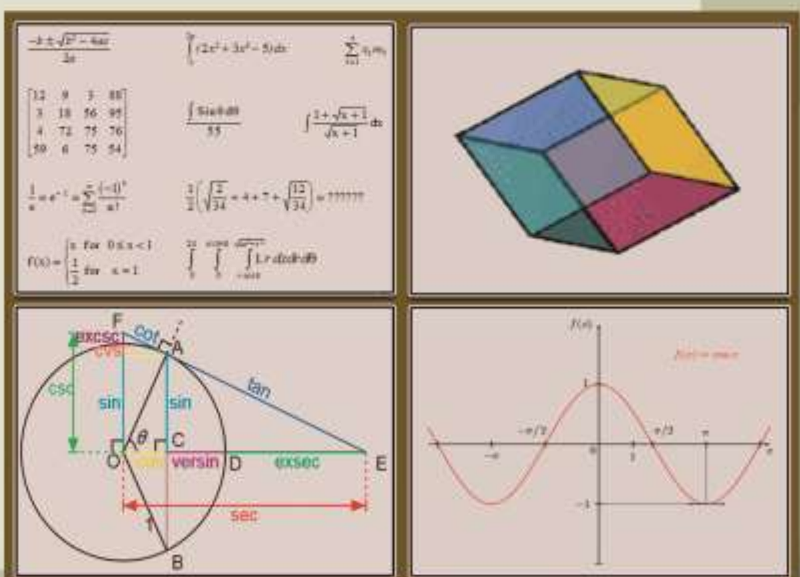
المملكـة العربيـة السعـودية
المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المنـاهج

الكليات التقنية

رياضيات تخصصية

١١٥ ريض

لتخصص الحاسب الآلي-برمجيات و دعم فني



مقدمة

الحمد لله وحده،والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد بن عبدالله وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على الله ثم على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي؛ لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً .

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية .

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " رياضيات تخصصية ٤١١٥ ريض " لتخصص برمجيات و دعم فني في قسم الحاسب الآلي " لمتدربي الكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص .

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب ميسر يخلو من التعقيد، مدعم بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات .

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه، إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

الفهـــرس

تمهيد

الحمد لله مولى النعم، الحمد له على ما خصنا من نعمه وعمّ، والصلاة والسلام على خير العرب والعجم. أما بعد: فإن مقرر رياضيات تخصصية يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لمتدرب البرمجيات و الدعم الفني من قسم الحاسب الآلي لتعليمه المهارات الأساسية لعدد من الموضوعات الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ارتئينا _خدمةً للأهداف التربوية_ إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها المتدرب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصاً منا على إيصال المعلومة واضحةً للمتدرب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة المباشرة التي يمكن أن يتعرض لها المتدرب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح .

ودراسة هذا المقرر تهدف إلى :

- فهم أنظمة العد خاصة النظام الثنائي والستعشري .
- فهم التعبيرات المنطقية والعمليات المنطقية .
- فهم البوابات المنطقية والدوائر المنطقية .
- فهم العمليات الإحصائية و التعامل معها .

ولتحقيق هذه الأهداف _بإذن الله تعالى_ فقد قُسِّمت هذه الحقيبة التدريبية إلى أربع وحدات رئيسة :

الوحدة الأولى وتعنى بدراسة أنظمة العد الأساسية لتعريف المتدرب بأنظمة العد الأساسية في الحاسب كالنظام العشري والنظام الثنائي والنظام الستعشري وبعض الأنظمة المتفرعة عن النظام الثنائي وكيفية أداء العمليات الحسابية الأساسية في النظام الثنائي .

والوحدة الثانية خُصصت لدراسة التعبيرات المنطقية والعمليات المنطقية المختلفة وجدول الحقائق .

والوحدة الثالثة تهدف لمعرفة المتدرب بالبوابات المنطقية وكيفية استخدامها لتصميم دوائر منطقية مختصرة.

أما الوحدة الرابعة فقد تناولت مبادئ الإحصاء بحيث يتعرف المتدرب على أساسيات الإحصاء من حيث البيانات و الجداول و الرسوم الاحصائية و مقاييس النزعة المركزية .

والله الموفق

الوحدة الأولى

أنظمة العدّ

الهدف العام: معرفة مفهوم تنوع أنظمة العد الأساسية المستخدمة في مختلف المجالات وفي الحاسب الآلي خاصةً، والعمليات الحسابية فيها والتحويل بينها.

الأهداف التفصيلية :

- أن يعرف المتدرب مجموعات العد الأساسية .
- أن يميز المتدرب مجموعات العد المستخدمة في الحاسب الآلي .
- أن يكون المتدرب قادراً على التحويل بين النظام العشري والنظام الثنائي .
- أن يجري المتدرب العمليات الحسابية في النظام الثنائي .
- أن يمثِّل المتدرب الأعداد السالبة باستخدام النظام الثنائي .
- أن يكون المتدرب قادراً على التحويل بين النظام الستعشري والنظام العشري والثنائي .

أنظمة العدّ

توجد هناك أنظمة مختلفة للأعداد وذلك حسب استخدامها، فهناك نظام العد العشري الذي يستخدمه الإنسان وهناك نظام العد الثنائي الذي يُستخدم في الآلات و المكائن، وأنظمة مختلفة أخرى كلٌ بحسب الهدف من استخدامها.

فعلى سبيل المثال: الرقم ١٢٣ يعتبر من أنظمة العد العشري التي يتعامل معها الإنسان كبيانات. ولكن عند إدخال هذه البيانات لجهاز الحاسب الآلي فإنه يقوم بتحويلها إلى نظام العد الثنائي ١١١١٠١١ .
ويعتبر النظام الثنائي أساسي في الإلكترونيات الرقمية وكذلك أنظمة الترميز الرقمية الأخرى كالنظام الستعشري ونظام الأسكي (ASCII) "الكود القياسي الأمريكي لتبادل المعلومات The American Standard Code for Information Interchange ".

١. النظام العشري (Decimal System) :
نستخدم في النظام العشري عشرة أرقام للتعبير عن مقادير معينة وهي: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 فإذا أردنا مثلاً أن نعبر عن مقدار صحيح محصور بين 0 و 9، استخدمنا خانة واحدة، فإن كان المقدار أكبر احتجنا إلى زيادة عدد الخانات.
وإذا أردنا أن نعبر عن مقدار كسري احتجنا إلى استخدام النقطة العشرية وعدد خانات على يمينها بحسب الحاجة .

مثال ١: العدد الكسري $\frac{9}{2}$ يمثل في النظام العشري بالعدد 4.5 .
فاحتجنا إلى خانة واحدة على يمين النقطة العشرية .
ولهذا فيمكن أن نقول بأن النظام العشري هو نظام ذو أوزان بمعنى أن كل خانة لها وزن معين، فأوزان الخانات على يسار النقطة العشرية هي على الترتيب:

$$1=(10)^0 \,, 10=(10)^1 \,, 100=(10)^2 \,, 1000=(10)^3 \,, ...$$

بينما أوزان الخانات على يمين النقطة العشرية هي على الترتيب:

$$0.1=(10)^{-1} \,, 0.01=(10)^{-2} \,, 0.001=(10)^{-3} \,, 0.0001=(10)^{-4} \,, ...$$

ملحوظة: تمثل الأعداد في النظام العشري باستخدام عشرة ارقام من 0 الى 9 وذلك بواسطة قوى الأساس ١٠ ولذلك سمي بالنظام العشري .

مثال ٢:

$$374 = 3\times10^2 + 7\times10^1 + 4\times10^0$$

$$0.95 = 9\times10^{-1} + 5\times10^{-2}$$

$$\therefore 374.95 = 3\times10^2 + 7\times10^1 + 4\times10^0 + 9\times10^{-1} + 5\times10^{-2}$$

٢. النظام الثنائي (Binary System) :
النظام الثنائي هو نظام ترقيم موضعي للأساس ٢ نستخدم فيه الأرقام ٠ و 1 فقط والتي تسمى اختصاراً "بت" أي رقم ثنائي مكون من سلسلة من "البت" ومثل النظام العشري

يكون لكل خانة "بت" في النظام الثنائي وزن معين كقوى للأساس 2 (أي 2 أس عدد صحيح).

فيكون للخانات على يسار النقطة الثنائية "الجزء الصحيح" الأوزان التالية على الترتيب:

$$1 = 2^0 ,\ 2 = 2^1 ,\ 4 = 2^2 ,\ 8 = 2^3 ,\ 16 = 2^4 ,\ 32 = 2^5 ,\ ......$$

بينما أوزان الخانات على يمين النقطة الثنائية "الجزء الكسري" هي على الترتيب التالي:

$$0.5 = 2^{-1} ,\ 0.25 = 2^{-2} ,\ 0.125 = 2^{-3} ,\ 0.0625 = 2^{-4} ,\ ......$$

وكما ذكرنا سابقاً في النظام العشري أن الأعداد تمثل بواسطة قوى الأساس ١٠ فإننا في النظام الثنائي أيضاً نستطيع تمثيل الأعداد الثنائية بواسطة قوى الأساس ٢.

مثال ٣: في الجدول التالي الأعداد الصحيحة من 0 إلى ٢٠ في النظام العشري وما يقابلها في النظام الثنائي:

النظام العشري	النظام الثنائي
0	٠
1	١
2	١٠
3	١١
4	١٠٠
5	١٠١
6	١١٠
7	١١١
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
١٦	١٠٠٠٠
١٧	١٠٠٠١
١٨	١٠٠١٠
١٩	١٠٠١١
٢٠	١٠١٠٠

٣. تحويل الأعداد بين النظامين العشري و الثنائي:

١,٣. تحويل الأعداد من النظام الثنائي إلى النظام العشري:
لتحويل الأعداد الثنائية إلى أعداد عشرية نقوم باستخدام قاعدة تمثيل خانات الأعداد الثنائية بقوى الأساس ٢، وبعد ذلك نجمعها للحصول على الناتج العشري .

مثال ٤: حوّل الأعداد التالية من النظام الثنائي إلى النظام العشري:

$$(1)\ 110101 \quad , \quad (2)\ 0.1101 \quad , \quad (3)\ 101.111$$

الحل :

$$\begin{aligned}(1)\ 110101 &= (1\times 2^0)+(0\times 2^1)+(1\times 2^2)+(0\times 2^3)+(1\times 2^4)+(1\times 2^5)\\ &= (1\times 1)+(0\times 2)+(1\times 4)+(0\times 8)+(1\times 16)+(1\times 32)\\ &= 1+0+4+0+16+32=53\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ 0.1101 &= (1\times 2^{-1})+(1\times 2^{-2})+(0\times 2^{-3})+(1\times 2^{-4})\\ &= (1\times 0.5)+(1\times 0.25)+(0\times 0.125)+(1\times 0.0625)\\ &= 0.5+0.25+0+0.0625=0.8125\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\ 101.111 &= (1\times 2^0)+(0\times 2^1)+(1\times 2^2)+(1\times 2^{-1})+(1\times 2^{-2})+(1\times 2^{-3})\\ &= (1\times 1)+(0\times 2)+(1\times 4)+(1\times 0.5)+(1\times 0.25)+(1\times 0.125)\\ &= 1+0+4+0.5+0.25+0.125=5.875\end{aligned}$$

٢,٣. تحويل الأعداد من النظام العشري إلى النظام الثنائي:
نلاحظ أن الأعداد في النظام العشري تتكون من جزء صحيح و جزء كسري؛ لذلك سنتعامل مع قاعدتين مختلفتين، واحدة للجزء الصحيح و الأخرى للجزء الكسري كالتالي :

١,٢,٣. قاعدة تحويل العدد الصحيح من النظام العشري إلى النظام الثنائي:
١) نقسم العدد على 2 فنحصل على باق هو رقم الخانة الأولى ابتداءً من اليمين .
٢) نقسم ناتج القسمة السابقة على 2 فنحصل على باق هو رقم الخانة الثانية ابتداءً من اليمين.
٣) وهكذا ونتوقف عندما نحصل على ناتج قسمة هو ٠.

مثال ٥: حوّل الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي:

$(1)\,12 \quad , \quad (2)\,19 \quad , \quad (3)\,45$

الحل:

١) نقوم بالقسمة على 2 ونحتفظ بالبواقي إلى أن يصبح الناتج صفراً:

$\frac{12}{2}=6$ و الباقي هو 0

$\frac{6}{2}=3$ و الباقي هو 0

$\frac{3}{2}=1$ و الباقي هو 1

$\frac{1}{2}=0$ و الباقي هو 1

إذن 12 يكتب في النظام الثنائي: 1100 (أي أن $12_{10}=1100_2$).

٢) نقوم بالقسمة على 2 ونحتفظ بالبواقي إلى أن يصبح الناتج صفراً:

$\frac{19}{2}=9$ و الباقي هو 1

$\frac{9}{2}=4$ و الباقي هو 1

$\frac{4}{2}=2$ و الباقي هو 0

$\frac{2}{2}=1$ و الباقي هو 0

$\frac{1}{2}=0$ و الباقي هو 1

إذن 19 يكتب في النظام الثنائي: 10011 (أي أن $19_{10}=10011_2$).

٣) نقوم بالقسمة على 2 ونحتفظ بالبواقي إلى أن يصبح الناتج صفراً:

$\frac{45}{2}=22$ و الباقي هو 1

$\frac{22}{2}=11$ و الباقي هو 0

$\frac{11}{2}=5$ و الباقي هو 1

$\frac{5}{2}=2$ و الباقي هو 1

$\frac{2}{2}=1$ و الباقي هو 0

$\frac{1}{2}=0$ و الباقي هو 1

إذن 45 يكتب في النظام الثنائي: 101101 (أي أن $101101_2 = 45_{10}$).

٢,٢,٣. قاعدة تحويل الجزء الكسري من النظام العشري إلى النظام الثنائي:

١) نضرب العدد في 2 فنحصل على ناتج متكون من جزء صحيح، وهو رقم الخانة الأولى ابتداءً من اليسار بعد النقطة الثنائية، وجزء كسري.

٢) نضرب الجزء الكسري من ناتج الضرب السابق في 2 فنحصل على ناتج متكون من جزء صحيح، وهو رقم الخانة الثانية ابتداءً من اليسار بعد النقطة الثنائية، وجزء كسري.

٣) وهكذا نتوقف عندما تحصل على جزء كسري لناتج الضرب هو 0.

مثال ٦: حوّل الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي :

$(1)\ 0.6875 \quad , \quad (2)\ 0.3125$

الحل :

1) نقوم بالضرب في 2 ونحتفظ بالأجزاء الصحيحة إلى أن يصبح الجزء الكسري للناتج صفراً:

$0.6875\times 2 = 1.375$ والجزء الصحيح للناتج هو 1

$0.375\times 2 = 0.75$ والجزء الصحيح للناتج هو 0

$0.75\times 2 = 1.5$ والجزء الصحيح للناتج هو 1

$0.5\times 2 = 1.0$ والجزء الصحيح للناتج هو 1

نتوقف لأن الجزء الكسري للناتج هو ٠.

إذن العدد 0.6875 يكتب في النظام الثنائي: 0.1011 (أي أن $0.1011_2 = 0.6875_{10}$).

2) نقوم بالضرب في 2 ونحتفظ بالأجزاء الصحيحة إلى أن يصبح الجزء الكسري للناتج صفراً:

$0.3125 \times 2 = 0.625$ والجزء الصحيح للناتج هو 0
$0.625 \times 2 = 1.25$ والجزء الصحيح للناتج هو 1
$0.25 \times 2 = 0.5$ والجزء الصحيح للناتج هو 0
$0.5 \times 2 = 1.0$ والجزء الصحيح للناتج هو 1

نتوقف لأن الجزء الكسري للناتج هو ٠.
إذن العدد 0.3125 يكتب في النظام الثنائي: 0.0101 (أي أن $0.3125_{10} = 0.0101_2$).

مثال ٧: حوّل العدد التالي 91.15625 من النظام العشري إلى النظام الثنائي؟
الحل:
أولاً نقوم بتحويل الجزء الصحيح وذلك بالقسمة على 2 كالتالي :

$\frac{91}{2} = 45$ و الباقي هو 1
$\frac{45}{2} = 22$ و الباقي هو 1
$\frac{22}{2} = 11$ و الباقي هو 0
$\frac{11}{2} = 5$ و الباقي هو 1
$\frac{5}{2} = 2$ و الباقي هو 1
$\frac{2}{2} = 1$ و الباقي هو 0
$\frac{1}{2} = 0$ و الباقي هو 1

إذن ٩١ يكتب في النظام الثنائي: ١٠١١٠١١ (أي أن $91_{10} = 1011011_2$).

ثانياً نقوم بتحويل الجزء الكسري وذلك بالضرب في 2 كالتالي:
$0.15625 \times 2 = 0.3125$ والجزء الصحيح للناتج هو 0
$0.3125 \times 2 = 0.625$ والجزء الصحيح للناتج هو 0
$0.625 \times 2 = 1.25$ والجزء الصحيح للناتج هو 1
$0.25 \times 2 = 0.5$ والجزء الصحيح للناتج هو 0
$0.5 \times 2 = 1.0$ والجزء الصحيح للناتج هو 1

إذن العدد 0.15625 يكتب في النظام الثنائي: 0.00101 (أي أن $0.15625_{10} = 0.00101_2$).

أخيراً نجد أن العدد 91.15625 يكتب في النظام الثنائي : 1011011.00101
(أي أن $91.15625_{10} = 1011011.00101_2$).

٤. العمليات الحسابية في النظام الثنائي:

٤,١. الجمع في النظام الثنائي:

لإجراء عملية الجمع بين الأعداد الثنائية ستكون بنفس الطريقة في النظام العشري "أي بجمع العمود الأول من اليمين فإذا تجاوز الناتج العدد 9 فإننا نقوم بنقل خانة العشرات إلى العمود الثاني، وهكذا حتى ننهي الجمع بين جميع العمدة". مع الأخذ في الاعتبار القواعد الأساسية للجمع في النظام الثنائي :

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+0=1$$
$$1+1=0 \text{ , with a carry of 1 to the next column}$$
$$1+1+1=1 \text{ , , with a carry of 1 to the next column}$$

مثال ٨: أوجد ناتج الجمع للعمليات التالية في النظام الثنائي:

$$(1)\,10+11 \quad , \quad (2)\,11+11 \quad , \quad (3)\,110+100 \quad , \quad (4)\,111+101$$

الحل:

$$(1)\quad \begin{array}{r} {}^{1}\ \ 1\ \ 0 \\ +\ \ 1\ \ 1 \\ \hline 1\ \ 0\ \ 1 \end{array}$$

إذن : $10+11=101$

$$(2)\quad \begin{array}{r} {}^{1}\ \ {}^{1}1\ \ 1 \\ +\ \ 1\ \ 1 \\ \hline 1\ \ 1\ \ 0 \end{array}$$

إذن : $11+11=110$

$$(3)\quad \begin{array}{r} {}^{1}\ \ 1\ \ 1\ \ 0 \\ +\ \ 1\ \ 0\ \ 0 \\ \hline 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0 \end{array}$$

إذن : $110+100=1010$

$$
(4)\quad \begin{array}{cccc} {}^{1} & {}^{1}1 & {}^{1}1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}
$$

إذن : $111+101=1100$

٢,٤. الطرح في النظام الثنائي:

لإجراء عملية الطرح لابد أن يكون المطروح منه أكبر من المطروح ويعرف هذا بعدد الخانات المخصصة لكل عدد، وذلك حتى يتم تعريف كيفية كتابة الأعداد السالبة في النظام الثنائي .

مثال ٩: قارن بين الأعداد التالية المكتوبة في النظام الثنائي:

$$1101\ ,\ 1010.01\ ,\ 0.010101\ ,\ 10000$$

الحل:

$$10000>1101>1010.01>0.010101$$

ملحوظة: لطرح عدد من عدد أكبر منه في النظام الثنائي يشبه ذلك عملية الطرح في النظام العشري التي ذكرناها سابقاً مع الأخذ في الاعتبار القواعد الأساسية للطرح في النظام الثنائي التالية :

$$0-0=0$$
$$1-0=1$$
$$1-1=0$$
$$0-1=1\ ,\ , \text{with a borrow of 1 from the next column}$$

مثال ١٠: أوجد ناتج الطرح للعمليات التالية في النظام الثنائي:

$(1)\,11-10\quad ,\quad (2)\,101+11$

الحل:

$$
(1)\quad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}
$$

إذن : $11-10=1$

$$
\begin{array}{rccc}
 & \overset{0}{\cancel{1}} & \overset{1}{0} & 1 \\
(2) & & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

إذن : $101 - 11 = 10$

٣,٤. الضرب في النظام الثنائي:

نضرب الأعداد في النظام الثنائي كما نضربها في النظام العشري مع الأخذ في الاعتبار القواعد الأساسية للضرب في النظام الثنائي التالية:

$$0 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$1 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1$$

مثال ١١: أوجد ناتج الضرب للعمليات التالية في النظام الثنائي:

$(1)\, 11 \times 11 \quad , \quad (2)\, 101 \times 111 \quad , \quad (3)\, 1001 \times 1011$

الحل:

$$
(1)\quad
\begin{array}{ccccc}
 & & & 1 & 1 \\
\times & & & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 1 \\
+ & & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

إذن : $11 \times 11 = 1001$

$$
(2)\quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 \\
\times & & & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & 1 \\
+ & & & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

إذن : $101 \times 111 = 100011$

(3)
$$
\begin{array}{rccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\times & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
+ & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

إذن : $1001 + 1011 = 1100011$

٤,٤. القسمة في النظام الثنائي:

نُجري عملية القسمة في النظام الثنائي كما في النظام العشري.

مثال ١٢: أوجد ناتج القسمة للعمليات التالية في النظام الثنائي:

$(1)\, 110 \div 11 \quad , \quad (2)\, 110 \div 10$

الحل:

$$
\begin{array}{r}
\mathbf{10} \\
\mathbf{11}\overline{)\mathbf{110}} \\
\underline{\mathbf{11}} \\
\mathbf{000}
\end{array}
$$

إذن : $110 \div 11 = 10$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 10\overline{)110} \\ \underline{10} \\ 010 \\ \underline{10} \\ 00 \end{array}$$

إذن : $110 \div 10 = 11$

٥. تمثيل الأعداد السالبة باستخدام النظام الثنائي:

نظرية ١: باستخدام n خانة يسمح النظام الثنائي بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 0 و $2^n - 1$.

مثال ١٣: باستخدام 8 خانات يسمح النظام الثنائي بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 0 و 255. وباستخدام 16 خانة يمكن تمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 0 و 65535.

كيف يمكن أن نمثل الأعداد السالبة؟

هناك عدة أنظمة متفرعة عن النظام الثنائي تسمح بتمثيل الأعداد بإشارتها سنتناول ثلاثة منها .

1.5. النظام الثنائي إشارة-سعة:

في هذا النظام نخصص آخر خانة على اليسار لتمثيل الإشارة 0 للإشارة الموجبة و 1 للإشارة السالبة، وتخصص الخانات الأخرى لتمثيل العدد دون إشارته في النظام الثنائي.

مثال ١٤: حوّل الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي إشارة-سعة باستخدام 8 خانات: $(1)\,19 \quad , \quad (2)\,-19$

الحل:

1) مرّ معنا في الفقرة 2 من المثال ٥ أن العدد 19 يكتب في النظام الثنائي: 10011.
ومنه ففي النظام الثنائي إشارة-سعة ذات 8 خانات يكتب: 00010011.
2) ومنه فالعدد 19- يكتب في النظام الثنائي إشارة-سعة كما يلي: 10010011.

مثال ١٥: حوّل الأعداد التالية من النظام الثنائي إشارة-سعة إلى النظام العشري:
$(1)\,10010 \quad , \quad (2)\,00101$

الحل:

$$(1)\,10010 = -(10) = -(1\times 2^1 + 0\times 2^0) = -2$$
$$(2)\,00101 = +(101) = +(1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0) = 4+0+1=5$$

نظرية ٢: باستخدام n خانة يسمح النظام الثنائي إشارة-سعة بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين $(-2^{n-1}+1)$ و $(2^{n-1}-1)$

مثال ١٦: باستخدام 8 خانات يسمح النظام الثنائي إشارة-سعة بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 127- و 127.
وباستخدام 16 خانة يمكن تمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 32767- و 32767.

2.5. النظام الثنائي متمم 1 :

في هذا النظام تمثل الأعداد الموجبة كما تمثل في النظام الثنائي إشارة-سعة بينما تمثل الأعداد السالبة بأخذ متمم تمثيل الأعداد الموجبة الموافقة لها، أي بتعويض 0 بـ 1 والعكس.

مثال 17: حوّل الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي متمم 1 ذات 8 خانات:
$$(1)\,19 \quad , \quad (2)\,-19$$

الحل:

١) مرّ معنا في الفقرة 1 من المثال 14 بأن العدد 19 يكتب في النظام الثنائي إشارة-سعة ذات 8 خانات كما يلي: 00010011 وهي الكتابة نفسها في النظام الثنائي متمم 1.
٢) للحصول على كتابة العدد 19- في النظام الثنائي متمم 1، نقوم بإتمام 00010011 إلى 1 فنحصل على: 11101100 .

مثال 18: حوّل الأعداد التالية من النظام الثنائي متمم 1 إلى النظام العشري:
$$(1)\,00010111 \quad , \quad (2)\,11101000$$

الحل:

$$(1)\,00010111 = +(10111) = 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0$$
$$= 16+0+4+2+1 = 23$$
$$(2)\,11101000 = -(00010111) = -(10111)$$
$$= -(2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0) = -(16+4+2+1) = -23$$

نظريـــة ٣: باسـتخدام n خانــة يسـمح النظـام الثنــائي مـتمم 1 بتمثيـل الأعـداد الصـحيحة المحصورة بين $(-2^{n-1}+1)$ و $(2^{n-1}-1)$

مثــال 19: باسـتخدام 8 خانــات يسـمح النظــام الثنــائي مـتمم 1 بتمثيـل الأعـداد الصـحيحة المحصورة بين 127- و 127.
وباستخدام 16 خانة يمكن تمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 32767- و 32767.

3.5. النظام الثنائي متمم 2 :

في هذا النظام تمثل الأعداد الموجبة كما تمثل في النظام الثنائي إشارة-سعة بينما تمثل الأعداد السالبة بأخذ متمم تمثيل الأعداد الموجبة الموافقة لها، أي بتعويض 0 بـ 1 والعكس ثم إضافة 1 إلى التمثيل المتحصل عليه.

مثال 20: حوّل الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الثنائي متمم 2 ذات 8 خانات:

$$(1)\,19 \quad , \quad (2)\,-19$$

الحل:

١) مرّ معنا في الفقرة 1 من المثال 14 بأن العدد 19 يكتب في النظام الثنائي إشارة-سعة ذات 8 خانات كما يلي: 00010011 وهي الكتابة نفسها في النظام الثنائي متمم 2.

٢) للحصول على كتابة العدد 19- في النظام الثنائي متمم 2، نقوم بإتمام 00010011 إلى 1 فنحصل على: 11101100 ثم نضيف 1 فينتج: 11101101 .

ومنه فتكون أوزان الخانات في هذا النظام كما يلي (ذات 8 خانات):

$$2^0 \ , \ 2^1 \ , \ 2^2 \ , \ 2^3 \ , \ 2^4 \ , \ 2^5 \ , \ 2^6 \ , \ -2^7$$

مثال 21: حوّل الأعداد التالية من النظام الثنائي متمم 2 إلى النظام العشري:

$$(1)\,01010110 \quad , \quad (2)\,10101010$$

الحل:

$$\begin{aligned}(1)\,01010110 &= 0\times(-2)^7+1\times 2^6+0\times 2^5+1\times 2^4\\ &+0\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2^1+0\times 2^0\\ &= 2^6+2^4+2^2+2^1=64+16+4+2=86\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\,10101010 &= 1\times(-2)^7+0\times 2^6+1\times 2^5+0\times 2^4\\ &+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+0\times 2^0\\ &= (-2)^7+2^5+2^3+2^1=-128+32+8+2=-86\end{aligned}$$

نظرية ٤: باستخدام n خانة يسمح النظام الثنائي متمم 2 بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين (-2^{n-1}) و $(2^{n-1}-1)$

مثال 22: باستخدام 8 خانات يسمح النظام الثنائي متمم 2 بتمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 128- و 127.
وباستخدام 16 خانة يمكن تمثيل الأعداد الصحيحة المحصورة بين 32768- و 32767.

ومن الأنظمة الثنائية المتفرعة لتمثيل الأعداد السالبة فإن النظام الثنائي متمم 2 هو الأكثر استعمالاً في الحاسوبات لأسباب كثيرة من بينها سهولة العمليات الحسابية وعدم تمثيل الصفر بأكثر من كتابة كما هو الحال بالنسبة للنظام الثنائي متمم 1 إذ يمكن تمثيل الصفر فيه بطريقتين هما:

$$00000000\ ,\ 11111111$$

وكذلك بالنسبة للنظام الثنائي إشارة-سعة:

$$00000000\ ,\ 10000000$$

6. النظام الستعشري (Hexadecimal System) :
النظام الستعشري هو طريقة أخرى لتمثيل الأعداد نستخدم فيه ستة عشر رقماً هي:

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$$

وتكون أوزان الخانات هي قوى 16 (أي 16 أس عدد صحيح).

ومن فوائده: تسهيل قراءة الأعداد الممثلة في النظام الثنائي.

مثال 23: يعطينا الجدول التالي القيم الموافقة في كل من النظام العشري والثنائي لأرقام النظام الستعشري:

العشري	الثنائي	الستعشري
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C

D	1101	13
E	1110	14
F	1111	15

7. تحويل الأعداد من النظامين العشري و الثنائي إلى النظام الستعشري:

1.7. تحويل الأعداد من النظام العشري إلى النظام الستعشري:

لتحويل الأعداد من العشري إلى الستعشري سنستخدم القاعدة السابقة التي مرة بنا عند التحوّل من العشري إلى الثنائي مع ملحوظة استبدال 2 بـ 16 "أي بدلاً من القسمة على 2 أو الضرب في 2 ستكون القسمة على 16 و الضرب في 16 للجزء الصحيح أو الجزء الكسري على التوالي".

مثال 24: حوّل الأعداد التالية من النظام العشري إلى النظام الستعشري:

$$(1)\,9719 \quad , \quad (2)\,0.78125$$

الحل:

١) نقوم بالقسمة على 16 ونحتفظ بالبواقي إلى أن يصبح الناتج صفراً:

$\frac{9719}{16} = 607$ و الباقي هو 7

$\frac{607}{16} = 37$ و الباقي هو 15

$\frac{37}{16} = 2$ و الباقي هو 5

$\frac{2}{16} = 0$ و الباقي هو 2

إذن 9710 يكتب في النظام الستعشري: $25F7_{16}$

ويكتب رياضيا كالتالي: $(9710)_{10} = (15F7)_{16}$

2) نقوم بالضرب في 16 ونحتفظ بالأجزاء الصحيحة إلى أن يصبح الجزء الكسري للناتج صفراً:

$0.78125 \times 16 = 12.5$ والجزء الصحيح للناتج هو 12

$0.5 \times 16 = 8.0$ والجزء الصحيح للناتج هو 8

إذن 0.78125 يكتب في النظام الستعشري: $0.C8_{16}$

ويكتب رياضيا كالتالي: $(0.78125)_{10} = (0.C8)_{16}$

2.7. تحويل الأعداد من النظام الستعشري إلى النظام العشري:
بنفس الطريقة المتبعة التي مرة بنا لتحويل الأعداد من النظام الثنائي إلى النظام العشري مع ملحوظة استبدال 2 بــ 16. كالتالي:

مثال 25: حوّل العدد التالي من النظام الستعشري إلى النظام العشري:
$39.B8_{16}$

الحل:

$$\begin{aligned}39.B8_{16} &= (3\times16^{1})+(9\times16^{0})+(11\times16^{-1})+(8\times16^{-2})\\ &= (3\times16)+(9\times1)+(11\times0.0625)+(8\times0.00390625)\\ &= 48+9+0.6875+0.03125 = 57.71875\end{aligned}$$

إذن $39.B8_{16}$ يكتب في النظام العشري: 57.71875
ويكتب رياضيا كالتالي: $(39.B8)_{16} = (57.71875)_{10}$

3.7. تحويل الأعداد من النظام الثنائي إلى النظام الستعشري:
القاعدة المتبعة لتحويل الأعداد من الثنائي إلى الستعشري هي:
١) نضيف أصفاراً على اليسار حتى يصبح عدد الخانات مضاعفاً لـ 4.
٢) نقسم العدد إلى مجموعات متكونة من 4 خانات ابتداءً من اليمين.
٣) نحوّل كل مجموعة إلى الرقم الموافق في النظام الستعشري.

مثال 26: حوّل الأعداد التالية من النظام الثنائي إلى النظام الستعشري:
$(1)\ 1100101000\,10111 \quad , \quad (2)\,1111110000\ \ 1101001$

الحل:

$$\begin{aligned}(1)\ 1100101000\,10111 &= 0110010100\,010111\\ &= 0110\quad 0101\quad 0001\quad 0111 = (6517)_{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ 1111110000\ \ 1101001 &= 0001111110000\ \ 1101001\\ &= 0001\quad 1111\quad 1000\quad 0110\quad 1001 = (1F869)_{16}\end{aligned}$$

4.7. تحويل الأعداد من النظام الستعشري إلى النظام الثنائي:
القاعدة المتبعة لتحويل الأعداد من الستعشري إلى الثنائي هي:
١) نحوّل كل رقم إلى الرقم الموافق ذي 4 خانات.
٢) نحذف الأصفار على اليسار إن لم نحتج إليها.

مثال 27: حوّل الأعداد التالية من النظام الستعشري إلى النظام الثنائي:

$$(1)\, 10A4_{16} \quad , \quad (2)\, CF8E_{16}$$

الحل:

$$(1)\ (10A4)_{16} = 0001\ \ 0000\ \ 1010\ \ 0100 = 1000010100100$$

$$(2)\ (CF8E)_{16} = 1100\ \ 1111\ \ 1000\ \ 1110 = 1100111110001110$$

مثال 28: تحقق مما يلي:

$$(59.125)_{10} = (111011.001)_2 = (3B.2)_{16}$$

تمارين

تمرين 1: اكتب كلاً من الأعداد العشرية التالية على شكل قوى 10:

$$(1)\, 10 \quad , \quad (2)\, 100 \ , \ (3)\, 10000 \quad , \quad (4)\ 0,001$$

تمرين 2: ما أكبر عدد عشري يمكن كتابته باستخدام ٤ خانات؟

تمرين 3: حوّل الأعداد الثنائية التالية إلى عشرية:

$$(1)\, 11 \quad , \quad (2)\, 100 \ , \ (3)\, 1110 \quad , \quad (4)\, 100101$$

تمرين 4: حوّل الأعداد الثنائية التالية إلى عشرية:

$$(1)\, 11.01 \quad , \quad (2)\, 10.01 \ , \ (3)\ 0.1110 \quad , \quad (4)\, 1001.011$$

تمرين 5: كم خانة نحتاج لتمثيل الأعداد العشرية التالية في النظام الثنائي؟

$(1)\,17 \quad , \quad (2)\,35 \;,\; (3)\,49 \quad , \quad (4)\,68 \;,(5)\,82 \;,\; (6)\,205$

تمرين 6: حوّل الأعداد العشرية التالية إلى ثنائية:

$(1)\,10 \quad , \quad (2)\,17 \;,\; (3)\,63 \quad , \quad (4)\,628 \;,(5)\,125 \;,\; (6)\,186$

تمرين 7: حوّل الأعداد العشرية التالية إلى ثنائية:

$(1)\,0.32 \quad , \quad (2)\,0.246 \;,\; (3)\,0.0981 \quad , \quad (4)\,12.34$

تمرين 8: أدّ العمليات الثنائية التالية:

$(1)\,10+11 \quad , \quad (2)\,110+10 \;,\; (3)\,111+111 \quad , \quad (4)\,1010+1011$

تمرين 9: أدّ العمليات الثنائية التالية:

$(1)\,11-10 \quad , \quad (2)\,110-10 \;,\; (3)\,111-101 \quad , \quad (4)\,1110+1011$

تمرين 10: أدِّ العمليات الثنائية التالية:

$(1)\,10\times 11 \quad , \quad (2)\,110\times 10 \;,\; (3)\,111\times 111 \quad , \quad (4)\,1010\times 1011$

تمرين 11: أدِّ العمليات الثنائية التالية:

$(1)\,100\div 10 \quad , \quad (2)\,1001\div 11 \;,\; (3)\,1100\div 100$

تمرين 12: استخدم كلاً من الأنظمة الثنائية المتفرعة ذات 8 خانات (لتمثيل الأعداد السالبة) لكتابة الأعداد العشرية التالية:

$(1)-29 \quad , \quad (2)-85 \;,\; (3)\,100 \quad , \quad (4)-123 \;,(5)-99 \;,\; (6)\,57$

تمرين 13: حوّل الأعداد الثنائية التالية من كل من الأنظمة المتفرعة إلى أعداد عشرية:

$(1)\,110011 \quad , \quad (2)\,10110 \;,\; (3)\,1100010 \quad , \quad (4)\,010100101$

تمرين 14: حوّل الأعداد الستعشرية التالية إلى ثنائية:

$(1)\,55_{16} \quad , \quad (2)\,A75_{16} \;,\; (3)\,8B5D_{16} \quad , \quad (4)\,1CF3_{16}$

تمرين 15: حوّل الأعداد الثنائية التالية إلى ستعشرية:

$(1)\,110011 \quad , \quad (2)\,10110 \;,\; (3)\,1100010 \quad , \quad (4)\,010100101$

تمرين 16: حوّل الأعداد الستعشرية التالية إلى عشرية:

$(1)\,55_{16} \quad , \quad (2)\,A75_{16} \;,\; (3)\,8B5D_{16} \quad , \quad (4)\,1CF3_{16}$

تمرين 17: حوّل الأعداد العشرية التالية إلى ستعشرية:

$(1)\,16 \quad , \quad (2)\,377 \;,\; (3)\,2784 \quad , \quad (4)\,1024$

الوحدة الثانية

التعبيرات المنطقية و العمليات عليها

الوحدة الثانية

التعبيرات المنطقية و العمليات عليها

الهدف العام: معرفة مفهوم التعبيرات المنطقية والعمليات عليها، والقدرة على تقييمها من حيث الصحة أو الخطأ .

الأهداف التفصيلية: بعد دراسة هذه الوحدة يتمكن المتدرب من :

- تكوين مفهوم التعبيرات المنطقية البسيطة والمركبة .
- إجراء العمليات المنطقية الأساسية .
- تكوين جدول الحقائق وبعض أنواع التعبيرات الهامة .
- استخدام بعض القوانين المنطقية الهامة .
- تكوين العبارات المنطقية المشروطة .

التعبيرات المنطقية والعمليات عليها

1. مقدمة :

عند استعمال الكلمات وحدها للتعبير عن فكرة معينة هناك احتمال عدم وضوح هذه الفكرة ؛لأن الكلمات عادةً ما تكون لها أكثر من معنى واحد، أما الرموز فهي مبهمة وحيادية؛ فإذن عند فشلنا في استخدام الطرق العادية لإيصال فكرة معينة يمكننا استخدام المنطق الرياضي (أو الرموز المنطقية) للوصول إلى طرح الفكرة بوضوح.

في علم الحاسب نستعمل هذه الرموز لتركيب جملة نسميها في هذا الباب **عبارة منطقية.** ومن الضروري معرفة الحالات التي تكون فيها هذه التعبيرات إما **صحيحة**$(True : T)$ أو **خاطئة**$(False : F)$. صحة أو خطأ هذه العبارة عادة ما تسمى **قيمة الصدق** .

2. التعبيرات والتعبيرات المركبة :

العبارة المنطقية هي جملة خبرية تكون إما صحيحة أو خاطئة ولكن ليست صحيحة وخاطئة في نفس الوقت. فمثلاً في الجمل الآتية:

مثال ١ :

a) هذا الثوب أبيض .
b) مجموع الزوايا الداخلية لمثلث ما يساوي 180°
c) $4 \div 2 = 1$
d) $x = 3$ هو حل للمعادلة: $x^2 = 16$
e) إلى أين أنت ذاهب؟

f) قم بواجبك من فضلك.

نلاحظ في هذا المثال أن الجمل الأربعة الأولى هي جمل خبرية يمكن الإجابة عليها بخطأ أو صح، فهذه الجمل نعتبرها تعبيرات منطقية. أما الجملتين الأخيرتين فهي ليست خبرية ولا نستطيع الإجابة عليها بخطأ أو صح، إذن لا نعتبرها رياضياً تعبيرات منطقية.

كثير من التعبيرات المنطقية تكون مركبة أي أنها تكون مركبة من تعبيرات جزئية بسيطة متصلة **بروابط** مختلفة. وتسمى العبارة عبارة بدائية إذا كان غير ممكن تجزئتها إلى تعبيرات بسيطة.

مثال ٢:

a) عمر طالب مجتهد وناصر طالب ذكي
b) الشكل $ABCD$ مربع وطول كل ضلع فيه يساوي $4\,cm$
c) الورد أحمر والبنفسج أزرق

الجمل الثلاث المذكورة في هذا المثال تعتبر كلها تعبيرات مركبة، فمثلاً العبارة الأول مركبة من التعبيرات الجزئية البسيطة التالية: "عمر طالب مجتهد" و "ناصر طالب ذكي". في العبارة الثانية: "الشكل $ABCD$ مربع" و "طول ضلعه $4\,cm$" وفي العبارة الأخيرة: "الورد أحمر" و "البنفسج أزرق".

تحديد قيمة الصدق لعبارة مركبة مرتبط بقيمة الصدق للتعبيرات الجزئية الموجودة فيها مع الروابط التي استخدمت في تكوين هذه العبارة المركبة.

إذاً سنتطرق فيما يلي إلى طريقة الوصول إلى قيمة الصدق للتعبيرات المركبة مع الإشارة إلى أننا سنستخدم الحروف اللاتينية الصغيرة $p, q, r, s, ...$ لترمز إلى التعبيرات المنطقية البسيطة الجزئية.

3. العمليات المنطقية الأساسية

سندرس في هذا الفصل العمليات الأساسية الثلاثة التالية:

- رابط العطف (*conjunction*): "و" "and" ورمزه: $\wedge$
- رابط التخيير (*disjunction*) : "أو" "or" ورمزه: $\vee$
- رابط النفي (*negation*) : "غير صحيح أن ...." "not"ورمزه: $\overline{\quad}$

1.3. العطف $p \wedge q$

يمكننا الحصول على عبارة جديدة مركبة باستخدام عبارتين بسيطتين جزئيتين مربوطتين برابط العطف "و" ("and"). ونرمز لهذه العبارة الجديدة كالتالي: $p \wedge q$

وتقرأ "p و q". قيمة الصدق للعبارة $p \wedge q$ تعتمد على قيمة الصدق للتعبيرات الجزئية لكل من p و q. تكون العبارة $p \wedge q$ صحيحة في حالة واحدة فقط وذلك عندما يكون p و q صحيحين في نفس الوقت، ويكون $p \wedge q$ خطأ في كل الحالات الأخرى.

يمكن تلخيص قيم الصدق للعبارة $p \wedge q$ في جدول عادة ما نسميه جدول الصدق أو الحقائق كما هو موضح في الجدول1.

فمثلاً نفهم من الصف الأول في الجدول أنه إذا كان p صحيحا و q صحيحا فإن $p \wedge q$ صحيحا، وأما في الصف الثاني من الجدول نفهم أنه إذا كان p صحيحا و q خطأ فإن $p \wedge q$ يكون خطأ وهكذا.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

الجدول 1

نلاحظ أن هناك أربعة صفوف تغطي الحالات الأربعة الممكنة للصحة (T) والخطأ (F) لكل من التعبيرات الجزئية p و q،كما نلاحظ أيضا أن $p \wedge q$ يكون صحيحاً إذا _وإذا فقط_ كان كل من p و q صحيحاً .

مثال ٣: لدينا التعبيرات الأربع التالية :

١) الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية وجدة مدينة من مدن المملكة
٢) الرياض عاصمة المملكة و $7 = 2 + 4$
٣) جدة عاصمة المملكة و 6 يقبل القسمة على 2
٤) عدد أيام الأسبوع 6 و 0 عدد طبيعي

ففي هذا المثال فقط العبارة الأولى صحيحة لأن التعبيرات الجزئية فيها صحيحة، أما باقي التعبيرات فكلها خطأ لأنه على الأقل واحد من التعبيرات الجزئية خطأ.

٢,٣. التخيير $p \vee q$

يمكننا الحصول على عبارة جديدة مركبة باستخدام عبارتين بسيطتين جزئيتين بينهما رابط العطف "أو" ("or"). ويرمز لهذا العبارة الجديدة كالتالي: $p \vee q$

وتقرأ p أو q". قيمة الصدق للعبارة $p \vee q$ تعتمد على قيم الصدق للتعبيرات الجزئية لكل من p أو q. تكون العبارة $p \vee q$ صحيحة إذا كان أحد أو كلاً من التعبيرات الجزئية p و q صحيحة، وتكون $p \vee q$ خطأ في حالة واحدة وهي عندما يكون p و q خطأ في نفس الوقت.

يمكن تلخيص قيم الصدق للعبارة $p \vee q$ في جدول الصدق أو الحقائق كما هو موضح في الجدول 2 .
فمن الجدول واضح أن $p \vee q$ دائماً صحيحة إلا في حالة واحدة وهي عندما يكون فيها p و q خطأ في نفس الوقت.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الجدول ٢

مثال ٤: التعبيرات الأربعة التالية :
١) الرياض عاصمة المملكة أو جدة مدينة من مدن المملكة
٢) الرياض عاصمة المملكة أو $7 = 2 + 4$
٣) جدة عاصمة المملكة أو 6 يقبل القسمة على 2
٤) عدد أيام الأسبوع 6 أو 0 عدد طبيعي
في هذا المثال فقط العبارة الرابعة خطأ وباقي التعبيرات كل واحد منها صحيحة؛ إذ أنه على الأقل أحد التعبيرات الجزئية صحيحة.

ملحوظة/ تستخدم كلمة "أو" في اللغة بطريقتين مختلفتين. أحياناً تستخدم كلمة أو بمفهومها الشامل أي أن " p أو q " يعني إما p أو q أو كليهما معا، بمعنى آخر أن على الأقل أحد البديلين يحدث. كما أن كلمة "أو" تستخدم بمفهومها الاستثنائي أي أن " p أو q ".

يعني إما p يحدث أو q يحدث وليس كليهما معاً، بمعنى آخر فقط واحد من البديلين يحدث. فمثلاً في الجملة "الخطوط L_1 و L_2 متوازيان أو متقاطعان تستخدم "أو" بالمعنى الثاني (الاستثنائي).
سوف نستخدم الرابط "أو" بالمعنى الأول في هذه الوحدة إلا إذا ذكر خلاف ذلك. إذن تعرّف $p \vee q$ على أنها دائماً تعني " p و | أو q".

3.3. النفي $\overline{p}$

يمكن الحصول على عبارة جديدة من عبارة ما بإدخال صيغة النفي عليها. ويتم ذلك بإضافة الكلمات "غير صحيح أن ...." قبل العبارة، وباستخدام الرموز إذا كانت العبارة هي p فإن نفيها يكتب: $\overline{p}$ وتقرأ نفي p .
قيمة صدق $\overline{p}$ تعتمد على قيمة صدق p ، فإذا كان p صحيح يكون $\overline{p}$ خطأ وإذا كان p خطأ يكون $\overline{p}$ صحيح فبالتالي يكون جدول الصدق كما يلي:

p	$\overline{p}$
T	F
F	T

مثال ٥: التعبيرات التالية:

١) الباب مغلق
٢) هذا الثوب أبيض
٣) كل الطلاب أذكياء

لنفي العبارة الأولى نقول: "غير صحيح أن الباب مغلق" أو ممكن أن نقول "الباب ليس مغلقا". وفي العبارة الثانية نقول: "غير صحيح أن هذا الثوب أبيض" أو نقول "هذا الثوب ليس أبيضا".

وفي العبارة الثالثة نقول: "غير صحيح أن كل الطلاب أذكياء" ولكن من الخطأ أن نقول: "كل الطلاب أغبياء" لأن هذا ليس نفيا للعبارة كما عرفناه.

ملحوظة

ليس من الضروري أن تحتوي التعبيرات المركبة على عبارتين جزئيتين p و q فقط، وإنما يمكن الحصول على عبارة مركبة من عدة عبارات جزئية وعدة روابط متكررة ولكن في هذه الوحدة سنكتفي بإعطاء التعبيرات المركبة من ثلاث عبارات جزئية كحد أقصى.
في حالة وجود ثلاث عبارات جزئية p, q, r يصبح جدول الحقائق يحتوي على ثمانية صفوف لكي نغطي كل الحالات الممكنة كالتالي:

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

٤. التعبيرات وجدول الحقائق (جدول الصدق) :

ليكن $P(p,q,r,....)$ هو الرمز لعبارة مركبة من عدد من التعبيرات الجزئية المنطقية $p,q,r,....$ (المتغيرات) وعدد من الروابط المنطقية $\wedge, \vee, \overline{\ \ }$ (وأخرى سنتطرق إليها

لاحقاً). قيم الصدق لهذه العبارة المركبة تعتمد أساساً على قيم الصدق للمتغيرات الموجودة فيها، أي أن قيم الصدق للعبارة المركبة تُعرف عند معرفة قيم الصدق للمتغيرات.

الطريقة الأسهل والأسرع لتوضيح هذه العلاقة بين قيم الصدق للعبارة المركبة وقيم الصدق للمتغيرات هو من خلال جدول الحقائق أو الصدق كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ٦: أوجد جدول الصدق للعبارة المركبة التالية: $\overline{(p \wedge \overline{q})}$

الحل:

يكون جدول الصدق كالتالي:

p	q	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$\overline{(p \wedge \overline{q})}$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

لاحظ أن الأعمدة الأولى مخصصة للمتغيرات p و q، وأن هناك عدد كاف من الصفوف لتغطية جميع الحالات الممكنة من صحيح (T) وخطأ (F) لهذه المتغيرات. ثم بعد ذلك نقوم بملء الأعمدة المتتالية التي تمثل المراحل البسيطة في تكوين العبارة المركبة. تحدد قيم الصدق في كل مرحلة من قيم الصدق في المراحل السابقة على حسب الروابط $\overline{}\,, \wedge, \vee$ المستخدمة. وأخيراً نحصل على قيم الصدق للعبارة المركبة التي تظهر في العمود الأخير.

ويجب أن نلاحظ كذلك أن جدول الحقائق الفعلي للعبارة $\overline{(p \wedge \overline{q})}$ يتكون فقط من عمودي المتغيرين p و q والعمود الأخير، أما الأعمدة الباقية فقد استخدمناها كمراحل للوصول إلى الحل. فإذن النتيجة تختصر فقط إلى جدول الحقائق التالي:

p	q	$\overline{(p \wedge \overline{q})}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

٥. التوافق والتناقض :

عادةً ما تكون العبارة المركبة دائماً صحيحة (T) في كل الحالات، أي أن العمود الأخير (أو النتيجة) تكون دائماً صح لأية قيم صدق المتغيرات، ففي هذه الحالة نسمي العبارة **توافق** أي أنها دائماً صحيحة.

وعكس ذلك أي عندما تكون النتيجة دائماً خاطئة (F) (أي أن العمود الأخير يحتوي فقط على (F)) فنقول أن العبارة **تناقض**.

مثال ٧: بَيِّن أن: $b)\ (p \wedge q) \wedge \overline{(p \vee q)}$ ***تناقض*** $a)\ \overline{p} \vee (p \vee q)$ ***توافق***

الحل:

a)نقوم بحساب جدول الحقائق كما رأينا في السابق: إذن نلاحظ أن $\overline{p} \vee (p \vee q)$ دائماً صحيح (T) وذلك في كل الحالات، فنستنتج أنها توافق ونكتب: $\overline{p} \vee (p \vee q) \equiv T$

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$\overline{p} \vee (p \vee q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

(سنتطرق للرمز $\equiv$ في الفقرة الآتية)

b) بنفس الطريقة نحسب جدول الحقائق كالتالي:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$(p \wedge q) \wedge \overline{(p \vee q)}$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

فهنا نلاحظ أن : $(p \wedge q) \wedge \overline{(p \vee q)}$تحتوي فقط على (F)، فإذن العبارة تناقض، ونكتب:

$$(p \wedge q) \wedge \overline{(p \vee q)} \equiv F$$

٦. التكافؤ المنطقي :

نقول على عبارتين أنهما متكافئتان منطقياً (أو فقط متساويتان) إذا كان جدولا الصدق لهما متطابقين، ونرمز لهذا التطابق كالتالي: $P(p,q,...) \equiv Q(p,q,...)$

(إذن $\equiv$ هو رمز التطابق أي التكافؤ).

مثال ٨: باستخدام جدول الحقائق (جدول الصدق) بين التطابق التالي: $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$

الحل: نحسب جدول الحقائق للعبارتين كالتالي:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

نلاحظ أن العمود الأخير لكل من $\overline{p \wedge q}$ و $\overline{p} \vee \overline{q}$ متطابقان إذن:

$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$$

٧. جبر التعبيرات :

لتكن التعبيرات الجزئية العشوائية p,q,r ،فالتطابقات التالية الموجودة في الجدول الآتي هي قوانين جبرية يمكن الوصول إليها باستخدام جدول الحقائق.

١) قوانين الإبدال $a)\ p \vee q \equiv q \vee p$ $b)\ p \wedge q \equiv q \wedge p$	**٥) قوانين المحايد** $a)\ p \vee T \equiv T \quad b)\ p \vee F \equiv p$ $c)\ p \wedge F \equiv F \quad d)\ p \wedge T \equiv p$
٢) قوانين التجميع $a)\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $b)\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	**٦) قوانين المتمم** $a)\ p \vee \overline{p} \equiv T \quad b)\ p \wedge \overline{p} \equiv F$ $c)\ \overline{T} \equiv F \quad d)\ \overline{F} \equiv T$
٣) قوانين التوزيع $a)\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $b) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	**٧) قانون متمم المتمم** $\overline{\overline{p}} = p$
٤) قوانين اللانمو $a)\ p \vee p \equiv p$ $b)\ p \wedge p \equiv p$	**٨) قوانين دي مورجان** $a)\ \overline{(p \vee q)} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$ $b)\ \overline{(p \wedge q)} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$

مثال ٩:

كمثال سنقوم ببيان القانون $(2a)$(قانون التجميع) باستخدام جدول الحقائق ونترك برهان باقي القوانين كتمارين للطالب .

نلاحظ أن قيم صدق $(p \vee q) \vee r$ الموجودة في العمود الخامس وقيم صدق $p \vee (q \vee r)$ في العمود السابع متطابقة، إذن نستنتج أن:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T

F	F	F	F	F	F	F

مثال ١٠: باستخدام جدول الحقائق بين أن: $(p \wedge q) \vee p \equiv p$ (قانون الامتصاص)

الحل:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

نلاحظ أن العمود الأول (أي p) مطابق للعمود الأخير (أي $(p \wedge q) \vee p$) ، إذاً:

$$(p \wedge q) \vee p \equiv p$$

ونسمي هذا القانون قانون الامتصاص. وبنفس الطريقة ممكن أن نصل إلى أن $(p \vee q) \wedge p \equiv p$

رأينا في الأمثلة السابقة كيفية استخدام جدول الحقائق لبيان قانون التجميع والامتصاص. أما في المثال الذي يلي سنرى كيف نستخدم هذه القوانين في بيان تطابقات أخرى.

مثال ١١: باستخدام قوانين جبر التعبيرات بين ما يلي:

$$\text{a) } \overline{(p \vee q)} \vee (\overline{p} \wedge q) \equiv \overline{p} \qquad \text{b) } \{(p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})\} \vee q \equiv T$$

الحل:

$(a$

السبب	مراحل الحل
قانون دي مورجان (a ٨)	$\overline{(p \vee q)} \vee (\overline{p} \wedge q) \equiv (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$
قانون التوزيع b) ٣)	$\equiv \overline{p} \wedge (\overline{q} \vee q)$
قانون المتمم a) ٦)	$\equiv \overline{p} \wedge T$
قانون المحايد d) ٥)	$\equiv \overline{p}$

$(b$

السبب	مراحل الحل

قانون التوزيع (a ٣)	$\{(p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})\} \vee q \equiv \{\bar{q} \vee (p \wedge \bar{p})\} \vee q$
قانون المتمم (b ٦)	$\equiv \{\bar{q} \vee F\} \vee q$
قانون المحايد (b ٥)	$\equiv \bar{q} \vee q$
قانون المتمم (a ٦)	$\equiv T$

يمكننا كذلك استخدام القوانين السابقة لاختصار التعبيرات المركبة إلى تعبيرات بسيطة كما هو موضح في المثال التالي :

مثال ١٢: اختصر ما يلي:

$$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee \overline{(p \vee \bar{q})}$$

الحل:

السبب	مراحل الحل
قانون دي مورجان (a ٨)	$\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee [\bar{p} \wedge (q \wedge r)] \vee (\bar{p} \wedge q)$
قانون التوزيع (b ٣)	$\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \{\bar{p} \wedge [(q \wedge r) \vee q]\}$
قانون الامتصاص (مثال ١٠)	$\equiv (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$
قانون التوزيع (b ٣)	$\equiv \bar{p} \wedge (\bar{q} \vee q)$
قانون المتمم (a ٦)	$\equiv \bar{p} \wedge T$
قانون المحايد (d ٥)	$\equiv \bar{p}$

٨. التعبيرات المشروطة وثنائية الشروط .

1.8. العبارة المشروطة :

العبارة التي تكون على شكل "إذا كان p فإن q" $(if\ p\ then\ q)$ حيث p و q تعبيرات جزئية، تسمى عبارة مشروطة ويرمز لها كالتالي: $p \to q$.

العبارة المشروطة $p \to q$ عادة كذلك ما تقرأ " p يستوجب q" أو تقرأ " p فقط إذا q".

و يكون جدول الصدق للعبارة الشرطية كالتالي:

p	q	$p \to q$
T	T	T

T	F	F
F	T	T
F	F	T

هذا يعني أن $p \to q$ خطأ إذا وفقط إذا كان q خطأ و p صحيح، وفي باقي الحالات تكون دائماً صحيحة.
في هذا الجدول يمكن للمتدرب أن يستوعب نتائج الصف الأول والثاني بسهولة، أما نتائج الصف الثالث والرابع يمكن أن تشكل بعض الغموض. وهذا الغموض ناتج من أننا عادة لما نستخدم عبارة على شكل "إذا كان p فإن q" نستنتج تلقائيا أن p صحيح وأن التعبيرات p و q مرتبطة، ولكن هذا الاستنتاج غير صحيح في هذه الحالة كما سنرى مما يلي:

مثال ١٣: لتكن التعبيرات التالية:
خط عرضي يقطع خطين متوازيين: p ، الزوايا المتقابلة متساوية: q

$p \to q$: إذا قطع خط عرضي خطين متوازيين فإذن الزوايا المتقابلة تكون متساوية في هذه الحالة p صحيحة و p و q مرتبطين .

لكن في الرياضيات المنطقية يجب أن نأخذ بعين الاعتبار الحالة التي لا ينطبق عليها أحد أو كل هذه القيود كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ١٤: لتكن التعبيرات التالية: $q: 3+5=8$, $p: 3=8$
$p \to q$: إذا كان $3=8$ فإن $3+5=8$
هنا $p \to q$ صحيحة لأن العبارة المستنتجة q صحيحة رغم أن p خطأ. إذن ليس هناك ربط منطقي بين p و q أو بمعنى آخر لا يمكن استنتاج q من p .

مثال ١٥: لتكن التعبيرات التالية: $q: 4 \div 2 = 3$ ، يحتوي المثلث على أربعة أضلع: p
$p \to q$: إذا كان المثلث يحتوي على أربعة أضلع فإن $4 \div 2 = 3$
هنا p و q كلاهما خطأ ومن الواضح أنهما منطقياً غير مرتبطين لكن العبارة المشروطة $p \to q$ تعتبر صحيحة في منطق الرياضيات.

ملاحظة / يمكننا استبدال الرابط الشرطي $(\to)$ برابط التخيير $(\vee)$ كالتالي:

$$p \to q \equiv \overline{p} \vee q$$

ويمكن التأكد من هذه النتيجة بحساب جدول الصدق لكل التعبيرات كالتالي:

p	q	$p \to q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

فإذن واضح من العمود الثالث و الأخير أن: $p \to q \equiv \overline{p} \vee q$

بمعنى آخر أن"إذا p فإن q" تكافئ "نفي p أو q".

مثال ١٦: قارن بين التعبيرات التالية:

$$p \to q \ , \ q \to p \ , \ \overline{p} \to \overline{q} \ , \ \overline{q} \to \overline{p}$$

الحل:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \to \overline{q}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

من هذا الجدول نستنتج أن:

$$p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$$
$$q \to p \equiv \overline{p} \to \overline{q}$$

عادة ما نسمي:
$q \to p$ مقلوب و $\overline{p} \to \overline{q}$ معكوس و $\overline{q} \to \overline{p}$ مقلوب المعكوس العبارة المشروطة $p \to q$

سنرى في المثال التالي أنه إذا كان $p \to q$ صحيح فليس من الضروري أن يكون $q \to p$ و $\overline{p} \to \overline{q}$ كلاهما صحيح.

مثال ١٧: ليكن: $q : |x| < 4$ و $p : x^2 = 4$. في هذه الحالة:
$p \to q$: إذا كان $x^2 = 4$ (يعني $x = \pm 2$) فإن $|x| < 4$ وهذا صحيح.
$q \to p$: إذا كان $|x| < 4$ فإن $x^2 = 4$ وهذا غير صحيح، أمثلة على ذلك $x = 1$ أو $x = -3$.
$\overline{p} \to \overline{q}$: إذا كان $x^2 \neq 4$ فإن $|x| \geq 4$ وهذا كذلك غير صحيح، أمثلة على ذلك $x = 1$ أو $x = -3$.

ملحوظة

p	q	$p \to q$	$\overline{(p \to q)}$

يكون جدول الصدق لنفي العبارة المشروطة كالتالي:

T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

ولقد علمنا من قبل أن: $p \to q \equiv \overline{p} \vee q$

إذاً باستخدام قانون دي موجان يكون لدينا:

$$\overline{(p \to q)} \equiv \overline{(\overline{p} \vee q)} \equiv p \wedge \overline{q}$$

2.8.العبارة ثنائية الشرط :

هناك كذلك عبارة عادة ما نستخدمها كثيراً في الاستنتاجات الرياضية والتي تكون على شكل " p إذا وفقط إذا q " ويرمز لها كالتالي: $p \leftrightarrow q$.

تكون هذه العبارة المزدوجة الشروط صحيحة كلما كان كل من p و q صحيح أو خطأ في نفس الوقت. وتكون خاطئة في الحالات الباقية كما موضح في جدول الصدق التالي:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

وباستخدام جدول الصدق يمكننا الوصول إلى أن:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

(نترك بيان هذا التطابق كتمرين يقوم به المتدرب)

٩. القياس :

القياس هو عبارة عن علاقة بين مجموعة من التعبيرات $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ والتي تُسمى المقدمات أو المجال وعبارة أخرى Q تسمى الاستنتاج، ونرمز للقياس كالتالي:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \mapsto Q$$

يكون القياس $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \mapsto Q$ منطقياً أو مقبولاً (أو فقط صحيحاً) إذا كانت النتيجة (Q) صحيحةً كلما كانت جميع المقدمات $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ صحيحة، ويكون غير منطقي أو مغالطٍ (أو فقط خطأ) في الحالات الأخرى.

مثال ١٨: بَيَّن أن القياسات التالية:

مغالط (أو خطأ) $(b)\ p \to q\,,\, q \mapsto p$ ، منطقي (أو صحيح)

$(a)\ p\,,\, p \to q \mapsto q$

الحل:

p	q	$p \to q$

a) نلاحظ هنا أن لدينا مقدمتين وهما p و $p \to q$ فلكي يكون القياس صحيحاً يجب أن تكون النتيجة وهي q صحيحة في كل الحالات التي تكون فيها المقدمتان صحيحتان. ولكي نتأكد من هذا يجب أن نحسب جدول الصدق لهذا القياس كالتالي :

T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

إذن من الجدول نلاحظ أن المقدمتين تكونان صحيحتين فقط في حالة واحدة وهي موجودة في الصف الأول، إذن يجب أن تكون النتيجة والتي هي العبارة q صحيحة كذلك في هذه الحالة وهذا ما هو الحال عليه في الصف الأول. إذن نستنتج أن القياس: $p\,,\, p \to q \mapsto q$ مقبول أو صحيح.

b) بنفس الطريقة المذكورة في الفقرة a) نحسب جدول الصدق كالتالي:
نلاحظ من الجدول أن المقدمتين $p \to q$ و q تكونان صحيحتين في نفس الوقت في الصف الأول والثالث، فإذن يجب أن تكون النتيجة والتي هي p صحيحة في هاتين الحالتين وهذا ما لم يتحقق لأنه في الصف الثالث النتيجة (أي p) خاطئة، فبالتالي نستنتج أن القياس $p \to q\,,\, q \mapsto p$ مغالط (أو خطأ).

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

يمكن أن تختصر الحالات التي تكون فيها المقدمات $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_n$ صحيحة كلها في نفس الوقت إلى قول أن العبارة $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n$ توافق (أي دائماً صحيحة)، إذن القياس $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_n \mapsto Q$ منطقيا (أو صحيح) إذا وفقط إذا Q صحيحة كلما كان $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n$ صحيحاً، أو بمعنى آخر أن:
$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n \to Q) \equiv T$ (أي توافق). لنرى هذا في المثال التالي:

مثال ١٩: بَيِّن أن القياس $p \to q\,,\, q \to r \mapsto p \to r$ منطقي

الحل:

بالمفهوم الجديد يجب أن نبين أن $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ توافق باستخدام جدول الصدق كالتالي:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

إذن $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r) \equiv T$ وبالتالي نستنتج أن القياس $p \to q \, , q \to r \mapsto p \to r$ منطقي (أو صحيح).

مثال ٢٠: هل القياس التالي منطقي؟
إذا كان سوق العمل ممتازاً ستكون رواتب كل الموظفين في قطاع معين متساوية. لكن يكون الوضع دائماً غير ذلك، أي أن رواتب الموظفين غير متساوية. إذن نستنتج أن سوق العمل غير ممتاز.

الحل:
لتكن التعبيرات التالية:
سوق العمل غير ممتاز: $\overline{P_1}$ سوق العمل ممتاز: P_1
رواتب الموظفين غير متساوية: $\overline{P_2}$ رواتب الموظفين متساوية في قطاع معين: P_2
فالمقدمات هي: $p_1 \to p_2 \, , \overline{p_2}$ والاستنتاج هو: $\overline{P_1}$
إذن القياس: $p_1 \to p_2 \, , \overline{p_2} \mapsto \overline{p_1}$ يكون منطقيا إذا وفقط إذا كان:
$$(p_1 \to p_2) \wedge \overline{p_2} \to \overline{p_1} \equiv T$$

P_1	P_2	$\overline{P_1}$	$\overline{P_2}$	$P_1 \to p_2$	$(p_1 \to p_2) \wedge \overline{p_2}$	$(p_1 \to p_2) \wedge \overline{p_2} \to \overline{p_1}$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

إذن من العمود الأخير نستنتج أن $(p_1 \to p_2) \wedge \overline{p_2} \to \overline{p_1} \equiv T$ وبالتالي القياس منطقي.

١٠. الحتمية المنطقية

يقال أن العبارة $P(p,q,...)$ تحتم منطقيا العبارة $Q(p,q,...)$ إذا كانت $Q(p,q,...)$ صحيحة كلما كانت $P(p,q,...)$ صحيحة، ونكتب:

$$P(p,q,...) \Rightarrow Q(p,q,...)$$

مثال ٢١: p يحتم منطقيا $p \vee q$ لأنه بمطالعة جدول صدق $p \vee q$ التالي:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نلاحظ أن p تكون صحيحة في كل الحالات التي تكون فيها $p \vee q$، وهما حالتان موجودتان في الصف الأول والثاني. إذا $p \Rightarrow p \vee q$.

وبطريقة أخرى هذا يعادل قولنا أن القياس $Q(p,q,...) \mapsto P(p,q,...)$ منطقي، ما دمنا نقول أن $Q(p,q,...)$ صحيح كلما كان $P(p,q,...)$صحيح والعكس أيضا. إضافة إلى ذلك القياس $P \mapsto Q$ منطقي إذا وفقط إذا كانت العبارة المشروطة $P \mapsto Q$ دائماً صحيحة أي توافق. يمكننا تلخيص هذا الكلاَم في النظرية التالية :

لأية عبارتين $P(p,q,...)$ و $Q(p,q,...)$ الجمل التالية متكافئة :

- $P(p,q,...)$تحتم منطقيا $Q(p,q,...)$
- القياس $Q(p,q,...) \mapsto P(p,q,...)$ منطقي (أو صحيح)
- العبارة المشروطة $P \mapsto Q$ توافق (دائماً صحيحة)

تمارين

تمرين ١: أي من الجمل التالية نعتبرها تعبيرات منطقية:

a) يحتوي جسم الإنسان على رجلين .
b) لا تقف على الرصيف .
c) ليس هناك عدد أولي كبير .
d) $45 > 58$
e) سوف يسقط المطر على مدينة الرياض الأسبوع القادم .
f) هل هذه مناقشة منطقية؟
g) إذا $2+2=5$ فإن الرياح ستهب من الشرق .

تمرين ٢: لتكن التعبيرات التالية: q:"الجو ممطر" p:"الجو بارد"

اكتب جملة بسيطة تعبر عن: $a)\ \overline{p}\ ,\ b)\ p \wedge q\ ,\ c)\ p \vee q\ ,\ d)\ q \vee \overline{p}$

تمرين ٣: لتكن التعبيرات التالية:

p : عمر يقرأ جريدة الرياض

q : عمر يقرأ جريدة عكاظ

r : عمر يقرأ جريدة الجزيرة

اكتب التعبيرات التالية باستخدام الروابط $\wedge, \vee, \overline{}$:

a) عمر يقرأ جريدة الرياض أو جريدة عكاظ ولكن لا يقرأ جريدة الجزيرة .
b) عمر يقرأ جريدة الرياض وجريدة عكاظ أولا يقرأ جريدة الرياض وجريدة الجزيرة.
c) غير صحيح أن عمر يقرأ جريدة الرياض ولكن لا يقرأ جريدة الجزيرة .
d) غير صحيح أن عمر يقرأ جريدة الجزيرة أو جريدة عكاظ ولكن لا يقرأ جريدة الرياض .

تمرين ٤: لتكن التعبيرات التالية:

p : الشمس نجم

q : زحل كوكب

r : جدة عاصمة المملكة

البروتينات ضرورية للإنسان : s

أوجد قيم الصدق للتعبيرات التالية:

$$a)\ p\vee q\ ,\ p\vee r\ ,\ p\vee s\ ,\ q\vee r\ ,\ q\vee s\ ,\ r\vee s$$

$$b)\ p\wedge q\ ,\ p\wedge r\ ,\ p\wedge s\ ,\ q\wedge r\ ,\ q\wedge s\ ,\ r\wedge s$$

تمرين ٥: باستخدام جدول الصدق بين أن: $(p\wedge q)\wedge\overline{(p\vee q)}\equiv F$

تمرين ٦: باستخدام جدول الصدق بين أن العبارات التالية توافق:

$$a)\ p\vee\overline{(p\vee r)}\ \ ,\ \ b)\ \{(p\vee\overline{q})\wedge(\overline{p}\vee\overline{q})\}\vee q\ \ ,\ \ c)\ \overline{\{p\wedge(\overline{p}\vee q)\}}\vee q$$

تمرين ٧: باستخدام جدول الصدق بين التطابقات التالية:

$$a)\ p\vee(p\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

$$b)\ p\vee(p\wedge q)\equiv p$$

$$c)\ \overline{(p\wedge q)}\equiv\overline{p}\vee\overline{q}$$

تمرين ٨: باستخدام قوانين جبر التعبيرات بين أن:

$$a)\ p\vee\overline{(p\wedge q)}\equiv T$$

$$b)\ \overline{\{p\wedge(\overline{p}\vee q)\}}\vee q\equiv T$$

$$c)\ \{p\wedge(\overline{p}\vee q)\}\vee\{q\wedge\overline{(p\wedge q)}\}\equiv q$$

$$d)\ \{(p\vee\overline{q})\wedge(\overline{p}\vee\overline{q})\}\vee q\equiv T$$

تمرين ٩: اختصر ما يلي:

$$a)\ (\overline{p}\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\wedge\overline{q}\wedge\overline{r})$$

$$b)\ \overline{p}\wedge\{\overline{q}\wedge(\overline{p}\vee q)\}$$

$$c)\ (\overline{p}\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\wedge q\wedge r)\vee\overline{(p\vee\overline{q})}$$

تمرين ١٠: اكتب التعبيرات التالية باستخدام الرموز المناسبة:

a) إذا كان فيه مشاكل في السفر والسكن في جدة فلن أذهب إلى جدة .

b) إذا كان غدا عطلة فلن يكون هناك اختبار، ولكن إذا كان هناك اختبار فسوف يكون في مادة الرياضيات .

c) ستزدهر المملكة إذا وفقط إذا اشتغلنا جدياً وبإخلاص وبذكاء .

تمرين ١١: أوجد قيم الصدق للتعبيرات التالية:

$a) 3+8=11$ إذا $1+3=4$ $b) 3+11=10$ إذا $1+3=7$

$c) 3+8=11$ إذا $1+3=7$ $d) 3+8=10$ إذا $1+3=4$

تمرين ١٢: لتكن التعبيرات التالية:

$p:$ المثلث ABC متطابق الأضلع $q:$ المثلث ABC متطابق الزوايا

اكتب مقلوب، معكوس ومقلوب المعكوس العبارة المشروطة $p \to q$

تمرين ١٣: أعد كتابة التعبيرات التالية بدون استخدام رابط الشرط:

$a)$ إذا كان الجو بارداً فإنه يلبس ثوب أسود

$b)$ إذا اجتهد الطالب فإن معدله سيكون مرتفع

(مع العلم أن: $p \to q \equiv \overline{p} \vee q$)

تمرين ١٤: عبر عن نفي العبارات التالية بجملة بسيطة:

(a) إذا عمل فإنه سيقبض في آخر الشهر .

(b) سيسبح إذا وفقط إذا كان الماء دافئاً .

(c) إذا أمطرت فإنه لن يقود السيارة .

تمرين ١٥: بَيِّن أن:

$(a)\ p \leftrightarrow \overline{\overline{p}} \equiv T$ $(b)\ [p \wedge (p \to q)] \to q \equiv T$

$(c)\ \overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}) \equiv T$ $(d)\ \overline{(p \vee q)} \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q}) \equiv T$

$(e)\ [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r) \equiv T$ $(f)\ (p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p}) \equiv T$

تمرين ١٦: بَيِّن التطابقات التالية:

$$a)\ (p \to q) \equiv (\overline{q} \to \overline{p})$$

$$b)\ p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

$$c)\ (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

تمرين ١٧: بَيِّن ما يلي:

a) $p \to q, \overline{p} \mapsto \overline{q}$ قياس مغالط

b) $p \to q, \overline{q} \mapsto \overline{p}$ قياس منطقي

c) $p \to \overline{q}, r \to q, r \mapsto \overline{p}$ قياس منطقي

تمرين ١٨: بَيِّن أن القياس التالي مغالط :
إذا اشتريت أسهم سوف أخسر المال، إذا خسرت المال سوف أشتري أسهم .

تمرين ١٩: هل القياس التالي منطقي أم مغالط :
إذا 7 أقل من 4 فإن 7 ليس عدد أولي. 7 ليس أقل من 4 إذاً 7 عدد أولي .

الوحدة الثالثة

البوابات المنطقية و الدوائر

الهدف العام: معرفة مفهوم البوابات المنطقية والقدرة على تصميم دوائر منطقية واختصارها.

الأهداف التفصيلية: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على :

- اختصار العبارات المنطقية باستخدام جبر بول.
- تصميم الدوائر المنطقية.
- اختصار الدوائر المنطقية.
- استخدام البوابات المنطقية الأساسية.
- تصميم الدوائر المنطقية وكيفية تصميمها باستخدام البوابة $NAND$.

البوابات المنطقية والدوائر

١. جبر بول

لقد رأينا في الوحدة الثانية أن جبر التعبيرات هو نظام ثنائي الحالة أي أن العبارة إما أن تكون صحيحةً أو خاطئةً. عادةً ما نسمي الجبر المرتبط بمثل هذه النظم جبر بول والقوانين التي رأينها من قبل تنطبق بنفس الطريقة إلا أنها تكتب تماشياً مع الرموز التالية:

١. a تقابله العبارة p
٢. $\overline{a}$ تقابله العبارة $\overline{p}$
٣. $\times$ تقابله العملية $\wedge$ (الرمز $\times$ عادة ما يحذف، فمثلاً $a \times b$ تكتب فقط ab)
٤. $+$ تقابله العملية $\vee$
٥. 1 تقابله قيمة الصدق: صحيح (T)
٦. 0 تقابله قيمة الصدق: خطأ (F)

فإذن باستخدام الرموز الجديدة يمكن إعادة كتابة القوانين التي مرت علينا في الوحدة الثانية كالتالي:

	قوانين جبر التعبيرات		قوانين جبر بول
1	$p \vee q \equiv q \vee p$		$a+b=b+a$
2	$p \wedge q \equiv q \wedge p$		$a \times b = b \times a$
3	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$		$(a+b)+c=a+(b+c)$
4	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$		$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
5	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$		$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$
6	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$		$a + (b \times c) = (a+b) \times (a+c)$
7	$\overline{(p \vee q)} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$		$\overline{a+b} = \overline{a} \times \overline{b}$
8	$\overline{(p \wedge q)} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$		$\overline{a \times b} = \overline{a} + \overline{b}$
9	$p \vee p \equiv p \quad , \quad p \wedge p \equiv p$		$a+a=a \ , \ a \times a = a$
10	$p \vee T \equiv T \quad , \quad p \wedge T \equiv p$		$a+1=1 \ , \ a \times 1 = a$
11	$p \vee \overline{p} \equiv T \quad , \quad p \wedge \overline{p} \equiv F$		$a+\overline{a}=1 \ , \ a \times \overline{a} = 0$
12	$p \vee F \equiv p \quad , \quad p \wedge F \equiv F$		$a+0=a \ , \ a \times 0 = 0$

مثال ١: اختصر عبارات بول التالية:

$a) Z=(a+bc)(\overline{a}\overline{b}+c) \qquad b) Z = a + b\overline{c}$

الحل:

القانون $b)$ القانون $a)$

$$Z = \overline{a + \bar{b}\,\bar{c}}$$
$$= \bar{a}\,(\overline{\bar{b}\,\bar{c}}) \qquad 7$$
$$= \bar{a}\,(\bar{\bar{b}} + \bar{\bar{c}}) \qquad 8$$
$$= \bar{a}\,(b + c)$$

$$Z = (a + bc)(\bar{a}\bar{b} + c)$$
$$= a(\bar{a}\bar{b} + c) + bc(\bar{a}\bar{b} + c) \qquad 5$$
$$= a\bar{a}\bar{b} + ac + \bar{a}\bar{b}bc + bcc$$
$$= 0 \cdot \bar{b} + ac + \bar{a} \cdot 0 \cdot c + bc \qquad 9\,,11$$
$$= 0 + ac + 0 + bc \qquad 12$$
$$= ac + bc \qquad 12$$
$$Z = c(a + b) \qquad 5$$

٢. جدول الصدق :
يمكننا الآن كتابة جدول صدق التعبيرات باستخدام رموز جبر بول. فمثلاً لتكن العبارة التالية:
" تكون رسوم تأمين السيارة عالية إذا كان السائق شابا أو له سجل من الحوادث"
ليكن:
OR : +له سجل من الحوادث: b ، السائق شاب: a ، رسوم التأمين عالية: Z
إذن يمكن كتابة العبارة (عبارة بول) كالتالي:

$$Z = a + b$$

ويكون جدول الصدق لهذه العبارة كالتالي:

a	b	$Z = a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

كما يمكننا التأكد من تطابق عبارات بول باستخدام جدول الصدق. تكون عبارتان متطابقتان إذا كان إدخال متطابق على كل من العبارتين ينتج خرج متطابق. المثال التالي يوضح ذلك:

مثال ٢ : بَيِّن أن: $ab + ac = a(b + c)$

الحل:
كما رأينا في تطابق التعبيرات في الفصل الأول من هذه الوحدة نقوم بحساب جدول الصدق لطرفي المعادلة ولكن هذه المرة نستخدم 1 و 0 عوضا عن T وF كالتالي:

a	b	c	ab	ac	$ab + ac$	$b + c$	$a(b + c)$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

إذن من الجدول نلاحظ أن العمود 6 (أي $ab+ac$) يطابق العمود الأخير (أي $a(b+c)$)، فبالتالي العبارتان متطابقتان أي أن:

$$ab+ac=a(b+c)$$

٣. تعريف البوابات المنطقية والدوائر:
الدوائر المنطقية (كما تسمى كذلك الشبكة المنطقية) هي عبارة عن هياكل مصممة من عدد من الدوائر البدائية تسمى بوابات منطقية. كل واحد من هذه الدوائر المنطقية يمكن النظر إليها كماكينة L تحتوي على جهاز أو أكثر للإدخال وجهاز إخراج واحد فقط.

في أي لحظة كل جهاز إدخال في L يستوعب وحدة أساسية واحدة من المعلومات 0 أو 1 ثم تعالج هذه البيانات بالدائرة لتعطي الناتج وحدة أساسية واحدة 0 أو 1 على جهاز الإخراج. وبالتالي يمكن تخصيص متتابعات من الوحدات الأساسية لكل جهاز إدخال (حيث كل المتتابعات لها نفس العدد من الوحدات الأساسية) حيث L تعالج وحدة أساسية في كل مرة لتنتج للخروج متتابعة لها نفس العدد من الوحدات، يمكن تفسير الوحدة الأساسية كدفعة فولتية خلال جهاز الإدخال أو الإخراج.

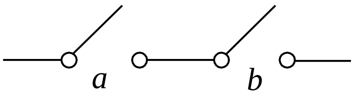
٤. البوابات المنطقية :
هناك ثلاث بوابات منطقية أساسية سنذكرها فيما يلي، إضافة إلى بوابات أخرى. يمكن افتراض أن البوابات تعالج المتتابعة من اليسار إلى اليمين أو من اليمين إلى اليسار وسوف نعتبر في هذا الفصل الفرضية الأولى ما لم يذكر خلاف ذلك.

٤,١. البوابة AND (و):
كل إشارة خرج ناتجة من بوابة AND لها قيمة صدق صحيحة (أي1) إذا وفقط إذا كانت إشارات الإدخال لها قيم صدق صحيحة (أي 1). مفتاحا تشغيل موصلان في تسلسل (الشكل $1a$) يشكلان بوابة AND . تعطى إشارة الخرج كالتالي: $Z=ab$. ترسل الإشارة

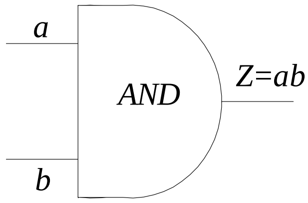
(أي أن الخرج 1) إذا وفقط إذا كان مفتاحي التشغيل A AND B مقفلين (أي أن $a=1$ AND $b=1$). الشكل $1b$ يمثل البوابة AND.

جدول الصدق يبين الخرج Z للبوابة AND لكل توافيق (حالات) a و b. فمثلاً نلاحظ من الجدول أن $Z=0$ إذا $a=0$ و $b=0$. لثلاثة مداخل a,b,c يكون الخرج: $Z=abc$

a	b	$Z=ab$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



الشكل $1a$

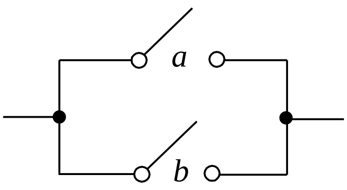


الشكل $1b$

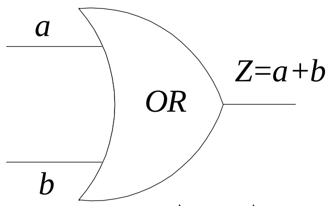
٢,٤. البوابة OR (أو):

ناتج البوابة OR هو إشارة خرج صحيحة (أي 1) إذا كانت واحدة من إشارات الإدخال صحيحة (أي 1). مفتاحا تشغيل موصلان بشكل موازي (الشكل $2a$) يشكلان بوابة OR. وتعطى إشارة الخرج كالتالي: $Z=a+b$. ترسل الإشارة (أي أن $Z=1$) إذا كان أحد مفتاحي التشغيل مقفل (أي أن $a=1$ OR $b=1$). الشكل $2b$ يمثل البوابة AND. جدول الصدق يبين الخرج Z للبوابة OR لكل توافيق (حالات) a و b. فمثلاً نلاحظ من الجدول أن $Z=1$ إذا كان $a=0$ و $b=1$.

a	b	$Z=a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



الشكل $2a$



الشكل $2b$

٣,٤. البوابة NOT (النفي):

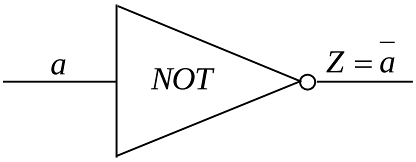
هذه البوابة تزود الشرط أنه لن تكون هناك إشارة خرج عندما يكون هناك إشارة إدخال، أي أن:

$$Z=0 \quad \text{لما} \quad a=1 \qquad \text{و} \qquad Z=1 \quad \text{لما} \quad a=0$$

وهذا يعني أن الخرج Z هو معكوس الإدخال، وهذا يكافئ المتممة في جبر بول، أي أن:

$$Z=\overline{a}$$

تمثيل البوابة NOT وجدول الصدق يكون كالتالي:



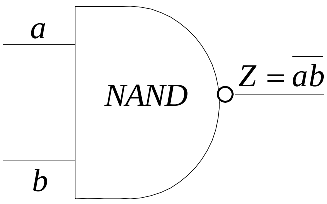
a	$Z=\bar{a}$
0	1
1	0

٤,٤. البوابة $NAND$:

البوابة $NAND$ هي البوابة $NOT\ \ AND$. إشارة الخرج من البوابة $NAND$ هي معكوسة إشارة الخرج من البوابة AND. إذن الخرج من البوابة $NAND$ هو متممة الخرج لبوابة AND، أي أن:

$$Z=\overline{ab}$$

تمثيل البوابة $NAND$ وجدول الصدق يكون كالتالي:



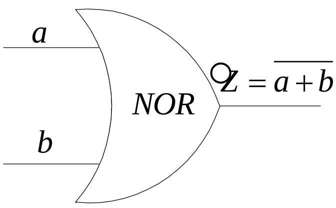
a	b	ab	$Z=\overline{ab}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

٥,٤. البوابة NOR :

البوابة NOR هي البوابة $NOT\ \ OR$. الخرج من البوابة NOR هو معكوس خرج البوابة OR.
إذن إشارة الخرج من البوابة NOR هي معكوسة إشارة خرج البوابة OR، أي أن:

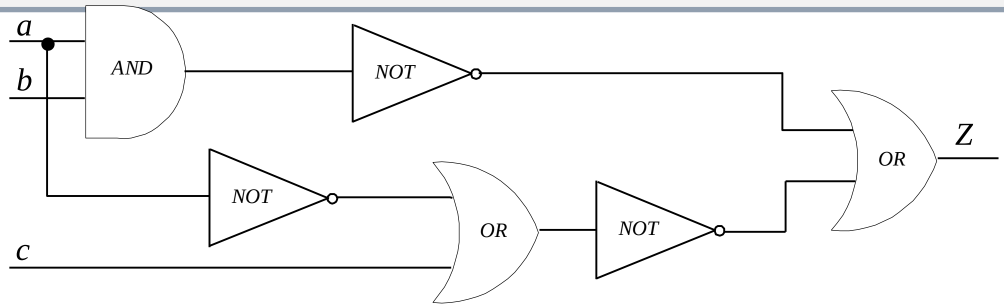
$$Z=\overline{a+b}$$

تمثيل البوابة NOR وجدول الصدق يكون كالتالي:



a	b	$a+b$	$Z=\overline{a+b}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

مثال ٣: أوجد الخرج Z لدائرة المنطقية التالية:



الحل:

الدخل على البوابة AND : $a \ \ and \ \ b$ الخرج من البوابة AND : ab

الخرج من البوابة NOT (الأعلى): $\overline{ab}$ الخرج من البوابة NOT (الأسفل): $\overline{a}$

الدخل على البوابة OR: $\overline{a} \ \ and \ \ c$ الخرج من البوابة OR: $\overline{a}+c$

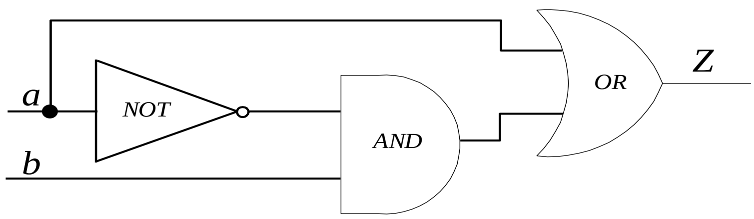
الخرج من البوابة NOT : $\overline{\overline{a}+c}$ الدخل على البوابة OR: $\overline{ab} \ \ and \ \ \overline{\overline{a}+c}$

وفي النهاية يكون الخرج Z من البوابة OR: $Z=\overline{ab}+\overline{\overline{a}+b}$

ملحوظة:

يمكن إيجاد نفس الناتج للمثال السابق وذلك بكتابة الخارج من كل بوابة على حده ويكون ذلك على نفس الدائرة المنطقية.

مثال ٤: أوجد واختصر الخرج Z للدائرة المنطقية التالية ثم ارسم الدائرة المنطقية المطابقة لهذا الخرج.



الحل:

الخرج من البوابة NOT : $\overline{a}$

الدخل على البوابة AND : $\overline{a} \ \ and \ \ b$

الخرج من البوابة AND : $\overline{a}b$

الدخل على البوابة OR: $\overline{a}b \ \ and \ \ a$

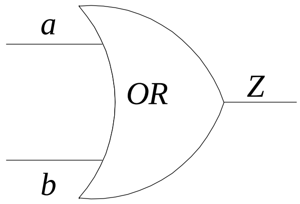
إذن الخرج من البوابة الأخيرة OR يكون: $Z=a+\overline{a}b$

وكما رأينا من قبل باستخدام قوانين جبر بول:

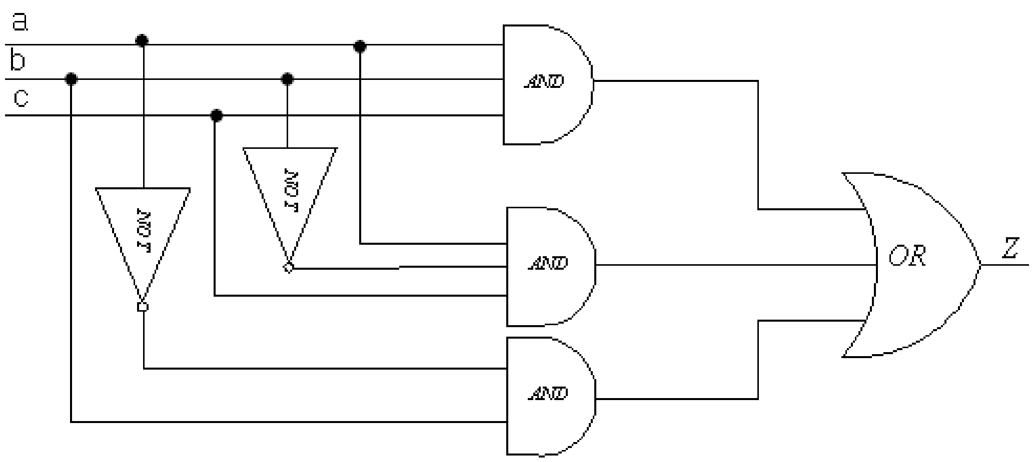
(قانون 6) $Z=a+\overline{a}b=(a+\overline{a})(a+b)$

(قانون11 و 10) $Z = a + b$

وخرج مثل هذا يمكن الحصول عليه من البوابة OR كما في الشكل:



مثال ٥: أوجد خرج الدائرة المنطقية التالية:



الحل:

الدخل على البوابة AND (الأولى من الأعلى): a and b and c والخرج: abc

الدخل على البوابة AND (الثانية): a and $\bar{b}$ and c والخرج: $a\bar{b}c$

الدخل على البوابة AND (الثالثة): $\bar{a}$ and b والخرج: $\bar{a}b$

إذا الدخل على البوابة OR: abc and $a\bar{b}c$ and $\bar{a}b$

وبالتالي يكون الخرج Z : $Z = abc + a\bar{b}c + \bar{a}b$

مثال ٦: أوجد الخرج من جدول الصدق التالي في أبسط شكل، ثم صمم دائرة مناسبة لهذا الخرج.

a	b	Z

0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

الحل:

نقوم بإيجاد قانون بوول لكل صف فيه الخرج 1 ثم نقوم بالاختصار كالتالي:

$$Z = \bar{a}\bar{b} \quad OR \quad \bar{a}b \quad OR \quad ab$$

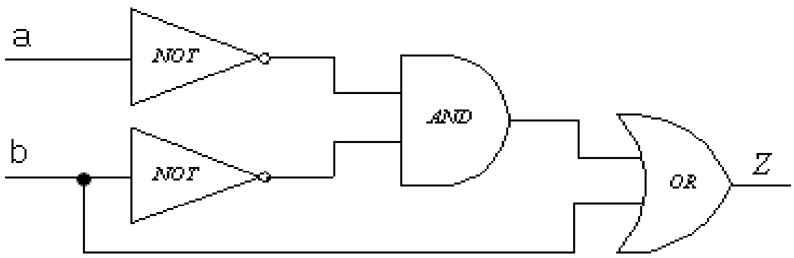
$$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + ab$$

$$= \bar{a}\bar{b} + b(\bar{a} + a)$$

$$= \bar{a}\bar{b} + b1$$

$$= \bar{a}\bar{b} + b$$

وتكون الدائرة المنطقية لمثل هذا الخرج كما هو موضح في الشكل التالي:

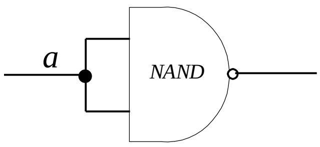


٥. تصميم الدوائر باستخدام البوابة $NAND$

كل مهام البوابات المنطقية المستخدمة في الدوائر المنطقية يمكن الحصول عليها باستخدام بوابة جديدة واحدة فقط تسمى البوابة $NAND$. ورغم أن النتيجة من استعمال مثل هذه البوابة يؤدي إلى استخدام عدد كبير من البوابات فهذا يقلل من التكلفة الإجمالية وذلك لأنه يتم استعمال نوع واحد من البوابات.

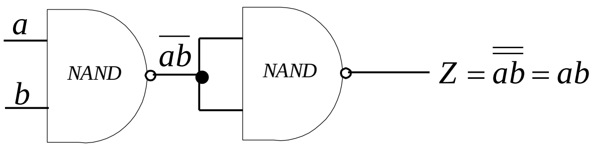
ليكن لدينا المهام التالية باستخدام البوابة $NAND$ فقط:

NOT

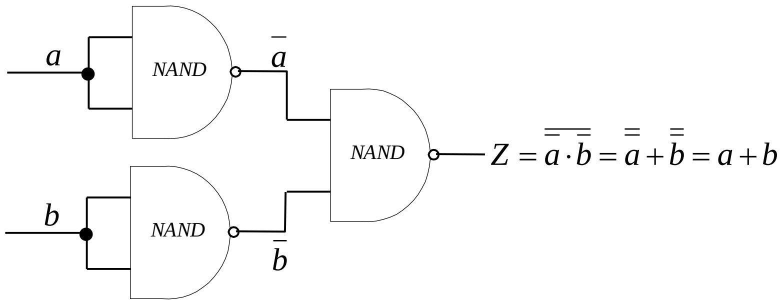


$Z = \overline{a \cdot a} = \bar{a}$

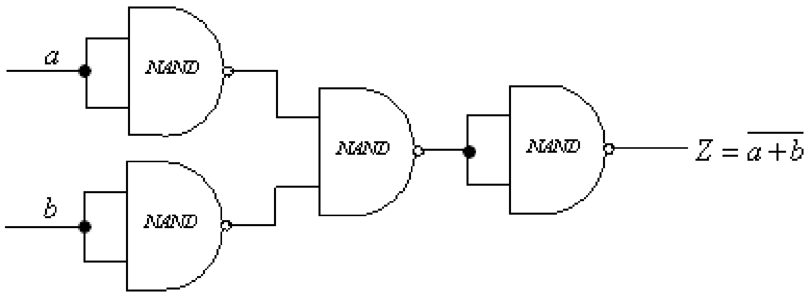
AND



OR

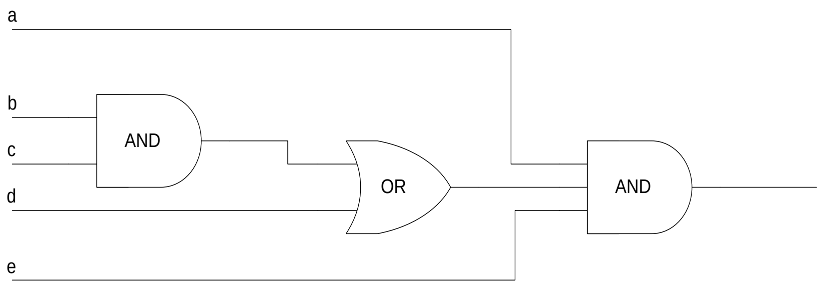


NOR



يمكن تغيير الدوائر المنطقية باستخدام البوابة *NAND* وذلك باستبدال كل البوابات المكونة للدائرة بالمجموعة المطابقة لبوابة *NAND* المذكورة أعلاه. كما يمكن تقليل عدد البوابات *NAND* المستخدمة وذلك بتغيير المهام المنطقية للدائرة ككل .

مثال ٧: أوجد خرج الدائرة التالية ثم استبدلها بدائرة مطابقة مستخدما فقط البوابة *NAND* .



الحل:

الدخل على أول بوابة *AND* : $b \;\; and \;\; c$ والخرج: bc

الدخل على البوابة *OR*: $bc \;\; and \;\; d$ والخرج: $bc + d$

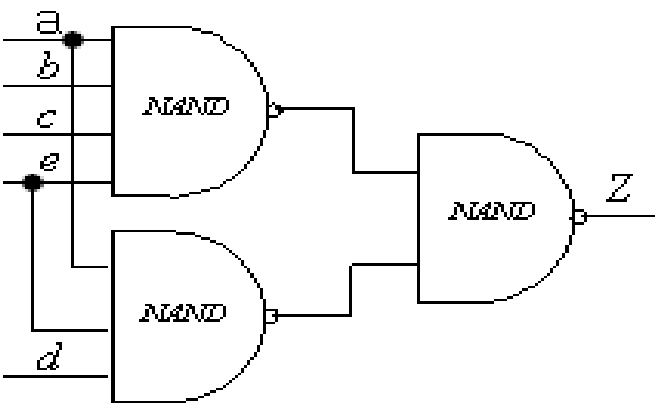
الدخل على ثاني بوابة *AND* : $bc + d \; , \;\; e \;\; and \;\; a$

إذن يكون الخرج النهائي: $Z = ae(bc + d) = abce + ade$

لتغيير هذه الدائرة مستخدمين البوابة $NAND$ نقوم أولا بحذف البوابة OR باستخدام متممة المتممة كالتالي: $Z = abce + ade = \overline{\overline{abce + ade}}$ ثم باستخدام قانون دي مورجان نحصل على:

$$Z = \overline{\overline{abce} \cdot \overline{ade}}$$

يمكن الآن الحصول على دائرة جديدة باستخدام البوابة $NAND$ كالتالي:



تمارين

تمرين ١: اختصر كل من العبارات التالية باستخدام قوانين جبر بوول:

$a)\,\bar{a}\bar{b}(a+b) \quad b)\,(a+bc)(\bar{a}+\bar{b}\bar{c}) \quad c)\,(a+ac)(b+bc)(c+ca) \quad d)\,(a+b)(a+\bar{b})$

$e)\,(a+b)(a+b^2+b) \quad f)\,a^4+a^3+a^2+a \quad g)\,(\overline{\bar{a}b+c}) \quad h)\,(\overline{\bar{y}+yz})+(\overline{\bar{y}+yz})$

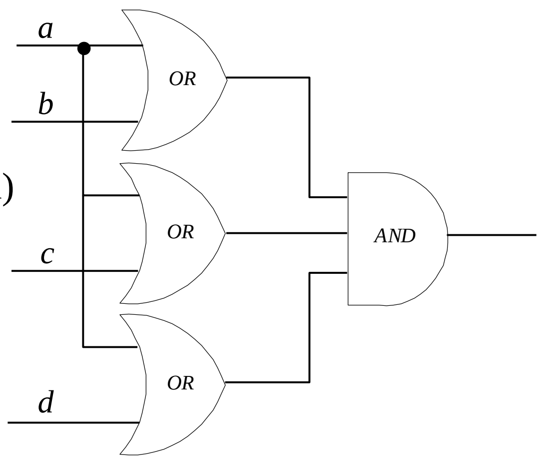
تمرين ٢: استخدم جدول الصدق للتأكد من صحة المعادلات التالية ثم ارسم الدوائر المنطقية لتمثيل كل من أطراف المعادلة.

$a)\,a+ab=a \qquad b)\,a(a+b)=a \qquad c)\,a(\bar{a}+b)=ab$

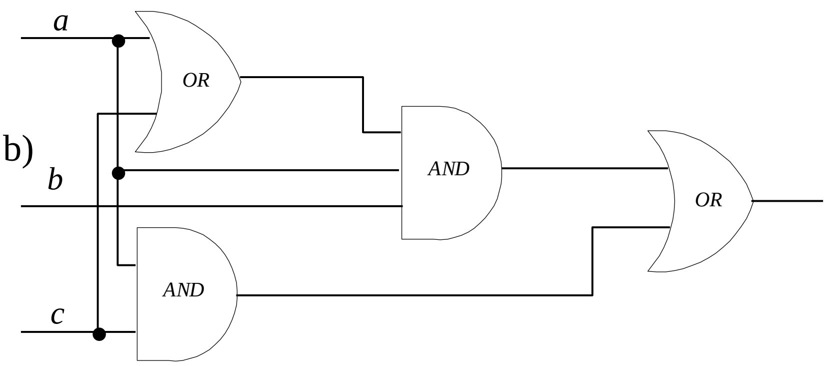
$d)\,a+bc=(a+b)(a+c) \qquad e)\,\overline{a+b}=\bar{a}\bar{b} \qquad f)\,\overline{ab}=\bar{a}+\bar{b}$

تمرين ٣: أوجد خرج الدوائر التالية، ثم باختصار هذا الخرج صمّم دائرة جديدة مطابقة في كل حالة، واستبدل الدائرة المختصرة باستخدام البوابات $NAND$ فقط، ثم تأكد من الدائرة باستخدام جدول الصدق .

a)



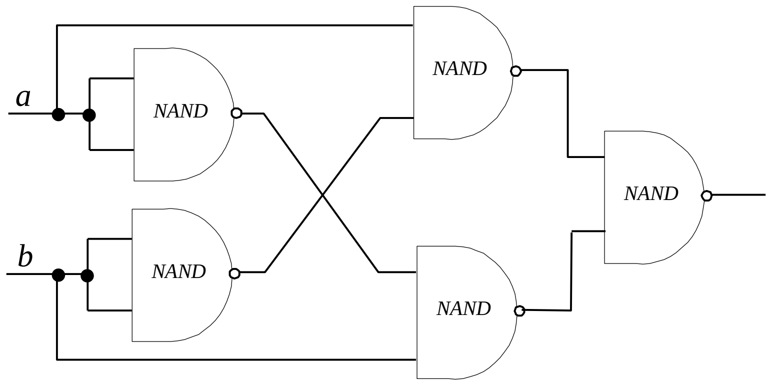
b)



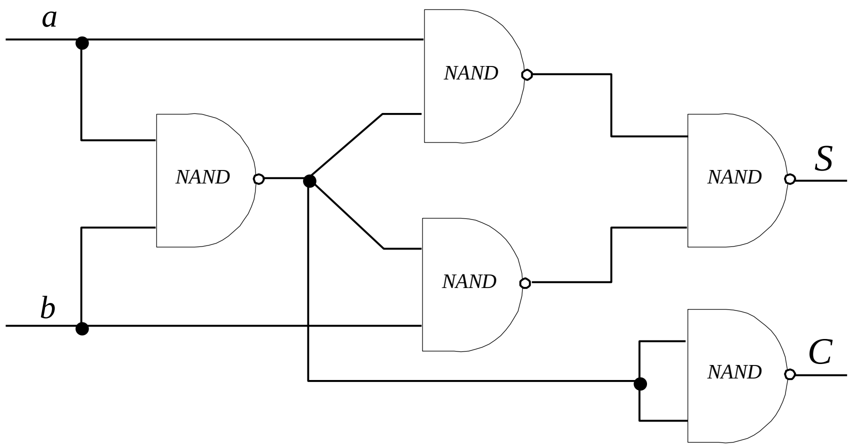
تمرين ٤: استخدم البوابات $NAND$ فقط لتصميم دائرة لها خرج $Z=\overline{\overline{a+b}+ab}$ وبين أنه من الممكن الحصول على نفس الخرج باستخدام بوابة واحدة من كل من AND ، OR و $NAND$. تأكد من الدائرة باستخدام جدول الصدق .

تمرين ٥: استخدم أربعة بوابات $NAND$ للحصول على الخرج $Z=a+b+c$ واستخدم جدول الصدق لبيان طريقة شغل الدائرة.

تمرين ٦: أوجد الخرج المنطقي للدائرة التالية:



تمرين ٧: برهن أن: $S = \bar{a}b + a\bar{b}$ و $C = ab$ في الدائرة التالية:



تمرين ٨: أوجد خرج (في أبسط صورة له) الدائرة التي تشتغل حسب جدول الصدق المعطى، ثم صمم الدائرة مستخدما فقط البوابة $NAND$.

a	b	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

تمرين ٩: صمم دائرة تشتغل على حسب الجدول التالي مستخدماً بوابات من اختيارك.

a	b	c	Z

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

تمرين 10: أوجد خرج الدائرة التي تشتغل حسب جدول الصدق التالي في أبسط صورة ثم صمم الدائرة المطابقة له باستخدام بوبة $NAND$.

a	b	c	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

الوحدة الرابعة

مبادئ في الاحصاء

الهدف العام: معرفة مبادئ في الاحصاء والقدرة على التعامل مع البيانات الإحصائية وتمثيلها وحساب بعض القيم المتعلقة بها.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- القدرة على التعامل مع البيانات احصائياً .
- بناء الجداول الإحصائية و التعامل معها.
- تحويل البيانات إلى رسوم إحصائية .
- حساب وإيجاد مقاييس النزعة المركزية .

مبادئ في الاحصاء

1. مقدمة :

علم الإحصاء هو ذلك العلم الذي يبحث في جمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها وعرضها ثم تحليلها واستخلاص النتائج التي تساعد في التنبؤ والاستنتاج واتخاذ القرارات المناسبة، و يُعتبر الإحصاء أداة فعالة في توفير المؤشرات والمقاييس المفيدة في التحليل واتخاذ القرارات في شتى الميادين.

ويُعد علم الإحصاء في الوقت الحالي واحد من أهم العلوم الحديثة التي تلعب دوراً حيوياً في كثير من العلوم والدراسات المختلفة. كما يُعتبر الإحصاء من أقدم العلوم حيث ظهر

مع حاجة الإنسان الأولى للتعامل مع القيم والأعداد لتسيير الحياة اليومية. فالتاجر يسعى إلى حصر وحفظ البيانات المتعلقة بتجارته والمزارع يقوم دوماً بإحصاء الإنتاج والمعلومات الأخرى المتعلقة كعدد الأشجار وأوقات الحصاد والبذر وغيرها من المعلومات والبيانات ذات العلاقة.

مع التطور الهائل في العلوم كافة في أواخر القرن العشرين تطور علم الإحصاء ليستفيد من تقنيات الحاسب الآلي بشكل يجعله العلم الأكثر تداخلاً مع العلوم الأخرى المختلفة، حيث أصبح يستخدم علم الإحصاء في العلوم التجارية وعلوم الطب والهندسة والأدب وجميع العلوم الأخرى دون استثناء.
كما ساهم عصر المعلومات والانفتاح العالمي الحديث في إبراز أهمية تفعيل عملية التعامل مع البيانات بأسلوب يضمن السيطرة عليها وقراءتها، مما كان له الأثر الواضح على تطور علم الإحصاء كونه العلم الذي يحقق تلك الغاية. كما اتجهت كثير من العلوم والدراسات الأكاديمية والبحثية لاسيما التطبيقية إلى استخدام علم الإحصاء من خلال حصر بيانات مشكلة البحث والتعامل معها إحصائياً للوصول إلى فهم أفضل وحلول موضوعية.

وينقسم علم الإحصاء الحديث إلى قسمين هما : قسم الإحصاء الوصفي (Descriptive Statistics) وقسم الإحصاء الاستدلالي (Inferential Statistic):

1) الإحصاء الوصفي Descriptive Statistics
هو ذلك الجزء من الإحصاء الذي يُعنى بوصف طبيعة وسلوك الظاهرة المدروسة من خلال جمع بيانات عنها وتلخيصها وعرض هذه البيانات بمجموعة من الجداول والرسوم البيانية واستخدام بعض المؤشرات الإحصائية لعرض وتوضيح سلوك الظاهرة . مثل دراسة دوال العرض والطلب وعلاقتها بالأسعار ورسم منحنيات العرض والطلب.

2) الإحصاء الاستدلالي (الاستنتاجي) Inferential Statistics
هو ذلك الجزء الذي يهتم بدراسة معلومات المجتمع من خلال العينة، ويتخذ من تحليل البيانات المتوفرة .في العينة أساساً في تحليل بيانات المجتمع ، لذا يكون أساس التحليل في الإحصاء الاستدلالي قائماً على تقدير معالم ومؤشرات المجتمع من خلال معالم ومؤشرات العينة واختبار الفرضيات واتخاذ القرارات والتنبؤ والاستقراء والاستدلال.

وعليه فإن علم الاحصاء (Statistics) **يُعرَّف كالتالي:**
هو العلم الذي يهتم بطرق جمع البيانات وأساليب وصفها وتحليلها بهدف استخراج المعلومات والحقائق التي لا يمكن الحصول عليها بطرق أخرى.

2. أنواع المتغيرات (البيانات) الاحصائية :

وتنقسم البيانات الإحصائية إلى أنواع يمكن وصفها بشكل عام من خلال نوعين أساسيين هما بيانات وصفية و بيانات كمية.

١,٢. المتغيرات (البيانات) الوصفية (Qualitative data) :
هي البيانات التي تصف الأفراد و المجتمع مثل لون الشعر أو البشرة أو تقديرات النجاح للطلاب في إحدى المواد.
٢,٢. المتغيرات (البيانات) الكمية (Quantitative data) :
هي البيانات التي تقاس فيها الأفراد و المجتمعات بمقاييس كمية (رقمية) مثل الأطوال و الأوزان و الأعمار و نتيجة الامتحانات بالدرجات وغيرها.

ملحوظة:
معظم العمليات الإحصائية تتم من خلال التعامل مع أرقام أكثر من التعامل مع كلمات أو صفات، وحتى في عملية التعامل مع الصفات فان الهدف الرئيسي يكون غالباً في دراسة التكرارات أو عدد مرات ظهور الصفة المحددة والتي يمكن تسجيلها كمياً.

3. المجتمع و العينة :
١,٣. المجتمع الإحصائي (Population)
يُعرف المجتمع بأنه مجموعة ذات خصائص مشتركة من العناصر محل الدراسة أو التي تسمى صفة وحدة الدراسة الممثلة للمصدر الأساسي للمعلومة المطلوبة. فمثلاً، الدراسة التي تهتم بصفات المؤسسات التجارية في مدينة الرياض يتم تحديد المجتمع لها من خلال حصر جميع المؤسسات التجارية في مدينة الرياض دون استثناء، والدراسة التي تهتم بحوادث السيارات في منطقة جغرافية محددة يتم تحديد مجتمعها بجميع الحوادث التي وقعت في تلك المنطقة.
وتختلف المجتمعات بصفاتها من عدة محاور. فهنالك المجتمعات **المحدودة** والمجتمعات **غير المحدودة**، حيث يُعتبر المجتمع محدوداً إذا كان بالإمكان حصر جميع وحدات الدراسة فيه، فمجتمع متدربي كليات التقنية في المملكة العربية السعودية يعتبر مجتمع محدود، في حين أن مجتمع نوع معين من الأسماك يمثل مجتمع غير محدود لا يمكن بحال من الأحوّل حصر جميع وحداته.
كذلك يتم تصنيف المجتمعات تبعاً للحجم، فهناك مجتمعات كبيرة ومجتمعات صغيرة. فالمجتمعات الكبيرة تحتوى عدد كبير من الوحدات او العناصر التي تتطلب جهداً هائلاً لحصرها كما تتطلب وقتاً طويلاً لدراستها بالإضافة إلى ارتفاع تكاليف حصرها ودراستها. في حين أن المجتمعات الصغيرة تضم عدداً قليلاً من الوحدات أو العناصر مقارنة بالمجتمعات الكبيرة، ومن ثم يرافقها تكاليف ووقت وجهد اقل نسبياً.

عندما تكون المجتمعات غير محدودة فإن أسلوب دراسة جميع وحدات المجتمع والذي يطلق عليه أسلوب الحصر الشامل يصبح مستحيلاً. كذلك الحال في بعض المجتمعات المحدودة والتي لا يقبل المنطق تطبيق أسلوب الحصر الشامل، مثل فحص دم شخص،

حيث لا يمكن سحب جميع دمه، أو اختبار قوة تحمل مصابيح كهربائية لجهد كهربائي، حيث لا يمكن إحراق جميع المصابيح الكهربائية المتوفرة لمعرفة الجهد الأعلى المطلوب لاحتراقها؛ لذا فان الأسلوب الأمثل هنا يكمن في تبني أسلوب المعاينة حيث يتم الاعتماد على عينة يتم سحبها من المجتمع المستهدف بشرط أن تكون ممثلة له.

٢,٣. العينة الاحصائية (Sample) :

تُعرف العينة بأنها جزء من المجتمع المختار محل الدراسة. وتختلف طرق سحب العينات من المجتمعات، فهناك العينات العشوائية و العينات الغير عشوائية، بيد أنها تتفق جميعاً في كونها جزء من المجتمع وممثلاً له.

4. البيانات الاحصائية :

تُعتبر عملية التعامل مع البيانات من المراحل المهمة جدا والحساسة في الدراسات الإحصائية. وتنبع أهميتها من كونها الأداة التي يتم فيها إنشاء القاعدة التي يبنى عليها المراحل اللاحقة. كما تنبع الأهمية الكبيرة لمرحلة التعامل مع البيانات في كون معظم الدراسات الإحصائية التطبيقية تتعامل مع كم كبير من البيانات والتي بدورها تتطلب معالجة إحصائية ليتم تحويلها إلى شكل يتم من خلاله تطبيق التحليل الإحصائي بفعالية وسهولة.

سيتم التطرق إلى آلية عرض البيانات جدوليا (تبويبها) وذلك من خلال بيان آلية بناء الجداول التكرارية وطرق الحصول على التكرارات النسبية والتكرارات التراكمية، كما سيتم التطرق إلى عملية عرض البيانات بيانيا والأساليب المختلفة فيها، وكيفية ايجاد الرسوم البيانية.

عند توفر عدد كبير من البيانات يتطلب الأمر في كثير من الأحيان وضع القيم في جدول تكراري يلخص البيانات الإحصائية المدروسة بشكل يمكن من خلاله التعامل مع البيانات بقدرة وكفاءة أعلى. وفي الواقع يمكن تبويب كل من البيانات الكمية والبيانات الوصفية على حد سواء. و يتم تبويب البيانات من خلال تفريغها في جداول تكرارية تتكون من عامودين أساسيين. يمثل العامود الأول قيم المتغير بينما يمثل العامود الثاني التكرارات المرافقة لكل قيمة من قيم المتغير. كما يمكن تضمين أعمدة إضافية تحتوى معلومات تفصيلية عند الحاجة لها.
يطلق على الجدول التكراري المكون من العامودين الأساسين فقط بالجدول التكراري البسيط.

مثال 1 : الجدول التالي يمثل عدد السيارات المملوكة لـ 120 عائلة. قم بإنشاء جدول تكراري بسيط لتوزيع العائلات حسب عدد السيارات المملوكه لها.

3	6	1	6	1	1	7	5	1	1	2	3
2	3	7	2	6	3	7	4	7	1	2	6
4	4	5	3	7	2	6	1	7	3	7	4
2	2	1	6	3	6	3	5	4	4	3	3
7	5	5	1	5	7	3	5	7	3	1	1
5	6	4	5	3	2	6	7	6	3	3	5
2	6	3	2	2	2	2	5	1	1	3	7
6	3	7	5	6	2	4	3	5	1	1	4
3	7	1	6	3	7	6	3	6	1	4	5
5	1	3	6	3	6	3	5	2	7	5	7

الحل :

لإنشاء الجدول التكراري البسيط نقوم بتفريغ البيانات من خلال البحث عن عدد مرات ظهور قيمة محددة من بين القيم المذكورة في الجدول يتم الحصول على التكرارات المرافقة لحقول الجدول التكراري.

فمثلاً بالبحث عن عدد مرات ظهور الرقم 4 يتبين وروده 10 مرات، لذا فان التكرار المرافق لحقل القيمة 4 في الجدول التكراري هو 10 .

وهكذا لجميع القيم كما في الجدول التالي :

عدد السيارات	التكرار
1	18
2	15
3	25
4	10
5	17
6	18
7	17
المجموع	120

ملحوظة:

في حال التعامل مع متغير عشوائي كمي متقطع أو متصل يأخذ قيم كثيرة بحيث يتعذر إنشاء جدول تكراري عملي بحقول محدودة، فان الأسلوب الأمثل هنا يكمن في إنشاء جدول تكراري بحيث تكون كل فئة مخصصة لمجموعة أو فترة من القيم. في هذه الحالة

نقوم بالتحديد مسبقاً لعدد الفئات المطلوبة في الجدول، ومن ثم يتم اعتماد مجموع عدد مرات ظهور القيم المحددة للفئة كتكرار للفئة نفسها.

١,٤. كيفية ايجاد الفئات (Classes) المنتظمة:

(١) عندما تتوفر قيم لمتغير عشوائي كمي يتم في البداية الكشف عن مدى المتغير، حيث يمكن تحديد المدى R من خلال الدالة التالية:

$$R = Max - Min$$

حيث:

Max: أكبر قيمة مشاهدة في البيانات

Min: أصغر قيمة مشاهدة في البيانات

(٢) تحديد عدد الفئات m: **إذا لم يعطى في المسالة عدد الفئات المطلوبة** فهناك عدة طرق لإيجاد عدد الفئات، ومنها طريقة تسمى بيول Yule باستخدام الصيغة التالية:

$$m = \sqrt[4]{n} \times 2.5$$

حيث:

m: عدد الفئات

n: عدد المفردات أو البيانات المشاهدة

(٣) تحديد طول الفئة L ويكون ذلك بالصيغة التالية:

$$L = R/m$$

ملحوظة:

بالنسبة لعدد الفئات m و طول الفئة L فإنه إذا عُرف أحدهما فإننا نستطيع إيجاد الآخر.

- وبتحديد القيم السابقة و حدود فئات الجدول التكراري المطلوب يتم تفريغ قيم المتغير العشوائي في خانات التكرار (F) في الجدول التكراري، بحيث يمثل كل تكرار مرافق لفئة محددة (F_i) عدد مرات ظهور قيم المتغير في تلك الفئة. بحيث يمثل مجموع التكرارات $\sum F_i$ إجمالي عدد القيم المشاهدة والتي يرمز لها في حال البيانات غير المبوبة بالرمز n.

مثال ٢ : الجدول التالي يمثل حجم المبيعات اليومية بآلاف الريالات لإحدى المحلات التجارية الكبرى وذلك لثلاثة شهور. المطلوب إنشاء جدول تكراري للمبيعات اليومية بحيث يكون عدد الفئات خمسة.

26.9	77.8	14.9	33	46.3	71.5	46	7.9	64.5	87.8
33.7	27	71.8	33.8	59.1	28.8	80.2	81.3	43.7	41.6
7.1	64	58.3	37.9	72.2	79.9	54.3	89.7	61.3	21.5

70.1	67	15.5	2.2	28.6	31.7	4.9	26.8	99.2	0.3
10.5	28.3	99.3	14.1	47	98.1	20.3	44.2	21.7	66.3
3.2	6.2	67	39.6	39.2	62.3	21.9	72.2	67.5	64
93.7	51	40	20.2	73.9	18.2	25.4	24.5	67.3	16.4
25.4	35.9	26.5	83.1	88	37.8	19.1	80	45.4	73.8
73.9	63.8	54.2	23.2	53	52.3	63.6	46.2	24.9	55.6

الحل :

(١) نوجد المدى R كالتالي:

$$R = Max - Min = 99.3 - 0.3 = 99$$

(2) بما أن عدد الفئات معطى ، حيث $m = 5$

(٣) نوجد طول الفئة كالتالي:

$$L = \frac{R}{m} = \frac{99}{5} = 19.8 \approx 20$$

وباستخدام القيمة الصغرى في قيم المتغير والمساوية تقريباً للصفر كحد أدنى للفئة الأولى يتم تحديد حدود الفئات الخمس المطلوبة بالإضافة إلى تحديد عدد القيم المضمنة في كل فئة والتي تمثل التكرارات في الجدول المطلوب. ويكون الجدول التكراري كالتالي:

حدود الفئات (آلف ريال)	التكرار F
0 – 20	**14**
20 – 40	**26**
40 – 60	**17**
60 – 80	**22**
80 – 100	**11**
المجموع	**90**

مثال ٣ : الجدول التالي يبين الأجر اليومي لـ 65 عاملا في شركة تجارية ما.

فئات الأجور اليومية	عدد العمال

70 – 100	8
100 – 120	10
120 – 140	16
140 – 160	14
160 – 180	10
180 – 200	5
200 - 220	2
المجموع	65

من الجدول السابق أوجد ما يلي:

١) الحد الأدنى للأجور في الفئة الثالثة.
٢) الحد الأعلى لأجور الفئة الخامسة.
٣) عدد العمال الذين يتقاضون أجوراً تتراوح بين 200 إلى 219.
٤) فئة الأجور التي يتقاضاها أكبر عدد من العمال.
٥) عدد العمال الذين يتقاضون أجوراً أقل من 160.

الحل :

١) الحد الأدنى للأجور في الفئة الثالثة هو 120
٢) الحد الأعلى لأجور الفئة الخامسة هو 179
٣) عدد العمال الذين يتقاضون أجوراً تتراوح بين 200 إلى 219 هم ٢
٤) فئة الأجور التي يتقاضاها أكبر عدد من العمال هي 139 – 120
٥) عدد العمال الذين يتقاضون أجوراً أقل من 160 يمثل مجموع تكرارات الفئات الأولى و الثانية و الثالثة و الرابعة أي : 48 = 14 + 16+ 10 + 8

٢,٤. إيجاد جدول التكرار النسبي (Relative frequency):

وهو جدول يبين الأهمية النسبية لكل فئة ويتم في الواقع حساب التكرار النسبي بواسطة قسمة التكرار للفئة على مجموع التكرارات الكلي والضرب في 100.

$$F\% = \frac{F_i}{\sum F_i} \times 100$$

و يشير التكرار النسبي إلى حجم تركيز تواجد قيم المتغير في كل فئة مما يعطى قدرة سريعة على عملية مقارنة ذلك التركيز بين الفئات.

وحيث أن الهدف الأساسي من إنشاء جدول تكراري يكمن في عملية تلخيص البيانات والحصول على مؤشرات حوّل اتجاهات قيم المتغير فان التكرار النسبي يكون من المؤشرات المهمة في هذا المجال.

مثال ٤ : سنوجد جدول التكرار النسبي للمثال رقم ٢ السابق حوّل حجم المبيعات اليومية لإحدى المحلات التجارية الكبرى كالتالي:

الحل :

حدود الفئات (آلف ريال)	F	$F\%$
0 – 20	14	15.56
20 – 40	26	28.89
40 – 60	17	18.89
60 – 80	22	24.44
80 – 100	11	12.22
المجموع	90	100

٣,٤. مركز الفئة (Class midpoint)**:**

هو المتوسط الناتج من جمع الحد الأعلى والحد الأدنى للفئة، أي أن :

$$x_i = \frac{U_i + L_i}{2}$$

حيث أن :

x_i : مركز للفئة i

U_i: الحد الأعلى للفئة i

L_i : الحد الأدنى للفئة i

مثال ٥ : بالرجوع للمثال رقم ٢ لإيجاد مركز الفئة نجد أن :

حدود الفئات (آلف ريال)	مركز الفئة X_i	التكرار F
0 – 20	١٠	14
20 – 40	٣٠	26
40 – 60	٥٠	17
60 – 80	٧٠	22
80 – 100	٩٠	11
المجموع		90

٤,٤. الجدول التكراري المتجمع الصاعد / الهابط :

بتوفر كل من التكرارات العادية للمتغير الكمي في الفئات المحددة يمكن حساب كل من التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع الهابط.

تكون بداية الجداول التراكمية الصاعدة مرتبطة بالتكرار صفراً بينما تكون نهايتها مرتبطة بالتكرار التراكمي المساوي لإجمالي التكرارات في الجدول التكراري الأصلي. وبالنسبة للجداول التكرارية التراكمية الهابطة يكون الوضع مغايراً للوضع السابق، حيث يكون تكرار البداية للفئة الأولى مساوياً لإجمالي التكرارات وينتهي بتكرار مساوي للصفر للفئة الأخيرة.

لإنشاء جدول تكراري متجمع صاعد أو هابط يتم أولا تحديد الفئات التراكمية الصاعدة أو الهابطة ومن ثم يتم إيجاد التكرارات التراكمية المصاحبة لها. يتم صياغة حدود الفئات الصاعدة باستخدام الحدود الدنيا لفئات الجدول التكراري بالإضافة إلى الحد العالي للفئة الأخيرة، حيث تسبق تلك الحدود إشارة "أقل من" (>)، بينما يتم استخدام إشارة "أكبر من أو يساوي" (≤) لبناء حدود الجدول التكراري الهابط .

ملحوظة:
عدد فئات الجداول التكرارية التجميعية يكون مساوياً لعدد فئات الجدول التكراري العادي زائد واحد صحيح، حيث ترجع الزيادة إلى حقيقة استخدام الحد الأعلى للفئة الأخيرة بالإضافة إلى استخدام جميع الحدود الدنيا.

مثال ٦ : لإيجاد جدول التكرار المتجمع الصاعد و الهابط للمثال السابق رقم ٢ ، سيكون كالتالي:

جدول التكرار المتجمع الصاعد:

التكرار الصاعد	حدود الفئات الصاعدة
0	< 0
14	< 20
40	< 40
57	< 60
79	< 80

90	<100

جدول التكرار المتجمع الهابط:

التكرار الهابط	حدود الفئات الهابطة
90	≥ 0
76	≥ 20
50	≥ 40
33	≥ 60
11	≥ 80
0	≥ 100

مثال ٦ : من جدول التكرار المتجمع الصاعد و الهابط أوجد ما يلي:

a) عدد الأيام التي تكون فيها المبيعات 40 آلف ريال فأكثر .
b) عدد الأيام التي تكون فيها المبيعات اقل من 60 آلف ريال .
c) عدد الأيام التي تكون فيها المبيعات بين 40 آلف و 80 آلف ريال .

الحل:

a) عدد الأيام التي تكون فيها المبيعات 40 آلف ريال فأكثر بلغ 50 يوم، حيث يمكن ملحوظة النتيجة في الجدول التجميعي الهابط ، في الفئة الثالثة.

b) عدد الأيام التي تكون فيها المبيعات اقل من 60 آلف ريال بلغ 57 يوم ، الفئة الرابعة.

c) عدد الأيام التي تكون فيها المبيعات بين 40 آلف و 80 آلف ريال بلغ 39 يوم والذي يمثل الفرق بين عدد الأيام التي تكون فيها المبيعات اقل من 40 آلف (40) وعدد الأيام التي تكون فيها المبيعات اقل من 80 آلف (79) من الجدول الصاعد، أو الفرق بين عدد الأيام التي تكون فيها المبيعات أكثر من 40 آلف (50) وعدد الأيام التي تكون فيها المبيعات أكثر من 80 آلف (11) من الجدول الهابط .

5. العرض البياني :

لقد ذكرنا طرق تنظيم و تلخيص البيانات و عرضها جدولياً و لاحظنا أن عرض البيانات في جداول تكرارية تعطي صورة شاملة واضحة عن البيانات الولية و توزيعاتها التكرارية. ومع ذلك فان عرض البيانات بالتمثيل البياني تعطي فكرة أكثر وضوح و أسرع للظاهرة المدروسة.

ومن أنواع العرض البياني:

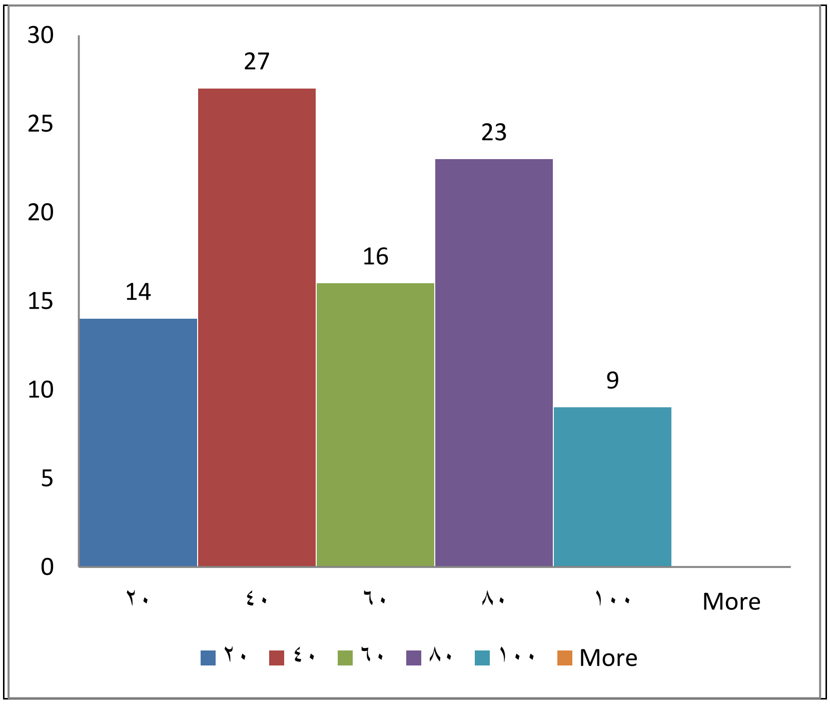
- المدرج التكراري
- المضلع التكراري
- المنحى التكراري
- المنحى التكراري للمتجمع الصاعد و الهابط
- الأعمدة البيانية
- الدوائر البيانية

وتختلف أنواع العرض و الرسوم البيانية باختلاف اهدافها. وسنتطرق هنا للتعرف على كيفية إيجاد المدرج التكراري و المضلع التكراري.

١,٥. المدرج التكراري (Histogram)**:**

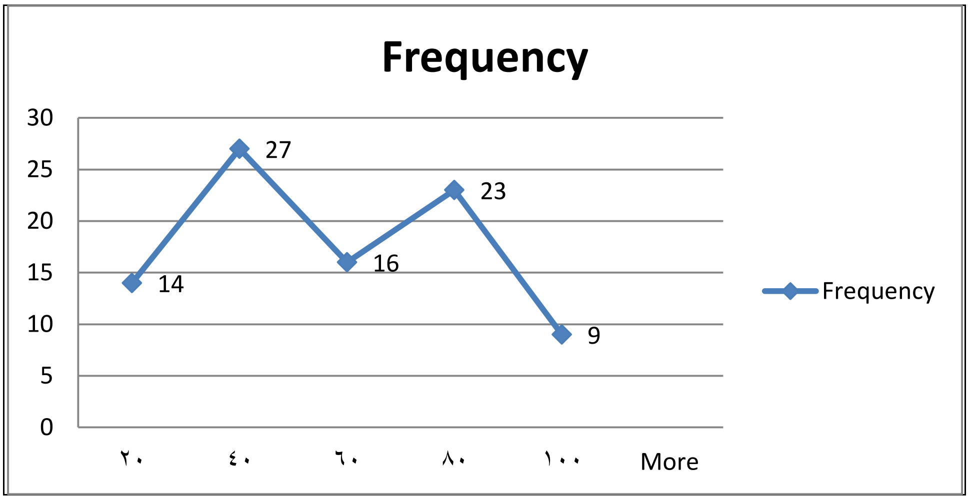
نرسم المدرج التكراري على محورين متعامدين أحدهما أفقي يمثل الفئات و الثاني راسي يمثل التكرار. و نرسم مستطيلات متلاصقة على محور الفئات قاعدتها طول الفئة معتمداً على الحدود الحقيقية. و ارتفاعها عبارة عن تكرار هذه الفئات.

مثال ٧ : بالرجوع للمثال رقم ٢ السابق حوّل حجم المبيعات اليومية، نجد أن المدرج التكراري له كالتالي:



٢,٥. المضلع التكراري (Polygon):
بنفس الطريقة السابقة لرسم المدرج التكراري ولكن بدلاً من رسم المستطيلات نستبدلها بنقطة واحدة فقط على ارتفاع يمثل التكرار لهذه الفئة وذلك عند منتصف الفئة.

مثال ٨ : بالرجوع للمثال رقم ٢ السابق حوّل حجم المبيعات اليومية، نجد أن المضلع التكراري له كالتالي:



6. مقاييس النزعة المركزية :
تتكون العملية الإحصائية من عدة خطوات يمثل فيها الوصف البياني الخطوة الأولى بينما تأتى عملية وصف البيانات كمياً كخطوة ثانية مهمة ومكملة للوصول إلى فهم أعمق ورؤية أوضح للمعلومة المحتواة في القيم الكمية محل الدراسة. وتتلخص عملية وصف البيانات كمياً في محاولة الحصول على قيم تشير بشيء من التفصيل إلى توجهات المتغيرات الكمية.

وفي الواقع تتنوع المقاييس الكمية الإحصائية التي يمكن تطبيقها بيد انه يمكن تقسيمها إلى نوعين رئيسيين هما مقاييس النزعة مركزية ومقاييس التشتت. وسوف نتعلم في هذا الجزء مقاييس النزعة المركزية فقط.

و يمكن حساب مقاييس النزعة المركزية للبيانات الكمية التي تعتمد على البيانات المدروسة. فيتم حساب مقاييس النزعة المركزية للبيانات الخام بأسلوب مختلف عن البيانات المبوبة (المجدولة). أيضاً سيكون تركيزنا في هذا الجزء على البيانات الخام غير المبوبة.

تهتم مقاييس النزعة المركزية بتوفير مؤشرات كمية تمثل التوجه العام لقيم المتغير الكمي المدروس. تعتبر هذه المقاييس حجر الأساس ونقطة البداية لأي دراسة تحليلية إحصائية، كما يتم الانطلاق منها إلى مستويات متقدمة في عمليات التحليل ومن ثم الاستدلال حوّل

توجه البيانات والصفات المميزة للمتغيرات الكمية التابعة لها. وسيتم التطرق في هذا الفصل إلى ثلاثة أنواع من مقاييس النزعة المركزية وهي المنوال ، الوسيط و الوسط الحسابي.

٦,١. **المنوال** (Mode):

يُعرف المنوال بأنه القيمة الأكثر شيوعاً أو التي تتكرر أكثر من غيرها. في بعض الأحيان لا يوجد منوال لفئة من المشاهدات حيث لا تتكرر القيم أكثر من مرة ، وإذا وُجد لا يكون وحيداً .

على سبيل المثال : منوال المشاهدات التالية 3,5,5,5,5,9,9,7 هو العدد 5.

بينما المشاهدات التالية 4,2,5,7,6,1,3 ليس لها منوال.

ويعتبر المنوال من أقل مقاييس النزعة المركزية استخداما ولا يحتاج إلى عمليات حسابية لإيجاده .

٦,٢. **الوسيط** (Median):

يعتبر الوسيط من أفضل مقاييس النزعة المركزية . ولإيجاد الوسيط لفئة من المشاهدات الغير مبوبة لابد من ترتيبها ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً فإذا كانت المشاهدات عددها فردياً فان الوسيط هو العدد الأوسط أما إذا كانت المشاهدات عددها زوجيا فان الوسيط هو الوسط الحسابي للعددين الأوسطين.

أي أنه للمشاهدات التالية $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً فان الوسيط هو $x_{\frac{n+1}{2}}$ إذا كانت n فرديا أو $\frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+2}{2}}\right)$ إذا كانت n زوجياً.

ويرمز للوسيط بالرمز $\tilde{\mu}$ لوسيط المجتمع و بالرمز $\tilde{x}$ لوسيط العينة.

مثال ٩ : أوجد الوسيط للمجتمع التالي: 10,8,9,6,7

الحل :

أولا نرتب البيانات وليكن تصاعدياً كالتالي 6,7,8,9,10

وحيث إن $n = 5$ فردي ، فان:

$$x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{5+1}{2}} = x_{\frac{6}{2}} = x_3 = 8$$

$\therefore$ الوسيط للمجتمع هو $\tilde{\mu} = 8$

مثال ١٠ : أوجد الوسيط للعينة 9,10,6,2,1,7
الحل :
أولاً نرتب البيانات وليكن تصاعدياً كالتالي 1,2,6,7,9,10
وحيث إن $n=6$ زوجي ، فإن :

$$\frac{1}{2}\left(x_{\frac{6}{2}}+x_{\frac{6+2}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(x_{\frac{6}{2}}+x_{\frac{8}{2}}\right)=\frac{1}{2}(x_3+x_4)=\frac{1}{2}(6+7)=\frac{1}{2}(13)=\frac{13}{2}=6.5$$

$\therefore$ الوسيط للعينة هو $\tilde{x}=6.5$

٣,٦. الوسط الحسابي/المتوسط (Mean):

يُعتبرالوسط الحسابي من أفضل مقاييس النزعة المركزية فإذا كانت لدينا المشاهدات التالية: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ فان المتوسط يمكن حسابه كالتالي: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

ويرمز للمتوسط بالرمز μ للمجتمع و $\bar{x}$ للعينة.

مثال ١٠ : أوجد المتوسط للمجتمع من البيانات الغير مبوبة التالية 8,10,13,9,7,11,10
الحل :
بتطبيق القاعدة مباشرة كالتالي:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\frac{8+10+13+9+7+11+10}{7}=\frac{68}{7}=9.71$$

$\therefore$ المتوسط هو $\mu=9.71$

تمارين

تمرين ١: فيما يلي درجات عدد من المتدربين:

44	98	40	60	66	71	82	64	72	68
55	69	77	78	88	60	65	68	69	79
69	89	64	71	66	61	75	87	54	81
70	62	74	68	60	73	82	71	62	50

فأوجد ما يلي بحيث يكون عدد الفئات ستة:

a) جدول التكرار النسبي.
b) جدول تكرار المتجمع الصاعد.
c) ما هو عدد المتدربين الذين تقل درجاتهم عن 75 درجة.

تمرين ٢: فيما يلي أجور ٧٠ عاملاً في احدى المؤسسات التجارية بالريال في يوم واحد:

فئات الأجور	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	100-109	110-119
عدد العمال	8	10	16	15	10	8	3

أوجد ما يلي:

a) كم عدد العمال الذين تتجاوز أجورهم ٩٠ ريالاً. و ماهي نسبتهم بالنسبة لعمال المؤسسة؟
b) ارسم المدرج التكراري لهذه البيانات .
c) ارسم المضلع التكراري لهذه البيانات .

تمرين ٣: فيما يلي أعمار مجموعة من الطلاب في احدى المدارس الابتدائية:

7,9,6,8,9,10,6,11,8,7,9,10,9,7,6,10,8,11,9,8

اوجد:
a) منوال الأعمار لهؤلاء الطلاب.
b) الوسيط لأعمار الطلاب.
c) متوسط أعمار الطلاب.

تمرين ٤: القيم التالية تمثل عدد الرحلات المتأخرة يومياً القادمة لأحد المطارات:

18	14	15	14	1	20	17	8
16	3	18	15	19	14	20	17
16	15	7	12	24	28	9	34
21	5	13	25	14	11	9	21
22	25	9	3	16	23	7	19

أوجد ما يلي:
a) جدول التكرار ومراكز الفئات .
b) جدول التكرار المتجمع الهابط .
c) ارسم المدرج التكراري .

المراجــع

المؤلف	اسم المرجع
صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول	معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٤٠٣هـ-١٩٨٣م.
Alfred Aho, John Hopcroft and Jeffrey Ullman	**Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison Wesley, Reading, England, 1974.**
Gwyn Davies and Gordon Hick	**Mathematics for scientific and technical students, Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1998.**
Micheal Garey and David Johnson	**Computer and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, 1979.**
C. L. Lui	**Elements of Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1977.**
Alexander Schrijver	**Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1986.**
Peter Tebbutt	**Basic Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1998.**
د. عدنان بري، د. محمود هندي	**مبادئ الاحصاء و الاحتمالات، جامعة الملك سعود،الطبعة الرابعة، ٢٠٠٣**
Hassett, Weiss	**Introductory Statistics. London : Addison-Wesley Publishing Company, 1982**