المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

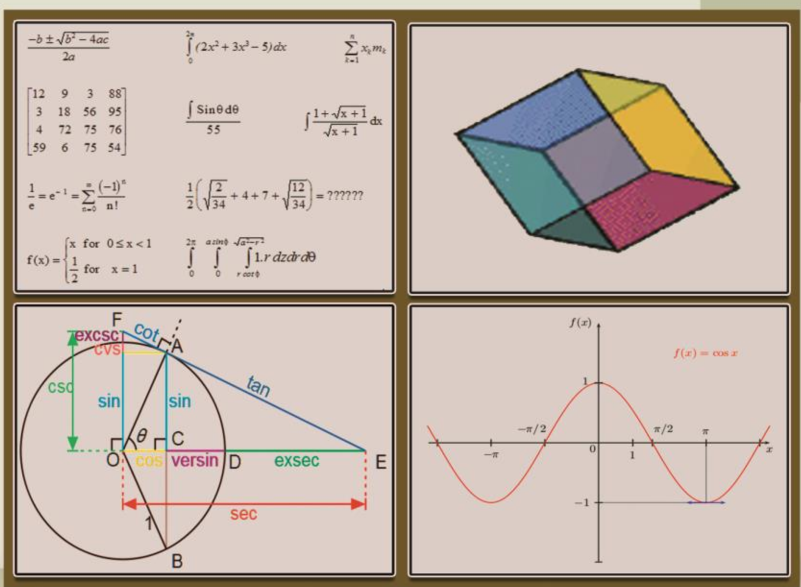
الكليات التقنية

الحقيبة التدريبية :

الرياضيات التخصصية

١١٦ ريض

تقنية مدنية ، معمارية ، محركات ومركبات ، آلات
زراعية أنظمة
نيوماتيةوهيدروليكية،معداتثقيلة،كهرباء سيارات



مقدمة

الحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد بن عبدالله وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على الله ثم على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي؛ لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته، وقد تمثِّلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثِّل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثِّل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية "رياضيات تخصصية ٤١١٦ ريض" لتخصص التقنية المدنية والمعمارية وبعض التخصصات لقسم الميكانيكا " لمتدربي الكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب ميسر يخلو من التعقيد، مدعم بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه، إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

الفهـــرس

تمهيد

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسوله رائد البشرية ومعلمها الأول، ورحمة الله المهداة إليها، لتخرج به من الظلمات إلى النور، وعلى من والاه واهتدى بهديه إلى يوم الدين، أما بعد :

فإن مقرر رياضيات تخصصية يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لطلبة قسم التقنية المدنية والمعمارية وبعض التخصصات لقسم الميكانيكا للكليات التقنية لتعليم المتدرب المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ارتئينا -خدمةً للأهداف التربوية - إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها المتدرب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصا منا على إيصال المعلومة واضحةً للطالب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثِلة والمسائل المباشرة والتي يمكن أن يتعرض لها المتدرب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح. لقد تم تحرير حلول الأمثِلة بدقة وكان الشاغل الرئيسي هو تعويد المتدرب استيعاب القوانين الأساسية للرياضيات وتمكنه من كيفية استعمالاتها في مسائل مختلفة لرفع من مهاراته وقدراته ومنهجيته في تحرير الحلول والربط بين هذه القوانين والمسائل التطبيقية. ودراسة هذا المقرر ستمكن المتدرب بإذن الله من:

- الإلمام بمفهوم الهندسة التحليلية .
- استيعاب مفهوم مبادئ علم المثِّلثات .
- الإلمام بمبادئ الهندسة المستوية والفراغية .
- استيعاب مفهوم التفاضل والقوانين الأساسية لاشتقاق الدوال المشهورة .
- الإلمام بمفهوم الإحصاء .

ولتحقيق هذه الأهداف بإذن الله تعالى فقد قسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى خمس وحدات رئيسة:
الوحدة الأولىوتعنىبتعريفالمتدرب نظام البيان للمعادلة الخطية وكيفية حساب المسافة بين نقطتين وحساب ميل المستقيم وكتابة معادلة الخط المستقيم.
والوحدة الثانية نتطرق فيها إلى كيفية حساب الزوايا وتحويل الزاوية من وحدة إلى أخرى، كما نتطرق إلى كيفية التعامل مع الدوال المثِّلثية واستنتاج العلاقات بينها .
والوحدة الثالثة فقد خُصِّصت لمبادئ الهندسة المستوية والفراغية، فنتطرق في هذه الوحدة إلى التعريف والخصائص لبعض الأشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية، المثِّلث والدائرة)، وقوانين حساب المحيط والمساحة لهذه الأشكال، كما نتطرق لتعريف الأشكال الهندسية الفراغية (متوازي المستطيلات-المكعب -الاسطوانة- المخروط- الكرة)، وقوانين حساب المساحة الجانبية وحجم هذه الأشكال الهندسية.
والوحدة الرابعةتهتم بدراسة مفهوم التفاضل والتعريف الهندسي للمشتقة وتفاضل الدوال الأساسية (كثيرات الحدود، والدوال المثِّلثية، والدوال الأسية و اللوغاريثمية)
وأماالوحدة الخامسة والأخيرة فنتطرق فيهالكيفية ترتيب البيانات في جداول التكرار وتمثيلها بالمدرجات التكرارية وغير ذلك و حساب المتوسط والوسيط والمنوال لعينة ما.

والله الموفق

الوحدة الأولى

الهندسة التحليلية

الهندسة التحليلية

الجدارة : الإلمام بمبادئ الهندسية التحليلية .

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- نظام البيان للمعادلة الخطية .
- حساب المسافة بين نقطتين .
- حساب ميل ومعادلة الخط المستقيم .
- كيفية حساب إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور .

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

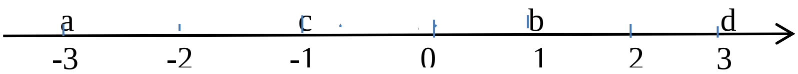
الوقت المتوقع للتدريب: ستة ساعات

مبادئ الهندسة التحليلية

١-**المحور**: هو مستقيم حددنا عليه ثلاثة عناصر ١-الاتجاه (نختار أحد اتجاهي المستقيم موجب ويكون الآخر هو السالب) ٢-نقطة الأصل (نقطة الصفر) ٣-وحدة الطول التي على أساسها يتم تقسيم المحور .

كل نقطة من نقاط المحور تحدد إحداثياتها بحسب اتجاهها وبعدها عن نقطة الأصل

مثال ١: حدد إحداثيات النقاط a ,b ,c ,d

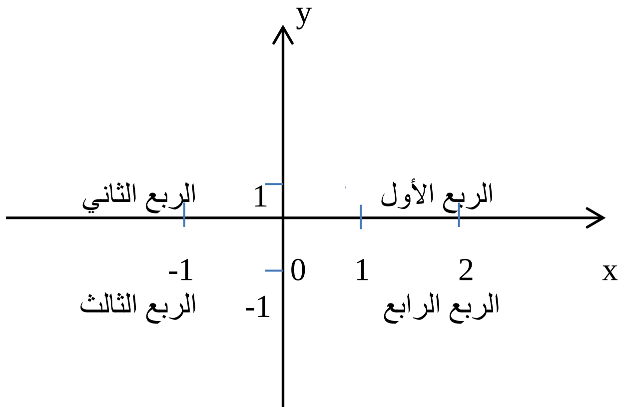


الحل:

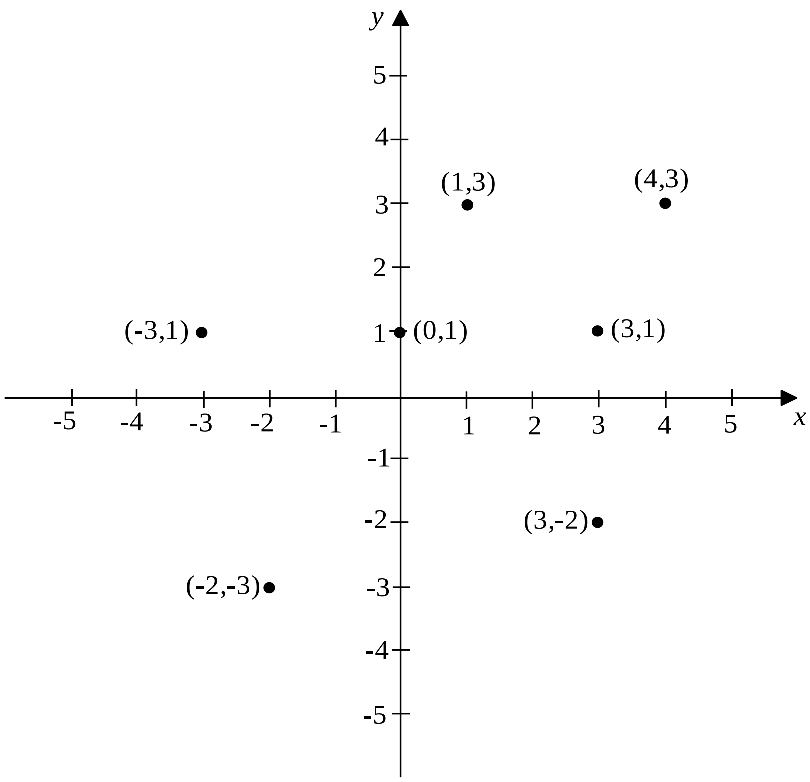
a (-3) , b (1) , c (-1) , d (3)

٢- نظام المحاور الديكارتي:

لقد سبق وعرفنا أن كل عدد حقيقي يمكن تمثيله بنقطة وحيدة على خط الأعداد. فكذلك يمكن توسيع هذه الفكرة لتشمل نقاط على مستوى. فعلى مستوى ذي بعدين أو محورين xy كل نقطة يحدد موقعها بزوج مرتب من الأعداد يطلق عليه اسم إحداثيات النقطة. يرمز لهذا الزوج المرتب بـ (a,b) حيث a عدد حقيقي يمثِّلإحداثية النقطة بالنسبة للمحور x و b كذلك عدد حقيقي يمثِّلإحداثية النقطة بالنسبة للمحور y . إحداثيات النقطة تكون معروفة بعد تحديد موقع النقطة بالنسبة للمحور الأفقي x وبالنسبة للمحور العمودي y . تتقاطع المحاور عند النقطة$(0,0)$ والتي تُسمى نقطة الأصل. في (الشكل(1)) تم تحديد اتجاه المحاور بحيث تظهر الأعداد الموجبة على يمين نقطة الأصل بالنسبة للمحور x وفوق نقطة الأصل بالنسبة للمحور y.المناطق الأربع التي شكلتها هذه المحاور تُسمى الأرباع وهي مرقمة عكس اتجاه عقارب الساعة. يُسمّى هذا النظام ذو البعدين نظام المحاور الديكارتي.



تحديد نقطة معينة $P(a,b)$ يعني رسم النقطة في موقعها من المستوى. في الشكل(2) تم رسم النقاط $(3,1)$, $(1,3)$, $(0,1)$, $(3,-2)$, $(-2,-3)$, $(-3,1)$, $(4,3)$. ترتيب الأرقام داخل القوس مهم؛ لأنهمثِّلاً الزوجان $(3,1)$, $(1,3)$مختلفان ويحددان نقطتين مختلفتين على المستوى.



الشكل (٢)

٣. المسافة بين نقطتين :

المسافة بين نقطتين على خط أفقي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات x للنقطتين. المسافة بين نقطتين على خط عمودي هي القيمة المطلقة لحاصل طرح إحداثيات y للنقطتين. فمثِّلاً كما يبين (الشكل (٤)) فالمسافة d بين النقطة $(1,2)$ والنقطة $(1,-3)$ هي: $d=|2-(-3)|=5$. أما إذا لم تقع النقطتان $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ على خط أفقي أو عمودي كما هو موضح في (الشكل(٣)) فالمسافة d تكون طول وتر المثِّلث القائم الزاوية الذي أطوال أضلاعه القائمة $|x_2-x_1|$ و $|y_2-y_1|$:

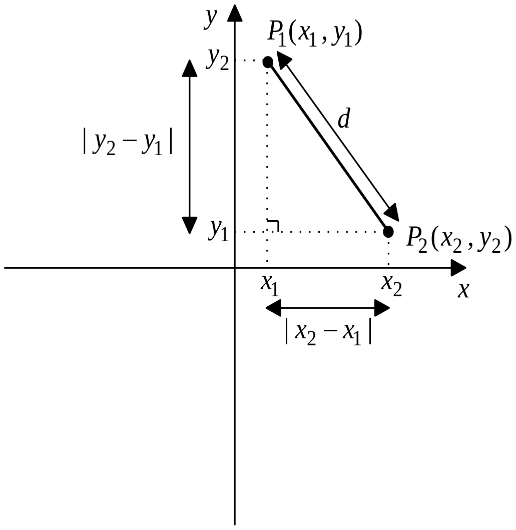
من قانون فيثاغورث

$$d^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2 \Rightarrow d=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$$

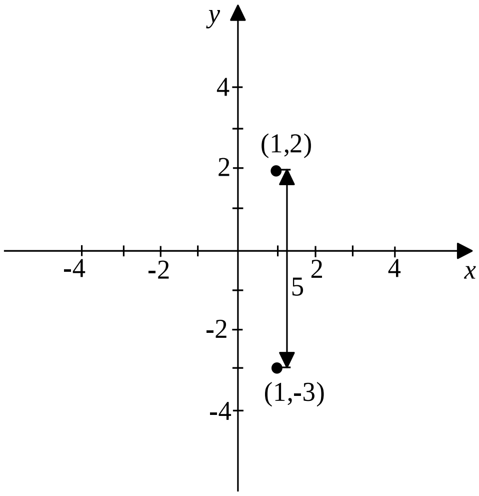
ولأن $|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2$ و $|y_2-y_1|^2=(y_2-y_1)2$

فالمسافة بين النقطتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ هي:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



الشكل(٣)



الشكل(٤)

مثال ٢: أوجد المسافة بين النقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

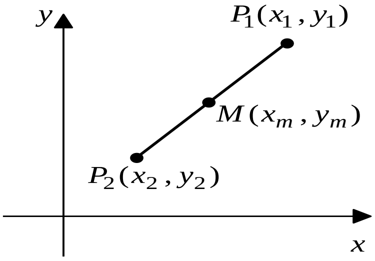
نستخدم قانون المسافة علماً بأن $x_1=-3$ ، $x_2=7$ ، $y_1=4$ و $y_2=2$ كالتالي:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7-(-3))^2+(2-4)^2}=\sqrt{100+4}=\sqrt{104}\approx 10.2$$

٤. إحداثيات نقطة المنتصف :

إحداثيات نقطة المنتصف (x_m,y_m) لقطعة مستقيمة (كما هو موضح في (الشكل(٥)) هما متوسط إحداثيات x لنقطتي أطراف القطعة ومتوسط إحداثيات y لنقطتي أطراف الخط، فيكون القانون كالتالي:

$$(x_m,y_m)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



الشكل (٥)

مثال ٣:أوجدأحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة المحددة بالنقطتين $P_1(-3,4)$ و $P_2(7,2)$

الحل:

نستخدم قانون نقطة المنتصفعلماً بأن $x_1=-3$ ، $x_2=7$ ، $y_1=4$ و $y_2=2$ كالتالي:

$$(x_m,y_m)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-3+7}{2},\frac{4+2}{2}\right)=(2,3)$$

تمارين (١ – ١)

تمرين ١:ارسم النقاط التالية على نظام محاور ديكارتي :

$1)(2,4)$ $2)(0,-3)$ $3)(-2,1)$ $4)(-5,-3)$

$5)(-3,-5)$ $6)(-4,3)$ $7)(0,2)$ $8)(-2,0)$

تمرين ٢:أوجد المسافة بين كل نقطتين مما يلي :

$1)\ (7,11)\ ,\ (3,8)$ $2)\ (-3,-20)\ ,\ (-10,4)$

$3)\ (6,-8),(0,0)$ $4)\ (\sqrt{3}\ ,\sqrt{75}),\ (\sqrt{12},\sqrt{27})$

$5)\ (a,b)\ ,(-a,-b)$ $6)\ (a-b,b)\ ,\ (a,a+b)$

تمرين ٣:أوجدأحداثيات نقطة المنتصف للقطع المستقيمة التالية:

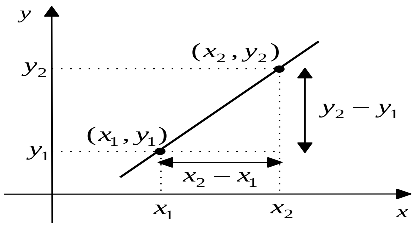
$1)(1,-1),(5,5)$ $2)(4,7),(6,10)$ $3)(6,-3),(6,11)$ $4)(2a,0),(0,2b)$

٥. ميل الخط المستقيم :

ميل الخط المستقيم (m) غير العمودي هو نسبة التغير في الإحداثيy إلي التغير في الإحداثيx في كل نقطتين من نقاط المستقيم. عاين النقطتين (x_1 , y_2) و (x_2 , y_2) على الخط المستقيم في (الشكل(٦))تُسمى المسافتان التغير في y $(\Delta y = y_2 - y_1)$ والتغير في x $(\Delta x = x_2 - x_1)$.

فبهذا التعريف يصبح قانون الميل كالتالي:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



الشكل (٦)

عند استخدام القانون نلاحظ أن: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

مثال ٣: أوجد ميل المستقيم المار في النقطتين $a(4 , 11) , b(2 , 7)$

الحل : $m = \frac{11 - 7}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$

٦. معادلة الخط المستقيم

١,٦. طريقة الميل ونقطة :

يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم إذا كان الميل وإحداثيات نقطة معينة على الخط معروفين. لنفرض أن m هو ميل الخط والنقطة هي (x_1 , y_1). إذا كانت (x , y) نقطة أخرى على الخط المستقيم

من قانون الميل: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

نستنتج معادلة الخط المستقيم كالتالي:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

مثال٤: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويمر بالنقطة $(1,-2)$

الحل:

في هذا المثال $m = 3$ و $(x_1 , y_1) = (1,-2)$ إذن بالتعويض المباشر في القانون نجد:

$$y = 3(x-1) + (-2) = 3x - 3 - 2 = 3x - 5$$

إذن معادلة الخط المستقيم هي: $y = 3x - 5$

مثال٥:أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,3)$ و $(2,5)$

الحل:

في هذه الحالة نستخدم النقطتين لإيجاد ميل الخط ثم نستخدم هذا الميل مع أحدى النقطتين المعطاة لإيجاد معادلة الخط بنفس الطريقة المذكورة في المثال ٣.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$$

إذن باستخدام $m = -1$ والنقطة $(4,3)$ مثِّلاً تكون معادلة الخط كالتالي:

$$y = -1(x-4)+3$$
$$y = -x+7$$

٢,٦. طريقة الميل والجزء المقطوع :

عادةً ما نحتاج إلى كتابة معادلة الخط المستقيم بطريقة أخرى تُسمى طريقة الميل والجزء المقطوع. وفي هذه الحالة يكون شكل المعادلة كالتالي:

$$y = mx + b$$

حيث m هو ميل الخط و b يمثِّل الجزء (أو المسافة) المقطوع (ة) على المحور y عند النقطة $(0,b)$.

وكذلك يمكن استخدام هذا الشكل من المعادلة لإيجاد معادلة الخط المستقيم كما هو موضح في المثال التالي :

مثال ٦:أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي 2 ويقطع من المحور y جزءاً مقداره 3

الحل:

الشكل العام لمعادلة المستقيم هي $y = mx + b$

$$m = 2 \quad , \quad b = 3$$

تكون معادلة المستقيم المطلوب هي $y = 2x + 3$

خلاصة معادلات الخطوط المستقيمة :

- شكل المعادلة (الميل ونقطة): $y = m(x - x_1) + y_1$
- شكل المعادلة (الميل والجزء المقطوع): $y = mx + b$
- شكل المعادلة (المستقيم يمر بنقطة الأصل): $y = mx$
- المستقيم الأفقي– الموازي للمحور x -(الميل يساوي صفر): $y = b$
- المستقيم العمودي – الموازي للمحور y -(الميل غير معرف): $x = a$

مثال ٧ : أوجد معادلة كل من المستقيمات التالية :

١) ميله 5 ويمر في نقطة الأصل .

٢) يوازي المحور x ويمر في النقطة (4 , 8)

٣) يوازى المحور y ويمر في النقطة (-2 , 9)

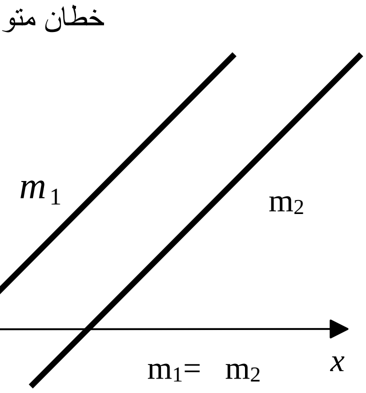
الحل:

١) $y = 5x$ ٢) $y = 8$ ٣) $x = -2$

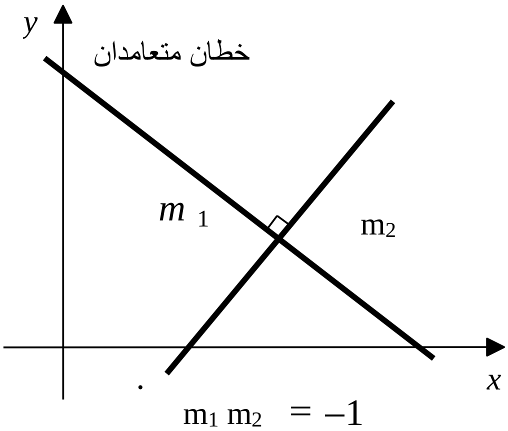
٧. الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة :

يمكن استخدام ميل الخط المستقيم لمعرفة توازى أو تعامد مستقيمين كما هو موضح في الشكل(٧) وبالتحديد يكون المستقيمان متوازيين إذا وفقط إذا كان ميلاهما متساويين $(m_1 = m_2)$

ويكونان متعامدين إذا وفقط إذا كان ميل أحد الخطوط يساوي معكوس الثاني مع تغيير الإشارة $(m_1 = -\frac{1}{m_2})$.



الشكل (٧)



مثال ٦:أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر من خلال النقطة$(2,-1)$ في كل من الحالات التالية:

a) المستقيم موازي للخط المستقيم $2x-3y=5$

b) المستقيم متعامد على الخط المستقيم $2x-3y=5$

الحل:

أولاً نجد ميل الخط المستقيم المعطى بترتيب المعادلة على شكل $y=mx+b$ كالتالي:

$$2x-3y=5 \Rightarrow -3y=-2x+5 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

إذن ميل هذا الخط المستقيم هو $\frac{2}{3}$ وبالتالي:

a) ميل المستقيم المطلوب $m=\frac{2}{3}$ لأن الخط المستقيم المعطى موازي له. إذن الآن لدينا ميل ونقطة فيمكن إيجاد معادلة المستقيم بالطريقة المذكورة سابقاً كالتالي:

$$y=m(x-x_1)+y_1=\frac{2}{3}(x-2)+(-1)=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}-1=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$$

b) في هذه الحالة الميل المطلوب يساوي معكوس الميل المعطى مع تغيير الإشارة لأنه متعامد عليه أي: $m=-\frac{1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}$ وباقي الحل يكون كما في الفقرة a) أي:

$$y=-\frac{3}{2}(x-2)+(-1)=-\frac{3}{2}x+\frac{6}{2}-1=-\frac{3}{2}x+\frac{4}{2}=-\frac{3}{2}x+2$$

٨. نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور :

عادةً ما نحتاج إلى معرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحاور. تكون إحداثية y تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور x وتكون إحداثية x تساوي الصفر لنقطة تقاطع الخط مع المحور y. أي نعوض في المعادلة بـ $x=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور y ثم بـ $y=0$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع مع المحور x.

مثال ٧:أوجدأحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم التالي: $y=2x+3$ مع المحاور.

الحل:

التقاطع مع المحور y: $x=0 \Rightarrow y=2(o)+3=3$ إذا نقطة التقاطع مع المحور y هي: $(0,3)$

التقاطع مع المحور x: $y=0 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ إذا نقطة التقاطع مع المحور x هي: $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

تمارين (١-٢)

تمرين ١:أوجد ميل الخطوط المستقيمة التي تمر بكل من النقطتين فيما يلي:

$1)\ (3,7)\ ,\ (5,11) \qquad 2)\ (3,-4)\ ,(5,2) \qquad 3)\ (\frac{7}{8},\frac{3}{4})\ ,(\frac{5}{4},\frac{1}{4})$

تمرين٢:أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة ولديه الميل المعطى m

$1)(4,11)\ ,m=2 \qquad 2)\ (6,7)\ ,m=\frac{2}{3} \qquad 3)(-2,4)\ ,m=-\frac{3}{5}$

$4)(0,2)\ ,\ m=4 \qquad 5)\ (0.4),m=0$

تمرين٣:أوجد ميل ونقطة التقاطع مع المحاور إذا كان ذلك ممكناً للخطوط المستقيمة التالية :

$1)x+5y=20 \qquad 2)6x-5y=15 \qquad 3)x=4 \qquad 4)y=-1$

تمرين ٤:أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقاط التالية:

$1)(2,1),(0,-3) \qquad 2)(-3,-4),(1,4) \qquad 3)(0,0),(-1,3)$

$4)(-3,6),(1,2) \qquad 5)(1,-2),(3,-2) \qquad 6)\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$

تمرين ٥:أوجد معادلة الخط الموازي للمحور y ويمر في النقطة (3,11)

تمرين ٦:أوجد معادلة الخط الموازي للمحور x ويمر في النقطة (5,-4)

تمرين ٧:أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة المعطاة في الحالات التالية:

(a) يكون الخط فيها موازي للخط المعطى

(b) يكون الخط فيها متعامد على الخط المعطى

1) $(2,1)$, $4x-2y=3$ 2) $(-3,2)$, $x+y=7$ 3) $\left(\frac{7}{8},\frac{3}{4}\right)$, $5x+3y=0$

4) $(-6,4)$, $3x+4y-7=0$ 5) $(2,5)$, $x=4$ 6) $(-1,0)$, $y=-3$

الوحدة الثانية

مدخل إلى علم المثلثات

مدخل الى علم المثِّلثات

الجدارة:الإلمام بمبادئ علم المثِّلثات .

الأهداف:
بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على:
- تصنيف وحساب الزوايا .
- تحويل الزوايا من وحدة إلى أخرى وحساب قيم المثِّلثيات للزوايا .
- التعامل مع الدوال المثِّلثية واستنتاج العلاقة بينها .
- استخدام المتطابقات الأساسية للمثِّلثيات .

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .
الوقت المتوقع للتدريب: ثماني ساعات .

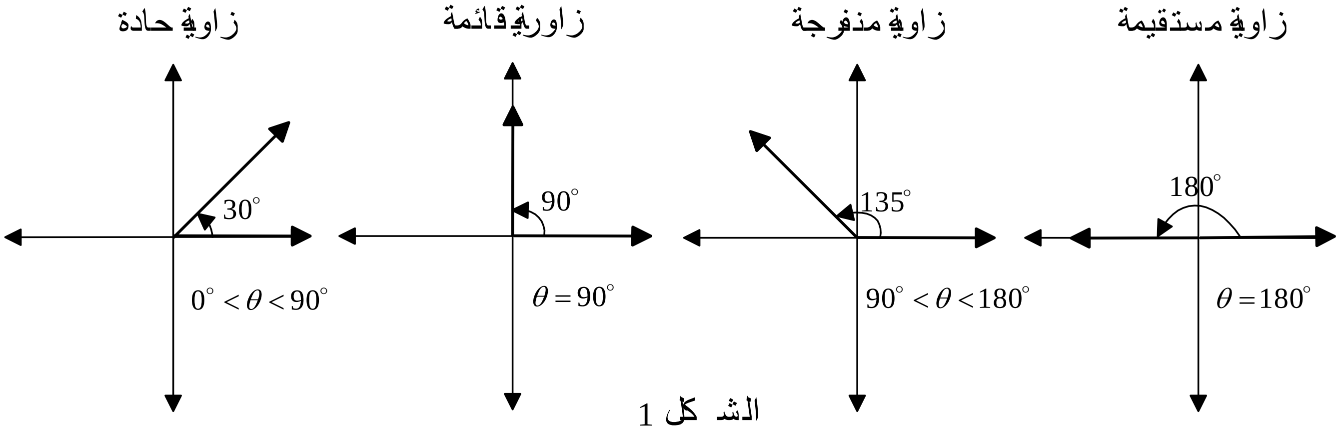
مدخل إلى علم المثِّلثات

١. قياس الزوايا :

قياس الزاوية هو مقدار دوران أحد أضلع الزاوية (الضلع النهائي)بالنسبة للضلع الثاني (الضلع الابتدائي). وعادةً ما نستخدم وحدة "الدرجة" لهذا القياس $(^\circ)$. تكون قيمة القياس موجبة إذا كانت الزاوية مكونة من دوران في اتجاه معاكس لعقارب الساعة وسالبة إذا كان الدوران في اتجاه عقارب الساعة. قياس زاوية θ مشكلة من دورة كاملة في اتجاه عقارب الساعة هو 360° وبالتالي 1°هو قياس زاوية مشكلة من $\frac{1}{360}$ منالدورة الكاملة.

وتكون الزاوية في وضع قياسي إذا كان رأسها هو أصل المحورين والضلع الابتدائي لها ينطبق على الجزء الموجب للمحور x

عادةً ما نصنف الزوايا إلى أربعة أصناف كما هو موضح في الشكل 1 .



الشكل 1

كما أن في الساعة60 دقيقة وفي الدقيقة60 ثانية، فإن في الدرجة الواحدة (1°) 60 دقيقة $(60')$ وفي الدقيقة 60 الثانية $(60'')$:

درجة وأحدة (1°) = 60 دقيقة $(60')$

دقيقة وأحدة $(1')$ = 60 ثانية $(60'')$

فمثِّلاً زاوية θقياسها 61 درجة، 35 دقيقة و 47 ثانية تكتب بالشكل القياسي: $\theta = 61^\circ 35' 47''$

مثال ١: أعد كتابة $\theta = 43^\circ 74' 89''$ بالشكل القياسي

الحل:

من الواضح أن: $74' = 60' + 14' = 1^\circ 14'$ و $89'' = 60'' + 29'' = 1' 29''$

إذن: $\theta = 43^\circ 74' 89'' = (43^\circ + 1^\circ)(14' + 1')(29'') = 44^\circ 15' 29''$

مثال ٢: أوجد: $2)\, 75^\circ 23' 41'' + 34^\circ 47' 25''$ $\quad 1)\, 360^\circ - 75^\circ 18' 48''$

الحل:

$$1)\, 360^\circ - 75^\circ 18' 48'' = (359^\circ 59' 60'') - (75^\circ 18' 48'') = (359^\circ - 75^\circ)(59' - 18')(60'' - 48'')$$

$$= 284^\circ 41' 12''$$

$$2)\, 75^\circ 23' 41'' + 34^\circ 47' 25'' = (75^\circ + 34^\circ)(23' + 47')(41'' + 25'') = 109^\circ 70' 66''$$

$$= (109^\circ + 1^\circ)(10' + 1')(6'') = 110^\circ 11' 6''$$

الآلة الحاسبة تظهر قياس الزاوية على الشكل العشري، فمثِّلاً الزاوية $47^\circ 30'$ تظهر على الآلة على شكل 47.5° والزاوية $23^\circ 45'$ تظهر على شكل 23.75°. إذن نحتاج إلى معرفة تحويل الكتابة العشرية إلى الكتابة على الشكل القياسي والعكس.

مثال ٣:حوّل 1) $\theta = 43^\circ 25' 51''$ إلى الشكل العشري و 2) $\theta = 23.456^\circ$ إلى الشكل القياسي

الحل:

من المعلوم أن: $1'' = \left(\dfrac{1}{3600}\right)^\circ$ و $1' = \left(\dfrac{1}{60}\right)^\circ$ إذا :

$$1)\ \theta = 43^\circ 25' 51'' = 43^\circ + \left(\frac{25}{60} + \frac{51}{3600}\right)^\circ = 43.431^\circ$$

$$2)\ \theta = 23.456^\circ = 23^\circ + 0.456^\circ = 23^\circ + 0.456 \times 60' = 23^\circ + 27.36'$$

$$= 23^\circ + 27' + 0.36 \times 60'' = 23^\circ + 27' + 21.6'' \approx 23^\circ 27' 22''$$

هناك وحدة أخرى يتم استعمالها في قياس الزوايا وتُسمى هذه الوحدة الراديان (radians) وعادةً ما يرمز لها بالحروف اللاتينية rd. سبق وذكرنا أن دورة كاملة تمثِّل زاوية قياسها 360° فهنا نعرف أن قياس الدورة الكاملة= $2\pi\, rd$ أي أن 360° = $2\pi\, rd$ فبالتالي:

$2\pi\, rd = 360^\circ \Rightarrow \pi\, rd = 180^\circ$ أو بمعنى آخر:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} rd \qquad \text{أو} \qquad 1rd = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

ملحوظة :الآلة الحاسبة تظهر $1^\circ = 0.017453293 rd$ و $1rd = 57.29577951^\circ$

مثال ٤ :حوّلكلاً مما يلي: إلى درجة $(^\circ)$

$$3rd\ ,\ \frac{\pi}{2} rd\ ,\ \frac{3\pi}{4} rd$$

الحل :

$$3rd = 3\left(\frac{180}{\pi}\right) = 171^\circ\ 53'\ 14.4''$$

$$\frac{\pi}{2}rd = \frac{\pi}{2}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 90^\circ$$

$$\frac{3\pi}{4}rd = \frac{3\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 135^\circ$$

مثال٥ : حوّلكلاً مما يلي إلى راديان (rd) 150° , 548°

الحل:

$$150^\circ = 150\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{6}rd$$

$$548^\circ = 548\left(\frac{\pi}{180}\right) \approx 9.564rd$$

بعض الزوايا المشهورة بالدرجة والراديان				
$(\circ)$	(rd)		$(\circ)$	(rd)
0	0		120	$\frac{2\pi}{3}$
30	$\frac{\pi}{6}$		180	π
45	$\frac{\pi}{4}$		240	$\frac{4\pi}{3}$
60	$\frac{\pi}{3}$		270	$\frac{3\pi}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$		360	2π

تمارين (٢ -١)

تمرين ١ :صنف الزوايا التالية إلى حادة أو منفرجة أو لا صنف لها :

1) 225° 2) $15^\circ 4' 9''$ 3) 0° 4) $\pi\, rd$

تمرين ٢ :قم بالعمليات التالية:

1) $15^\circ\ 25'35'' + 43^\circ\ 35'27''$ 2) $109^\circ\ 47'38'' + 43^\circ\ 35'21''$

3) $57^\circ\ 43'28'' - 27^\circ\ 31'49''$ 4) $123^\circ\ 13'20'' + 27^\circ\ 31'49''$

تمرين ٣: أعد كتابة الزوايا التالية باستخدام وحدة الدرجة و الدقيقة والثانية :

$1)\,40.25^{\circ} \qquad 2)\,75.2^{\circ} \qquad 3)\,17.45^{\circ} \qquad 4)\,96.6^{\circ}$

تمرين ٤ :حوّل قياس الزوايا التالية باستخدام وحدة الدرجة :

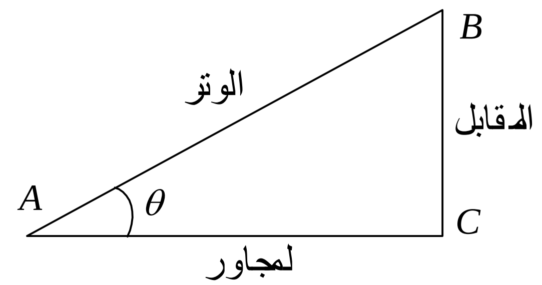
$1)\ 2.5rd \qquad 2)\ 3\pi \qquad 3)\ \frac{\pi}{2}rd \qquad 4)\ \frac{3\pi}{2}rd \qquad 5)\ -\frac{\pi}{6}rd \qquad 6)\ -6rd$

تمرين ٥ :حوّل قياس الزوايا التالية باستخدام وحدة الراديان :

$1)\,45^{\circ} \qquad 2)\,225^{\circ} \qquad 3)\,75^{\circ} \qquad 4)\,-135^{\circ} \qquad 5)\,7^{\circ}30' \qquad 6)\,-270^{\circ}$

٢. مثّلثيات زاوية حادة :

عاين المثّلث القائم الزاوية ABC في الشكل 2 . نسمي ضلع المثّلث المقابل للزاوية القائمة C بالوتر. ولنسمي الزاوية التي رأسها A الزاوية θ ، بهذا الشكل يُسمّى الضلع $\overline{AC}$ المجاور (بالنسبة لـ θ) ، ويُسمّى الضلع $\overline{BC}$ المقابل (بالنسبة لـ θ). يُطلق على مثّلثيات الزاوية θ الأسماء التالية:
$\sin e, \cos ine, \tan gent, \cot angent, \operatorname{cosecant}$ and secant



الشكل 2

يُرمز لقيم هذه المثّلثيات عند θ بـ: $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ ... إلخ. وتُعرف هذه القيم باستخدام طول أضلاع المثّلث كالتالي:

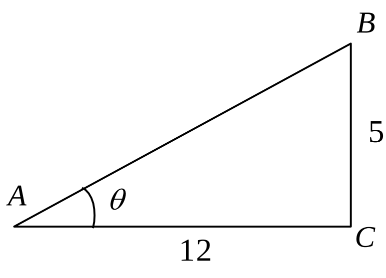
$\frac{BC}{AB}$

$$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{AB} \qquad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BC}{AC} \qquad \cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{AC}{BC}$$

مثال ٥: احسب قيم مثّلثيات الزاوية θ في الشكل التالي



الحل:

أولاً نحتاج إلي إيجاد طول الوتر وهذا ممكن باستخدام قانون فيثاغورث للمثّلث القائم الزاوية ABC :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB = \sqrt{169} = 13$$

ومنه تكون قيم مثّلثيات الزاوية θ كالتالي

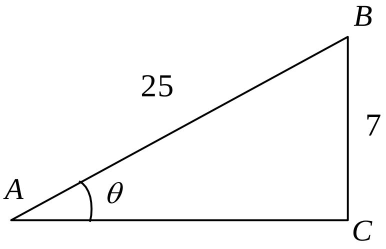
$$\cos\theta = \frac{5}{13} \quad \sin\theta = \frac{12}{13} \quad \tan\theta = \frac{5}{12} \quad \csc\theta = \frac{13}{5} \quad \sec\theta = \frac{13}{12} \quad \cot\theta = \frac{12}{5}$$

مثال ٦:أوجد قيمة $\cos\theta$ و $\tan\theta$ علماً بأن $\sin\theta = \frac{7}{25}$.

الحل:

لأن $\sin\theta=\frac{7}{25}$ فيمكن افتراض أن $BC=7$ و $AB=25$ (بدون تقليص من عمومية الحل). ومن قانون فيثاغورث:

$$AC^2=AB^2-BC^2=25^2-7^2=576\Rightarrow AC=\sqrt{576}=24$$



وبالتالي:

$$\tan\theta=\frac{7}{24} \qquad \cos\theta=\frac{24}{25}$$

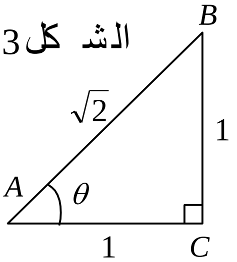
١,٢. مثِّلثيات بعض الزوايا المشهورة

كثير ما نتعرض في حساب المثّلثيات إلى زوايا تتكرر معنا كثيراً يجب على المتدرب أن يحفظ قيم مثّلِثياتها. في هذه الفقرة سنكتفي بشرح طريقة إيجاد قيم مثّلِثيات الزاوية 45° فقط وباقي الزوايا المشهورة سنذكر فقط قيم مثّلِثياتها بدون شرح.

لنعاين المثّلث القائم الزاوية ABC في (الشكل 3) حيث تكون فيه الزاوية A تساوي 45°. من السهل استنتاج أن الزاوية B تساوي كذلك 45° وبالتالي يكون المثّلث ABC متساوي الضلعين AC و BC. بدون تقليص من عمومية الاستنتاج لنفرض أن $AC=AB=1$ وبتطبيق قانون فيثاغورث يكون $AB^2=AC^2+BC^2=1^2+1^2=2\Rightarrow AB=\sqrt{2}$ وبالتالي:

$$\tan\theta=\frac{1}{1}=1 \qquad \cos\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

الشكل 3



مثّلثيات زوايا مشهورة

$\theta\ (^\circ, rd)$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$30^\circ,\ \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ,\ \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ,\ \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

٢,٢ حل المثّلثات قائمة الزاوية :

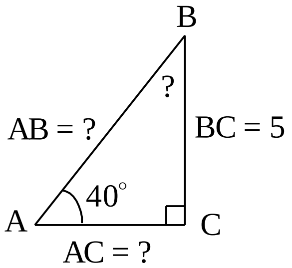
يتكون شكل المثّلث من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا. لنفرض أننا نعرف قياس بعض الأضلع وبعض الزوايا. فعملية إيجاد قياس الأضلع والزوايا الباقية تُسمى حل المثّلث.
وسنتطرق في الأمثِّلة التالية إلى كيفية استخدام علم المثّلثيات في حل مسائل من هذا النوع.

مثال ٧: حل المثّلث القائم الزاوية ABC حيث الزاوية التي رأسها C زاوية قائمة. $BC=5$ و الزاوية التي رأسها A تساوي 40°.

أولاً نقوم برسم المثِّلث على حسب المعطيات في السؤال كما هو مبين في الرسم التالي:
فمن الواضح أنه يجب علينا إيجاد الزاوية B والأضلع AB و AC مع العلم أن الزاوية القائمة C تساوي 90°. بما أن مجموع زوايا المثِّلث يساوي 180° إذن:

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ) = 50^\circ$$

(هنا نقصد الزوايا التي رؤوسها A, B, C) ومنه باستخدام المثِّلثيات:



$$\sin 40^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5}{\sin 40^\circ} = \frac{5}{0.6427} \Rightarrow AB \approx 7.8$$

يبقى علينا إيجاد طول الضلع AC الذي يمكن حسابه باستخدام قانون فيثاغورث أو أحدى المثِّلثيات المناسبة. وبقانون فيثاغورث:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (7.8)^2 - 5^2 = 60.84 - 25 = 35.84 \Rightarrow AC = \sqrt{35.84}$$

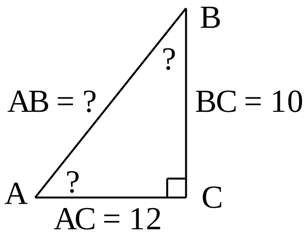
وهكذا تصبح قياس كل زوايا وأضلاع المثِّلث معروفة.

مثال ٨: حل المثِّلث القائم الزاوية في C حيث $BC = 10$ و $AC = 12$.

الحل:

هنا في هذه الحالة المعطيات هما ضلعان. فبالنسبة للضلع الثالث AB يمكن استخدام قانون فيثاغورث:

$$AB^2 = 12^2 + 10^2 = 244 \Rightarrow AB \approx 15.6$$



وباستخدام المثِّلثية $\tan$ نحسب الزاوية A:

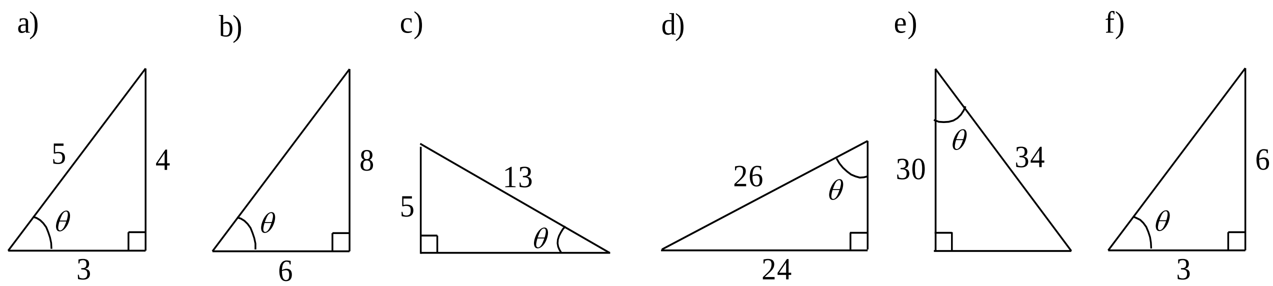
$$\tan A = \frac{10}{12} \approx 0.8333 \Rightarrow A \approx 39^\circ 48'$$

والزاوية B يمكن حسابها من أن مجموع الزوايا الثلاثة يساوي 180°:

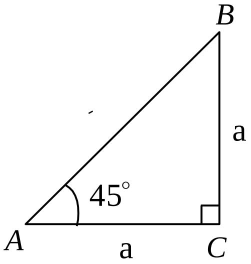
$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (39^\circ 48' + 90^\circ) = 180^\circ - 129^\circ 48' = 50^\circ 12'$$

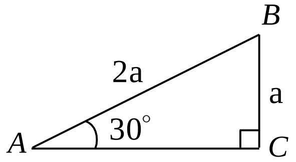
تمارين (٢-٢)

تمرين ١: أوجد القيم $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ في الحالات التالية:



تمرين ٢: استخدم الشكليين التاليين لإيجاد $\sin 45^\circ$ ، $\cos 45^\circ$ ، $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$



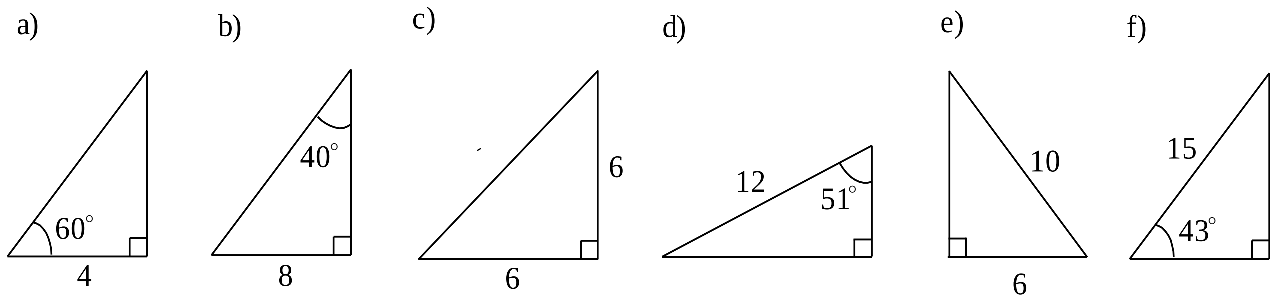


تمرين ٣: 1)أوجد قيمة $\cos\theta$ و $\tan\theta$ علماً بأن $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$

2)أوجد قيمة $\sin\theta$ و $\tan\theta$ علماً بأن $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

3)أوجد قيمة $\sin\theta$ و $\cos\theta$ علماً بأن $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$

تمرين ٤ :أوجد قيم الزوايا والأضلاع غير المعروفة في الحالات التالية:

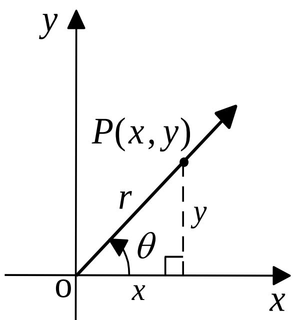


٣. مثِّلثيات أي زاوية :

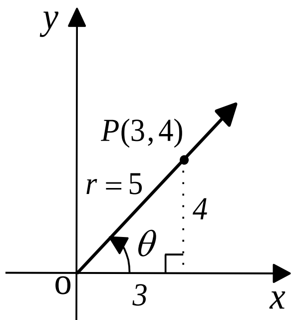
هنا في هذه الفقرة سنعرف مثِّلثيات أي زاوية بحيث يكون هذا التعريف شاملاً لتعريف مثِّلثيات الزاوية الحادة التي سبق وتكلمنا عنها. لهذا الغرض لنفرض الزاوية θ في شكلها القياسي (أي رأس الزاوية على نقطة الأصل وضلعها الابتدائي ينطبق على الجزء الموجب للمحور x) (الشكل 1) وإذا كانت النقطة $P(x,y)$ (تختلف عن نقطة الأصل) على الضلع النهائي للزاوية θ.

من قانون فيثاغورث: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ وتعرف مثِّلثيات θ باستخدام الإحداثيات (x,y) والمسافة r كالتالي:

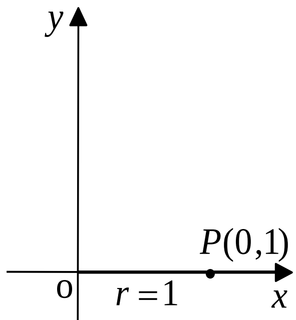
$$\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta=\frac{x}{r}\ ,\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

مثال ٩: إذا كانت النقطة $P(3,4)$ (الشكل 2) على الضلع النهائي للزاوية θ. فأوجد مثِّلثيات θ.

الحل:

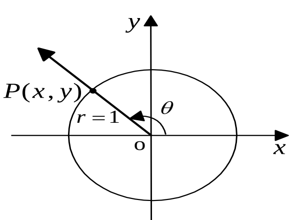
في هذه الحالة: $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$ إذن: $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$ $\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$ $\qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$

مثال ١٠: أوجد مثِّلثيات الزاوية $\theta=0^\circ$.

الحل: في هذه الحالة لنختار النقطة $P(1,0)$ (الشكل 3) فمن الواضح إن $r=OP=1$ وبالتالي:

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0 \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{1}=1 \qquad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0$$

يمكن اختصار تعريف الدوال المثِّلثيات باختيار النقطة P على دائرة الوحدة (الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي 1) التي تتقاطع مع ضلع الزاوية، أو بمعنى آخر اختيار P بحيث $r=OP=1$ (الشكل 4) فبالتالي:

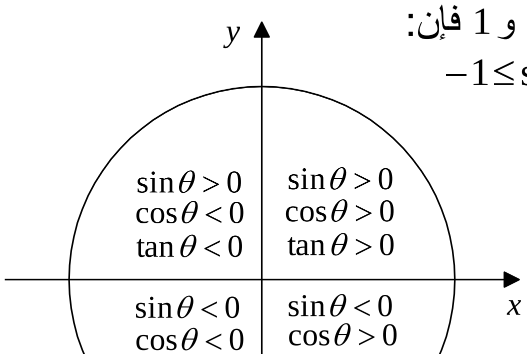


الشكل 4

$$\sin\theta=y \qquad \cos\theta=x \qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

وبما أن قيمتي x و y محصورتين بين -1 و 1 فإن:

$$-1\le\cos\theta\le1 \qquad و \qquad -1\le\sin\theta\le1$$



ومن هذا التعريف يمكن معرفة إشارة هذه المثِّلثيات sine, cosine, tangent كالتالي:

- إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول تكون قيم $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ موجبة .
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني قيمة $\sin\theta$ موجبة وقيم $\cos\theta, \tan\theta$ سالبة .
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثالث تكون قيم $\sin\theta, \cos\theta$ سالبة وقيمة $\tan\theta$ موجبة .
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الرابع تكون قيم $\sin\theta, \tan\theta$ سالبة وقيمة $\cos\theta$ موجبة .

تمارين (٢ -٣)

تمرين ١ :أوجدمثِّلثيات الزاوية θ عندما تكون إحداثيات النقطة P على الضلع النهائي للزاوية:

$1)\,P(2,3) \qquad 2)\,P(3,-4) \qquad 3)\,P(1,\sqrt{3}) \qquad 4)\,P(1,2\sqrt{2}) \qquad 5)\,P(2,0)$

تمرين ٢ :أوجد قيم $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ عندما تكون الزاوية θ تساوي:

$$1)\,180^\circ \qquad 2)\,\frac{3\pi}{2} \qquad 3)\,360^\circ \qquad 4)\,-\pi$$

تمرين ٣ :أوجد إشارة قيم المثِّلثيات التالية:

$$1)\,\cos 50^\circ \quad 2)\,\sin\frac{5\pi}{6} \quad 3)\,\tan 125^\circ \quad 4)\,\sin 247^\circ \quad 5)\,\cos(-119^\circ)$$

تمرين ٤ : أوجد القيم الحقيقية للمثِّلثيات sin , cos , tan للزوايا التالية:

$$1)\,120^\circ \quad 2)\,135^\circ \quad 3)\,210^\circ \quad 4)\,\frac{5\pi}{3} \quad 5)\,\frac{7\pi}{4} \quad 6)\,-30^\circ \quad 7)\,-\frac{\pi}{4} \quad 8)\,-150^\circ$$

٤. المتطابقات الأساسية للمثّلثيات :

كما رأينا من قبل باستخدام دائرة الوحدة والنقطة $P(x,y)$ (الشكل 5)

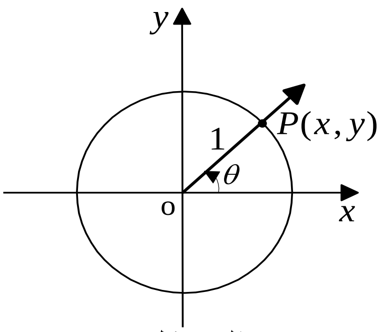
توصلنا إلى أن:

$\cos\theta = x \qquad \sin\theta = y$ ومنه يمكن أن نقول:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = x^2 + y^2$$

ومع أن $x^2 + y^2 = r^2 = 1$ (دائرة الوحدة) إذا :

$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ (وهذا يصلح لأي زاوية θ)



الشكل 5

فمثِّلاً: $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

ومن هذه المتطابقة يمكن استنتاج متطابقات أخرى، فمثِّلاً بتقسيم طرفي هذه المتطابقة على $\cos^2\theta$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \sec^2\theta \qquad \left(\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta\right)$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta\right)$$

بنفس الطريقة يمكن الوصول إلى: $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

مثال ١١:إذا كانت $\sin\theta = \frac{2}{3}$ والزاوية θ موجودة في الربع الثاني. استخدم المتطابقة الأساسية لإيجاد $\cos\theta$.

الحل:

من التطابق الأساسي: $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ إذا :

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ولأن المثِّلثية $\cos\theta$ سالبة في الربع الثاني نختار $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

كذلك يمكن أن نستخدم هذه المتطابقات في اختصار العبارات المثِّلثية كما في المثال التالي :

مثال ١٢: اختصر العبارة التالية: $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

الحل:

أولاً نقوم بتفكيك الأقواس كالتالي: $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1^2 - \sin^2\theta = 1-\sin^2\theta$

ثم باستخدام المتطابقة المذكورة أعلاه نجد: $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1-\sin^2 = \cos^2\theta$

٤ . ١ متطابقات مجموع وحاصل طرح زاويتين :

من التعريف السابق يمكن الوصول إلى متطابقات أخرى سنسردها هنا بدون شرح طريقة الوصول إليها.

١) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

٢) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

٣) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

٤) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

٥)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

٦)

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

مثال ١٣:

إذا كانت α و β زاويتين حادتين وكان $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ أوجد ما يلي :

$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$

الحل :

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$$

$$\cos\beta=\frac{12}{13}\Rightarrow\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25}{169}\Rightarrow\sin\beta=\frac{5}{13}\Rightarrow\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{5}{12}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)=\frac{56}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)=\frac{63}{65}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}=\frac{56}{33}$$

تمارين (٢-٤)

تمرين ١:إذا كانت θ زاوية حادة بحيث $\sin\theta=\frac{24}{25}$. أوجد $\cos\theta$ و $\tan\theta$

تمرين ٢:إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني بحيث $\tan\theta=-\frac{3}{4}$. أوجد $\sin\theta$ و $\cos\theta$

تمرين ٣:اختصر كلاً مما يلي:

$a)\ \frac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$ $\quad b)\ \frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}$ $\quad c)\ \frac{1}{\cos x-1}-\frac{1}{\cos x+1}$ $\quad d)\ \frac{1-\cos^2 t}{\tan t}$

$e)\ \frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}$ $\quad f)\ \frac{\sin x}{\sin x+1}+\frac{\sin x}{\sin x-1}$ $\quad g)\ \cos t-\frac{1}{\cos t}$ $\quad h)\ \tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}$

تمرين ٤:ليكن $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ و $\cos\beta=\frac{7}{25}$ حيث α موجودة في الربع الثالث و β في الربع الأول.

أوجد قيم: $a)\sin(\alpha+\beta)$ $\quad b)\tan(\alpha+\beta)$

تمرين ٦:باستخدام $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ أوجد القيم الحقيقية لـ $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$

تمرين ٧:أوجد القيم الحقيقية للمثّلثيات التالية:

$$a)\cos\frac{3\pi}{4}\quad b)\sin\frac{2\pi}{3}\quad c)\cos\frac{4\pi}{3}\quad d)\sin\frac{7\pi}{12}\quad e)\tan\frac{7\pi}{6}\quad f)\sin 240^\circ\quad g)\cos 210^\circ$$

تمرين ٨: بيّن أن:

$$a)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta\quad b)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\quad c)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta\quad d)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

$$d)\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta\quad e)\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta\quad f)\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\quad c)\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

الوحدة الثالثة

الهندسة المستوية والفراغية

الهندسة المستوية والفراغية

الجدارة:الإلمام بمبادئ الهندسيةالمستوية والفراغية .

الأهداف:

بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- الأشكال الهندسية المستوية (الأشكال الرباعية-المثِّلث-الدائرة) .
- قوانين حساب المساحة والمحيط للأشكال الهندسية المستوية .
- الأشكال الهندسية الفراغية (المكعب-الإسطوانة-المخروط-الكرة) .
- قوانين حساب المساحة الجانبية وحجم الأشكال الهندسية الفراغية .

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: ستة ساعات .

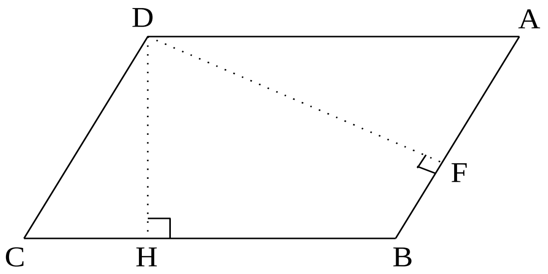
الهندسة المستوية والفراغية

١. الهندسة المستوية :
الأشكال الهندسية المستوية المشهورة تنقسم إلى قسمين هما:

- المضلعات.
- الدائرة.

١,١. الأشكال الرباعية :
الشكل الرباعي هو كل شكل مضلع له أربعة أضلاع ومن انواعه :متوازي الأضلاع، والمستطيل، والمعين، والمربع، وشبه المنحرف .

١,١,١. متوازي الأضلاع :



هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين .
ومن خواصه :

a) كل ضلعين متقابلين متطابقان
b) كل زاويتين متقابلتين متساويتان.
c) القطران ينصف كل منهما الآخر.

- **محيط متوازي الأضلاع** (P):

$P = 2$ (مجموع ضلعين متجاورين) $= 2(AB + AD)$

وبشكل عام فإن محيط أي شكل هندسي يساوي مجموع أطوال أضلاعه .

- **مساحة متوازي الأضلاع** (A):

$A =$ طول القاعدة $\times$ طول الارتفاع النازل عليها $= DH \times CB = DF \times AB$

ملحوظة :

- قاعدة متوازي الأضلاع هي أي ضلع من أضلاعه الأربعة.
- ارتفاع متوازي الأضلاع هو العمود النازل من أي رأس من رؤوسه على الضلع المقابل لهذا الرأس.
- القاعدة الصغرى يقابلها الارتفاع الأكبر والقاعدة الكبرى يقابلها الارتفاع الأصغر.

مثال ١:متوازي أضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $8cm, 14cm$. احسب محيطه ومساحته إذا كان ارتفاعه الأصغر $5cm$.
الحل:
المحيط يعطى بالقاعدة التالية: $P = 2$ (مجموع ضلعين متجاورين) ومنه

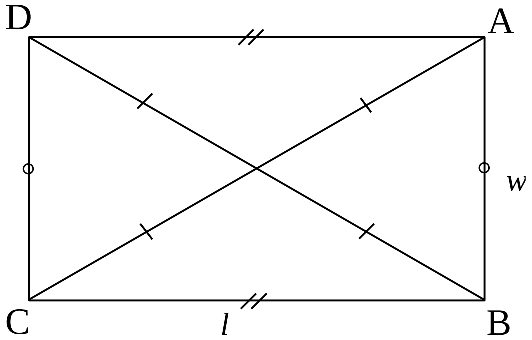
$$P = 2(8+14) = 44cm$$

المساحة: بما أن الارتفاع الأصغر يقابل القاعدة الكبرى والمساحة تعطى بالقاعدة التالية:

$A =$ طول القاعدة $\times$ طول الارتفاع $= 5 \times 14 = 70cm^2$

١,١,٢. المستطيل :

هو رباعيجميع زواياه قائمة.



- المحيط(P):

$P = 2\,[\,(w)\ \text{العرض} + (l)\ \text{الطول}\,] = 2(AB + AD)$

- المساحة(A):

$A = (w)\ \text{العرض} \times (l)\ \text{الطول} = AB \times AD$

مثال ٢: مستطيل طوله $17cm$ وعرضه $11cm$.
احسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

المحيط: $P = 2\ [(w)\ \text{العرض} + (l)\ \text{الطول}] = 2(11+17) = 56cm$

المساحة: $A = (w)\ \text{العرض} \times (l)\ \text{الطول} = 11 \times 17 = 187\,cm^2$

مثال ٣: مستطيل مساحته $320\,cm^2$، فإذا كان عرضه 16. احسب محيطه.

الحل:

(l) الطول $=$ المساحة $(A) \div (w)$ العرض

$$l = \frac{320}{16} = 20cm$$

ومنه المحيط (P)

$P = 2\ [(w)\ \text{العرض} + (l)\ \text{الطول} = 2(16+20) = 72cm]$

مثال ٤: مستطيل عرضه $7cm$ وطوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه. احسب كل من محيطه ومساحته.

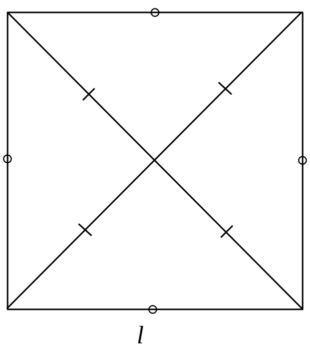
بما أن طول المستطيل يساوي ثلاثة أمثال عرضه إذن طوله (L): $L = 3 \times 7 = 21cm$

المحيط: $P = 2\ [(w)\ \text{العرض} + (l)\ \text{الطول}] = 2(7+21) = 56cm$

المساحة: $A = (w)\ \text{العرض} \times (l)\ \text{الطول} = 7 \times 21 = 147\,cm^2$

١,١,٣. المربع :

هو مستطيل جميع أضلاعه متساوية .



- محيط المربع (P): $P = 4 \times (l)\ \text{طول الضلع} = 4l$
- مساحة المربع (A): $A = (l)\ \text{الضلع} \times (l)\ \text{الضلع} = l^2$

مثال ٥: مربع طول ضلعه $9cm$. احسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

المحيط: $P = 4 \times (l)\ \text{طول الضلع} = 4l = 4 \times 9 = 36cm$

المساحة: $A = (l)\ \text{الضلع} \times (l)\ \text{الضلع} = l^2 = 9^2 = 81cm^2$

مثال ٦: مربع محيطه $48cm$ احسب مساحته.

الحل:

طول ضلع المربع: $l = P \div 4 = 48 \div 4 = 12cm$

المساحة: $A = l^2 = (12)^2 = 144cm^2$

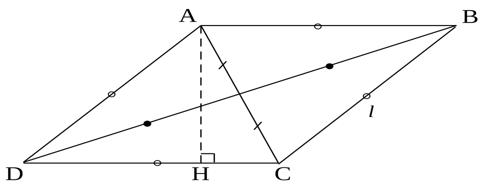
مثال ٧: مربع مساحته $49cm^2$ احسب محيطه.

الحل:

طول الضلع: $l = \sqrt{A} = \sqrt{49} = 7cm$

المحيط: $P = 4 \times (l)$ طول الضلع $= 4l = 4 \times 7 = 28cm$

٤,١,١. المعين



هو متوازي أضلاع جميع اضلاعه متطابقة ومن خواصه:

a) كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان ولا يُشترط أن تكون قائمة.

b) قطراه متعامدان وينصف كل منهما الآخر، وكل قطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينها.

- محيط المعين (P): $P = 4 \times (l)$ طول الضلع
- مساحة المعين (A): $A = DC \times AH$

أي أن:المساحة = طول القاعدة × طول الارتفاع

ويمكن إيجاد المساحة بدلالة القطرين حيث تكون المساحة

$A = \frac{1}{2}$ (طول القطر الأول × طول القطر الثاني)

مثال ٨: قطعة سجاد على شكل معين طول ضلعه $13cm$ وطول ارتفاعه $5cm$. احسب كل من محيطه ومساحته.

الحل:

المحيط: $P = 4 \times (l)$ طول الضلع $= 4l = 4 \times 13 = 52cm$

المساحة: $A =$ طول القاعدة × طول الارتفاع $= 5 \times 13 = 65cm^2$

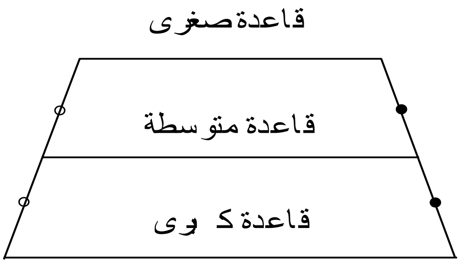
مثال ٩: غرفة على شكل معين طولا قطريها $4m, 7m$ أراد صاحبها رصفها ببلاط سعر المتر المربع منه15ريال، احسب التكلفة

الحل:

مساحة الغرفة $A = \frac{1}{2}$ (طول القطر الأول × طول القطر الثاني) $= \frac{1}{2}(4\times7) = 14m^2$

التكلفة: $14\times15 = 210$ ريال

١,١,٥. شبه المنحرف



هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان وغير متساويين ويسميان قاعدتي شبه المنحرف الصغرى والكبرى.

- محيط شبه المنحرف (P): مجموع أطوال أضلاعه الأربعة $P =$
- مساحة شبه المنحرف (A):

$A =$ نصف مجموع طولي قاعدتيه الصغرى والكبرى × طول الارتفاع

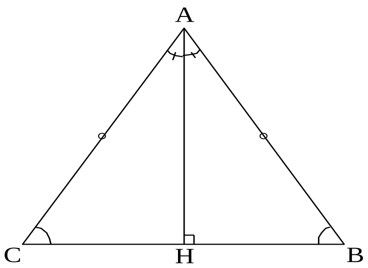
أو: $A =$ طول قاعدته المتوسطة × طول الارتفاع

حيث طول القاعدة المتوسطة يساوي نصف مجموع طولي قاعدتيه الصغرى والكبرى.

مثال ١٠: شبه منحرف قاعدته المتوسطة طولها $17cm$ وطول ارتفاعها $11cm$.احسب مساحته.

الحل: $A =$ طول قاعدته المتوسطة × طول الارتفاع $= 17\times11 = 187cm^2$

١,٢. المثّلث :



هو شكل يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا، مجموع زواياه الداخلية 180°

من أنواعه:

a) متساوي الأضلاع.
b) متساوي الساقين .
c) مختلف الأضلاع.
d) المثّلث القائم الزاوية.

والشكل المقابل يبين مثّلث ABC. متطابق الضلعين AH ارتفاع على الضلع CB

محيط المثّلث (P):

محيط المثّلث يعطى بمجموع أضلاعه $P = AB + BC + CA$

- مساحة المثّلث (A) :

مساحة المثّلث تعطى بالقاعدة التالية:

$A = \frac{1}{2}\times$ طول القاعدة × طول الارتفاع النازل عليها $= \frac{1}{2}\times CB\times AH$

مثال ١١:أوجد مساحة المثّلث الذي طول قاعدته $12cm$ وطول ارتفاعه $8cm$.

الحل:

مساحة المثّلث : $A = \frac{1}{2}\times$ طول القاعدة × طول الارتفاع النازل عليها $= \frac{1}{2}\times12\times8 = 48cm^2$

مثال ١٢:مثّلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $7cm$. احسب طول محيطه

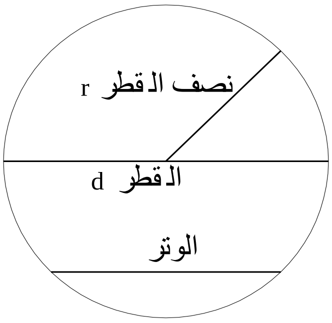
الحل: المحيط: $P = 3\times 7 = 21cm$

١,٣. الدائرة :

هي مجموعة النقاط التي تبعد نفس البعد عن نقطة ثابتة، هذه النقطة تُسمى بمركز الدائرة والبعد الثابت يُسمّى نصف قطر الدائرة .

تعريفات :

- نصف قطر لدائرة: هو قيمة ثابتة دائماً بالنسبة للدائرة الوأحدة و هو المسافة بين مركز الدائرة و أية نقطة على محيطها.



-قطر الدائرة: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على محيط الدائرة والمارة بمركز الدائرة

-وتر الدائرة: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على محيط الدائرة

-مجموعة النقاط التي تمثِّل الدائرة تُسمى محيط الدائرة .

-المساحة المحصورة داخل نطاق المحيط تُسمى مساحة الدائرة.

- محيط الدائرة (P): محيط الدائرة التي نصف قطرها r هو:

$$P = 2\pi r$$

حيث π هي نسبة محيط الدائرة إلى قطرها (النسبة التقريبية) حيث

$$\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3.14$$

- مساحة الدائرة (A): مساحة الدائرة التي نصف قطرها r هي: $A = \pi r^2$

مثال ١٣: سجادة دائرية الشكل طول قطرها $2.8m$ احسب كلاً من طول محيطها ومساحتها.

الحل:

نصف القطر: $r = \frac{2.8}{2} = 1.4m$

المحيط: $P = 2\pi r = 2\times 3.14\times 1.4 \approx 8.8m$

المساحة: $A = \pi r^2 = 3.14\times (1.4)^2 \approx 6.2m^2$

مثال ١٤: حديقة دائرية الشكل طول محيطها $66m$ احسب مساحتها

الحل:القطر: $D = 66 \div \pi \approx 21m \Leftarrow$ نصف القطر: $r \approx \frac{21}{2}m$

المساحة: $A = \pi r^2 \approx 3.14\times \left(\frac{21}{2}\right)^2 \approx 346cm^2$

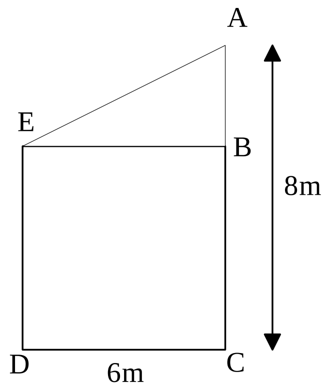
تمارين (٣ – ١)

١) قطعة خشب على شكل متوازي الأضلاع طول قاعدتها $15cm$ وارتفاعها $6cm$، ما مساحتها؟

٢) متوازي الأضلاع مساحته مساحة مربع طول ضلعه $12cm$، احسب طول قاعدة متوازي الأضلاع إذاعلمت أن طول ارتفاعه $10cm$.

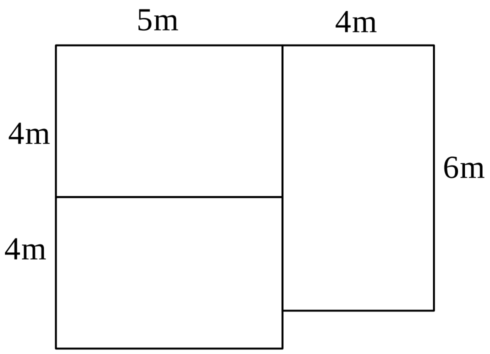
٣) لوح معدني على شكل متوازي الأضلاع، طول قاعدته $50cm$، وطول ارتفاعه $10cm$، كم لوحاً من هذا النوع نحتاج لرصف محل تجاري مساحته $12.35m^2$ ؟

٤) الشكل المقابل يمثِّل المضلع $ABCDE$، حيث $BCDE$ مربع. احسب مساحة $ABCDE$ إذا كان طول AC يساوي $8m$ وطول CD يساوي 6m.

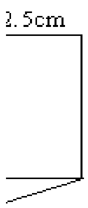


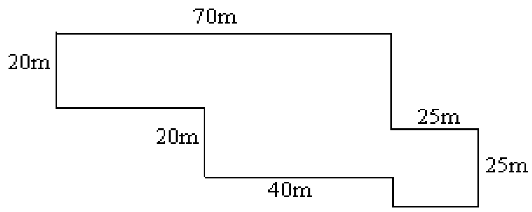
٥) الشكل المقابل يمثِّل مخطط بيت مؤلف من ثلاث غرف.

احسب مساحة هذا البيت.



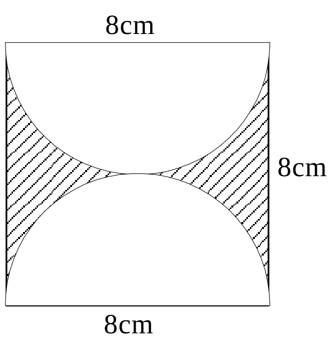
٦) أوجد مساحة كل من الأشكال التالية:





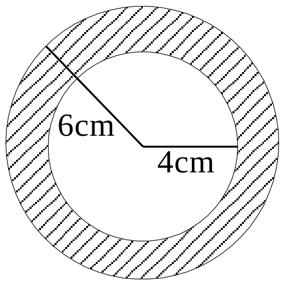
٧) دراجة هوائية طول قطر عجلتها $42cm$، احسب المسافة التي تقطعها الدراجة عندما تدور العجلة 560 دورة.

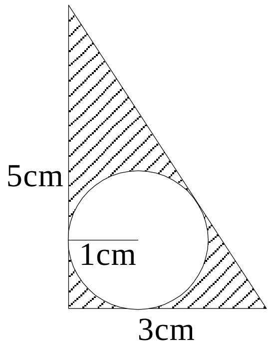
٨) احسب مساحة الجزء المظلل في الشكل المقابل



٩) طاولة طعام، وسطها مستطيل طوله $220cm$ وأطرافها نصف دائرة قطرها $140cm$.
مامحيط هذه الطاولة ؟وما مساحتها؟

١٠) احسب مساحة الجزء المظلل في كل من الأشكال التالية حيث المثلث في الشكل الثانيقائم الزاوية:





١١) حديقة مربعة الشكل طول ضلعها $27m$، أنشأنا في وسطها حوض ماء دائري الشكل، طول نصف قطره $10m$. ما المساحة المتبقية من الحديقة؟

١٢) حديقة مستطيلة الشكل، بعداها $27m,39m$ ، أقمنا بمحاذاة محيطها ممراً عرضه $127cm$. ما المساحة المتبقية من الحديقة؟

١٣) مربع ودائرة لهما نفس المحيط ، ويساوي $31.4cm$ أيهما أكبر مساحة ؟

١٤) مربع ومستطيل لهما نفس المساحة وتساوي $81cm^2$. أوجد طول ضلع المربع ومحيط المستطيل إذا كان طوله يساوي ضعف طول المربع.

١٥) مربع ومستطيل لهما نفس المحيط، إذا كان طول المستطيل $17m$ وعرضه $12m$. أوجد مساحة المربع.

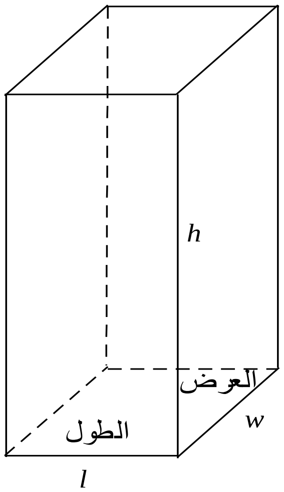
٢. الهندسة الفراغية

تعريفات :

- الأشكال المجسمة: وهي الأشكال التي لها ثلاثة أبعاد وهي الطول والعرض والارتفاع.
- المساحة الجانبية للجسم: وهي مجموع مساحات الأوجه الجانبية لكل جسم أو مساحة السطح الجانبي للجسم.
- المساحة السطحية (الكلية) للجسم: هي عبارة عن المساحة الجانبية للجسم مضافاً إليها مساحة قاعدتي الجسم إذا كان له قاعدتان أو مساحة قاعدة الجسم إذا كان له قاعدة وأحدة مثِّل المخروط.
- حجم الجسم: بصفة عامة حجم أي جسم هو مقدار ما يشغله هذا الجسم من الفراغ.

٢,١. متوازي المستطيلات :

هو جسم كل أوجهه مستطيلات و كل وجهين متقابلين منه متطابقان، ولمتوازي المستطيلات أبعاد ثلاثة: الطول l، والعرض w والارتفاع h.



- المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات:

$$A_T = 2(l \times w + l \times h + w \times h)$$

- حجم متوازي المستطيلات: $V = l \times w \times h$

مثال١٥: متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة هي $7cm, 9cm, 11cm$.

احسب مساحته الكلية وحجمه.

الحل:

المعطيات $w = 7, l = 9, \ h = 11$

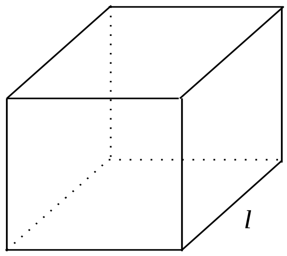
المساحة الكلية :

$$w + l \times h + w \times h) = 2(9 \times 7 + 9 \times 11 + 7 \times 11) = 2(63 + 99 + 77) = 478cm^2$$

الحجم:

$$V = l \times w \times h = 9 \times 7 \times 11 = 693cm^3$$

٢,٢. المكعب :



هو جسم له ستة أوجه متطابقة كل وجه منها عبارة عن مربع . وكل أحرف المكعب الجانبية متساوية وأي مربعين متقابلين فيه يسميان بقاعدتي المكعب.

إذا كان طول حرفالمكعب (ضلعه) l فإن

- مساحته الجانبية $A_l = 4l^2$
- مساحته السطحية $A_T = 6l^2$

حجمه: $V = l^3$

مثال ١٦:وعاء مكعب الشكل طول حرفه $7cm$. احسب كلاً من مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه.

الحل:

المساحة الجانبية للوعاء: $A_l = 4l^2 = 4(7)^2 = 196cm^2$

المساحة السطحية للوعاء: $A_T = 6l^2 = 6(7)^2 = 294cm^2$

حجم الوعاء: $V = l^3 = 7^3 = 343cm^3$

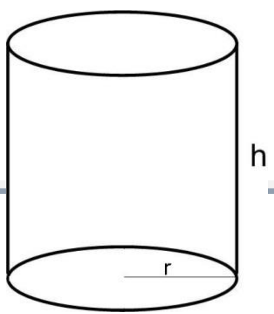
٣,٢. الأسطوانة :

وهي جسم له سطح منحني مغلق وقاعدتها عبارة عن دائرتين متطابقتين و متوازيتين.

و من الممكن الحصول على شكل الأسطوانة من دوران مستطيل حولأحد أضلاعه دورة كاملة.

ارتفاع الأسطوانة هو العمود الواصل بين مركزي دائرتي قاعدتي الأسطوانة.

- المساحة الكلية للأسطوانة :



المساحة الكلية للأسطوانة التي نصف قطرها r و ارتفاعها h هي:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$$

- حجم الأسطوانة :

حجم الأسطوانة التي نصف قطرها r هو: $v = \pi r^2 h$

مثال ١٧: أسطوانة نصف قطر قاعدتها $9cm$ و ارتفاعها $11cm$. أوجدكلاً من مساحتها الكلية و حجمها.

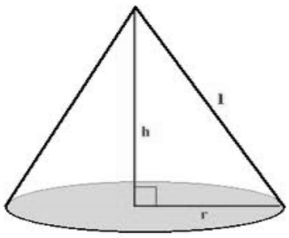
الحل:

المساحة الكلية للأسطوانة: $A = 2\pi r(r+h) = 2\times 3.14 \times 9 \times (9+11) = 1130.97\ cm^2$

حجم الأسطوانة: $v = \pi r^2 h = 3.14 \times (9)^2 \times 11 = 2797.74 cm^3$

٤,٢. المخروط :

وهو جسم يتألف من قاعدة وأحدة عبارة عن دائرة نصف قطرها r، ورأس واحد بعده العمودي عن القاعدةيُسمّى ارتفاع المخروط h. والمسافة بين الرأس وأي نقطة على محيط القاعدة تُسمى الارتفاع الجانبي l. الأطوال r,h,l هي أضلاع مثِّلث قائم الزاوية كما في الشكل :



- المساحة الجانبية للمخروط :

المساحة الجانبية للمخروط الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه hو ارتفاعه الجانبي l هي

$$A_l = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

- المساحة الكلية للمخروط :

المساحة الكلية للمخروط الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h هي:

$$A_T = \pi r l + \pi r^2$$

- حجم المخروط:

حجم المخروط الذي نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h يعطى بالقاعدة :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

مثال ١٨: مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $r=6cm$ وطول ارتفاعه $h=8cm$ احسب مساحته الجانبية والكلية وحجمه.

الحل:

المساحة الجانبية للمخروط: $A_l=\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\pi(6)\sqrt{6^2+8^2}\approx 188.4\,cm^2$

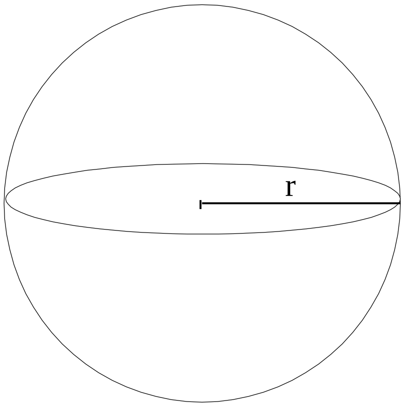
المساحة الكلية للمخروط: $A_T=\pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2=\pi(6)\sqrt{6^2+8^2}+\pi(6)^2\approx 301.44cm^2$

حجم المخروط:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\times 3.14\times(14)^2\times 11=2256.61cm^3$$

٢ . ٥ الكرة :

هي جسم ذات سطح منحني مغلق متماثل بحيث تكون كل نقطة من نقاط هذا السطح تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة داخل الكرة وتُسمى هذه النقطة بمركز الكرة.



- المساحة السطحية للكرة

المساحة السطحية لكرة نصف قطرها r هي:

$$A=4\pi r^2$$

- حجم الكرة

حجم الكرة التي نصف قطرها r هو:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

مثال ١٩: كرة نصف قطرها $17cm$. احسب كلاً من حجمها ومساحتها السطحية.

الحل:

المساحة السطحية للكرة :

$$A=4\pi r^2=4\times 3.14\times 17^2=3631.68\,cm^2$$

حجم الكرة:

$$A=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times 3.14\times(17)^3=2.57953cm^3$$

تمارين (٣ -٢)

١) بناء على شكل متوازي المستطيلات، طوله $17m$، وعرضه $13m$، وارتفاعه $8m$. ما مساحة قاعدة هذا البناء؟ وما حجمه؟

٢) كرة حديدية، حجمها $850cm^3$، رميناها في وعاء مملوء بالماء، فأزاحت كمية من الماء ، جمعناها في إناء بشكل متوازي المستطيلات، طول قاعدته $13cm$، وعرضها $11cm$.
إلى أي علو يرتفع الماء في هذا الإناء؟

٣) نريد صنع علبة من صفيحة معدنية الشكل، طولها $84cm$ وعرضها $25cm$، عند كل زاوية قصصنا مربعاً، طول ضلعه $5cm$، ثم طوينا الجوانب، ولحمناها. كم سعة العلبة الحاصلة؟

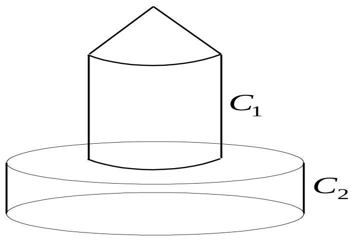
٤) وعاء على شكل مكعب طول ضلعه $19cm$ وضع به ماء إلى ارتفاع $9cm$ ثم أُلقي به حجر فزاد ارتفاع الماء إلى $13cm$. أوجد حجم الحجر.

٥) علبة من الصابون على شكل مكعب طول ضلعه $27cm$. كم علبة من الصابون يمكن وضعها في صندوق مكعب الشكل طول ضلعه $13m$إذا علمت أن $\frac{2}{17}$ الحجم مخصصة للتوضيب؟

٦) احسب حجم المخروط إذا كان نصف قطر قاعدته يساوي $13cm$ وطول ارتفاعه يساوي ضعف نصف قطر قاعدته.

٧) كرة واسطوانة لهما نفس الحجم. إذا كان نصف قطر الكرة يساوي $7cm$أوجد نصف قطر الأسطوانة إذا كان طول ارتفاعها يساوي $12cm$.

٨) قطعة معدنية مكونة من أسطوانتين C_1,C_2 فوقهما مخروط. إذا كان نصف قطر الأسطوانة C_2 ضعف نصف القطر C_1 والمخروط له نفس الارتفاع h ونفس نصف قطر الأسطوانة C_1. نسمي V_1 حجم الأسطوانة C_1 و V_2 حجم الأسطوانة C_2 و V_3 حجم المخروط. احسب طول ارتفاع الأسطوانة C_2 بدلالة hإذا علمت أن $V_2 = V_1 + V_3$.



التفاضل

الجدارة: معرفة مفهوم التفاضل وكيفية تفاضل الدوال المشهورة .

الأهداف:
بعد دراسة هذه الوحدة يكون للطالب القدرة على معرفة:

- المفهوم الرياضى للتفاضل.
- التفسير الهندسي للمشتقة.
- تفاضل الدوال الأساسية (كثيرات الحدود، والدوال المثِّلثية، والأسية واللوغارتمية).
- الاشتقاق الضمني والمشتقات من الرتب العليا .

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: إثنا عشر ساعة.

التفاضل

١. تعريف المشتقة :

ليكن I مجالاً من $\Re$، x_0 نقطة من I، $I \neq \{x_0\}$ و $f : I \to \Re$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي b بحيث

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$

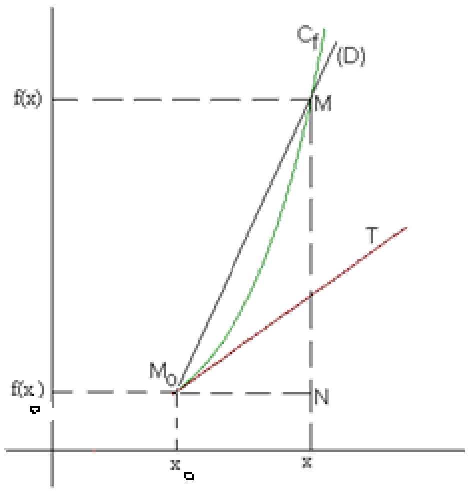
و تُسمى b مشتقة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$

و نقول عن f أنهاقابلة للاشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I وتُسمى الدالة

$$f' : I \to \Re \quad x \to f'(x)$$

بالمشتقة الأولى للدالة f

ملحوظة١: f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي b و تابع ε لمتغير حقيقي بحيث من أجل كل $(x_0 + h)$ يكون لدينا



$$f(x_0 + h) = f(x_0) + bh + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ملحوظة٢: $f'(x_0) \neq (f(x_0))'$

٢. التفسير الهندسي لمفهوم المشتقة

مشتقة f عند x_0 هو ميل المماس للمنحني C_f الممثِّل لـ f عندالنقطة M_0 ذات الإحداثية $(x_0, f(x_0))$

$$(D) \text{ ميل المستقيم } = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overline{NM}}{\overline{M_0 N}}$$

عندما يؤول x إلى x_0 نلاحظ أن المستقيم (D) يؤول إلى M_0T المماس لـ C_f عند M_0

٣. القوانين العامة للمشتقات :

القانون ١ : اشتقاق الدوال ذات الأس n

إذا كانت الدالة: $y = f(x) = x^n$

فإن $y' = nx^{n-1}$

مثال ٧:إذا كانت $y = x^3$

فإن $y' = 3x^{3-1} = 3x^2$

مثال ٨:إذا كانت $y = x^{-4}$

فإن $y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

ومنه فإن مشتقة $y = x$ تساوي العدد 1

لأن $y = x \Rightarrow y' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

القانون ٢ : مشتق الدالة الثابتة $y = c$ حيث c عدد حقيقي معلوم هو $y' = 0$

مثال ٩:إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$ و إذا كانت $y = -5$ فإن $y' = 0$

القانون ٣: مشتق الدالة $y = ax^n$ هو $y' = nax^{n-1}$

مثال ١٠:إذا كانت $y = 3x^6$

فإن $y' = 3 \times 6x^{6-1} = 18x^5$

مثال ١١:أوجد مشتقة الدالة $y = 5\sqrt[3]{x}$

الحل:

لدينا $y = 5\sqrt[3]{x} = 5(x)^{\frac{1}{3}}$

إذن $y' = \frac{1}{3} \times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

القانون ٤: مشتقة مجموع أو فوارق دوال

إذا كانت الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x)$ حيث $f_1, \ldots, f_n(x)$ دوال قابلة للاشتقاق فإن $F'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x_n)$

مثال ١٢:إذا كانت الدالة $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} = -12x^{-4} - 10x + 7$

القانون ٥: مشتقة جداء دالتين

إذا كانت الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x)=f_1(x).f_2(x)$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$. فإن $F'(x)=f_1'(x)f_2(x)+f_2'(x)f_1(x)$

مثال ١٣: إذا كانت الدالة $F(x)=(3x-2)(4x+1)$

فإن
$$F'(x)=3(4x+1)+4(3x-2)$$
$$=12x+3+12x-8=24x-5$$

القانون ٦: مشتقة قسمة دالتين

إذا كانت الدالة $F(x)$ تكتب على الشكل $F(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ حيث $f_1(x), f_2(x)$ قابلتين للاشتقاق على المجال I من $\Re$ و $f_2(x)\neq 0$ على المجال I من $\Re$. فإن
$$F'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2}$$

مثال ١٤: أوجد مشتقة الدالة $y=\dfrac{8x^7}{2x-1}$ حيث $x\neq\dfrac{1}{2}$

الحل:

لدينا $f_1(x)=8x^7 \Rightarrow f_1'(x)=7\times 8x^{7-1}=56x^6$ و
$$f_2(x)=2x-1\Rightarrow f_2'(x)=2$$

إذن
$$F'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_2'(x)f_1(x)}{(f_2(x))^2}=\frac{56x^6(2x-1)-2\times 8x^7}{(2x-1)^2}=\frac{56x^6(2x-1)-16x^7}{(2x-1)^2}$$
$$=\frac{112x^7-56x^6-16x^7}{(2x-1)^2}=\frac{96x^7-56x^6}{(2x-1)^2}=\frac{8x^6(12x-7)}{(2x-1)^2}$$

القانون ٧: مشتقة الدالة التي تكتب على الشكل $F(x)=(f(x))^n$

إذا كانت $F(x)=(f(x))^n$ حيث $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن
$$F'(x)=n(f(x))^{n-1}f'(x)$$

مثال ١٥: أوجد مشتقة الدالة $y=F(x)=4(2x^2+3x-2)^2$

الحل:

لدينا $f(x)=(2x^2+3x-2)\Rightarrow f'(x)=4x+3$

إذا $y'=F'(x)=2\times 4(2x^2+3x-2)^{2-1}(4x+3)=8(2x^2+3x-2)(4x+3)$

تمارين (٤-١)

أوجد المشتقة الأولى لما يلي:

1) $y=3x^5$	6) $y=(3x^2+7)(5x^3-2x^2+5)$	11) $y=\frac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}$	16) $y=\frac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$
2) $y=\frac{9}{x^7}$	7) $y=\frac{3x^2}{5x^2+7}$	12) $y=\left(\frac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$	17) $y=x^3(5x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$
3) $y=4\sqrt{x^3}$	8) $y=5(2x^4-1.9)^3$	13) $y=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1.8}}$	18) $y=2x^{-3}+7x^{-5}$
4) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$	9) $y=(2x^3-4x+7)^{-2}$	14) $y=x^2\sqrt{x-1}$	19) $y=(4x^2\sqrt{x^3})^{1/4}$
5) $y=7x^3+3x^2-9x+11$	10) $y=\frac{1.9}{(2x+4)^3}$	15) $y=\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$	20) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x^2+5}}$

الوحدة الرابعة

اسم الوحدة

٤. قواعد اشتقاق الدوال المثِّلثية:

١) إذا كانت الدالة $y=\sin u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sin u)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}\ \cos u$$

٢) إذا كانت الدالة $y=\cos u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\cos u)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}(-\sin u)$$

مثال ١٦:إذا كانت الدالة $y=\sin(2x^3-3)$

فإن $y'=3\times 2x^2\cos(2x^3-3)=6x^2\cos(2x^3-3)$

مثال١٧:أوجد مشتقة الدالة $y=\cos(2\theta^3-3\theta^{-2})$

الحل:

لدينا $u=2\theta^3-3\theta^{-2}\Rightarrow\dfrac{du}{d\theta}=6\theta^2+6\theta^{-3}$

إذن $y'=-(6\theta^2+6\theta^{-3})\sin(2\theta^3-3\theta^{-2})$

٣) إذا كانت الدالة $y=\tan u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\tan u)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}(\sec^2 u)$$

مثال ١٨:إذا كانت $y=\tan x^{-2}$ فأوجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل:

لدينا $u=x^{-2}\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=-2x^{-3}$

إذن $y'=\dfrac{d(\tan u)}{dx}=\dfrac{du}{dx}\sec^2 u=-2x^{-3}\sec^2 x^{-2}$

٤) إذا كانت الدالة $y=\cot u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$فإن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\cot u)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}(-\csc^2 u)$$

مثال ١٩: احسب مشتقة الدالة$y=\cot 3x$

الحل:

لدينا $u=3x\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=3$

ومنه فإن $y' = \dfrac{d(\cot u)}{dx} = -\dfrac{du}{dx}\csc^2 u = -3\csc^2 3x$

٥) إذا كانت الدالة $y = \sec u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\sec u)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}\tan u \sec u$$

مثال ٢٠: احسب مشتقة الدالة $y = \sec\theta^2$

الحل:

لدينا $u = \theta^2 \Rightarrow \dfrac{du}{d\theta} = 2\theta$

ومنه $y' = \dfrac{d(\sec u)}{d\theta} = \dfrac{du}{d\theta}\tan u \sec u = 2\theta\tan\theta^2\sec\theta^2$

٦) إذا كانت الدالة $y = \csc u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على المجال I من $\Re$ فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d(\csc u)}{du}\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u$$

مثال ٢١:احسب مشتقة الدالة $y = \csc x^3$

الحل:

لدينا $u = x^3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 3x^2$

ومنه $y' = \dfrac{d(\csc u)}{dx} = -\dfrac{du}{dx}\cot u \csc u = -3x^2\cot x^3\csc x^3$

مثال ٢٢: احسب مشتقة الدالة $y = \csc(2x^5 - 3)$

الحل:

لدينا $u = 2x^5 - 3 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 10x^4$

$$y' = \frac{d(\csc u)}{dx} = -\frac{du}{dx}\cot u \csc u = -10x^4\cot(2x^5-3)\csc(2x^5-3)$$

تمارين (٤ــ ٢)

احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \sin 3x^2$	5) $y = \sec(-7x^4)$	9) $y = \dfrac{\sin x^2}{\cos^2 x^2}$	13) $y = \sin(\cos 2x)$
2) $y = \tan(4x^3 + 5x - 7)$	6) $y = \sec(2x+1)^{\frac{5}{2}}$	10) $y = \sqrt{1+\cos^2 x}$	14) $y = \sqrt{1+\sin x}$
3) $y = \cos\dfrac{8}{x^3}$	7) $y = (\sin x - \cos x)^2$	11) $y = \dfrac{1}{x^2\sin^3 x}$	15) $y = x\cot(-4x)$

4) $y = \csc\sqrt{x^5}$	8) $y = (x^4 - \cot x)^3$	12) $y = \tan^2(x^2 + 1)$	16) $y = x \csc x$

٥. اشتقاق الدوال الأسيةواللوغاريتمية :

٥,١. قوانين اشتقاق الدوال الأسية :

القانون ١:إذا كانت لدينا الدالة $y = ba^u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق على مجالها فإن

$$\frac{dy}{dx} = (ba^u)(u')\ln a$$

مثال ٢٢: اشتق الدالة المعرفة كما يلي: $y = 8\ 2^{\left(3x^2+4x+5\right)}$

الحل:

$$y' = (8\ 2^{3x^2+4x+5})(6x+4)\ln 2 = (48x+32)(2^{3x^2+4x+5})\ln 2$$

القانون ٢: اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي e $\left(e \cong 2{,}718\right)$

إذا كانت لدينا الدالة $y = b\ e^u$ حيث u دالةفي x قابلة للاشتقاق على مجالها فإن

$$y' = \frac{dy}{dt} = b e^u u'$$

مثال ٢٣: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 8\ e^{2x+1}$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي: $y' = 8 \times 2 e^{2x+1} = 16e^{2x+1}$

مثال ٢٤:إذا كانت $y = -5\ e^{\sin x}$

فإن $y' = -5\ \cos x\, e^{\sin x}$

٥,٢. قوانين اشتقاق الدوال اللوغاريتمية :

القانون ١:إذا كانت لدينا الدالة $y = b\log_a u$ حيث $a > 0, a \neq 1$ وإذا كانت u دالةفي x قابلة للاشتقاق على مجالها

فإن المشتقة الأولى تعطى كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = b\frac{u'}{u\ln a}$$

مثال٢٥: احسب المشتقة الأولى للدالة التالية: $y = 3\log_5\left(6x^5\right)$

الحل:

المشتقة الأولى للدالة السابقة يعطى كما يلي : $y' = \frac{3\left(30x^4\right)}{6x^5\ln 5} = \frac{15x^4}{x^5\ln 5} = \frac{15}{x\ln 5}$

القانون ٢:إذا كانت لدينا الدالة $y = \ln u$ حيث u دالةفي x قابلة للاشتقاق على مجالها فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}$$

مثال ٢٦: اشتق الدالة التالية: $y = \ln x^2$

الحل:

$$y' = \frac{2x}{x^2}$$

$$y' = \frac{2}{x}$$

تمارين (٤– ٣)

احسب المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = \log_3\left(3x^2 - 5\right)$	5) $y = \ln \dfrac{x^4}{(3x-4)^2}$	9) $y = e^{x^2}$	13) $y = e^{-x} \ln x$
2) $y = \ln(x+3)^2$	6) $f(x) = \ln \sin 3x$	10) $y = 5^{3x^2}$	14) $y = e^{-2x} \sin 3x$
3) $y = \ln^2(x+3)$	7) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	11) $y = x^2 3^x$	15) $f(x) = \ln \tan e^{x^2}$
4) $y = \ln\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)$	8) $y = e^{-\frac{1}{2}x}$	12) $y = 5e^{\sin 2x} - x$	16) $f(x) = \ln \sqrt{1-2x}$

٦ . الاشتقاق الضمني :

تُعرف الدالة في بعض الحالات بمعادلة من الشكل $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y

مثال٢٧: في المعادلة $xy=1$ احسب $\frac{dy}{dx}$

الحل : $xy=1 \quad \rightarrow (1)$

إحدى الطرق لحساب المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ هي كتابة المعادلة على الصورة:

$$y=\frac{1}{x} \qquad \rightarrow (2)$$

ومنه يمكن حساب المشتقة كما يلي: $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]=-\frac{1}{x^2}$

كما أنه يوجد إمكانية أخرى وذلك باشتقاق طرفي المعادلة (1) قبل كتابة y بدلالة دالة في المتغير x ، باعتبارها دالة قابلة للاشتقاق(وإن كان ليس دائما هو الحال)، ومنه فإن:

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(1)\Rightarrow x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)=0\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=0$$

ثم نستخرج $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x,y $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

نعوض (2) في العبارة الأخيرة فنحصل على: $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$

- الطريقة الثانية لحساب المشتقة تُسمى بالاشتقاق الضمني وتُستعمل في حساب مشتقة دالة معرفة بشكل ضمني بمعادلة من الشكل: $f(x,y)=0$

دون حل هذه المعادلة وذلك باشتقاق طرفي هذه المعادلة ثم نستخرج قيمة المشتقة y' بدلالة x,y

- ويستعمل الاشتقاق الضمني خاصة عندما يصعب أو لا يمكن كتابة y بدلالة المتغير x وعندها نكتفي في حساب المشتقة y' بكتابة عبارتها بدلالة x,y

قاعدة :

إذا كانت المعادلة $f(x,y)=0$ تحتوي المتغير x وقيمة الدالة y فإن اشتقاق y^n بالنسبة لـx يعطى بما يلي:

$$\frac{d(y^n)}{dx}=ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}y'$$

إننا اشتققنا y ضمنياً بالنسبة لـx و ذلك باعتبار y دالة في x معرفة بشكل ضمني بالمعادلة المعطاة $f(x,y)=0$

مثال٢٨:أوجد $\frac{dy}{dx}$ في ما يلي :

$$xy^3-3x^2=xy+5 \qquad (1)$$

الحل:

نشتق طرفي المعادلة (1) فنحصل على:

$$y^3+3xy^2y'-6x=y+xy'$$
$$\Rightarrow 3xy^2y'-xy'=y-y^3+6x$$
$$\Rightarrow y'\left[x(3y^2-1)\right]=y-y^3+6x$$
$$\Rightarrow y'=\frac{y-y^3+6x}{x(3y^2-1)}$$

مثال٢٩: ليكن $x^2-2xy+y^2=0$ أوجد المشتقة الأولى y'

الحل:

نشتق طرفي المعادلة المعطاة فنحصل على:

$$\frac{d}{dx}(x^2-2xy+y^2)=\frac{d}{dx}(0)$$
$$\Rightarrow 2x-2y-2xy'+2yy'=0$$
$$\Rightarrow y'(2y-2x)=2y-2x \Rightarrow y'=\frac{2y-2x}{2y-2x}=1$$

مثال٣٠: استخدم الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة الأولى فيما يلي:

$$1)\ \ 5y^2+\sin y=x^2,\quad 2)\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1,\quad 3)x^2=\frac{x+y}{x-y}\quad 4)x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-y=1$$

الحل :

1) نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x فنحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[5y^2+\sin y\right]=\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\Rightarrow 10yy'+y'\cos y=2x$$

ومنه فإن $(10y+\cos y)y'=2x$

وبالتالي فإنه يمكن كتابة المشتقة الأولى y' بدلالة x,y

$$y'=\frac{2x}{10y+\cos y}$$

وباتباع نفس الخطوات السابقة يكون لدينا ما يلي:

$$2)\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right]=\frac{d}{dx}(1)\ \ \Rightarrow -y^{-2}y'-x^{-2}=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x^{-2}}{y^{-2}}=-\frac{y^2}{x^2}$$

$$3)\ \frac{d}{dx}\left[x^2\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{x+y}{x-y}\right]\Rightarrow 2x=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(x-y+x+y)+x-y-x-y$$

$$\Rightarrow 2x(x-y)^2=y'(2x)-2y$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2x(x-y)^2+2y}{2x}\Rightarrow y'=(x-y)^2+\frac{y}{x}$$

$$(4)\ x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} - y = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' - y' = 0$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} + 1\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} + 1\right)}$$

يمكن استخدام الاشتقاق الضمني لحساب المشتقة لدوال لم نتطرق إليها من قبل أو يصعب معرفة قانون المشتقة لها كما هو موضح في المثال التالي:.

مثال ٣١ :أوجد y' إذا كان $y = x^x$

الحل:

لدينا $y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$

نشتق الطرفين فنحصل على:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$$

نعوض قيمة $y = x^x$ إذن يصبح لدينا $y' = x^x(\ln x + 1)$

تمارين (٤-٤)

تمرين ١ :احسب ضمنياً المشتقة الأولى للدوال التالية :

$1)\ xy + e^{xy} - y^3\sin x = y^3 + 9x \qquad 7)\ x^2 = \dfrac{\cot y}{1 + \csc y}$

$2)\ 3x^2y^2+4xy-2y=0$

$3)\ x^3y^2-5x^2y+x=13$

$4)\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$

$5)\ (x^2+3y^2)^3=x$

$6)\ xy^{2/3}+yx^{2/3}=x^2$

$8)\ \tan^3(xy^2+y)=x$

$9)\ 3x^2-4y^2=7$

$10)\ y^3\sin x-x^2=y^3e^{2x}$

$11)\ y+\sin y=x$

$12)\ x\cos y=y$

تمرين ٢: احسب ميل المماس لمنحنى الدوال التالية عند النقاط المعطاة:

$2)\ x^{2/3}-y^{2/3}-y=1\ ;\ (1,-1)$	$1)\ x^2y-5xy^2+6=0\ ;\ (3,1)$
$4)\ \frac{1-y}{1+y}=x\ ;\ (0,1)$	$3)\ y^2-x+1=0\ ;\ (10,3)$

٧. المشتقات من الرتبة العليا

تعريف:

تعرف المشتقة من الرتبة n للدالة $f(x)$ على أنها المشتقة الأولى للمشتقة $(n-1)$ للدالة $f(x)$ بشرط أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق n من المرات

فمثِلاً المشتقة السابعة هي المشتقة الأولى للمشتقة السادسة ولذلك لإيجاد المشتقة من الرتبة n نبدأ بالدالة فنحسب المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة....ثم المشتقة من الرتبة $n-1$ ثم المشتقة من الرتبة n

إذا كانت $y=f(x)$ حيث y دالة في x و لنفرض أن f قابلة لاشتقاق n من المرات على المجال $I\subset\Re$.

فيكون لدينا التعريفات الآتية:

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} = f'(x)$ (المشتقة الأولى لـ y بالنسبة لـ x)

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(f'(x))}{dx} = f''(x)$ (المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x)

$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(f''(x))}{dx} = f'''(x)$ (المشتقة الثالثة لـ y بالنسبة لـ x)

$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d(f'''(x))}{dx} = f^{(4)}(x)$ (للمشتقة الرابعة لـy بالنسبة لـx)

. . . .

. . . .

$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d(f^{(n-1)}(x))}{dx} = f^{(n)}(x)$ (للمشتقة n لـ y بالنسبة لـ x)

مثال٣٢ :أوجد المشتقة الثانية للدالة $y = \sin x$

الحل:

$$y' = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

$$y'' = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

مثال ٣٣ :أوجد $\frac{d^3y}{dx^3}$ (المشتقة الثالثة) إذا كانت $y = 6x^5$

الحل:

$$y' = \frac{d}{dx}(6x^5) = 5\times 6x^4 = 30x^4$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(30x^4) = 4\times 30x^3 = 120x^3$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(120x^3) = 3\times 120x^2 = 360x^2$$

قاعدة:إذاكان y كثيرة حدود من الدرجة n فإن المشتقة من الدرجة $n+1$ تساوي الصفر.

مثال ٣٤:أوجد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5 + 3x^3 + 5x - 1$

الحل:

بما أن y كثيرة حدود من الدرجة الخامسة إذن $y^{(6)} = 0$

مثال ٣٥:إذا كانت $y = e^{-x}\ln x$ فأوجد y''

الحل:

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x}\ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

مثال٣٦:إذا كانت $y = e^{-x}\ln x^2$ فأوجد y''

الحل: لدينا $y = e^{-x}\ln x^2 = 2e^{-x}\ln x$

ومنه ومن المثال السابق فإن $y'' = -2e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$

مثال ٣٧:إذا كانت $y = e^{-2x}\sin 3x$ فأوجد y''

الحل

$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x = 3e^{-2x}\cos 3x - 2y$$

$$\begin{aligned} y'' &= 3e^{-2x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3\cos 3x\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right) - 2y' \\ &= -9e^{-2x}\sin 3x - 6e^{-2x}\cos 3x - 2\left(3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x\right) \\ &= -e^{-2x}(12\cos 3x + 5\sin 3x) \end{aligned}$$

مثال٢٨: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث أن المسافة (s) بالمتر m عند الزمن (t) بالثانية تعطى بالمعادلة　　$s = t^3 - 2t$

١) أوجد السرعة الآنية عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٢)أوجد التسارع الآني عند اللحظة t تساوي ٤ ثواني

٣)أوجد الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\,m/\sec^2$

الحل :

١)　السرعة الآنية هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2$ هي السرعة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

السرعة بعد 4 ثواني $\frac{ds(4)}{dt} = \left(3t^2 - 2\right)|_{t=4} = 3\left(4^2\right) - 2 = 46\,m/\sec$

٢) العجلة (التسارع) هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن

إذن $\frac{d^2s}{dt^2}=6t$ العجلة بعد الزمن (t) ثانية أو عند الزمن (t) من بداية الحركة

التسارع بعد 4 ثواني

$$\frac{d^2s}{dt^2}\Big|_{t=4}=6t\Big|_{t=4}=6\times 4=24\,m/\sec^2$$

٣) الزمن اللازم عندما يكون التسارع يساوي $2\,m/\sec^2$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=6t=2\Rightarrow t=\frac{1}{3}\sec$$

تمارين (٤-٥)

تمرين ١:أوجد المشتقة المشار إليها للدوال التالية:

1) $y=3x^2-2x^3;\quad y''$

2) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\ ;\ y''$

3) $y=7+6x^2-4x^4;\ y'''$

4) $y=8x^3-2x^4;\ y'''$

5) $y=x(x-1)^3;y''$

6) $y=e^{-2x}(\cos 3x-\sin 2x);\ y''$

7) $y=3x^5-10x^3+15x\ ;\ \frac{d^6y}{dx^6}$

8) $y=\frac{x}{x-4}\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2}$

9) $y=\frac{2x}{x^2+1}\ ;y''$

10) $y=\frac{1}{x-2}+\frac{x}{4};\ \frac{d^3y}{dx^3}$

11) $y=\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}\ ;y''$

12) $y=(1+x^2)\ln x\ ;y''$

تمرين ٢: احسب المشتقة الثانية للدوال التالية عند النقاط المشار إليها:

$1)\ f(x)=8x^{10}+2x^{8}-4x^{5}+1\,;x=1$ $\qquad 3)\ f(x)=\dfrac{4x^2}{3x-7}\ ;\ x=2$

$2)\ f(x)=\sqrt{4-x+2x^4}\ ;\ x=1$ $\qquad 4)\ f(x)=2x^2\sqrt{2x^4+3}\ ;\ x=-1$

تمرين ٣: تعطى معادلة المسافة $s(km)$ بدلالة الزمن $t(h)$ أوجد السرعة والتسارع عند الزمن المشار إليه

$1)\ s=(2t^2-3)^4\,;t=2h$ $\qquad 4)\ s=\dfrac{t}{2t^2-3}\ ;\ t=4h$

$2)\ s=\sqrt{3.4-t^4}\ ;t=1h$ $\qquad 5)\ s=(2t+7)\sqrt{t^3-1}\ ;\ t=2h$

$3)\ s=t^2\sqrt{1+t^2}\ ;t=1h$ $\qquad 6)\ s=1.8t^3-2.9t^2-1\,;t=3h$

الوحدة الخامسة

مقدمة في الإحصاء

مقدمة في الإحصاء

الجدارة: معرفة مبادئ الإحصاء والقدرة على ترتيب البيانات الإحصائية وتمثيلها وحساب بعض القيم المتعلقة بها .

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- عرض البيانات في جداول تكرارية .
- تمثيل البيانات باستخدام رسومات الإحصائية .
- حساب المتوسط والوسيط والمنوال لعينة ما.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: عشر ساعات .

مقدمة في علم الإحصاء

١ـ تعريف علم الإحصاء :

هو مجموعة النظريات والطرق العلمية التي تبحث في جمع البيانات وعرضها وتحليلها، واستخدام النتائج في التنبؤ أو التقرير واتخاذ القرار .

٢- الطريقة الإحصائية :

أ- جمع البيانات .
ب- عرض البيانات .
ت- تحليل البيانات .
ث- النتائج واتخاذ القرار .

٣- مصادر جمع البيانات:

أ- **مصدر مباشر**: النزول إلى الميدان وجمع البيانات مباشرة .
ب- **مصدر غير مباشر** : ويندرج تحت هذا المصدر كل مما يلي :
- السجلات أو الوثائق التاريخية
- الاستبيان وهو: مجموعة أوراق تحوى بيانات تملأ من قبل كل فرد من عينة البحث .
- المقابلات الشخصية .
- الاختبارات الخاصة ،مثِّل اختبارات قياس الذكاء وغيره .

٤- طرق جمع البيانات :

أ- **المسح الشامل** : وهو جمع البيانات من جميع عناصر المجتمع الإحصائي. تمتاز هذه الطريقة بالدقة العالية رغم سلبياتها المتمثِّلة في ارتفاع التكاليف والحاجة إلى الوقت والجهد .
ب- **العينة** : وهي أخذ جزء من المجتمع الكلى موضوع الدراسة ويجب أن تمثِّلهذه العينة مجتمع الدراسة تمثيلا صادقاً .

ملحوظة:

مجتمع الدراسة يُقسَّم إلى قسمين هما مجتمع الهدف وهوكل المجموعة موضوع الدراسة ومجتمع العينة وهو مجموعة جزئية من مجتمع الهدف

تمارين (٥ -١)

١- عرف علم الإحصاء .

٢- اذكر أهم المصادر غير المباشرة لجمع البيانات .

٣- ما أهم مميزات وسلبيات جمع البيانات عن طريق المسح الشامل؟

وصف البيانات

بعد جمع البيانات ومراجعتها يجب أن تعرض بطريقة يسهل فهمها وتحليلها باستخدام الجداول التكرارية أو على شكل رسوم بيانية • وسنعرض فيما يلي كيفية وضع البيانات الاحصائية في جداول تكرارية حسب طبيعة البيانات .

١-البيانات الوصفية (أو النوعية) :

وهي البيانات التي لا يمكن التعبير عن مفرداتها بأرقام عددية مثِّل الصفات مثِّل (أمي –يقرأ ويكتب –يحمل مؤهل ثانوي ......) او التقديرات في الاختبارات (ممتاز –جيد جدا –جيد........) يمكن وضع هذه البيانات في جداول تكرارية توضح عدد المفردات المناظرة لكل صفة من هذه الصفات .

طريقة وضع البيانات في جدول تكراري تتلخص فيما يلي :

١- نرسم جدول من ثلاثة أعمدة بحيث يحتوي العمود الأول على الصفات والعمود الثاني على العلامات والعمود الثالث يحتوي على عدد المفردات (التكرار) .

٢- نقوم بتفريغ البيانات في الجدول وذلك بان نقرأ الصفات ونضع في خانة العلامات خطا مائلاً (/) امام كل صفة في الجدول كلما ظهرت تلك الصفة وفي حالة الحصول على أربعة خطوط (////) يكون الخامس في الاتجاه الآخر (~~////~~)

٣- عند الفراغ من خانة العلامات نضع عدد العلامات في العمود الثالث والتي تُسمى بالتكرارات .

٤-يمكن اختصار الجدول التكراري في صورته النهائية بأخذ العمود الأول والثالث

مثال ١: البيانات التالية توضح تقديرات ٢٥ متدرباً في الاختبار النهائي ٠مثِّل البيانات باستخدام جدول تكراري :

ممتاز، جيدجدا، جيد، راسب، مقبول، راسب ، راسب،
مقبول، ممتاز، جدجدا، جيدجدا، جيد، مقبول، جيد،
مقبول، جيدجدا، ممتاز، مقبول، جيدجدا، جيد، جيدجدا،

الحل

التقدير	العلامات	التكرار
ممتاز	///	3
جيدجدا	~~////~~ /	6
جيد	~~////~~ /	6
مقبول	~~////~~ /	6
راسب	////	4
المجموع		25

جدول(٢)

التقدير	التكرار
ممتاز	3
جيدجدا	6
جيد	6
مقبول	6
راسب	4
المجموع	25

جدول(١)

٢-البيانات الكمية (العددية) :

وهي البيانات التي يمكن التعبير عن مفرداتها بقيم عددية مثِّل الدرجات والأعمار والدخل والأوزان ....

لوضع البيانات الكمية في جداول التوزيع التكراري نقسم البيانات الى فترات متساوية الطول تُسمى عادةًفئات ولتحديد طول الفئة يجب مراعاة مايلي:

- تحديد المدى المطلق الذى تنتشر فيه البيانات وذلك بتحديد أعلى قراءة وأقل قراءة وأخذ الفرق بينهما .
- اختيار عدد مناسب من الفئات .
- يجب أن يكون طول الفئة مناسباً أي أن لا يكون صغيراً جداً ولا كبيراً جداً

مثال ٢ : البيانات التالية توضح الأجر اليومي بالريال لثلاثين عاملا في أحد المصانع . انشئ جدول تكراري لهذه البيانات

75	90	85	65	55	100	108	95	85	70
100	50	95	94	72	97	82	66	105	50
83	65	71	74	86	50	77	87	99	100

الحل:إنشاء جدول التفريغ باتباع الخطوات التالية :

١- تحديد المدى المطلق وهو يساوى الفرق بين أكبر قراءة وأقل قراءة

المدى المطلق $= 108 - 50 = 58$

٢- اختيار الطول المناسب ويمكن ان يكون 10 ريالات

٣- تحديد الفئات وتكون كما يلي

الفئة الأولى $50 \le x < 60$ وتكتب $50-$

الفئة الثانية $60 \le x < 70$ وتكتب $60-$

وهكذا إلى أن نصل للفئة الأخيرة وهي $100 \le x < 110$وتكتب $100-$

وبالتالي يمكن تفريغ البيانات السابقة في جدول باستخدام العلامات كما ورد في المثال السابق (جدول٣) ومن ثم يمكن اختصار الجدول التكراريبأخذالعمود الأول والثالث (جدول٤)

الفئة	العلامة	التكرار
$50-$	////	4
$60-$	///	3
$70-$	/ ~~////~~	6
$80-$	/ ~~////~~	6
$90-$	/ ////	6
$100-$	////	5
المجموع		30

جدول (٣)

الفئة	$50-$	$60-$	$70-$	$80-$	$90-$	$100-$	المجموع
التكرار	4	3	6	6	6	5	30

جدول (٤)

$50 \le x < 60$ العدد50 هو الحد الأدنى و60 هو الحد الأعلى

هنالك نوعان من الجداول التكرارية المتجمعة وهما الجدول التكراري المتجمع الصاعد والجدول التكراري المتجمع النازل .

في المثال(٢) الجدول الذى ينشأ عن عدد العمال الذين يتقاضون أجراً أقل من الحدود العليا للفئات يُسمّى الجدول التكراري المتجمع الصاعد والجدول الذى ينشأ من عدد العمال الذين يتقاضون أجراً اكبر من الحدود الدنيا للفئات يُسمّى الجدول التكراري المتجمع النازل .

مثال٣ :

إذا كان الجدول التالي يبين الدخل اليومي لعينة مكونة من 40 عاملا في أحد المصانع

الفئة	60 –	70 –	80 –	90 –	100 –	المجموع
التكرار	5	8	10	11	6	40

أوجد الجدول التكراري المتجمع الصاعد والجدول التكراري المتجمع النازل

الحل :

الجدول التكراري المتجمع الصاعد الجدول التكراري المتجمع النازل

حدود الفئات العليا	التكرار
اقل من 70	5
اقل من 80	13
اقل من90	23
اقل من 100	34
اقل من 110	40

حدود الفئات الدنيا	التكرار
60 فأكثر	40
70 فأكثر	35
80 فأكثر	27
90 فأكثر	17
100 فأكثر	6

تمارين (٥ – ٢)

١- سجَّل باحث تخصصات ثلاثين متدرباً في كلية هندسة فكانت كما يلي :

مدنية	كهربائية	كهربائية	مدنية	الكترونية	ميكانيكا
كهربائية	الكترونية	مدنية	كهربائية	ميكانيكا	مدنية
ميكانيكا	كهربائية	الكترونية	الكترونية	مدنية	الكترونية
مدنية	كهربائية	الكترونية	الكترونية	كهربائية	مدنية
كهربائية	ميكانيكا	مدنية	ميكانيكا	مدنية	كهربائية

مثِّل البيانات باستخدام جدول تكراري .

٢-البيانات التالية تمثِّل أعمار أربعين موظفاً في إحدى الشركات ، مثِّل هذه البيانات باستخدام جدول تكراري

41	50	37	25	29	33	39	42	28	31
31	23	38	45	23	41	39	32	27	30
21	24	37	27	29	43	33	23	25	31
40	32	22	39	35	31	23	44	51	47

٣-الجدول التالي يمثِّل درجات 50متدرباً في مادة اللغة الإنجليزية :

الفئة	40 –	50 –	60 –	70 –	80 –	90 –	المجموع
التكرار	3	6	11	13	9	8	50

أ- أنشئ الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

ب- أنشئ الجدول التكراري المتجمع النازل .

الرسومات الإحصائية

تطرقنا فيما سبق لكيفية تنظيم وتلخيص البيانات الإحصائية باستخدام الجداول التكرارية المختلفة وسنعرض هنا كيفية استخدام الرسومات في تبسيط عرض البيانات الإحصائية .

من أهم طرق عرض البيانات الإحصائية :

١- الأعمدة البيانية
٢- القطاعات الدائرية
٣-المدرج التكراري
٤- المضلع التكراري
٥- المنحنى التكراري
٦- المنحنيات المتجمعة (الصاعدة والنازلة)

١-الأعمدة البيانية :

تُستخدم الأعمدة البيانية غالباً لتمثيل البيانات الوصفية (تستخدم أحياناً للمقارنة بين ظاهرة في مجتمعين مختلفين) ٠

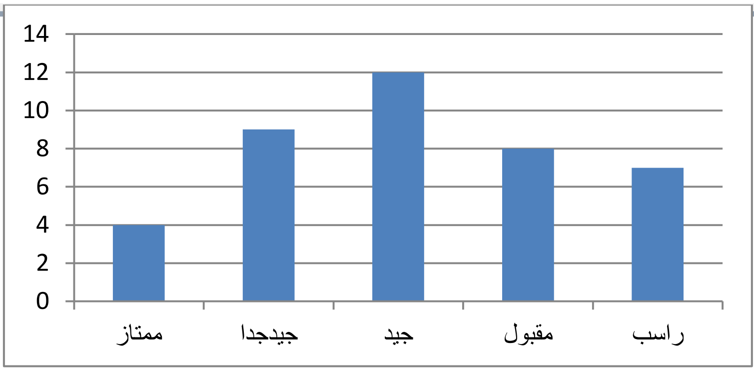
خطوات رسم الأعمدة البيانية:

- رسم محورين متعامدين بحيث تكون الصفات على المحور الأفقي والتكرار على المحور الرأسي .
- رسم مستطيل على كل صفة طوله يساوى تكرار تلك الصفة .

مثال ٤ : الجدول التالي يمثِّل تقديرات 40 متدربا في مادة الرياضيات

التقدير	ممتاز	جيدجدا	جيد	مقبول	راسب	المجموع
التكرار	4	9	12	8	7	40

مثِّل البيانات اعلاه باستخدام الأعمدة



٢- القطاعات الدائرية

تُستخدم القطاعات الدائرية غالباً لتمثيل البيانات الوصفية، وتستخدم فيها دائرة تقسم إلى قطاعات دائرية بحيث يكون كل قطاع دائرى يمثِّل جزء من البيانات، وتتناسب زاوية هذا القطاع مع تكرار الجزء الذى يمثِّله من البيانات.

خطوات رسم القطاعات الدائرية :

- تحديد زاوية كل قطاع باستخدام العلاقة

زاوية القطاع = (تكرار الجزء الممثِّل للقطاع ÷ مجموع التكرار) × 360°

- رسم دائرة ذات مساحة معقولة .
- رسم الزوايا وتحديد القطاعات .

مثال ٥ :

مثِّل البيانات في (مثال ٤) باستخدام القطاعات الدائرية .

الحل :

نبدأ بتحديد زاوية كل قطاع

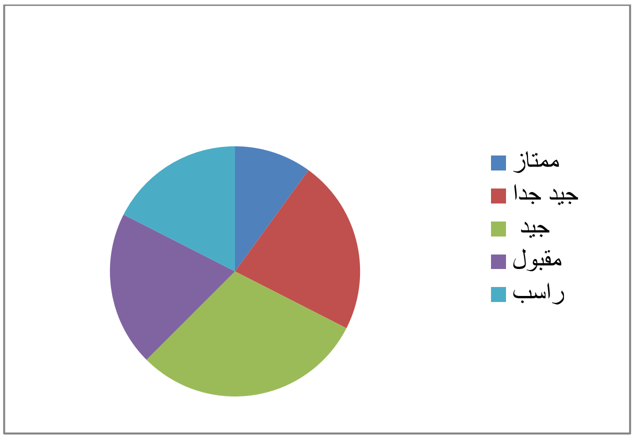
زاوية ممتاز = $\frac{4}{40}\times 360 = 36^\circ$

زاوية جيد جدا = $\frac{9}{40}\times 360 = 81^\circ$

زاوية جيد = $\frac{12}{40}\times 360 = 108^\circ$

زاوية مقبول = $\frac{8}{40}\times 360 = 72^\circ$

زاوية راسب = $\frac{7}{40}\times 360 = 63^\circ$



٣- المدرج التكراري :

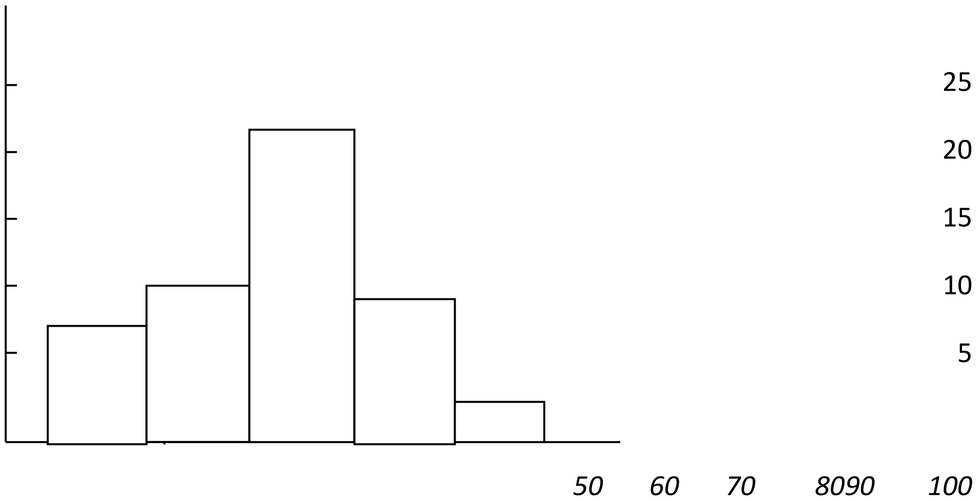
وهو يُستخدم للبيانات الكمية الممثِّلة بالفئات. نستخدم محورين متعامدين . المحور الأفقي للفئات(غالباً) والمحور الرأسي للتكرار ٠ تمثِّل البيانات بمستطيلات متلاصقة قاعدة كل مستطيل منها طول فئة وارتفاعه طول تلك الفئة

مثال ٦:

الجدول التالي يمثِّل أوزان 50 متدربا بالكيلوجرام٠ مثِّل البيانات باستخدام المدرج التكراري

الفئة	50 –	60 –	70 –	80 –	90 –	المجموع
التكرار	7	10	23	8	2	50

الحل :



٤-المضلع التكراري :

يُستخدم في تمثيل البيانات الكمية الممثِّلة بالفئات .

خطوات رسم المضلع التكراري :

- رسم محورين متعامدين بحيث يكون الأفقي للفئات والرأسي للتكرار .
- تحدد مراكز الفئات

  مركز الفئة = (الحد الأدنى + الحد الأعلى)÷2
- تُمثِّل كل فئة بنقطة إحداثيها(السينيx) هو مركز الفئة و (الصاديy) هو تكرار تلك الفئة .
- توصل تلك النقاط بخطوط مستقيمة .

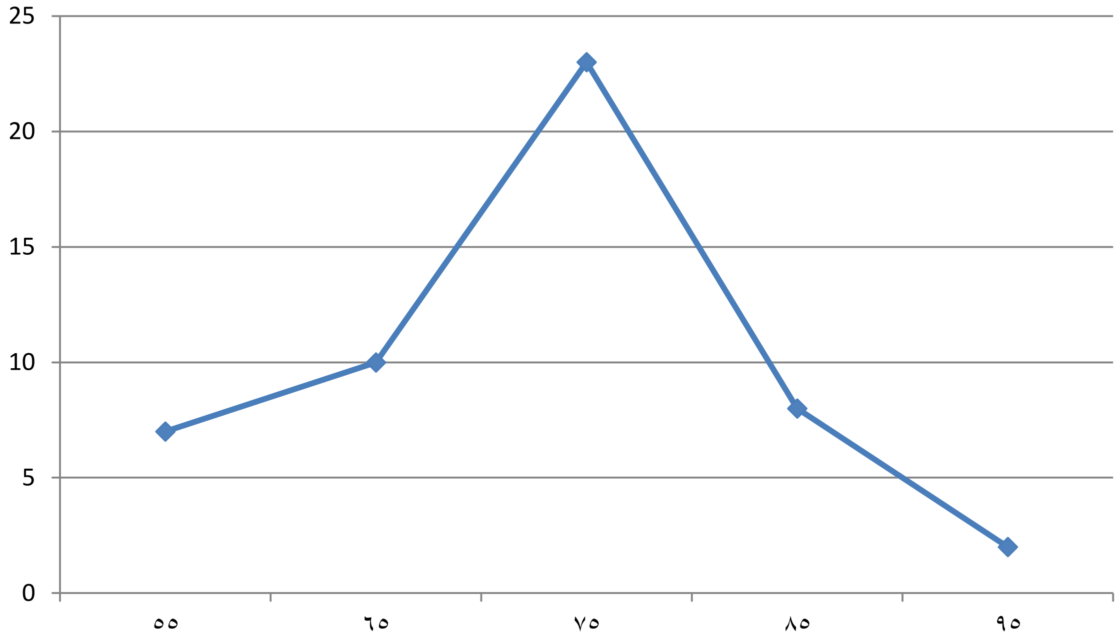
مثال ٧ :

مثِّل البيانات في (مثال ٦) باستخدام المضلع التكراري

الحل :

أولاً نجد مراكز الفئات

الفئة	التكرار	مركز الفئة
50 –	7	55
60 –	10	65
70 –	23	75
80 –	8	85
90 –	2	95



٥-المنحنى التكراري :

يُستخدم في تمثيل البياناتالكمية الممثِّلة بالفئات، وخطوات رسمه هي نفس خطوات رسم المضلع التكراري غير أنه يتم توصيل النقاط بمنحى انسيابي باليد (دون استخدام المسطرة) .

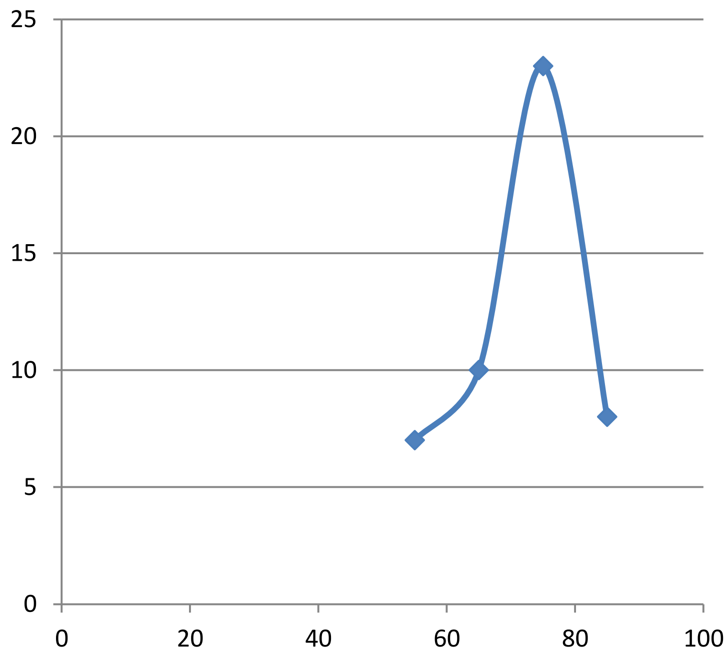
مثال ٨ :

مثِّل البيانات في (مثال ٦) باستخدام المنحنى التكراري

الحل :

أولاً نجد مراكز الفئات

الفئة	التكرار	مركز الفئة
50 –	7	55
60 –	10	65
70 –	23	75
80 –	8	85
90 –	2	95



٦-المنحنى المتجمع :

يُستخدم لرسم الجداول التكرارية المتجمعة الصاعدة والمتجمعة النازلة٠

خطوات رسم المنحنى المتجمع :

- رسم محورين متعامدين بحيث يكون الأفقي للفئات والرأسي للتكرار .
- تحدد النقاط .
- توصل النقاط بمنحنى انسيابي باليد .

مثال ٩ :ارسم المنحنى المتجمع الصاعدوالمنحنى المتجمع النازل لبيانات الجدول التكراري في (مثال ٦) .

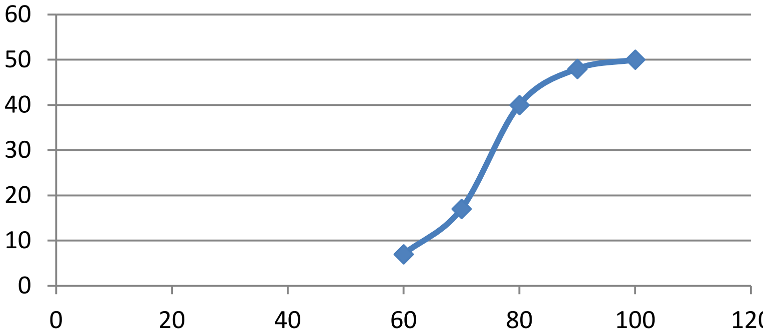
الحل :أولاً: ننشئ الجدولين المتجمع الصاعدوالمتجمع النازل .

ثانياً : نرسم المنحنيين .

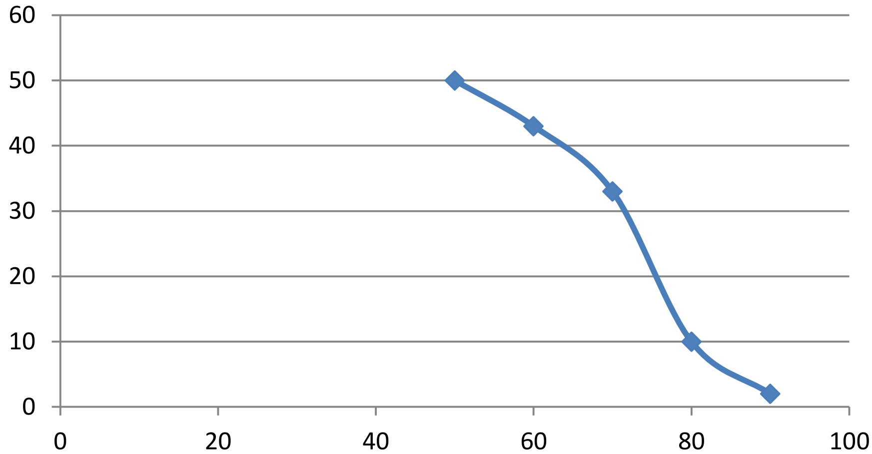
الجدول التكراري المتجمع الصاعد

حدود الفئات العليا	التكرار
اقل من 60	7
اقل من 70	17
اقل من80	40
اقل من 90	48
اقل من 100	50

المنحنى المتجمع الصاعد



المنحنى المتجمع النازل



حدود الفئات الدنيا	التكرار
50 فأكثر	50
60 فأكثر	43
70 فأكثر	33
80 فأكثر	10
90 فأكثر	2

١- الجدول التالي يوضح تق

الصفة	ممتاز	جيدجدا	جيد	مقبول	راسب	المجموع
التكرار	6	8	13	9	4	40

مثِّل البيانات باستخدام:

أ- الأعمدة البيانية ب- القطاعات الدائرية .

٢-الجدول التالي يوضح أوزان 30 جندياً :

الفئة	60 –	70 –	80 –	90 –	المجموع
التكرار	8	10	7	5	30

مثِّل البينات باستخدام كل من :

أ-المدرجات التكرارية ب - المضلع التكراري جـ -المنحنى التكراري
د-المنحنى المتجمع الصاعد هـ - المنحنى المتجمع النازل

مقاييس النزعة المركزية

في دراسة وتحليل مجموعة من البيانات الإحصائية يكون الباحث مهتماً بالحصول على مجموعة من الملاحظات ، ولتبسيط الأمر من الأفضل الحصول على قيمة وأحدة توضح صورة عامة عن هذه البيانات وتكون ممثَّلة لها وتُسمى هذه القيمة مقياس النزعة المركزية .

هنالك عدة مقاييس للنزعة المركزية سنتناول منها الوسط الحسابي والوسيط والمنوال

١ ٠ الوسط الحسابي:

الوسط الحسابي لمجموعة قيم هو القيمة التي لو حلت محل كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم مساويا لمجموع القيم الأصلية .

حساب الوسط الحسابي :

أ-البيانات غير المبوبة :

إذا كان لدينا n قيمة فأنه يمكن حساب الوسط الحسابي $\overline{X}$ كما يلي :

الوسط الحسابي $\overline{X}$ = مجموع القيم ÷ عدد القيم

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 .... + X_n}{n}$$

وباستخدام رمز المجموع $\sum$ يمكن كتابة الصيغة على النحو التالي :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

مثال ١٠:

القيم التالية توضح أوزان عشرة متدربينبالكيلوجرام أوجد الوسط الحسابي لها :

75, 70, 63, 58, 72, 57, 65, 74, 70, 66

الحل : $\overline{X} = \dfrac{75+70+63+58+72+57+65+74+70+66}{10} = 67kg$

ب- البيانات المبوبة :

لحساب الوسط الحسابي نتبع الخطوات التالية :

١- إنشاء جدول مكون من ثلاثة أعمدة ، يحتوى العمود الأول على مراكز الفئات (X) ويحتوى العمود الثاني على التكرار (f) ويحتوى العمود الثالث على حاصل ضرب مراكز الفئات بالتكرار (fX)

٢- نحسب مجموع التكرار $\sum f$ ومجموع حاصل الضرب $\sum fX$

٣- يحسب الوسط الحسابي كما يلي $\overline{X} = \dfrac{\sum fX}{\sum f}$

مثال١١ :

الجدول التالي يوضح أطوال ثلاثين متدرباً بالسنتمتر، احسب الوسط الحسابي لهذه الأطوال:

الفئة	-140	-150	-160	-170	-180	المجموع
التكرار	3	7	11	5	4	30

الحل :

مركز الفئة (X)	التكرار (f)	(fX)
145	3	435
155	7	1085
165	11	1815
175	5	875
185	4	740
الجموع	30	4950

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{4950}{30} = 165cm$$

٢- الوسيط :

الوسيط هو القراءة التي تتوسط البيانات بعد ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً .

أ-إيجاد الوسيط لبيانات غير مبوبة:

نرتب البيانات تصاعدياًأوتنازلياً ثم نوجد القراءة التي تتوسط البيانات٠ إذا كان عدد المفردات زوجياً نجد هنالك مفردتين تتوسطان البيانات ويكون الوسيط هو الوسط الحسابي لهاتين المفردتين .

مثال ١٢ :

البيانات التالية توضح أوزان 13متدرباًبالكيلوجراماًوجد الوسيط :

75, 60, 70, 59, 80, 63, 72, 69, 78, 61, 57, 77, 68

الحل :

نرتب البيانات ثم نوجد الوسيط :

80, 78, 77, 75, 72, 70, 69, 68, 63, 61, 60, 59, 57

الوسيط = 69

مثال ١٣ :

البيانات التالية توضح درجات 10في مادة الرياضيات . أوجد الوسيط :

87, 95, 55, 47, 75, 69, 89 , 62, 77, 60

الحل :

نرتب البيانات ثم نوجد الوسيط :

95 , 89, 87, 77, 75, 69, 62, 60, 55, 47

هنالك قيمتان تتوسطان البيانات هما 75,69 وبالتالي :

الوسيط $= \frac{75+69}{2} = 72$

ب- إيجاد الوسيط لبيانات مبوبة :

١. نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد للبيانات .

٢. نحدد ترتيب الوسيط وهو $\frac{\sum f}{2}$ (مجموع التكرار÷2)

٣. نسمى الفئة التي تحتوى على الوسيط بالفئة الوسيطية

الوسيط = $l + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \times c$ حيث

$l =$ الحد الأدنى للفئة الوسيطية

$f_1 =$ التكرار المتجمع الصاعد المناظر للحد الأدنى للفئة الوسيطية

$f_2 =$ التكرار المتجمع الصاعد المناظر للحد الأعلى للفئة الوسيطية

طول الفئة $= c$

مثال ١٤ :

البيانات التالية توضح درجات 40متدرباً في مادة الرياضيات،أوجد الوسيط لهذه الدرجات :

الفئة	$50-$	$60-$	$70-$	$80-$	$90-$	المجموع
التكرار	7	5	11	9	8	40

الحل:

حدود الفئات العليا	التكرار
اقل من 60	7
اقل من 70	$12\ f_1 \rightarrow$
اقل من 80	$23\ f_2 \rightarrow$
اقل من 90	32
اقل من 100	40

$$\frac{\sum f}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

$$l = 70 \quad . \quad f_1 = 12 \quad , \quad f_2 = 23 \, , \quad c = 10$$

الوسيط $70 + \frac{20-12}{23-12} \times 10 = $
≈ 77.3

٣-المنوال :

المنوال لمجموعة قراءات هو القراءة الأكثر شيوعاً (تكراراً)

أ-إيجاد المنوال لبيانات غير مبوبة :

نأخذ القيمة الأكثر تكراراً ويمكن أن يكون للبيانات أكثر من منوال إذا تساوت في التكرار، وأحياناً قد لايكون هنالك منوال .

مثال ١٥ :

البيانات التالية توضح الأجور اليومية لعشرة عمال في أحد المصانع (بالريال)،أوجد المنوال لهذه الأجور :

$$80, 90, 100, 85, 75, 85, 80, 75, 105, 75$$

الحل : المنوال = 75 ريال

ب-إيجاد المنوال لبيانات مبوبة :

١. نحدد أولاً الفئة المنوالية وهي الفئة التي لها أكبر تكرار
٢. نحسب المنوال باستخدام القانون التالي :

المنوال = $l+\dfrac{f_0-f_1}{2f_0-f_1-f_2}\times c$

حيث إن :

l = الحد الأدنى للفئة المنوالية
f_0 = تكرار الفئة المنوالية
f_1 = تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية
f_2 = تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية
c = طول الفئة

مثال ١٦ :
أوجد المنوال لبيانات الجدول التكراري في (المثال ١٤)
الحل :

$l=70 \quad , \quad f_0=11 \quad , \quad f_1=5 \quad , \quad f_2=9 \quad , \quad c=10$

المنوال = $70+\dfrac{11-5}{2(11)-5-9}\times 10$

= 77.5

تمارين (٥ -٤)

١- كانت درجات 9متدربين في إحدى المواد الدراسية كما يلي :

58 , 60 , 75 , 60 , 75 , 82 , 90 , 60 , 70

أوجد ما يلي :

أ- الوسط الحسابي ب- الوسيط جـ-المنوال

٢- إذا كان الوسط الحسابي للبيانات التالية36أوجد قيمة المجهول x ثم أوجد الوسيط والمنوال لهذه البيانات :

$33 , 25 , 45 , x , 45 , 38 , 33$

٣- الجدول التالي يوضح الأجر اليومي لعمال مصنع ما :

الفئة	60 −	70 −	80 −	90 −	المجموع
التكرار	8	12	9	11	30

احسب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لأجور العمال

.

المراجـع

اسم المرجع	المؤلف
معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٤٠٣هـ-١٩٨٣م.	صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول
نوابغ علماء العرب والمسلمين في الرياضيات، دار جون وايلي وأبناؤه، نيويورك،١٩٨٧م.	علي عبد الله الدفاع
مبادئ الإحصاء ، دار البداية، عمان ، ٢٠٠٨م	أحمد عبد السميع طيبة
Mathematics for scientific and technical students, Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1998.	Gwyn Davies and Gordon Hick
Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1993.	E. Kreyszig,
Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1986.	Alexander Schrijver
Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1997.	Seymour Lipschutz and Marc Lipson
Basic Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1998	Peter Tebbutt
Statistics, Tamilnadu Text book,2004	V.Varalakshmi and N.Suseela