادلة المماس هي

$$y-y_0=\ m(x-x_0)$$

$$y-4=\ -\frac{3}{4}(x-3)\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}+4$$

$$\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

ميل العمودي على المماس $m_1=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$

معادلة العمودي على المماس

$$y-y_0=\ m_1(x-x_0)$$

$$y-4=\ \frac{4}{3}(x-3)\Rightarrow y=\frac{4}{3}x+4-4\Rightarrow y=\frac{4}{3}x$$

تمارين

تمرين ١ : احسب ضمنيا المشتقة الأولى للدوال التالية

$1) xy + e^{xy} - y^3 \sin x = y^3 + 9x$

$2) 3x^2y^2 + 4xy - 2y = 0$

$3) x^3y^2 - 5x^2y + x = 13$

$4) \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = 1$

$5) (x^2 - 3y^2)^3 = x$

$6) xy^{\frac{2}{3}} + yx^{\frac{2}{3}} = x^2$

$7) x^2 = \dfrac{\cot y}{1 + \csc y}$

$8) 3x^2 - 4y^2 = 7$

$9) \tan^3(xy^2 + y) = x$

$10) y^3 \sin x - x^2 = y^3 e^{2x}$

$11) y + \sin y = x$

$12) x \cos y = y$

تمرين ٢: احسب مبل المماس لمنحنى الدوال التالية عند النقاط المعطاة:

$1) x^2y - 5xy^2 + 6 = 0; (3,1)$

$2) x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - y = 1; (1,-1)$

$3) y^2 - x + 1 = 0; (10,3)$

$4) \dfrac{1-y}{1+y} = x; (0,1)$

تمرين ٣: اكتب معادلتي المماس والناظم (العمودي على المماس) للمنحنى المعطى بالمعادلات التالية عند النقطة المحددة

$1) x^2 - 3x^2 + 2x - 3 = 0; (1,2)$

$2) 2xy + y^2 - 3 = 0; (1,1)$

$3) x^2y - 3y^2 + 10 = 0; (-1,2)$

٨. المشتقات من الرتبة العليا

تعريف:

تعرف المشتقة من الرتبة n للدالة $f(x)$ على أنها المشتقة الأولى للمشتقة $(n-1)$ للدالة $f(x)$ بشرط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق n من المرات .

فمثلاً المشتقة السابعة هي المشتقة الأولى للمشتقة السادسة ولذلك لإيجاد المشتقة من الرتبة n نبدأ بالدالة فنحسب المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة....ثم المشتقة من الرتبة $n-1$ ثم المشتقة من الرتبة n

إذاكانت $\boldsymbol{y = f(x)}$ حيث $\boldsymbol{y}$ دالة في $\boldsymbol{x}$ و لنفرض أن $\boldsymbol{f}$ قابلة لاشتقاق $\boldsymbol{n}$ من المرات على المجال $I \subset \Re$.

فيكون لدينا التعريفات الآتية:

$$y` = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = f`(x)$$ (المشتقة الأولى لـy بالنسبة لـx)

$$y`` = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(f`(x))}{dx} = f``(x)$$ (المشتقة الثانية لـy بالنسبة لـx)

$$y``` = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(f``(x))}{dx} = f```(x)$$ (المشتقة الثالثة لـy بالنسبة لـx)

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d(f```(x))}{dx} = f^{(4)}(x)$$ (للمشتقة الرابعة لـy بالنسبة لـx)

. . . .
.
. . . .
.
. . . .
.

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{dx} = f^{(n)}(x)$$ (للمشتقة n لـy بالنسبة لـx)

مثال٣٦ : *أوجد المشتقة الثانية للدالة* $\mathbf{y = \boldsymbol{\sin x}}$

الحل:

$$y` = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

$$y`` = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

مثال ٣٧ : أوجد $\frac{d^3y}{dx}$ (المشتقة الثالثة) إذا كانت $y = 6x^5$

الحل:

$$y` = \frac{d(6x^5)}{dx} = 30x^4$$

$$y`` = \frac{d(30x^4)}{dx} = 120x^3$$
$$y``` = \frac{d(120x^3)}{dx} = 360x^2$$

قاعدة: إذا كان y كثيرة حدود من الدرجة n فإن المشتقة من الدرجة $n+1$ تساوي الصفر.

مثال ٣٨: أوجد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5 + 3x^3 + 5x - 1$

الحل:

بما أن y كثيرة حدود من الدرجة الخامسة إذن $y^{(6)} = 0$

مثال ٣٩: إذا كانت $y = e^{-x} \ln x$ فأوجد$y``$

الحل:

$$y` = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} \ln x$$
$$y`` = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x} \ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

مثال٤٠: إذا كانت $y = e^{-x} \ln x^2$ فأوجد$y``$

الحل: لدينا $y = e^{-x} \ln x^2 = 2e^{-x} \ln x$

ومنه ومن المثال السابق فإن

$$y`` = -2e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

مثال ٤١: إذا كانت $y = e^{-2x} \sin 3x$ فأوجد$y``$

الحل:

$$y` = 3e^{-2x} \cos 3x - 2\, e^{-2x} \sin 3x$$
$$y`` \quad = -9e^{-2x} \sin 3x - 6e^{-2x} \cos 3x - 2(3e^{-2x} \cos 3x - 2e^{-2x} \sin 3x)$$
$$= -e^{-2x}(12\cos 3x + 5 \sin 3x)$$

مثال: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث أن المسافة (s) بالقدم $feet$ عند الزمن (t) بالثانية تعطى بالمعادلة $s = t^3 - 2t$

١) أوجد السرعة الآنية عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٢) أوجد التسارع الآني عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٣) أوجد الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2feet/sec^2$

الحل:

١) السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2$ هي السرعة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

السرعة بعد 4 ثواني $\frac{ds(4)}{dt} = (3t^2 - 2)\Big|_{t=4} = 3(4)^2 - 2 = 46ft/sec$

٢) العجلة (التسارع) هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t$ العجلة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

التسارع بعد 4 ثواني $\frac{d^2s}{dt^2}\Big|_{t=4} = 6t\Big|_{t=4} = 24ft/sec^2$

٣) الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2feet/sec^2$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{3}sec$$

تمارين :

تمرين ١: أوجد المشتقة المشار إليها للدوال التالية:

$1) y = 3x^2 - 2x^3; y``$ $\quad 2) y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^2; y``$ $\quad 3) y = 7 + 6x^2 - 4x^4; y```$

$4) y = 8x^3 - 2x^4; y```$ $\quad 5) y = x(x-1)^3; y``$ $\quad 6) y = \frac{x}{x-4}; y``$

$7) y = 3x^5 - 10x^3 + 15x; y^{(6)}$ $\quad 8) y = \sqrt{\frac{1}{x^2-1}}; y``$ $\quad 9) y = \frac{2x}{x^2+1}; y``$

$10) y = e^{-2x}(\cos 3x - \sin 2x); y``$ $\quad 11) y = (1+x^2)\ln x; y``$

$12) y = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{4}; y```$

تمرين ٢: احسب المشتقة الثانية للدوال التالية عند النقاط المشار إليها:

$1) f(x) = 8x^{10} + 2x^8 - 4x^5 + 1; x = 1$ $\quad 2) f(x) = \frac{4x^2}{3x-7}; x = 2$

$3) f(x) = \sqrt{4 - x + 2x^4}; x = 1$ $\quad 4) f(x) = 2x^2\sqrt{2x^4+3}; x = -1$

تمرين ٣: تعطى معادلة المسافة $s(km)$ بدلالة الزمن $t(h)$ أوجد السرعة والتسارع عند الزمن المشار إليه

$1) s = (2t^2-3)^4; t = 2h$ $\quad 2) s = \sqrt{3.4 - t^4}; t = 1h$

$3) s = t^2\sqrt{1+t^2}; t = 1h$ $\quad 4) s = \frac{1}{2t^2-3}; t = 4h$

$5) s = (2t+7)\sqrt{t^3-1}; t = 2h$ $\quad 6) s = 1.8t^3 - 2.9t^2 - 1; t = 3h$

الفصل الثاني: تطبيقات التفاضل

١. القيم العظمى و الصغرى المحلية:

تمهيد:

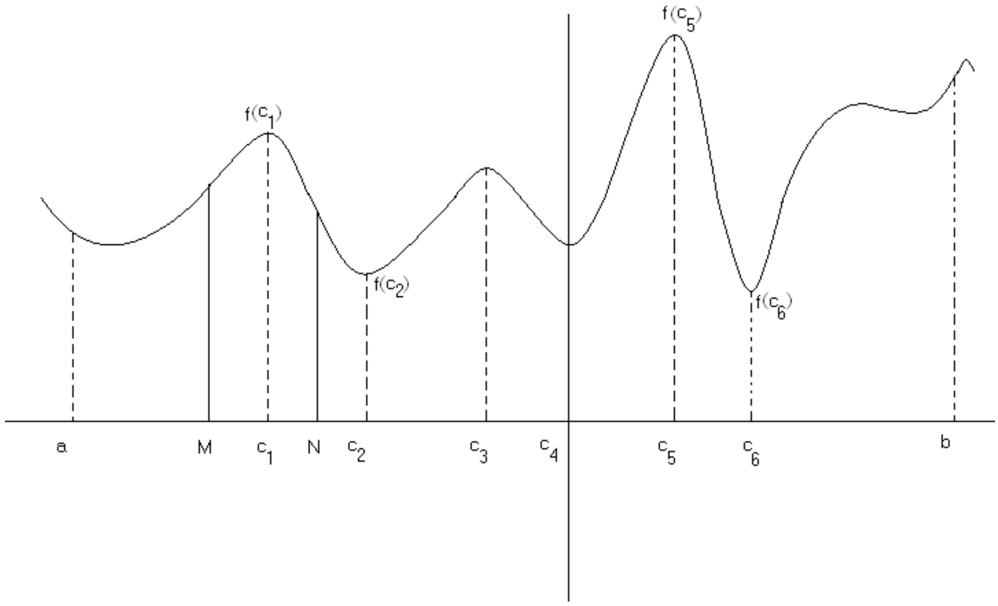
إن دراسة القيم العظمى والصغرى المحلية ومعرفة التزايد والتناقص للدالة أهمية كبيرة في معرفة سلوك ومسار الدالة التي نحتاج إليها خاصة عند الرسم البياني للدالة كما أن لها تطبيقات واسعة في العلوم التقنية والاقتصادية.

١. القيم العظمى و الصغرى للدالة $f(x)$

١,١. القيمة الصغرى المحلية:

إن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية هي $f(c)$ عند النقطة c من مجالها S إذا وجدت فترة أخرى (مجال آخر) I بحيث يكون $I \subset S$ و $c \in I$ إذا تحقق:

$$f(x) \geq f(c) \qquad \forall x \in I$$



$$S = [a, b], \qquad I = (M, N) \subset S$$

قيمة الدالة عند النقطة c_2 هي $f(c_2)$

وحتى تكون $f(c_2)$ قيمة صغرى محلية لا بد أن يكون:

$$f(c_2) \leq f(x) \qquad \forall x \in I$$

أما إذا كان المجال المأخوذ هو S فإننا في هذه الحالة تسمى القيمة الصغرى بالقيمة الصغرى المطلقة وتكون $f(c_6)$ قيمة صغرى مطلقة.

٢,١. القيمة العظمى المحلية

إن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية وهي $f(c)$ عند النقطة c من مجالها S إذا وجدت فترة أخرى(مجال آخر) I بحيث يكون $c \in I, I \subset S$ إذا تحقق

$$f(x) \leq f(C) \quad \forall x \in I$$

لتكن قيمة الدالة عند النقطة c_1 هي $f(c_1)$ إذا كانت

$$f(c_1) \geq f(x) \qquad \forall x \in I$$

فإن $f(c_1)$ قيمة عظمى محلية

أما إذا كان المجال S فإننا في هذه الحالة نسمي القيمة العظمى بالقيمة العظمى المطلقة وتكون $f(c_5)$ قيمة عظمى مطلقة.

مثال ١: أوجد القيم العظمى و الصغرى للدالة $y = \sqrt{16 - x^2}$

الحل :

الدالة $y = \sqrt{16 - x^2}$ معرفة ومستمرة على المجال $[-4,+4]$ وهي تبلغ قيمة عظمى تساوي 4 في النقطة $x=0$ لأن:

$4 > f(x)$ من أجل كل من $-4 \leq x < 0 , 0 < x \leq 4$

نظرية

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 وتبلغ في هذه النقطة قيمة عظمى نسبية أو قيمة صغرى نسبية فإن $f`(x_0) = 0$

١,٣. النقاط الحرجة

النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ هي النقاط التي تنعدم عندها المشتقة الأولى للدالة $f(x)$.

مثال ٢: أوجد النقاط الحرجة للدالة $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

الحل:

نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x، نضعها تساوي الصفر و نحل المعادلة ذات المجهول x

$$y` = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ او } x = -1$$

نعوض في عبارة الدالة لكل قيمة لـx

عندما $x = 2$ فإن $y = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 2 = -\frac{4}{3}$

عندما $x = -1$ فإن $y = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 2 = \frac{19}{6}$

ومنه فإن النقاط الحرجة هي : $\left(2,-\frac{4}{3}\right),\left(-1,\frac{19}{6}\right)$

٢.الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة

نظرية

١) إذا كانت المشتقة الأولى $f`(x) > 0$ على الفترة المفتوحة (a,b) فإن f دالة متزايدة فعلا على هذه الفترة

٢) إذا كانت المشتقة الأولى $f`(x) < 0$ على الفترة المفتوحة (a,b) فإن f دالة متناقصة فعلا على هذه الفترة

ومنه فإن دراسة إشارة المشتقة الأولى تمكننا من معرفة تزايد وتناقص الدالة وحساب القيم العظمى والصغرى للدالة

٣. اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى

إذا كانت الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى في النقطة x_0 فإن مشتقة $f(x)$ موجبة عندما تكون $x < x_0$ وقريبة منها قرباً كافياً ، أي أن ميل المماس موجب في النقاط القريبة من x_0 والواقعة على يسارها. و مشتقة $f(x)$ سالبة عندما تكون $x > x_0$ وقريبة منها قرباً كافياً، أي أن ميل المماس سالب في النقاط القريبة من x_0 والواقعة على يمينها.

أما إذا كان الدالة $f(x)$ تبلغ نهاية صغرى في النقطة x_0 فإن $f`(x) < 0$ من أجل كل $x < x_0$ وقريبة من $x_0$ قرباً كافياً، و $f`(x) > 0$ من أجل كل $x > x_0$ وقريبة من x_0 قرباً كافياً.

ومنه فلحساب النقاط الحرجة للدالة $f(x)$نتبع الخطوات التالية:

١) نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x

٢) نبحث عن النقاط الحرجة وذلك بحل المعادلة $f`(x) = 0$

٣) ندرس إشارة المشتقة الأولى عن يمين ويسار النقاط الحرجة c ويكون لدينا الحالات التالية:

أ) إذا تغيرت إشارة المشتقة من السالب إلى الموجب حول النقطة الحرجةc فإنه يوجد قيمة صغرى محلية هي $f(c)$ وإحداثياتها هي $(c, f(c))$

ب) إذا تغيرت إشارة المشتقة من الموجب إلى السالب حول النقطة الحرجةc فإنه يوجد قيمة عظمى محلية هي $f(c)$ وإحداثياتها هي $(c, f(c))$

ج) إذا لم تتغير إشارة المشتقة حول النقطة الحرجةc فإنه لا يوجد قيمة قصوى على مجاله

مثال ٣: أوجد القيم العظمى و الصغرى للدالة وادرس تزايد وتناقص الدالة

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

الحل: إن الدالة$f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\Re$ ومشقتها تعطى بما يلي:

$$f`(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

وإن المشتقة تنعدم في النقاط $x = -1$ او $x = 1$ وإشارته تحدد من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب. ونلاحظ من الجدول التالي:

x	$-\infty$	-1	1 $+\infty$
$1 - x$	+	+	-
$1 + x$	-	+	+
$1 - x^2$	-	+	-
$f`(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$	-	+	-
$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

بما أن $f`(x) < 0$من أجل كل $x < -1$ و $f`(x) > 0$ من أجل كل $-1 < x < 1$ أي أن إشارة المشتقة تتحول من السالبة إلى الموجبة حول النقطة التي يكون فيها $x = -1$ ومنه فالدالة$f(x)$ تبلغ نهاية صغرى محلية وهي $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

وأيضا $f`(x) > 0$ من أجل كل $-1 < x < 1$ و $f`(x) < 0$ من أجل كل $x > 1$ أي أن إشارة المشتقة تتحول من الموجبة إلى السالبة حول النقطة التي يكون فيها $x = 1$ ومنه فالدالة $f(x)$ تبلغ نهاية عظمى محلية وهي $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
كما نستنتج أن الدالة متناقصة في المجالين $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ لأن $f`(x) < 0$ على هذين المجالين ومتزايدة في المجال $(-1,1)$ لأن $f`(x) > 0$ على هذا المجال.

٤. اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى:

إذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة سالبة فإن هذه النقطة هي قيمة عظمي محلية

وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقطة الحرجة موجبة فإن هذه النقطة هي قيمة صغرى محلية

مثال ٤: أوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدالة $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

الحل: المشتقة الأولى والثانية

$$y` = x^2 - x - 2$$
$$y`` = 2x - 1$$

من المثال ٢ فإن النقاط الحرجة هي $\left(-1, \frac{19}{6}\right), \left(2, -\frac{4}{3}\right)$

بالنسبة للنقطة الحرجة $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$

$$y``\Big|_{x=2} = 2(2) - 1 = 3 > 0$$

ومنه $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ هي نهاية صغرى محلية

بالنسبة للنقطة الحرجة $\left(-1, \frac{19}{6}\right)$

$$y``\Big|_{x=-1} = 2(-1) - 1 = -3 < 0$$

ومنه $\left(-1, \frac{19}{6}\right)$ هي نهاية عظمى محلية

٥. نقطة الانعطاف

إذا كانت المشتقة الثانية معدومة وتغير إشارتها حول نقطة فإن هذه النقطة هي نقطة انعطاف.

مثال ٥: بالنسبة للدالة $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$$y`` = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

إذا كان $x < \frac{1}{2}$ فإن $y`` < 0$ وإذا كان $x > \frac{1}{2}$ فإن $y`` > 0$

ومنه فعندما يكون $x = \frac{1}{2}$ يكون لدينا نقطة انعطاف

لحساب الإحداثية الثانية نعوض بقيمة $x = \frac{1}{2}$ في عبارة الدالة

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{11}{12}$$

إذاً النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{12}\right)$ هي نقطة انعطاف.

تمرين : ادرس التزايد والتناقص وأوجد النقاط العظمى والصغرى ونقاط الانعطاف إن وجدت للدوال التالية:

$1) y = x^3$ $\quad 2) y = -x^3$ $\quad 3) y = \sqrt{x}$ $\quad 4) y = 1 - x^2$

$5) y = x^2 + \frac{16}{x^2}$ $\quad 6) y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\quad 7) y = \frac{1}{x-1}$ $\quad 8) y = 3x^5 - 10x^3 + 15x$

٦. رسم المنحنيات:

لرسم منحنى دالة $f(x)$ يمكن إتباع الخطوات التالية:

- تحديد مجموعة تعريف الدالة $f(x)$.
- حساب النهايات عند أطراف فترات مجموعة التعريف واستنتاج المستقيمات المماسات إن وجدت
- حساب المشتقة ودراسة إشارتها ومن ثم استنتاج تزايد وتناقص الدالة.
- إيجاد النقاط الحرجة
- حساب المشتقة الثانية ودراسة إشارتها.
- تلخيص كل ما سبق في جدول تغيرات الدالة ثم رسم المنحنى .

مثال ٦: ارسم منحنى الدالة: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

الحل : إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\Re$

لدينا من المثال ٤ النقطة $(2, -\frac{4}{3})$ هي قيمة صغرى محلية والنقطة $(-1, \frac{19}{6})$ هي قيمة عظمى محلية

ومن المثال ٥ النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{11}{12})$ هي نقطة انعطاف

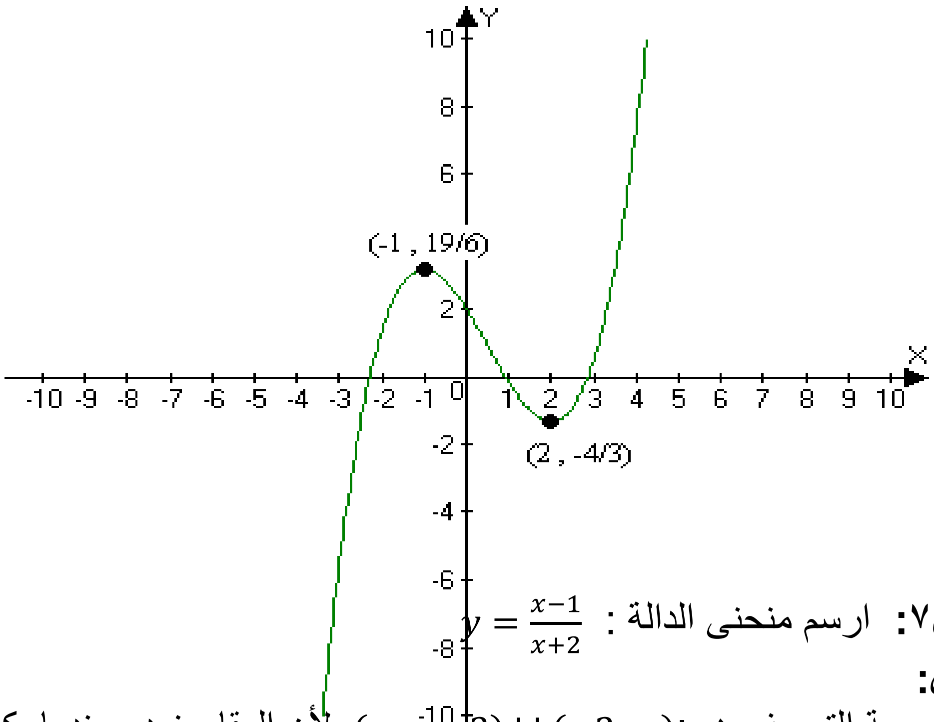
النهايات:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = -\infty,$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	2 $\quad +\infty$
$x+1$	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$f`(x) = (x-2)(x+1)$	+	-	+
$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

الرسم البياني



مثال٧: ارسم منحنى الدالة : $y = \frac{x-1}{x+2}$

الحل:

مجموعة التعريف هي:$(-\infty,-2) \cup (-2,\infty)$ لأن المقام ينعدم عندما يكون $x = -2$ أي أن الدالة غير معرفة عند هذه النقطة ومعرفة من أجل كل قيمة للمتغير $x \neq -2$

النهايات : $y = 1$

لدينا $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1 \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$

ومنه $y = 1$ مستقيم مقارب في جوار $\infty, -\infty$

ولدينا

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \, , \quad \lim_{x\to-2^-} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-3}{0^-} = \infty$$

ومنه $x = -2$ مستقيم مقارب في جواري *-2*

المشتقة الأولى :

$$y` = \frac{(1)(x+2)-(x-1)(1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$y` = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \quad \forall x \in (-\infty,-2) \cup (-2,\infty)$

وبالتالي ليس هناك نقاط حرجة وأن الدالة متزايد في المجالين $(-\infty,-2),(-2,\infty)$

المشتقة الثانية : $y`` = 3(x+2)^{-2}$

$$y`` = -6(x+2)^{-3} = \frac{-6}{(x+2)^3} \neq 0 \, , \forall x \in (-\infty,-2) \cup (-2,\infty)$$

وبالتالي ليس هناك نقاط انعطاف

نقاط التقاطع مع المحاور:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$$

نقطة تقاطع مع محور الصادات $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

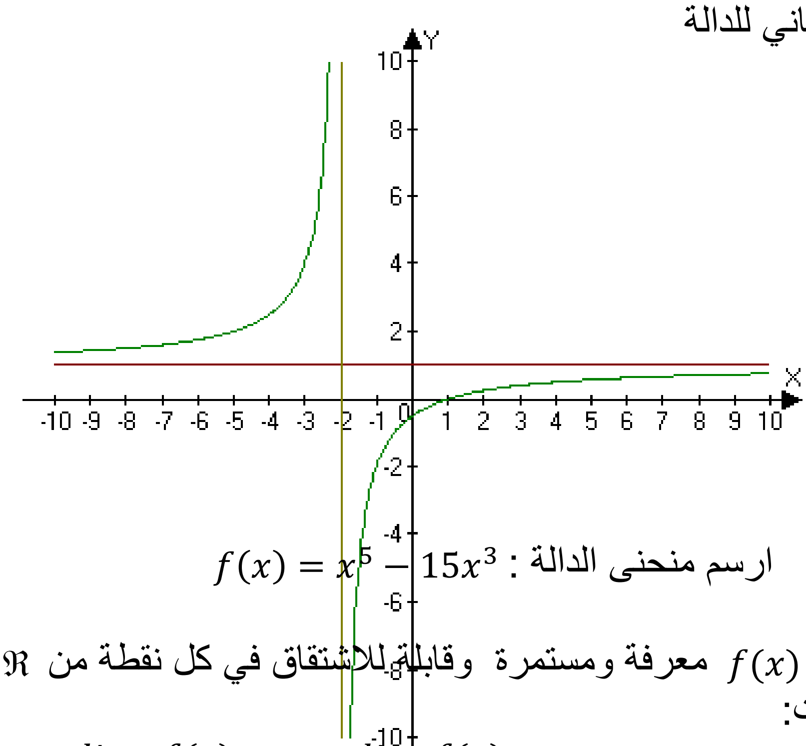
$$\frac{x-1}{x+2} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

نقطة تقاطع مع محور السينات : $(1,0)$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$y` = \frac{3}{(x+2)^2}$	$+$		$+$
$y = \frac{x-1}{x+2}$	↗		↗

الرسم البياني للدالة



مثال ١١: ارسم منحنى الدالة : $f(x) = x^5 - 15x^3$

الحل :

إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\Re$

النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \,,\, \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

المشتقة الأولى:

$$y` = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x-3)(x+3)$$

المشتقة الثانية:

$$y`` = 20x^3 - 90x$$

لحساب النقاط الحرجة ، نحل المعادلة $5x^2(x-3)(x+3) = 0$

$$5x^2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = 0, 3, -3$$

نستعمل اختبار المشتقة الثانية

عندما $x = 0$ فإن $y`` = 0$
وعندما $x = 3$ فإن $y`` = 270 > 0$
ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية صغرى محلية عند $x = 3$

$$x = 3 \Rightarrow (3)^5 - 15(3)^3 = -162$$

إذن $(3, -162)$ هي نهاية صغرى محلية
عندما $x = -3$ فإن $y`` = -270 < 0$
ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية عظمى محلية عند $x = -3$

$$x = -3 \Rightarrow (-3)^5 - 15(-3)^3 = 162$$

إذن $(-3,162)$ هي نهاية عظمى محلية
ولنستعمل اختبار المشتقة الأولى للنقطة الحرجة $(0,0)$

$$x < 0 : y` = 5x^2(x^2 - 9) < 0$$
$$x > 0 : y` = 5x^2(x^2 - 9) < 0$$

أي أن لا يوجد تغيير لإشارة المشتقة الأولى في جوار $x = 0$ ومنه $(0,0)$ لاهي نهاية صغرى ولا عظمى .

لنبحث عن نقطة الانعطاف إن وجدت بوضع $y`` = 0$

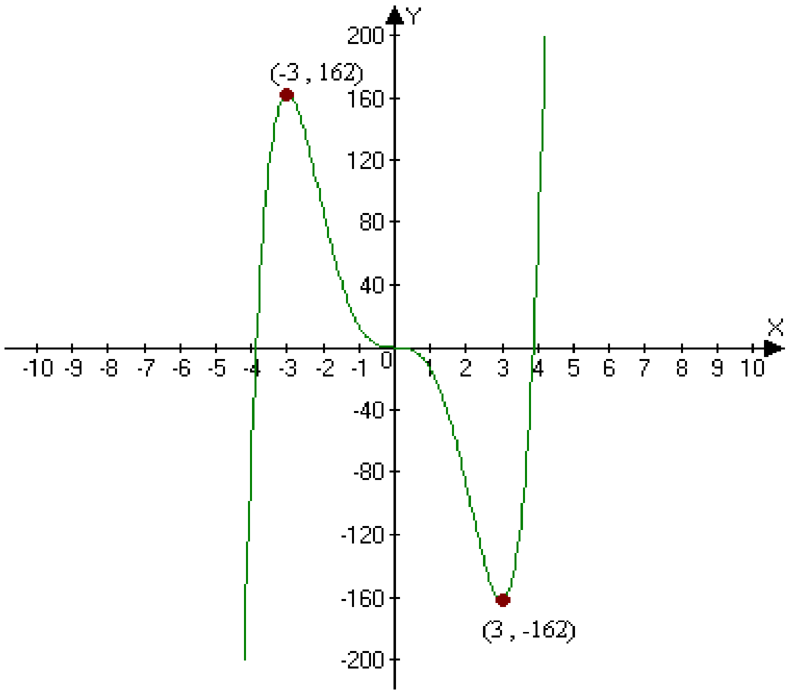
$$y`` = 20x^3 - 90x = 10x(2x^2 - 9) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

لندرس تغيرات إشارة للمشتقة الثانية بجوار هذه النقاط
لدينا$x < 0 : \ y`` > 0; \ x > 0 : \ y`` < 0$
ومنه $(0,0)$ هي نقطة انعطاف
ولدينا $x < \frac{3}{\sqrt{2}} : y`` < 0 \ ; \ x > \frac{3}{\sqrt{2}} : y`` > 0$
ومنه $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -100\right)$ هي نقطة انعطاف
كذلك $x < -\frac{3}{\sqrt{2}} : y`` < 0 \ ; \ x > -\frac{3}{\sqrt{2}} : y`` > 0$
ومنه فإن$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 100\right)$ هي نقطة انعطاف
نلاحظ أن الدالة $f(x)$ دالة فردية أي أن $f(x) = -f(-x)$ ومنه فإن الرسم البياني للدالة يكون متناظر بالنسبة للمركز
نقاط التقاطع مع محور السينات: هي $(0,0)(\sqrt{15}, 0), (-\sqrt{15}, 0)$
جدول التغيرات

x	$-\infty$	-3	$+\infty$ 3
$x + 3$	-	+	+
$x - 3$	-	-	+

$f`(x) = 5x^2(x+3)(x-3)$	+	-	+
$f(x) = x^5 - 15x^3$	↗	↘	↗

الرسم البياني للدالة



مثال ١٢: ارسم منحنى الدالة: $y = x^4 - 2x^2$

الحل: إن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\Re$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \,,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \,,$$

المشتقة الأولى: $y` = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$

المشتقة الثانية: $y`` = 12x^2 - 4$

لحساب النقاط الحرجة ، نحل المعادلة $4x(x-1)(x+1) = 0$

$$4x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0,1,-1$$

نستعمل اختبار المشتقة الثانية

عندما $x = 0$ فإن $y`` = -4 < 0$

ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية عظمى محلية عند $x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

إذاً $(0,0)$ هي نهاية عظمى محلية

عندما $x = 1$ فإن $y`` = 8 > 0$

ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية صغرى محلية عند $x = 1$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$

إذاً $(1, -1)$ هي نهاية صغرى محلية

عندما $x = -1$ فإن $y`` = 8 > 1$

ومنه فإن الدالة تبلغ نهاية صغرى محلية عند $x = -1$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$

إذن $(1, -1)$ هي نهاية صغرى محلية

لنبحث عن نقطة الانعطاف إن وجدت بوضع $y`` = 0$

$$y`` = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

لندرس تغيرات إشارة للمشتقة الثانية بجوار هذه النقاط

لدينا $x < -\frac{1}{\sqrt{3}} : y`` > 0 : x > -\frac{1}{\sqrt{3}} : y`` < 0$

لندرس تغيرات إشارة للمشتقة الثانية بجوار هذه النقاط

لدينا $x < -\frac{1}{\sqrt{3}} : y`` > 0 : x > -\frac{1}{\sqrt{3}} : y`` < 0$

ومنه $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$ هي نقطة انعطاف

ولدينا $x < \frac{1}{\sqrt{3}} : y`` < 0 : x > \frac{1}{\sqrt{3}} : y`` > 0$

ومنه $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$ هي نقطة انعطاف

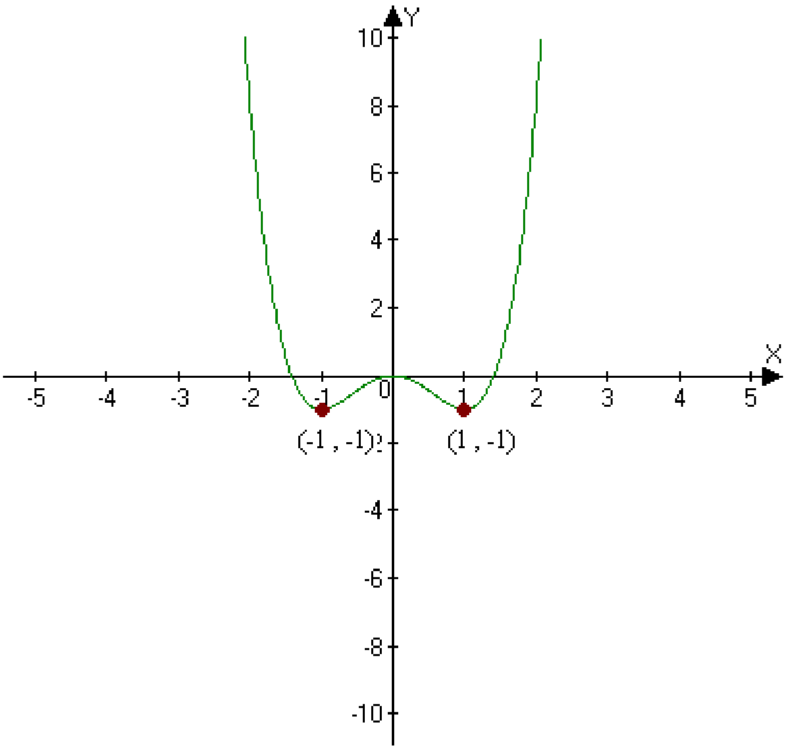
نلاحظ أن الدالة $f(x)$ دالة زوجية أي أن $f(x) = f(-x)$ومنه فإن الرسم البياني للدالة يكون متناظرة بالنسبة لمحور العينات

نقاط التقاطع مع محور السينات: هي $(0,0), (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-3	$+\infty$ 3
$x + 3$	-	+	+
$x - 3$	-	-	+
$f`(x) = 4x(x-1)(x+1)$	+	-	+
$f(x) = x^5 - 15x^3$	↗	↘	↗

الرسم البياني للدالة



تمرين : ارسم منحنيات الدوال التالية:

$1) y = x^3 \qquad 2) y = -x^3 \qquad 3) y = \sqrt{x} \qquad 4) y = 3x^5 - 10x^3 + 15x$

$5) y = x^2 + \frac{16}{x^2} \qquad 56) y = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad 7) y = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{4} \qquad 8) y = 1 - x^2$

٧. **تطبيقات على القيم العظمى والصغرى:**

لنفرض أنه يمكن كتابة قيم x , y المتناسبة من الشكل $y = f(x)$ ومنه يمكن أن نحسب القيم العظمى أو الصغرى للدالة .

مثال١ :

لتكن لدينا كرة S نصف قطرها $a = 8$ أوجد ارتفاع الاسطوانة الدورانية القائمة التي يمكن أن ترسم ضمن الكرة S بحيث يكون حجمها أعظم ما يمكن.

الحل: ليكن z ارتفاع الاسطوانة المطلوب رسمها ضمن الكرة S و r نصف قطر قاعدتها، فنجد أن حجم الاسطوانة هو $v = \pi r^2 z$

وبما أن: $r^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = a^2$

فيكون: $v = \pi z\left(a^2 - \frac{z^2}{4}\right)$

إن الدالة $v = v(z)$ قابلة للاشتقاق من أجل كل قيمة لـ z و تأخذ قيمة عظمى في نقطة يكون فيها $\frac{dv}{dz} = 0$ ، ومنه:

$$\frac{dv}{dz} = \pi\left(a^2 - \frac{z^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\pi z^2 = 0 \Rightarrow \pi a^2 - \pi\frac{3z^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \pi a^2 = \pi\frac{3z^2}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{3z^2}{4} \Rightarrow z = \pm\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

وبما أن الارتفاع موجب إذن $z = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$

ولمعرفة هل أن هذا الارتفاع يحقق حجم أعظم أو أدني نحسب المشتقة الثانية عند هذا الارتفاع

$$v`` = -\frac{3}{2}\pi z \Rightarrow v``\left(\frac{16}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{2}\pi\left(\frac{16}{\sqrt{3}}\right) = -\pi\frac{24}{\sqrt{3}} < 0$$

إذاً الحجم يكون أعظم من أجل الارتفاع $z = \frac{16}{\sqrt{3}}$

مثال ٢:

القوة الكهربائية $P(Watts)$ المولدة من إحدى المصادر تعطى بالمعادلة التالية:

$$P = 5.12R - \frac{8}{3}R^3$$

حيث $P(Ohms)$ هي المقاومة بالدائرة الكهربائية.

١) من أجل أية قيمة للمقاومة تكون القوة الكهربائية عظمى ؟

٢) ما هي القوة الكهربائية العظمى ؟

الحل: إن الدالة $P = P(R)$ قابلة للاشتقاق من أجل كل قيمة لـ R و تأخذ قيمة عظمى أو صغرى في نقطة يكون فيها $\frac{dP}{dR} = 0$، ومنه:

$$P` = 5.12 - 8R^2 = 0 \Rightarrow R = \pm\sqrt{\frac{5.12}{8}} \Rightarrow R = \pm 0.8\ Ohms$$

لكن المقاومة لا تكون سالبة ومنه: $R = 0.8\ Ohms$

لمعرفة هل هذه القيمة ت قابلها قيمة عظمى أو صغرى، نحسب المشتقة الثانية

$$P`` = -16R = 0 \Rightarrow P``(0.8) = -16\ (0.8) = -12.8 < 0$$

ومنه هذه القيمة تقابلها قيمة عظمى.

إذن القوة الكهربائية تكون عظمى من أجل $R = 0.8\,Ohms$ وهي :

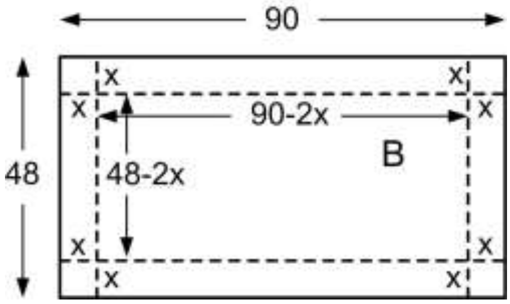
$$P(0.8) = 5.12(0.8) - \frac{8}{3}(0.8)^3 = 2.731\,Watts$$

مثال ٣:

نستخدم قطع مستطيلة من الورق المقوي، أطواله 48 سم في 90 سم لإنتاج علب مفتوحة، بقطع نفس المربع من كل زاوية ورفع الجهات لإلصاقها ،
كم يجب أن تكون مساحة المربع المقطوع حتى يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن ؟

الحل :

ليكن x هو طول ضلع المربع المقطوع في كل زاوية .ومنه يكون حجم العلبة :



$$V = x(90-2x)(48-2x)$$
$$\Rightarrow V = 4(x^3 - 69x^2 + 1080x)$$
$$\Rightarrow V` = 4(3x^2 - 138x + 1080)$$
$$= 12(x^2 - 46x + 360)$$
$$= 12(x-10)(x-36)$$
$$V` = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ او } x = 36$$

لمعرفة أي من القيمتين
تقابلها حجم أكبر أو أصغر نحسب قيمة المشتقة الثانية عند هاتين القيمتين

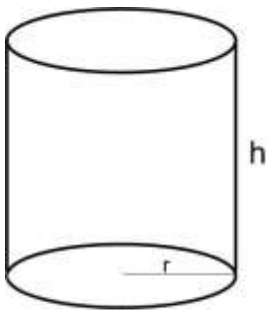
$$V`` = 12(2x - 46)$$

ومنه $V``(10) = -312 < 0$ و $V``(36) = 312 > 0$

إذاً القيمة $x = 10$ تقابلها قيمة عظمى والقيمة $x = 36$ تقابلها قيمة صغرى ومنه
مساحة المربع هي $x^2 = 100cm^2$

مثال ٤:

أوجد الأطوال الأوفر اقتصاديا لبناء خزانا أسطوانيا مغلقا حجمه $16\,\pi\,m^3$ لتخزين أسمدة كيميائية .



الحل :

ليكن r نصف قطر قاعدة الخزان و h ارتفاعه.

مساحة الخزان هي:

$$A = 2(\pi r^2) + (2\pi r)h = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

حجم الخزان هو:

$$V = \pi r^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16}{r^2}$$

بالتعويض في مساحة الخزان ينتج:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{16}{r^2} = 2\pi r^2 + \pi\frac{32}{r}$$

وهذا يعطي عبارة A كدالة في r

وهذه الدالة قابلة للاشتقاق من أجل كل قيم $r \neq 0$ و تأخذ قيمة عظمى أو صغرى في نقطة يكون فيها $\frac{dA}{dr} = 0$ ومنه:

$$A` = 4\pi r - 32\pi r^{-2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = 32\pi r^{-2}$$

$$\Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

لمعرفة هل يقابل هته القيمة مساحة عظمى أو صغرى نحسب قيمة المشتقة الثانية عند هذه القيمة

$$A`` = 4\pi + 64\pi r^{-3} = 0 \Rightarrow A``(2) = 4\pi + 64\pi(2)^{-3} = 12\pi > 0$$

ومنه المساحة تكون صغرى عندما يكون نصف القطر $r = 2$ ولنحسب طول الارتفاع h من المعادلة $h = \frac{16}{r^2}$

ويكون طول الارتفاع h من أجل $r=2$ هو 4 وبالتالي الأطوال الأوفر هي :

$$r = 2m \ , h = 4m$$

مثال ٥:

شركة تصنع بطاقات إلكترونية بحيث ربحها P يعطي كدالة لعدد البطاقات المنتجة في الأسبوع كالتالي: $P = 3x^5 - 10x^3 + 15x$

كم يجب أن يكون إنتاج البطاقات في الأسبوع للحصول على أكبر ربح ممكن ؟

الحل :

تأخذ الدالة P قيمة عظمى أو صغرى في نقطة يكون فيها $\frac{dP}{dx} = 0$ ومنه:

$$P` = 15x^4 - 30x^2 + 15 = 15(x^4 - 2x^2 + 1) = 15(x^2 - 1)^2$$

$$P` = 0 \Rightarrow 15(x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ او } x = -1$$

لا يمكن عدد البطاقات أن يكون سالبا إذن $x = 1$:

و منه لمعرفة هل تحقق $x = 1$ قيمة الربح عظمى أو صغرى نحسب قيمة المشتقة الثانية عند $x = 1$

$$P`` = 60x^3 - 60x \Rightarrow P``(1) = 60 - 60 = 0$$

لا يمكننا أن نستنتج من هذا هل يقابل $x = 1$ قيمة عظمى أم صغرى إذاً نستخدم المشتقة الأولى :

$$P` = 15(x^2 - 1)^2 \geq 0, \qquad \forall x$$

إذاً $x = 1$ لا يقابلها قيمة عظمى

ومنه القيمة العظمى تتحصل علبها بأقصى عدد ممكن من البطاقات لأن $P` > 0$ أي أن الدالة متزايدة .

ملاحظة:

يمكن حلها بطريقة أبسط وهو ملاحظة من البداية أن المشتقة موجبة دوما وبالتالي الدالة متزايدة دوما ومنه للحصول على أكبر ربح ممكن هو إنتاج أقصى عدد من البطاقات.

تمارين تدريبية:

١) إذا كانت الباخرة B في الساعة التاسعة صباحا على بعد $104\,km$ إلى الشرق تماما بالنسبة لباخرة أخرى A.وكانت B مبحرة نحو الغرب تماما بسرعة $16\,km/hr$ أما A فكانت مبحرة نحو الجنوب تماما بسرعة $24\,km/hr$ ، فإذا استمرتا وفق البرنامج الموصوف فمتى تكونان أقرب ما يمكن من بعضيهما وعلى أي بعد؟

٢) أوجد عددين موجبين مجموعها 36 وحاصل ضربهما أكبر ما بمكن ؟

٣) قسم العدد 10 إلى جزئيني بحيث يكون مجموع مربعي الجزئيين أصغر ما يمكن

٤) لتكن لدينا كرة s نصف قطرها $a = 8$ أوجد نصف قطر القاعدة والارتفاع للمخروط ألدوراني القائم الذي يمكن أن يرسم على الكرة بحيث يكون حجمه أصغر ما يمكن.

٥) أوجد المستطيل الذي يمكن رسمه داخل المنطقة المحصورة بين القطع المكافئ $y^2 = 4px$ والمستقيم $x = a > 0$ بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن

٦) قسم العدد 120 إلى عددين بحيث يكون حاصل الضرب P لأحد هما بمربع الآخر أكبر ما يمكن ٧) مساحة قطعة من ورق الإعلانات تساوى $2m^2$. فإذا كانت الهوامش المطلوبة من أعلى الورقة وأسفلها $21cm$ وعلى الجانبين $14cm$ ، فما هما بعدا قطعة الورق كي تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن؟

٨) فلاح عنده 600 م من السياج ويرغب في استعماله كلية في حصر حقل مستطيل الشكل يحاذي نهرا ولا يحتاج إلى سياج من جهة النهر . ماذا يجب أن تكون أبعاد الحقل لحصر أكبر مساحة ممكنة ؟

٩) وعاء اسطواني قاعدته دائرية الشكل وحجمه $1000cm^2$. أوجد أبعاده بحيث تكون كمية المعدن اللازمة لصنعه (أي مساحته السطحية) أصغر ما يمكن وذلك في الحالتين:

(ا) الوعاء مفتوح من قاعدته العليا (ب)الوعاء مغلق.

١٠) إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج x جهاز راديو يوميا تساوي $(0.25x^2 + 35x + 25)$ دولارا والسعر الذي يمكن أن يباع به الجهاز الواحد $(50 - 50x)$ دولارا.

فكم ينبغي أن يكون الإنتاج اليومي لنحصل على أكبر ربح ممكن ؟

١١) يراد عمل سياج حول حقل مستطيل الشكل ذي مساحة مفروضة. فإذا كان هناك نهر على أحد جوانب الحقل (طول المستطيل) و لا نحتاج إلى إقامة سياج على هذا الجانب فبرهن

أنه إذا كان طول الحقل يساوى ضعف عرضه فالتكلفة اللازمة تكون أقل ما يمكن.
١٢) ما هي أبعاد مخروط دائري قائم ذي حجم أقل ما يمكن نستطيع رسمه حول كرة نصف قطرها $20cm$ ؟
١٣) بين أن المثلث المتساوي الأضلاع والذي ارتفاعه $3r$ هو أقل المثلثات المتساوية الساقين مساحة والتي يمكن رسمها على دائرة نصف قطرها r.

الوحدة الثالثة

التكامل وتطبيقاته

الهدف العام:

معرفة مفهوم التكامل المحدود والغير محدود وقدرته على تكامل دوال أساسية باستخدام طرق التكامل، وكيفية تطبيق التكامل في حساب المساحة تحت المنحنى .

الأهداف التفصيلية :

- الالمام بمفهوم التكامل وكيفية حساب تكامل الدوال المشهورة .
- الالمام ببعض طرق التكامل.
- الالمام بمفهوم التكامل المحدود . .
- اكتساب القدرة على حساب المساحة تحت منحنى الدالة باستخدام التكامل المحدود.

الفصل الأول:التكامل الغير محدود

١. الدوال الأصلية والتكامل

تعريف ١:

يقال إن $\boldsymbol{F(x)}$ دالة أصلية (تكامل) لدالة $\boldsymbol{f(x)}$ إذا تحققت العلاقة التالية:
$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ أي أن $dF(x)=dxf(x)$ بمعني أن تفاضل $F(x)$ هو $f(x)$
ومن التعريف السابق فإن الدالة $F(x)+c$ حيث c عدد ثابت اختياري، يمكن أن تكون دوال أصلية(تكامل) للدالة $f(x)$. والسبب يرجع لكون مشتقة العدد الثابت يساوي الصفر نستنتج أنه إذا وجدت لدالة ما، دالة أصلية، فإنه يوجد عدد غير منته من الدوال الأصلية لها تختلف عن بعضها بالعدد الثابت ويكون لدينا التعريف التالي :

تعريف ٢:

تكامل دالة $f(x)$ هو دالة $F(x)=c$ ، حيثc عدد ثابت و :

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

ويرمز لتكامل الدالة $f(x)$ بالرمز

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

ويقرأ بالتكامل غير المحدود لـ $f(x)dx$ ويسمى العدد الثابت c بثابت التكامل.

مثال ١:

لدينا $d(x^5)=5x^4dx$ اذاً $\int 5x^4dx=x^5+c$

و $d(e^{3x})=3e^{3x}dx$ اذاً $\int 3e^{3x}dx=e^{3x}+c$

و $d(\cos x^2)=-2x\sin x^2\,dx$ اذاً $\int -2x\sin x^2\,dx=\cos x^2+c$

يعني أن التكامل هو العملية العكسية (للاشتقاق) للتفاضل.

٢. قوانين التكامل غير المحدود للدوال الجبرية

القاعدة ١: (تكامل العدد الثابت)

ليكن a عدداً ثابتاً فإن

$\int adx=ax+c$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٢:

$$1)\int \mathbf{5dx = 5x + c}$$
$$2)\int -7dx = -7x + c$$
$$3)\int -\frac{5}{3}dx = -\frac{5}{3}x + c$$

القاعدة ٢: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

باستثناء $n = -1$ حيث c ثابت التكامل

مثال ٣:

$$1)\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$
$$2)\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$
$$3)\int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$$

القاعدة ٣:

يمكن إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو بالعكس دون أن تتغير النتيجة

أي أن: $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

مثال ٤:

$$\mathbf{1)}\int \mathbf{7x^4dx = 7\int x^4dx = \frac{7}{5}\,x^5 + c}$$
$$2)\int \frac{-2}{x^3}dx = -2\int x^{-3}dx = -2\frac{x^{-2}}{-2} + c = x^{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$$
$$3)\int \sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}}dx = \sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt{5}x^{\frac{1}{3}} + c$$

القاعدة ٤:

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملا ت هذه الدوال

أي أنه إذا كانت $f(x), g(x)$ دوال قابلة للتكامل فيx .فإن

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)dx$$

وبصفة عامة إذا كانت $f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)$ دوالاً قابلة للتكامل في x .فإن:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]dx$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx$$

مثال ٥:

$$1)\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2dx - \int 2xdx + \int 5\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$$
$$2)\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \int \sqrt{x}dx - 2\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int x^{-3}\,dx$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{-2} + c$$
$$3)\int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right)dx = \int x^5dx - \sqrt{2}\int x\,dx - 3\int x^{-2}dx$$
$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 3x^{-1} + c$$

القاعدة ٥:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق في x و$n \neq -1$ فتكون لدينا القاعدة التالية:

$\int u`u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ حيث c ثابت التكامل .

مثال ٦:

$$1)\int 6x^2(2x^3 - 6)^4dx :$$

لدينا $u = 2x^3 - 6 \Rightarrow u` = 6x^2$ وبالتالي فإن:

$$\int 6x^2(2x^3 - 6)^4dx = \int u`u^4dx = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(2x^3 - 6)^5}{5} + c$$

$2)\int x^3(x^4 - 2)^5dx$:

لدينا $u = x^4 - 2 \Rightarrow u` = 4x^3$ ومنه فإن:

$$\int x^3(x^4 - 2)^5dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(x^4 - 2)^5dx = \frac{1}{4}\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{24}(x^4 - 2)^6 + c$$
$$3)\int (x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 3x + 1}dx = \int (x^2 + 1)(x^3 + 3x + 1)^{\frac{1}{2}}dx$$

لدينا $u = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow u` = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$ وبالتالي فإن:

$$\int (x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 3x + 1}dx = \frac{1}{3}\int 3(x^2 + 1)(x^3 + 3x + 1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}(x^3 + 3x + 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

القاعدة ٦: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int \frac{u`}{u} dx = ln|u| + c$$

مثال ٧:

$$1) \int \frac{4x^3 + 2}{x^4 + 2x + 1} dx:$$

لدينا $u = x^4 + 2x + 1 \Rightarrow u` = 4x^3 + 2$ وبالتالي فإن

$$\int \frac{4x^3 + 2}{x^4 + 2x + 1} dx = \int \frac{u`}{u} dx = ln|u| + c = ln|x^4 + 2x + 1| + c$$

$$2) \int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2} + 5} dx:$$

لدينا $u = e^{2x^2} + 5 \Rightarrow u` = 4xe^{2x^2}$ وبالتالي فإن

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2} + 5} dx = \frac{1}{4}\int \frac{u`}{u} dx = \frac{1}{4} ln|u| + c = \frac{1}{4} ln\left|e^{2x^2} + 5\right| + c$$

$$3) \int \frac{sec^2 x}{5 - tan\, x} dx:$$

لدينا $u = 5 - tan\, x \Rightarrow u` = -sec^2 x$ وبالتالي فإن

$$\int \frac{sec^2 x}{5 - tan\, x} dx = -\int \frac{-sec^2 x}{5 - tan\, x} dx: = -\int \frac{u`}{u} dx = -ln|u| + c$$

$$= -ln|5 - tan\, x| + c$$

$$4) \int \frac{x + cos\, 2x}{x^2 + sin\, 2x} dx:$$

لدينا $u = x^2 + sin\, 2x \Rightarrow u` = 2x + 2\, cos\, 2x = 2(x + cos\, 2x)$ وبالتالي فإن

$$\int \frac{x + cos\, 2x}{x^2 + sin\, 2x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x + cos\, 2x)}{x^2 + sin\, 2x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{u`}{u} dx = \frac{1}{2} ln|u| + c =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2 + sin\, 2x| + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

$1)\int\left(2\sqrt{x}-3x^4\right)dx \quad 2)\int(x^4+2x)^2(4x^3+2)\,dx \quad 3)\int\sqrt{x}(x-3)^2dx$

$4)\int x\sqrt{x^2+1}dx \quad 5)\int\frac{(1+3x)}{\sqrt{2x+3x^2}}dx \quad 6)\int(3x-x^3)^5(1-x^2)dx$

$7)\int\int\left(\frac{3}{x^4}-4x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx \quad 8)\int 5(5x^7+2)^2x^6\,dx \quad 9)\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$

$10)\int 3(3x^2-1)^3xdx \quad 11)\int\sqrt{1-4x}\,dx \quad 12)\int\frac{t^3-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

$13)\int\sqrt[3]{5+x^3}(x^2)dx \quad 14)\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx \quad 15)\int\frac{\sec x\tan x}{3+2\sec x}dx$

٣. قواعد تكامل الدوال المثلثية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x بتطبيق القانون الأساسي لحساب التكامل للقوانين الأساسية للتفاضل يكون لدينا القوانين التالية:

$1)\int u`\cos u\ dx=\sin u+c \qquad 2)\int u`\sin u\,dx=-\cos u+c$

$3)\int u`\sec^2u\,dx=\tan u+c \qquad 4)\int u`\csc^2udx=-\cot u+c$

$5)\int u`\sec u\tan u\ dx=\sec u+c \qquad 6)\int u`\csc u\cot u\,dx=-\csc u+c$

$7)\int u`\tan u\ dx=\ln|\sec u|+c \qquad 8)\int u`\cot u\,dx=-\ln|\csc u|+c$

مثال ٨:

$$1)\int\sin 4xdx=\frac{1}{4}\int 4\sin 4xdx=-\frac{1}{4}\cos 4x+c$$

$$2)\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

$$3)\int x\,tan(2x^2+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int 4x\,tan(2x^2+1)\,dx=\frac{1}{4}ln|sec(2x^2+1)|+c$$

$$4)\int cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx=-2\int -\frac{1}{2}cot\left(7-\frac{x}{2}\right)dx=2\,ln\left|csc\left(7-\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

$$5)\int [sin(3x+2)+cos(2-3x)\,]dx$$

$$=\int sin(3x+2)\;dx+\int cos(2-3x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int 3\,sin(3x+2)\;dx-\frac{1}{3}\int -3\,cos(2-3x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}cos(3x+2)\;-\frac{1}{3}sin(2-3x)+c$$

$$6)\int sec^2(4x)dx=\frac{1}{4}\int 4sec^2(4x)dx=\frac{1}{4}tan(4x)+c$$

$$7)\int x^2csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx=-\int -x^2csc^2\left(3-\frac{x^3}{3}\right)dx=cot\left(3-\frac{x^3}{3}\right)+c$$

$$8)\int x^2csc2x^3cot2x^3dx=\frac{1}{6}\int 6x^2csc2x^3cot2x^3dx=-\frac{1}{6}csc2x^3+c$$

مثال ٩:

$$1)\int \frac{3\,sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx.$$

$$u=2-\sqrt{x}\Rightarrow u`=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{3\,sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx\;=3(-2)\int -\frac{1}{2}\frac{sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=-6\int u`\,sin\,u\,dx$$

$$=6\,cos\,u+c=6\,cos(2-\sqrt{x})+c$$

$$2)\int \frac{cos(3+5\,ln\,9x)}{7x}dx.$$

$$u=3+5\,ln\,9x\Rightarrow u`=\frac{5}{x}$$

$$\int \frac{cos(3+5\,ln\,9x)}{7x}dx = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\int \frac{5}{x}cos(3+5\,ln\,9x)\,dx$$
$$= \frac{1}{35}\int u`\,cos\,u\,dx = \frac{1}{35}sin\,u + c = \frac{1}{35}sin(3+5\,ln\,9x) + c$$

3) $\int cos\,6x\,cos(9+4\,sin\,6x)\,dx.$

$$u = 9 + 4\,sin\,6x \Rightarrow u` = 24\,cos\,6x$$
$$\int cos\,6x\,cos(9+4\,sin\,6x)\,dx = \frac{1}{24}\int 24\,cos\,6x\,cos(9+4\,sin\,6x)\,dx$$
$$= \frac{1}{24}sin(9+4\,sin\,6x) + c$$

4) $\int \frac{tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}dx.$

$$u = 5 - 4x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow u` = 2x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x^3}}$$

$$\int \frac{tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{x^3}}tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{2}\int u`\,tan\,u\,dx$$
$$= \frac{1}{2}ln|sec\,u| + c = \frac{1}{2}ln\left|sec\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\right| + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

1) $\int cos^2x\,sin\,x\,dx$ 2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}sin\sqrt{x}\,dx$ 3) $\int (1+sin\,t)^2\,cos\,t\,dt$

4) $\int 4\,xcos(3x^2)\,dx$ 5) $\int x^2sec^2x^3dx$ 6) $\int cos^32t\,sin\,2t\,dt$

7) $\int cos\,4\theta\sqrt{2-sin\,4\theta}\,d\theta$ 8) $\int tan^35xsec^25xdx$ 9) $\int \frac{cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$

10) $\int \frac{3\,cot\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ 11) $\int (1-cos\,x)^3\,sin\,xdx$ 12) $\int \frac{sec\,x\,tan\,x}{(3+2\,sec\,x)^2}dx$

13) $\int \frac{sec^2x}{\sqrt{5-tan\,x}}dx$ 14) $\int (sin\,3\theta)^{\frac{1}{3}}\,cos\,3\theta d\theta$ 15) $\int \frac{cos\,x-sin\,x}{(sin\,x+cos\,x)^3}dx$

$16)\int \sin 3\theta sec^2 \cos 3\theta\, d\theta$ $\quad 17)\int x^7 \tan(8x^8)dx$ $\quad 18)\int \frac{x+\cos 2x}{\sqrt[3]{x^2+\sin 2x}}dx$

$19)\int te^{t^2} sec\left(e^{t^2}\right)\tan\left(e^{t^2}\right)dt$ $\quad 20)\int \sin(\cos 3x)\sin 3x\, dx$

$21)\int (2+\tan^2 x)sec^2 x dx$

٤. قواعد تكامل الدوال الأسية

القاعدة ١:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x و a عدد موجب حيث $a \neq 1$ يكون لدينا القانون التالي :

$$\int u`a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

مثال ١٠:

$$1)\int 5^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int -3(5^{-3x})dx = -\frac{1}{3}\frac{5^{-3x}}{\ln 5} + c$$

$$2)\int x6^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\int 4x6^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\frac{6^{2x^2}}{\ln 6} + c$$

القاعدة ٢:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القانون التالي :

$$\int u`e^u dx = e^u + c$$

مثال ١١:

$$1)\int (x-1)\, e^{x^2-2x+1}dx \ :$$

لدينا $u = x^2-2x+1 \Rightarrow u` = 2x-2 = 2(x-1)$ وبالتالي فإن

$$\int (x-1)\, e^{x^2-2x+1}dx = \frac{1}{2}\int 2(x-1)\, e^{x^2-2x+1}dx = \frac{1}{2}\int u`\, e^u dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2-2x+1} + c$$

$2)\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx:$

لدينا $u = \sin x - x \Rightarrow u` = \cos x - 1$ وبالتالي فإن

$$\int (\cos x - 1)\, e^{\sin x - x} dx = \int u`\, e^{u} dx = e^{u} + c = e^{\sin x - x} + c$$

$3) \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx:$

لدينا $u = e^x + 1 \Rightarrow u` = e^x$ وبالتالي فإن

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int e^x (e^x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \int u` u^{-\frac{1}{2}} dx = 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2(e^x+1)^{\frac{1}{2}} + c$$

$4) \int x\, e^{x^2} \left(e^{x^2} + 1\right)^7 dx:$

لدينا $u = e^{x^2} + 1 \Rightarrow u` = 2xe^{x^2}$ وبالتالي فإن

$$\int x\, e^{x^2} \left(e^{x^2}+1\right)^7 dx = \frac{1}{2} \int u` u^7 dx = \frac{1}{2} \frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{16} \left(e^{x^2}+1\right)^8 + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

$1) \int (e^{-x} + \cos 2x + 1) dx$ $\quad 2) \int e^{1+\cos x} \sin x\, dx$ $\quad 3) \int e^{2x} \sec(e^{2x} - 1) dx$

$4) \int 2e^{2x+\cos x} (2 - \sin x) dx$ $\quad 5) \int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3} dx$ $\quad 6) \int 5e^{2x} e^{1+e^{2x}} dx$

$7) \int \sec x \tan x\, e^{5+2\sec x} dx$ $\quad 8) \int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x} dx$ $\quad 9) \int \frac{e^{3-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$10) \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ $\quad 11) \int \frac{e^{1+\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$ $\quad 12) \int \frac{11^{13+\csc 2x}}{\sin 2x \tan 2x} dx$

$13)\int 3^{2x}e^{5-3^{2x}}dx \qquad 14)\int (e^{-x}+e^{x})^2dx \qquad 15)\int 2^{1+\cot 5t}csc^2 5tdt$

٥. التكامل بالتجزئة

مقدمة: لنفرض أننا نريد تكامل

$\int \sin x\, e^{-x}dx$ أو $\int x\sin x\, dx$

نلاحظ أننا لا نستطيع تطبيق قوانين التكامل مباشرة ففي مثل هذه الحالات نحاول حلها بالتجزئة وهي تتمثل في تحويل التكامل الذي لا يمكن حسابه مباشرة إلى مجموع جبري لدالة وتكامل يمكن حسابه .

٥,١. قانون التكامل بالتجزئة

من قانون مشتق جداء دالتين لدينا $d(uv)=vdu+udv$

نكامل الطرفين فنحصل على: $uv=\int vdu+\int udv$

ومنه قانون التكامل بالتجزئة

$$\int udv = uv-\int vdu$$

وبهذه الطريقة نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int udv$ إلى حساب التكامل $\int vdu$ الذي يكون عادة أقل صعوبة من الأول إذا أحسنا اختيار u, dv

و طريقة استخدام هذه القاعدة موضحة في الأمثلة الآتية:

مثال ١٣: $\int x\sin x\, dx$ لا يمكننا حسابه مباشرة لأنه لا ينطبق عليه أي من قوانين التكامل المباشرة ولذلك سنحسب هذا التكامل بطريقة التكامل بالتجزئة

ولنفرض أن $u=x \Rightarrow du=dx$

و $dv=\sin x\, dx \Rightarrow v=-\cos x$

$$\int x\sin x\, dx = -x\cos x+\int \cos x\, dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+c$$

مثال ١٣: $\int xe^{x}dx$

لا نستطيع أن نحلها مباشرة،إذاً فنحاول حسابه باستعمال التكامل بالتجزئة.

لنفرض أن $u=x \Rightarrow du=dx$

و $dv=e^{x}dx \Rightarrow v=e^{x}$

نطبق القانون: $\int udv = uv-\int vdu$

ومنه $\int xe^{x}dx = xe^{x}-\int e^{x}dx$

$=xe^{x}-e^{x}+c=e^{x}(x-1)$

مثال ١٤: $\int \ln x\, dx$

نلاحظ أننا لم نأخذ أي قاعدة تكامل تحسب $\int \ln x\, dx$ وبالتالي لنحسب التكامل باستعمال التكامل بالتجزئة

ولنأخذ $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

ولنطبق قانون التكامل بالتجزئة $\int u dv = uv - \int v du$

فيكون لدينا $\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx$

$$= x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

مثال ١٥:

1) $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$

نفرض أن $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

ولنفرض $dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة فإن

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

2) $\displaystyle\int x^3 \sin(2x^2)\, dx$

بفرض أن $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$

وبفرض أن $dv = x \sin(2x^2)\, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4} \cos(2x^2)$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$\int x^3 \sin(2x^2)\, dx = -\frac{1}{4} x^2 \cos(2x^2) + \frac{1}{2} \int x \cos(2x^2)\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} x^2 \cos(2x^2) + \frac{1}{8} \sin(2x^2) + c$$

3) $\displaystyle\int x^5 e^{x^3} dx$

بفرض أن $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$

فإن $dv = 3x^2 e^{x^3}\, dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{x^3}$

اذاً

$$\int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \int x^2 e^{x^3}\, dx = \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3} e^{x^3} + c$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 - 1)e^{x^3} + c$$

4) $\int sin^2 x dx$

نعلم أن $sin^2 x = sin\, x\, sin\, x$

و لنفرض: $u = sin\, x \Rightarrow du = cos\, x\, dx$

و $dv = sin\, x\, dx \Rightarrow v = -\, cos\, x$

اذاً $\int sin^2 x dx = -sin\, x\, cos\, x + \int cos^2 x dx$

وبما أن $sin^2 x + cos^2 x = 1 \Rightarrow cos^2 x = 1 - sin^2 x$

اذاً $\int sin^2 x dx = -sin\, x\, cos\, x + \int (1 - sin^2 x) dx$

$$= -sin\, x\, cos\, x + \int dx - \int sin^2 x dx$$

$$= -sin\, x\, cos\, x + x - \int sin^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int sin^2 x dx + \int sin^2 x dx = x - sin\, x\, cos\, x + c$$

$$\Rightarrow 2\int sin^2 x dx = x - sin\, x\, cos\, x + c$$

$$\Rightarrow \int sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} sin\, x\, cos\, x + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات التالية:

1) $\int cos^2 x dx$ 2) $\int x\sqrt{x+4} dx$ 3) $\int x(x+5)^{-10} dx$ 4) $\int x e^{-3x} dx$

5) $\int ln(5x+3)\, dx$ 6) $\int x^2 \cos(5x^2)\, dx$ 7) $\int x^2 e^x dx$ 8) $\int x e^{1-3x} dx$

9) $\int x\, sec\, x\, tan\, x\, dx$

٦. التكامل بالكسور الجزئية

تمهيد :

تسمى الدالة $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ دالة كسرية"إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرات حدود في x

مثال ١٦: الدوال التالية: $\frac{x-1}{x^2+1}, \frac{-2x-1}{x^2+1}, \frac{x(x-1)}{x^3+1}, \frac{1}{x(x^2+1)}$ دوال كسرية

بينما الدوال التالية : $\frac{|x-2|}{x^3}, \frac{\sin x+e^x}{x^2}, \frac{\ln x}{x}$ ليست بدوال كسرية

إذا كانت درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$ فإن $F(x)$ تسمى كسرا حقيقياً

يمكن التعبير عن كل كسر غير حقيقي بمجموع كثيرة حدود وكسر حقيقي مثل

$$\frac{x^3-1}{x^2+1} = x - \frac{x+1}{x^2+1}$$

ويمكن التعبير عن كل كسر حقيقي بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) من الشكل: $\frac{A}{(x-r)^r}$ أو $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ حيث ax^2+bx+c غير قابل للاختزال أي لا يقبل جذورا حقيقية وسنقتصر دراستنا على الكسور التي يمكن كتابتها بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية)

الحالة الأولى:

إذا كانت $g(x), f(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة

$g(x) = (x+r_1)(x+r_2)(x+r_3)\dots(x+r_n)$ حيث $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \cdots \neq r_n$

وإذا كانت $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا. فإنه يمكن وضعه في الصورة

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x+r_1)} + \frac{A_2}{(x+r_2)} + \frac{A_3}{(x+r_3)} + \cdots + \frac{A_n}{(x+r_n)}$ حيث $A_1, A_2, \dots, A_n$ ثوابت يجب تعيينها.

مثال ١٧: $\int \frac{2x+1}{x^2-4}\,dx$

نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام أحد قوانين التكامل مباشرة وبالتالي نجزئ الكسر

لنفرض أن الثابتين A_1, A_2 يحققان ما يلي :

$$\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x+2)} \qquad (1)$$

حيث A_1, A_2 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا

$$\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{A_1(x+2)+A_2(x-2)}{x^2-4}$$

نضرب طرفي المعادلة في x^2-4 فنحصل على

$$2x+1 = A_1(x+2) + A_2(x-2)$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x

نأخذ $x=-2$ فنحصل على $2(-2)+1 = A_1(-2+2) + A_2(-2-2)$

ومنه $-3 = -4A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{3}{4}$

نأخذ $x=2$ فنحصل على $2(2)+1 = A_1(2+2) + A_2(2-2)$

ومنه $5 = 4A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{5}{4}$

نعوض A_1, A_2 في المعادلة (1) فيصبح لدينا

$$\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{5}{4}\frac{1}{(x-2)} - \frac{3}{4}\frac{1}{(x+2)}$$

اذاً

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4}dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{(x-2)}dx - \frac{3}{4}\int \frac{1}{(x+2)}dx$$

$$= \frac{5}{4}ln|x-2| - \frac{3}{4}ln|x+2| + c$$

الحالة الثانية :

إذا كانت $g(x), f(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة $g(x) = (x+r)^n$ حيث $n \in N$

و كانت $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا .فإنه يمكن وضعه في الصورة

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x+r)} + \frac{A_2}{(x+r)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x+r)^n}$ حيث $A_1, A_2, \dots, A_n$ ثوابت يجب تعيينها

مثال ١٨ : $\int \frac{x-2}{(x+1)^3}dx$

نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام قوانين التكامل مباشرة وبالتالي نجزئ الكسر

لنفرض أن الثوابت $A_1, A_2, \dots, A_n$ تحقق ما يلي :

$(1) \qquad \frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}$ حيث A_1, A_2, A_3 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا

$$\frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3}{(x+1)^3}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x+1)^3$ فنحصل على

$$x-2 = A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x

نأخذ $x = -1$ فنحصل على $-1-2 = 0+0+A_3$ ومنه $A_3 = -3$

نأخذ $x = 0$ فنحصل على $-2 = A_1 + A_2 + A_3$

ومنه $-2 = A_1 + A_2 - 3 \Rightarrow A_2 = 1 - A_1$

نأخذ $x = 1$ فنحصل على $1-2 = 4A_1 + 2A_2 + A_3$

ومنه فإن $-1 = 4A_1 + 2A_2 - 3 \Rightarrow 2 = 4A_1 + 2(1-A_1) \Rightarrow A_1 = 0$

بتعويض $A_2 = 1 - A_1$ نحصل على

$$A_2 = 1$$

نعوض A_1, A_2, A_3 في المعادلة (1) فيصبح لدينا

$$\frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-3}{(x+1)^3}$$

إذاً $\int \frac{x-2}{(x+1)^3}dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 3\int \frac{dx}{(x+1)^3} = -(x+1)^{-1} + \frac{3}{2}(x+1)^{-2} + c$

ملاحظة: يمكن استعمال الحالتين في آن واحد كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ١٩: $\int \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}dx$

نلاحظ أننا نحتاج إلى تجزئة الكسر $\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}$

نفرض أن A_1, A_2, A_3 تحقق ما يلي:

$(1) \quad \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$ حيث A_1, A_2, A_3 ثوابت يجب تعيينها

نلاحظ أننا استعملنا الحالتين الأولى والثانية معاً

نوحد المقامات فيصبح لدينا

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)}{(x^2-1)(x-1)}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x^2-1)(x-1)$ فيكون لدينا

$$3x-1 = A_1(x-1)^2 + A_2(x+1)(x-1) + A_3(x+1)$$

لنأخذ $x = 1$ فنحصل على

$$3-1 = A_1(1-1)^2 + A_2(1+1)(1-1) + A_3(1+1) \Rightarrow A_3 = 1$$

لنأخذ $x = -1$ فنحصل على

$$-3-1 = A_1(-1-1)^2 + A_2(-1+1)(-1-1) + A_3(-1+1) \Rightarrow A_1 = -1$$

لنأخذ $x = 0$ فنحصل على

$$-1 = A_1(-1)^2 - A_2 + A_3 \Rightarrow A_2 = A_1 + A_3 + 1 \Rightarrow A_2 = 1$$

نعوض A_1, A_2, A_3 في المعادلة (1) فيصبح لدينا

$$\frac{3x-1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{3x-1}{(x^2+1)(x-1)}dx = -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= -ln|x+1| + ln|x-1| - (x-1)^{-1} + c$$

تمرين تدريبي: احسب التكاملات الآتية

1) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx$ 2) $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx$ 3) $\int \frac{dx}{x^2-16}$

4) $\int \frac{3xdx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 5) $\int \frac{3t^2-4}{(t+1)(x-2)(x-3)}dt$ 6) $\int \frac{2x^2+3}{x^2(x-1)}\,dx$

7) $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)^2}dx$ 8) $\int \frac{3t+7}{t^2-2t-3}dt$ 9) $\int \frac{t-5}{t^2-6t+5}dt$

الفصل الثاني:. التكامل المحدود

١. النظرية الأساسية لحساب التكامل

لتكن الدالة$f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ولتكن $F(x)$ تكاملا غير محدد للدالة $f(x)$ فإن التكامل المحدود يعطى بما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ١ :

$$\int_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

مثال ٢ :

$$\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 + x\right)\Bigg|_0^3$$

$$= \left(\frac{(3)^4}{4} - 2(3)^2 + (3)\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - 2(0)^2 + (0)\right)$$

$$= \left(\frac{81}{4} - 18 + 3\right) - (0) = \frac{21}{4}$$

مثال ٣ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

٢,١. خواص التكاملات المحدودة :

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين على فترة التكامل $a \le x \le b$ فإن:

١) $\int_a^a f(x)dx = 0$

٢) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

٣) إذا كانت $a \le c \le b$ فإن $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

مثال ٤ : احسب التكامل التالي $\int_{-1}^{2}|x|dx$

الحل : لدينا $|x| = \begin{cases} x & ,x \ge 0 \\ -x & ,\ x < 0 \end{cases}$

ومنه فإن

$$\int_{-1}^{2}|x|dx = \int_{-1}^{0}-xdx + \int_{0}^{2}xdx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = \left(0+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{2}-0\right) = \frac{5}{2}$$

تمرين: احسب التكاملات المحدودة التالية:

$$1)\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}dx \quad 2)\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{2-x^3}dx \quad 3)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+cos\,x)dx$$

$$4)\int_{0}^{2}(2-4x)dx \quad 5)\int_{-1}^{2}|2x-3|dx \quad 6)\int_{0}^{3} f(x)dx\,, f(x) = \begin{cases} 2x\ ,x \le 1 \\ 2\ \ ,x > 1 \end{cases}$$

$$7)\int_{0}^{1}\frac{x}{x+1}dx \quad 8)\int_{-2}^{2} f(x)dx\,, f(x) = \begin{cases} 3\,, & x \le 0 \\ x+3 & ,x > 0 \end{cases} \quad 9)\int_{1}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$$

$$10)\int_{2}^{3}\frac{x^2-2}{x^2}dx \quad 11)\int_{-1}^{2} x\sqrt{9-x^2}dx\,, \quad 12)\int_{0}^{2}(x^3-1)^{\frac{2}{3}}x^2dx$$

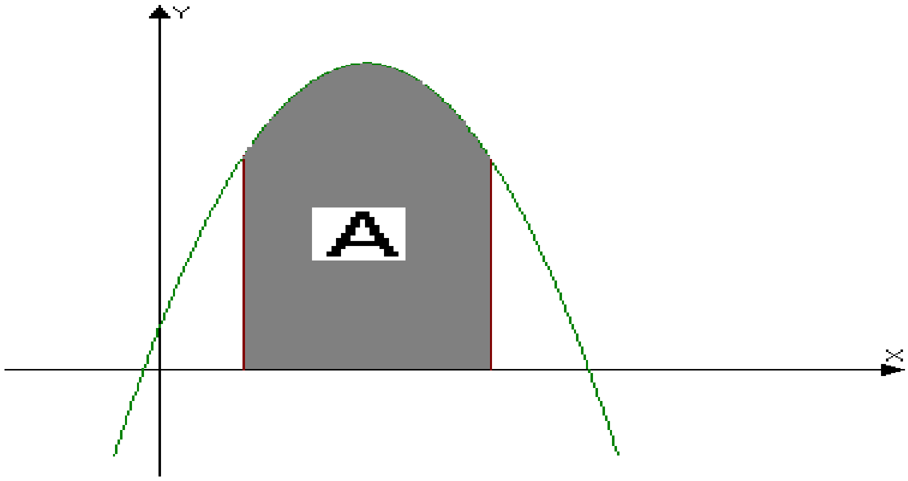
٢. تطبيقات على التكامل المحدود

من المعلوم أن تطبيقات التكامل في شتي التخصصات كثيرة جدا وسنتطرق هنا فقط لتطبيقات التكامل في حساب المساحة

٢,١.قواعد حساب المساحة باستعمال التكامل المحدود

لتكن الدالة $y=f(x)$ متصلة في الفترة $[a,b]$

١) إذا كانت $f(x)\geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a,b ومحور السينات تحسب كما يلي :



$$A=\int_a^b f(x)dx$$

مثال٥: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x=1$ و $x=3$.

الحل :

بما أن $f(x)\geq 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\int_a^b x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}\ Square\ units$$

٢) إذا كانت $f(x)\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحني الدالة الواصلة بين النقطتين a,b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

مثال٦: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة$y=-x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x=-2$ و $x=2$

الحل :

بما أن $f(x)=-x^2\leq 0$ من أجل كل قيم x فإن المساحة A تعطى بما يلي:

$$A=\left|\int_{-2}^{2}f(x)dx\right|=\left|\int_{-2}^{2}-x^2dx\right|=\left|-\frac{x^3}{3}\right|=\left|-\frac{(2)^3}{3}+\frac{(-2)^3}{3}\right|=\left|-\frac{16}{3}\right|$$
$$=\frac{16}{3}\ square\ units$$

٣) إذا وجد c بين النقطتين a,b أي أن $a<c<b$ حيث أن $f(x)\geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a,c]$ و $f(x)\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[c,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a,b ومحور السينات تحسب كما يلي:

$$A=\int_{a}^{c}f(x)dx+\left|\int_{c}^{b}f(x)dx\right|$$

٤) وإذا وجد c بين النقطتين a,b أي أن $a<c<b$ حيث أن $f(x)\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[a,c]$ و $f(x)\geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[c,b]$ فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة الواصلة بين النقطتين a,b ومحور السينات تحسب كما يلي :

$$A=\left|\int_{a}^{c}f(x)dx\right|+\int_{c}^{b}f(x)dx$$

مثال ٧: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x=-2$ و $x=2$

الحل :

بما أن $f(x)=x^3\geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[0,2]$ و $f(x)=x^3\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[-2,0]$ فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\left|\int_{-2}^{0}x^3dx\right|+\int_{0}^{2}x^3dx=\left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}\right|+\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}=\left|\frac{-16}{4}\right|+\frac{16}{4}$$
$$=8\ square\ units$$

مثال ٨: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=-x^3$ والمحور السيني والمستقيمين $x=-3$ و $x=2$

الحل :

بما أن $f(x)=-x^3\geq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[-3,0]$ و $f(x)=-x^3\leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[0,2]$ فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A=\int_{-3}^{0}-x^3dx+\left|\int_{0}^{2}-x^3dx\right|=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{0}+\left|-\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}\right|=\frac{81}{4}+\frac{16}{4}$$
$$=\frac{97}{4}\ square\ units$$

مثال ٩: أوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني ومنحنى الدالة $f(x)=x^2-6x+8$ الواصل بين نقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني .

الحل :

يتقاطع منحنى الدالة مع المحور السيني إذا كان $f(x) = 0$ وبالتالي للإيجاد نقاط التقاطع نضع:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

لدينا $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 2$ او $x = 4$

إذاً يقطع المنحنى المحور السيني عند $x = 4$ و $x = 2$ وتكون هاتان القيمتان حدي التكامل ومن الجدول التالي :

x	$-\infty$	2	4 ∞
$x \quad -2$	-	+	+
$x - 4$	-	-	+
$f(x) = (x-2)(x-4)$	+	-	+

يكون لدينا$f(x) \leq 0$ من أجل كل قيم x في الفترة $[2,4]$ وبالتالي فإن المساحة A تعطى بما يلي

$$A = \left|\int_2^4 (x^2 - 6x + 8)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right|\Big|_2^4$$

$$= \left|\left(\frac{(4)^3}{3} - 3(4)^2 + 8(4)\right) - \left(\frac{(2)^3}{3} - 3(2)^2 + 8(2)\right)\right| = \left|\frac{16}{3} - \frac{20}{3}\right|$$

$$= \frac{4}{3} \ \ square\ units$$

تمارين:

تمرين ١: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = x^2 + 1$ ومحور السينات من $x = 2$ إلى $x = 3$.

تمرين ٢: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 2x^2$ ومحور السينات من $x = -1$ إلى $x = 2$.

تمرين ٣: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = (x+2)(x^2 - 2x - 3)$ ومحور السينات من $x = -2$ إلى $x = 1$.

تمرين ٤: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 3x$ ومحور السينات من $x = -1$ إلى $x = 0$.

تمرين ٥: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى$y = 2(x+4)(x^2 - 2x - 3)$ ومحور السينات من $x = -5$ إلى $x = 3$.

تمرين ٦: احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y = \sin x$ ومحور السينات من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$.

تمرين ٧: احسب المساحة المحصورة بين المحور السيني ومنحنى الدالة $y = -2x^2 + 4x + 30$ الواصل بين نقطتي تقاطع المنحنى مع المحور السيني .

المراجــع

المؤلف	اسم المرجع
E.Kreysrig,Johns Wiley & Sons, 7th edition 1993.	Advanced Engineering Mathimatics
P.Avbbott & M. Wardle, Teach yourself-books NTC Publishing Group. USA 1992.	Calculus
K. Strou, Macmillan Press, fourth edition 1995.	Engeneering Mathematics
A. Croft, R. Davison, M.Hargreaves, 2th edition Addison-Wesley, 1996.	Engeneering Mathematics
v.1, Smithson, Mc graw Hill 1986.	Mathematics for Electrical and Telecom.Technicians
A. Greer & G. Taylor, Stanley Thornes 1989.	Mathematics for Technicians
J.Gersting, Dover Publication, Inc.1992.	Technical Calculus with Analytic