

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

ПИЛИПОВСЬКИЙ Олександр Васильович

УДК 537.611

**РЕГУЛЯРНА І ХАОТИЧНА ДИНАМІКА ТОПОЛОГІЧНИХ
ЗБУДЖЕНЬ У МАГНІТНИХ НАНОСИСТЕМАХ**

01.04.02 — теоретична фізика

ДИСЕРТАЦІЯ

на здобуття наукового ступеня кандидата

фізико-математичних наук

Науковий керівник

Шека Денис Дмитрович

доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ — 2016

Зміст

ВСТУП	6
Розділ 1 ХАОТИЧНА ДИНАМІКА ВИХОРУ ПІД ДІЄЮ	
ЗМІННОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ 19	
1.1 Вихровий стан у магнітних наночастинках	19
1.1.1 Феноменологічний опис феромагнетика	19
1.1.2 Рівняння руху намагніченості	24
1.1.3 Магнітні вихори	25
1.1.3.1 Загальні властивості	25
1.1.3.2 Методи зміни полярності вихорів	27
1.1.4 Хаотична динаміка у магнетизмі	29
1.1.5 Висновки до огляду	30
1.2 Регулярна і хаотична динаміка вихорів під дією періодичного магнітного поля	31
1.2.1 Чисельні моделювання	31
1.2.2 Аналітичний опис	43
1.2.2.1 Двопараметрична модель відсічки	43
1.2.2.2 Модель вихрового осердя	53
1.2.2.3 Порівняння моделей вихрового осердя і відсічки	61
1.3 Контрольовне перемикання полярності	64
1.4 Основні результати розділу	67
Розділ 2 ДИНАМІКА ТОЧОК БЛОХА В ОБМЕЖЕНИХ	
ЗРАЗКАХ 70	
2.1 Точкові магнітні сингулярності	70
2.1.1 Означення і топологічні властивості	70
2.1.2 Енергія точки Блоха	73

2.1.3	Проблема опису точкової сингулярності у наномагнетиках	75
2.1.4	Виникнення точок Блоха у фізичних системах	77
2.1.5	Висновки до огляду	79
2.2	Точка Блоха в сферичній наночастинці	80
2.2.1	Модель і класифікація точкових сингулярностей	80
2.2.2	Структура намагніченості точки Блоха із врахуванням магнітостатичної взаємодії	82
2.2.3	Точка Блоха у зовнішньому полі	84
2.2.4	Чисельні моделювання	88
2.3	Вплив поверхні зразка на динаміку точки Блоха	91
2.3.1	Гайзенбергівский магнетик з поверхневою анізотропією .	93
2.3.1.1	Модель і вихровий розв'язок	93
2.3.1.2	Структура осердя вихору за відсутності зовнішнього поля	95
2.3.2	Процес перемикання полярності вихору з врахуванням ефекту поверхневої анізотропії	100
2.3.2.1	Деформація однорідного розподілу намагніченості під впливом зовнішнього поля .	101
2.3.2.2	Чисельні моделювання	101
2.3.2.3	Аналітичний опис	113
2.4	Основні результати розділу	119

Розділ 3 ДОМЕННІ СТІНКИ НА МАГНІТНОМУ КІЛЬЦІ

МЕБІУСА	123	
3.1	Формування магнітних структур і магнітокіральні ефекти у наномагнетиках	123
3.1.1	Індуковане геометрією формування магнітних структур	123
3.1.2	Магнітокіральні ефекти	125
3.1.3	Висновки до огляду	127

3.2 Стационарні стани магнітного кільця Мебіуса	128
3.2.1 Модель	128
3.2.2 Діаграма стационарних станів	129
3.2.2.1 Кільце Мебіуса	129
3.2.2.2 Зв'язок із стационарними станами пласкої наносмужки	135
3.3 Основні результати розділу	137
ВИСНОВКИ	140
ДОДАТКИ	144
А Рівноважний розподіл намагніченості у плівці із поверхневою анізотропією	144
Б Моделювання зміни полярності вихору в зразку із обмінною анізотропією	144
В Кільце під дією сталого магнітного поля	146
Г Модель нитчастого вихрового осердя	148
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	151

ВСТУП

Новітні технології дозволяють виготовляти й аналізувати властивості магнітних наносистем різного розміру і форми. В залежності від геометричних параметрів, у зразках можуть спостерігатись суттєво неоднорідні розподіли намагніченості, нелінійна динаміка яких викликає значну зацікавленість завдяки перспективам застосування у цифровому обладнанні (модернізація магнітної постійної та оперативної пам'яті), створенню новітніх наноелектронних пристройів (прилади спінtronіки) і різноманітних датчиків. У дисертаційній роботі проаналізовано динаміку намагніченості наночастинок у вихровому стані та властивості криволінійних наномагнетиків.

Структура магнітного вихору (блохівської лінії у легкоплощинному магнетику) вперше була описана Фельдкеллером і Томасом [1] у 1965 році. Через конкуренцію обмінної й магнітостатичної взаємодії, вихор може бути основним станом магнітом'яких наночастинок дископодібної форми. Мінімізуючи енергію, пов'язану із полями розмагнічування, намагніченість типово лежить у площині нанодиску дотично до його бічної поверхні (напрямок потоку за чи проти годинникової стрілки називають кіральністю). В невеликій області навколо центру — осерді вихору — намагніченість направлена перпендикулярно до площини (напрямок «вгору» чи «вниз» називають полярністю). Вихори як фундаментальні, топологічно нетривіальні об'єкти (магнітні топологічні солітони [2, 3]) привернули до себе широку увагу пізніше завдяки роботам Бerezинського [4], Костерліца і Тауперса [5]. Вони встановили наявність фазового переходу від розупорядкованого стану до появи вільних вихорів і антивихорів (магнітні топологічні солітони, в яких топологічний заряд протилежний за знаком до заряду вихору) у двовимірній $X-Y$ -моделі. Подальший розвиток технологій дозволив експериментально досліджувати статику і динаміку вихорів у магнітних наночастинках. Магнітні вихори та супутні їм явища є

предметом вивчення мікро- і наномагнетизму— розділів магнетизму, які мають справу із об'єктами, характерні розміри яких лежать у мікро і наномасштабах відповідно [6, 7]. Зокрема, це справедливо у сучасних експериментах, де товщини феромагнітних плівок можуть не перевищувати кількох десятків нанометрів [8].

Енергія вихору у пласких зразках вироджена відносно значень його кіральності та полярності. Це дозволяє розглядати наночастинки у вихровому стані як базові елементи носія інформації, в якому окремі біти кодуються, наприклад, значенням полярності [9–11]. За останні кілька десятиліть було запропоновано чимало методів її зміни, як експериментально, так за і допомогою комп'ютерних моделювань: зовнішніми магнітними полями [12–19], спін-поляризованим струмом [20–22] або за допомогою магнітострикції [23]. Також відомі певні методи зміни кіральності вихорів [24–28].

Геометрія магнітної наночастинки суттєво впливає на її статичні та динамічні властивості. У той час, як обмінна взаємодія прагне уникнути градієнту намагніченості, анізотропія може відслідковувати форму зразка [29]. Магнітостатична взаємодія за певних умов також зводиться до ефективної координатно-залежної анізотропії [30–33]. Таким чином стають можливі ефекти, пов'язані із впливом геометрії на магнітну підгратку. Їх яскравими прикладами є відсутність суперпозиції легкоосьових чи легкоповерхневих розподілів намагніченості у дротах і тонких плівках, форма яких відрізняється від пласкої [34, 35]. Так, зокрема, з'являється зв'язок між полярністю вихорів і підкрученнем до фази намагніченості на поверхні сферичних оболонок [36], а опукла форма зразка впливає на характер зміни полярності імпульсом магнітного поля [37].

Топологічно нетривіальні стани зручно характеризувати в термінах відображення з фізичного простору \mathcal{V}^n в простір параметру порядку \mathcal{V}^k , де верхніми індексами позначено розмірність простору. Гомотопічні класи відображень (тобто сукупність еквівалентних відображень, які неперервним чи-

ном перетворюються одне в інше) між сферами \mathcal{S}^n і \mathcal{S}^k вимірностей n і k відповідно при $n \geq k$ утворюють нетривіальну групу $\pi_n(\mathcal{S}^k)$ [38]. У даній роботі розглядатимуться три типи магнітних збуджень: доменні стінки ($k = 0$), вихори ($k = 1$) і точки Блоха (мікромагнітні сингулярності, $k = 2$) у тривимірних і ефективно двовимірних зразках. Для кожного з цих збуджень можна казати про топологічну стійкість, тобто відсутність неперервної деформації поля намагніченості, яка б перетворювала збудження у основний стан — однорідний одноосний для доменної стінки, однорідний легкоплощинний розподіл для вихору, чи будь-який з них для точки Блоха [2, 38]. Звісно, в реальних системах такі перетворення можливі через обмеженість зразків, дискретність кристалічної ґратки та скінченне значення анізотропії. Останні дві причини ліквідують в них появу сингулярних точок і ліній, у яких параметр порядку (вектор намагніченості) змушений обертатись в нуль [38]. Так, наприклад, для вихорів сингулярність уникається утворенням позаплощинного осердя. Розподіли намагніченості, які будуть обговорюватись надалі, відповідають локальним мінімумам енергії в рамках заданих топологічних властивостей [38].

Актуальність теми. Дослідження статики та надшвидкої динаміки у наномасштабах обумовлене прогресом в експериментальних технологіях і потребі в мініатюризації та пришвидшенні роботи електронних пристройів. Магнітні вихори мають потенційно широке практичне застосування в якості елементів магнітної пам'яті [8, 10, 39] й датчиків магнітного поля [9]. Вихрові розподіли у векторних полях входять до класу топологічно нетривіальних об'єктів [2], які грають значну роль у багатьох фізичних процесах. Яскравими прикладами останнього можуть слугувати спостереження вихрових структур у надпровідниках II-го роду [40], в Бозе—Ейнштейнівському конденсаті [41], гідрогазодинаміці [42] тощо.

Як було нещодавно встановлено, нетривіальна форма магнітних нанодротів і плівок [35, 43] суттєво впливає на статику і динаміку намагніченості. Ненульові кривина і кручення призводять до ефектів, які раніше спостерігалися у хіральних магнетиках. Так, індукована геометричною формою зразка анізотропія призводить до зміни основного стану і зсуву магнонного спектру [44], що характерно для тонких плівок із взаємодією Дзялошинського—Морії [45].

Практична цінність досліджень магнітних вихорів і магнетиків криволінійної форми полягає в широкому прикладному застосуванні нелінійних ефектів у наноелектроніці (елементи магнітної пам'яті та приладів спінtronіки) і запитах технологій на необхідність використання мікро- і нанооб'єктів складної форми. Фундаментальними є питання прояву хаотичної динаміки, динаміки точкових сингулярностей і кіральних ефектів у магнітних наноструктурах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі математики та теоретичної радіофізики факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Дослідження проводилися в рамках наступних наукових проектів:

1. Держбюджетна науково-дослідна робота № 11БФ052-03 «Фізичні та інформаційні процеси у конденсованому середовищі та біологічних системах з великою кількістю зв'язків» в рамках комплексної наукової програми «Новітні та ресурсозберігаючі технології», державний реєстраційний номер 0111U006937; виконавець робіт за проектом.
2. Науковий проект «Динаміка солітонів і вихорів у наномагнетиках», підтриманий науково-дослідною роботою МОН України, державний реєстраційний номер 0108U005929, термін виконання: 2010 р.; виконавець робіт за проектом.

3. Наукові дослідження за держбюджетною темою КНУ № 11ДФ052-06 «Надшвидкі явища в динаміці магнітних вихорів в наночастинках», державний реєстраційний номер 0111U008886, термін виконання: 2011 р.; виконавець робіт за проектом.
4. Науковий проект «Dynamics of Topological Singularities in Magnetic Nanoparticle», за підтримки Bavarian Academic Center for Central, Eastern and Southeastern Europe (BAYHOST), термін виконання: 2012 р.; індивідуальний проект.
5. Науковий проект «Динаміка топологічних збурень в наномагнетиках зі складною геометрією», державний реєстраційний номер 0113U007543, термін виконання: 2013 р.; індивідуальний проект.
6. Науковий проект «Bloch Point Dynamics in a Magnetic Nanoparticle under the action of DC magnetic field» за підтримки Bavarian Academic Center for Central, Eastern and Southeastern Europe (BAYHOST), термін виконання: 2014 р.; виконавець робіт за проектом.
7. Науковий проект «Magnetization States on a Möbius Strip» за підтримки DAAD (Deutsche Akademische Austauschdienst Dienst), реєстраційний номер 91530902-FSK, термін виконання 2015 р.; індивідуальний проект.
8. Науковий проект «Curvature induced effects in nanowires» за підтримки Alexander von Humboldt Foundation, термін виконання: 2015 р.; виконавець робіт за проектом.

Мета і завдання дослідження. Метою даної дисертаційної роботи є аналітичне і чисельне дослідження:

- динаміки та механізму перемикання полярності магнітних вихорів в

наночастинках з магнітом'якого феромагнетика під дією монохроматичного магнітного поля, прикладеного вздовж вісі зразка у формі диску;

- перемикання полярності вихору в магітом'якій феромагнітній наночастинці під дією сталого магнітного поля, прикладеного вздовж вісі зразка у формі диску, і динаміки точок Блоха, які динамічно утворюються в цьому процесі, мікромагнітної структури точки Блоха;
- взаємовпливу криволінійної геометрії феромагнітних наночастинок із нетривіальною топологією магнітних станів на прикладі кільця Мебіуса.

Об'ектом дослідження є статичні та динамічні явища в магнітовпорядкованих системах.

Предметом дослідження є магнітні топологічні солітоноподібні збудження: вихори, точки Блоха і доменні стінки.

Методи дослідження, застосовані в дисертаційній роботі, включають в себе такі методи математичної фізики, як методи багатьох масштабів (використано для аналізу слабконелінійного резонансу полярності вихору під дією періодичного накачування), колективних змінних (для аналізу динаміки магнітного вихору і точок Блоха), варіаційний метод (для аналізу структури точки Блоха у радіально-симетричному полі, структура вихору в зразку із поверхневою анізотропією). Перевірка аналітичних розрахунків виконувалася за допомогою пакетів мікромагнітних моделювань OOMMF, MAGPAR і пакету спін-граткових моделювань SLaSi.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у встановленні характеру динаміки полярності вихору під дією монохроматичного поля, структурі та характері динаміки точки Блоха в обмежених зразках, зв'язку геометричних і магнітних характеристик криволінійних зразків на прикладі кільця Мебіуса. Оригінальні результати є наступними:

1. Встановлено наявність режимів хаотичної та регулярної динаміки осередя магнітного вихору в феромагнітному нанодиску під дією монохроматичного поля, прикладеного вздовж вісі диску; виявлено умови контролюваного перемикання полярності. Запропоновано механічну модель частинки зі змінною масою в двояомному потенціалі під дією періодичного збудження.
2. Розраховано мікромагнітну структуру точки Блоха в магнітом'якому феромагнетику сферичної форми. Передбачено можливість стабілізації точки Блоха радіально-симетричним магнітним полем.
3. Описано тонку структуру блохівської лінії в феромагнітному зразку та встановлено, що наявність неєлівської анізотропії призводить до її деформації та народження точок Блоха. Встановлено характер руху точок Блоха.
4. Розраховано діаграму стаціонарних станів феромагнітного кільця Мебіуса із легконормальною анізотропією. Встановлено зв'язок між геометричною кіральністю кільця і магнітною кіральністю доменних стінок, які у ньому виникають.

Практичне значення одержаних результатів. Результати досліджень, проведених у рамках дисертаційної роботи, встановлюють швидкодію запам'ятовувального пристрою, в якому зміна полярності вихорів здійснюється монохроматичними імпульсами магнітного поля, прикладеного вздовж вісі тонких циліндричних зразків. Наявність хаотичної динаміки в таких системах відкриває можливості для їх використання у криптографічних системах [46–48]. Вивчення динаміки поблизу вищих резонансів радіально-симетричних мод відкриває нові шляхи до надшвидкої зміни полярності вихорів [18, 49]. Властивості сильно неоднорідних розподілів намагніченості в

сферичних зразках можуть бути використані у магнітометричних дослідженнях, де феромагнітні кулі є елементами кантілеверів [50] і при дослідженні розсіяння спінових хвиль [51]. Дослідження статики й динаміки точок Блоха представляє практичний інтерес через їх роль у процесах зміни полярності вихорів [52] і перемагнічування нанодротів [53, 54] для збільшення швидкодії наноелектронних пристройів, таких як магнітна оперативна пам'ять [55, 56].

Дослідження магнітокіральних ефектів на прикладі кільця Мебіуса, представлене у даній роботі, є яскравою ілюстрацією взаємовпливу топології та кривини поверхні нанооб'єктів. Розуміння зв'язку між ними є важливим для розробки новітніх приладів наноелектроніки й спінtronіки, прикладом яких можуть бути так звана «трекова» магнітна пам'ять (англ. racetrack memory) [57]—магнітні дроти у вигляді підкови, по яким переміщаються доменні стінки,— чи високочутливі датчики у вигляді радіально або дотично намагнічених нанотрубок [29, 58].

Особистий внесок здобувача. Автор безпосередньо приймав участь у постановці задач, розробці прийомів і методів розв'язку, проведенні розрахунків і написанні статей. Основні результати, які складають зміст дисертаційної роботи, були отримані особисто здобувачем:

1. Передбачено наявність регулярної та хаотичної динаміки полярності магнітного вихору в магнітом'якому нанодиску під дією магнітного поля, прикладеного вздовж осі зразка. Шляхом мікромагнітних моделювань побудовано діаграму динамічних станів, яка вказує конкретний тип динаміки полярності вихору в залежності від параметрів прикладеного поля. Проведено аналіз характеристик хаотичної динаміки, її теоретичний опис в рамках моделей відсічки й вихрового осердя. Вказано параметри хвильового пакету магнітного поля, яке дозволяє змінювати полярність вихору контролювним чином. Опубліковано в [59, 60].

2. Здійснено теоретичний опис структури намагніченості у точці Блоха в сферичній наночастинці із врахуванням магнітостатичної взаємодії, як за відсутності так і з врахуванням зовнішнього поля, яке стабілізує її положення в центрі зразка. Здійснено перевірку теоретичного розрахунку шляхом спін-граткових моделювань. Опубліковано в [61].
3. Здійснено аналітичний розрахунок структури осердя магнітного вихору в гайзенбергівському феромагнетику із неелівською поверхневою анізотропією. Проведено чисельний аналіз динаміки перемикання полярності вихору в такому зразку. Здійснено теоретичний опис в рамках моделі нитчастого вихрового осердя. Розраховано розподіл намагніченості у легкоплощинній плівці із неелівською поверхневою анізотропією під дією сталого магнітного поля, прикладеного перпендикулярно до її поверхні. Опубліковано в [62, 63].
4. Шляхом мікромагнітних моделювань побудовано діаграму стаціонарних станів магнітного кільця Мебіуса і пласкої смужки із легконормальною анізотропією. Встановлено особливості структури доменних стінок, які виникають за різних геометричних параметрів кільця. Опубліковано в [64].

Усі результати чисельних розрахунків були також отримані особисто автором.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались і обговорювались на семінарах кафедри математики та теоретичної радіофізики факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, відділу квантової електроніки Інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова (Київ), першої кафедри теоретичної фізики інституту фізики Байройтського

університету (Universität Bayreuth, Байройт, Німеччина), Інституту інтегровних нанонаук (Institute for Integrative Nanosciences, Leibniz Institute for Solid State and Materials Research, Дрезден, Німеччина), Башкирського державного університету (Уфа, Російська Федерація), Школи математики Бристольського університету (School of Mathematics, University of Bristol, Бристоль, Великобританія) і були представлені на наступних конференціях:

1. Young Scientists' Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (24—26 листопада 2009 р., Київ, Україна).
2. X International Young Scientists' Conference on Applied Physics (16—19 червня 2010 р., Київ, Україна).
3. II Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (22—24 листопада 2010 р., Київ, Україна).
4. XI International Young Scientists' Conference on Applied Physics (15—18 червня 2011 р., Київ, Україна).
5. III Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" (21—23 листопада 2011 р., Київ, Україна).
6. XII International Young Scientists' Conference on Applied Physics (23—26 травня 2012 р., Київ, Україна).
7. 3rd Young Scientists' Conference "Low Temperature Physics" (14—18 травня 2012 р., Харків, Україна).
8. International Conference "Problems of Theoretical Physics" (8—11 жовтня 2012 р., Київ, Україна).
9. VIII International Conference "Electronics and Applied physics" (24—27 жовтня 2012 р., Київ, Україна).

10. IV Young Scientists Conference “Modern Problems of Theoretical Physics” (23—26 жовтня 2012 р., Київ, Україна).
11. International Workshop “Domain microstructure and dynamics in magnetic elements” (8—11 квітня 2013 р., Іракліон, Греція).
12. 11th EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization (26—28 червня 2013 р., Флоренція, Італія).
13. 4th International Conference of Young Scientists “Low Temperature Physics” (3—7 червня 2013 р., Харків, Україна).
14. XIII International Young Scientists’ Conference on Applied Physics (12—15 червня 2013 р., Київ, Україна).
15. V Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” (24—27 грудня 2013 р., Київ, Україна).
16. VI Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” (25—27 листопада 2014 р., Київ, Україна).
17. 5th International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics” (2—6 червня 2014 р., Харків, Україна).
18. Humboldt Kolleg “The Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society” (12—14 червня 2014 р., Київ, Україна).
19. International Conference on Magnetism (5—10 липня 2015 р., Барселона, Іспанія).

Публікації. Матеріали, представлені в даній дисертаційній роботі, опубліковано в 25 роботах. Серед них 6 статей у провідних фахових українських і зарубіжних рецензованих наукових журналах [59–64] і 19 матеріалів конференцій у вигляді праць і тез [65–83].

Структура та об'єм дисертації. Робота складається з вступу, трьох основних розділів, висновку, 4-х додатків і списку використаних джерел. Робота викладена на 150 сторінках тексту. Список використаних джерел містить 210 найменувань, викладених на 33 сторінках. Дисертація містить 47 рисунків.

Літературні дані оглядового характеру наводяться й аналізуються в кожному розділі роботи.

У *розділі 1* представлено результати досліджень динаміки магнітних вихорів у феромагнітних наноточках циліндричної форми під дією монохроматичного магнітного поля, прикладеного вздовж вісі зразка. У підрозділі 1.1 розглядаються основні положення наномагнетизму (магнітні взаємодії та рівняння руху намагніченості), відомості про статику і динаміку магнітних вихорів, хаотичну динаміку у магнетизмі. У підрозділі 1.2 наводяться оригінальні результати моделювання динаміки вихору під дією вищезгаданого збудження і теоретичний опис, який ґрунтуються на моделях відсічки та вихрового осердя. У підрозділі 1.3 наводиться дослідження можливості контролювної зміни полярності шляхом прикладання коротких хвильових пакетів магнітного поля.

Розділ 2 присвячено дослідженню статики та динаміки точки Блоха в обмежених зразках феромагнетика: сферичних наночастинках і наноточках. У підрозділі 2.1 наводяться відомі дані про статику і динаміку точкових сингулярностей в різних системах, проблеми чисельного моделювання точок Блоха і шляхи їх подолання. Розрахунок розподілу намагніченості точки Блоха у сферичній наночастинці із врахуванням магнітостатичної взаємодії та зовнішніх полів, які її стабілізують, наведено у підрозділі 2.2. У підрозділі 2.3 наведено результати досліджень впливу поверхневої анізотропії на форму вихору. Встановлено роль неоднорідної форми вихрового осердя у процесі зміни полярності вихорів, який супроводжується народженням точок Блоха

і наведено модель нитчастого вихрового осердя, яка дозволяє якісно описати повномасштабну динаміку.

У *розділі 3* наводяться результати чисельного розрахунку стаціонарних станів намагніченості у феромагнітному кільці Мебіуса із легконормальною анізотропією. В підрозділі 3.1 обговорюються відомі магнітокіральні ефекти та ефекти індукування геометрією наночастинок специфічних магнітних розподілів. У підрозділі 3.2 наводиться діаграма стаціонарних станів намагніченості кільця Мебіуса, обговорюються властивості знайдених стаціонарних станів та їх зв'язок зі станами пласкої смужки аналогічних розмірів і магнітних параметрів.

У *висновках* у стислій формі наводяться основні результати дисертаційної роботи.

Дисертаційна робота містить чотири *додатки*. У додатку А наводиться розрахунок розподілу намагніченості у плівці з неєлівською поверхневою анізотропією під дією сталого магнітного поля, прикладеного перпендикулярно до її поверхні. В додатку Б описано моделювання зміни полярності в гайзенбергівському феромагнетику з обмінною анізотропією. Додаток В містить розрахунки розподілу намагніченості у кільці під дією сталого магнітного поля. В додатку Г наводяться деталі моделі нитчастого вихрового осердя.

Розділ 1

ХАОТИЧНА ДИНАМІКА ВИХОРУ ПІД ДІЄЮ ЗМІННОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ

У даному розділі, розв'язується задача про динаміку магнітного вихору в зразку у формі диску під дією монохроматичного магнітного поля, прикладеного вздовж його вісі. В залежності від амплітуди й частоти поля спостерігаються резонансні збудження перемикань полярності вихору. Встановлено, що існують області параметрів, за яких спостерігається хаотична, або регулярна динаміка полярності. Виявлено умови контрольованої динаміки полярності для кодування інформації за її напрямком. Дано якісний опис динаміки в рамках моделей відсічки та вихрового осердя. Результати, представлені в даному розділі, опубліковано в роботах [59, 60].

У підрозділі 1.1 наведено основні положення теорії мікромагнетизму (основні взаємодії та рівняння руху), обговорюються властивості вихрового розподілу намагніченості, методи зміни його параметрів і приклади хаотичної динаміки у мікромагнетизмі. В підрозділі 1.2 наведено результати мікромагнітних моделювань і теоретичний опис динаміки вихору в нанодиску. Підрозділ 1.3 містить опис шляху зміни полярності вихору контролювним чином. В останньому підрозділі 1.4 викладено основні результати розділу.

1.1 Вихровий стан у магнітних наночастинках

1.1.1 Феноменологічний опис феромагнетика

Стан магнітної підгратки феромагнітної наночастинки визначається конкуренцією обмінної, спін-орбітальної, магнітодипольної взаємодій та взаємодії із зовнішніми магнітними полями [7, 84, 85]. Обмінна взаємодія виникає як наслідок перекриття хвильових функцій електронів які електростатично взаємодіють. Через асиметричність їх сукупної хвильової функції виникає

залежність повної енергії від співнапрямленості спінів. Обмінна взаємодія є найсильнішою у магнітних матеріалах і відповідає за впорядковану орієнтацію окремих магнітних моментів. У твердих тілах, здебільшого, основну роль відіграє непрямий обмін між магнітними йонами через посередництво сусідніх атомів або електронів провідності. Відповідні теоретичні моделі, як правило, враховують структуру конкретного кристалу. Тим не менш, наближення самоузгодженого поля із моделлю гайзенбергівсього гамільтоніану в багатьох випадках дозволяє отримати належний опис статичних і динамічних властивостей феромагнетиків [84, 86, 87].

Гамільтоніан Гайзенберга і відповідна йому макроскопічна енергія мають вигляд

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = -\frac{\mathcal{S}^2}{2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} J_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} (\mathbf{m}_n \cdot \mathbf{m}_{n'}), \quad E_{\text{ex}} = \frac{A}{2} \int_V (-\mathbf{m} \cdot \nabla^2 \mathbf{m}) \, d\mathbf{r}, \quad (1.1)$$

де $J_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} > 0$ для феромагнетиків — обмінний інтеграл пари магнітних моментів, напрямки яких задаються векторами одиничної довжини \mathbf{m}_n і $\mathbf{m}_{n'}$, A — стала неоднорідного обміну, а інтегрування відбувається за об'ємом зразка V . Нормований вектор намагніченості можна задати як

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r})}{M_s} = \{m_x, m_y, m_z\} = \{\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta\} = \\ &= \left\{ \sqrt{1 - m^2} \cos \phi, \sqrt{1 - m^2} \sin \phi, m \right\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де $M_s = g\mu_B \mathcal{S}/a^3$ — намагніченість насичення, g — фактор Ланде, $\mu_B > 0$ — магнетон Бора, \mathcal{S} — довжина класичного вектора спіну, a — стала ґратки. Тут і далі індекси $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ стосуватимуться локалізованих магнітних моментів, а скалярні x, y, z — неперервних компонент намагніченості, які є функціями координат. Для спрощення записів, нижній індекс z компонент векторів \mathbf{m} і \mathbf{n} опускатиметься із перепозначенням $m_z = m$ і $n_z = n$.

Обмінний інтеграл

$$J_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} = \iint_V \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_1) \psi_{\mathbf{n}'}(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \psi_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{r}_2) \psi_{\mathbf{n}'}^*(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (1.3)$$

між вузлами \mathbf{n} і \mathbf{n}' визначається ступенем перекриття хвильових функцій атомів, які знаходяться в цих вузлах, й тому експоненційно спадає з відстанню між ними [85]. За порядком величини його середнє значення для сусідніх атомів рівне $\overline{J_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}} = J \sim 0,1 \frac{e^2}{a} \sim 1 \text{ eB}$, а для інших може вважатися нульовим. Це дає підстави враховувати у сумі (1.1) лише найближчих сусідів кожного \mathbf{n} -го вузла. Значення сталої неоднорідного обміну за порядком величини рівне $A \sim \frac{JS^2}{a}$ [84]. Для простої кубічної гратки коефіцієнт пропорційності в цьому випадку можна вважати одиницею [7].

Взаємодія електронів із полем кристалічної гратки призводить до виникнення магнітної анізотропії, яка визначається симетрією цієї гратки. Хоча ця взаємодія майже на два порядки слабше обмінної (стала спін-орбітальної взаємодії $\sim 0,01 \text{ eB}$), вона призводить до виникнення певних обраних напрямків відносно кристалографічних осей. Орієнтація намагніченості вздовж них є енергетично вигідною, в той час як обмін визначає лише феро- або антиферомагнітне впорядкування окремих магнітних моментів [85].

В найпростішому випадку можна вважати, що енергія анізотропії залежить лише від кута між намагніченістю і певною выбраною віссю в кристалі, що може бути записано у наступному вигляді [7, 84]

$$\mathcal{H}_{\text{an}} = \frac{\mathcal{K}S^2}{2} \sum_{\mathbf{n}} (\mathbf{m}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_A)^2, \quad E_{\text{an}} = \frac{K}{2} \int_V m_z^2 d\mathbf{r}, \quad (1.4)$$

де \mathbf{e}_A — одиничний вектор напрямку вісі анізотропії, \mathcal{K} — коефіцієнт одноіонної анізотропії, K — коефіцієнт одноосьової анізотропії (континуальний вираз записано для $\mathbf{e}_A = \mathbf{e}_z$). Зокрема, це наближення добре виконується для гексагональних і тетрагональних кристалів [88]. За випадку $K > 0$ кажуть про легкоплощинну анізотропію (енергетично вигідною є орієнтація намагніченості

сті в площині, перпендикулярній до \mathbf{e}_z) і про легкоосьову в протилежному випадку. Інколи на рівні дискретного опису замість одноїнної вводять так звану обмінну анізотропію, в якій середнє значення обмінного інтегралу J відмінне на малу величину для різних напрямків в кристалічній ґратці. У макроскопічному описі різниці між одноіонною і обмінною анізотропією немає [2].

На поверхні зразка симетрія кристалічної ґратки порушується, що призводить до появи додаткової поверхневої анізотропії. Відповідно до феноменологічної теорії, запропонованої Неєлем, для кубічних кристалів її можна описати як [89]

$$\mathcal{H}_{\text{surf. an}} = -\frac{K_s}{2} \sum_{\mathbf{n}, \delta} \frac{(\mathbf{m}_n \cdot \mathbf{r}_\delta)^2}{|\mathbf{r}_\delta|^2}, \quad (1.5)$$

де індекс \mathbf{n} пробігає лише поверхневі вузли ґратки, а радіус-вектор \mathbf{r}_δ з'єднує \mathbf{n} -ий вузол з найближчими до нього. Неєлівська анізотропія призводить до внеску в повну енергію у формі $K_s(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_s)^2$, де K_s — коефіцієнт поверхневої анізотропії, а \mathbf{n}_s — вектор нормалі до поверхні зразка. Наявність поверхневої анізотропії суттєво модифікує межові умови для намагніченості, які для вищеописаного випадку набудуть форми [88]

$$A \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{n}_s} = K_s (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_s) [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_s) \mathbf{m} - \mathbf{n}_s]. \quad (1.6)$$

Кожен елементарний магнітний момент створює навколо себе поле \mathbf{H}_{ms} , яке спадає з відстанню r як r^{-3} . Енергію взаємодії з цим полем називають магнітостатичною енергією, або енергією дипольної взаємодії [7, 84]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{ms}} &= \frac{g^2 \mu_B^2 \mathcal{S}^2}{2} \sum_{\mathbf{n} \neq \mathbf{n}'} \left[\frac{(\mathbf{m}_n \cdot \mathbf{m}_{n'})}{r_{nn'}^3} - 3 \frac{(\mathbf{m}_n \cdot \mathbf{r}_{nn'})(\mathbf{m}_{n'} \cdot \mathbf{r}_{nn'})}{r_{nn'}^5} \right], \\ E_{\text{ms}} &= -\frac{M_s}{2} \int_V (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_{\text{ms}}) d\mathbf{r} \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} H_{\text{ms}}^2 d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

де $\mathbf{r}_{nn'}$ — радіус-вектор, який з'єднує \mathbf{n} -ий і \mathbf{n}' -ий вузли магнітної ґратки. Поле \mathbf{H}_{ms} може бути знайдено як розв'язок магнітостатичних рівнянь Максвела з

межовими умовами на нормальну і тангенціальну компоненти [84]

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_{\text{ms}} &= 0, & \nabla \cdot (\mathbf{H}_{\text{ms}} + 4\pi M_s \mathbf{m}) &= 0, \\ H_{\text{dip,in}}^{\text{tang}} &= H_{\text{dip,out}}^{\text{tang}}, & H_{\text{dip,in}}^{\text{norm}} + 4\pi M_s m^{\text{norm}} &= H_{\text{dip,out}}^{\text{norm}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Розв'язок (1.8) може бути записаний у вигляді

$$\mathbf{H}_{\text{ms}} = -M_s \nabla \Psi_{\text{ms}}(\mathbf{r}), \quad (1.9)$$

де магніостатичний потенціал [84]

$$\Psi_{\text{ms}}(\mathbf{r}) = - \int_V \frac{(\nabla \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\mathbf{r}' + \int_S \frac{(\mathbf{m}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}_s)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\mathbf{r}'. \quad (1.10)$$

Тут перший інтеграл береться по об'єму магнетика, а другий — по його поверхні. Величини $\varrho_v = (\nabla \cdot \mathbf{m})$ і $\varrho_s = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_s)$ у чисельниках інтегрантів називають об'ємними і поверхневими магніостатичними зарядами відповідно [88]. У тонких плівках магніостатичну взаємодію можна звести до ефективної легкоплощинної анізотропії з коефіцієнтом $K_{\text{ms}} = 4\pi M_s^2$ [30, 31, 90]. Для обмежених тонких зразків може бути важливим врахування ефективної анізотропії, яка індукується магніостатичними зарядами на бічній поверхні [33].

Конкуренція вищеописаних взаємодій призводить до появи так званої магнітної довжини ℓ . Якщо впливом природної анізотропії можна знехтувати, то характерні розміри визначаються обмінною довжиною ℓ_{ex} , а якщо анізотропія домінує — магнітною, яка в англомовній літературі дісталася назву параметру ширини доменної стінки ℓ_{magn} [7]:

$$\ell_{\text{ex}} = \sqrt{\frac{A}{4\pi M_s^2}}, \quad \ell_{\text{magn}} = \sqrt{\frac{A}{K}}. \quad (1.11)$$

Співвідношення між ними зручно оцінювати так званим фактором якості $Q = K/4\pi M_s^2$, який був історично введений для матеріалів, які використовувалися при дослідженні циліндричних доменів. Він характеризує співвідношення між природною одноосьовою анізотропією й ефективною анізотропією,

яка наводиться магнітостатичною взаємодією [88, 91]. Типові характеристичні довжини є порядку 10 нм, подібно обмінній довжині $\ell_{\text{ex}} = 5,1$ нм для пермалоя, 7,6 для нікелю і магнітній довжині 4,7 нм для кобальту [7].

1.1.2 Рівняння руху намагніченості

Повна магнітна енергія одноосьового феромагнетика без врахування температурних ефектів і магнітострикції може бути записана у вигляді

$$E = \int_V \left[\frac{A}{2} (-\mathbf{m} \cdot \nabla^2 \mathbf{m})^2 + \frac{K}{2} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_A)^2 - \frac{M_s}{2} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_{\text{ms}}) - M_s (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) \right] d\mathbf{r} + \frac{K_s}{2} \int_S (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_s) d\mathbf{r}, \quad (1.12)$$

де останній доданок в першому інтегранті описує густину Зееманівської енергії — взаємодії із зовнішнім полем. Рівноважний розподіл визначається з умовою рівності нулю варіації енергії (1.12) і може бути записаний як рівність нулю крутального моменту в деякому ефективному полі \mathbf{H}_{eff} , яке містить в собі внесок обмінної, зееманівської, магнітостатичної та спін-орбітальної взаємодій [7]

$$\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} = 0, \quad \mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{1}{M_s} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{m}}. \quad (1.13)$$

У нерівноважному випадку він визначає динаміку моменту імпульсу \mathbf{L} . Це дозволяє записати рівняння руху для вектору намагніченості, що й було запропоновано Ландау і Ліфшицем у 1935 р. [92]. В рамках моделі локалізованих магнітних моментів і за припущення, що наявні лише локальні, внутрішні втрати, динаміка намагніченості може бути описана рівнянням Ландау—Ліфшиця—Гільберта [88, 93]

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma_e \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \alpha \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \quad (1.14)$$

разом із межовими умовами (1.6). Тут $\gamma_e > 0$ — гіромагнітне відношення, α — стала релаксації Гільберта. Дане рівняння зберігає довжину вектора намагні-

ченості. Окрім релаксаційного крутального моменту у формі Гільберта для опису магнітної динаміки наночастинок використовуються теорії, запропоновані Бар'яхтаром, Ландау і Ліфшицем та інші. Вибір конкретного релаксаційного крутального моменту типово визначається механізмами релаксації, які переважають в конкретній системі. Теорія релаксації Бар'яхтара [94] стосується фемтосекундної динаміки [95, 96]. Вибір між описом релаксації Гільберта чи Ландау і Ліфшиця у випадку малих втрат не є принциповим, оскільки вони математично еквівалентні й призводять до однакових фізичних висновків [7, 88].

1.1.3 Магнітні вихори

1.1.3.1 Загальні властивості Розглянемо наночастинку дископодібної форми, виготовлену із магнітом'якого матеріалу, або матеріалу із легко-площинною анізотропією, важка вісь намагнічування якої перпендикулярна до основ зразка, товщиною у кілька магнітних довжин і діаметром понад десять обмінних довжин. Відомо, що основний стан магнітної підгратки такої частинки вже не буде однорідним: конкуренція між обмінною і диполь-дипольною взаємодією призведе до утворення так званого вихрового стану, який характеризується замкненим потоком намагніченості в площині диску і невеликою областю в центрі, де намагніченість напрямлена майже перпендикулярно до площини [97–99].

У циліндричній системі координат $\mathbf{r} = \{r, \chi, z\}$ магнітний вихор можна описати як [2, 100]

$$\theta = \theta(r), \quad \phi = q\chi + \phi_0, \quad (1.15)$$

Завихреність q грає роль топологічного заряду вихору. Вона визначає кількість обертів, які здійснює вектор намагніченості в просторі параметру порядку під час обходу вихору вздовж кола \mathcal{S}^1 далеко від центру солітону. Зазначимо, що розподіл із $q = -1$ прийнято називати антивихровим, а роз-

поділи з $|q| > 1$ є нестійкими у реальних системах. У початку координат полярний кут $\theta(0) = 0$ або π (відповідний напрямок намагніченості $\cos \theta(0)$ називають полярністю вгору або вниз і позначають $p = \pm 1$). На нескінченності значення θ прямує до певної константи θ_0 . За відсутності зовнішніх полів $\theta_0 = \pi/2$. Значення ϕ_0 визначається з межових умов. Врахування поверхневих магнітостатичних зарядів на бічній поверхні зразків призводить до вимоги $\phi_0 = \mathcal{C}\pi/2$, де $\mathcal{C} = \pm 1$ називають кіральністю. Для об'єктів виду (1.15) є ненульовим наступний топологічний інваріант (індекс Понтрягіна) [2, 3]

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{8\pi} \int_S \epsilon_{\alpha\beta} \mathbf{m} \left[\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_\alpha} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_\beta} \right] d\mathbf{r} = -\frac{qp}{2}, \quad (1.16)$$

де $\epsilon_{\alpha\beta}$ — символ Леві-Чевіти. Він встановлює ступінь покриття відображення поля намагніченості \mathbf{m} на двовимірну сферу $\mathcal{S}^2 = \{|\mathbf{m}|^2 = 1\}$ при русі по поверхні S . Магнітні вихори є топологічними магнітними солітонами, оскільки відповідні їм розподіли векторного поля не можна жодним неперервним перетворенням привести до основного стану — легкої площини, що виражається у нерівності $\mathcal{Q} \neq 0$ для них [2].

Вихор є основним станом магнітом'яких частинок циліндричної форми в широкому діапазоні розмірів, починаючи від десяти обмінних довжин у діаметрі (так званих, наноточок) [98, 99, 101]. У досить тонких зразках, в яких можна вважати намагніченість залежною лише від координат в площині, по-заплощинна структура вихору описується рівнянням [90]

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{1}{4\pi\ell^2} \sin \theta \int_0^R \cos \theta(r') \mathfrak{K}(r, r') r' dr' = 0, \quad (1.17)$$

де для дуже тонких дисків ядро інтегрування $\mathfrak{K}(r, r') = 4\pi\delta_D(r - r')/r$, а δ_D — δ -функція Дірака [90]. Хоча точний розв'язок (1.17) невідомий, можна вказати його асимптотичну поведінку для нескінченно тонкого зразка, коли

воно зводиться до диференційного рівняння [2]

$$\theta(r) \approx \begin{cases} \frac{r}{r_0}, & r \rightarrow 0 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{C_1}{\sqrt{r}} e^{-r/\ell}, & r \rightarrow \infty, h = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

де r_0 і C_1 — певні константи, ℓ — магнітна довжина (1.11), а $h = H/H_A$ — зовнішнє поле, нормоване на поле анізотропії ($H_A = 4\pi M_s$ за наявності виключно магнітостатичної взаємодії і $H_A = K/M_s$ для одноосьової анізотропії з коефіцієнтом K). При $h \in (0, 1)$ виконується $\theta(r) \approx \theta_0 - \frac{\ell^2}{r^2} \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$, де $\cos \theta_0 = h$. Для розрахунку енергії вихору в нескінченій тонкій плівці Фельдкеллером було використано вираз [1]

$$\cos \theta(r) = e^{-r^2/2(w\ell)^2}, \quad (1.19)$$

де w — ширина осердя вихору, нормована на магнітну довжину ($w = 1$ за відсутності полів). При збільшенні товщини зразка завдяки впливу магнітостатичних полів осердя вихору в зрізі набуває бочкоподібної форми [88, 100]. Зазначимо, що інколи використовують й інші репрезентації форми вихору [88, 102, 103].

1.1.3.2 Методи зміни полярності вихорів Обидві характеристики вихору — полярність і кіральність — можна змінювати впливом зовнішніх полів, чи струмів [14, 19, 28, 104–106]. В неперервній моделі (1.12) вихори з протилежними полярностями розділені нескінченим енергетичним бар’єром. У дійсності ж він є скінченим через дискретність спінової гратки, що для неперервного поля намагніченості можна враховувати введенням в центрі вихору радіусу відсічки порядку a_0 [107], або врахуванням вищих похідних у виразі для густини обмінної енергії [108].

Зміну полярності вперше було розглянуто в роботах [12, 13], де обговорювався вихор у двовимірному гайзенбергівському магнетику. Пізніше були

розвинуті й перевірені експериментально методи перемикання вихорів у наноточках. Можна казати про дві концепції зміни полярності вихору: зовнішніми магнітними полями або спіновим струмом, і два відомі сценарії перебігу цього процесу: аксіально-симетричний і аксіально-асиметричний. У першому сценарії вихор не здійснює макроскопічного руху і зміна полярності відбувається шляхом взаємодії з аксіально-симетричними магнітними модами (це стосується прикладання сталих [14, 52, 107, 109] і змінних магнітних полів в площині, перпендикулярній до поверхні зразка [17, 18, 49]). Аксіально-асиметричний сценарій пов'язаний із нелінійним резонансом між зв'язаними магнітними модами [110, 111] і відбувається з утворенням пари вихор-антивихор, полярності яких протилежні до полярності початкового вихору, а динаміка супроводжується їх рухом по зразку [16, 19, 112]. У даній роботі буде обговорюватися аксіально-симетричний сценарій.

Історично першим методом перемикання полярності вихорів, реалізованим експериментально у пермалоєвих наноточках різного радіусу, було прикладання сталого магнітного поля в напрямку, протилежному до початкової полярності [14, 101]. Таке поле знімає виродженість системи за напрямком полярності вихору в ній: енергетично вигіднішим є вихор, чия полярність направлена за полем («легкий»), а вихор з протилежною полярністю є невигідним («важкий»). В той час як за відсутності поля, характерним масштабом вихору є магнітна довжина ℓ , див. вираз (1.19), поле змінює її. Зокрема для $h \rightarrow 1$, можна навести наступні оцінки [102]:

$$w_{\text{light}} = \frac{1}{\sqrt{1-h}}, \quad w_{\text{heavy}} = \sqrt{\frac{1-h}{2}}. \quad (1.20)$$

Описане зняття виродження за полярністю призводить до гістерезисного характеру перемагнічування наноточок [107, 113]. Недоліком цього методу є необхідність у прикладанні сильних магнітних полів величиною порядку 1 Т [14].

Іншу групу методів зміни полярності вихорів складають резонансні збуд-

ження змінними полями. Їх перевагою є значно менші поля, необхідні для процесу. Монокроматичне поле, прикладене у площині зразка призводить до гіроскопічного руху вихору. Його напрямок визначається знаком вираzu (1.16). Зі збільшенням амплітуди поля поруч із початковим вихором утворюється вихор і антивихор протилежних полярностей. Антивихор аніглює з початковим вихором і процес перемикання завершується. Відповідний експеримент було проведено в роботі [19], де було використано магнітне поле частотою 250 МГц і амплітудою 0,1 мТ.

У 2012 році вийшло дві незалежні роботи [17, 18], у яких автори чисельно дослідили перемикання вихору прикладанням змінного поля перпендикулярно до площини зразка. Однорідне монокроматичне поле збуджує набір радіально-симетричних мод. За достатньої амплітуди збудження їх взаємодія з осердям вихору призводить до зміни полярності за час, що може сягати 600 пс. Необхідні поля при цьому вищі, ніж зазначені у роботі [19] — від 20 мТ на резонансній частоті, але все одно значно менші, ніж поля статичного перемикання [14].

1.1.4 Хаотична динаміка у магнетизмі

Фізичні системи і їх математичні моделі, які описуються нелінійними диференційними рівняннями, часто характеризуються тим, що у фазовому просторі сусідні траекторії з часом розбігаються. Тобто навіть за нескінченно малої різниці між двома різними наборами початкових умов, стани системи через досить тривалий час будуть суттєво різнятись. Таким чином, поведінка системи, яка описується детермінованими рівняннями, стає непередбачуваною. Це явище називають детермінованим або динамічним хаосом, на відміну від ситуацій, де наявні випадкові, або непередбачувані впливи чи параметри [114, 115]. Воно характерне для систем з більше ніж одним ступенем свободи [116]. Одною з найбільш простих моделей, яка часто зустрічається на

практиці, є осцилятор Дуффінга, який відрізняється від лінійного осцилятора наявністю кубічної та, опційно, квадратичної нелінійностей. Яскравим макроскопічним прикладом цієї моделі може слугувати балка Муна (англ. Moon beam): металевий стрижень, закріплений з одного кінця між двома магнітами під дією періодичної рушійної сили [117].

Хаотична динаміка також характерна для мікро- і нанорозмірних магнітних систем, де вона обумовлюється різними причинами. Наприклад, це можуть бути переорієнтація намагніченості між енергетично еквівалентними напрямками під дією періодичного збудження аналогічно до балки Муна [118]. Багата динаміка намагніченості від різних регулярних до хаотичного режимів спостерігається у спінtronних наноосциляторах під дією сталого спін-поляризованого струму. Відомо, що існує певний інтервал густин струмів, принаймні, для досить широких зразків, за яких починяється хаотична динаміка намагніченості, супроводжувана випадковою появою та анігіляцією вихор-антивихрових пар [119–122]. При цьому, можливі різні сценарії переходу до хаосу. Зокрема, було описано переходи через біфуркації подвоєння періоду [122, 123] і утворення сходинок Кантора [124]. Хаотична динаміка природнім чином спостерігається за прикладання змінних магнітних полів для наночастинок в однодоменному [125] і вихровому станах [48, 126, 127].

1.1.5 Висновки до огляду

Впродовж останніх десятиліть активно розвиваються методи впливу на полярність магнітних вихорів у зразках субмікронного розміру. На сьогодні, мікромагнітні моделювання є звичним засобом дослідження наномагнетиків [128]. Теоретично й експериментально розвинуті методи перемикання полярності сталими магнітними полями та шляхом утворення вихор-антивихрової пари. Одним з найновіших методів є прикладання змінного поля в площині, перпендикулярній до поверхні зразка [17, 18], що призводить до

перемагнічування осердя вихору шляхом його взаємодії з радіально симетричними магнонними модами. Проведені авторами чисельні моделювання викликають значну практичну зацікавленість завдяки субнаносекундним часам перемикання. При цьому відкритими залишаються питання як загальних властивостей і аналітичного опису динаміки вихору під дією такого впливу, так і можливої швидкодії магнітної пам'яті, яка використовує цей метод.

1.2 Регулярна і хаотична динаміка вихорів під дією періодичного магнітного поля

Однорідне монохроматичне магнітне поле, прикладене вздовж вісі феромагнітної наночастинки циліндричної форми у вихrovому стані, збуджує радіально симетричні магнонні моди, які можуть викликати зміну полярності вихору [17, 18]. Далі в цьому і наступному підрозділах розглянуто, які саме типи динаміки вихорів можливі під дією такого збудження, за яких умов при цьому досягається контрольована зміна полярності вихору (тобто, гарантована зміна полярності з $p = +1$ на $p = -1$ або навпаки) і запропоновано аналітичний опис досліджуваної системи.

1.2.1 Чисельні моделювання

Нами було досліджено динаміку намагніченості в наночастинці у формі диску під дією змінного магнітного поля

$$\mathbf{B}(t) = e_z B_0 \sin(2\pi ft), \quad (1.21)$$

прикладеного вздовж вісі зразка. Для чисельних розрахунків використовувався пакет мікромагнітних моделювань OOMMF [129] (із використанням методу інтегрування RK5(4)7FC). Матеріальні параметри обрано відповідно

пермалою ($\text{Ni}_{81}\text{Fe}_{19}$) з обмінною сталою $A = 26 \text{ пДж}$, намагніченістю насычення $M_s = 860 \text{ кА/м}$, нульовим коефіцієнтом анізотропії і сталою релаксації Гільберта $\alpha = 0,01$, що є типовими параметрами для цього матеріалу [130]. Розміри диску 198 нм у діаметрі і 21 нм товщиною обрано як середні значення зразків, які досліджувались у роботах [17, 18], із використанням просторової сітки інтегрування з комірками розміром $3 \times 3 \times 21 \text{ нм}$ (моделювання із тривимірною сіткою обговорюватимуться нижче). Для всіх моделювань в ООММФ задано початковий вихровий стан із полярністю вгору і напрямком намагніченості в площині проти годинникової стрілки.

Динамічні процеси у феромагнетиках пов'язані як з переорієнтацією магнітних моментів в них, так і з їх невеликими відхиленням від рівноважного стану, які порушують феромагнітне впорядкування. Останнє спостерігається як когерентна динаміка магнітних моментів з різними координатами й називається поширенням спінових хвиль або магнонів [85]. Зовнішнє симетричне збудження викликає появу магнонних мод на фоні вихору, які можна представити у вигляді малих відхилень від стаціонарного розподілу (1.15) [111, 131]:

$$\theta_1 = \theta(r) + \vartheta_{\text{magn}}, \quad \phi_1 = q\chi + \frac{\varphi_{\text{magn}}}{\sin \theta(r)}, \quad (1.22)$$

де відхилення ϑ_{magn} і φ_{magn} можуть бути представлені у вигляді сум

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{magn}} &= \sum_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(C_1^{\text{magn}}(t) \mathcal{F}_{(k,n)}^{\text{magn}} e^{i(k\chi + 2\pi f_m^n t)} + \text{к. с.} \right), \\ \varphi_{\text{magn}} &= \sum_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(C_2^{\text{magn}}(t) \mathcal{G}_{(k,n)}^{\text{magn}} e^{i(k\chi + 2\pi f_m^n t)} + \text{к. с.} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Тут індекс n визначає кількість вузлів у радіальному напрямку, а k — в азимутальному. Через «к. с.» позначено комплексне спряження. Для визначення резонансної частоти зміни полярності вихору, нами було збуджено найнижчі аксіально-симетричні спінові хвиль дією прямокутного імпульсу амплітудою 30 мТ і тривалістю 100 пс, прикладеного вздовж вісі нанодиску в такий самий

способ, як було зроблено у роботі [17]. Під дією такого імпульсу, намагніченість починає осцилювати: збуджується набір симетричних магнонних мод $f_{k=0}^n$ (тут нижній індекс позначає кількість вузлів у просторовому розподілі хвилі в циркулярному напрямку, а верхній — у радіальному). За допомогою швидкого перетворення Фур'є для z -компоненти сумарної намагніченості в інтервалі $t \in [100 \text{ пс}; 20 \text{ нс}]$, було визначено власну частоту найнижчої симетричної моди $f_{k=0}^{n=1} = 13,98 \text{ ГГц}$. Інші піки у спектрі Фур'є відповідають $16,75 \text{ ГГц}$ і $27,93 \text{ ГГц}$.

Наразі відомо [18], що перемикання полярності вихору під дією змінного магнітного поля (1.21) відбувається у широкому діапазоні параметрів поля (індукція B_0 і частота f). Найменше значення індукції поля досягається поблизу резонансної частоти f_0^1 . У даній роботі ми досліджували тривалу в часі динаміку вихорів, яка супроводжується аксіально-симетричним механізмом перемикання. В усіх чисельних експериментах ми розраховували полярність і місце розташування вихору як функції часу: позиція вихору $\mathbf{R}(t)$ визначалася як перетин ізоповерхонь $m_x(\mathbf{r}) = 0$ і $m_y(\mathbf{r}) = 0$ [16], а динамічна полярність вихору $p(t)$ (значення полярності вихору, яке тепер залежить від часу і через ефективну дискретність системи може бути по модулю меншим одиниці, тобто, актуальна намагніченість в центрі осердя вихору) визначалася як усереднення компоненти намагніченості вздовж осі z в чотирьох найближчих до $\mathbf{R}(t)$ комірках.

Для детального дослідження еволюції полярності вихору в часі, ми моделювали довготривалу динаміку системи з кроком в 1 пс у широкому інтервалі параметрів поля (індукція B_0 змінювалася від 10 до 500 мТ, а частота поля f — від 3 до 21 ГГц). Для побудови діаграми динамічних станів використовувались різні кроки зміни параметрів: 10 мТ і 1 ГГц в інтервалі $9 \div 19 \text{ ГГц}$ і $10 \div 180 \text{ мТ}$, 10 мТ і 0,5 ГГц у діапазоні $3 \div 8,5 \text{ ГГц}$ і $100 \div 500 \text{ мТ}$ вздовж межі області перемикань в координатах (f, B_0) , 50 мТ і 1 ГГц для всіх інших

діапазонів. Для частот $f > 8,5 \text{ ГГц}$ повний час моделювання був 10 нс (продовжувався до 30 для деяких точок (f, B_0)) і для частот $f \leq 8,5 \text{ ГГц}$ повний час моделювання був 5 нс.

Результати підсумовано у діаграмі динамічних режимів, див. рис. 1.1. В залежності від параметрів поля (f, B_0) , можна виділити наступні динамічні режими: (i) відсутність перемикань, (ii) хаотична динаміка полярності, (iii) регулярні перемикання з частотами, які залежать від частоти прикладеного поля, (iv) переривчасті перемикання і (v) вихоро-магнонна динаміка, де вихор виходить з центру зразка.

(i) *Відсутність перемикань.* Якщо амплітуда прикладеного поля досить мала, то починаються лінійні або слабконелінійні осциляції динамічної полярності (відмічені квадратами на рис. 1.1). Слабке накачування системи (індукції полів $B_0 \lesssim 5 \text{ мT}$, див рис. 1.2) призводять до резонансу на частоті f_0^1 . Зростання індукції магнітного поля призводить до нелінійної динаміки. Однак, якщо її недостатньо для перемикання, спостерігається лише крива нелінійного резонансу. Окрім цього, нелінійність призводить до нестійкості полярності вихору (буде обговорюватися нижче серед аналітичних результатів), а також до биття коливань полярності, див. рис. 1.2(a) і зсуву основного піку в спектрі Фур'є, див. рис. 1.2(b).

Тепер розглянемо групу динамічних режимів, за яких відбувається перемикання полярності. Діаграма перемикань (див. рис. 1.1) має два добре виражених мініуми. Перший відповідає резонансному збудженню радіально симетричної моди f_0^1 . Другий, поблизу 18 ГГц, імовірно, відповідає динаміці поблизу вищих резонансів [18].

(ii) *Хаотична динаміка полярності.* Жовтими кругами  на діаграмі перемикань (див. рис. 1.1) позначено точки, які відповідають хаотичному перемиканню полярності вихору, який знаходиться в центрі зразка. Типову часову еволюцію наведено на рис. 1.1(c). Для висновків про хаотичну динаміку

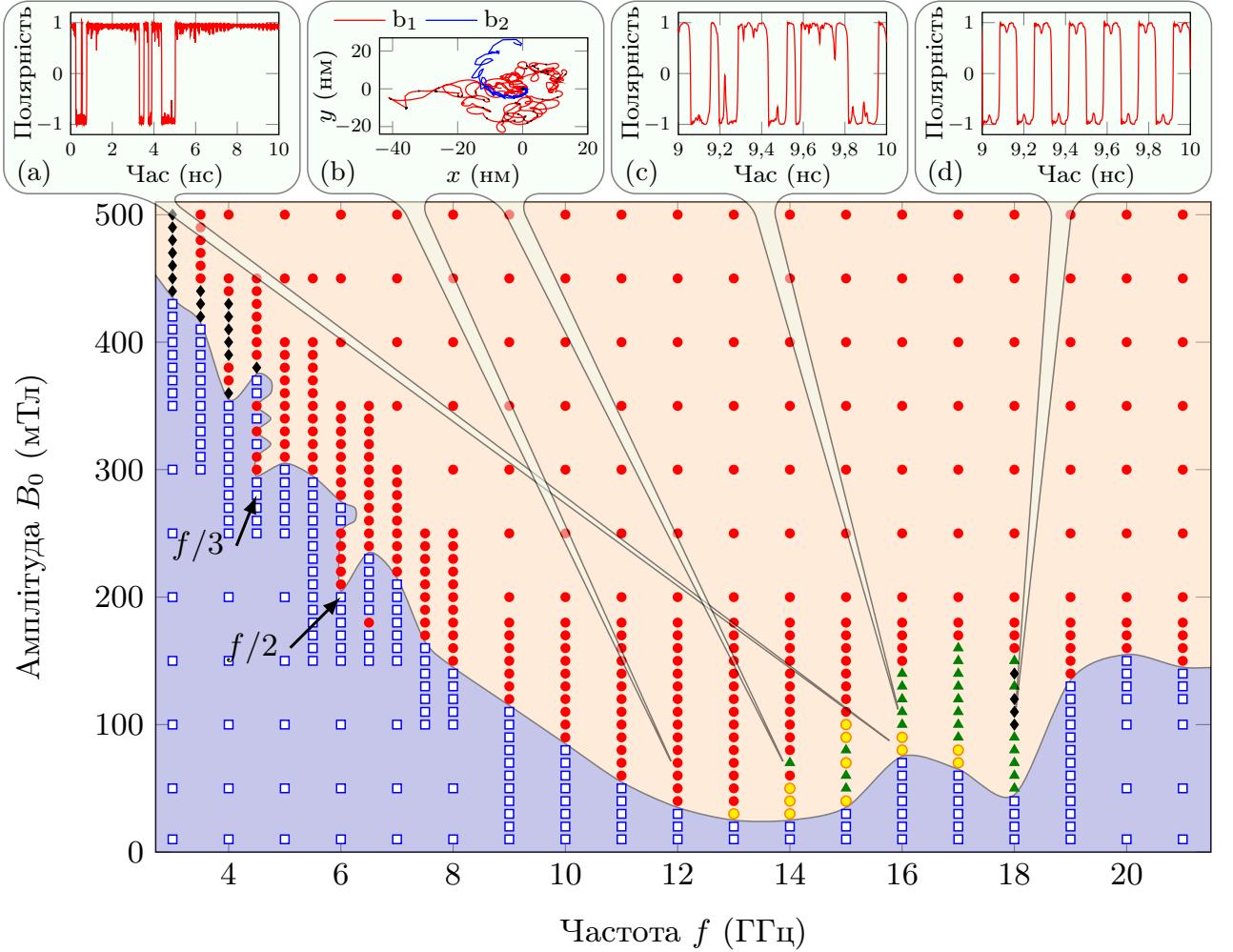


Рис. 1.1: Діаграми перемикання: порожніми квадратами \square позначено динаміку вихору без перемикання, інші позначки відповідають параметрам, де спостерігалась зміна полярності (червоні круги \bullet відповідають параметрам, де вихори виходили з центру зразка протягом перших 10 нс, жовті круги \odot відповідають параметрам, де автокореляційна функція (1.24) швидко спадала, ромби \blacklozenge відповідають періодичному процесу перемикання, а зелені трикутники \blacktriangle — переривчастому процесу). (а) Зразок переривчастого процесу. (б) Зразки траекторій вихорів у випадку складної динаміки. Чорні точки відповідають місцям зміни полярності. Траекторії b_1 і b_2 відповідають частотам 12 ГГц і 14 ГГц. (с) Зразок хаотичної динаміки. (д) Зразок періодичного процесу.

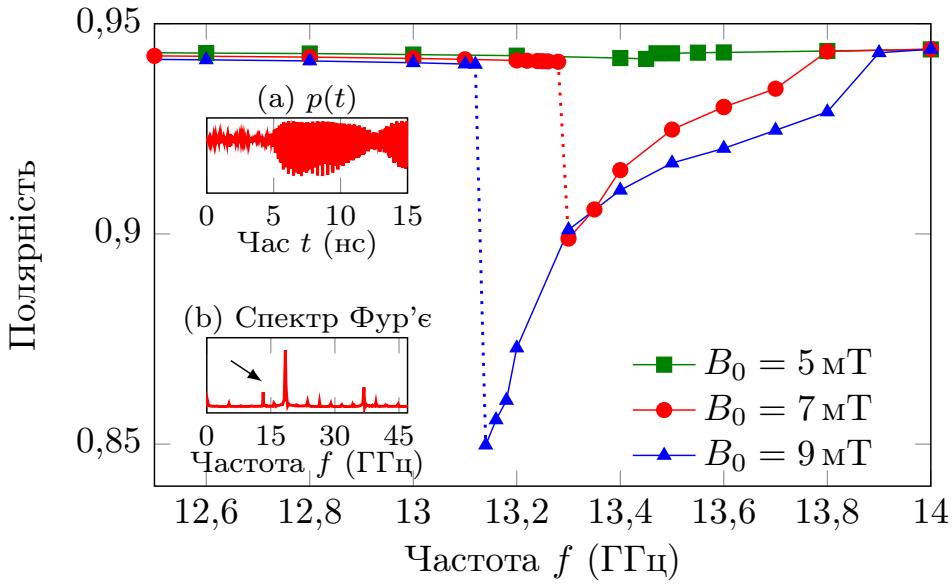


Рис. 1.2: Резонансні криві, отримані з мікромагнітних моделювань. Вставки: (a) часова еволюція полярності, (b) спектр Фур'є коливань полярності для $B_0 = 9 \text{ мТ}$, $f = 13,2 \text{ ГГц}$ протягом 15 нс. Стрілкою позначено частоту накачування.

та ін кількісних вимірювань, ми використали два стандартні методи: розрахунок автокореляційної функції для часової динаміки полярності вихору й аналіз спектру Фур'є [115].

Спочатку було визначено автокореляційну функцію сигналу полярності вихору

$$C(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p(t_{i+j})p(t_j), \quad i = \overline{1, N} \quad (1.24)$$

для дискретизованого часу $t_j = jt_0$ з кроком $t_0 = 1 \text{ пс}$ і нульовими межовими значеннями. Добре відомо [115], що для хаотичного сигналу, інформація про його попередні значення втрачається, тобто сигнал є скорельованим лише з його нещодавніми значеннями: автокореляційна функція спадає дуже швидко, $C(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ [115]. Для періодичного сигналу, автокореляційна функція $C(t)$ є також періодичною. Типовий приклад зображенено на рис. 1.3: автокореляційна функція $C(t)$ є аперіодичною і швидко спадає для магнітно-

го поля амплітудою 70 мТ і частотою 14 ГГц, що відповідає хаотичній динаміці. Автокореляція для регулярної динаміки характеризується регулярними осциляціями під дією поля амплітудою $B_0 = 110$ мТ і частотою $f = 18$ ГГц.

Інший шлях полягає у розрахунку спектру Фур'є хаотичного сигналу. Типовий спектр Фур'є наведено на рис. 1.4. Для хаотичного режиму характерним є неперервний спектр, який переважає над дискретними піками (можна побачити, що на рис. 1.4 чітко вирізняється лише один окремий пік, який відповідає частоті накачування). Наведений сигнал відповідає типовому спектру рожевого шуму із законом спадання густини потужності $\mathcal{F}(f) \sim 1/f^\beta$ з $\beta \approx 0,77$. (На відміну від частотно-незалежного білого шуму, рожевий шум характеризується спектром вигляду $1/f^\beta$, де $\beta \in (0,2)$, див. [132, с. 102].)

(iii) *Регулярні перемикання.* Регулярні осциляції полярності вихору виникають на високих частотах полів, див. чорні ромби на діаграмі перемикань рис. 1.1, 1.1(d). Нами було помічено періодичну поведінку полярності вихору на частотах прикладеного поля 18 ГГц з амплітудами вище за 100 мТ. Основний пік у спектрі Фур'є відповідав 6 ГГц, тобто на одній третій від частоти накачування. Інші піки з амплітудою, яка зменшувалася, виникали із кроком 6 ГГц. Ми порівняли автокореляційну функцію для регулярної та хаотичної динаміки, див. рис. 1.3. На відміну від хаотичного режиму, $C(t)$ для періодичних осциляцій характеризується високою періодичністю й амплітудою, яка повільно спадає (останнє викликано скінченим часом спостереження).

Для порівняння часової динаміки полярності у хаотичному і регулярному режимах, було розраховано псевдофазові траекторії. Метод псевдофазового простору часто використовується у випадках, коли відбуваються вимірювання лише одної змінної, в нашому випадку, дискретизованої в часі полярності вихору $p(t_i)$ [115]: будеється залежність величини $p(t_{i+1})$ від її попереднього значення $p(t_i)$. При цьому значення кроку по часу $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ впливає лише на форму графіку. У випадку хаотичної динаміки отримую-

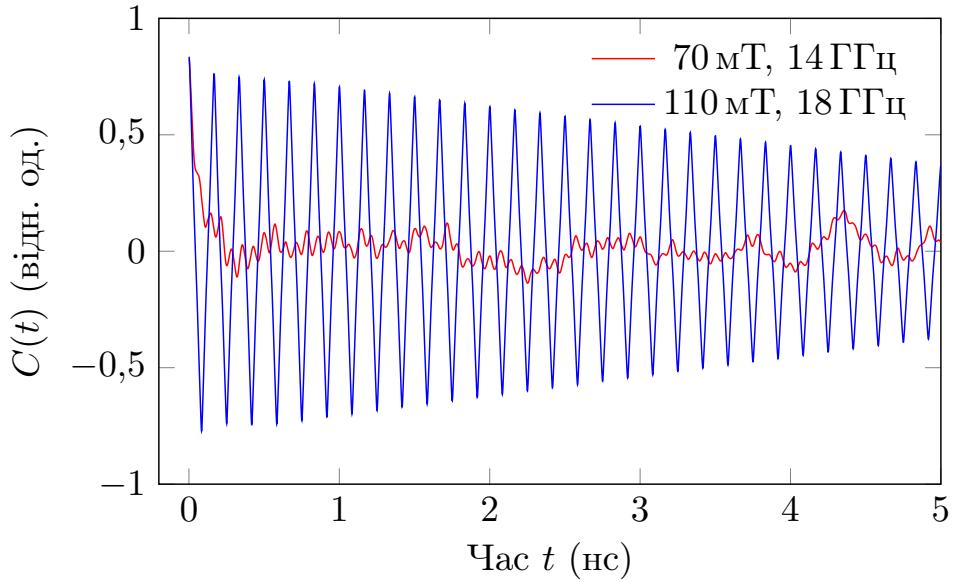


Рис. 1.3: Автокореляційна функція (1.24) для $B_0 = 110$ мТ і $f = 18$ ГГц (синя лінія) і $B_0 = 70$ мТ і $f = 14$ ГГц (червона лінія). Перший процес характеризується регулярною поведінкою з періодичною автокореляційною функцією $C(t)$ а другий — хаотичною, із $C(t)$, яка швидко спадає.

ться незамкнені траекторії у псевдофазовому просторі $(p(t_i), p(t_{i+1}))$, див. рис. 1.5(a). У випадку регулярної динаміки, псевдофазові траекторії замкнені, див. рис. 1.5(b). Обидві траекторії наведено для перших 10 нс динаміки: в першому випадку траекторія руху кожен раз вкладає петлю навколо рівноважного значення полярності в різних місцях, а в другому випадку всі петлі збігаються одна з одною. Нижче буде наведено фазові траекторії для аналітичної моделі, див. рис. 1.14(a), 1.14(d).

(iv) *Переривчасті перемикання.* Зелені трикутники на діаграмі перемикань (див. рис. 1.1) відповідають переривчастому процесу. Типовий приклад відповідної часової динаміки наведено на рис. 1.1(a): магнітний вихор може зберігати початкову полярність протягом тривалого часу (кілька наносекунд) після кількох послідовних процесів перемикання загальною тривалістю 50—100 нс. Необхідно зазначити, що в околі інших динамічних режимів спостері-

галось, що полярність вихору може виявитись «замороженою» після кількох перемикань на весь час спостереження, який залишався. Наприклад, два перемикання відбулося протягом перших 1,2 нс ($B_0 = 30$ мТ, $f = 14$ ГГц, див. рис. 1.1(a)), після чого були наявні лише слабкі осциляції. Схожа картина спостерігалась для $B_0 = 70$ мТ і $f = 17$ ГГц, де після трьох перемикань протягом першої наносекунди, фінальна полярність залишилась від'ємною. Оскільки перемикання спостерігались лише на початку динаміки, можна зробити висновок, що це відбувалось через негладке вмикання зовнішнього поля.

(v) *Вихорово-магнонна динаміка, яка супроводжується виходом вихору з центру зразка.* Останній динамічний режим відповідає параметрам (f , B_0), де вихор виходить з центру зразка на тривалому інтервалі спостереження (див. червоні кола на рис. 1.1). Типово, вихор починає рухатись протягом перших 10 нс. Детальний аналіз свідчить, що сценарій перемикання суттєво змінюється від описаного вище: в цьому випадку зміна полярності супроводжується тимчасовим утворенням пари вихор-антивихор [19, 112]. Приклади двох типових траєкторій наведено на рис. 1.1(b): траєкторія b_1 відповідає хаотичному руху, який супроводжується численними перемиканнями. В регулярному режимі траєкторія вихору має гладку форму (див. b_2). Коли вихор знаходиться в центрі зразка, зміна полярності супроводжується генерацією радіально симетричних мод. Після деякого часу спостереження з'являється чотирикратна симетрія структур намагніченості навколо вихору, що пов'язано з квадратною симетрією просторової ґратки інтегрування ООММФ, як було відмічено в [18]. Після виходу вихору з центру і утворення вихор-антивихорових пар подальша магнонна динаміка стає непередбачуваною.

Окремо було проведено моделювання тривалої динаміки (до 30 нс) для всіх параметрів діаграми перемикань, де вихор не покинув центр диску (див. рис. 1.1): вихор починає рухатись для всіх параметрів з $f < 17$ ГГц. Для вищих частот (наприклад, $f = 18$ ГГц і $B_0 = 100$ мТ) лише малі осциляції

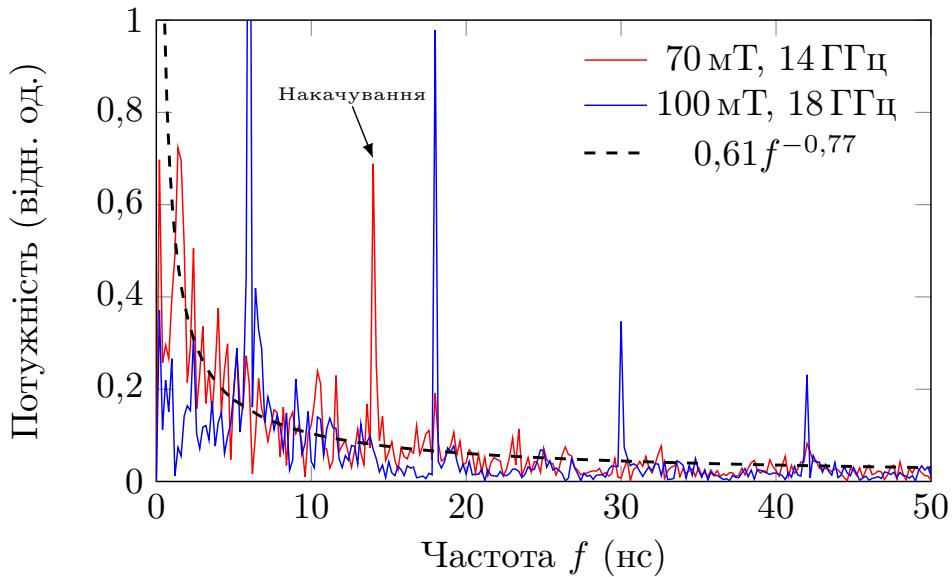


Рис. 1.4: Спектр Фур'є полярності вихору при параметрах прикладеного поля $B_0 = 70$ мТ, $f = 14$ ГГц (хаотична динаміка): червона крива відповідає чисельним даним, чорна штрихова — апроксимація рожевим шумом. Синя крива відповідає спектру регулярної динаміки під дією поля $B_0 = 100$ мТ, $f = 18$ ГГц.

координат вихору були помічені для $t > 29$ нс. У продовжених моделюваннях (iv) полярність вихору не змінювалася впродовж усього часу спостереження, що узгоджується з наведеним вище висновком, що ввімкнення поля було досить різким.

Діаграма перемикань має кілька особливостей для низькочастотного діапазону. На ній можна побачити два локальних мініуми ($4,5$ ГГц і 6 ГГц), які відповідають резонансам на дробових частотах ($\frac{1}{3}f_0^1$ і $\frac{1}{2}f_0^1$). Сильне поле спричиняє перемикання полярності, яке відповідає квазістатичному режиму, в той час як слабші поля призводять до виходу вихору з центру системи. Нами було перевірено гіпотезу квазістатичний режим розрахунком критичного сталого поля перемикання, яке в нашому випадку виявилося рівним 611 мТ, що є близьким до відомих значень [52, 107].

Зазначимо, що в усіх моделюваннях, які було обговорено вище, використо-

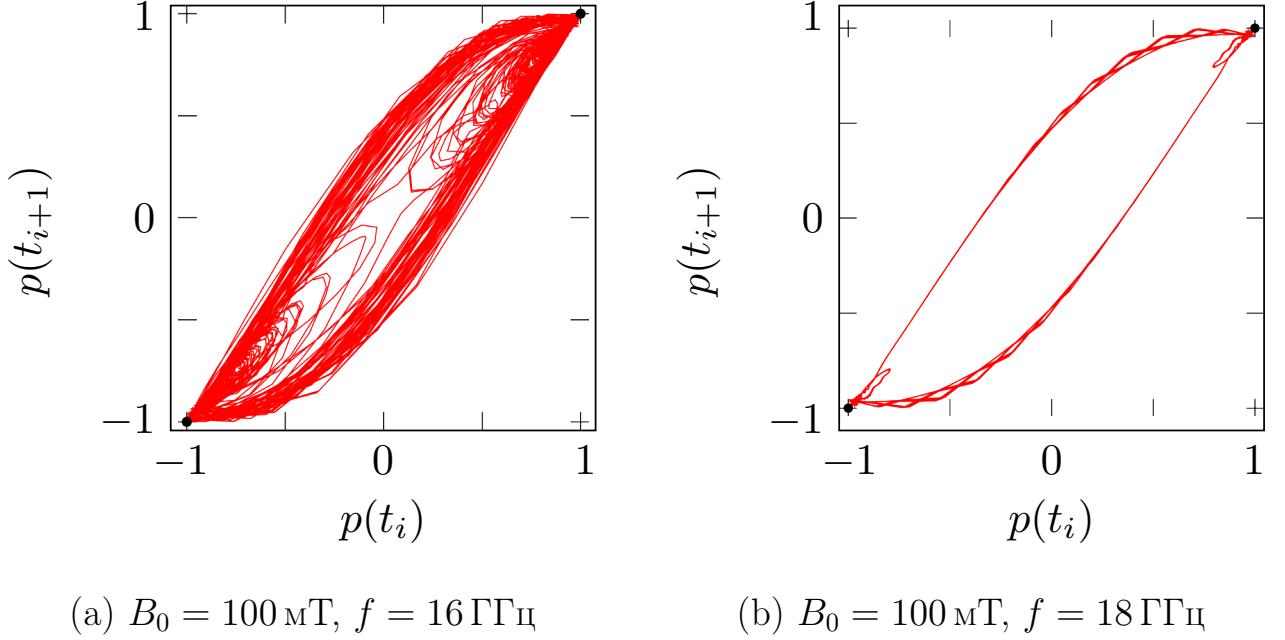


Рис. 1.5: Псевдофазові діаграми хаотичної динаміки полярності (а) з кроком по часу 1 нс (чорні точки позначають полярності $p = \pm 1$), і регулярної динаміки полярності (б).

вувалася ефективна двовимірна сітка просторового інтегрування $3 \times 3 \times 21 \text{ нм}$. Для перевірки зроблених висновків про однорідну намагніченість вздовж z -координати, також було проведено тривимірні моделювання в ООММФ з сіткою $3 \times 3 \times 3 \text{ нм}$. Можна побачити, що власні частоти й межі динамічних режимів трохи змістилися через неоднорідність розподілу в товщі зразка, див. рис. 1.6. Відомо, що зміна полярності вихору під дією перпендикулярного до поверхні зразка сталого магнітного поля супроводжується тимчасовим утворенням і анігіляцією точки Блоха [52] (детальніше про статику і динаміку точок Блоха див. розділ 2). Точка Блоха також виникає під дією змінного магнітного поля, як було відмічено у [18]. Вона є тривимірною мікромагнітною сингулярністю, тому не може спостерігатись у двовимірних моделюваннях. У проведених нами тривимірних моделюваннях спостерігалась нова картина зміни полярності, коли деякі акти перемикання не були завершенні: вихор біля одної поверхні диску швидко змінював полярність на протилежну, а по-

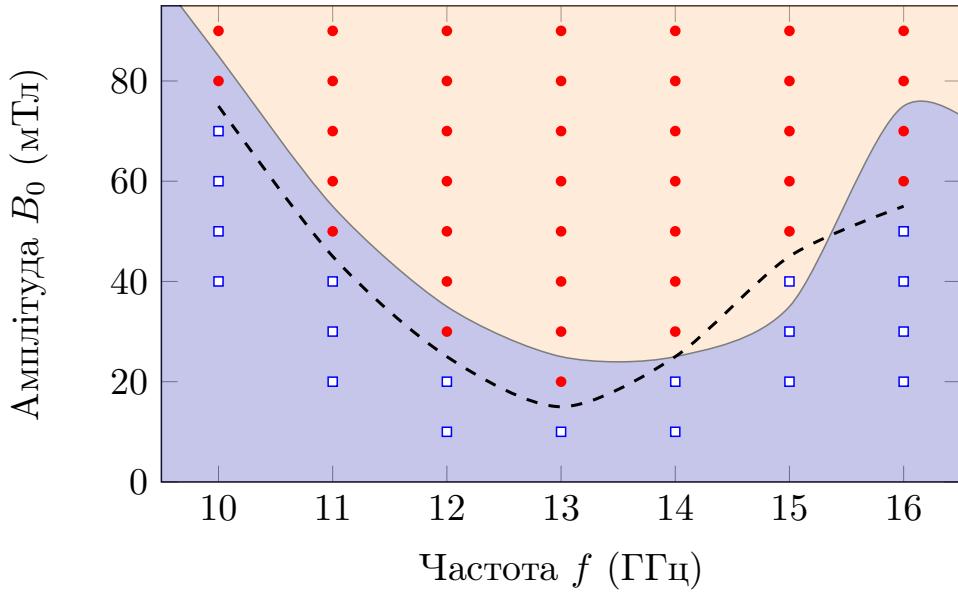


Рис. 1.6: Порівняння двовимірних і тривимірних моделювань. Точки відповідають тривимірним моделюванням: червоні круги відповідають наявності перемикання, білі квадрати — динаміка без перемикання. Пунктирна лінія позначає межу між двома областями в тривимірних моделюваннях, фоновий колір відповідає двовимірним моделюванням, див. рис. 1.1.

тім повертається у початковий стан, в той час як вихор біля нижньої поверхні зразка залишав напрямок полярності незмінним весь цей час.

Окремо було чисельно досліджено динаміку вихорів для зразків інших геометрических розмірів: з таким самим діаметром 198 нм і товщиною 33 нм, з діаметром 360 нм і товщиною 21 і 33 нм під дією п'яти різних пар індукції та частоти прикладеного магнітного поля (10 ГГц, 60 мТ), (13 ГГц, 60 мТ), (13 ГГц, 80 мТ), (13 ГГц, 100 мТ), (18 ГГц, 100 мТ). Відмітимо, що якісна поведінка системи, описана в даному підрозділі, не змінювалася, хоча геометричні параметри впливають на частоти магніонних мод і порогові поля перемикання.

1.2.2 Аналітичний опис

Для аналітичного опису динаміки вихору під дією змінного магнітного поля, прикладеного вздовж вісі зразка, запропоновано два підходи в рамках моделі двовимірного гайзенбергівського магнетика з ефективною легкоплощинною анізотропією:

- *Двопараметрична модель відсічки* описує процес перемикання в термінах колективних змінних, якими виступають динамічна полярність вихору та амплітуда підкручування фази намагніченості в площині зразка. Можливість перемикання досягається введенням радіусу відсічки, завдяки чому бар'єр між двома протилежними полярностями стає скінченним.
- *Модель вихрового осердя* дозволяє розглядати явище перемикання в дискретній ґратці, обмежуючи розмір вихрового осердя чотирма магнітними моментами, вважаючи всі інші «замороженими» в площині у вихровому розподілі. Даною моделлю є значно простішою, ніж модель відсічки й використовувалася для опису перемикання полярності вихорів [12, 13, 133] дозволяючи зробити глибший аналітичний аналіз вихрової динаміки, але не може претендувати на кількісний опис.

1.2.2.1 Двопараметрична модель відсічки Розглянемо гайзенбергівський магнетик у формі диску радіусом R і досить малою товщиною L , такою, що розподіл намагніченості в ньому можна вважати ефективно двовимірним. Його енергія може бути записана у вигляді

$$\frac{E}{KL} = \frac{\ell^2}{2} \int_{a_0}^R r dr \int_0^{2\pi} d\chi \left[\frac{(\nabla m)^2}{1 - m^2} + (1 - m^2) (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{\ell^2} - \frac{2mh(\tau)}{\ell^2} \right], \quad (1.25)$$

де джерелом легкоплощинної анізотропії з коефіцієнтом K є магнітостатична взаємодія, зовнішнє поле $h(\tau) = h \sin \omega \tau$ з безрозмірним часом $\tau = \omega_M t$ і

частотою $\omega_m = \gamma_e K/M_s$, нижня межа інтегрування $a_0 \sim a$ — радіус відсічки, який використано для врахування ефектів дискретності. Динаміка намагніченості визначається рівняннями (1.14), яким відповідає лагранжиан

$$L = G - E, \quad \frac{G}{KL} = \int_{a_0}^R r dr \int_0^{2\pi} d\chi (1 - m) \dot{\phi} r dr d\chi \quad (1.26)$$

і дисипативна функція

$$\frac{F}{KL} = \frac{\alpha \omega_m}{2} \int_{a_0}^R r dr \int_0^{2\pi} d\chi \left[\frac{\dot{m}^2}{1 - m^2} + (1 - m^2) \dot{\phi}^2 \right] r dr d\chi. \quad (1.27)$$

Тут і нижче крапка над символом позначатиме похідну за безрозмірним часом τ .

В задачах зі зміни полярності спін-поляризованим струмом [20] і сталим магнітним полем в тонких зразках [107] ефективно зарекомендував себе аналітичний підхід, в якому зміна форми вихору трактується як масштабування функції (1.19), яка описує статичний вихор. Нижче для опису процесу перемикання нами пропонується аналітична модель, яка використовує наступний двопараметричний анзац для намагніченості:

$$m(r, \tau) = \mu(\tau) \mathcal{F}\left(\frac{r}{\ell}\right), \quad \phi(r, \tau) = \chi \pm \frac{\pi}{2} + \psi(\tau) \mathcal{G}\left(\frac{r}{\ell}\right), \quad (1.28)$$

де включене до розгляду найнижчу радіально-симетричну магнонну моду [111, 131]. Амплітуда вихрового осердя $m(a_0, \tau) = \mu(\tau)$ має зміст динамічної полярності й розглядається як колективна змінна разом з внутрішньоплощинною фазою підкручування $\psi(\tau)$. Функції $\mathcal{F}(x)$ і $\mathcal{G}(x)$ описують структуру вихору. Ми використали Гаусовий розподіл для обох функцій, $\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(x) = \exp(-x^2/2)$, що узгоджується з даними моделювань. Необхідно зазначити, що даний анзац описує аксіально-симетричний розподіл з найнижчою аксіально-симетричною магнонною модою: реальний розподіл дещо відрізняється

від функцій $f(x)$ і $g(x)$. Взяття до уваги вищих мод (з додатковими вузлами вздовж r) можливе, але нашою метою було зробити опис якомога простішим.

З використанням даного анзацу обрахована повна енергія набуває наступного вигляду:

$$\frac{E}{\pi KL} = \ell^2 \left[\ln \frac{R}{a_0} + \mathcal{E}_{\text{cm}}(\mu, \psi) \right]. \quad (1.29)$$

Функція $\mathcal{E}_{\text{cm}}(\mu, \psi)$ є ефективною енергією системи в нормованих одиницях:

$$\mathcal{E}_{\text{cm}} = -\frac{\kappa\mu^2}{2} + \frac{1}{2}\text{Li}_2(\mu^2) + \frac{\psi^2}{2} - \frac{\mu^2\psi^2}{8} - 2h\mu \sin \omega\tau. \quad (1.30)$$

Тут $\text{Li}_2(x)$ — ділогарифмічна функція [134], $\kappa = -(\ln a_{\text{cut}} + \gamma_{\text{Eu}} + 1)$, число $\gamma_{\text{Eu}} \approx 0,577$ — стала Ейлера і введено позначення параметру відсічки $a_{\text{cut}} = a_0^2/\ell^2 \ll 1$. Для позаплощинного вихору $\kappa > 0$.

Густини ефективних лагранжиану і дисипативної функції, нормовані на величину πKL , набувають вигляду

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{\ell^2}{2}\mu\dot{\psi} - \ell^2\mathcal{E}_{\text{cm}}, \\ \mathcal{F} &= \frac{\alpha\ell^2}{2} \left[-\frac{\dot{\mu}^2}{\mu^2} \ln(1 - \mu^2) + \dot{\psi}^2 - \frac{1}{2}\mu^2\dot{\psi}^2 \right] \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ефективні рівняння руху отримані як рівняння Ейлера—Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{X}_i}, \quad X_i = \{\mu, \psi\}, \quad (1.32)$$

набувають вигляду

$$\dot{\psi} = 2\kappa\mu + \frac{1}{2}\mu\psi^2 + \frac{2}{\mu} \ln(1 - \mu^2) + 4h \sin \omega\tau + 2\eta \frac{\dot{\mu}}{\mu^2} \ln(1 - \mu^2), \quad (1.33a)$$

$$\dot{\mu} = -\frac{1}{2}\psi(\mu^2 - 4) - \eta(\mu^2 - 2)\dot{\psi}. \quad (1.33b)$$

Ми почали аналіз з випадку відсутності дисипації $\alpha = 0$. Тоді можна легко виключити підкрутку ψ з рівнянь. Це дає наступний ефективний лаг-

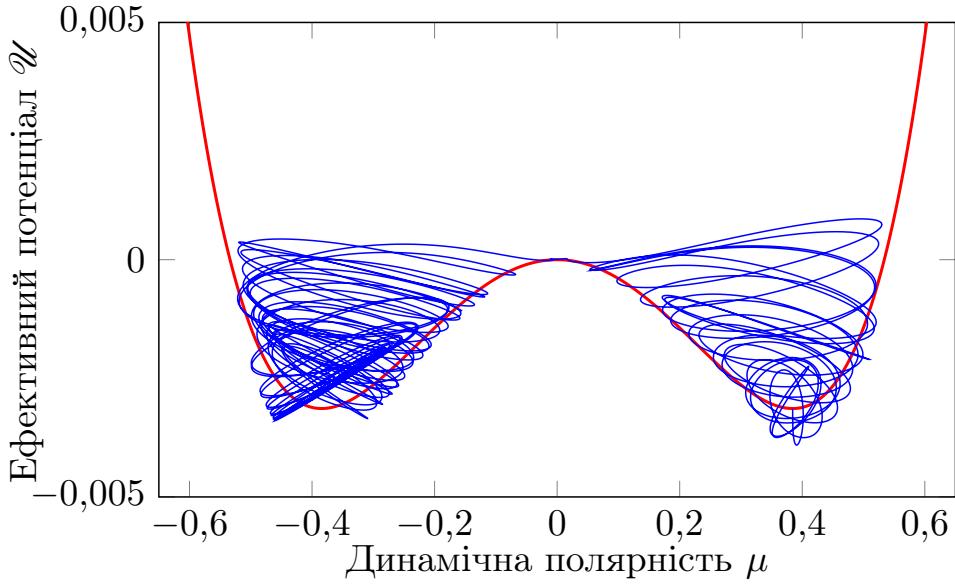


Рис. 1.7: Ефективний двоямний потенціал $\mathcal{U}(\mu)$, див. (1.34) (товста, червона лінія). Параметр відсічки $a_{\text{cut}} = 0,07$. Типова еволюція енергії як функції динамічної полярності $\mu(\tau)$ під дією періодичного накачування для однонапрямленного перемикання зображена тонкою синьою лінією як результат чисельного інтегрування рівнянь (1.33). Параметри системи: $h = 0,001$ з частотою $\omega = 0,7547$, релаксація $\alpha = 0,001$, початкові умови $\mu(\tau = 0) = \mu_0 = 0,384$, $\psi(\tau = 0) = 0$, час інтегрування $\tau_{\text{all}} = 5000$, траєкторію зображенено до моменту $\tau_{\text{sh}} = 500$.

ранжиан, який містить лише динамічну полярність:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{ef}}/\ell^2 &= \frac{1}{2}\mathcal{M}(\mu)\dot{\mu}^2 - \mathcal{U}(\mu) + 2\mu h \sin \omega \tau, \\ \mathcal{M}(\mu) &= \frac{1}{4 - \mu^2}, \quad \mathcal{U}(\mu) = -\frac{\kappa\mu^2}{2} + \frac{1}{2}\text{Li}_2(\mu^2). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Динаміку, яка ним описується, можна інтерпретувати як рух частинки з ефективною змінною масою $\mathcal{M}(\mu)$ в ефективному двоямному потенціалі $\mathcal{U}(\mu)$ під дією періодичного накачування. Типову форму потенціалу $\mathcal{U}(\mu)$ наведено на рис. 1.7: він має два енергетично еквівалентні основні стани з $\mu = \pm\mu_0$, які відповідають протилежним полярностям вихору. У моделі відсічки

μ_0 є ненульовим розв'язком трансцендентного рівняння

$$-\kappa\mu_0^2 = \ln(1 - \mu_0^2). \quad (1.35)$$

Для $a_{\text{cut}} = 0,07$, мінімум енергії відповідає $\mu_0 = 0,384$, див. рис. 1.7. Необхідно зазначити, що дана модель працює лише для випадку $|\mu| < 1$. Інший метод полягає у роботі з полярним кутом вихрового осердя θ_c , замість динамічної полярності $\mu = \cos \theta_c$. Нами було виконано перевірку, що використання θ_c призводить до такої ж фізичної картини, але ефективні рівняння мають менш зручну форму, тому тут наводиться опис системи лише в термінах динамічної полярності μ .

Динамічна полярність $\mu(\tau)$ задовольняє наступним рівнянням, див. (1.34):

$$\ddot{\mu} + \mathcal{M}\mu\dot{\mu}^2 - \frac{\kappa\mu}{\mathcal{M}} - \frac{\ln(1 - \mu^2)}{\mathcal{M}\mu} = \frac{2h}{\mathcal{M}} \sin \omega\tau. \quad (1.36)$$

Лінійні осциляції поблизу мінімуму потенціальної ями мають типову гармонічну форму:

$$\mu = \mu_0 + \mathcal{A}e^{i\omega_0\tau}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2(1 - \kappa + \kappa\mu_0^2)}{\mathcal{M}_0(1 - \mu_0^2)}}, \quad |\mathcal{A}| \ll 1, \quad (1.37)$$

де ефективну масу частинки, яка здійснює малі коливання поблизу мінімуму позначено як $\mathcal{M}_0 = 1/(4 - \mu_0^2)$, а ω_0 є власною частотою коливань.

Для аналізу слабконелінійної динаміки було застосовано багатомасштабну теорію збурень [135–137]. Ми обмежилися розкладом до третього порядку:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \mu_n(T_0, T_1, T_2), \quad T_n = \varepsilon^n t, \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon^2 \omega_2, \quad h = \varepsilon^3 h_3 \ll 1, \end{aligned} \quad (1.38)$$

що забезпечує правильний слабконелінійний розклад за умови, що амплітуда поля значно менша ніж розстроювання частоти $h/(\omega - \omega_0) \ll 1$. Так як наявні три масштаби T_0 , T_1 і T_2 , необхідно переписати похідну за часом в наступному

вигляді:

$$\frac{d}{d\tau} = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n D_n, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}. \quad (1.39)$$

Рівняння для амплітуд μ_1 , μ_2 і μ_3 мають вигляд

$$D_0^2 \mu_1 + \omega_0^2 \mu_1 = 0, \quad (1.40a)$$

$$D_0^2 \mu_2 + \omega_0^2 \mu_2 = - [k_1 \mu_1^2 + k_{01} (D_0 \mu_1)^2 + 2 D_0 D_1 \mu_1], \quad (1.40b)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 \mu_3 + \omega_0^2 \mu_3 = & - \left\{ k_2 \mu_1^3 + D_1^2 \mu_1 + \mu_1 + [2 k_1 \mu_2 + \right. \\ & \left. + k_{02} (D_0 \mu_1)^2] + 2 [k_{01} D_0 \mu_1 (D_1 \mu_1 + D_0 \mu_2) \right. \\ & \left. + D_0 D_2 \mu_1 + D_0 D_1 \mu_2] \right\} + h_3 \sin(\omega_0 T_0 + \omega_2 T_2), \end{aligned} \quad (1.40c)$$

де використано наступні позначення

$$k_{01} = \mathcal{M}_0 \mu_0, \quad k_{02} = \mathcal{M}_0^2 (4 + \mu_0^2), \quad (1.41)$$

$$k_1 = - \frac{4 - 9 \mu_0^2 - \mu_0^4 - \kappa (1 - \mu_0^2)^2 (4 + 3 \mu_0^2)}{\mu_0 (1 - \mu_0^2)^2}, \quad (1.42)$$

$$k_2 = - \frac{\mathcal{M}_0 (12 - 27 \mu_0^2 + 38 \mu_0^4 + \mu_0^6) - 3 \kappa (1 - \mu_0^2)^3}{3 \mu_0^2 \mathcal{M}_0 (1 - \mu_0^2)^3}. \quad (1.43)$$

Розв'язок рівнянь (1.40) має форму $\mu_1 = \mathcal{A}(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \mathcal{A}^*(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0}$.

Для попередження появи секулярних доданків у (1.40a) відповідно до теорії Флоке [136] необхідно покласти $\mathcal{A}(T_1, T_2) \equiv \mathcal{A}(T_2)$. Така сама умова для рівняння (1.40b) дає рівняння для амплітуди коливань μ_1 :

$$\begin{aligned} D_2 \mathcal{A}(T_2) + 4 i c_1 \mathcal{A}^2 \mathcal{A}^* &= -h_3 \mathcal{M}_0 c_2 e^{i\omega_2 T_2}, \\ c_1 &= \frac{5 k_{01} k_1}{12 \omega_0} - \frac{3 k_2}{8 \omega_0} + \frac{5 k_1^2}{12 \omega_0^3} + \frac{\omega_0}{24} (4 k_{01}^2 - 3 k_{02}), \\ c_2 &= \frac{1}{\mathcal{M}_0 \omega_0}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

В результаті, крива нелінійного резонансу набуває вигляду

$$\omega_{\pm}(|\mathcal{A}|) = \omega_0 - c_1 |\mathcal{A}|^2 \pm c_2 \frac{h}{|\mathcal{A}|}, \quad (1.45)$$

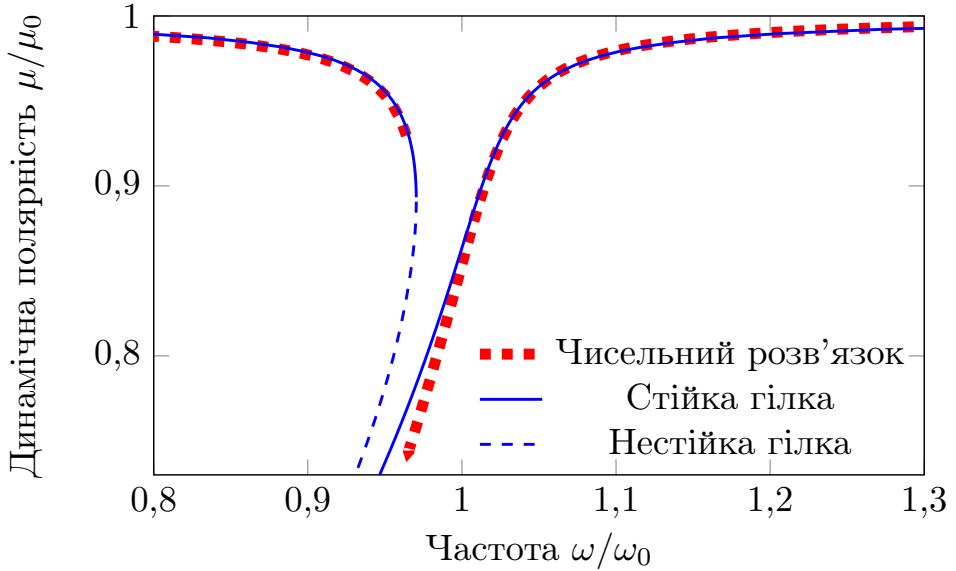


Рис. 1.8: Нелінійний резонанс: амплітудно-частотні характеристики як чисельний розв'язок рівнянь (1.33) (пунктирна крива) з початковими умовами $\mu(\tau = 0) = \mu_0$ і $\psi(\tau = 0) = 0$. Параметри відсічки $a_{\text{cut}} = 0,07$ і релаксації $\alpha = 0,001$. Тонкі лінії відповідають аналітичному розв'язку (1.45) без релаксації: суцільні лінії відповідають стійкій гілці, а штрих-пунктирні — ділянці нестійкості (1.46). Амплітуда поля $h/\alpha = 0,15$. Повний час динаміки для кожної точки рівний $\tau_{\text{tot}} = 3000$.

де $|\mathcal{A}|$ — амплітуда коливань, див. (1.37). Типову криву нелінійного резонансу зображенено на рис. 1.8. Низькочастотна гілка ω_- містить область нестійкості. Верхня межа цієї області може бути знайдена з умови $\partial\omega_-/\partial\mathcal{A} = 0$, що призводить до граничної частоти

$$\omega_u = \omega_0 - 3 \left(\frac{\sqrt{c_1} c_2 h}{2} \right)^{2/3}. \quad (1.46)$$

Нестійку гілку резонансної кривої зображенено на рис. 1.8 штрих-пунктирною лінією. Подальше збільшення амплітуди поля призводить до уширення області нестійкості й, зрештою, до перемикання полярності вихору.

При збільшенні амплітуди накачування, система переходить до сильно нелінійного режиму. Цей випадок було проаналізовано використовуючи чи-

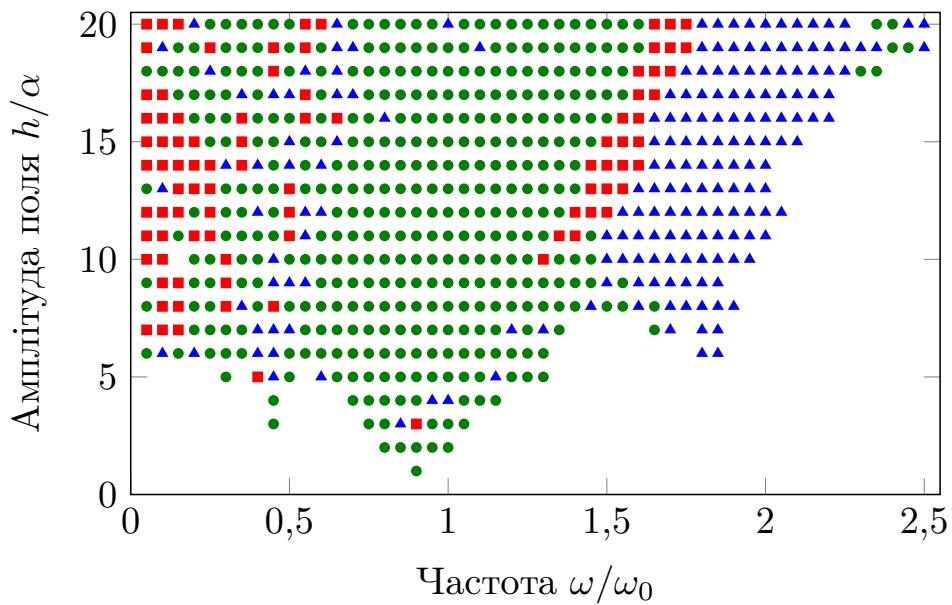


Рис. 1.9: Діаграма динамічних режимів для різних параметрів прикладеного поля (амплітуда і частота) як чисельний розв’язок рівнянь (1.33): круги відповідають одноперіодичним коливанням, трикутники — багатоперіодичним, а квадрати — хаотичній динаміці. Біла область відповідає відсутності перемікань. Параметри системи такі самі, як на рис. 1.8 (повний час розрахунку τ_{tot} залежить від типу конкретного динамічного режиму).

сельні розв'язки рівнянь (1.33). Перш за все, виникають регулярні коливання динамічної полярності $\mu(\tau)$ між двома мінімумами потенціальної ями у широкому діапазоні параметрів (типові осциляції в $\mathcal{U}(\mu)$ зображені тонкою кривою на рис. 1.7). Діаграму динамічних режимів наведено на рис. 1.9. Різні типи динамічних режимів класифіковано у відповідності до відображень Пуанкаре. Побудова відображень Пуанкаре є зручним інструментом аналізу динаміки систем під дією періодичного збудження, фазовий простір яких є тривимірним [116]. В цьому методі аналіз усієї фазової траекторії замінюється аналізом поведінки зображенальної точки у фазовому просторі за один період зовнішнього впливу. А саме, на ізоповерхні сталого часу відкладаються її положення, які розділені між собою в часі періодом зовнішньої сили [116].

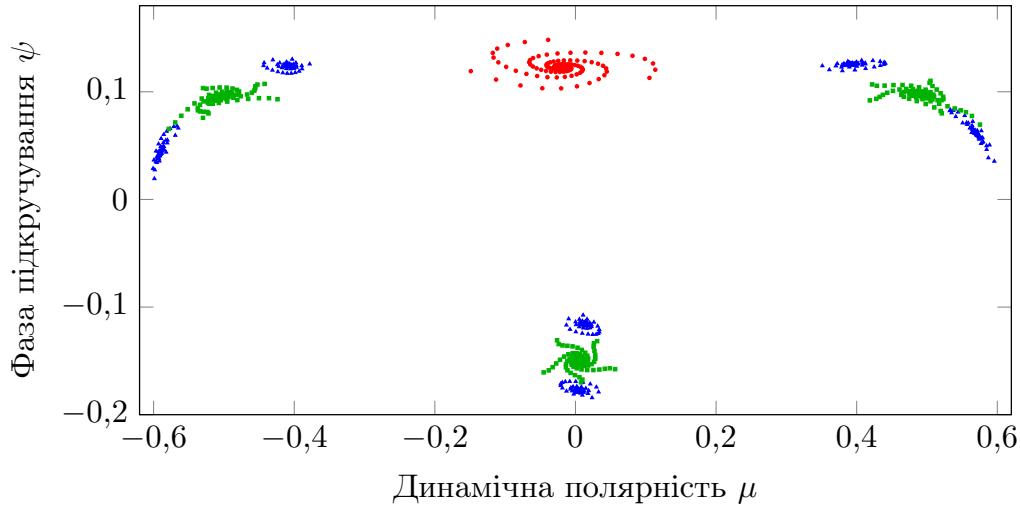
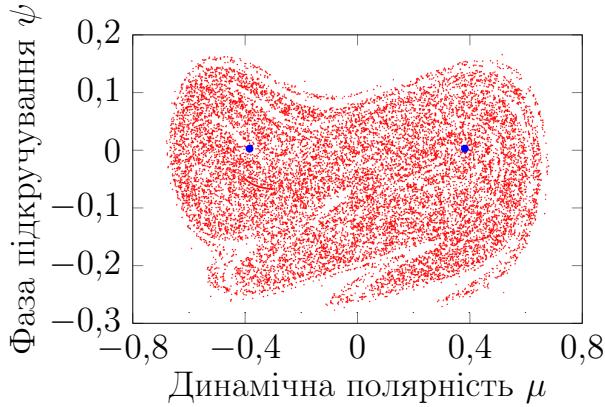


Рис. 1.10: Відображення Пуанкаре зі стійкими фокусами регулярних осциляцій. Навколо кожного стійкого фокуса формується послідовність точок, які з часом вкладаються все ближче до нього. Червоні круги відповідають $h/\alpha = 5, \omega/\omega_0 = 0,7$, сині трикутники — $h/\alpha = 11, \omega/\omega_0 = 2$, а зелені квадрати — $h/\alpha = 13, \omega/\omega_0 = 1,95$. Інші параметри такі самі, як на рис. 1.8.

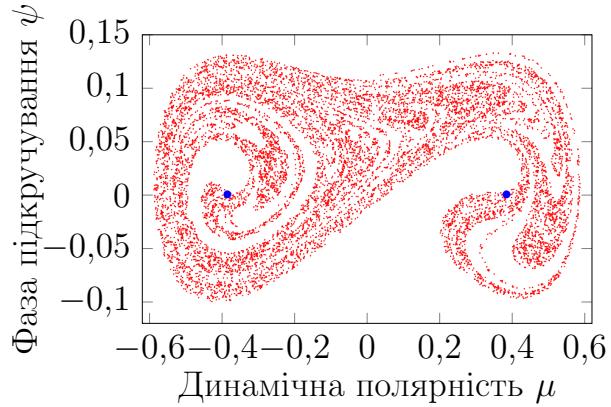
Відображення Пуанкаре було побудовано для 20 000 періодів коливань зовнішнього поля для частот, які перевищували $0,6\omega_0$ і для 15 000 періодів для всіх інших частот. Перші 5000 виключалися з розгляду для завершення всіх перехідних процесів. Діаграма динамічних режимів має резонансну поведінку на частотах $\omega_0/3, \omega_0/2, \omega_0$ і $2\omega_0$, див. рис. 1.9.

Всього наявно чотири різні динамічні режими, в яких виникає зміна полярності, класифіковані за характером відображення Пуанкаре: скінчена чи нескінчена множина (атрактор) точок утворюється при його побудові. У випадку скінченої множини кажуть про кількість стійких фокусів у діаграмі.

- (i) *Відсутність перемикань.* Якщо амплітуди поля недостатньо для перемикання вихору, то спостерігаються коливання динамічної полярності поблизу початкового значення.
- (ii) *Хаотичний режим* коливань динамічної полярності μ (квадрати на рис. 1.9) має місце для перехідної області між коливаннями типів (i) та (ii).

(a) $h/\alpha = 11, \omega/\omega_0 = 1,4$

15 000 точок

(b) $h/\alpha = 15, \omega/\omega_0 = 0,1$

10 000 точок

Рис. 1.11: Дивні атрактори на відображеннях Пуанкаре. Рівноважні полярності позначено кругами.

Відповідні відображення Пуанкаре являють собою дивні атрактори, приклад яких зображено на рис. 1.11(a). Okрім цього, хаотична динаміка наявна в області резонансної частоти для досить слабких полів. Низькочастотна динаміка також характеризується наявністю дивного атрактору, типовий вигляд якого наведено на рис. 1.11(b).

(iii) *Один стійкий фокус на діаграмі Пуанкаре.* Такі коливання (кола на рис. 1.9) виникають у широкому діапазоні параметрів, в цілому, поблизу резонансної частоти ω_0 . Наявність одного стійкого фокусу у відображені Пуанкаре для цього режиму означає, що коливання відбуваються на частоті, кратній частоті вимушувальної сили (черевні кола на рис. 1.10).

(iv) *Кілька стійких фокусів на діаграмі Пуанкаре.* Такі коливання (трикутники на рис. 1.9) типово виникають поблизу подвоєної резонансної частоти. Відображення Пуанкаре характеризуються кількома точками, які послідовно відвідуються, а траекторії у фазовому просторі (μ, ψ) роблять кілька обертів перед тим, як замкнутись, див. сині трикутники і зелені квадрати рис. 1.10. Це означає наявність кількох не кратних між собою частот в спектрі коливань.

1.2.2.2 Модель вихрового осердя Розглянемо класичний дискретний гайзенбергівський магнетик у формі диску товщиною L і радіусом R . Як і у попередньому підрозділі, вважатимемо, що намагніченість у зразку є однорідною вздовж його товщини. Тоді його енергія з врахуванням взаємодії із зовнішнім полем може бути записана у вигляді

$$E = -\frac{AL}{2} \sum_{(\mathbf{n}, \boldsymbol{\delta})} \left[\mathbf{m}_n \cdot \mathbf{m}_{n+\boldsymbol{\delta}} - (1 - \Lambda_a) m_n^z m_{n+\boldsymbol{\delta}}^z \right] - a^2 M_s L \sum_n \mathbf{m}_n \cdot \mathbf{B}(t), \quad (1.47)$$

де вектор $\boldsymbol{\delta}$ з'єднує найближчих сусідів тривимірною кубічної гратки, параметр $\Lambda_a \in (0, 1)$ є ефективною сталою обмінної анізотропії. На основі такого опису феромагнетика Вайсіним в роботі [138] було розглянуто вихор у дискретній гратці, осердя якого описується чотирма магнітними моментами, а всі інші зафіковано у вихровому розподілі, див. рис. 1.12. Відповідно до цієї моделі планарний вихор (без позаплощинної компоненти) є стійким при $\Lambda_a < \Lambda_{ac}$, де для кубічної гратки $\Lambda_{ac} \approx 0,72$ [138]. При $\Lambda_a > \Lambda_{ac}$ планарний вихор втрачає стійкість і утворюється вихор із локалізованою позаплощинною компонентою $m_v \neq 0$ [138]. Модель вихрового осердя Вайсіна неодноразово успішно застосовувалася для якісного опису динаміки вихорів під дією стохастичних магнітних полів [12], або полів, які обертаються в площині зразка [13, 133, 139].

У циліндричній системі координат (r, χ, z) планарний вихровий розподіл описується виразом

$$m_v = 0, \quad \phi_v = \chi + \phi_0, \quad (1.48a)$$

де для $\phi_0 = \pm\pi/2$ без обмеження загальності буде використано знак «+». У наближенні моделі вихрового осердя припускається, що лише чотири магнітні моменти першої координаційної сфери можуть змінювати свій напрямок і вони ж формують осердя вихору. Напрямки всіх інших магнітних моментів зафіковані в одній площині у вихровому розподілі (1.48a), див. рис. 1.12. Тут і далі під площинами гратки матимуться на увазі площини тривимірної

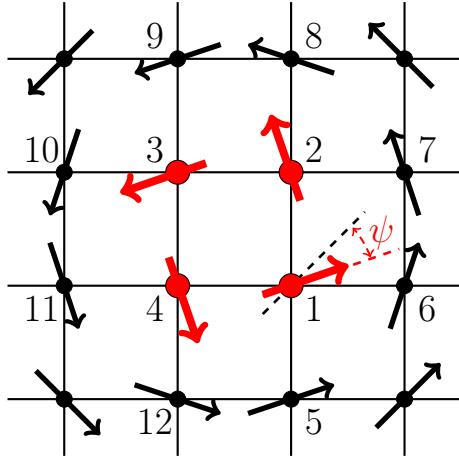


Рис. 1.12: Схематичне зображення моделі вихрового осердя: товсті червоні стрілки (номера $\overline{1,4}$) позначають вільні магнітні моменти, а тонкі чорні (номери $\overline{5,12}$) – фіксовані з $m_n^z = 0$. Фаза підкручування ψ описує відхилення азимутального кута намагніченості від рівноважного значення.

кристалічної ґратки, в кожній з яких магнітні моменти утворюють вихровий розподіл. З міркувань симетрії, всі чотири вільні магнітні моменти характеризуються однаковою позаплощиною компонентою μ і фазою підкручування в площині ψ , яка визначається як відхилення від вихрового розподілу. Тоді магнітні моменти першої координатної сфери описуються виразами

$$m_i^z = \mu, \quad \phi_i = \chi + \phi_0 + \psi, \quad i = \overline{1,4}. \quad (1.48b)$$

Величина μ має зміст динамічної полярності в дискретній моделі. Пара величин μ і ψ виступають у ролі колективних змінних.

Враховуючи явний вигляд магнітного поля (1.21) і параметризацію із використанням пари змінних (m, ϕ) (1.2), енергію (1.47) можна переписати у вигляді

$$E = -\frac{AL}{2} \sum_{(\mathbf{n}, \delta)} \left[\sqrt{(1 - m_{\mathbf{n}}^2)(1 - m_{\mathbf{n}+\delta}^2)} \cos(\phi_{\mathbf{n}}) - \phi_{\mathbf{n}+\delta} + A_a m_{\mathbf{n}} m_{\mathbf{n}+\delta} \right] - a^2 M_s L B_0 \sin(2\pi f t) \sum_{\mathbf{n}} m_{\mathbf{n}}. \quad (1.49)$$

Після підстановки анзацу (1.48), вираз (1.49) набуває вигляду

$$\mathcal{E}_{\text{vcm}} = \frac{E}{8AL\Lambda_a} = -\frac{\mu^2}{2} - \Lambda\sqrt{1-\mu^2}\cos\psi - \mu b\sin\omega\tau, \quad (1.50)$$

де введено параметр $\Lambda = 2/(\Lambda_a\sqrt{5})$, обезрозмірені магнітне поле $b = \frac{a^2 M_s B_0}{2A\Lambda_a}$, частоту $\omega = 2\pi f M_s / (8AL\Lambda_a \gamma_e)$ і час $\tau = 8AL\Lambda_a \gamma_e t / M_s$. Нижче використовуватиметься значення $\Lambda = 0,9415$ ($\Lambda_a = 0,95$) і $\alpha = 0,002$ у більшості чисельних розрахунків. Зазначимо, що дане значення Λ вибрано з ілюстративних міркувань і не підбирається відповідно до параметрів повномасштабних моделювань.

Динаміка колективних змінних (μ, ψ) відповідно до (1.14) описується рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vcm}}}{\partial \psi} - \alpha(1-\mu^2) \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vcm}}}{\partial \mu}, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vcm}}}{\partial \mu} - \frac{\alpha}{1-\mu^2} \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vcm}}}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Підставляючи вираз для енергії (1.50) у (1.51) отримуємо рівняння динаміки колективних змінних

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{d\tau} &= \Lambda\sqrt{1-\mu^2}\sin\psi + \\ &\quad + \alpha\left[\mu(1-\mu^2) - \Lambda\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\psi + b(1-\mu^2)\sin\omega\tau\right], \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \mu - \frac{\Lambda\mu\cos\psi}{\sqrt{1-\mu^2}} + b\sin\omega\tau - \frac{\alpha\Lambda\sin\psi}{\sqrt{1-\mu^2}}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

Основний стан моделі відповідає

$$\mu_0 = \pm\sqrt{1-\Lambda^2}, \quad \psi_0 = 0. \quad (1.53)$$

У термінах моделі вихрового осердя значення μ_0 з протилежними знаками відповідають вихорам з протилежними полярностями.

Почнемо аналіз з випадку відсутності енергетичних втрат, $\alpha = 0$. Вважаючи, що фаза підкручування досить мала, $|\psi| \ll 1$, її можна виключити з

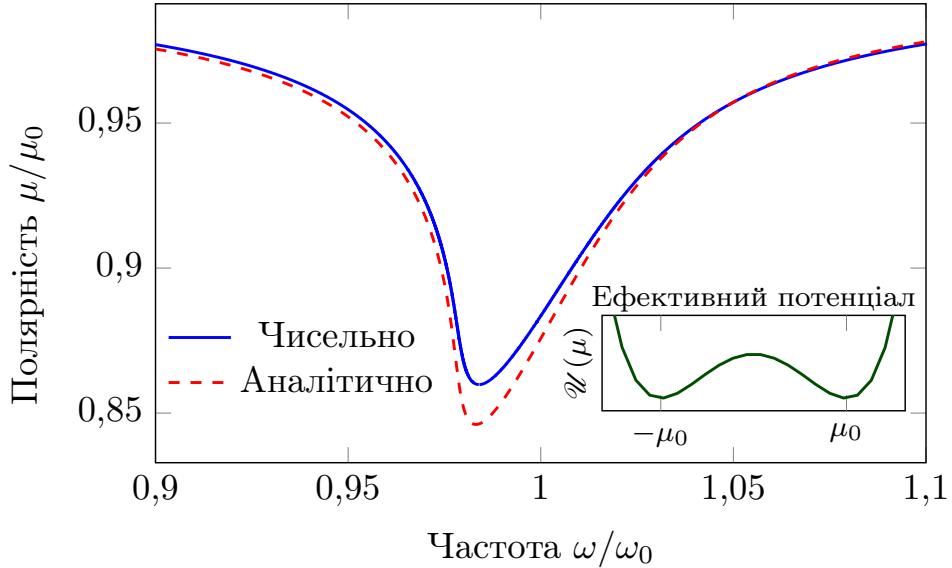


Рис. 1.13: Крива нелінійного резонансу: чисельний розв’язок рівнянь (1.52) (пунктирна лінія) і аналітичний розрахунок (1.61) (суцільна лінія) для наступних параметрів: $\Lambda = 0,9415$, $b = 0,0002$, $\alpha = 0,01$, $\mu(0) = 0,337$, $\psi(0) = 0$. На вставці зображене ефективний двоямний потенціал \mathcal{U} , див. (1.54).

рівнянь. Тоді рівняння (1.52) будуть відповідати ефективному лагранжиану

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\mathcal{M}\dot{\mu}^2}{2} - \mathcal{U}(\mu) + \mu b \sin \omega \tau, \\ \mathcal{M} &= \frac{1}{\Lambda \sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \mathcal{U}(\mu) = -\frac{\mu^2}{2} - \Lambda \sqrt{1 - \mu^2}. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Це спрощення дозволяє інтерпретувати складу динаміку як рух частинки зі змінною масою \mathcal{M} у двоямному потенціалі $\mathcal{U}(\mu)$ під дією періодичного накачування, див. рис. 1.13. Лінійні осциляції поблизу точки рівноваги відповідають гармонічним коливанням частинки в одній з ям з власною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{1 - \Lambda^2}. \tag{1.55}$$

Розглянемо нелінійну динаміку. Не зважаючи на малість релаксації у системі, порядок втрат енергії є порівняним з накачуванням. Тому розглянемо повний набір рівнянь (1.52). Для аналізу слабконелінійного режиму використаємо метод багатьох масштабів [135–137]. Коли амплітуда прикладеного

поля у безрозмірних одиницях набагато менша розстроювання ($b \ll |\omega - \omega_0|$), можна обмежитись розкладом по трьох порядках малих ε у формі

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 + \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \mu_n(T_0, T_1, T_2), \quad T_n = \varepsilon^n \tau, \\ \psi &= \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \psi_n(T_0, T_1, T_2), \quad \omega = \omega_0 + \omega_\pm, \\ \omega_\pm &= \varepsilon^2 \omega_2, \quad \alpha = \varepsilon^2 \alpha_2, \quad b = \varepsilon^3 b_3. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Похідні за часом набудуть вигляду

$$\frac{d}{d\tau} = \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n D_n, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad (1.57)$$

а рівняння руху (1.52) розпадуться на три пари рівнянь для кожного порядку ε :

$$D_0 \mu_1 = \Lambda^2 \psi_1, \quad (1.58a)$$

$$D_0 \psi_1 = \left(1 - \frac{1}{\Lambda^2}\right) \mu_1, \quad (1.58b)$$

$$D_1 \mu_1 + D_0 \mu_2 = -\sqrt{1 - \Lambda^2} \mu_1 \psi_1 + \Lambda^2 \psi_2, \quad (1.58c)$$

$$D_1 \psi_1 + D_0 \psi_2 = \left(1 - \frac{1}{\Lambda^2}\right) \mu_2 - \frac{3\sqrt{1 - \Lambda^2}}{2\Lambda^4} \mu_1^2 + \frac{\sqrt{1 - \Lambda^2}}{2} \psi_1^2, \quad (1.58d)$$

$$\begin{aligned} D_2 \mu_1 + D_1 \mu_2 + D_0 \mu_3 &= \Lambda^2 \psi_3 - \frac{1}{2\Lambda^2} \mu_1^2 \psi_1 - \\ &- \sqrt{1 - \Lambda^2} (\mu_2 \psi_1 + \mu_1 \psi_2) - \frac{\Lambda^2}{6} \psi_1^3 - (1 - \Lambda^2) \alpha_2 \mu_1, \end{aligned} \quad (1.58e)$$

$$\begin{aligned} D_2 \psi_1 + D_1 \psi_2 + D_0 \psi_3 &= \left(1 - \frac{1}{\Lambda^2}\right) \mu_3 - \\ &- \frac{5 - 4\Lambda^2}{2\Lambda^6} \mu_1^3 - \frac{3\sqrt{1 - \Lambda^2}}{\Lambda^4} \mu_1 \mu_2 + \frac{1}{2\Lambda^2} \mu_1 \psi_1^2 + \\ &+ \sqrt{1 - \Lambda^2} \psi_1 \psi_2 + b_3 \sin \omega \tau - \eta_2 \psi_1. \end{aligned} \quad (1.58f)$$

Розв'язок рівнянь (1.58a) і (1.58b) має форму

$$\mu_1(T_0, T_1, T_2) = \mathcal{A}(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \mathcal{A}^*(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (1.59)$$

Відповідно до теорії Флоке [136] для уникнення секулярних доданків, з рівнянь (1.58c) і (1.58d) випливає, що $\mathcal{A}(T_1, T_2) \equiv \mathcal{A}(T_2)$. Тоді (1.58e) і (1.58f) дають вираз для амплітуди $A(T_2)$:

$$2i\sqrt{1-\Lambda^2}\mathcal{A}' + i\alpha_2\sqrt{1-\Lambda^2}(2-\Lambda^2)\mathcal{A} - 2\frac{2+\Lambda^2}{\Lambda^2}\mathcal{A}^2\mathcal{A}^* = \Lambda^2\frac{b_3}{2i}e^{i\omega_2 T_2}. \quad (1.60)$$

З (1.60) можна отримати резонансну криву $\omega_{\pm}(h)$ як розв'язок наступного рівняння:

$$b^2\Lambda^4 = |\mathcal{A}|^2 \left(2\sqrt{1-\Lambda^2}\omega_{\pm} + \frac{2+\Lambda^2}{2\Lambda^2}|\mathcal{A}|^2 \right)^2 + \alpha^2(1-\Lambda^2)(2-\Lambda^2)^2|\mathcal{A}|^2, \quad (1.61)$$

де $|\mathcal{A}|$ є амплітудою коливань. Типовий вигляд резонансної кривої наведено на рис. 1.13, що якісно відповідає повномасштабним моделюванням, див. рис. 1.2.

Діаграма перемикань, представлена на рис. 1.14, представляє аналіз сильно нелінійного режиму, зроблений шляхом чисельного розв'язання рівнянь руху (1.52) у широкому діапазоні значень (ω, b) . Абсолютний мінімум діаграми відповідає перемиканням поблизу резонансної частоти ω_0 . Інші локальні мінімуми відповідають резонансу на подвійній частоті, $2\omega_0$, і субгармонікам, $\omega_0/2$ і $\omega_0/3$. Через нелінійність, всі резонанси дещо зсунуті у низькочастотну область.

Динамічні режими класифіковано за допомогою відображені Пуанкаре, як і для моделі відсічки (15 000 точок на відображення). Відображення побудовано для кожної пари параметрів (ω, b) , де мала місце зміна полярності. Всього можна виділити чотири режими коливань, які відповідають режимам, що спостерігались у мікромагнітних моделюваннях: (i) відсутність перемикань, (ii) хаотична динаміка, (iii) регулярні коливання між рівноважними значеннями полярності $\pm\mu_0$, (iv) перемикання з остаточними коливаннями поблизу одної з точок $(\pm\mu_0, 0)$ у координатах (μ, ψ) .

(i) *Відсутність перемикань.* Коливання динамічної полярності весь час здійснюються поблизу початкового її значення. Границя між областю пере-

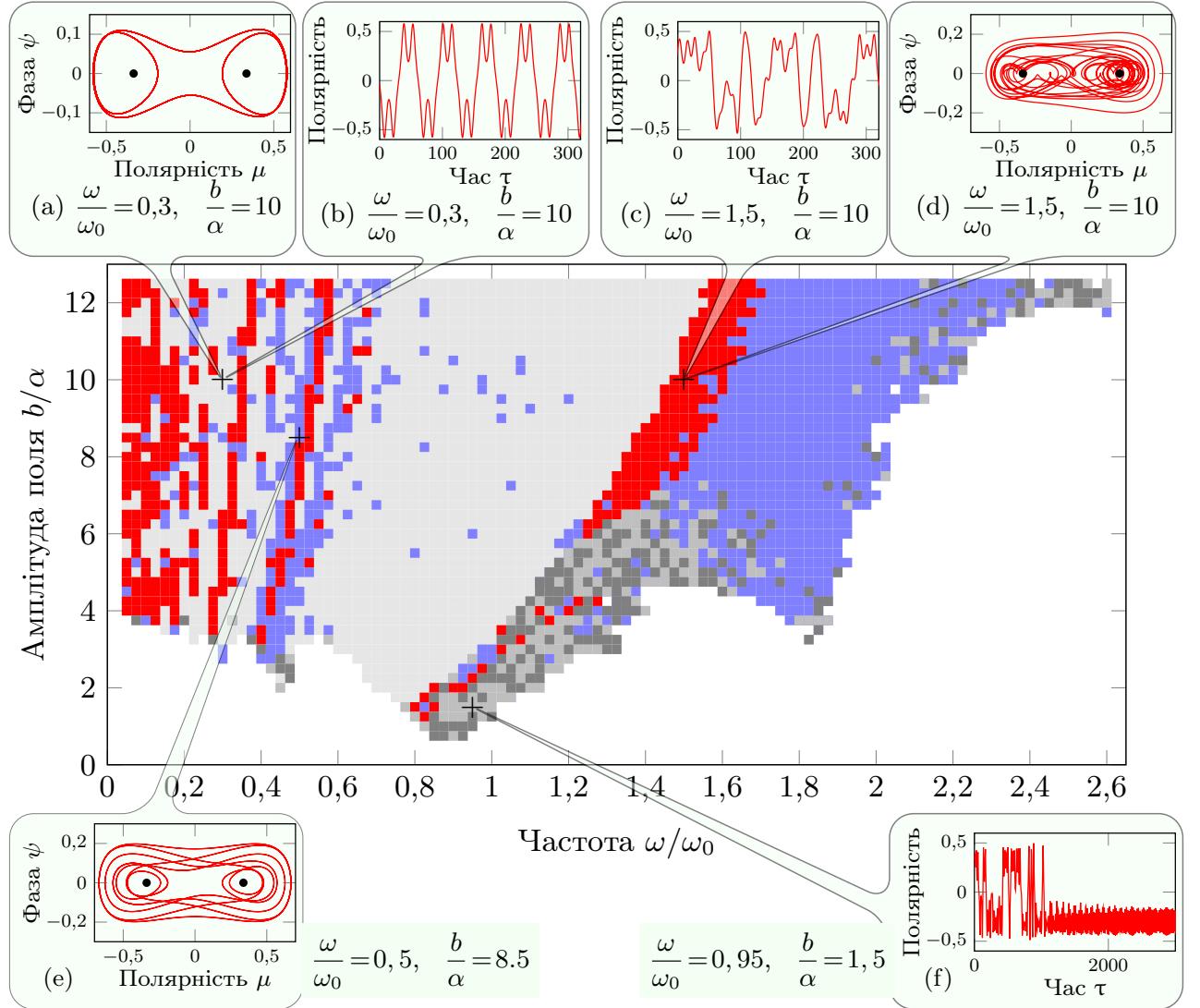


Рис. 1.14: Схема динамічних режимів у координатах $(\omega/\omega_0, b/\alpha)$. $\alpha = 0,002$, інші параметри такі самі, як на рис. 1.13. Червона область відповідає хаотичній динаміці. Області, позначені трьома відтінками сірого позначають перемикання з одним стійким фокусом на відображені Пуанкаре і режими з фінальною динамікою поблизу значень $+\mu_0$ або $-\mu_0$. Синя область відповідає динаміці з кількома стійкими фокусами на відображені Пуанкаре. (а) Фазова діаграма (проекція) регулярної динаміки. Чорні точки позначають рівноважні полярності $\pm\mu_0$. (б) Приклад регулярної динаміки, який включає пік на частоті $f/3$ у спектрі Фур'є. (с) Приклад хаотичної динаміки. (д) Те саме, що й (а) для хаотичної динаміки. (е) Те саме, що й (б) для динаміки з 5 стійкими фокусами на відображені Пуанкаре. (ф) Приклад динаміки з фінальним станом поблизу $-\mu_0$. У (б) й (с) наведено динаміку через великий проміжок часу після ввімкнення поля.

микань, і областью, де амплітуди поля чи частота недостатні для переходу між станами ($\pm\mu_0, 0$), характеризується кількома добре вираженими резонансними піками, які відповідають резонансам на частотах $\omega_0/3$, $\omega_0/2$, ω_0 і $2\omega_0$.

(ii) Хаотична динаміка виникає у низькочастотній області діаграми 1.14 і у протяжній області між резонансами на частотах ω_0 і $2\omega_0$. Приклад часової еволюції наведено на рис. 1.14(c). Проекція траекторії у фазовому просторі на площину (μ, ψ) (див. рис. 1.14(d)) виглядає подібно до псевдофазової діаграми на рис. 1.5(a): проекція траекторії не є замкненою і зображення точка робить велику кількість обертів навколо обох рівноважних значень полярності $\pm\mu_0$. Форма відображень Пуанкарє для хаотичної динаміки залежить від частоти прикладеного поля. Вони мають вигляд дивних атракторів, див. рис. 1.15. Їх Канторівська структура досить слабко виражена через мале значення параметру релаксації α , яке використовувалось у розрахунках. Зазначимо їх схожість із дивними атракторами осцилятора Дуффінга [115] (нелінійний осцилятор з квадратичною і кубічною нелінійностями, які сформовані двоямним потенціалом). Звісно, модель вихрового осердя має складнішу форму потенціалу. Користуючись механічною аналогією, можна казати про рух частинки з ефективною змінною масою (1.54) у двоямному потенціалі.

(iii) Основна частина діаграми перемикань 1.14 зайнята областю регулярної динаміки. Найбільш спостережуване відображення Пуанкарє для цього режиму містить кілька стійких фокусів. Всього спостерігалось $\overline{1,12}$, 15, 16, 18, 21, 24, 30 і 96 стійких фокусів у різних моделюваннях. Один стійкий фокус зустрічається найчастіше (сіра ділянка на рис. 1.14). Далі за частотою появі слідує 3 стійких фокуси (включено в область, позначену синім коловором на рис. 1.14). Деякі точки з вищим числом фокусів характеризуються складною регулярною динамікою в фазовому просторі, див. рис. 1.14(e). Analog квазіпрямокутних осциляцій динамічної полярності, які спостерігались у мікромагнітних моделюваннях тут спостерігається на частоті $\omega_0/3$ див. фа-

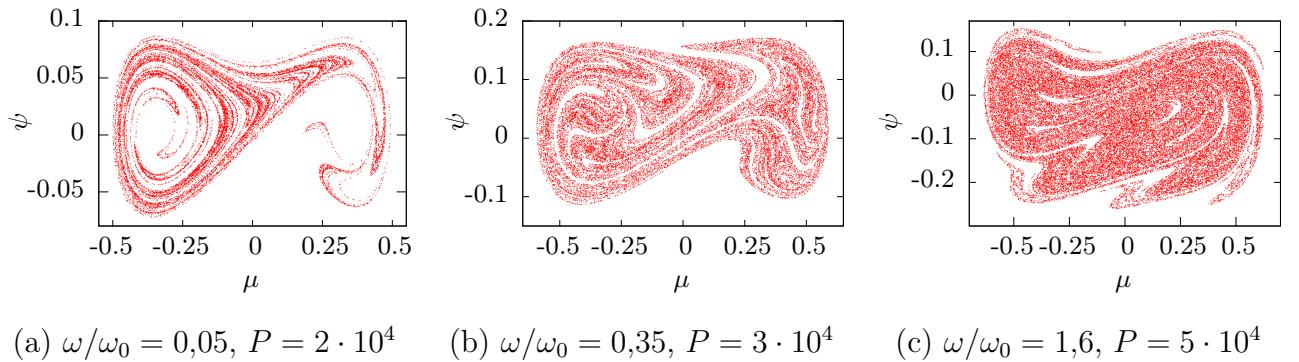


Рис. 1.15: Еволюція дивного атрактора зі зміною частоти накачування. $b/\alpha = 10,5$. Інші параметри такі самі, як на рис. 1.14. Число P рівне кількості точок на відповідному відображені Пуанкаре.

зову діаграму 1.14(a) і часову еволюцію на рис. 1.14(b) (є відповідність з псевдофазовою діаграмою, наведено на рис. 1.5(b) і часовою еволюцією на рис. 1.1(d)).

(iv) *Перемикання з коливаннями поблизу одного значення полярності.* Аналог переривчастих коливань у мікромагнітних моделюваннях пов'язаний зі збуренням, яке вноситься прикладанням зовнішнього магнітного поля. Відповідна область зображена двома темнішими сірими областями на діаграмі 1.14. Фінальна динаміка відповідає коливанням поблизу полярності вихору вгору або вниз (точки $(\mu_0, 0)$ і $(-\mu_0, 0)$ у фазовому просторі відповідно). Приклад часової динаміки зображене на рис. 1.14(f). Як і в мікромагнітних моделюваннях, такі коливання типово виникають поблизу межі області перемикання. Як і у випадку хаотичної динаміки, кінцева полярність проявляє сильну залежність до слабких змін амплітуди поля, частоти й параметрів чисельного інтегрування рівнянь динаміки.

1.2.2.3 Порівняння моделей вихрового осердя і відсічки

Моделі, наведені у попередніх підрозділах 1.2.2.1 і 1.2.2.2 дають якісний опис мікромагнітних моделювань, результати яких наведені у підрозділі 1.2.1. Вони

виявляють динамічні режими, характерні для динаміки полярності вихору, який не зміщується з центру зразка. В реальних системах фіксація положення вихору може бути досягнута створенням магнітних дефектів зі сталою обміну меншою, за сталу обміну в пермалої [140] або на штучному дефекті у геометрії зразка [141]. Обговоримо спорідненість і відмінність наведених аналітичних моделей.

Обидві моделі фактично мають справу з феромагнітним кільцем у вихровому стані. У моделі відсічки вводиться внутрішній радіус кільця — радіус відсічки — a_0 , див. формулу (1.25). У моделі вихрового осердя радіус внутрішнього кільця є сталим і дорівнює радіусу першої координатної сфери $a/\sqrt{2}$, де a — стала ґратки. Внутрішня немагнітна область впливає на осердя вихору або шляхом зміни внутрішнього радіусу a_0 , який перераховується у параметр κ , або ж параметром ефективної анізотропії Λ (модель вихрового осердя, див. формулу (1.50)). Таким чином, варіюючи керувальні параметри κ і Λ можна досягти схожого впливу на структуру осердя вихору. «Замороження» магнітних моментів у розподілі планарного вихору, закладене у модель вихрового осердя, природнім чином передбачає великий параметр відсічки a_{cut} , від якого залежить коефіцієнт κ , див. вираз (1.30).

Максимальне значення a_{cut} визначається умовою існування ненульового розв'язку трансцендентного рівняння (1.35). Чисельний аналіз свідчить, що критичне значення $a_{\text{cut}}^{\max} \approx 0,0759$, а при $a_{\text{cut}} > a_{\text{cut}}^{\max}$ позаплощинний вихор втрачає стійкість. Це відповідає $\mu_0(a_{\text{cut}}^{\max}) \approx 0,047$ і внутрішньому радіусу кільця $a_0 \approx 0,28\ell$. Останнє знаходиться у відповідності до чисельних і аналітичних результатів, отриманих в роботах [107] щодо процесу перемикання полярності вихору сталим полем в залежності від величини a_0 і [142] щодо структури вихору в кільці.

Розглядаючи випадок параметрів відсічки, близьких до a_{cut}^{\max} і невеликих відхилень фази ψ від рівноважного значення, вирази енергій в обох моде-

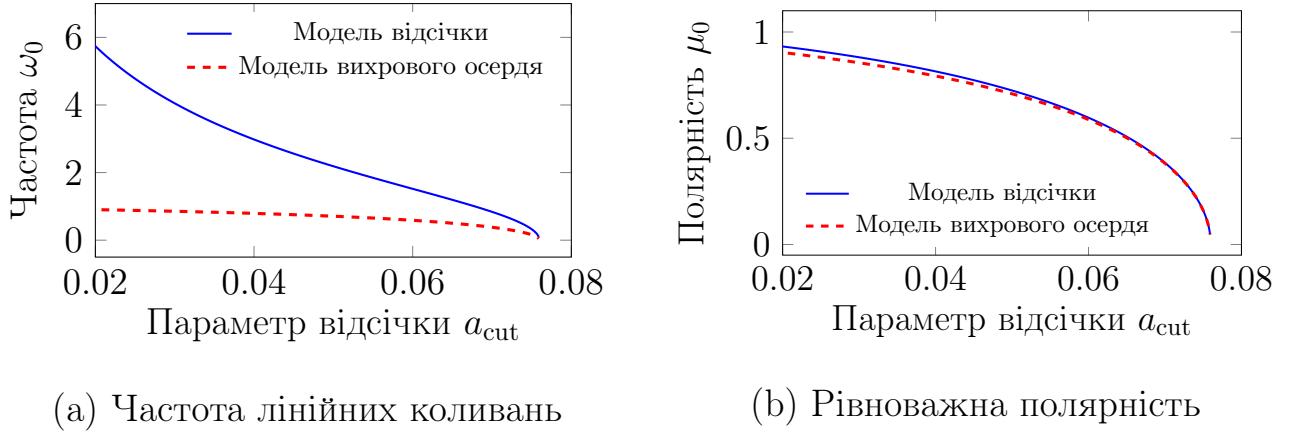


Рис. 1.16: Порівняння частот лінійних коливань поблизу мінімуму ефективного потенціалу (а) і рівноважних полярностей вихору (б) у моделях відсічки (суцільні криві) і вихрового осердя (пунктирні криві). Відповідність між параметрами встановлено за виразом (1.64), див. деталі у тексті.

лях набувають однакової функціональної залежності від μ і ψ (нормування параметрів різниться):

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{cm lim}}}{\kappa} = -\frac{\mu^2}{2} + \frac{1}{2\kappa}(\mu^2 + \psi^2) - 2h\mu \sin \omega \tau. \quad (1.62)$$

для моделі відсічки (див. (1.30)) і

$$\mathcal{E}_{\text{vcm lim}} = -\frac{\mu^2}{2} + \frac{\Lambda}{2}(\mu^2 + \psi^2) - \mu b \sin \omega \tau, \quad (1.63)$$

для моделі вихрового осердя (див. (1.50)). Їх обидві можна порівняти при радіусах відсічки, близьких до критичного, використавши ці приведені вирази для енергій. Через те, що модель вихрового осердя не описує кількісні параметри вихору, провести порівняння можна записавши рівність множників перед другим доданком:

$$\Lambda = \frac{1}{\kappa}. \quad (1.64)$$

На рис. 1.16 наведено залежність частот лінійних осциляцій поблизу мінімуму потенціалу і рівноважних полярностей вихору для обох моделей. Суцільні криві, які відповідають моделі відсічки, побудовано відповідно до (1.37)

і чисельного розв'язку (1.35). Штрихові криві, які відповідають моделі вихрового осердя, побудовано за виразами (1.53) і (1.55).

За вираного масштабування, області стійкості позаплощинного вихору обох моделях збігаються. Рівноважне значення полярності має однакову функціональну залежність у широкому діапазоні параметрів відсічки a_{cut} . При цьому спостерігається суттєва розбіжність у залежності частот лінійних осциляцій від a_{cut} . Останнє пояснюється обмеженнями, закладеними в обидві моделі. Зі зменшенням радіусу відсічки $a_0 = \sqrt{a_{\text{cut}}\ell}$ потенціальна яма, описана функцією $\mathcal{U}(\mu)$, див. (1.34) і зображена на рис. 1.7, стає вужчою і глибшою, що призводить до зростання частоти. У моделі вихрового осердя радіус відсічки явним чином у потенціал не входить, див. (1.54), оскільки вважається порівняним із розміром осердя вихору. Тому зі зменшенням радіусу відсічки відповідність між моделями зменшується.

З огляду на те, що ненульовий радіус відсічки перетворює суцільний диск на кільце, варто зазначити, що подібний ефект зменшення величини позаплощинної компоненти осердя вихору спостерігався при описі кілець у вихровому стані [142], де роль радіусу відсічки грає внутрішній радіус кільця. З врахуванням можливості перерахунку радіусу відсічки у значення ефективної анізотропії в моделі вихрового осердя (1.64) добре відтворюється перехід від позаплощинного до планарного вихору, коли розмір внутрішнього радіусу кільця перевищує деякий критичний.

1.3 Контрольовне перемикання полярності

Як випливає з аналізу діаграми перемикань (рис. 1.1), отриманої з мікромагнітних моделювань, зміна полярності вихору під дією резонансного поля, прикладеного вздовж вісі зразка, викликає багаторазові перемикання протягом короткого проміжку часу, порівняного з одним періодом поля. Така

ситуація не унікальна серед відомих методів зміни полярності вихорів. Так наприклад, для аксіально асиметричного сценарію зміни полярності, імпульс поля гаусової форми та достатньої амплітуди, прикладений у площині зразка, призводить до кількох послідовних появ і анігіляцій пар вихор-антивихор [16]. Поле, яке прикладене у площині зразка й обертається з частотою ω_r , співна-прямленою до полярності вихору ($\omega_r p > 0$) стабілізує вихор у центрі зразка. Але у випадку $\omega_r p < 0$ виникають зміни полярності у певному діапазоні значень амплітуди поля і частоти його обертання [15]. Схожа ситуація під дією спін-поляризованого струму описувалась у роботі [21].

Очевидно, що для практичного застосування необхідно викликати однонапрямлену зміну полярності, уникаючи кількох послідовних актів перемикання. Оскільки поле накачування (1.21) не обирає енергетично вигідну полярність вихору й одним чином впливає на обидві можливі, найбільш природнім шляхом отримання однократного акту зміни полярності є вибір тривалості імпульсу зовнішнього поля. Для цього ми перевірили вплив хвильового пакету

$$\mathbf{B} = \begin{cases} B_0 \mathbf{e}_z \sin(2\pi ft), & t \in \left[0, \frac{N}{f}\right], \\ 0, & t \notin \left[0, \frac{N}{f}\right], \end{cases} \quad (1.65)$$

де $N \in \mathbb{N}$ — кількість періодів хвилі в пакеті. Для мікромагнітних моделювань було обрано резонансну частоту $f = 14$ ГГц (див. положення мінімуму зони перемикань на рис. 1.1). Спостереження за динамікою системи проводилося протягом часу $10N/f$ за-для завершення магнітної динаміки.

Відгук намагніченості на хвильовий пакет (1.65) характеризується нелінійною залежністю від амплітуди поля B_0 і кількості періодів N , див. рис. 1.17(a). Коли амплітуда поля і кількість періодів малі, то спостерігаються лише слабкі осциляції вихрового осердя. Коли N стає більшим за деяке критичне значення, типовою поведінкою є кілька послідовних перемикань, при чому де-

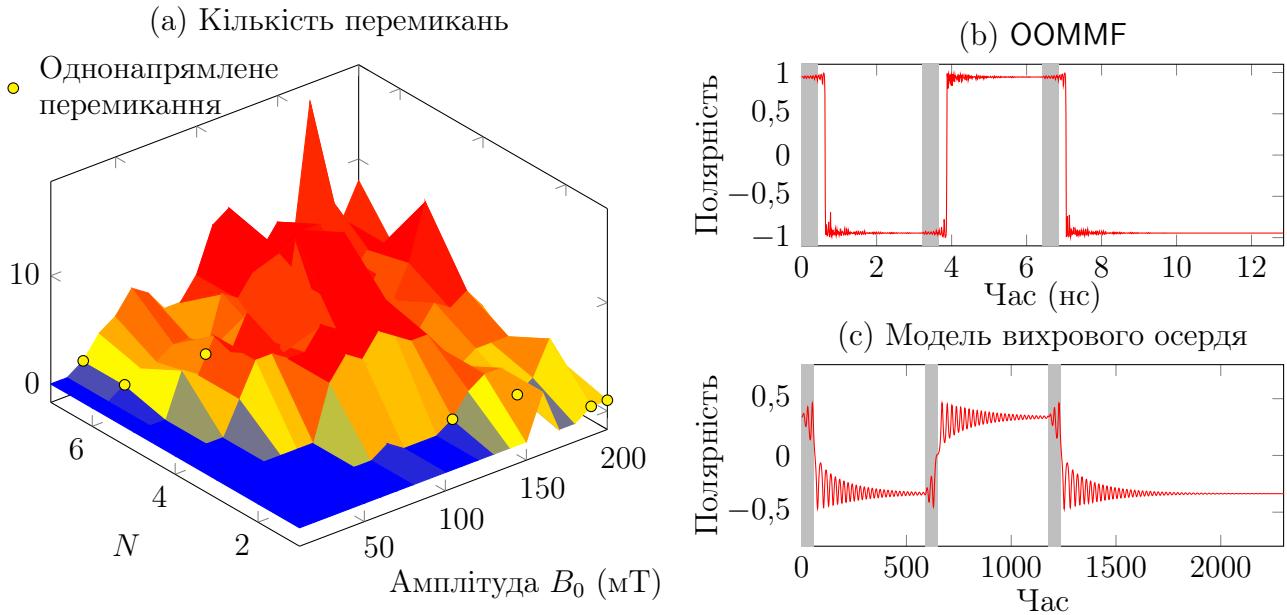


Рис. 1.17: (а) Кількість перемикань як функція числа періодів у цузі (N) і амплітуди прикладеного поля (B_0). Точки відповідають значенням N і B_0 , де спостерігається однонапрямлене перемикання. (б) Контрольовне, однонапрямлене перемикання полярності серією коротких хвильових пакетів які містять $N = 6$ періодів коливань на частоті 14 ГГц (тривалість 0,43 нс) з періодом повторення 3,2 нс. Сірі області відповідають інтервалам часу, на яких прикладалося зовнішнє магнітне поле. (с) Те саме для моделі вихрового осердя. Okremi пакети містять $N = 3$ коливань (тривалість 58,9 в одиницях часу), інтервал між хвильовими пакетами 589 одиниць часу.

які з них відбуваються вже після вимикання поля. Однонапрямлена зміна полярності відбувається при $B_0 = 30$ мТ і $N = 6, 7$ і деяких більших значень. Контрольованість даного методу зміни полярності була перевірена нами шляхом прикладання послідовності хвильових пакетів до вихору в стані рівноваги. Інтервал часу між хвильовими пакетами варіювався з кроками по $0,5/f_0$. Для $B_0 = 30$ мТ і $N = 6$ перша зміна полярності відбувається на 627 пікосекунді, після чого вихор починає релаксувати (поле вимикається на 429 пікосекунді). Послідовність з трьох хвильових пакетів дозволяє отримати

контрольовну, однона прямлену зміну полярності з мінімальним інтервалом часу між пакетами, рівним 3,2 нс, див. рис. 1.17(b). Такі часові параметри відповідають швидкості роботи комірки пам'яті на частоті близько 250 МГц. Модель вихрового осердя дає якісно такий самий результат, див. рис. 1.17(c).

1.4 Основні результати розділу

У даному розділі чисельно й аналітично досліджено динаміку магнітного вихору в феромагнітному нанодиску під впливом монохроматичного магнітного поля, прикладеного вздовж його вісі. Проведені дослідження аналізують динаміку полярності вихору, яка спостерігалась у роботах [17, 18] і пояснюють її іррегулярний характер під дією монохроматичного накачування. За допомогою мікромагнітних моделювань проаналізовано залежність динаміки вихору від частоти й амплітуди прикладеного поля. Виявлено появу хаотичної й регулярної динаміки під дією монохроматичного накачування радіально-симетричних мод і чисельно проаналізовано умови контролюваного впливу на полярність вихору.

Запропоновано дві аналітичні моделі, які описують динаміку полярності вихору, який знаходиться в центрі зразка. У моделі відсічки для опису явища перемикання вводиться радіус відсічки порядку сталої гратки, що дозволяє наближено описати взаємодію вихрового осердя із найнижчою радіально симетричноюmodoю. Модель вихрового осердя описує дискретну систему й не претендуючи на кількісний опис явища, є більш простою і дозволяє отримати більш повний якісний опис динаміки. У випадку великого радіусу відсічки, що можна інтерпретувати як зміну полярності вихору в кільці, обидві моделі збігаються. Теорія дає якісний опис повномасштабних моделювань відтворюючи дані моделювань з динамічних режимів вихору, який знаходиться в центрі зразка.

Таким чином, поставлені у розділі задачі виконано. Достовірність отриманих результатів підтверджується узгодженістю між аналітичними розрахунками та проведеними чисельними моделюваннями. Основна увага приділялася динаміці полярності вихору. Як було виявлено в роботі [141], примусити вихор залишатись нерухомим можна створенням западини в центрі диску, що до того ж дозволяє у рази пришвидшити зміну його полярності. Описаний слабконелінійний резонанс і резонанси на вищих частотах, які також обговорювалися у роботі [18], нещодавно спостерігалися в експериментальній роботі [49]. Досліджена динаміка під дією монохроматичного накачування є характерною не лише для вихорів, а й скірміонів у наноточках із легко-осьовою анізотропією [143]. Серед питань, які залишилися відкритими, слід зазначити оцінку інших параметрів хаотичної динаміки, окрім наведеного в розділі спектру хаотичних коливань полярності, і аналіз динаміки вихору в стані руху по зразку під дією монохроматичного накачування прикладеного вздовж вісі зразка.

Оригінальні результати розділу:

1. Встановлено, що монохроматичне накачування радіально-симетричних магніонних мод на фоні магнітного вихору призводить до багатої динаміки намагніченості. В ній можна виділити 4 різні режими, за яких відбувається зміна полярності вихору: (i) хаотична зміна полярності вихору, на що вказує характерна автокореляційна функція (див. рис. 1.3) і псевдофазова діаграма (див. рис. 1.5), (ii) регулярна зміна полярності вихору з частотою, яка залежить від параметрів прикладеного поля, (iii) переривчаста зміна полярності, в якій істотна динаміка спостерігається лише впродовж короткого часу після вмикання поля, (iv) вихід вихору з центру зразка за рахунок нелінійного збудження асиметричних мод, і подальша хаотична динаміка з багаторазовим утворенням і анігіляцією пар вихор-антивихор.

2. Якщо амплітуда поля недостатня для початку перемікань, спостерігаються коливання динамічної полярності вихору, характерні для нелінійного резонансу, див. рис. 1.2.
3. Наведені в роботі аналітичні моделі описують характерні динамічні режими полярності, які спостерігались у мікромагнітних моделюваннях для нерухомого вихору в центрі зразка. Вони дозволяють інтерпретувати явище зміни полярності у механічній аналогії як динаміку частинки з ефективною змінною масою у двоямному потенціалі під дією monoхроматичного збудження. Описана хаотична динаміка характеризується наявністю дивних атракторів, див. рис. 1.15. Їх структура має риси, подібні до атракторів моделі осцилятора Дуффінга.
4. В рамках мікромагнітних моделювань і моделі вихрового осердя чи-сельно знайдено параметри хвильових пакетів магнітного поля, за яких зміна полярності вихору виконуватиметься однократно під дією одного пакету і може відбуватися контролюваним чином під дією серії хвильових пакетів, див. рис. 1.17.

Розділ 2

ДИНАМІКА ТОЧОК БЛОХА В ОБМЕЖЕНИХ ЗРАЗКАХ

У даному розділі розв'язуються задачі про статику і динаміку точок Блоха: розрахунок мікромагнітної структури точки Блоха у наночастинці сферичної форми із врахуванням магнітостатичної взаємодії та їх динаміку в процесі зміни полярності магнітних вихорів у зразках із поверхневою анізотропією. Аналітично знайдено рівноважний розподіл намагніченості, який відповідає мінімуму обмінної та магнітостатичної енергії. Встановлено, що наявність поверхневої анізотропії призводить до деформації профілю статичного вихору. Останнє, у свою чергу, є причиною неоднорідної зміни полярності, яка супроводжується народженням пари точок Блоха. Дано якісний опис динаміки точок Блоха в рамках моделі нитчастого вихрового осердя. Аналітичні розрахунки підтверджено спін-гратковими та мікромагнітними моделюваннями. Результати, представлені в даному розділі, опубліковано в роботах [61–63].

В підрозділі 2.1 наводиться основна інформація про точки Блоха: топологічні властивості, енергія, умови виникнення і методи дослідження. Підрозділ 2.2 містить розрахунок статичної мікромагнітної структури точки Блоха в сферичному зразку. В підрозділі 2.3 наведено аналіз впливу поверхневої анізотропії на магнітний вихор і динаміку зміни його полярності. В останньому підрозділі 2.4 викладено основні результати розділу.

2.1 Точкові магнітні сингулярності

2.1.1 Означення і топологічні властивості

У розділі 1 обговорювалися методи зміни полярності магнітних вихорів під дією зовнішнього магнітного поля. В межах проведеного аналізу розподіл намагніченості всередині диску вважався однорідним вздовж аксіального напрямку. Інакше кажучи, зміна полярності в ефективно двовимірному об'є-

кті відбувалася шляхом тимчасового утворення планарного вихору (лінійної сингулярності): у момент безпосередньої зміни полярності з $+1$ на -1 намагніченість зникає на вісі вихору: $\mathbf{m}(r = 0) = 0$. Особливості такого процесу в дуже тонких зразках під дією сталого магнітного поля, зокрема, ширина «важкого» вихору і вплив розміру радіусу відсічки, введення якого дозволяє аналізувати процес перемикання в континуальному наближенні, досліджувалися у роботі [107].

У плівках і зразках, чия товщина більша за кілька магнітних довжин, врахування неоднорідності розподілу $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ за товщиною може виявитись суттєвим для розуміння статичних і динамічних властивостей вихрового розподілу намагніченості. Вихор може бути основним станом циліндричної наночастинки завдяки мінімізації магнітостатичної енергії: поля розсіяння присутні лише у невеликій області вихрового осердя, де намагніченість відхиляється від напрямку, паралельного до поверхні зразка. Конфігурація намагніченості, яка відповідає повній відсутності полів розсіяння у магнітом'якому циліндрі відповідно до теореми про зачісування їжака містить дві точкові сингулярності на його основах [88, 144]. У реальних зразках формується вихор, радіус осердя якого вже не є сталим, а набуває бочкоподібної форми: найбільша його ширина при збільшенні товщини циліндра може в рази перевищувати обмінну довжину, а на поверхні залишається порядку ℓ_{ex} [88].

Типова товщина дисків у вихровому стані, які досліджуються експериментально, становить кілька десятків нанометрів, або 5–10 обмінних довжин [28, 145]. Відомо, що зміна полярності вихорів у таких об'єктах відбувається із суттєвими відмінностями у динаміці. Як було встановлено у роботі [52], вона супроводжується інжекцією, рухом і анігіляцією точкових (мікромагнітних) сингулярностей, також відомих як точки Блоха.

Вперше точкові сингулярності у мікромагнетизмі як специфічні розв'язки рівняння (1.14) були розглянуті Фельдткллером [146] і Дьюрингом [147].

Їх виникнення можна пояснити наступним чином [88]. Розглянемо блохівську доменну стінку, яка є переходом між двома однорідно намагніченими областями (доменами). Напрямок намагніченості в ній вироджений за двома напрямками і якщо доменна стінка досить довга, то можна розглянути неперервний переход між цими двома напрямками на доменній стінці — блохівську лінію (зауважимо, що розподіли намагніченості виду (1.15) як раз є частковими випадками блохівських ліній [88]). Намагніченість у блохівській лінії знову є виродженою за двома протилежними напрямками (як приклад, полярність вихору вгору чи вниз). Але переход між двома сегментами блохівських ліній вже не можна здійснити неперервним чином — виникає точкова сингулярність.

Тому природнім чином точка Блоха визначається своїм оточенням, що можна сформулювати наступним чином [88, 146, 147]: на замкненій поверхні \mathcal{S}^2 , яка описана навколо сингулярної точки, присутні всі напрямки вектора намагніченості \mathbf{m} . Інакше кажучи, відображення поля намагніченості на цій поверхні на сферу одиничного радіусу замітатиме всю поверхню цієї сфери.

Особливістю точок Блоха є факт, що у сингулярній точці з координатою \mathbf{r}_{BP} відсутня спонтанна намагніченість: $\mathbf{m}(\mathbf{r}_{\text{BP}}) = 0$. В рамках континуальної моделі повністю коректний опис точки Блоха зробити неможливо [54]. Зокрема, у чисельних розрахунках це проявляється як залежність від параметрів просторової сітки інтегрування [52].

Розподіл намагніченості у досить близькому оточенні точки Блоха має конфігурацію «їжака» [3]:

$$\mathbf{m} = \mathcal{D} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.1)$$

де \mathcal{D} — довільна ортогональна матриця, яка визначає поворот сферично симетричного векторного поля навколо заданої вісі на деякий кут γ ($\mathcal{D}_{ki}\mathcal{D}_{ji} = \delta_{ki}$, де $\det \mathcal{D} = 1$, а δ_{ij} — символ Кронекера). Фельдкеллер запропонував насту-

пний анзац у сферичній системі координат [146]:

$$\Theta(\vartheta) = \vartheta \text{ або } \pi - \vartheta, \quad \Phi(\varphi) = \varphi \pm \gamma. \quad (2.2)$$

Як правило, реалізуються анізотропні розподіли з поворотом на кут $\gamma \neq 0, \pi$ [54]. З означення точки Блоха випливає, що вона повинна характеризуватися ненульовим топологічним інваріантом \mathcal{N}_g [54, 91]. Оскільки площа із ототожненими нескінченно віддаленими точками тоді ж повинна бути \mathcal{S}^2 , яку треба обійти в фізичному просторі навколо точки Блоха, топологічні властивості останньої можна описати виразом (1.16) поклавши $\mathcal{N}_g = \mathcal{Q}$. Гомотопічне число \mathcal{N}_g грає роль топологічного заряду мікромагнітної сингулярності й приймає цілі значення характеризуючи кількість замітань одиничної сфери \mathcal{S}^2 в просторі параметру порядку, які робить вектор \mathbf{m} пробігаючи по поверхні \mathcal{S}^2 в фізичному просторі навколо точки Блоха. Для розподілів (2.2) топологічний заряд $\mathcal{N}_g = \pm 1$, де знак виразу відповідає знаку перед ϑ .

2.1.2 Енергія точки Блоха

Суттєвою особливістю точкових магнітних сингулярностей, яка впливає на методи їх дослідження, є швидка зміна напрямку намагніченості в їх околі, що, в принципі, порушує припущення теорії міромагнетизму про повільну просторову зміну компонент намагніченості. З іншого боку це дозволяє вважати, що обмінна енергія домінує над усіма іншими в безпосередньому її околі. Обмінна енергія точки Блоха (2.1), яка знаходиться у центрі сфери радіусу R , рівна [147]

$$E_{\text{ex}}^{\text{BP}} = 8\pi AR. \quad (2.3)$$

Цей вираз залишається незмінним для будь-якої матриці повороту \mathcal{D} , вигляд якої визначається іншими взаємодіями.

Чисельні розрахунки для точок Блоха у плівках з циліндричними магні-

тними доменами показують, що повна енергія одної точки рівна [91]

$$E^{\text{BP bubble film}} = 2\pi A \sqrt{\frac{A}{K}} (\ln Q + 1,90). \quad (2.4)$$

Оскільки в таких плівках типово $Q \gg 1$, впливом магнітостатичної взаємодії можна знехтувати.

У магнітом'яких матеріалах треба враховувати поля розмагнічування. Вони знімають виродження енергії за кутом γ , якщо розглядати точку Блоха у центрі зразка сферичної форми. Перша його оцінка була наведена в одній з пionерських робіт по мікромагнітним сингулярностям Фельдкеллером [146], де автором було використано так званий принцип уникнення магнітостатичних зарядів [148]: магнітодипольна взаємодія намагається уникнути виникнення будь-якого магнітостатичного заряду, об'ємного чи поверхневого. Кут γ було розраховано з умови рівності нулю повного об'ємного магнітостатичного заряду $\int \varrho_V(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0$, що дає наступний результат в рамках анзацу (2.2):

$$\gamma_F = \begin{cases} 120^\circ, & \text{для } \Theta(\vartheta) = \vartheta, \\ 60^\circ, & \text{для } \Theta(\vartheta) = \pi - \vartheta. \end{cases} \quad (2.5)$$

Зазначимо, що це ж саме значення γ_F також відповідає відсутності повного поверхневого магнітостатичного заряду $\int \varrho_S(\mathbf{r}) dS = 0$.

Інший підхід було запропоновано Дьюрингом [147], який визначив рівноважний кут γ для випадку $\Theta(\vartheta) = \vartheta$ в (2.2) мінімізуючи вираз

$$E_{\text{msD}} = \int_V d\mathbf{r} (H_{\text{dip}})^2 \quad (2.6)$$

що дас

$$\gamma_D = \arccos \left(-\frac{11}{29} \right) \approx 112,3^\circ. \quad (2.7)$$

Необхідно зазначити, що γ_D мінімізує лише частину магнітостатичної енергії, пов'язаної з полями всередині зразка, оскільки інтегрування у (2.6) виконується лише за його об'ємом, в той час як поля розсіяння ігноруються.

Схожий підхід нещодавно було застосовано у роботі [149] в якій також було взято до уваги скорочення вектору намагніченості. Таким чином, у жодному із запропонованих підходів не було знайдено оптимальну конфігурацію поля намагніченості, за якого магнітостатична енергія досягає мінімального значення.

2.1.3 Проблема опису точкової сингулярності у наномагнетиках

Обмінна енергія (2.3) залишається скінченною не зважаючи на розбіжність її густини в сингулярній точці. Але сам по собі розрив поля намагніченості у точці Блоха суперечить рівнянню Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.14), яке зберігає довжину вектора \mathbf{m} . Окрім цього, за чисельного інтегрування (1.14) стандартними пакетами (наприклад, OOMMF [129]), виникають джерела помилок, пов'язані як з методами дискретизації об'єму магнетика, так і з природним припущенням теорії мікромагнетизму про повільну варіацію намагніченості в просторі [150].

Обійти дану проблему в рамках аналітичного опису можна допускаючи скорочення довжини вектора намагніченості $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M(\mathbf{r})\mathbf{m}(\mathbf{r})$. Підґрунтям для цього може слугувати означення намагніченості як густини магнітного моменту, усередненої за певним малим, але макроскопічним об'ємом (у випадку швидкої зміни напрямку спінів, усереднене значення може суттєво відрізнятись від номінального [151]), або ж механізм термічного народження точок Блоха [91, 152]. Рівняння руху намагніченості, в даному випадку, повинно містити релаксаційний член, який дозволяє зміну довжини вектора намагніченості, наприклад, у формі Бар'яхтара [151] або Блоха [153]. Зокрема, перший підхід дозволив отримати оцінку рухливості точки Блоха у доменній стінці залізо-іттрієвого гранату [151].

В реальному магнетику точкова сингулярність принципово відсутня через

дискретність кристалічної ґратки. У значній кількості досліджень, чисельний аналіз властивостей точок Блоха здійснюється із застосуванням звичайних пакетів мікромагнітних моделювань із просторовою дискретизацією неперервного поля намагніченості методом скінченних різниць або скінченних елементів. Також розвиваються різні підходи, які різним чином намагаються виключити з розгляду центр точки Блоха. Перш за все, це спін-ґраткові моделювання, в яких розглядається тривимірна дискретна ґратка, до вузлів якої прив'язані магнітні моменти [54, 154]. (Схожим чином двовимірна дискретна ґратка дає змогу описати зміну полярності вихору в диску, де динаміка намагніченості вважається однорідною вздовж його вісі, див. розділ 1.) Розрахунок енергії спінової ґратки, як правило, дає її нижню оцінку. Зокрема, корекція до енергії (2.3) має форму [154]

$$\Delta E_{\text{ex}}^{\text{BP}} = -Aaf(\mathbf{r}_{\text{BP}}), \quad (2.8)$$

де для простої кубічної ґратки функція від положення точки Блоха всередині кристалу $f(\mathbf{r}_{\text{BP}}) \approx 13$ й слабко залежить від \mathbf{r}_{BP} . Енергія (2.3) відповідає енергетичному порогу, після якого починається зміна полярності вихору. Його оцінка з мікромагнітних моделювань типово дає трохи менше значення, яке прямує до (2.3) при зменшенні розміру комірки [150, 155]. Точка Блоха пінінгується на проміжках між вузлами кристалічної ґратки й поля депінінгу залежать від їх напрямку відносно кристалографічних осей [156, 157].

Нещодавно рівняння Ландау — Ліфшиця з релаксацією у формі Блоха було реалізовано для пакета мікромагнітних моделювань ООММФ [153]. Це дозволяє досліджувати динаміку точкових сингулярностей у широкому діапазоні температур, зокрема, близько температури Кюрі.

Описані вище методики мають свої обмеження. Звичайні спін-ґраткові моделювання потребують значних розрахункових потужностей. Релаксаційний член у формі Блоха [153] не у всіх випадках є найбільш доцільним для опису динаміки. Тому попри всі недоліки дискретизації неперервного поля на-

магніченості в описі точкових сингулярностей, значна кількість досліджень виконується за допомогою пакетів мікромагнітних моделювань на кшталт OOMMF [129] або Nmag [158]. Також необхідно відзначити нещодавно запропонований мульти масштабний метод моделювань [150, 159], в якому області повільної просторової зміни намагніченості моделюються методом скінчених елементів, а околі точок Блоха динамічно створюється дискретна спінова гратка, яка вбудовується в тетрагональну гратку зразка і рухається разом із точковою сингулярністю.

2.1.4 Виникнення точок Блоха у фізичних системах

Історично, теоретичне й експериментальне дослідження точок Блоха пов'язано із циліндричними магнітними доменами. За певних умов магнітостатична енергія останніх може бути зменшена появою внутрішньої структури — ліній Блоха, які в свою чергу можуть містити перекручування (точки Блоха) [88, 91]. Це суттєво впливає на динаміку доменів та ставить технологічні задачі керування лініями й точками Блоха в різних концепціях магнітної оперативної пам'яті [91].

Динаміка точки Блоха як частини лінії Блоха в легкоосьовому магнетику теоретично й експериментально [151, 160–165] досліджувалася у залізо-ітрієвому гранаті. Зокрема, у роботі [163] точку Блоха було візуалізовано у зразку субмікронних розмірів. Сучасні технології дозволяють досліджувати об'єкти суттєво менших розмірів. У нанодротах, площа перерізу яких порядку або понад $60\ell^2$, енергетично вигідним є утворення специфічних вихрових доменних стінок або, так званих, стінок із точкою Блоха (англ. Bloch-point domain wall). В їх центрі формується мікромагнітна сингулярність, а намагніченість робить оберт навколо нанодроту утворюючи вихор в його перерізі [166, 167], що спостерігалось як у мікромагнітних моделюваннях [166, 167], так і експериментально [53].

Точки Блоха природнім чином виникають при перемагнічуванні довгих нанодротів, параметри яких відповідають можливості утворення вихрових доменних стінок, і зразків у вихровому [18, 52, 168] чи антивихровому [169] стані. Через конкуренцію магнітостатичної взаємодії із зовнішнім полем на торцях дротів утворюється вихрова циркуляція намагніченості, область якої з часом зсувається всередину дроту. В околі торців дроту утворюється витягнута «нитка» з неперемагніченої області на осі циліндра, яка в певний момент починає перемагнічування на торці й розривається в центрі. Утворюються так звані магнітні краплі — невеликі витягнуті області, за формуою, близькі до еліпсоїду обертання, всередині яких намагніченість направлена проти поля й які повільно рухаються в центр дроту. З обох боків магнітні краплі обмежені точками Блоха [170].

Схожим чином описувалось Тіавілем [52] перемикання полярності вихору в досить товстому зразку циліндричної форми, досліджене шляхом мікромагнітних моделювань. На основах циліндричної частинки народжувалися точки Блоха, які рухалися одна до одної, анігілюючи поблизу центра зразка. Відмічалося, що поява сингулярностей була неодночасною. Зазначимо, що народження точок Блоха у зразку може бути штучно полегшене вживленням певних іонів на торцях дротів, які змінюють напрямок спінів у місцях запланованої інжекції [171]. В залежності від відношення довжини зразка до його діаметру й співвідношення між його довжиною і магнітною довжиною ℓ точки Блоха можуть виникати в центрі зразка й рухатися до торців. Якщо довжина зразка досить мала, то магнітні краплі не утворюються навіть якщо точки Блоха рухаються від торців до центру, при чому їх рух може здійснюватися з різною швидкістю, а народження на торцях — у різні моменти часу [52, 172, 173].

2.1.5 Висновки до огляду

Мікромагнітні сингулярності відіграють важливу роль у перемагнічуванні ліній Блоха (зразки у вихровому чи антивихровому станах) і нанодротів.Хоча можливість їх утворення і динаміки у реальних системах є цілком прозорою через дискретність кристалічної гратки, теоретичний і чисельний аналіз постає перед труднощами, пов'язаними із двома положеннями, виконання яких часто вимагається у мікромагнетизмі: неперервність поля намагніченості та його досить повільна зміна у просторі, яка дозволяє перейти від дискретної моделі гайзенбергівського гамільтоніана до густини обмінної енергії як неперервної функції координат. Наразі існує невелика кількість експериментальних вимірювань статики і динаміки точок Блоха, певний масив даних, накопичених за допомогою мікромагнітних моделювань, які не можуть претендувати на точний опис досліджуваного явища і невелика кількість робіт, де точка Блоха аналізується аналітично. З останніх переважна більшість робіт присвячена статиці, а серед досліджень динаміки слід відмітити роботи [151, 160].

Залишилось відкритим питання щодо статичного розподілу точки Блоха із врахуванням магнітостатичної взаємодії, оскільки результат (2.5) розраховувався як наближення, а (2.7) не враховує поля розсіяння. Окрім цього, практично не досліджено динаміку мікромагнітної сингулярності під час перемагнічування наномагнетиків: відомі результати, здебільшого, фіксують явища її спостереження, див. наприклад, [17, 169], і розглядають в рамках мікромагнітних моделювань, див. наприклад, [52, 173]. Актуальним є аналіз динаміки точки Блоха в рамках спін-граткових моделювань і розробка аналітичної теорії, яка б дозволила описати народження і динаміку мікромагнітних сингулярностей.

2.2 Точка Блоха в сферичній наночастинці

Відомі на сьогодні розподіли намагніченості у точці Блоха в магнітом'яко-му зразку сферичної форми (тобто такому, симетрія якого відповідає мікро-магнітній сингулярності) [146, 147, 149], отримані з міркувань в яких значення магнітостатичної енергії оцінюється лише наблизено. В цьому підрозділі розглянуто задачу знаходження розподілу намагніченості у точці Блоха в центрі магнітом'яко-му зразка сферичної форми із точним розрахунком його магнітостатичної енергії, і задачу стабілізації точки Блоха в такій наночастинці зовнішнім магнітним полем.

2.2.1 Модель і класифікація точкових сингулярностей

Розглянемо ізотропний феромагнетик сферичної форми радіусу R . Його енергія може бути представлена у наступному вигляді:

$$E = E^{\text{ex}} + E^{\text{f}} + E^{\text{ms}}. \quad (2.9\text{a})$$

Перший доданок у (2.9а) представляє собою обмінну енергію

$$\frac{E^{\text{ex}}}{4\pi M_s^2 V} = \frac{3}{8\pi} \varepsilon \int_V d\rho \left[(\nabla\Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\nabla\Phi)^2 \right], \quad (2.9\text{b})$$

де $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — об'єм зразка, $\varepsilon = \ell^2/R^2$ — нормована обмінна довжина, $\rho = (x, y, z)/R$ нормований радіус-вектор. Другий доданок визначає взаємодію із зовнішнім магнітним полем \mathbf{H} :

$$\frac{E^{\text{f}}}{4\pi M_s^2 V} = -\frac{3}{4\pi} \int_V d\rho (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}), \quad (2.9\text{c})$$

де поле \mathbf{h} — зовнішнє поле, нормоване на ефективне поле анізотропії $H_A = 4\pi M_s$. Останній доданок представляє магнітостатичну енергію

$$\frac{E^{\text{ms}}}{4\pi M_s^2 V} = -\frac{3}{8\pi} \int_V d\rho (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}^{\text{ms}}), \quad (2.9\text{d})$$

де $\mathbf{h}^{\text{ms}} = \mathbf{H}_{\text{ms}}/4\pi M_s$ — нормоване поле розмагнічування \mathbf{H}_{ms} .

У даній геометрії, опис точки Блоха природно здійснювати у сферичній системі координат $(\rho, \vartheta, \varphi)$ з початком у центрі зразка. Можна записати наступний трипараметричний клас точок Блоха

$$\Theta(\vartheta) = p\vartheta + \pi(1 - p)/2, \quad \Phi(\varphi) = q\varphi + \gamma, \quad p, q = \pm 1. \quad (2.10)$$

Далі будемо називати параметр $q = \pm 1$ завихреністю точки Блоха, а $p = \pm 1$ — її полярністю відповідно до термінології магнітних вихорів. Останній параметр γ описує азимутальний кут повороту намагніченості у точці Блоха у відповідності до термінології робіт [146, 147].

На мікромагнітну сингулярність виду (2.10) зручно посилятись у формі BP_q^p . Наприклад, точка Блоха типу «їжак» є вихровою точкою Блоха з додатною полярністю ($p = 1, q = 1, \gamma = 0$). Схеми розподілів намагніченості для різних типів точок Блоха зображені на рис. 2.1. Аналогія між точками Блоха і вихорами приходить з процесу зміни полярності вихорів під дією сталого магнітного поля, прикладеного перпендикулярно до поверхні нанодиску [52]. Точку Блоха можна уявити як сукупність двох вихорів протилежних полярностей. Така сингулярність виникає у тривимірному евклідовому просторі під час процесу перемагнічування в антиферомагнетиках [174, 175]. Через еквівалентність двох поверхонь нанодиску у вихровому стані, зміна полярності, як правило, супроводжується утворенням двох точок Блоха (симетричний механізм), див. рис. 2.1(c). Вони народжуються на основах наноточки і аніглюють в центрі віci [52]. Всі чотири розподіли для різних знаків p і q можна спостерігати протягом симетричного народження точок Блоха під час зміни полярності вихорів [52] (рис. 2.1(c)) і антивихорів [169] (рис. 2.1(f)).

Топологічні властивості точок Блоха можна описати скориставшись топологічним інваріантом (1.16) [54], де інтегрування необхідно виконати по

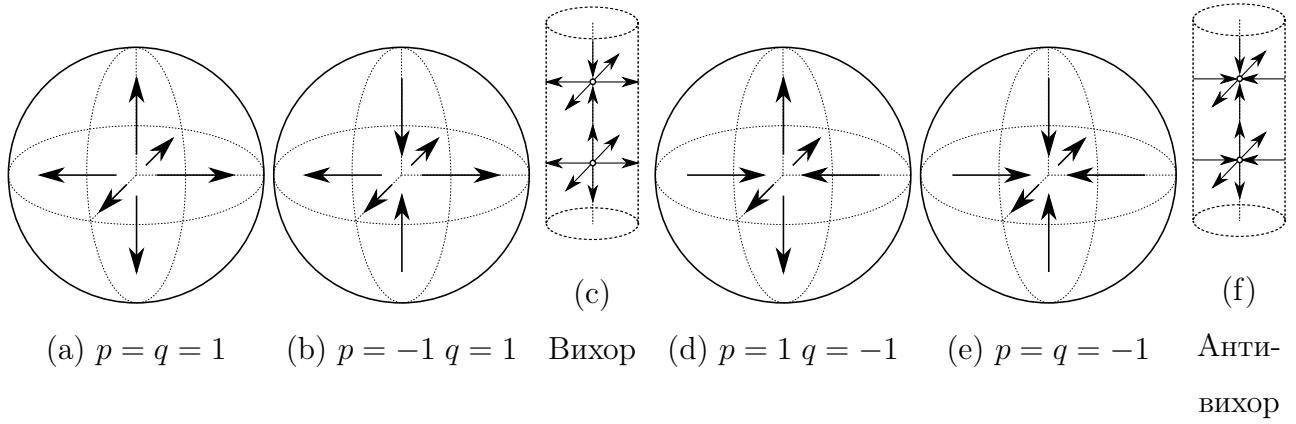


Рис. 2.1: Схематичне зображення різних типів точок Блоха. (а), (б) Розподіл намагніченості у азимутальних вихрових точках Блоха у сфері. (с) Ці ж точки Блоха у центральній частині циліндричного зразка під час зміни полярності вихору. (д), (е). Те саме для азимутальних антивихрових точок Блоха. (ф) Ці ж сингулярності у центральній частині наночастинки у формі астроїди під час зміни полярності антивихору. На рис. (с) і (ф) точки Блоха рухаються вздовж вертикальної вісі симетрії наночастинок у протилежних напрямках від їх поверхонь і анігілюють в центрі.

довільній замкнuttій поверхні, яка охоплює мікромагнітну сингулярність [3]:

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{4\pi} \int \sin \theta(\boldsymbol{\rho}) d\theta(\boldsymbol{\rho}) d\phi(\boldsymbol{\rho}) = pq. \quad (2.11)$$

Різні розподіли точок Блоха з однаковим \mathcal{Q} є топологічно еквівалентними. Наприклад, BP_{-1}^{-1} може бути отримана з BP_1^1 одночасним поворотом всіх векторів намагніченості на кут π у вертикальній площині, а BP_{-1}^1 перетворюється на BP_1^{-1} поворотом на кут $\pi/2$ у вертикальній площині. Відповідно до класифікації [91], $\mathcal{Q} = -\mathcal{N}_g$.

2.2.2 Структура намагніченості точки Блоха із врахуванням магнітостатичної взаємодії

Розрахуємо рівноважний кут повороту намагніченості γ , який мінімізує повну магнітостатичну енергію точки Блоха (2.9c). Для точок Блоха ви-

ду (2.10), магнітостатичний потенціал (1.10) можна розрахувати використавши розклад знаменників $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ у підінтегральних виразах за сферичними гармоніками [134],

$$\frac{1}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|} = \frac{1}{\rho_>} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{\rho_<}{r_>} \right)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \quad (2.12)$$

де $\rho_< = \min(\rho, \rho')$ і $\rho_> = \max(\rho, \rho')$. Це дає

$$\Psi_{\text{ms } q=1}^p(\boldsymbol{\rho}) = p\pi\rho + \frac{\pi}{3}(9\rho - 8)\cos\gamma + \pi\rho(p - \cos\gamma)\cos^2\vartheta, \quad (2.13a)$$

$$\Psi_{\text{ms } q=-1}^p(\boldsymbol{\rho}) = p\pi\rho(1 + \cos^2\vartheta) + \pi\rho\cos(2\varphi + \gamma)\sin^2\vartheta. \quad (2.13b)$$

Прості розрахунки показують, що магнітостатична енергія антивихрової точки Блоха не залежить від γ і $\frac{E_{q=-1}^{\text{ms}}}{4\pi M_s^2 V} = 7/30 \approx 0,23$. Енергія вихрової точки Блоха навпаки, залежить від кута повороту γ і має форму

$$\frac{E_{q=1}^{\text{ms } p}(\gamma)}{4\pi M_s^2 V} = \frac{1}{30} (7 + 4p\cos\gamma + 4\cos 2\gamma). \quad (2.14)$$

Рівноважний кут повороту γ_0 відповідає мінімуму енергії (2.14) і рівний

$$\gamma_0 = \arccos\left(-\frac{p}{4}\right) \approx \begin{cases} 105^\circ, & p = +1, \\ 76^\circ, & p = -1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Порівнямо енергії точок Блоха (2.14) для наведених вище підходів. Енергія фельдкеллерівської точки Блоха [146] $E_{q=1}^{\text{ms } p}(\gamma_F)/(4\pi M_s^2 V) = 0,1$, дьюринговської точки Блоха [147] $E^{\text{ms}}(\gamma_D)/(4\pi M_s^2 V) \approx 0,088$, а результат Еліаса і Верги [149] дає $E_1^{\text{ms}}(\gamma_{EV})/(4\pi M_s^2 V) \approx 0,089$. Найменшу енергію має точка Блоха з кутом повороту γ_0 , див. (2.15):

$$\frac{E_{q=1}^{\text{ms } p}(\gamma_0)}{4\pi M_s^2 V} = \frac{1}{12} \approx 0,083. \quad (2.16)$$

Для перевірки даних результатів було виконано спін-граткові моделювання (деталі див. у розділі 2.2.4). Ми порівняли аналітичну залежність $\mathcal{E}_{q=1}^{\text{ms } p=1}(\gamma)$,

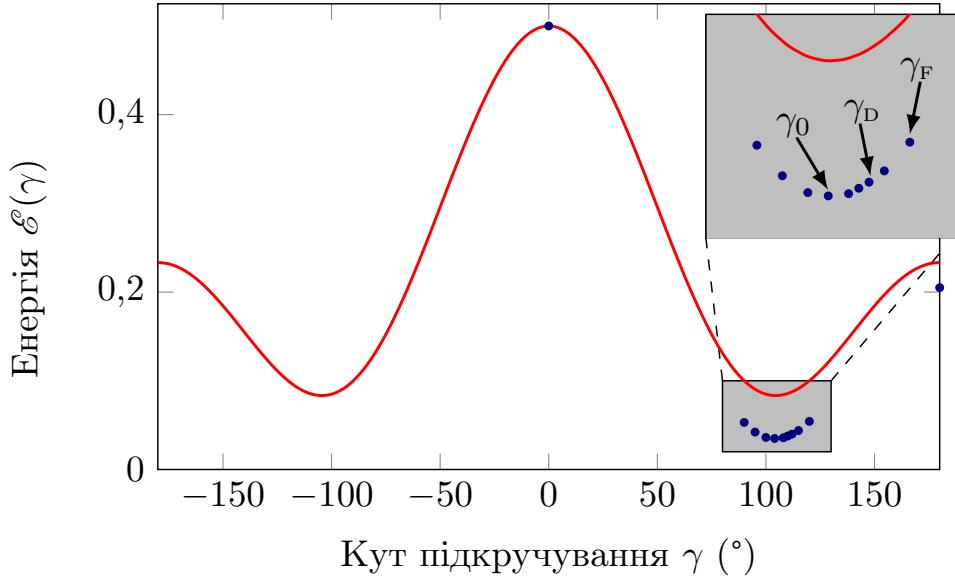


Рис. 2.2: Енергія точки Блоха як функція кута повороту для BP_1^1 : теоретичний результат (2.14) (суцільна крива) і моделювання (точки). Параметри моделювань: діаметр сфери $2R = 35a$, обмінна довжина $\ell = 3,95a$, параметр релаксації $\alpha = 0,5$.

див. вираз (2.14), з енергією дискретної гратки (2.29), отриманої з моделювань, див. рис. 2.2. Обидві залежності суміщені у максимумі при $\gamma = 0$. Порівняння може бути зроблене розрахунком виграшу в енергії $\Delta E(\gamma) = E_{\max}^{\text{ms}} - E^{\text{ms}}(\gamma)$ для різних кутів повороту γ . Відповідно до результатів моделювань, виграш в енергії становить

$$\frac{\Delta E(\gamma_F)}{4\pi M_s^2 V} \approx 0,446, \quad \frac{\Delta E(\gamma_D)}{4\pi M_s^2 V} \approx 0,460, \quad \frac{\Delta E(\gamma_0)}{4\pi M_s^2 V} \approx 0,465. \quad (2.17)$$

Максимальний виграш в енергії має місце для γ_0 , що відповідає мінімуму енергії і знаходиться у чудовому узгодженні з аналітичним результатом (2.15).

2.2.3 Точка Блоха у зовнішньому полі

Точка Блоха є метастабільним станом в сферичної наночастинці [176]. Стабілізувати її можна магнітним полем такої самої ж симетрії: якщо $\mathbf{m} \sim \boldsymbol{\rho}/\rho$ для BP_1^1 , то поле повинно також мати наслідувати сферичну симетрію. Інші розподіли BP_p^q мають симетрію полів, типових для мультипольних магнітів.

Нижче як приклад нами буде розглянутись поле, яке відповідає розподілу BP_1^1 і лінійно зростає від центру координат:

$$\mathbf{h} = h\boldsymbol{\rho}. \quad (2.18)$$

В певному наближенні воно може бути створене сукупністю досить довгих соленоїдів, вісі яких напрямлено вздовж напрямку $\boldsymbol{\rho}$. Як буде описано нижче, внесок магнітостатичної взаємодії у повну магнітну енергію описується одинарним інтегралом. Тому дана задача пошуку рівноважного розподілу намагніченості зводиться до диференціального рівняння, а не інтегро-диференціального, і може бути легко узагальнена на зовнішнє магнітне поле будь-якої функціональної залежності від ρ для всіх можливих BP_p^q .

Під дією координатно-залежного магнітного поля (2.18) розподіл намагніченості також набуває складнішої координатної залежності. Нами було враховано цю можливу залежність у наступному анзаці

$$\Theta(\vartheta) = \vartheta, \Phi(\rho, \varphi) = \varphi + \gamma(\rho) \quad (2.19)$$

із радіально-залежним параметром $\gamma(\rho)$ у порівнянні з (2.10). Форма такого анзацу підтверджується моделюваннями, див. розділ 2.2.4.

Підставляючи рівняння (2.19) у (2.9b) для обмінної енергії можна отримати

$$\frac{E^{\text{ex}}}{4\pi M_s^2 V} = 3\varepsilon + \varepsilon \int_0^1 \left(\frac{d\gamma}{d\rho} \right)^2 \rho^2 d\rho. \quad (2.20a)$$

Магнітостатичний потенціал точки Блоха (2.19) набуває вигляду

$$\Psi_{\text{ms } q=1}^{p=1}(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{4\pi}{3} \int_{\rho}^1 [1 + 2 \cos \gamma(\rho')] d\rho' - \frac{4\pi}{3} \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{\rho^3} \int_0^{\rho} \rho'^3 [\cos \gamma(\rho') - 1] d\rho'. \quad (2.20b)$$

Магнітостатична енергія такого розподілу має вигляд

$$\frac{E^{\text{ms}}}{4\pi M_s^2 V} = \frac{1}{10} \int_0^1 \rho^2 [7 + 4 \cos \gamma(\rho) + 4 \cos 2\gamma(\rho)] d\rho. \quad (2.20c)$$

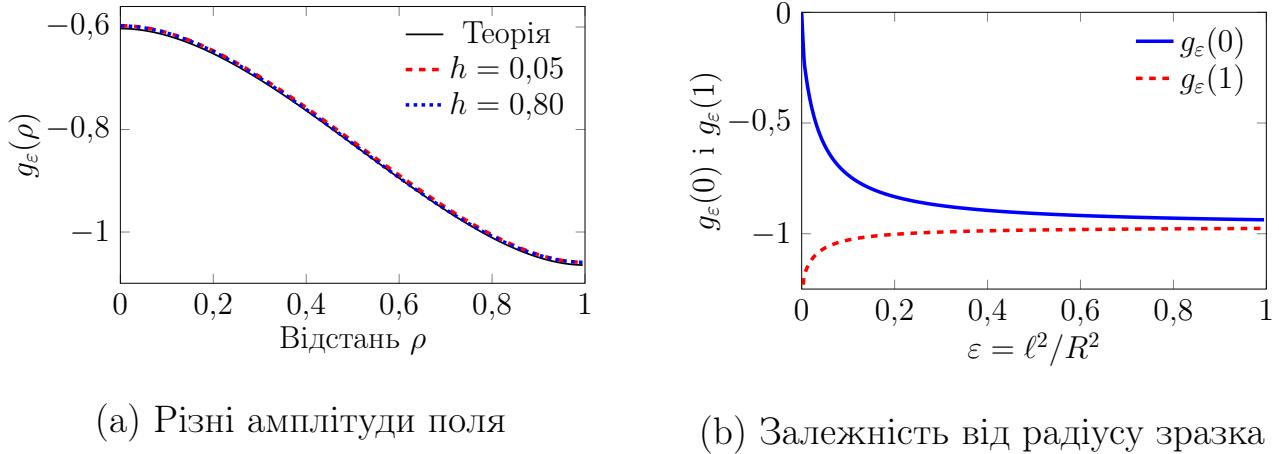


Рис. 2.3: Приведений кут повороту $g_\varepsilon(r)$, див. (2.23): (a) для різних амплітуд полів і $\varepsilon = 0,05$: теоретичний результат (2.23) (суцільна крива) і чисельний розв'язок (2.21) методом стрільби (пунктирні криві); (b) як функція нормованої обмінної довжини: при $\rho = 0$ (суцільна крива) і $\rho = 1$ (пунктирна крива).

З рівняння (2.9c) випливає, що енергія взаємодії із зовнішнім полем рівна

$$\frac{E^f}{4\pi M_s^2 V} = -2h \int_0^1 \rho^3 \cos \gamma(\rho) d\rho. \quad (2.20d)$$

Мінімізація повної енергії $\delta E / \delta \gamma = 0$ показує, що рівноважний розподіл $\gamma(\rho)$ є розв'язком наступного нелінійного диференційного рівняння

$$\varepsilon \frac{d^2 \gamma}{d\rho^2} + \frac{2\varepsilon}{\rho} \frac{d\gamma}{d\rho} + \frac{1}{5} \sin \gamma + \frac{2}{5} \sin 2\gamma - h\rho \sin \gamma = 0 \quad (2.21)$$

із межовими умовами

$$\left. \frac{d\gamma}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \left. \frac{d\gamma}{d\rho} \right|_{\rho=1} = 0. \quad (2.22)$$

У випадку слабких полів рівняння (2.21) можна лінеаризувати поблизу просторово однорідного розв'язку (2.15):

$$\begin{aligned} \gamma(r) &\approx \gamma_0 + hg_\varepsilon(\rho), \quad |h| \ll 1, \quad g_\varepsilon(\rho) = \frac{2\sqrt{5\varepsilon}}{3} f(\kappa_0 \rho), \quad \kappa_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}, \\ f(\xi) &= C(\kappa_0) \frac{\operatorname{sh} \xi}{\xi} + 2 \frac{\operatorname{ch} \xi - 1}{\xi} - \xi, \quad C(\kappa_0) = \frac{\kappa_0^2 - 2\kappa_0 \operatorname{sh} \kappa_0 + 2 \operatorname{ch} \kappa_0 - 2}{\kappa_0 \operatorname{ch} \kappa_0 - \operatorname{sh} \kappa_0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Хоча аналітичний аналіз можна провести лише для слабких полів, $|h| \ll 1$, функція $g_\varepsilon(\rho)$ забезпечує хорошу апроксимацію нелінійного рівняння (2.21) навіть для сильних полів $h \leq 1$ з відносною похибкою

$$\left| [\gamma(\rho)_{\text{num}} - \gamma(\rho)_{\text{theor}}] / \gamma(\rho)_{\text{num}} \right| \leq 0,04. \quad (2.24)$$

Кут повороту намагніченості суттєво залежить від обмінного параметру ε , див. рис. 2.3. У граничному випадку малих частинок ($\varepsilon \gg 1$) обмінна взаємодія домінує, що призводить до сталого кута повороту $g_\infty = -\sqrt{15}/4 \approx -0,97$. У протилежному випадку $\varepsilon \ll 1$, роль магнітостатичної взаємодії підсилюється, що призводить до неоднорідного радіального розподілу. У граничному випадку $g_0(0) = 0$ і $g_0(1) = -\sqrt{5/3} \approx -1,3$.

Інший граничний випадок реалізується у сильних магнітних полях, коли намагніченість точки Блоха паралельна зовнішньому полю. Тоді кут повороту може бути рівний $\gamma = 0$ або π .

Для опису поведінки намагніченості у точці Блоха поблизу критичного значення поля $h \approx h_c$, за якого просторово неоднорідний розв'язок переходить в однорідний, було використано варіаційний аналіз з пробною функцією $\gamma(\rho) \approx \alpha_0 + \alpha_1 \cos \pi r$. Поблизу критичної точки $\alpha_0, \alpha_1 \ll 1$. Повну енергію було розкладено у ряд Тейлора до 4-го порядку за α_0 і до другого порядку за α_1 . Виключаючи α_1 і залишаючи доданки степеню не вищого за α_0^4 , отримано

$$\frac{E(\gamma)}{4\pi M_s^2 V} \approx \Delta \mathcal{E}_0 + p_2(h, \varepsilon) \alpha_0^2 + p_4(h, \varepsilon) \alpha_0^4, \quad (2.25)$$

де $\Delta \mathcal{E}_0$ — певний вираз, який не залежить від α_0 . Енергія (2.25) як функція α_0 має два мініуми ($p_2(h, \varepsilon) < 0$) для $h < h_c$ з критичним магнітним полем h_c

$$h_c(\varepsilon) \approx 1,8 - 21,6\varepsilon + \sqrt{0,4 - 20,2\varepsilon + 467\varepsilon^2} \quad (2.26)$$

У області $0 < h_c(\varepsilon) - h \ll h_c(\varepsilon)$, виконується

$$\alpha_0(b) \approx a(\varepsilon) \sqrt{h_c(\varepsilon) - h} \quad (2.27)$$

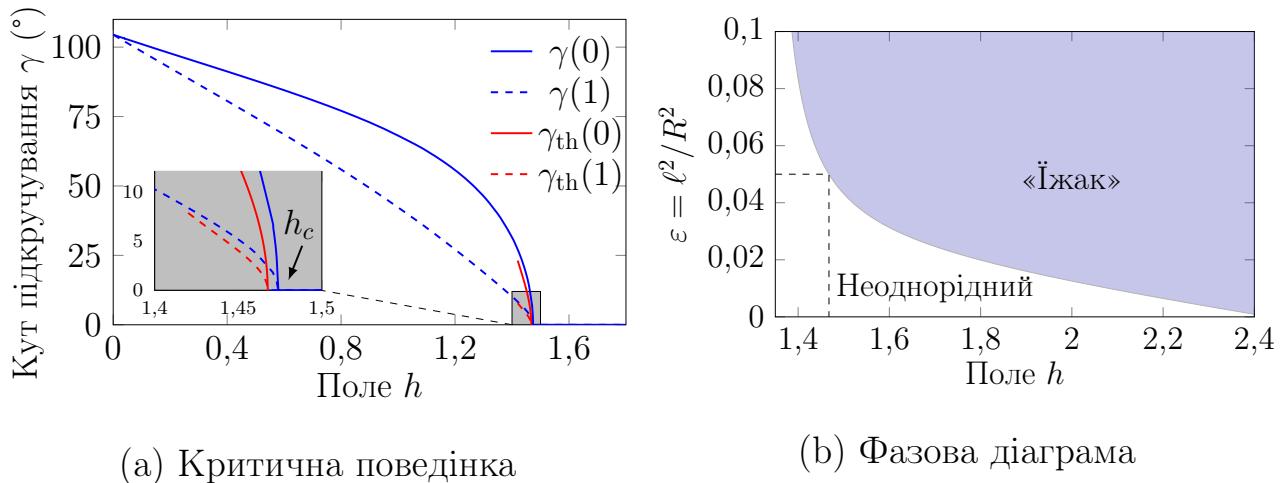


Рис. 2.4: Точка Блоха під дією зовнішнього поля. (а): Кут повороту як функція амплітуди зовнішнього поля h поблизу критичного поля $h_c = 1,47$. Чисельний розв'язок рівняння (2.21) (сині криві) і теоретична оцінка за рівнянням (2.27) (червоні криві) для $\varepsilon = 0,05$. Суцільні криві відповідають куту повороту в центрі зразка, $\gamma(0)$, а пунктирні криві — на поверхні, $\gamma(1)$. (б): Фазова діаграма розв'язків рівняння (2.21). Верхня фаза («Їжак») відповідає розв'язку $\gamma = 0$, нижня фаза («Неоднорідний») — радіально-залежному розв'язку $\gamma(r)$. Пунктирні лінії відповідають критичному полю $h_c \approx 1,46$ для $\varepsilon = 0,05$.

Для $h > h_c$, $p_2 > 0$ і енергія (2.25) набуває мінімального значення при $\alpha_0 = 0$, що відповідає $\gamma = 0$. Чисельне інтегрування (2.21) для $\varepsilon = 0,05$ показує, що фазовий перехід відбувається при $h_c \approx 1,47$, див. рис. 2.4. Це добре узгоджується зі значенням $h_c(0,05) \approx 1,46$, отриманим з (2.26). Критична поведінка, передбачена рівнянням (2.27), також підтверджується чисельними розрахунками, див. рис 2.4(a).

2.2.4 Чисельні моделювання

Для перевірки аналітичних результатів, представлених у даному розділі, нами було розширено функціональність пакету спін-граткових моделювань SLaSi [33], який розв’язує рівняння Ландау—Ліфшиця—Гільберта (1.14) для

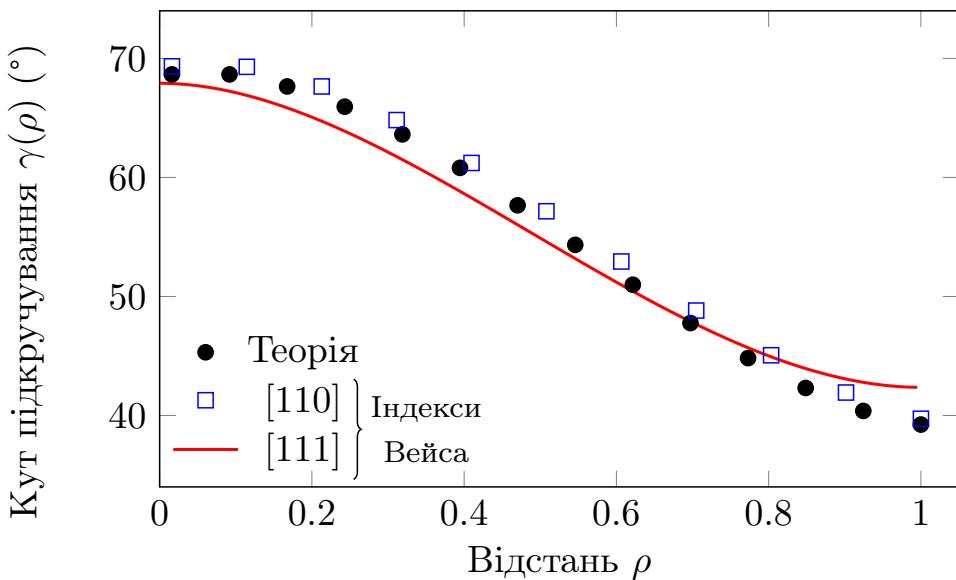


Рис. 2.5: Радіальна залежність кута повороту γ у сферичній частинці. Лінія: чисельне інтегрування (2.21). Точки: моделювання у SLaSi, значення для кристалографічних напрямків [110] і [111]. Параметри такі самі, як на рис. 2.2.

сукупності дискретних магнітних моментів \mathbf{m}_n , розташованих у вузлах простої кубічної кристалічної гратки і пронумерованих індексом n :

$$\frac{d\mathbf{m}_n}{dt} = -\gamma_e \mathbf{m}_n \times \mathbf{H}_{\text{eff}} n + \alpha \mathbf{m}_n \times \frac{d\mathbf{m}_n}{dt} \quad (2.28)$$

із ефективним полем

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} \mathbf{n} = -\frac{1}{M_s} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{m}_n}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ex}} + \mathcal{H}_{\text{an}} + \mathcal{H}_{\text{surf. an}} + \mathcal{H}_{\text{ms}} + \mathcal{H}_{\text{Z}}, \quad (2.29)$$

де $\mathcal{H}_Z = -g\mu_B \mathcal{S} \sum_n (\mathbf{m}_n \cdot \mathbf{H}_n)$ — енергія взаємодії із зовнішнім полем, \mathbf{H}_n — зовнішнє магнітне поле, яке діє на n -й вузол гратки. Інтегрування (2.28) виконується модифікованим методом Рунге—Кутти—Фельдберга 4—5 порядків (RKF45) із вільними спінами на поверхні зразка. Серед модифікацій коду:

- моделювання тривимірної гратки із відповідним розрахунком магніто-статичної енергії без наближень;
 - можливість врахування поверхневої анізотропії;
 - використання покращеного методу інтегрування.

Крок інтегрування за часом усюди вибиралася такий, щоб різниця між результатами інтегрування 4-м і 5-м порядками різницевої схеми був менше 10^{-5} , а зміна векторів \mathbf{m}_n на кроці інтегрування була менша за 0,01. Він підбирається таким чином, щоб залишатись незмінним протягом всього розрахунку для уникнення чисельних шумів. У моделюваннях цього підрозділу константи об'ємної і поверхневої анізотропії було покладено рівними нулю: $\mathcal{K} = \mathcal{K}_s = 0$.

Структура точки Блоха із радіально-залежним анзацем (2.19) була змодельована у зразку сферичної форми діаметром $2R = 35a$ (такий зразок містить 24 464 вузлів з ненульовим магнітним моментом) і обмінною довжиною $\ell = 3,95a$ ($\varepsilon = 0,05$). Для стабілізації точки Блоха було прикладене магнітне поле із амплітудою $h = 1,0$. У передемпфованому режимі ($\alpha = 0,5$) точка Блоха швидко релаксує до стану, подібного заданому рівнянням (2.19): полярний кут точки Блоха $\theta(\rho)$ не відхиляється від ϑ з точністю 0,099 радіани. Азимутальний кут також добре описується (2.19) з радіально-залежним кутом повороту $\gamma(\rho)$, див. рис. 2.5. Точки на графіку було отримано для кристалографічних напрямків [111] ($\vartheta = \pi/4$) і [110] ($\vartheta \approx \pi/2$, відповідна площа зсунута на $z = -0,5a$ від початку координат, оскільки точка Блоха релаксує у міжвузля). З рис. 2.5 видно, що чисельні дані добре збігаються з теоретично передбаченою залежністю $\gamma(\rho)$, розрахованою як чисельний розв'язок (2.21).

Для перевірки наведеної теорії окремо було проведено перевірку стабільності шляхом зсуву точки Блоха з її рівноважної позиції у центрі зразка. Моделювання було почато з розподілу (2.19), зсунутого вздовж вісі аплікат на відстань $\Delta z = -2a$, і з $\gamma(\rho, t = 0) = 3^\circ$ для порушення симетрії. Для швидкої релаксації було застосовано передемпфований режим із параметром релаксації $\alpha = 0,5$. Зсув точки Блоха контролювався за проекціями повного магнітного моменту: лише у положенні в центрі всі вони обертаються в нуль.

Часову еволюцію початково зсунутої точки Блоха наведено на рис. 2.6, де представлено результати моделювань для зразка діаметром $2R = 35a_0$

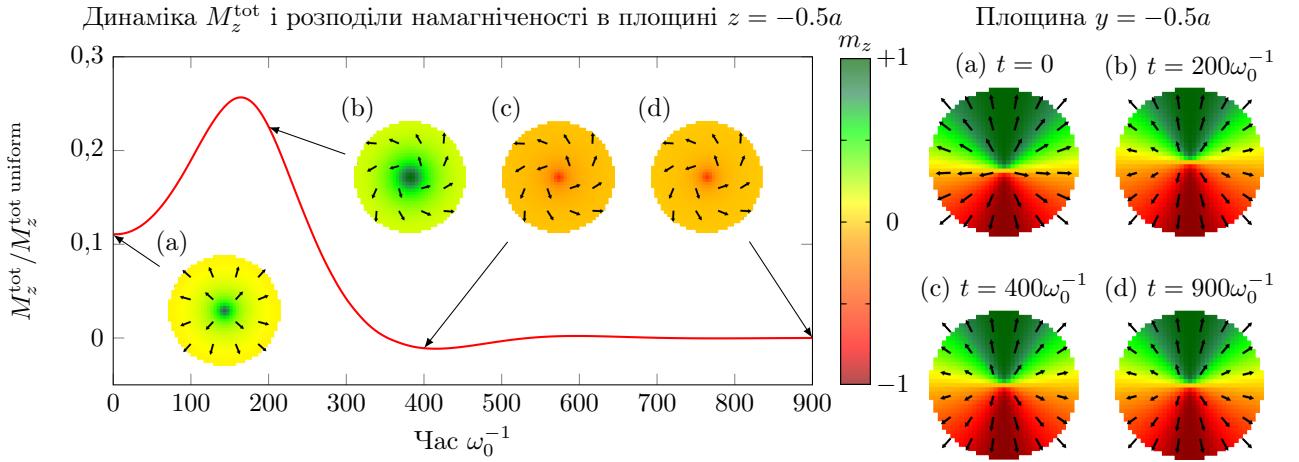


Рис. 2.6: Динаміка повного магнітного моменту вздовж вісі z зразка, віднесеної до магнітного моменту зразка, намагніченого до насилення ($\omega_0 = JS^2/\hbar$). Точка Блоха була початково зсунута на $\Delta z = -2a$ з центру зразка. Вставки показують розподіл намагніченості у площині $z = -0,5a_0$ і $y = -0,5$ у різні моменти часу. Кольорова полоса позначає компоненту $m_{z,n}$ для вузлів гратки. Амплітуда прикладеного поля $h = 1$, інші параметри такі самі, як на рис. 2.2.

(24 456 вузли) у полі амплітудою $h = 1$. Поштовх точка Блоха була зсунутою вниз від центру координат, що відповідає $M_z^{\text{tot}} > 0$, див. вставку (a). Під час динаміки, відбувалася сильна генерація магнонів, див. вставку (b). Після швидких згасаючих коливань, точка Блоха зупинилася у центрі зразка, див. вставку (d). Релаксація складалася з двох частин: (i) кут повороту $\gamma(\rho)$ змінив своє початкове значення до рівноважного за час приблизно $500\hbar/(JS^2)$; (ii) релаксація компонент повного магнітного моменту, яка зайняла приблизно той самий час.

2.3 Вплив поверхні зразка на динаміку точки Блоха

Вихор може бути стійким стаціонарним станом намагніченості в зразку не лише через вплив полів розмагнічування, а й завдяки поверхневій анізо-

тропії [177, 178]. Ця анізотропія завжди з'являється у реальних зразках через порушення симетрії для вузлів на поверхні і може призводити до специфічної одноосьової одноіонної анізотропії різних знаків [89, 177]. У зразках дископодібної форми анізотропія на бічній поверхні може пінінгувати намагніченість вздовж неї у вихровій конфігурації [177].

Подібність між ефектами полів розмагнічування і поверхневою анізотропією не є випадковою. Відомі різні випадки, коли нелокальна диполь-дипольна взаємодія може бути наближено зведені до локальної ефективної анізотропії [30–32, 179–185]. Аналітичний аналіз може бути виконано у певних граничних відношеннях між діаметром зразка $2R$, його товщиною L і обмінною довжиною ℓ_{ex} . Для нескінченно тонких плівок з $L = o(R)$ і $\ell_{\text{ex}} = O(R)$, магнітостатична взаємодія зводиться до енергії ефективної легкоплощинної анізотропії. При цьому реалізується однорідний розподіл намагніченості у площині плівки [30]. Ця ефективна анізотропія має дуже простий сенс: поверхневі магнітостатичні заряди створюють магнітостатичний конденсатор з густинною енергії $4\pi M_s^2$.

Варто згадати випадок $L \ll R$ і $\ell_{\text{ex}} \ll R$, коли аналітичний опис показує [33], що магнітостатична взаємодія зводиться до енергії неоднорідної анізотропії. Для дископодібної частинки, виникають дві ефективні неоднорідні анізотропії: ефективна анізотропія, наведена поверхневими магнітостатичними зарядами на основах зразка (легкоплощинна анізотропія для тонких зразків і легкоосьова для витягнутих), і ефективна анізотропія, наведена магнітостатичними зарядами на бічній поверхні, яка відповідає за тангенціальний розподіл намагніченості вздовж бічної поверхні зразка (кіральність вихору за чи проти годинникової стрілки). Оскільки перша може змінювати знак поблизу межі зразка [33], можуть утворюватися «підігнані» (англ. tailoring) вихори [186, 187], що теж якісно пояснюється моделлю ефективної анізотропії [33].

Вихрове осердя створює поверхневі магнітостатичні заряди протилежних знаків на основах зразка циліндричної форми. Їх мінімізація призводить до складного профілю вихору як у площині, так і в об'ємі зразка в аксіальному напрямку [88]. Якщо товщина нанодискустає порівняною з кількома обмінними довжинами, товщина блохівської лінії починає помітно змінюватися вздовж аксіального напрямку набуваючи бочкоподібної форми через виникнення об'ємних магнітостатичних зарядів, які намагаються зменшити повну енергію дипольної взаємодії [88, 188]. Для опису форми вихору у тривимірному простору в роботі [88] було використано пробну функцію $m = \sum_i c_i \exp[-2r^2/\ell_i^2 w_i(z)]$ з $w_i(z) = b_i(1 - 4z^2/L^2)$ і $\sum_i c_i = 1$. Радіальні компоненти намагніченості було розраховано з вимоги на відсутність повного об'ємного магнітостатичного заряду. Невідомі коефіцієнти b_i , c_i і ℓ_i розраховувались з мінімізації повної енергії.

Таким чином, виходячи з подібності магнітостатичної взаємодії в певних аспектах до ефективної поверхневої анізотропії, нижче розглянуто вплив одноіонної одноосьової поверхневої анізотропії різних типів, додатної (англ. ES, easy-surface) та від'ємної (англ. EN, easy-normal) на тривимірний вихровий розподіл у гайзенбергівському магнетику.

2.3.1 Гайзенбергівский магнетик з поверхневою анізотропією

У даному підрозділі наведено модель гайзенбергівського феромагнетика із неєлівською поверхневою анізотропією і розраховано структуру вихору в ньому за відсутності зовнішніх полів.

2.3.1.1 Модель і вихровий розв'язок Розглянемо феромагнетик із класичним анізотропним гайзенбергівським гамільтоніаном

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ex}} + \mathcal{H}_{\text{an}} + \mathcal{H}_{\text{surf. an}} + \mathcal{H}_z. \quad (2.30)$$

Його континуальна версія, нормована на $K\mathcal{S}^2/a^3$ може бути записана як

$$\begin{aligned} E &= \frac{K\mathcal{S}^2}{a^3} (\mathcal{E}_v + \mathcal{E}_s), \\ \mathcal{E}_v &= \int_V dV \left[-\frac{\ell^2}{2} \mathbf{m} \cdot \nabla^2 \mathbf{m} + \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_z)^2}{2} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{h} \right], \\ \mathcal{E}_s &= \frac{\kappa a}{2} \int_S dS (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_s)^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

де $\ell = a\sqrt{\lambda}$ із $\lambda = J/K$ — магнітна довжина (1.11), записана у термінах величин, пов'язаних із спіновою граткою (магнітостатична взаємодія може бути зведена до ефективної поверхневої анізотропії у тонких плівках, коли розмір осердя вихору приблизно рівний ефективній магнітній довжині), $\kappa = \mathcal{K}_s/\mathcal{K}$ поверхнева анізотропія у одиницях об'ємної анізотропії \mathcal{K} . Параметр \mathbf{h} — зовнішнє поле, нормоване на поле анізотропії H_A (тут і далі поле вважається прикладеним вздовж віси \mathbf{e}_z),

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H_A}, \quad H_A = \frac{K\mathcal{S}}{2\mu_B}. \quad (2.32)$$

Надалі розглядатимуться випадки малої поверхневої анізотропії $|\kappa| < 1$. Протилежні знаки κ відповідають двом можливим в даній моделі типам поверхневої анізотропії: додатній ($\kappa > 0$, мінімуму енергії поверхневої анізотропії відповідають дотичні до поверхні зразка напрямки намагніченості) і від'ємний ($\kappa < 0$, мінімуму енергії поверхневої анізотропії відповідають напрямки намагніченості вздовж нормалей до поверхні зразка).

Рівноважний розподіл намагніченості може бути знайдений варіацією функціоналу енергії (2.31), що дає наступну межову задачу [6, 88]:

$$\mathbf{m} \times [\ell^2 \nabla^2 \mathbf{m} + \mathbf{h} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z] = 0, \quad (2.33a)$$

$$\ell \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{n}_s} \Big|_s = \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_s) [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_s) \mathbf{m} - \mathbf{n}_s] \Big|_s, \quad (2.33b)$$

За відсутності поверхневої анізотропії ($\kappa = 0$) основний стан одноосьового феромагнетика визначатиметься лише значенням зовнішнього поля. Як

випливає з (2.33a), z -компонента намагніченості $m = h = \text{const}$, ї межова задача (2.33b) відповідає типу Неймана, $\partial\mathbf{m}/\partial\mathbf{n}_s = 0$, що тривіально забезпечується розв'язком у вигляді сталого вектора \mathbf{m} .

Наявність поверхневої анізотропії кардинально змінює симетрію задачі. В цьому випадку межові умови (2.33b) відповідають типу Робіна [189], що є джерелом порушення симетрії й може бути причиною підкручення намагніченості. За $\kappa \neq 0$ можливо виникнення різних неоднорідних основних станів, відомих в літературі як «їжаки», «артішоки», «onion» тощо [177, 178, 190–194].

Вираз (2.33b) є межовою умовою (1.6) у нормованих одиницях, де також взято до уваги зовнішнє поле. Відсутність нелокальної дипольної взаємодії дозволяє уникнути інтегро-диференціальних рівнянь [90, 103]. Але з'являється координатно-залежне порушення симетрії вздовж вісі e_z . Як буде описано далі, внаслідок цього ширина осердя вихору приймає різні значення на поверхні і в об'ємі, а зміна полярності відбувається неоднорідним чином із народженням точок Блоха.

2.3.1.2 Структура осердя вихору за відсутності зовнішнього поля

Розглянемо диск радіусом R і товщиною L за відсутності зовнішніх полів ($\mathbf{h} = 0$). Внесок об'ємної енергії у функціонал (2.31) має вигляд

$$\mathcal{E}_v = \frac{1}{2} \int_V dV \left\{ \ell^2 [(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\phi)^2] + \cos^2\theta \right\}. \quad (2.34a)$$

Поверхнева енергія має вигляд $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_s^{\text{face}(+)} + \mathcal{E}_s^{\text{face}(-)} + \mathcal{E}_s^{\text{edge}}$, де

$$\mathcal{E}_s^{\text{face}(\pm)} = \frac{\kappa a}{2} \int_S dS^{\text{face}(\pm)} \cos^2\theta \Big|_{z=\pm L/2}, \quad (2.34b)$$

$$\mathcal{E}_s^{\text{edge}} = \frac{\kappa a}{2} \int_S dS^{\text{edge}} \sin^2\theta \cos^2(\phi - \chi) \Big|_{r=R}$$

і використано циліндричні координати (r, χ, z) .

У термінах кутових змінних межова задача (2.33) для зразка циліндричної форми приймає вигляд

$$\nabla^2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \left[(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{\ell^2} \right] = 0, \quad (2.35a)$$

$$\nabla \cdot (\sin^2 \theta \nabla\phi) = 0, \quad (2.35b)$$

$$\pm \ell^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\kappa a}{2} \sin 2\theta \Big|_{z=\pm L/2} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\pm L/2} = 0, \quad (2.35c)$$

$$\ell^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\kappa a}{2} \sin 2\theta \cos^2(\phi - \chi) \Big|_{r=R} = 0, \quad (2.35d)$$

$$\ell^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\kappa a}{2} \sin 2(\phi - \chi) \Big|_{r=R} = 0. \quad (2.35e)$$

Форма межових умов визначає можливі мінімайзери функціоналу енергії. Можна побачити, що межова задача (2.35) має вихороподібний стаціонарний розв'язок з

$$\phi = \chi + \varphi_0. \quad (2.36a)$$

Щоб забезпечити межову умову (2.35e), необхідно вибрати значення константи $\varphi_0 = \pm\pi/2$ для $\kappa > 0$ або $\varphi_0 = 0, \pi$ для $\kappa < 0$.

Спрощена версія межової задачі (2.35) з $\theta = \pi/2$ була розглянута у роботі [177]: планарні вихори з $\cos \theta = 0$ і $\phi = \chi + \varphi_0$ можливі як метастабільні стани у зразках дископодібної форми.

Нижче буде обговорено тривимірну межову задачу (2.35). У цьому випадку виникає вихор із ненульовою позаплощиною компонентою і функціональною залежністю від координати z :

$$\theta = \theta(r, z). \quad (2.36b)$$

Типовий масштаб функції θ визначається магнітною довжиною ℓ . Вважаючи, що $\ell \ll R$, межову умову (2.35d) можна замінити на наступну:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R \rightarrow \infty} = 0, \quad \cos \theta \Big|_{r=R \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.37)$$

Задача (2.35) є нелінійною межовою задачею для диференційного рівняння у частинних похідних для функції (2.36b). Щоб спростити аналіз, ми використали варіаційний підхід з анзацем

$$\cos \theta(r,z) = f\left(\frac{r}{w(z)\ell}\right), \quad f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (2.38)$$

Ця функція є узагальненням фельдткллерівського анзацу (1.19). На відміну від підходу, використаного Хубертом [88], в даному випадку, нормована ширина вихрового осердя $w(z)$ тепер є варіаційною функцією.

Підставляючи вихровий розподіл (2.36) у вираз для енергії (2.34) отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_v &= \pi \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^R \rho dr \left\{ \ell^2 \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right] + \cos^2 \theta \right\}, \\ \mathcal{E}_s^{\text{face}(\pm)} &= \pi \varkappa a \int_0^R r dr \cos^2 \theta \Big|_{z=\pm L/2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Із використанням анзацу (2.38) цей вираз можна переписати як

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_0 + \pi \ell^3 \sqrt{\zeta(3)} \tilde{\mathcal{E}}[w], \quad \mathcal{E}_0 = \pi \ell^2 L \left(\ln \frac{R}{\ell} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{\gamma_{\text{Eu}}}{2} \right), \\ \tilde{\mathcal{E}}[w] &= \int_{-L_0}^{L_0} d\eta \left[w'^2(\eta) - \ln w(\eta) + \frac{w^2(\eta)}{2} \right] \\ &\quad + \frac{\tilde{\varkappa}}{2} [w^2(L_0) + w^2(-L_0)], \quad L_0 = \frac{L}{2\ell \sqrt{\zeta(3)}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

де $\zeta(3) \approx 1,202$ — стала Апері [189] й використано перепозначення змінних $\eta = z/[\ell \sqrt{\zeta(3)}]$ і $\tilde{\varkappa} = \varkappa a/[\ell \sqrt{\zeta(3)}]$, штрихом позначено похідну по обезрозміреній координаті η .

Варіація функціоналу (2.40), приводить до наступної межової задачі:

$$2w''(\eta) = w(\eta) - \frac{1}{w(\eta)}, \quad (2.41a)$$

$$\tilde{\varkappa}w(\eta) \pm 2w'(\eta) \Big|_{\eta=\pm L_0} = 0. \quad (2.41b)$$

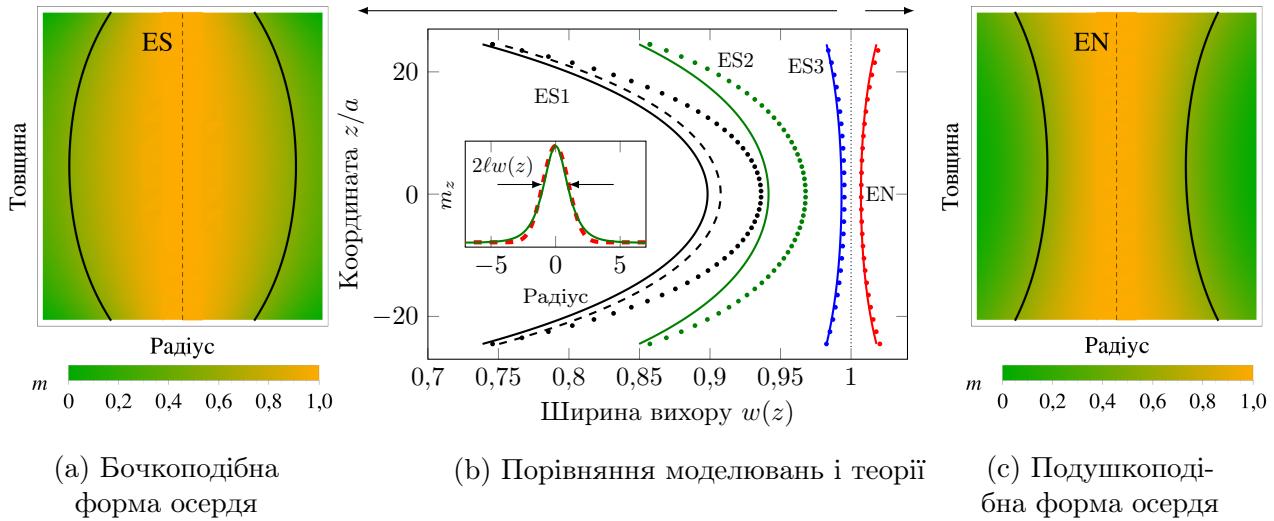


Рис. 2.7: (a), (c): Схематичне зображення форми вихрового осердя для додатної (ES, англ. easy-surface) і від’ємної (EN, англ. easy-normal) поверхневих анізотропій відповідно. Колір відповідає значенню m , а суцільні лінії позначають ширину вихору. Пунктиром вказано центр зразку $r = 0$. (b) Ширина вихору як функція координати вздовж вісі e_z для різних анізотропій: додатна анізотропія з кривими ES1 ($\kappa = 10$), ES2 ($\kappa = 5$), ES3 ($\kappa = 0,5$) і від’ємна анізотропія EN ($\kappa = -0,5$). Точки відповідають моделюванням, суцільні криві — аналітичній залежності (2.42). Пунктирна крива для ES1 відповідає чисельному розв’язку (2.41). Параметри: $\ell = 14a$, $L = 49a$, $2R = 249a$. Тонка пунктирна лінія $w(z) = 1$ показує рівноважне значення за відсутності поверхневої анізотропії. «додатні» криві лежать ліворуч, а «від’ємні» — праворуч від неї. Вставка показує центральну частину позаплощинної компоненти вихору з моделювань (суцільна крива) і аналітичного розв’язку (штрих-пунктирна крива) за відсутності поверхневої анізотропії.

Зазначимо, що за відсутності поверхневої анізотропії, рівняння (2.41b) набуває форми межових умов Неймана, $w'(\eta)|_{\eta=\pm L_0} = 0$, і задача (2.41) матиме лише сталий розв'язок $w(\eta) = 1$. Це відповідає нормованій ширині осердя при $\varkappa = 0$.

Аналіз задачі (2.41) легко здійснити у випадку слабкої поверхневої анізотропії, коли $|\tilde{\varkappa}| \ll 1$. Тоді нормоване значення ширини осердя вихору w також близьке до одиниці, і можна записати $w(\eta) = 1 - \tilde{x}(\eta)$, де $|\tilde{x}(\eta)| \ll 1$. Нижче це припущення буде перевірене моделюваннями. Лінеаризуючи (2.41a) по \tilde{x} із врахуванням робіновських межових умов (2.41b), можна записати наступний розв'язок:

$$w(\eta) = 1 - \frac{\tilde{\varkappa} \operatorname{ch} \eta}{\tilde{\varkappa} \operatorname{ch} L_0 + 2 \operatorname{sh} L_0}. \quad (2.42)$$

Легко побачити, що через поверхневу анізотропію, ширина осердя стає функцією від координати $\eta \sim z$, а опуклість цієї функції залежить від знаку $\tilde{\varkappa}$, тобто типу поверхневої анізотропії.

Типову залежність ширини осердя вихору від аксіальної координати $w(\eta)$ наведено на рис. 2.7: осердя набуває бочкоподібної форми для додатної анізотропії ($\varkappa > 0$) і подушкоподібної для від'ємної ($\varkappa < 0$). Залежність (2.42) для різних значень сталих поверхневої анізотропії зображене суцільними кривими. Чисельно розрахований профіль вихору як розв'язок (2.41) зображене пунктирною кривою (ES1). Точки відповідають даним моделювань у SLaSi, отриманим як фіттінг форми вихору для заданого положення в зразку z анзацем (2.38).

У моделюваннях розглядався диск товщиною 50 вузлів кристалічної гратки, $L = 49a$, діаметром $2R = 249a$. Сталу релаксації Гільберта було обрано $\alpha = 0,5$. Для детального опису структури осердя було обрано магнітну довжину, рівну $\ell = 14a$. Вставка у центрі рис. 2.7 показує позаплощинну компоненту вихору $\cos \theta$ як функцію безрозмірної радіальної координати r/ℓ для випадку $\varkappa = 0$. Видно, що анзац (2.38) (штрих-пунктирна лінія) досить добре

описує форму вихору, отриману з моделювань (суцільна крива).

Обговоримо деталі отриманого результату. За наявності поверхневої анізотропії структура вихору змінюється у відповідності до запропонованої нами теорії. Моделювання проводилися для різних значень поверхневої анізотропії. Тут наведено дані для $\kappa_1 = 0,5$, $\kappa_2 = 5$, $\kappa_3 = 10$ і одного значення від'ємної анізотропії $\kappa_4 = -0,5$. Менші значення $|\kappa|$ більш реалістичні, тим не менше, сильна поверхнева анізотропія дозволяє отримати яскраво виражений ефект для порівняння з теорією. Відмітимо, що значення коефіцієнту від'ємної анізотропії повинно бути меншим за модулем, ніж значення коефіцієнту об'ємної анізотропії, щоб сумарна одноіонна анізотропія забезпечувала вихровий стан на поверхні плівки.

Ширина осердя зрелаксованого вихору за наявності поверхневої анізотропії стає координатно-залежною. Бочко- чи подушкоподібна форма осердя залежить від типу поверхневої анізотропії. У випадку додатної поверхневої анізотропії повний коефіцієнт анізотропії приповерхневих вузлів ґратки $\mathcal{K} + |\mathcal{K}_s|$ є більшим, ніж об'ємний коефіцієнт анізотропії \mathcal{K} . Це призводить до зменшення ефективної магнітної довжини

$$\ell_{\text{eff}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 + \kappa}}. \quad (2.43)$$

на основах диску. Через обмінний зв'язок між шарами кристалічної ґратки, виникає гладка зміна величини ℓ_{eff} з координатою. Ця величина сягає мінімального значення на основах зразка, що й відповідає бочкоподібному профілю вихору. Для від'ємної поверхневої анізотропії все виконується з точністю до навпаки.

2.3.2 Процес перемикання полярності вихору з врахуванням ефекту поверхневої анізотропії

У даному підрозділі описано вплив зовнішнього поля на гайzenбергівський магнетик із неєлівською поверхневою анізотропією. Розглянуто випадок поля,

прикладеного перпендикулярно до поверхні однорідно намагніченої плівки і основ зразка циліндричної форми у вихровому стані.

2.3.2.1 Деформація однорідного розподілу намагніченості під впливом зовнішнього поля Основним станом гайзенбергівського магнетику із легкоплощинною анізотропією є однорідна намагніченість. Тому обговорення впливу зовнішнього поля почнемо з випадку легкоплощинного феромагнетику у формі нескінченної плівки товщиною $L = (N - 1)a$, де N — кількість вузлів кристалічної ґратки вздовж напрямку z . Навіть за наявності слабкої поверхневої анізотропії, за відсутності магнітного поля основним станом такого магнетика залишається однорідний розподіл у площині плівки $m = 0$.

За наявності зовнішнього магнітного поля поверхнева анізотропія починає грати важливішу роль: порушується однорідність розподілу намагніченості в напрямку вісі e_z :

$$m_0(z, h) = h \left[1 - \kappa \sqrt{\frac{1 - h^2}{\lambda}} \frac{\text{ch}(\sqrt{1 - h^2} z / \ell)}{\text{sh}(\sqrt{1 - h^2} L / 2\ell)} \right], \quad (2.44)$$

див. додаток А. Типовий профіль m_0 як функцію координати z для додатного і від'ємного типів поверхневої анізотропії наведено на рис. 2.8. Точки відповідають спін-ґратковим моделюванням (розмір зразка $100 \times 100 \times 50$ вузлів ґратки, магнітна довжина $\ell = 5a$, $\kappa = \pm 0,25$, прикладене поле $h = 0,7$, профіль намагніченості вздовж вісі e_z було вимірюно в центрі зразка). Можна побачити, що опуклість функції $m_0 = f(z)$ визначається знаком добутку κh . Таким чином, у подальшій статиці та динаміці може проявитись неоднорідна деформація розподілу намагніченості в області поза осердям вихору.

2.3.2.2 Чисельні моделювання У спін-ґраткових моделюваннях, виконаних у SLaSi, які обговорюватимуться нижче, розглянуто два набори параметрів наночастинки у формі диску: діаметр $2R = 149a$, товщина $L = 49a$

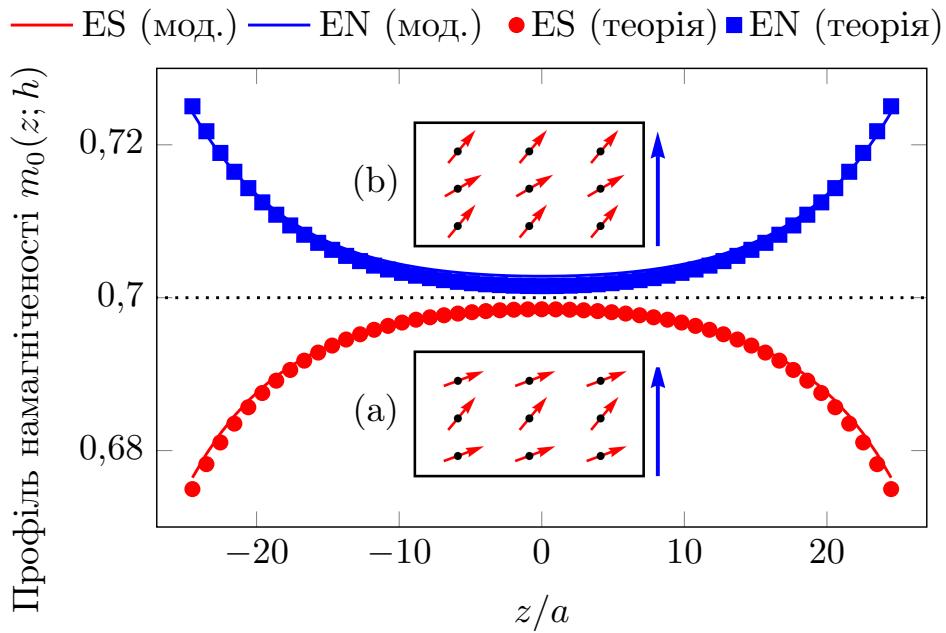


Рис. 2.8: Профіль намагніченості $m_0(z; h)$ як функція координати z вздовж товщі зразка для $h = 0,7$ (рівень вказано пунктирною лінією) і $|\varkappa| = 0,25$. Точки відповідають спін-гратковим моделюванням, суцільні криві — розкладу до першого порядку мализни за виразом (2.44). ES — додатна, EN — від’ємна поверхнева анізотропія. (а), (б) Схематичний розподіл намагніченості у плівках з поверхневими анізотропіями різних знаків (червоними стрілками позначено напрямок намагніченості, синіми — напрямок зовнішнього поля).

і магнітна довжина $\ell = 14a$ (диски А), $2R = 99a$ і $\ell = 5a$ з різними товщами $L = (N - 1)a$, $N = \overline{11,50}$ (диски В). Обрані діаметри зразків дозволяють вихору знаходитися одночасно в центрі зразка і між вузлами гратки. Інші параметри моделювань: початкова полярність $p = 1$, стала релаксації Гільберта $\alpha = 0,5$ відповідає передемпфованому режиму, поверхнева анізотропія $\varkappa_{\text{ES}} = 0,5$ і $\varkappa_{\text{EN}} = -0,5$, зовнішні поля змінювались в інтервалі $h \in (-0,83; 0)$. Площини кристалічної гратки розташовані паралельно основам зразків. Як і у підрозділі 1.2.2.1, використовується обезрозмірений час τ .

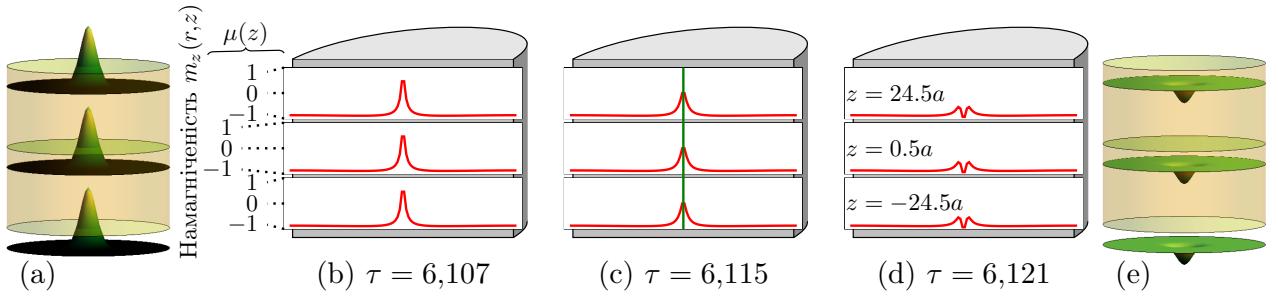


Рис. 2.9: Просторово-часова картина зміни полярності вихору у зразку з лише об'ємною анізотропією, моделювання (центр). Ліворуч (а) і праворуч (е): схематичнеображення профілів вихору у трьох різних горизонтальних перерізах. Протягом процесу перемикання, полярність вихору змінюється одночасно в усіх горизонтальних площинах ґратки. Сірими прямокутниками на задньому плані позначено переріз зразка у площині XY, білими прямокутниками позначено просторовий розподіл z -компоненти намагніченості $m(r,z)$. Розподіл намагніченості наведено у трьох різних перерізах зразку ($z_t = 24,5a$, $z_c = 0,5a$ і $z_b = -24,5a$) у три різні моменти часу: (b) перед перемиканням, $\tau = 6,107$, (c) у моменти перемикання, $\tau = 6,115$, і (d) безпосередньо після перемикання, $\tau = 6,121$. Перемикання супроводжується утворенням лінійної сингулярності (зелена лінія). Параметри: диск A, $h = -0,83$.

Магнетики лише з об'ємною анізотропією, $\mathcal{K}_s = 0$ Використовуючи розподіл (2.36) як початковий стан для різних значень зовнішнього поля $h < 0$, чисельно було отримано статичну конфігурацію, підлаштовану під ґратку. Адіабатично збільшуючи прикладене поле, ми знаходили його критичне значення h_c таке, що для сильніших полів $|h| \geq |h_c|$ починається процес зміни полярності.

Ми моделювали процес зміни полярності вихору для диску A. Чисельно було отримано, що $|h_c| \approx 0,83$. Важкий вихор було зрелаксовано при $h = -0,82$. Його ширина зменшилася, а намагніченість далеко від осердя зсунута за полем: $m = h$ [2, 102]. Далі було прикладене поле $h = -0,83$,

що призвело до зміни полярності. Важкий вихор втрачає стійкість: чотири магнітні моменти у центрі осердя швидко змінюють свій напрямок на протилежний. Інші магнітні моменти релаксують до легкого вихору з меншою швидкістю. В цілому, розподіл намагніченості далеко від осердя вихору залишається таким самим, суттєва динаміка спостерігається лише в області осердя.

Процес перемикання відбувається одночасно в усіх площинах кристалічної гратки. Таким чином сценарій процесу є повністю двовимірним. Часову еволюцію протягом перемикання зображенено на рис. 2.9. Схеми (а) і (е) показують тривимірну структуру намагніченості у зразку до і після перемикання відповідно: вихровий стан у трьох різних горизонтальних перерізах (верхній, центральний і нижній). Рисунки в центрі, (б)–(д), показують розподіл намагніченості у трьох перерізах в різні моменти часу: до перемикання ($\tau = 6,107$), у момент зміни полярності ($\tau = 6,115$), і одразу після ($\tau = 6,121$). Під час процесу зміни полярності виникає лінійна сингулярність $\mathbf{m}(\gamma) = 0$ (суцільна зелена вертикальна лінія на рис. 2.9). (Оскільки центр вихору $r = 0$ знаходиться між вузлами гратки, довжина магнітних моментів у моделюванні не змінюється.)

Процес зміни полярності у деталях наведено на рис. 2.10. Так само, як у розділі 1.2.1 тут замість полярності вихору $p = \pm 1$ обговорюватиметься динамічна полярність $\mu(z, \tau)$. Магнітні моменти у центрі осердя важкого вихору майже перпендикулярні до площини і можна казати, що динамічна полярність $\mu \approx 1$, див. криву (а) на рис. 2.10. Коли прикладене поле перевищує поріг перемикання, μ швидко зменшується і змінює знак проходячи через $\mu = 0$. Цей момент відповідає появі лінійної сингулярності (крива (б) на рис. 2.10). Динаміка центральних магнітних моментів відбувається швидше за інших. Вони швидко змінюють свій напрямок від $\mu \approx 1$ до $\mu \approx -1$, що виглядає як викид у профілі вихору, див. криву (с) на рис. 2.10. Фінальним

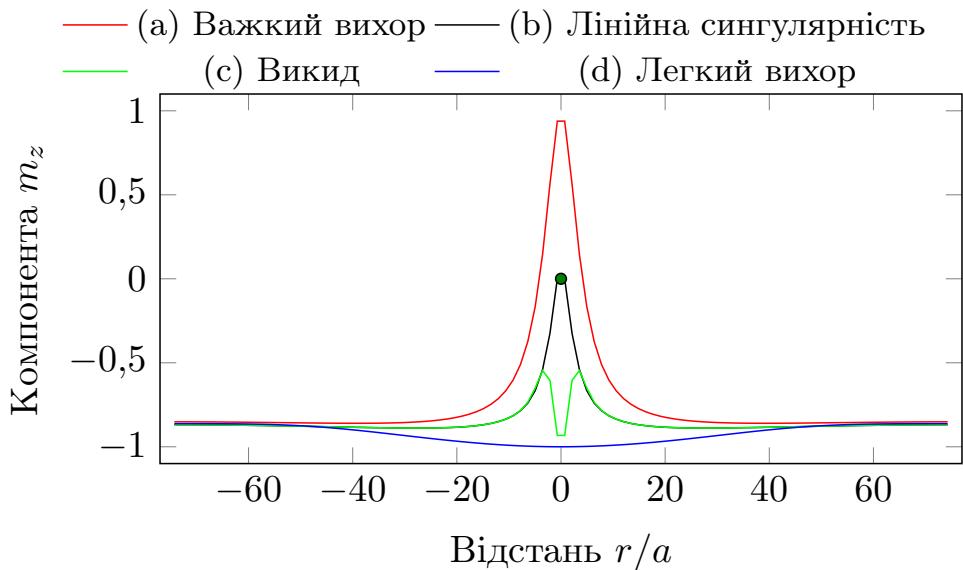


Рис. 2.10: Зміна полярності вихору у послідовні моменти часу: (а) початковий стан (важкий вихор) перед перемиканням; (б) динамічна полярність в центрі зменшується через дискретність, з'являється лінійна сингулярність; (с) центральні магнітні моменти змінюють напрямок швидше інших, поява викиду; (д) фінальний стан (легкий вихор).

станом є легкий вихор, див. криву (д) на рис. 2.10.

Зазначимо, що в цілому, протягом зміни полярності, розподіл намагніченості залишається однорідним вздовж вісі \mathbf{e}_z : чисельна різниця між розподілами намагніченості в різних площинах кристалічної ґратки не перевищує 10^{-6} для компонент векторів \mathbf{m}_n (відповідає точності збережених даних) як протягом релаксації у зовнішньому полі, так і процесу зміни полярності. Описаний вище сценарій має місце й за динаміки під дією неадіабатично прикладеного магнітного поля.

Магнетики з поверхневою анізотропією Обговоримо роль поверхневої анізотропії у процесі перемикання полярності. Як було описано в розділі 2.3.1.2, на поверхні зразка ширина осердя вихору характеризується ефективною магнітною довжиною (2.43), яка перевищує значення магнітної дов-

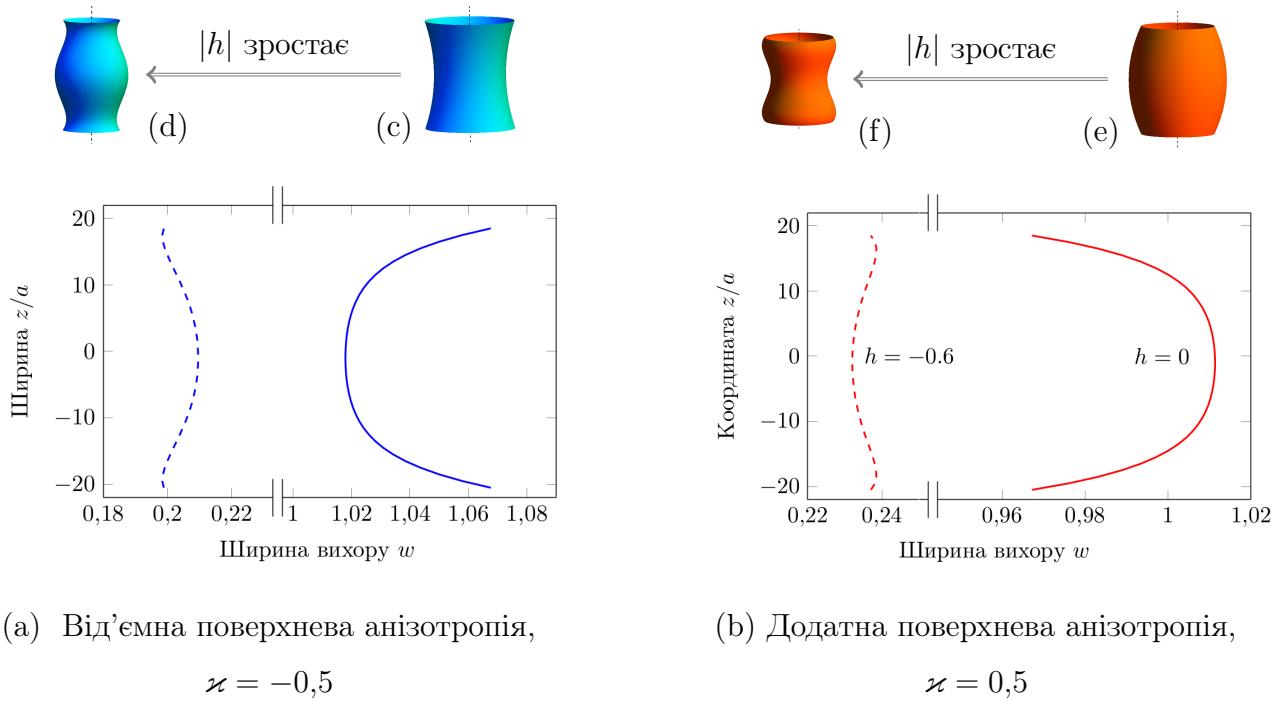


Рис. 2.11: Нормована ширина осердя вихору $w(z)$ для диску В товщиною $L = 39a$. За відсутності поля вихор має подушкоподібний профіль для від'ємної анізотропії ($\kappa = -0,5$), див. схему (с), або бочкоподібний профіль для додатної анізотропії ($\kappa = 0,5$), див. схему (е). Під дією поля, близького до поля перемикання ($h = -0,6$) виникає профіль протилежної форми: деформовані бочкоподібний для від'ємної і подушкоподібний для додатної анізотропії (схеми (д) і (ф) відповідно). Стрілками вказано трансформацію під дією зовнішнього поля h , яке зростає по модулю.

жини ℓ в об'ємі у випадку від'ємної поверхневої анізотропії ($\kappa < 0$, подушкоподібний профіль), або менше ней у випадку додатної магнітної анізотропії ($\kappa > 0$, подушкоподібний профіль), див. рис. 2.11, схеми (с) і (е). У слабких полях (далеко від критичного поля перемикання) форма вихору якісно залишається такою самою, лише ширина його трохи зменшується.

У проміжних полях виникає деформація профілю вихору. Близько до поля перемикання його можна описати як деформований подушкоподібний замість бочкоподібного (додатна поверхнева анізотропія), див. рис. 2.11 і схему (ф). Так само для від'ємної поверхневої анізотропії виникає деформований бо-

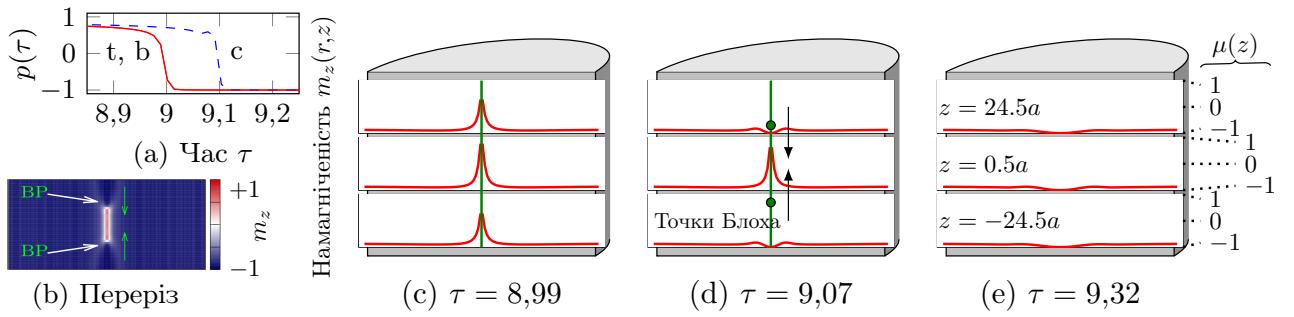


Рис. 2.12: Зміна полярності вихору у тривимірному гайзенбергівському магнетику з від'ємною поверхневою анізотропією (диск А, $\kappa = -0,5$, дані моделювань). (а) Динаміка полярності для вихорів $z = 24,5a$ і $z = -24,5a$ (суцільні лінії t і b, які співпадають), $z = 0,5a$ (штрихова лінія c). (б) Вихровий розподіл у кристалічній площині поблизу аксіального перетину зразка в момент часу $\tau = 9,07$. Кольором позначене значення компоненти m , товсті стрілки показують положення точок Блоха, тонкі вертикальні стрілки показують напрямок їх руху. (с)–(е) Зміна полярності у різних горизонтальних перетинах відповідно до кривих на (а). Зеленими стрілками вказано напрямок руху точок Блоха (ВР).

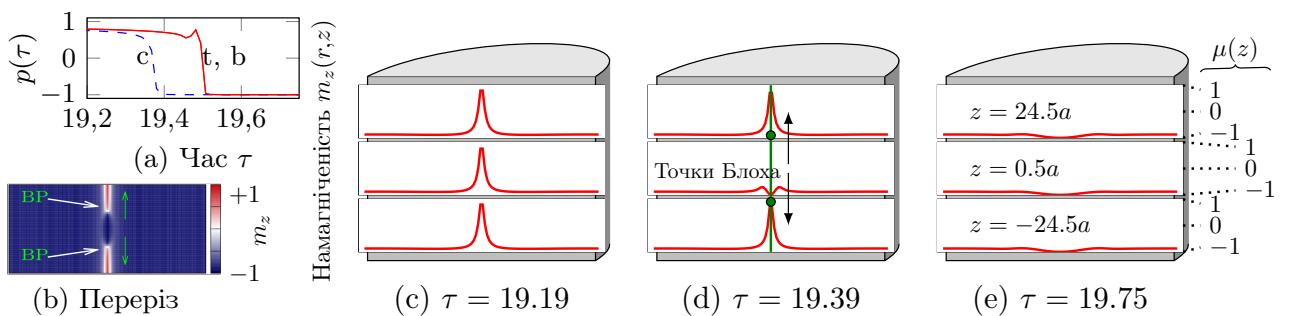


Рис. 2.13: Зміна полярності вихору у тривимірному гайзенбергівському магнетику з додатною поверхневою анізотропією (диск А, $\kappa = 0,5$, дані моделювань). Всі позначення і параметри такі самі, як на рис. 2.12.

чкоподібний профіль замість подушкоподібного, див. рис. 2.11 і схему (d). Чисельно профіль вихору було розраховано як такий набір чисел $w_0(z)$, що для різних z виконується $m(w_0) = 0,5 [m(0) + m(R)]$.

Деформована форма вихору є ключем для розуміння процесу зміни полярності вихору, який супроводжується народженням точок Блоха. Почнемо обговорення з випадку від'ємної поверхневої анізотропії. Під дією поля критичної амплітуди, профіль вихору набуває бочкоподібної форми, див. рис. 2.11 із схемою (d). Коли амплітуда поля зростає, точки перегину зміщуються до країв блохівської лінії і при наближенні поля до критичної амплітуди вони опиняються поблизу поверхні. Іншими словами, осердя вихору стає тоншим саме на основах диску, ніж у центрі зразка. Це призводить до неоднорідної зміни полярності: блохівська лінія розривається у найбільш тонких її частинах, тобто на поверхні зразка. Кожен її розрив відповідає появі точки Блоха. Тому у випадку від'ємної поверхневої анізотропії одночасно виникають дві точки Блоха, які заходять з основ зразка циліндричної форми. У процесі зміни полярності вони рухаються у протилежних напрямках, одна до одної, і анігілюють в центрі. Подібна поведінка спостерігається у випадку додатної поверхневої анізотропії: найтонша частина блохівської лінії знаходиться у центрі зразка і дві точки Блоха після утворення рухаються одна від одної до найближчих поверхонь зразка.

Схему зміни полярності у трьох просторових вимірах, яка супроводжується рухом точок Блоха у випадку від'ємної анізотропії, наведено на рис. 2.12. Дані моделювань наведено для диску А під дією зовнішнього поля $h = -0,85$, яке прикладено до зразка, зрелаксованого у полі $h = -0,8$. Точки Блоха завжди розділяють вихори з протилежними полярностями. Тому їх наявність легко виявити спостерігаючи за полярностями вихору у різних площинах ґратки: на основах диску і у центрі зразка, див. рис. 2.12(a). Еволюція в часі в обох точках Блоха має дзеркальну симетрію відносно площини $z = 0$: криві,

які зображають динаміку полярності на верхній і нижній площинах збігаються (суцільна лінія). Зміна полярності вихору у центрі зразка відбувається із запізненням (штрихова лінія). У товщих зразках може з'явитися додаткова пара точок Блоха всередині зразка, див. опис нижче і вставку на рис. 2.14. Аксіальний зріз ґратки в процесі зміни полярності наведено на рис. 2.12(b): вихор змінив полярність ($\mu \approx -1$) поблизу верхньої і нижньої поверхонь, в той час як в центрі зразка полярність все ще залишається початковою ($\mu \approx +1$). В зразку наявно дві точки Блоха: їх положення наведено двома товстими білими стрілками, а напрям руху — тонкими зеленими. Профілі вихорів у різні моменти часу в різних зрізах зразка наведено на рис. 2.12(c)–(e).

Процес зміни полярності вихору в зразку з додатною поверхневою анізотропією наведено на рис. 2.13 (позначення такі самі, як на рис. 2.12). До зразка, зarelаксованого під дією поля $h = -0,8$, було прикладено поле напруженістю $h = -0,85$. Блохівська лінія розірвалася у найтоншому місці, в центрі зразка, що привело до утворення двох точок Блоха, які почали рух від центру до поверхонь.

Окремо було проаналізовано випадок обмінної анізотропії, якісно результати дуже подібні до динаміки, яка спостерігається у зразках з від'ємною поверхневою анізотропією, див. додаток Б.

Для дослідження часової динаміки процесу зміни полярності, було виконано серію моделювань для зразків фіксованого діаметру (диск В) і різної товщини ($N = \overline{11,40}$) із $\kappa = \pm 0,5$. До зразка з $\kappa = -0,5$, зarelаксованого за відсутності зовнішніх полів, було прикладено поле $h = -0,8$. (Ступінчасте вмикання поля дещо зменшує його мінімальну амплітуду, за якої починається перемикання.) Подібно до вищеобговореного випадку, зміна полярності супроводжувалася народженням пари точок Блоха на поверхнях зразка, рухом назустріч одна одній і анігіляцією в центрі. Часову динаміку точок Блоха

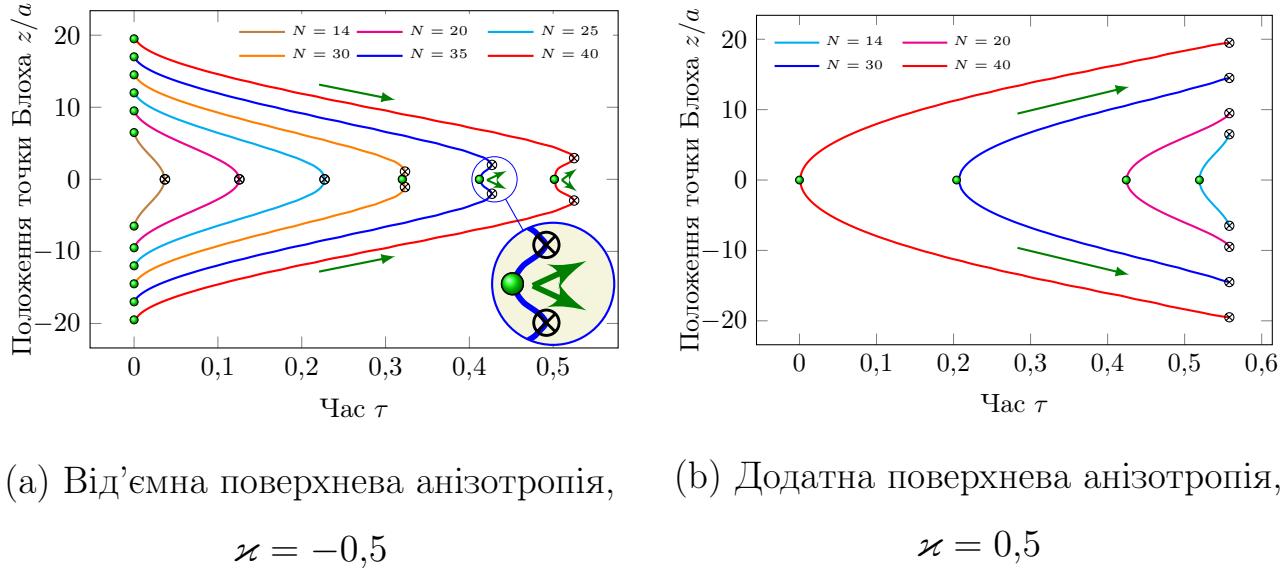


Рис. 2.14: Координата точки Блоха як функція часу для зразків різної товщини. Всі криві суміщено у момент часу $\tau = 0$ для від'ємної і $\tau = 0,548$ для додатної поверхневих анізотропій. Зеленими колами позначено події народження, а хрестами — анігіляції або виходу за межі зразка. Для $N \geq 30$ зафіксовано появу додаткової пари точок Блоха незадовго до завершення процесу перемикання. Стрілками позначено напрямок руху точок Блоха. Параметри: диск B, $h = -0,8$.

зразків для різної товщини наведено на рис. 2.14. Положення точкових сингулярностей визначалося як точка перетину трьох ізоповерхонь $m_i(\mathbf{r}) = 0$, де $i = x, y, z$ [168]. Кожна поверхня $m_i(\mathbf{r})$ розраховувалася як інтерполяційна функція для компонент намагніченості на основі дискретних значень \mathbf{m}_n . Для зразків із $\kappa = 0,5$ так само спостерігався процес народження двох сингулярностей в центрі із подальшим рухом до поверхні.

Якісно нова поведінка спостерігалась для порівняно товстих зразків ($N \geq 30$) із від'ємною поверхневою анізотропією: вже після початку зміни полярності з'являлася додаткова пара точок Блоха у центрі зразка. Мікромагнітні сингулярності рухалися одна від одної й анігілювали з сингулярностями, які були утворені першими, див. вставку на рис. 2.14(а). Відмітимо, що у слабшо-

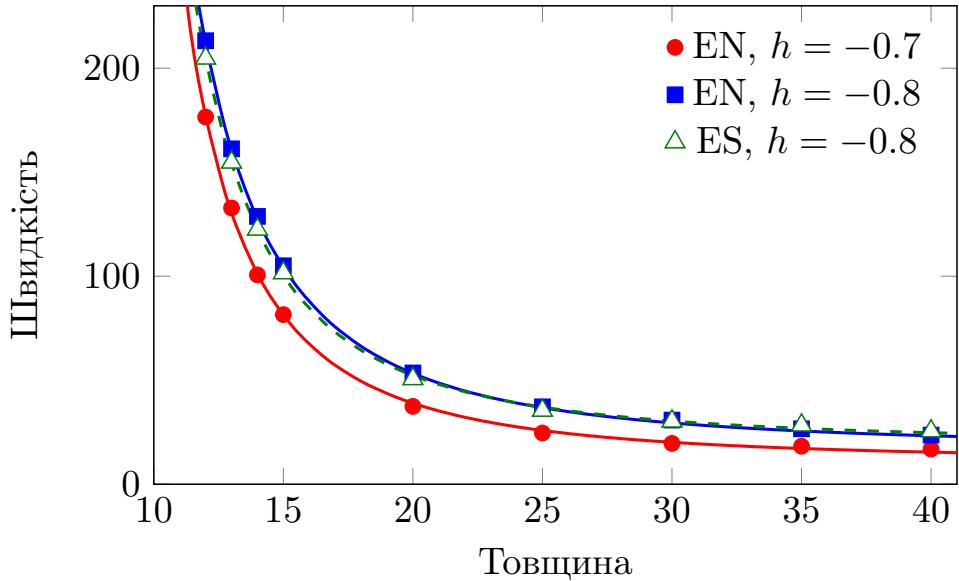


Рис. 2.15: Швидкість точки Блоха як функція товщини зразка у одиницях сталої ґратки для додатної (ES) і від'ємної (EN) поверхневих анізотропій. Параметри такі самі, як на рис. 2.14.

му полі $h = -0,7$ цього ефекту не спостерігалось. Можна зробити висновок, що у досить сильних полях виникає динамічна нестійкість довгих ліній Блоха, які зазнають додаткових розривів (утворення точок Блоха). Цей процес подібний до процесу утворення магнітних крапель у нанодротах [170].

Як видно з рис. 2.14, значну частину часу, рух точок Блоха відбувається зі сталою швидкістю, окрім інтервалів часу поблизу народження і анігіляції. Їх швидкість на лінійній ділянці для дисків різної товщини наведено на рис. 2.15. Вона швидко спадає зі збільшенням N і асимптотично прямує до деякого сталого значення, яке не залежить від типу поверхневої анізотропії.

У описаних вище моделюваннях диполь-дипольна взаємодія не бралася до уваги у припущеннях, що її можна звести до координатно-залежної анізотропії. Для перевірки отриманих вище результатів відносно реальних магнетиків окремо було проведено серію моделювань із врахуванням магнітостатичної взаємодії й поверхневої анізотропії. Для цього використовувався пакет мікромагнітних моделювань OOMMF [129], оскільки розрахунок в

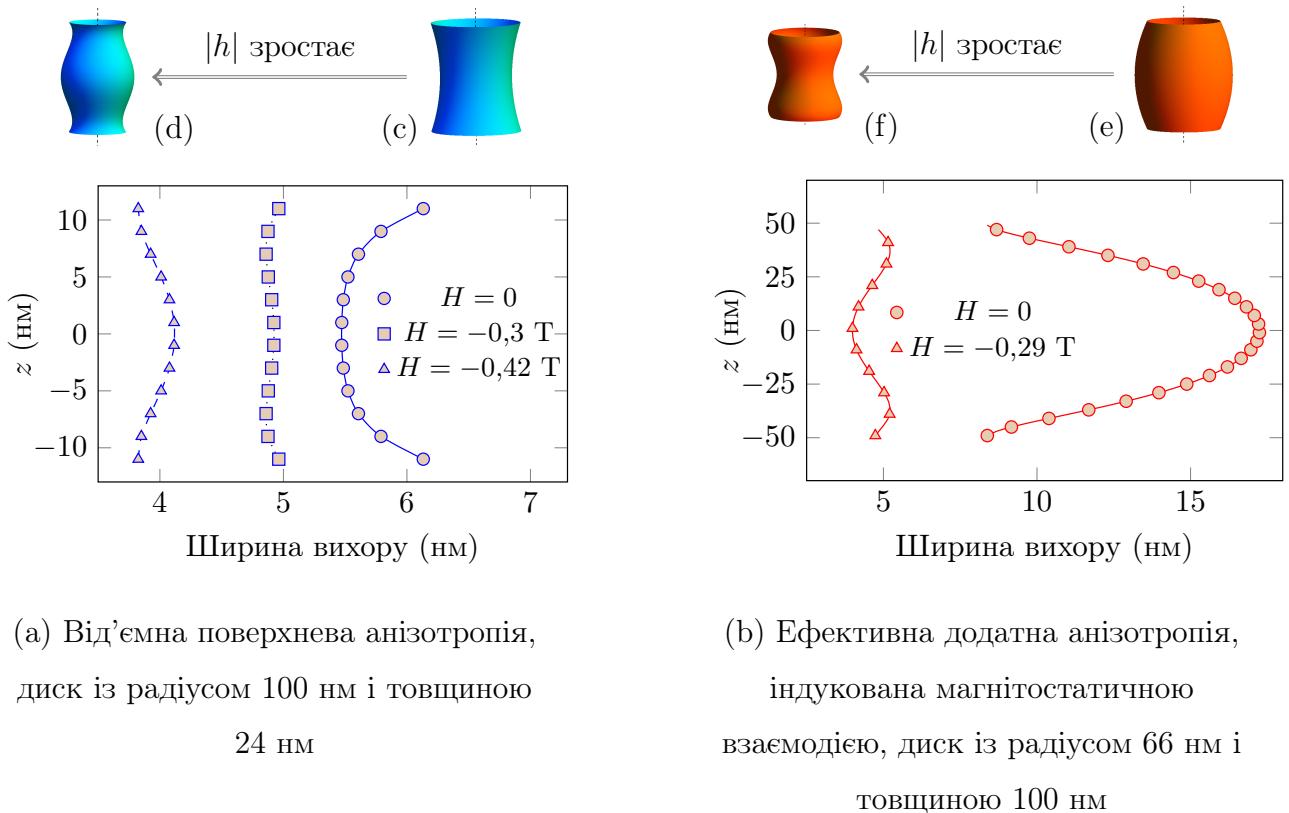


Рис. 2.16: Моделювання із магнітостатичною взаємодією у пакеті ООММФ для від'ємної і ефективної додатної поверхневої анізотропій. Схеми показують зміну профілю вихору в тих же позначеннях, що й на рис. 2.11.

SLaSi потребував занадто великі розрахункові потужності. Як обговорювалося вище, моделювання точок Блоха у пакетах мікромагнітних моделювань не є цілком коректним через появу ефектів дискретизації [52]. Але, оскільки, до їх появи і складної динаміки зміни полярності призводить просторова неоднорідність форми ліній Блоха ще за відсутності сингулярностей, цей статичний ефект цілком коректно може бути перевірений в ООММФ. Чисельно моделювалися нанодиски із матеріальними параметрами пермалоя (див. підрозділ 1.2.1) із просторовою кубічною сіткою $2 \times 2 \times 2$ нм. В той час як додатна поверхнева анізотропія є індукованою магнітостатичною взаємодією, від'ємна поверхнева анізотропія моделювалася як ненульова легкоосьова анізотропія $|K_{\text{bulk}}| = 2,4\pi M_s^2$, що відповідає поверхневій анізотропії $|K_{\text{surf}}| = a|K_{\text{bulk}}| \approx 19,7$ кДж/м².

Подібно до гайзенбергівського магнетику з від'ємною поверхневою анізотропією, осердя вихору у диску з досить сильною поверхневою анізотропією набуває подушкоподібної форми за відсутності зовнішнього поля, див. рис. 2.16(a) (дані для $H = 0$ і схему (c)). Під дією зовнішнього поля виникає перегин у профілі ширини вихору (деформований бочкоподібний профіль) і безпосередньо поблизу поля перемикання профіль стає бочкоподібним, див. рис. 2.16(a) (дані для $H = -3$ кГс (0,3 Т), $H = -4,4$ кГс (0,44 Т) і схему (d)). Навіть за відсутності додатної поверхневої анізотропії, зразки з досить великим співвідношенням товщини до діаметра $L/(2R) \gtrsim 1$ характеризуються подушкоподібним профілем ширини вихору так само, як і на рис. 2.11(e). Під дією зовнішнього поля цей профіль змінюється на деформований подушкоподібний. У тонких зразках цей перегин відсутній через вплив об'ємних магнітостатичних зарядів, які взаємодіють з поверхневими. У обох описаних випадках зміна полярності вихору починається з місць, де блохівська лінія є найтоншою: з центру для додатної і з поверхні для від'ємної поверхневої анізотропії. Тому можна зробити висновок, що вплив зовнішнього поля на тривимірну форму вихору і механізм зміни полярності знаходиться у хорошій якісній відповідності із моделюваннями в SLaSi.

2.3.2.3 Аналітичний опис

Для аналітичного опису процесу зміни полярності вихору нами запропоновано модель *нитчастого вихрового осердя*. Вона розширює на тривимірний випадок модель вихрового осердя, запропоновану Вайсіним [138] для двовимірного вихору і використану вище у розділі 1.2.2.2 для дослідження зміни полярності вихору під дією змінного магнітного поля. В її рамках можна взяти до уваги процеси народження та анігіляції точкових сингулярностей протягом зміни полярності вихору. Як буде описано нижче, не дивлячись на простоту опису, її результати добре на якісному рівні описують результати повномасштабних моделювань.

Доданок у дискретному тривимірному гамільтоніані (2.30), відповідальний за анізотропію може бути переписаний у формі

$$\mathcal{H}^{\text{an}} = \frac{S^2}{2} \sum_n \mathcal{K}_n m_n^2,$$

$$\mathcal{K}_n = \begin{cases} \mathcal{K}, & n = \overline{2, N-1} \\ \mathcal{K} + \mathcal{K}_s, & n = 1 \text{ i } n = N. \end{cases} \quad (2.45)$$

Тут векторний індекс $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n)$, а n нумерує площини кристалічної гратки вздовж \mathbf{e}_z . Припускається, що у кожній n -ї площині наявно лише чотири «вільні» магнітні моменти, а інші «заморожено» у вихровому розподілі, див. рис. 2.17. Тривимірне осердя вихору тут розглядається як нитка із вільних магнітних моментів.

В оригінальній моделі [138] дискретне осердя узгоджено з неперервною намагніченістю («фоном») в кільці, де вона зафікована у чистому планарному вихровому розподілі. Внутрішній радіус r_{in} кільця вибирається з умови, що основним станом повинен бути планарний вихор, що задовольняється для $r_{\text{in}} \geq 0,3\ell$ [142]. Ситуація значно змінюється під дією зовнішнього поля: планарний вихор вже не може існувати у кільці. Окрім того, необхідно врахувати залежність намагніченості від координати z через наявність поверхневої анізотропії подібно як було зроблено у виразі (2.44). Відповідний розподіл намагніченості у «фоні» має вигляд (див. додаток В):

$$m_{(n_x, n_y, n)} = m_b(z_n) = hm_r(r_2, z_n), \quad (2.46a)$$

$$\phi_{(n_x, n_y, n)} = \chi + \frac{\pi}{2}, \quad |n_x| + |n_y| > 2,$$

де функція $m_r(r, z)$ — описує деформацію планарного вихору під дією зовнішнього поля, див. вираз (B.9), r_2 — радіус другої координаційної сфери, z_n — координата n -ї площини гратки. Для чисельних розрахунків, наведених нижче, використовувалося значення $r_2 \approx 0,35\ell$. Зauważимо, що динаміка, яка

обговорюватиметься нижче, є досить чутливою до форми функції $m_b(z_n)$, що узгоджується із висновком підрозділу 2.3.2.1.

Всі вільні магнітні моменти, які утворюють осердя вихору, через симетрію мають однакову позаплощинну компоненту μ_n і фазу підкручування у площині ψ_n , яка описує відхилення від вихрового розподілу (1.15):

$$\begin{aligned} m_{(n_x, n_y, n)} &= \mu_n(\tau), \\ \phi_{(n_x, n_y, n)} &= \chi + \frac{\pi}{2} + \psi_n(\tau), \quad n_x, n_y = -1, 1. \end{aligned} \quad (2.46b)$$

В даній моделі розглядається динамічна полярність вихору $\mu_n(\tau)$ і фаза $\psi_n(\tau)$ для кожної площини гратки окремо, які грають роль динамічних змінних. Значення динамічної полярності в цій моделі є аналогом ефективної ширини вихору у повномасштабних моделюваннях.

Підставляючи анзац (2.46) до гамільтоніану (2.30) із анізотропним доданком (2.45), модельний гамільтоніан може бути записаний у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}_c}{4\mathcal{KS}^2} &= \sum_{n=1}^N \left[(1 + \kappa_n - 2\lambda) \frac{\mu_n^2}{2} - (h + 2\lambda m_b) \mu_n - \frac{4\lambda}{\sqrt{5}} \sqrt{(1 - m_b^2)(1 - \mu_n^2)} \cos \psi_n \right] \\ &\quad - \lambda \sum_{n=1}^{N-1} \left[\mu_n \mu_{n+1} + \sqrt{(1 - \mu_n^2)(1 - \mu_{n+1}^2)} \cos(\psi_n - \psi_{n+1}) \right], \end{aligned} \quad (2.47)$$

де $\kappa_n = 0$ для $n = \overline{2, N-1}$ і $\kappa_n = \kappa$ для $n = 1, N$, див. додаток Г. Перша сума в (2.47) описує внутрішньоплощинну взаємодію, а друга — взаємодію між площинами.

Рівноважні значення μ_n і ψ_n можуть бути знайдені аналітично для однорідної системи $\kappa_n = 0$, $n = \overline{1, N}$ і $h = 0$:

$$\mu_{\text{hom}}(h = 0) = \pm \sqrt{1 - \frac{16\lambda^2}{5(2\lambda - 1)^2}}, \quad \psi_0(h = 0) = 0, \quad (2.48)$$

де $\lambda > 10$ для позаплощинного вихору. Для $h \neq 0$, залежність $\mu_{\text{hom}}(h)$ може

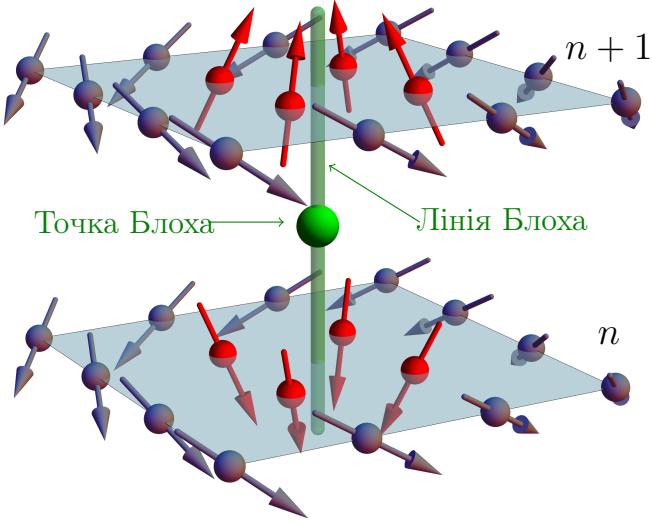


Рис. 2.17: Схема моделі нитчастого вихрового осердя. На схемі наведено n -у і $(n + 1)$ -у площини: червоними стрілками позначено вільні магнітні моменти (2.46b), а сірими — фіксовані («заморожені») (2.46a). Площини обмінно зв’язані із обмінним інтегралом J , і кожна площа характеризується своєю сталою анізотропії $\mathcal{K}_n > 0$, див. додаток Г. Точку Блоха позначено зеленою сферою.

бути знайдена чисельно як розв’язок рівняння (Г.21), див. рис. Г.1 у додатку Г.

За наявності зовнішнього поля, необхідно брати до уваги, що рівноважні значення намагніченості на поверхні зразка і в його об’ємі різні. Для фіксованих магнітних моментів позаплощинну компоненту взято рівною $m_b(z)$ відповідно до (B.9). Припускаючи, що відхилення $\varkappa \tilde{x}(z)/\sqrt{\lambda} \equiv \mu(z) - \mu_{\text{hom}}$ від рівноважного значення μ_{hom} досить мале, $|\varkappa/\sqrt{\lambda}| \ll 1$, і замінюючи гамільтоніан (2.47) його континуальною версією, можна записати наступну межову задачу для $\tilde{x}(z)$:

$$\begin{aligned} a^2 \tilde{x}''(z) - A_1 \tilde{x}(z) &= A_2(z), \\ \pm a \tilde{x}'(z) + \frac{\mu_{\text{hom}}(1 - \mu_{\text{hom}}^2)}{\sqrt{\lambda}} \Big|_{z=\pm L/2} &= 0, \end{aligned} \tag{2.49}$$

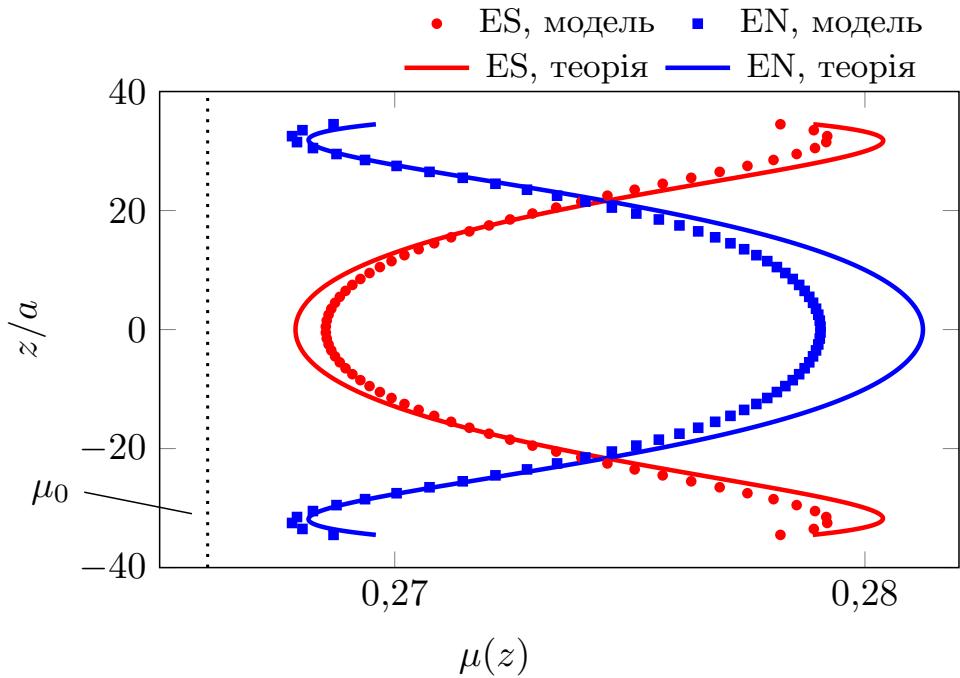
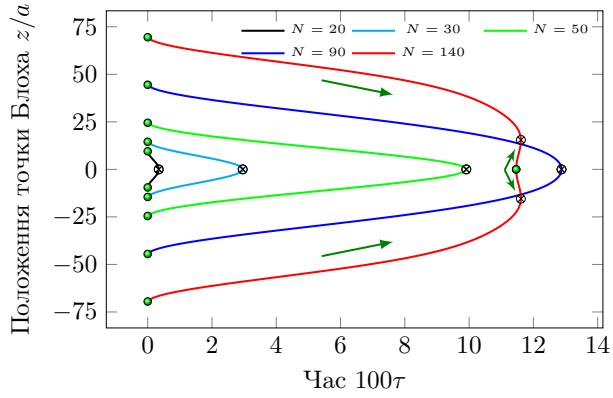


Рис. 2.18: Динамічна полярність μ_n для дискретної моделі (2.47) (у легенді моделі із додатною і від'ємною поверхневими анізотропіями позначено як EN i ES model), $\mu(z)$ як чисельний розв'язок (2.49) позначено суцільними кривими. Параметри: $|\varkappa| = 0,1$, $\lambda = 20$, $N = 70$, $h = -0,0009$. Пунктирна лінія відповідає полярності у випадку відсутності поверхневої анізотропії.

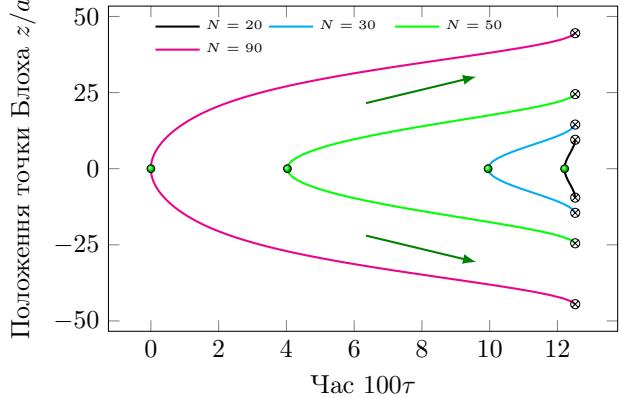
де коефіцієнти A_1 і $A_2(z)$ наведено у (Г.22), див. додаток Г. Функція $A_2(z)$ містить лише прості гармоніки, гіперболічний сінус і косинус, тому розв'язок (2.49) може бути знайдений аналітично, але через його громіздкість тут наводиться лише чисельний розв'язок (2.49).

Динамічну полярність як чисельний розв'язок (2.49) для обох типів поверхневої анізотропії наведено на рис. 2.18 суцільними лініями. Можна відмітити добре співпадіння із безпосереднім розв'язком за гамільтоніаном (2.47) (точки відповідають розрахункам моделі із $|\varkappa| = 0,1$, $\lambda = 20$ і $N = 70$). Для цього чисельно знаходився мінімум виразу (2.47) відносно змінних μ_n і ψ_n під дією поля $h = -0,0009$. У рівновазі $\psi_n = 0$. Відповідну рівноважну полярність в однорідній системі $\mu_{\text{hom}}(h) = 0,266$ наведено пунктирною лінією.



(a) Від'ємна поверхнева анізотропія

$$\kappa = -0,1$$



(b) Додатна поверхнева анізотропія

$$\kappa = 0,1$$

Рис. 2.19: Положення точок Блоха в часі для зразків різної товщини у моделі нитчастого вихрового осердя. Всі криві суміщенно у $\tau = 0$ для від'ємної і у $\tau = 0,125$ для додатної поверхневих анізотропій. Зеленими точкам позначено події народження, а хрестами — анігіляції точок Блоха. Для $N = 140$ з'являється додаткова пара точок Блоха незадовго до завершення процесу зміни полярності. Стрілками вказано напрямок руху точок Блоха. Параметри: $\varepsilon = 0,5$, $h = -0,001$, інше таке саме, як на рис. 2.18.

Динамічна полярність у моделі нитчастого вихрового осердя грає роль ширини вихору $w(z)$ у повномасштабних моделюваннях. Вона повторює форму останньої поблизу поля перемикання, пор. з рис. 2.11 і 2.18. Так само зміна полярності починається в тих площинах ґратки, де μ_n має найменше значення. Деформація форми вихору в даній моделі є результатом неоднорідності основного стану $m_b(z)$ і є сильно чутливою до вигляду цієї функції.

Зміна полярності відбувається, коли поле збільшується до значення $|h| = 0,001$. Як і у повномасштабних моделюваннях, які обговорювалися вище, точки Блоха з'являються на поверхні у випадку від'ємної поверхневої анізотропії, пор. рис. 2.19(a) і рис. 2.14(a); вони рухаються впоперек площин із $n = 1$ і $n = N$ до центру вісі. Для досить довгих систем з'являються додаткові точки Блоха, див. криву для $N = 140$ на рис. 2.19(a). Точки Блоха

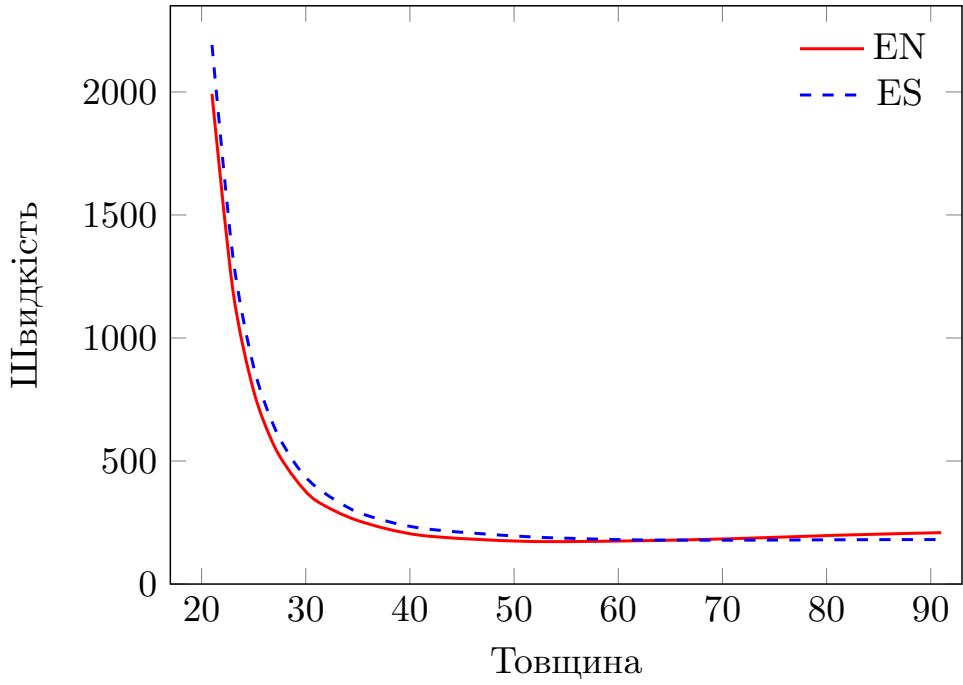


Рис. 2.20: Швидкість точки Блоха як функція товщини зразка у моделі нитчастого вихрового осердя (пор. з рис. 2.15). Параметри такі самі, як на рис. 2.19.

з'являються в центрі системи у випадку додатної поверхневої анізотропії й повторюють динаміку, описану для повномасштабних спін-граткових моделювань, пор. рис. 2.19(b), і рис. 2.14(b).

Залежність швидкості точки Блоха від товщини зразка в даній моделі наведено на рис. 2.19 для поля $h = -0,001$ (чисельний розв'язок (Г.19) з $\alpha = 0,5$). Порівняння з повномасштабними моделюваннями (рис. 2.15) підтверджує швидкий спад швидкості точок Блоха із зростанням товщини зразка і подальший вихід на насичення.

2.4 Основні результати розділу

У даному розділі досліджено поведінку точки Блоха у магнітом'якому феромагнетику сферичної форми і в нанодисках під час зміни полярності вихорів.

Проведені аналітичні і чисельні розрахунки описують оптимальну мікро-магнітну структуру точки Блоха, енергія якої є найменшою серед відомих оцінок [146, 147, 149]. Аналітично розраховано структуру точки Блоха у зовнішньому радіальному симетричному полі, яке добре узгоджується з результатами спін-граткових моделювань. Передбачено можливість її стабілізації таким полем в зразках сферичної форми.

Встановлено, що наявність поверхневої анізотропії у гайzenбергівському магнетику із легкоплощинною анізотропією істотно впливає на статичну структуру магнітного вихору і характер його перемагнічування. Вихори набувають бочко- або подушкоподібної форми, а зміна їх полярності супроводжується народженням точок Блоха. Наявність статичного зовнішнього поля, прикладеного перпендикулярно до поверхні плівки, унеможливлює однорідну намагніченість таких зразків.

Аналітично описано структуру магнітного вихору за відсутності зовнішніх полів і розподіл намагніченості в плівці із легкоплощинною анізотропією під дією сталого магнітного поля, прикладеного перпендикулярно до її поверхні. Запропоновано модель нитчастого вихрового осердя, яка дозволяє якісно описати динаміку зміни полярності вихору. Результати усіх аналітичних розрахунків добре збігаються із даними спін-граткових моделювань.

Таким чином, поставлені у розділі задачі виконано. Дані дослідження дозволяють пов'язати між собою опис диполь-дипольної взаємодії в зразках певних розмірів координатно-залежною ефективною анізотропією [30–32, 179–185] із відомою деформацією форми блоківської лінії внаслідок впливу магнітостатичної взаємодії [88, 188] і неоднорідним перемагнічуванням вихорів і нанодротів [52, 173].

Достовірність отриманих результатів підтверджується узгодженістю аналітичних розрахунків і чисельних моделювань. Зокрема у роботі [157] було встановлено, що розподіл точки Блоха під час зміни полярності у магнітом'-

якому зразку циліндричної форми (кут повороту намагніченості $\gamma_A = 73,1^\circ$) дійсно лежить між оцінками Дьюринга [147] (2.7) і отриманою в даній роботі (2.15). Останні експериментальні дослідження [195] показують, що тривимірний характер динаміки намагніченості під час зміни полярності вихорів може бути принциповим для розуміння характеру цього процесу.

Вплив магнітостатичної взаємодії на динаміку точок Блоха сильно залежить від геометричної форми і розмірів зразка й не в усіх випадках зводиться до ефективної координатно-залежної анізотропії. Тому питання побудови загальної теорії, яка могла б, зокрема, пояснити спостереження асиметричної динаміки точок Блоха [52, 173], залишається відкритим.

Оригінальні результати розділу:

1. Кут повороту намагніченості $\gamma_0 = \arccos(-p/4)$ (приблизно 105° для $p = +1$ і 76° для $p = -1$) забезпечує найменше значення магнітостатичної енергії точки Блоха (2.10) у магнітом'якому зразку сферичної форми при $q = 1$, див. рис. 2.2. При $q = -1$ магнітостатична енергія не залежить від γ .
2. Точку Блоха можна стабілізувати у зразку сферичної форми радіально симетричним полем, напруженість якого лінійно зростає від центру зразка, див. рис. 2.6. Існує критичне значення амплітуди поля, за якого радіально неоднорідний розподіл (2.23) (див. рис. 2.5) переходить у радіально однорідний, див. рис. 2.4.
3. Наявність неєлівської поверхневої анізотропії (1.5) призводить до деформації профілю магнітного вихору: в той час, як за її відсутності, вихор є однорідним вздовж вісі диску, від'ємна поверхнева анізотропія призводить до його подушкоподібної форми, а додатна — до бочкоподібної, див. рис. 2.7. Цей ефекти пояснюються зміною ефективної магнітної довжини на поверхні зразка в більшу чи меншу сторону у порівнянні з циліндричною формою.

нянні з її значенням в об'ємі.

4. У нескінченній плівці наявність поверхневої анізотропії призводить до неоднорідної деформації намагніченості під дією поля, прикладеного перпендикулярно до її поверхні. Опуклість профілю намагніченості всередині плівки визначається знаком добутку нормованих коефіцієнтів поверхневої анізотропії і прикладеного поля, див. рис. 2.8. Цей ефект можна інтерпретувати в термінах ефективного поля анізотропії, яке внаслідок наявності поверхневої анізотропії набуває різного значення в об'ємі і на поверхні плівки: відповідно зовнішнє стало магнітне поле викликає різну амплітуду відхилення намагніченості вздовж товщі зразка.
5. Стале однорідне магнітне поле, прикладене протилежно початковій полярності статичного вихору в зразку в формі диску призводить до деформованого подушкоподібного або деформованого бочкоподібного профілів вихору у випадку додатного і від'ємного типів поверхневої анізотропії відповідно, див. рис. 2.11.
6. Народження точок Блоха відбувається в місцях найменшої ширини блохівської лінії. Їх подальший рух яких завершує зміну полярності вихору, див. рис. 2.12 і 2.13. Значну частину часу динаміка точок Блоха відбувається зі сталою швидкістю (див. рис. 2.14), залежність якої від товщини диску L швидко зникає зі зростанням L , див. рис. 2.15. Врахування магнітостатичної взаємодії не змінює якісну картину динаміки точок Блоха у зразках достатніх розмірів. При цьому додатна анізотропія може вважатись ефективно наведеною магнітостатичною взаємодією.

Розділ 3

ДОМЕННІ СТІНКИ НА МАГНІТНОМУ КІЛЬЦІ МЕБІУСА

У даному розділі розв'язується задача про чисельне знаходження стаціонарних станів намагніченості в магнітному кільці Мебіуса з легконормальною одноосьовою анізотропією. Виявлено наявність чотирьох таких станів в залежності від геометричних розмірів і значення коефіцієнту анізотропії. За допомогою мікромагнітних моделювань встановлено наявність зв'язку між геометричною кіральністю кільця і магнітною кіральністю доменних стінок (поперечної та повздовжньої), які можуть на ньому виникати як стаціонарні стани. Результати, представлені в даному розділі, опубліковано в роботі [64].

Підрозділ 3.1 містить відомі дані про геометрично індуковане формування магнітних структур і магнітокіральні ефекти у наномагнетиках. У підрозділі 3.2 наводяться результати досліджень по визначення стаціонарних станів намагніченості у кільці Мебіуса й аналізуються їх властивості. В останньому підрозділі 3.3 викладено основні результати розділу.

3.1 Формування магнітних структур і магнітокіральні ефекти у наномагнетиках

3.1.1 Індуковане геометрією формування магнітних структур

Топологічно нетривіальні розподіли намагніченості виникають внаслідок конкуренції обмінної взаємодії з анізотропією і магнітостатичною взаємодією. Їх яскравим прикладом слугують магнітні вихори, які обговорювалися у підрозділі 1.1.3. У випадку виродження основного стану намагніченості за напрямком може спостерігатись інший клас структур — доменні стінки — розподіл намагніченості, який відповідає неперервному переходу між двома

енергетично еквівалентними її станами. Утворення доменних стінок на практиці забезпечує мінімізація енергії полів розсіяння. В залежності від типу анізотропії, геометрії магнетиків і внутрішньої структури самих стінок виділяють багато їх типів, зокрема блохівські та неєлівські у плівках [88], вихрові, поперечні і доменні стінки із точкою Блоха у наносмужках і нанодротах [166] тощо.

Блохівська і неєлівська доменні стінки відносяться до найпростішого типу 180° стінок, при переході через які намагніченість змінює напрямок на протилежний. У першій з них намагніченість повертається паралельно площині стінки. Їх особливістю є відсутність об'ємних магнітостатичних зарядів й, типово, еквівалентність можливих магнітних кіральностей — повороту намагніченості за чи проти годинникової стрілки всередині стінки. У дуже тонких плівках енергетично вигідними можуть бути неєлівські доменні стінки, в яких намагніченість повертається перпендикулярно до площини стінки [7, 88].

Сучасні технології дозволяють не обмежуватись плоскими зразками, а й створювати мікрооб'єкти складної форми. Вони мають значний практичний потенціал (зокрема, у медицині) завдяки новим властивостям, індукованим їх нетривіальною геометрією, незмінності транспортних характеристик при зміні форми, або ж навпаки, високій їх чутливості до деформації зразка. Це швидкісні транзистори на гнучкій підкладці [196], різноманітні магнітні сенсори [197, 198] і електричні кола [199] на підкладці, яка може згинатися і розтягуватися тощо.

З експерименту відомо, що напрямок осей анізотропії може відстежувати форму плівки. Так, у роботі [29] експериментально досліджувалися властивості мікроспіралі із легконормальною анізотропією (радіальний напрямок) і двома напрямками осей легкотангенціальної анізотропії, які були отримані шляхом скручування з плоских плівок із легкоосьовою анізотропією. Залежність стану магнітної під'єратки від форми магнітної плівки чи смужки

призводить до утворення розподілів намагніченості, властивості яких визначаються саме специфікою обраної геометрії і топології. Зокрема, як наслідок теореми про зачісування їжака, магнітні вихори формують основний стан у сферичних наночастинках [36]. Іншим яскравим прикладом є утворення доменної стінки як основного стану в кільці Мебіуса із легконормальною анізотропією через неоріентованість його поверхні [200].

3.1.2 Магнітокіральні ефекти

Експерименти і моделювання опуклих плівок і нанотрубок неодноразово виявляли кіральну поведінку магнітної підгратки, характерну для пласких систем із взаємодією Дзялошинського—Морії, див. роботи [36], [43] і посилення в останній. Енергія взаємодії Дзялошинського—Морії може бути описана як [201, 202]

$$E_{\text{DMI}} = \int D_{\text{DMI}} \left(\mathcal{L}_{ij}^{(k)} - \mathcal{L}_{kj}^{(i)} \right) d\mathbf{r}, \quad \mathcal{L}_{ij}^{(k)} = m_i \frac{\partial m_j}{\partial k} - m_j \frac{\partial m_i}{\partial k}, \quad (3.1)$$

де D_{DMI} — стала взаємодії, а $i, j, k = x, y, z$. Типово вона виникає у магнетиках із кристалічною ґраткою, в якій відсутня симетрія інверсії, або в дуже тонких плівках де симетрія порушується на інтерфейсі. Відомими структурами, які виникають внаслідок наявності взаємодії Дзялошинського—Морії є спінові спіралі [203] і скірміони [202, 204] кіральність яких визначається знаком D_{DMI} .

Простими прикладами систем, в яких проявляються магнітокіральні ефекти як наслідок їх геометрії, є сферичні чи напівсферичні частинки [36, 37, 205] і нанодроти [44, 206]. Так внутрішньоповерхневий розподіл намагніченості у сферичних оболонках у вихровому стані залежить від напрямку полярності вихорів назовні чи всередину зразка: напрямок намагніченості в їх осердях визначає знак відхилення від напрямку вздовж азимуту [36]. Зміна полярності вихору під дією імпульсу зовнішнього поля може спостерігатись у зразку півсферичної форми. Знак добутку кіральності і полярності вихору

визначає початковий напрямок руху — за чи проти поля. Якщо вихор почав рухатися за полем, то напрямок поля і полярності частково співпадуть, що ускладнить перемикання, і навпаки у випадку руху проти поля [37]. В надротах магнітокіральні ефекти мають яскраво виражену обмінну природу. Відхилення намагніченості від напрямку легкої вісі (природна чи наведена магнітостатичною взаємодією легкотангенціальна анізотропія) у феромагнітній спіралі, визначається її крученням [44]. Плаский вигин дроту природнім чином задає зв'язок між типом доменної стінки (кінк чи антикінк) і напрямком намагніченості в середині доменної стінки назовні чи всередину вигину [206].

Опис наночастинок складної форми зручно здійснювати у криволінійній системі координат, яка відповідає їх геометрії, і представляє густину енергії анізотропії у найбільш простому вигляді. Вектор намагніченості можна параметризувати як

$$\mathbf{m} = m_i \mathbf{e}_i = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3, \quad (3.2)$$

де використано нотацію підсумовування Ейнштейна, $\mathbf{e}_i, i = \overline{1,3}$ — орти криволінійної ортогональної системи координат на поверхні ς , \mathbf{e}_1 і \mathbf{e}_2 задають базис на поверхні плівки, а \mathbf{e}_3 є нормаллю до неї. В такому випадку, обмінна енергія тонкої криволінійної плівки матиме вигляд [34, 35]

$$\frac{E_{\text{ex}}}{A\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \int_S \left\{ [\nabla \theta - \boldsymbol{\Gamma}(\phi)]^2 + \left[\sin \theta (\nabla \phi - \boldsymbol{\Omega}) - \cos \theta \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}(\phi)}{\partial \phi} \right]^2 \right\} dS, \quad (3.3)$$

де \mathcal{T} — товщина плівки, інтегрування здійснюється по її поверхні, оператор набла записується у криволінійній системі координат $\nabla \equiv (g_{ii})^{-1/2} \mathbf{e}_i \partial_i$, метричний тензор $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$, де $\mathbf{g}_i = \partial_i \varsigma, i = \overline{1,2}$. Тангенційний до поверхні

вектор $\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma_i \mathbf{e}_i$ визначається як

$$\boldsymbol{\Gamma}(\phi) = \left\| H_{ij} \right\| \cdot \begin{vmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{vmatrix}, \quad \left\| H_{ij} \right\| = \left\| \frac{b_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \right\|, \quad (3.4)$$

де $b_{ij} = \mathbf{n} \cdot \partial_j \mathbf{g}_i$ — елементи другої фундаментальної форми. Вектор $\boldsymbol{\Omega} = (g_{ii})^{-1/2} (\mathbf{e}_\chi \cdot \partial_i \mathbf{e}_\xi) \mathbf{e}_i$ у виразі (3.3) — модифікована спінова з'язність.

З виразу (3.3) для обмінної енергії у довільній ортонормованій криволінійній системі координат випливає, що кривина плівки дійсно індукує ефективну взаємодію Дзялошинського—Морії і додаткову ефективну анізотропію (доданки в густині енергії лінійні за похідними і квадратичні за компонентами намагніченості відповідно). Тобто магнітокіральні ефекти [43] на кривих поверхнях дійсно повинні мати місце. Цей самий результат спостерігається й в одновимірних системах [44].

3.1.3 Висновки до огляду

Нетривіальна топологія і форма наночастинки може помітно впливати на стан її магнітної підгратки. Наявність ненульової локальної кривини призводить до виникнення ефективної взаємодії Дзялошинського—Морії і наведеної формою анізотропії. Вони впливають на основні стани наночастинок, індукуючи нетривіальні магнітні розподіли [36, 200] і характеризуються кіральними ефектами в статиці і динаміці намагніченості [43]. Здебільшого магнітокіральні ефекти і топологічно або геометрично індуковані розподіли намагніченості розглядаються окремо один від одного. Відомо, що у гайзенбергівському магнетику в формі кільця Мебіуса можуть утворюватися різні типи доменних стінок [200]. Вплив нетривіальної геометрії на магнітну підгратку повинен відбитися на структурі цих доменних стінок. Окрім цього не дослідженим залишилось врахування магнітостатичної взаємодії та умов існування доменних стінок.

3.2 Стационарні стани магнітного кільця Мебіуса

У двовимірному гайзенбергівському магнетику із легконормальною анізотропією в формі кільця Мебіуса можна спостерігати два типи доменних стінок, одна з яких розташовується поперечно до кільця, а інша — вздовж нього [200]. В даному підрозділі розглядаються стационарні стани намагніченості в кільці Мебіуса, які реалізуються за різних його геометричних і магнітних параметрів. Наводяться зв'язок між геометричною кіральністю кільця і магнітною кіральністю доменних стінок в ньому і еволюція стационарних станів пласкої смужки при її скручуванні у кільце Мебіуса.

3.2.1 Модель

Двовимірне кільце Мебіуса можна параметризувати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varsigma}(\chi, \xi) &= x(\chi, \xi)\mathbf{e}_x + y(\chi, \xi)\mathbf{e}_y + z(\chi, \xi)\mathbf{e}_z, \\ x + iy &= \left(\mathcal{R} + \xi \cos \frac{\chi}{2}\right) e^{i\chi}, \quad 0 \leq \chi < 2\pi, \\ z &= \mathcal{G}\xi \sin \frac{\chi}{2}, \quad -\frac{\mathcal{W}}{2} \leq \xi \leq \frac{\mathcal{W}}{2},\end{aligned}\tag{3.5}$$

де \mathcal{R} і \mathcal{W} — радіус і ширина кільця, χ і ξ — криволінійні координати на кільці, а $\mathcal{G} = \pm 1$ — геометрична кіральність проти чи за годинниковою стрілкою відповідно (напрямок повороту твірної при русі в додатному напрямку по χ). Відповідно до (3.5) можна ввести ортонормований криволінійний базис $\mathbf{e}_i = \mathbf{g}_i/|\mathbf{g}_i|$, де $\mathbf{g}_i = \partial_i \boldsymbol{\varsigma}$, $i \in \{\chi, \xi\}$, і з нормаллю до поверхні $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\chi \times \mathbf{e}_\xi$, див. рис. 3.1. Тоді кільце Мебіуса малої скінченної товщини \mathcal{T} ($\mathcal{T} \ll \mathcal{R} - \mathcal{W}/2$) можна задати як

$$\mathbf{r}(\chi, \xi, \nu) = \boldsymbol{\varsigma}(\chi, \xi) + \nu \mathbf{n}, \quad -\frac{\mathcal{T}}{2} \leq \nu \leq \frac{\mathcal{T}}{2},\tag{3.6}$$

де криволінійна координата ν вимірюється вздовж нормалі до базисного двовимірного кільця (яке нижче будемо називати центральною поверхнею, $\nu = 0$).

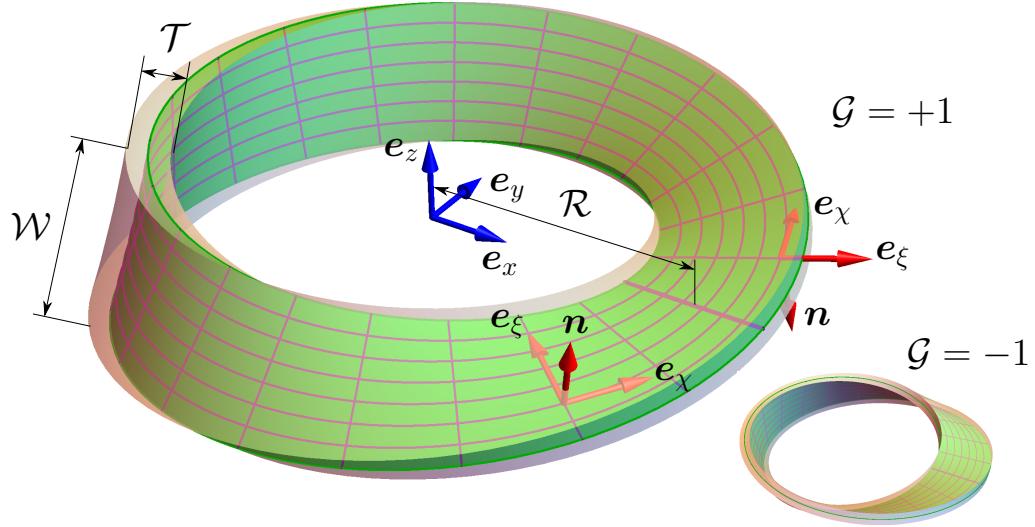


Рис. 3.1: Двовимірне кільце Мебіуса (центральна поверхня) радіусом \mathcal{R} і шириною \mathcal{W} задане параметрично відповідно до (3.5). Кільце скінченної товщини \mathcal{T} задане відповідно до (3.6). На схемі зображене кільце обох геометричних кіральностей.

Обмінна енергія кільця Мебіуса має вигляд (3.3). Енергія магнітної анізотропії може бути записана як

$$E_{\text{an}} = -\frac{K\mathcal{T}}{2} \int_S \cos^2 \theta dS, \quad (3.7)$$

де стала легконормальної анізотропії $K \geq 0$.

3.2.2 Діаграма стаціонарних станів

3.2.2.1 Кільце Мебіуса Нами досліджено стаціонарні стани кільця Мебіуса радіусом $\mathcal{R} = 100$ нм і шириною $\mathcal{W} = 80$ нм із магнітними параметрами $A = 2,6 \times 10^{-11}$ Дж/м, $M_s = 8,6 \times 10^5$ А/м. Стала легконормальної анізотропії K варіювалася у таких межах, що фактор якості $Q \in [0; 2,2]$ (найбільше її значення обмежувалося обраним середнім розміром просторової сітки інтегрування у 3 нм через технічні обмеження). Товщина кільця змінювалася в межах $\mathcal{T} \in [5; 40]$ нм: нижня межа відповідає квазі-двовимір-

ному випадку із намагніченістю, практично однорідною в перерізі зразка, а верхня межа визначається обмеженнями виразу (3.6).

Мікромагнітні моделювання проводилися у пакеті MAGPAR [207]. В ньому чисельно мінімізувалася повна енергія системи включаючи анізотропію і магнітостатичну взаємодію. Для знаходження стану із найменшою енергією розрахунок запускався із 12 різних початкових станів (четири різні випадкові розподіли намагніченості, однорідні розподіли вздовж $\pm e_x, \pm e_y, \pm e_z$ і два вихрові розподіли з протилежними напрямками циркуляції намагніченості).

Результати моделювань наведено на рис. 3.2. У дослідженому інтервалі параметрів знайдено чотири різні стаціонарні стани. У випадку відсутності чи досить слабкої легконормальної анізотропії, конкуренція між обміном і дипольною взаємодією призводить до вихрового розподілу намагніченості, див. рис. 3.2(b), що є типовим для магнітом'яких наночастинок [142, 208, 209]. Протилежні напрямки циркуляції намагніченості (за і проти годинникової стрілки є енергетично еквівалентними). Внаслідок нелокальності магнітостатичної взаємодії і складної геометрії кільця Мебіуса, спостерігаються невеликі відхилення нормальної до поверхні кільця компоненти намагніченості поблизу його країв, див. рис. 3.3.

У випадку сильної легконормальної анізотропії роль магнітостатичної взаємодії у досить тонких кільцях зменшується й стан системи визначається конкуренцією між обміном і анізотропією. Виникає блохівська доменна стінка орієнтована в поперечному напрямку до кільця, див. рис. 3.2(c) і (c'). Все-редині доменної стінки намагніченість може розвертатися за чи проти годинникової стрілки (магнітна кіральність $C = -1$ або $C = +1$ відповідно). Енергетично вигідною є значення C протилежне за знаком до геометричної кіральності G даного кільця. Розподіл намагніченості в центральній поверхні кільця за наявності такої поперечної доменної стінки наведено на рис. 3.4.

При збільшенні товщини кільця Мебіуса зростає кількість поперечних до-

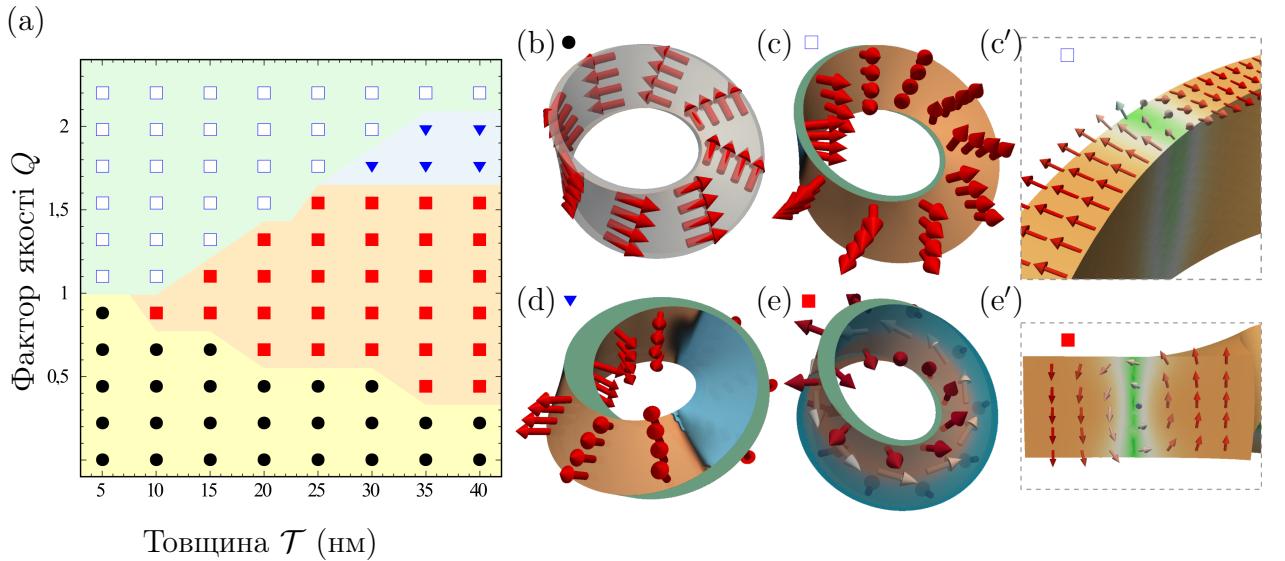


Рис. 3.2: (а) Діаграма стаціонарних станів магнітного кільця Мебіуса із фіксованими радіусом $\mathcal{R} = 100$ нм і шириною $\mathcal{W} = 80$ нм. Виявлені розподіли намагніченості наведено на (б)–(е). (б) Вихровий стан (на діаграмі позначене колами ●). (с) Стан з одною поперечною блохівською доменною стінкою (білі квадрати без заливки □). (д) Стан із трьома поперечними блохівськими доменними стінками (сині трикутники ▼). (е) Стан з повздовжньою доменною стінкою (червоні квадрати ■). (с'), (е') Детальна структура поперечної і повздовжньої доменних стінок.

менних стінок, які спостерігаються на кільці, див. рис. 3.2(д) і 3.5. Через топологію зразків можливе утворення лише непарної кількості доменів. Даний мультидоменний стан є характерним для впливу магнітостатичної взаємодії, оскільки він мінімізує поля розсіяння.

Значення Q близькі до одиниці означають наявність конкуренції між анізотропією і магнітостатичною взаємодією. Зокрема перехід від вихрового стану до стану з поперечною доменною стінкою за малої товщини кільця відбувається при $Q = 1$. Зі збільшенням товщини T виникає повздовжня домenna стінка типу Блоха (виникнення неелівської неможливе через топологію зразка), див. рис. 3.2(е). Так само як і для поперечної доменної, можливі два зна-

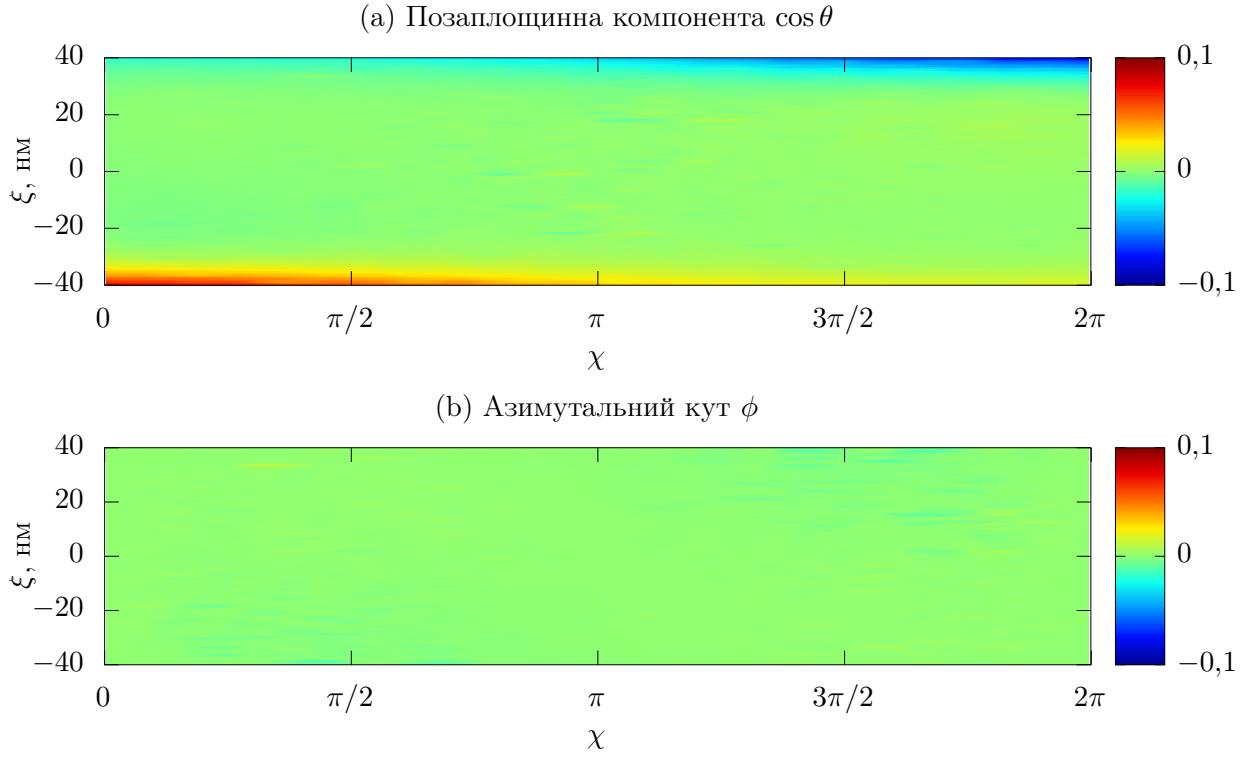


Рис. 3.3: Розподіл намагніченості у центральній поверхні кільця Мебіуса у вихровому стані. Параметри: $\mathcal{R} = 100$ нм, $\mathcal{W} = 80$ нм, $\mathcal{T} = 5$ нм, $Q = 0$.

(a) Позаплощинна компонента $m_\nu = \cos \theta$. (b) Азимутальний кут ϕ .

чення магнітної кіральності: в напрямку додатного обходу кільця, або проти нього ($\mathcal{C} = +1$ або $\mathcal{C} = -1$ відповідно). Енергетично вигідною є доменна стінка із $\mathcal{C} = \mathcal{G}$. Даної доменна стінка є асиметричною, див. рис. 3.2(e'). Відповідний її розподіл намагніченості в центральній поверхні кільця наведено на рис. 3.6.

Основні властивості одиночної поперечної і повздовжньої доменних стінок можна описати анзацами

$$\theta^t = 2 \operatorname{arctg} e^{p_0 \frac{\chi-X}{\delta_t}}, \quad \phi^t = \mathcal{C} p_0 \frac{\pi}{2} \quad (3.8)$$

i

$$\theta^\ell = 2 \operatorname{arctg} e^{p_0 \frac{\xi}{\Delta_\ell}}, \quad \phi^\ell = \pi \frac{\mathcal{C} + p_0}{2} \quad (3.9)$$

відповідно, де $p_0 = \pm 1$ — топологічний заряд доменної стінки типу кінк (+1) або антикінк (-1), параметр X — положення поперечної доменної стінки на

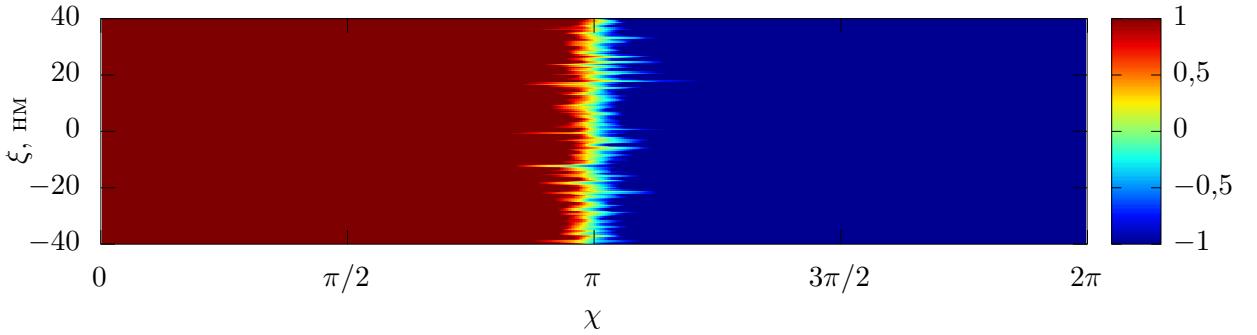


Рис. 3.4: Розподіл намагніченості ($m_\nu = \cos \theta$) у центральній поверхні кільця Мебіуса із поперечною доменною стінкою. Параметри: $Q = 1,54$, інші такі самі, як на рис. 3.3. Оскільки для $\cos \theta = \pm 1$ азимутальний кут ϕ не визначено, тут і нижче його розподіл не наводиться. Тут і нижче гострі викиди в центральній частині пов'язані із неточністю лінійної інтерполяції неструктурованої просторової сітки.

кільці, Δ_ℓ — ширина повздовжньої, а δ_t — кутова ширина поперечної доменних стінок. У наближенні, що домenna стінка знаходиться не у початку відліку $\delta_t \ll X \ll 2\pi - \delta_t$ (що узгоджується із результатом мікромагнітних моделювань і дозволяє значно спростити анзац, уникнувши необхідності його «зшивання» на кільці Мебіуса), а ширина кільця суттєво менше його $\mathcal{W}/\mathcal{R} \ll 1$ і більша за ширину доменної стінки $\delta_t \ll \mathcal{W} \ll \mathcal{R}$ їх енергії мають наступний вигляд (розрахунок проведено В. П. Кравчуком і наводиться в даній роботі з ілюстративною метою):

$$\frac{E^t}{A\mathcal{T}} \approx \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{R}} \left[\frac{1}{\delta_t} + \mathcal{C}\mathcal{G} \frac{\pi}{2} + \delta_t \left(\cos X - \frac{1}{4} \right) \right] + \delta_t \frac{\mathcal{R}\mathcal{W}}{\ell_{\text{magn}}} + \text{const} \quad (3.10a)$$

для поперечної і

$$\frac{E^\ell}{2\pi A\mathcal{T}} \approx \frac{\mathcal{R}}{\Delta_\ell} - \frac{\pi}{2} \mathcal{C}\mathcal{G} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{96} \right) \frac{\Delta_\ell}{\mathcal{R}} + \frac{\Delta_\ell \mathcal{R}}{\ell_{\text{magn}}^2} + \text{const} \quad (3.10b)$$

для повздовжньої доменних стінок. З цих розрахунків видно, що енергія обох доменних стінок залежить від співвідношення між знаками магнітної і геометричної кіральностей \mathcal{C} і \mathcal{G} , до того ж, для поперечної доменної стінки мінімум

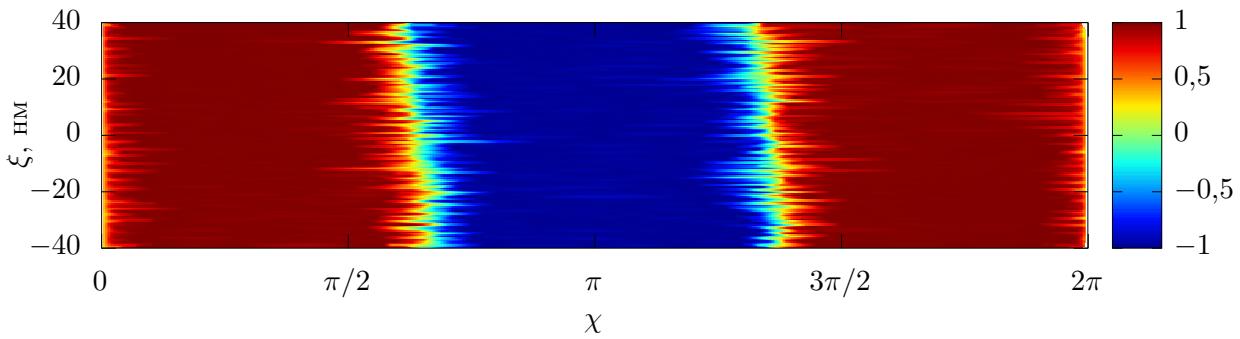


Рис. 3.5: Розподіл намагніченості ($m_\nu = \cos \theta$) у центральній поверхні кільця Мебіуса із трьома поперечними доменними стінками. Параметри: $Q = 1,72$, $\mathcal{T} = 35$ нм, інші такі самі, як на рис. 3.3.

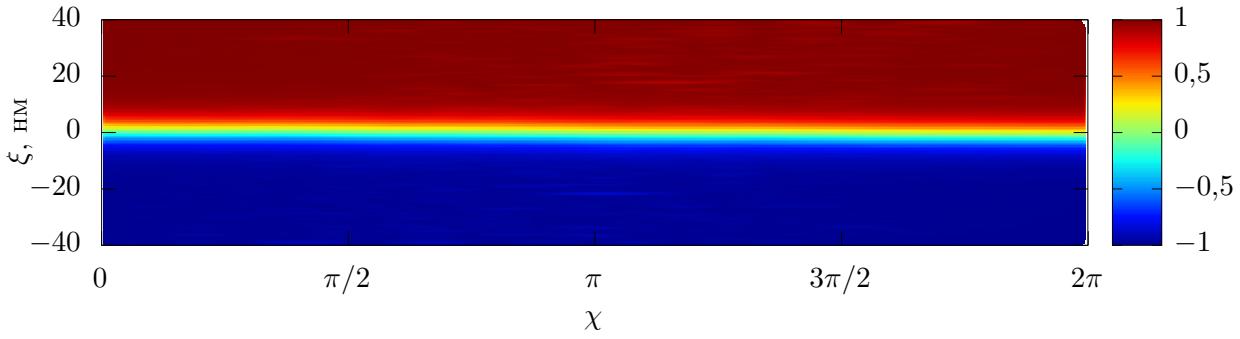


Рис. 3.6: Розподіл намагніченості ($m_\nu = \cos \theta$) у центральній поверхні кільця Мебіуса із повздовжньою доменною стінкою. Параметри: $Q = 1,07$, $\mathcal{T} = 30$ нм, інші такі самі, як на рис. 3.3.

енергії досягається за різних їх знаків, а для повздовжньої — за одинакових. Інші варіаційні параметри в мінімумі енергії рівні сягають наступних значень: положення доменної стінки на кільці $X = \pi$, а її ширина в радіанах $\delta_t \approx \ell_{\text{magn}}/\mathcal{R}$ і $\Delta_\ell \approx \ell_{\text{magn}}$, що чудово узгоджується з даними моделювань. Гармонічна залежність енергії поперечної доменної стінки від її положення на кільці добре виражена у моделюваннях, див. рис. 3.7. Вона виникає внаслідок мінімізації геометрично-індукованої магнітної анізотропії, коефіцієнт якої різиться в залежності від положення на кільці. Зв'язок магнітної і геометричної кіральностей (добуток \mathcal{CG} у виразах (3.10a) і (3.10b)) є наслідком

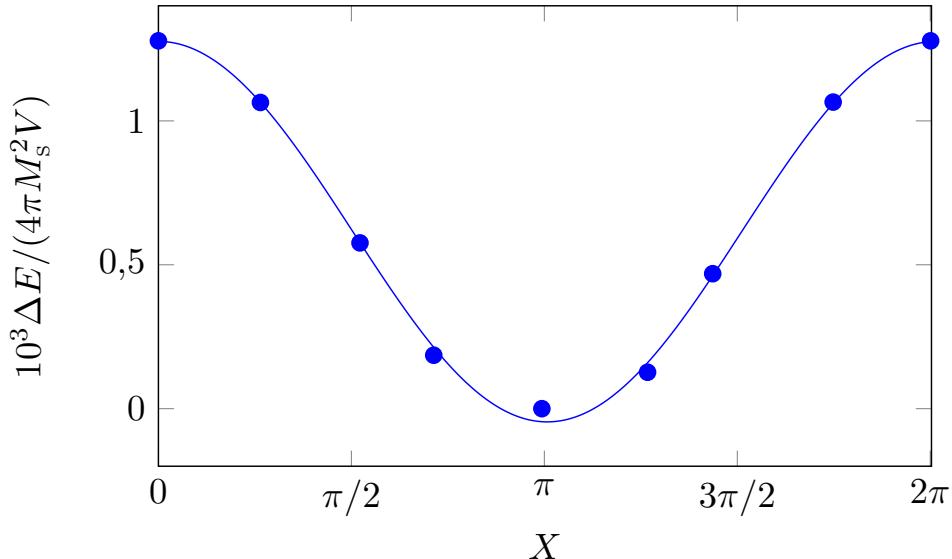


Рис. 3.7: Зміна енергії кільця Мебіуса в залежності від положення поперечної доменної стінки на ньому. Точки відповідають моделюванням для $\mathcal{T} = 5$ нм, $Q = 1,72$, $\mathcal{G} = -\mathcal{C} = 1$. Суцільна лінія відповідає залежності $\cos X$.

індукованої кривиною поверхні кільця взаємодії Дзялошинського—Морії, а саме, доданка в обмінній енергії (3.3) $E_{\text{ex}}^{\text{DMI}} = -A\mathcal{T} \int_S (\boldsymbol{\Gamma} \cdot \nabla \theta) dS$.

3.2.2.2 Зв'язок із стаціонарними станами пласкої наносмужки Для з'ясування причин утворення стаціонарних станів намагніченості на кільці Мебіуса варто обговорити стаціонарні стани на прямій наносмужці з такими самими матеріальними параметрами і подібними розмірами (ширина $\mathcal{W} = 80$ нм, довжина $2\pi\mathcal{R} \approx 628$ нм). Відповідну діаграму, отриману тим же методом, що й рис. 3.2, наведено на рис. 3.8.

Між стаціонарними станами на кільці Мебіуса і на прямій смужці можна провести прямі аналогії. У випадку відсутності або слабкої анізотропії намагніченість напрямлена вздовж смужки через вплив магнітостатичної взаємодії (стан 1р на рис. 3.8, який відповідає вихору на кільці Мебіуса, див. рис. 3.2(b)).

Сильна анізотропія приводить до намагнічення вздовж вісі анізотропії перпендикулярно до поверхні смужки (стан 2р на рис. 3.8, який відповідає

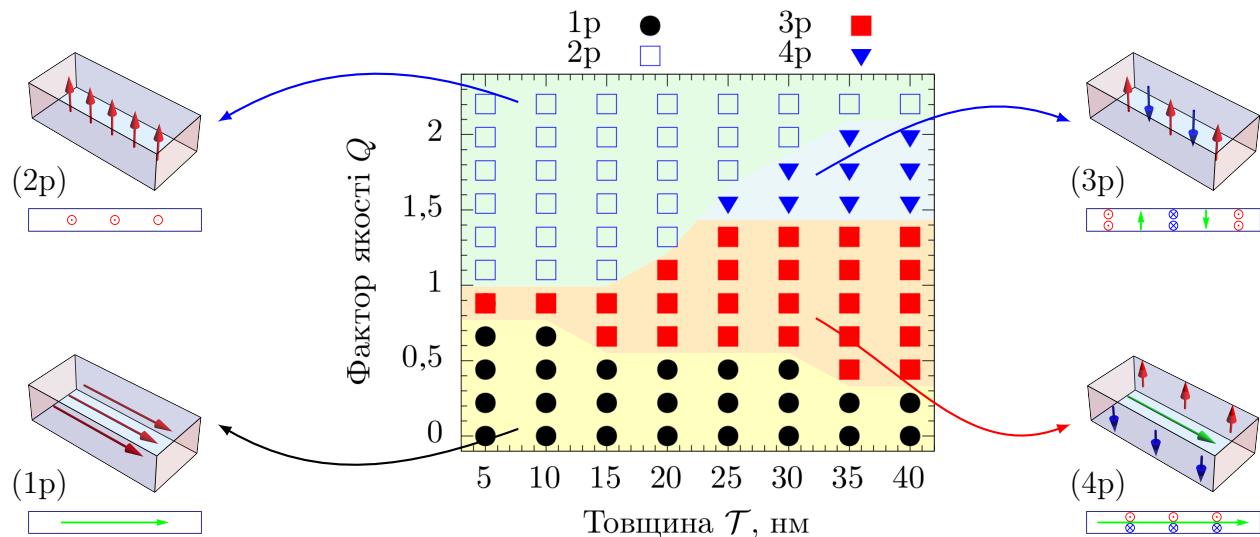


Рис. 3.8: Діаграма стаціонарних станів прямої наносмужки довжиною 628 нм, шириною 80 нм для різних товщин і значень легкоосьової анізотропії. На вставках ліворуч і праворуч схематично зображене відповідні розподіли намагніченості (тривимірний вид і проекція на площину). (1p) Однорідний розподіл вздовж смужки. (2p) Однорідний розподіл вздовж вісі анізотропії. (3p) Кілька поперечних доменних стінок. (4p) Повздовжня доменна стінка.

поперечній доменній стінці на кільці Мебіуса, див. рис. 3.2(c)). Розподіл намагніченості на такій самій смужці, згорнутій у кільце Мебіуса природнім чином утворює поперечну доменну стінку через розрив у векторному полі, нормальному до поверхні кільця. Особливості поперечної доменної стінки, які обговорювалися у попередньому підрозділі, є наслідком криволінійної геометрії.

Досить товсті наносмужки із сильною анізотропією мінімізують енергію намагніченості утворенням кількох доменів, розташованих послідовно вздовж смужки (стан Зр на рис. 3.8, який відповідає кільком поперечним доменним стінкам на кільці Мебіуса, див. рис. 3.2(d))). Особливістю кільця Мебіуса на відміну від пласкої геометрії є умова на непарну кількість доменів.

Проміжні значення коефіцієнту легкоосьової анізотропії ($Q \approx 1$) призво-

дять до утворення повздовжньої доменної стінки (стан 4р на рис. 3.8) у такий самий спосіб, як на кільці Мебіуса, див. рис. 3.2(е).

3.3 Основні результати розділу

У даному розділі представлено результат чисельного дослідження стаціонарних станів намагніченості у феромагнітному кільці Мебіуса з легконормальною анізотропією. Знайдено інтервали магнітних і геометричних параметрів, за яких реалізуються вихровий розподіл намагніченості в кільці, різні типи доменних стінок і багатодоменний стан. Поперечна домenna стінка реалізується у випадку сильної анізотропії (великі значення фактору якості Q), в той час як повздовжня домenna стінка характерна для параметрів матеріалу, які відповідають $Q \simeq 1$. Останнє пов'язано з впливом магнітостатичної взаємодії: якщо анізотропія не дуже сильна, то енергетично вигідніше утворити області з протилежним напрямком намагніченості по всій довжині зразка, що дає виграш в енергії полів розмагнічування.

Виявлено зв'язок між геометричною кіральністю кільця Мебіуса і напрямком намагніченості в доменній стінці, який виникає внаслідок індукованих обмінною взаємодією ефективних анізотропії і взаємодії Дзялошинського—Морії. Ефективна анізотропія визначає положення поперечної доменної стінки на кільці, в той час як взаємодія Дзялошинського—Морії визначає напрямок повороту намагніченості всередині доменної стінки за чи проти годинникової стрілки. Чисельно отримані результати узгоджуються із аналітичними розрахунками, проведеними В. П. Кравчуком.

В розділі окреслюється область стійкості доменних стінок із врахуванням магнітостатичної взаємодії і описується їх тонка структура, наводяться інші можливі стаціонарні стани намагніченості в кільці Мебіуса. Таким чином, поставлені у розділі задачі виконано. Зазначимо, що подібний зв'язок

між топологією і геометричними властивостями форми зразка із топологією і динамікою поля намагніченості в ньому є предметом дослідження в останніх роботах [44, 205, 210]. Серед питань, які залишились відкритими в даному напрямку, слід навести задачу розсіяння магнонів на описаних доменних стінках та рух останніх під дією зовнішніх чинників.

Оригінальні результати розділу:

1. Діаграма стаціонарних станів магнітного кільця Мебіуса радіусом $\mathcal{R} = 100$ нм і шириною $\mathcal{W} = 80$ нм для змінних фактору якості Q і товщини кільця \mathcal{T} містить чотири різні стани: вихровий, одна поперечна доменна стінка, три поперечні доменні стінки, повздовжня доменна стінка, див. рис. 3.2(a).
2. У випадку слабкої анізотропії ($Q < 1$) реалізується вихровий стан: намагніченість напрямлена, здебільшого, у площині кільця, див. рис. 3.2(b). При цьому навіть за відсутності анізотропії на краях кільця спостерігаються відхилення від планарного розподілу, див. рис. 3.3.
3. У випадку сильної анізотропії ($Q > 1$) для досить тонких кілець, спостерігається поперечна доменна стінка, яка розташовується на «вертикальній» частині кільця Мебіуса (координата на кільці $\chi = \pi$), а кіральність якої протилежна до геометричної кіральності кільця, див. рис. 3.2(b), (c') і рис. 3.4.
4. У досить товстих кільцях Мебіуса із сильною анізотропією реалізується розподіл намагніченості із трьома доменними стінками, див. рис. 3.2(c) і рис. 3.5. Топологія зразка зумовлює утворення лише непарної кількості доменних стінок.
5. За проміжних значень анізотропії ($Q \approx 1$) конкуренція між анізотропією і магнітостатичною взаємодією призводить до утворення повздов-

жньої блохівської доменної стінки, магнітна кіральність якої збігається із геометричною кіральністю зразка, див. рис. 3.2(d), (d') і рис. 3.6.

6. Стационарні стани намагніченості у кільці Мебіуса мають своїх відповідників у плаккій наносмужці із легкоосьовою, див. рис. 3.8. При переході від магнітної смужки до топології кільця Мебіуса однорідний стан намагніченості перпендикулярно до поверхні природнім чином утворює топологічно індуковану доменну стінку, а поява кривини визначає її магнітну кіральність.

ВИСНОВКИ

Дана дисертаційна робота присвячена двом напрямкам досліджень у наномагнетизмі: динаміці магнітних топологічних солітоноподібних збуджень (вихорів і точок Блоха) і особливостям формування розподілів намагніченості у наномагнетиках різної геометричної форми. Опис систем, які досліджувались, дано в рамках феноменологічної моделі Ландау—Ліфшиця—Гільберта аналітично і шляхом чисельних моделювань (мікромагнітних і спін-граткових).

В роботі аналітично і чисельно проаналізовано можливі типи динаміки магнітного вихору в феромагнітному диску під дією однорідного монохроматичного магнітного поля, прикладеного перпендикулярно до площини основ. Аналітично знайдено розподіл намагніченості у точці Блоха в центрі зразка сферичної форми. Описано народження і анігіляцію точок Блоха у процесі зміни полярності магнітних вихорів під дією сталого магнітного поля в гайзенбергівському магнетику циліндричної форми із поверхневою анізотропією. Виявлено можливі стаціонарні стани намагніченості в кільці Мебіуса із легконормальною анізотропією. Описано їх магнітну структуру.

Достовірність наведених результатів підтверджується узгодженістю аналітичних розрахунків із мікромагнітними і спін-гратковими моделюваннями. Розрахунок мікромагнітної структури точки Блоха, наведений в підрозділі 2.2 підтверджуються в роботі [157], де було поєднано мікромагнітний і спін-гратковий методи розрахунків. Результати досліджень магнітних нанодротів різної форми, опубліковані в [44, 206], узгоджуються із наведеними в даній дисертаційній роботі властивостями доменних стінок в кільці Мебіуса.

Описані в дисертаційній роботі результати можуть бути використані при розробці приладів спінtronіки і дослідженні властивостей магнітних топологічних солітонів. Так резонансний метод зміни полярності разом із можливі-

стю отримання хаотичної динаміки є важливим з огляду на створення швидкісних елементів магнітної пам'яті та наноелектронних криптографічних пристрій [46]. На важливості врахування тривимірної динаміки наголошують останні експериментальні дослідження перемикання полярності вихорів [195].

Основні оригінальні результати дисертаційної роботи:

1. Встановлено, що монохроматичне накачування радіально-симетричних магнонних мод на фоні магнітного вихору призводить до динаміки намагніченості, за якої можлива регулярна і хаотична динаміка полярності. Запропоновано теоретичну модель, яка пояснює їх появу в рамках механічної аналогії коливань частинки із змінною масою у ефективному двоямному потенціалі. Невелика амплітуда накачування призводить до слабконелінійного резонансу, а подальше її зростання — до стрибків між еквівалентними мінімумами потенціалу, які відповідають протилежним значенням полярності. Запропоновано спосіб контрольового перемикання полярності вихорів за допомогою хвильових пакетів.
2. Аналітично знайдено розподіл намагніченості в околі точки Блоха в феромагнітному зразку сферичної форми, який визначається конкуренцією обмінної і магнітостатичної взаємодії. Запропоновано спосіб її стабілізації просторово-неоднорідним полем.
3. Встановлено, що в залежності від знаку неєлівської поверхневої анізотропії вихор набуває бочко- або подушкоподібної форми. Неоднорідність блохівської лінії є причиною народження точок Блоха в процесі її перемагнічування. В рамках запропонованої моделі нитчастого вихрового осердя описано вплив сталого магнітного поля на планарний вихор в диску і динаміку точок Блоха.
4. Виявлено магнітокіральні ефекти, зумовлені топологією кільця Мебіуса. Побудовано діаграму рівноважних станів намагніченості в феро-

магнітному кільці Мебіуса з легконормальною анізотропією. Знайдено умови формування топологічно індукованих просторово неоднорідних магнітних структур.

Дослідження, які були покладені в основу даної дисертації, проведено у співавторстві з д. ф.-м. н., проф. Д.Д. Шекою (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), д. ф.-м. н., проф. Ю.Б. Гайдідеєм і к. ф.-м. н., с.н.с. В.П. Кравчуком (Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України), проф. Ф.Г. Мертенсом (Prof. Em. F.G. Mertens, Bayreuth Universität), проф. О.Г. Шмідтом (O. G. Schmidt, Institute for Integrative Nanosciences, IFW Dresden) і докт. Д.Г. Макаровим (Institute of Ion Beam Physics and Materials Research, Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf e.V.).

ПОДЯКИ

Хочу висловити подяку моїм рідним і друзям за підтримку і натхнення, всій групі RiTM (<http://ritm.knu.ua>) за поради, набутий досвід і плідні обговорення. Денис Дмитрович Шека, висловлюю щиру вдячність за керівництво науковою роботою. Денис Дмитрович Шека, Юрій Борисович Гайдідей, Володимир Петрович Кравчук, дякую за уважність, слушні поради й нагоду отримати безцінний досвід творчої, наукової школи. Дякую Францу Мертенсу (Danke Schön, Franz G. Mertens) і Денису Геннадійовичу Макарову за гостинність, плідну співпрацю та нові ідеї.

ДОДАТКИ

A Рівноважний розподіл намагніченості у плівці із поверхневою анізотропією

У даному підрозділі наведено розрахунок розподілу намагніченості у гайзенбергівському феромагнетику в формі плівки із врахуванням неєлівської анізотропії. В залежності від знаку поверхневої анізотропії, відхилення намагніченості від $m_z = h$ набуває максимуму всередині або на поверхнях плівки. Опубліковано в роботі [63].

Розглянемо плівку товщиною L зі сталою легкоплощинною анізотропією $K > 0$ і сталою поверхневою анізотропією $K_s = \kappa K$. Рівноважний розподіл намагніченості визначається системою рівнянь (2.33). Для його опису можна покласти $\mathbf{m} = \sqrt{1 - m_0^2} \mathbf{e}_x + m_0 \mathbf{e}_z$ без втрати загальності, де $m_0 = m_0(z, h)$. У такому випадку система рівнянь (2.33) зводиться до

$$\ell^2 \frac{\partial^2 m_0}{\partial z^2} + h - m_0 = \frac{\ell^2 m_0}{\sqrt{1 - m_0^2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sqrt{1 - m_0^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$\left[\ell \frac{\partial m_0}{\partial z} \pm \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}} m_0 (1 - m_0^2) \right] \Bigg|_{z=\pm L/2} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Аналітичний розв'язок може бути знайдений у припущені $|\kappa/\sqrt{\lambda}| \ll 1$. Записуючи функцію m_0 у вигляді $m_0(z, h) = h + \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}} \tilde{y}(z)$ отримуємо вираз (2.44).

B Моделювання зміни полярності вихору в зразку із обмінною анізотропією

У даному підрозділі наведено результати моделювань зміни полярності магнітного вихору в гайзенбергівському магнетику із легкоплощинною обмінною анізотропією. Якісно, процес відповідає динаміці у легкоплощинному феромагнетику із від'ємною поверхневою анізотропією. Опубліковано в роботі [63].

Поверхнева анізотропія природнім чином виникає у гайзенбергівському магнетику із обмінною анізотропією [2], гамільтоніан якої має вигляд

$$\mathcal{H}^{\text{ex. an}} = \frac{J_z \mathcal{S}^2}{2} \sum_{\mathbf{n}, \boldsymbol{\delta}} m_{\mathbf{n}} m_{\mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}}, \quad (\text{Б.3})$$

де $J_z > 0$ — коефіцієнт обмінної анізотропії легкоплощинного магнетика. Сума пробігає по шести найближчим сусідам для внутрішніх вузлів ґратки і по 3–5 для вузлів на поверхні зразка, що може бути інтерпретовано як обмінно-індукована поверхнева анізотропія, яка виникає внаслідок порушення симетрії ґратки на поверхні.

У моделюваннях, виконаних за допомогою пакету SLaSi, використано таку саму процедуру, як було описано в підрозділі 2.3.2.2, для $J_z/J = 0,005$ (диск А, див. підрозділ 2.3.2.2). Вихор змінює полярність під дією поля

$$2\mu_B H/(J_z \mathcal{S}) = 2,2. \quad (\text{Б.4})$$

Динаміка, яка при цьому спостерігалась, якісно подібна до випадку легкоплощинного магнетика із легконормальною поверхневою анізотропією, наведеною на рис. 2.12. У порівнянні з моделюваннями одноіонної анізотропії, ефект зміни ширини вихору був суттєво менший: в той час, як різниця динамічних полярностей в центрі та на поверхні зразка у моделюваннях, наведених на рис. 2.12(d) складає $\delta p_{\text{EN}} = |p_{\text{top}} - p_{\text{center}}| = 1,65$, для випадку обмінної анізотропії $\delta p_{\text{ex}} = 0,032$, що приблизно в 50 разів менше. Зазначимо, що не зважаючи на те, що порушення симетрії ґратки при дискретному розрахунку обмінної взаємодії (1.1) виникає навіть за відсутності додаткового члену в формі (Б.3), це не призводить до описаної неоднорідної зміни полярності, див. підрозділ 2.3.2.2 (параграф про моделювання магнетиків лише з об'ємною анізотропією). Це дозволяє зробити висновок, що відповідальним за неоднорідну зміну полярності в даному випадку є саме анізотропний характер порушення симетрії на поверхні зразка в гамільтоніані (Б.3).

B Кільце під дією сталого магнітного поля

У даному підрозділі наведено розрахунок розподілу намагніченості у феромагнітному кільці з легкоплощинною анізотропією і поверхневою неелівською анізотропією під дією зовнішнього поля, напрямленого вздовж його вісі. Початковий розподіл намагніченості у формі планарного вихору деформується, набуваючи найбільшої позаплощинної компоненти на внутрішньому радіусі кільца. Опубліковано в роботі [63].

Розглянемо магнітне кільце із внутрішнім радіусом $r_{\text{in}} \geq 0,3\ell$ у вихровому стані і енергією (2.30). Для вирізу такого розміру, за відсутності зовнішніх полів, кільце перебуває в стані планарного вихору [142]. Рівняння (2.33а) набуває вигляду

$$\ell^2 \nabla^2 m_z + h - m_z = \ell^2 \frac{m_z^2}{m_y} \nabla^2 m_y, \quad (\text{B.5})$$

де $m_y = \sqrt{1 - m_z^2} \cos \phi$ і ϕ визначається (2.46а). Розглянемо випадок слабких полів $|h| \ll 1$. Будемо шукати розв'язок (B.5) у формі

$$m_z = hm_r. \quad (\text{B.6})$$

Тоді рівняння (B.5) перетвориться у систему

$$\ell^2 \left(\frac{\partial^2 m_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 m_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial m_r}{\partial r} \right) + m_r \left(\frac{\ell^2}{r^2} - 1 \right) + 1 = 0 \quad (\text{B.7a})$$

$$\left. \left(\frac{\partial m_r}{\partial z} \pm \frac{\varkappa a}{\ell^2} m_r \right) \right|_{z=\pm L/2} = 0, \quad (\text{B.7b})$$

$$\left. \frac{\partial m_r}{\partial r} \right|_{r=r_{\text{in}}, R} = 0. \quad (\text{B.7c})$$

У випадку відсутності поверхневої анізотропії, розв'язок системи (B.7) $m_r = m_{rh}(r)$, збігається з розв'язком рівняння

$$\ell^2 \left(\frac{d^2 m_{rh}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dm_{rh}}{dr} \right) + m_{rh} \left(\frac{\ell^2}{r^2} - 1 \right) + 1 = 0 \quad (\text{B.8})$$

із межовими умовами (B.7c). Для $\kappa \neq 0$ розв'язок (B.7) можна знайти у вигляді

$$m_r = \sum_n R_n(r) Z_n(z), \quad (\text{B.9})$$

що дає наступну межову задачу:

$$\ell^2 \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \sigma_n^2 Z_n = 0, \quad (\text{B.10a})$$

$$\ell^2 \left(\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} \right) + R_n \left(\frac{\ell^2}{r^2} - 1 - \sigma_n^2 \right) + F_n = 0, \quad (\text{B.10b})$$

$$\left. \left(\ell \frac{dZ_n}{dz} \pm \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}} Z_n \right) \right|_{z=\pm L/2} = 0, \quad (\text{B.10c})$$

$$\left. \frac{dR_n}{dr} \right|_{r=r_{\text{in}}, R} = 0. \quad (\text{B.10d})$$

де F_n є коефіцієнтами розкладу

$$1 = \sum_n F_n Z_n(z). \quad (\text{B.11})$$

Власні функції Z_n мають вигляд

$$Z_n(z) = \sigma_n \cos \frac{\sigma_n(z + L/2)}{\ell} + \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}} \sin \frac{\sigma_n(z + L/2)}{\ell}, \quad (\text{B.12})$$

із дисперсійним рівнянням

$$\tan \frac{\sigma_n L}{2\ell} = 2\sqrt{\lambda} \frac{\sigma_n \kappa}{\lambda \sigma_n^2 - \kappa^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.13})$$

Для випадку $\kappa < 0$ перше власне число σ_1 має знаходитись як розв'язок

$$\tanh \frac{\sigma_1 L}{2\ell} = -\frac{\kappa}{\sqrt{\lambda} \sigma_1} \quad (\text{B.14})$$

із власною функцією

$$Z_1(z) = \sigma_1 \operatorname{ch} \frac{\sigma_1(z + L/2)}{\ell} + \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} \frac{\sigma_1(z + L/2)}{\ell}. \quad (\text{B.15})$$

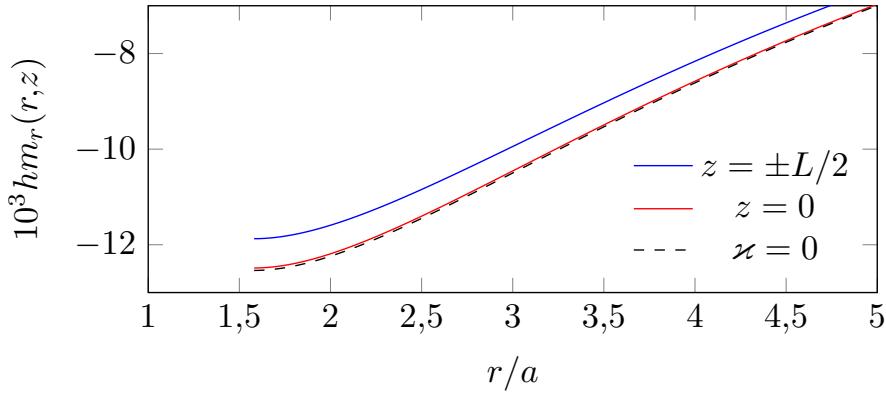


Рис. B.1: Розподіл намагніченості $m_z = hm_r(r, z)$ у центрі і на основах кільця із внутрішнім радіусом $r_{\text{in}} = 1,58a$ і додатною поверхневою анізотропією під дією поля $h = -0,0009$ (залишено 4 гармоніки у (B.10)). Пунктирна крива відповідає функції hm_{rh} (відсутність поверхневої анізотропії). $\kappa = 0,1$, інші параметри такі самі, як на рис. 2.18.

Розв'язок рівняння (B.10b)

$$R_n(r_\sigma) = \frac{F_n}{1 + \sigma_n^2} \left[K_i(r_\sigma) \int_1^{r_\sigma} L_i(x) dx + B K_i(r_\sigma) + L_i(r_\sigma) \int_{r_\sigma}^\infty K_i(x) dx \right], \quad (\text{B.16})$$

де $r_\sigma = \sqrt{1 + \sigma_n^2} r / \ell$, $L_i(x)$ і $K_i(x)$ — розв'язки модифікованого рівняння Бесселя дійсного аргументу уявного порядку. На радіусі $r_{\sigma 0}$ другої координаційної сфери $B \approx (r_{\sigma 0} + 0,557)/(0,99r_{\sigma 0} - 0,316)$. Вигляд профілю планарного вихору в різних зразках під дією зовнішнього поля відповідно до розв'язку (B.10) зображене на рис. B.1. Для розрахунків у рамках моделі вихрового осердя рівняння (B.8) і (B.10b) розв'язувались чисельно із використанням від 3 гармонік для найменших значень L й до 7 для найбільш товстих зразків.

Г Модель нитчастого вихрового осердя

У даному підрозділі наведено опис моделі нитчастого вихрового осердя і розрахунок форми вихору в її рамках із врахуванням поверхневої неєлівської анізотропії. Опубліковано в роботі [63].

Гамільтоніан (2.30) із врахуванням анізотропії (2.45) може бути переписаний у наступній формі:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & -JS^2 \sum_{\mathbf{n}, \boldsymbol{\delta}} \left[m_{\mathbf{n}} m_{\mathbf{n}+\boldsymbol{\delta}} + \sqrt{(1-m_{\mathbf{n}}^2)(1-m_{\mathbf{n}+\boldsymbol{\delta}}^2)} \cos(\phi_{\mathbf{n}} - \phi_{\mathbf{n}+\boldsymbol{\delta}}) \right] \\ & + \sum_{\mathbf{n}=(n_x, n_y, n)} \left(\frac{K_n S^2}{2} m_{\mathbf{n}}^2 - 2\mu_B H S m_{\mathbf{n}} \right). \end{aligned} \quad (\Gamma.17)$$

Підставляючи в нього анзац (2.46) отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & \sum_{n=1}^N 4K S^2 \left[-\frac{J}{K} \mu_n^2 - \frac{2J}{K} m_b \mu_n + \kappa_n \frac{\mu_n^2}{2} \right. \\ & \left. - \frac{4J}{\sqrt{5}K} \sqrt{(1-m_b^2)(1-\mu_n^2)} \cos \psi_n + \frac{\mu_n^2}{2} - \mu_n h \right] \\ & - 4JS^2 \sum_{n=1}^{N-1} \left[\mu_n \mu_{n+1} + \sqrt{(1-\mu_n^2)(1-\mu_{n+1}^2)} \cos(\psi_n - \psi_{n+1}) \right]. \end{aligned} \quad (\Gamma.18)$$

Беручи до уваги, що $\kappa_n = 0$ для $n = \overline{2, N-1}$, $\kappa_1 = \kappa_N = \kappa$, $\lambda = \ell^2/a^2$, $\lambda_n = J/K_n \equiv \lambda/(1+\kappa_n)$ отримуємо рівняння (2.47). Часова еволюція $\mu_n(\tau)$ і $\psi_n(\tau)$ визначається рівнянням (1.14), яке набуває вигляду наступної системи:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_n}{d\tau} &= \frac{1}{1+\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \psi_n} - (1-\mu_n^2) \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \mu_n}, \\ \frac{d\psi_n}{d\tau} &= -\frac{1}{1+\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \mu_n} - \frac{1}{1-\mu_n^2} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \psi_n}, \end{aligned} \quad (\Gamma.19)$$

де $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_c/(4K S^2)$. Задача динаміки намагніченості у дискретній моделі може бути проаналізована чисельно. Для аналітичного підходу ми замінили дискретні функції μ_n і ψ_n її неперервними аналогами $\mu(z)$ і $\psi(z)$ та замінили підсумовування інтегруванням. Об'ємний внесок при цьому набуває вигляду

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_v[\mu] = & \frac{4}{a} \int_{-L/2}^{L/2} \left[(1-2\lambda) \frac{\mu^2}{2} - (h+2\lambda m_b) \mu - \frac{4\lambda}{\sqrt{5}} \sqrt{(1-m_b^2)(1-\mu^2)} \times \right. \\ & \left. \times \cos \psi \right] dz + 2\lambda a \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{(\mu')^2}{1-\mu^2} + (1-\mu^2)(\psi')^2 \right] dz, \end{aligned} \quad (\Gamma.20a)$$

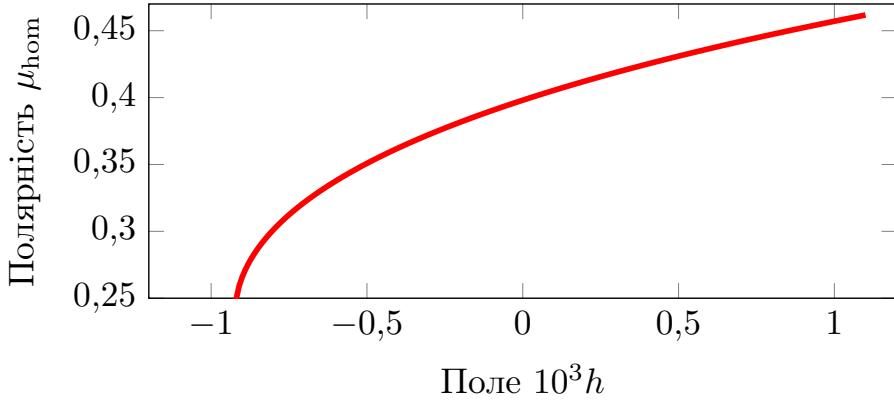


Рис. Г.1: Рівноважна полярність $\mu_{\text{hom}}(h)$ для дискретної однорідної моделі (2.47) ($\varkappa_n = 0$, $n = \overline{1, N}$) при $\lambda = 20$.

із $m_b \equiv m_b(z, h)$. Поверхневий внесок має вигляд

$$\mathcal{E}_s^\pm[\mu] = 2\varkappa\mu^2 \Big|_{z=\pm L/2}. \quad (\Gamma.20b)$$

Вважаючи, що відхилення від рівноважного значення динамічної полярності за відсутності поверхневої анізотропії мале і $\mu(z) = \mu_{\text{hom}}(h) + \frac{\varkappa}{\sqrt{\lambda}}\tilde{x}(z)$ із $|\varkappa/\sqrt{\lambda}| \ll 1$, де $\mu_{\text{hom}}(h)$ може бути знайдено чисельно як розв'язок наступного рівняння

$$\frac{1}{2}(1-2\lambda)\mu_{\text{hom}}^2 - h(1+2\lambda m_{rh})\mu_{\text{hom}} = \frac{4\lambda}{\sqrt{5}}\sqrt{(1-h^2m_{rh}^2)(1-\mu_{\text{hom}}^2)}, \quad (\Gamma.21)$$

див рис. Г.1. Беручи до уваги, що $\psi(z) = 0$ і варіюючи функціонал (Г.20) отримуємо рівноважний розподіл μ як розв'язок межової задачі (2.49), де

$$A_1 = \left(2 - \frac{1}{\lambda}\right)(1 - \mu_{\text{hom}}^2) - \frac{4}{\sqrt{5(1 - \mu_{\text{hom}}^2)}}, \quad (\Gamma.22a)$$

$$A_2(z) = \frac{1 - \mu_{\text{hom}}^2}{5\varkappa\sqrt{\lambda}} \left[5h - 10\lambda m_b(z) + \mu_{\text{hom}} \left(5 - 10\lambda + 4\lambda\sqrt{\frac{5}{1 - \mu_{\text{hom}}^2}} \right) \right]. \quad (\Gamma.22b)$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Feldtkeller, E. Struktur und Energie von Blochlinien in dünnen ferromagnetischen Schichten / E. Feldtkeller, H. Thomas // Zeitschrift für Physik B Condensed Matter. — 1965. — Jul. — Bd. 4, H. 1. — S. 8–14. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02423256>.
2. Косевич, А. М. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны / А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев. — Киев : Наук. думка, 1983. — 192 с.
3. Борисов, А. Б. Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т. 2. Топологические солитоны, двумерные и трехмерные «узоры» / А. Б. Борисов, В. В. Киселев. — Екатеринбург : УрО РАН, 2011. — 416 с.
4. Березинский, В. Л. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. II Квантовые системы / В. Л. Березинский // ЖЭТФ. — 1971. — Т. 61, № 3. — С. 1144–1155.
5. Kosterlitz, J. M. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems / J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1973. — Vol. 6, no. 7. — P. 1181–1203. — URL: <http://stacks.iop.org/0022-3719/6/1181>.
6. Браун, У. Ф. Микромагнетизм / У. Ф. Браун ; Под ред. А. Г. Гуревича. — Москва : Наука, 1979. — 159 с.
7. Guimarães, A. P. Principles of Nanomagnetism / A. P. Guimarães. NanoScience and Technology. — Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

berg, 2009. — 221 p. — ISBN: 978-3-642-01481-9. — URL: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-01482-6/page/1>.

8. Tang, D. D. Magnetic Memory - Fundamentals and Technology / D. D. Tang, Y.-J. Lee. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 208 p. — ISBN: 0521449642. — URL: <http://www.cambridge.org/us/academic/subjects/engineering/electronic-optoelectronic-devices-and-nanotechnology/magnetic-memory-fundamentals-and-technology>.
9. Cowburn, R. P. Magnetic nanodots for device applications / R. P. Cowburn // J. Magn. Magn. Mater. — 2002. — Apr. — Vol. 242-245, no. Part 1. — P. 505–511. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0304-8853\(01\)01086-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-8853(01)01086-1).
10. Current controlled random-access memory based on magnetic vortex handedness / S. Bohlens, B. Krüger, A. Drews [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2008. — Vol. 93, no. 14. — P. 142508. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/93/142508/1>.
11. Reliable low-power control of ultrafast vortex-core switching with the selectivity in an array of vortex states by in-plane circular-rotational magnetic fields and spin-polarized currents / S.-K. Kim, K.-S. Lee, Y.-S. Yu, Y.-S. Choi // Appl. Phys. Lett. — 2008. — Vol. 92, no. 2. — P. 022509. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/92/022509/1>.
12. Noise-induced switching between vortex states with different polarization in classical two-dimensional easy-plane magnets / Y. Gaididei, T. Kampeter, F. G. Mertens, A. Bishop // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 59, no. 10. — P. 7010–7019. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v59/p7010>.

13. Switching between different vortex states in two-dimensional easy-plane magnets due to an ac magnetic field / Y. Gaididei, T. Kamppeter, F. G. Mertens, A. R. Bishop // Phys. Rev. B. — 2000. — Apr. — Vol. 61, no. 14. — P. 9449–9452. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v61/p9449>.
14. MFM study of magnetic vortex cores in circular permalloy dots: behavior in external field / T. Okuno, K. Shigeto, T. Ono [et al.] // J. Magn. Magn. Mater. — 2002. — Feb. — Vol. 240, no. 1-3. — P. 1–6. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJJ-447DCMV-3/2/84e9fdfbf9e0cab3d3182fc4db4b4032>.
15. Controlled vortex core switching in a magnetic nanodisk by a rotating field / V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei, F. G. Mertens // J. Appl. Phys. — 2007. — Vol. 102, no. 4. — P. 043908. — URL: <http://link.aip.org/link/?JAP/102/043908/1>.
16. Ultrafast Nanomagnetic Toggle Switching of Vortex Cores / R. Hertel, S. Gliga, M. Fähnle, C. M. Schneider // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98, no. 11. — P. 117201. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRL/v98/e117201>.
17. Wang, R. Sub-nanosecond switching of vortex cores using a resonant perpendicular magnetic field / R. Wang, X. Dong // Appl. Phys. Lett. — 2012. — Vol. 100, no. 8. — P. 082402. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/100/082402/1>.
18. Yoo, M.-W. Radial-spin-wave-mode-assisted vortex-core magnetization reversals / M.-W. Yoo, J. Lee, S.-K. Kim // Appl. Phys. Lett. — 2012. — Vol. 100, no. 17. — P. 172413. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/100/172413/1>.

19. Magnetic vortex core reversal by excitation with short bursts of an alternating field / B. Van Waeyenberge, A. Puzic, H. Stoll [et al.] // Nature. — 2006. — nov. — Vol. 444, no. 7118. — P. 461–464. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature05240>.
20. Vortex polarity switching by a spin-polarized current / J. G. Caputo, Y. Gaididei, F. G. Mertens, D. D. Sheka // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98, no. 5. — P. 056604. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRL/v98/e056604>.
21. Current-induced magnetic vortex core switching in a Permalloy nanodisk / Y. Liu, S. Gliga, R. Hertel, C. M. Schneider // Appl. Phys. Lett. — 2007. — Vol. 91, no. 11. — P. 112501. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/91/112501/1>.
22. Controllable vortex polarity switching by spin polarized current / W. Jin, H. He, Y. Chen, Y. Liu // J. Appl. Phys. — 2009. — Vol. 105, no. 1. — P. 013906. — URL: <http://link.aip.org/link/?JAP/105/013906/1>.
23. Strain Induced Vortex Core Switching in Planar Magnetostrictive Nanosstructures / T. A. Ostler, R. Cuadrado, R. W. Chantrell [et al.] // Physical Review Letters. — 2015. — Aug. — Vol. 115, no. 6. — P. 067202. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.067202>.
24. Spin-current pulse induced switching of vortex chirality in permalloy/Cu/Co nanopillars / B. C. Choi, J. Rudge, E. Girgis [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2007. — Vol. 91, no. 2. — P. 022501. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/91/022501/1>.
25. Gaididei, Y. Controllable switching of vortex chirality in magnetic nanodisks by a field pulse / Y. Gaididei, D. D. Sheka, F. G. Mertens //

- Appl. Phys. Lett.— 2008.— Vol. 92, no. 1.— P. 012503.— URL: <http://link.aip.org/link/?APL/92/012503/1>.
26. Antos, R. Simulations of the dynamic switching of vortex chirality in magnetic nanodisks by a uniform field pulse / R. Antos, Y. Otani // Phys. Rev. B.— 2009.— Vol. 80, no. 14.— P. 140404.— URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v80/e140404>.
27. Fast chirality reversal of the magnetic vortex by electric current / W. L. Lim, R. H. Liu, T. Tyliszczak [et al.] // Appl. Phys. Lett.— 2014.— Dec.— Vol. 105, no. 22.— P. 222405.— URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4902997>.
28. Dynamics and efficiency of magnetic vortex circulation reversal / M. Urbánek, V. Uhlíř, C.-H. Lambert [et al.] // Phys. Rev. B.— 2015.— Mar.— Vol. 91, no. 9.— P. 094415.— URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.91.094415>.
29. Magnetic Microhelix Coil Structures / E. J. Smith, D. Makarov, S. Sanchez [et al.] // Phys. Rev. Lett.— 2011.— Aug.— Vol. 107.— P. 097204.— URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.097204>.
30. Gioia, G. Micromagnetics of very thin films / G. Gioia, R. D. James // Proc. R. Soc. Lond. A.— 1997.— Jan.— Vol. 453, no. 1956.— P. 213–223.— URL: <http://www.journals.royalsoc.ac.uk/openurl.asp?genre=article&id=doi:10.1098/rspa.1997.0013>.
31. Kohn, R. V. Another Thin-Film Limit of Micromagnetics / R. V. Kohn, V. V. Slastikov // Archive for Rational Mechanics and Analysis.— 2005.— Vol. 178, no. 2.— P. 227–245.— URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00205-005-0372-7>.

32. Slastikov, V. Micromagnetism of thin shells / V. Slastikov // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2005. — Vol. 15, no. 10. — P. 1469–1487. — <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S021820250500087X>.
33. Effective anisotropy of thin nanomagnets: Beyond the surface-anisotropy approach / J. G. Caputo, Y. Gaididei, V. P. Kravchuk [et al.] // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76, no. 17. — P. 174428. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v76/e174428>.
34. Gaididei, Y. Curvature Effects in Thin Magnetic Shells / Y. Gaididei, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Jun. — Vol. 112. — P. 257203. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.257203>.
35. Sheka, D. D. Curvature effects in statics and dynamics of low dimensional magnets / D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, Y. Gaididei // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2015. — Vol. 48, no. 12. — P. 125202. — URL: <http://stacks.iop.org/1751-8121/48/i=12/a=125202>.
36. Out-of-surface vortices in spherical shells / V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, R. Streubel [et al.] // Phys. Rev. B. — 2012. — Apr. — Vol. 85. — P. 144433. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.85.144433>.
37. Curvature induced chirality symmetry breaking in vortex core switching phenomena / M. I. Sloika, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Applied Physics Letters. — 2014. — Vol. 104, no. 25. — P. 252403. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/apl/104/25/10.1063/1.4884957>.

38. Braun, H.-B. Topological effects in nanomagnetism: from superparamagnetism to chiral quantum solitons / H.-B. Braun // Advances in Physics. — 2012. — Vol. 61, no. 1. — P. 1–116. — URL: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00018732.2012.663070>.
39. All-electrical operation of magnetic vortex core memory cell / K. Nakano, D. Chiba, N. Ohshima [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2011. — Vol. 99, no. 26. — P. 262505. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/99/262505/1>.
40. Abrikosov, A. A. Nobel Lecture: Type-II superconductors and the vortex lattice / A. A. Abrikosov // Rev. Mod. Phys. — 2004. — Dec. — Vol. 76, no. 3. — P. 975–979. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.76.975>.
41. Fetter, A. L. Rotating trapped Bose-Einstein condensates / A. L. Fetter // Rev. Mod. Phys. — 2009. — May. — Vol. 81, no. 2. — P. 647–691. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.647>.
42. Kleckner, D. Creation and dynamics of knotted vortices / D. Kleckner, W. T. M. Irvine // Nature Physics. — 2013. — Mar. — Vol. 9, no. 4. — P. 253–258. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2560>.
43. Hertel, R. Curvature-induced magnetochirality / R. Hertel // SPIN. — 2013. — Sep. — Vol. 03, no. 03. — P. 1340009. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S2010324713400092>.
44. Torsion-induced effects in magnetic nanowires / D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, K. V. Yershov, Y. Gaididei // Phys. Rev. B. — 2015. — Aug. — Vol. 92. — P. 054417. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.92.054417>.

45. Cortes-Ortuno, D. Influence of the Dzyaloshinskii-Moriya interaction on the spin-wave spectra of thin films / D. Cortes-Ortuno, P. Landeros // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2013. — Apr. — Vol. 25, no. 15. — P. 156001. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0953-8984/25/15/156001>.
46. Handbook of Chaos Control / Ed. by E. Schöll, H. G. Schuster. — 2nd edition. — Weinheim, Germany : John Wiley & Sons, 2008. — P. 849.
47. Depondt, P. Vortex polarization dynamics in a square magnetic nanodot / P. Depondt, J.-C. S. Lévy, S. Mamica // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2013. — Vol. 25, no. 46. — P. 466001. — URL: <http://stacks.iop.org/0953-8984/25/i=46/a=466001>.
48. Duffing oscillation-induced reversal of magnetic vortex core by a resonant perpendicular magnetic field / K.-W. Moon, B. S. Chun, W. Kim [et al.] // Scientific Reports. — 2014. — Aug. — Vol. 4. — P. 6170. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/srep06170>.
49. Non-linear radial spinwave modes in thin magnetic disks / M. Helsen, A. Gangwar, J. De Clercq [et al.] // Applied Physics Letters. — 2015. — Vol. 106, no. 3. — P. 032405.
50. Mechanical magnetometry of Cobalt nanospheres deposited by focused electron beam at the tip of ultra-soft cantilevers / H. Lavenant, V. Naletov, O. Klein [et al.] // Nanofabrication. — 2014. — Jan. — Vol. 1, no. 1. — URL: <http://dx.doi.org/10.2478/nanofab-2014-0006>.
51. Spin waves scattering on a Bloch point / R. G. Elías, V. L. Carvalho-Santos, A. S. Núñez, A. D. Verga // Phys. Rev. B. — 2014. — Dec. — Vol. 90, no. 22. — P. 224414. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.90.224414>.

52. Micromagnetic study of Bloch-point-mediated vortex core reversal / A. Thiaville, J. M. Garcia, R. Dittrich [et al.] // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 67, no. 9. — P. 094410. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v67/e094410>.
53. Observation of Bloch-point domain walls in cylindrical magnetic nanowires / S. Da Col, S. Jamet, N. Rougemaille [et al.] // Phys. Rev. B. — 2014. — May. — Vol. 89, no. 18. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.89.180405>.
54. Hertel, R. Multiscale simulation of Bloch point dynamics in thick nanowires / R. Hertel, C. Andreas // Magnetic nano- and microwires: design, synthesis, properties and applications / Ed. by M. Vázquez. — Cambridge, UK : Woodhead Publishing is an imprint of Elsevier, 2015. — P. 653–678.
55. A frequency-controlled magnetic vortex memory / B. Pigeau, G. de Loubens, O. Klein [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2010. — Vol. 96, no. 13. — P. 132506. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3373833>.
56. Vázquez, M. Magnetic nano- and microwires: design, synthesis, properties and applications / M. Vázquez. — Cambridge, UK : Woodhead Publishing is an imprint of Elsevier, 2015. — ISBN: 9780081001646.
57. Parkin, S. S. P. Magnetic Domain-Wall Racetrack Memory / S. S. P. Parkin, M. Hayashi, L. Thomas // Science. — 2008. — Vol. 320, no. 5873. — P. 190–194. — URL: <http://dx.doi.org/10.1126/science.1145799>.
58. MEG Evidence for Dynamic Amygdala Modulations by Gaze and Facial Emotions / T. Dumas, S. Dubal, Y. Attal [et al.] // PLoS ONE. — 2013. —

09. — Vol. 8, no. 9. — P. e74145. — URL: <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0074145>.
59. Механізм швидкого аксіально симетричного перемикання полярності магнітного вихору / О. В. Пилиповський, Д. Д. Шека, В. П. Кравчук [та ін.] // Укр. фіз. журн. — 2013. — Т. 58, № 6. — С. 596–603. — URL: <http://www.ujp.bitp.kiev.ua/files/journals/58/6/580611p.pdf>.
60. Regular and chaotic vortex core reversal by a resonant perpendicular magnetic field / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk [et al.] // Phys. Rev. B. — 2013. — Jul. — Vol. 88. — P. 014432. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.88.014432>.
61. Pylypovskiy, O. V. Bloch point structure in a magnetic nanosphere / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Phys. Rev. B. — 2012. — Jun. — Vol. 85. — P. 224401. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.85.224401>.
62. Effects of surface anisotropy on magnetic vortex core / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, Y. Gaididei // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2014. — Vol. 361. — P. 201 – 205. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885314002157>.
63. Vortex Polarity Switching in Magnets with Surface Anisotropy / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, Y. Gaididei // Физика низких температур. — 2015. — Т. 41, № 5. — С. 466–481. — 1501.06548.
64. Coupling of Chiralities in Spin and Physical Spaces: The Möbius Ring as a Case Study / O. V. Pylypovskiy, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — May. — Vol. 114. — P. 197204. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.197204>.

65. Pylypovskiy, O. Dynamics of the Vortex Switching Process in a Magnetic Nanodisk under the Influence of Transversal Magnetic Field / O. Pylypovskiy, D. D. Sheka // Abstracts of the Young Scientists' Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", December 24-26, 2009, Kiev, Ukraine. — Kyiv, 2009. — URL: <http://www.bitp.kiev.ua/confyoung09/>.
66. Pylypovskiy, O. Bloch point dynamics in vortex polarity switching process / O. Pylypovskiy, D. D. Sheka // Proceeding of X International Young Scientists' Conference on Applied Physics, June 16-19, 2010, Kiev, Ukraine. — Kyiv, 2010. — P. 34–35. — URL: <http://www.rpd.univ.kiev.ua/downloads/conference/icap/2010.pdf>.
67. Pylypovskiy, O. Dynamics of point singularities in magnetic nanodots under the field influence / O. Pylypovskiy, D. D. Sheka // Abstracts of the Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", December 22-24, 2010, Kiev, Ukraine. — Kyiv, 2010. — P. 86. — URL: <http://www.bitp.kiev.ua/confyoung10/>.
68. Pylypovskiy, O. Vortex polarity switching in magnetic nanodisk mediated by the Bloch point injection / O. Pylypovskiy, D. D. Sheka // Proceeding of XI International Young Scientists' Conference on Applied Physics, June 15-18, 2011, Kiev, Ukraine. — Kyiv, 2011. — P. 79–80.
69. Pylypovskiy, O. V. Structure of the Bloch Point in Spherical Nanoparticle / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, Y. B. Gaididei // Abstracts of the Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics", December 21-23, 2011, Kiev, Ukraine. — Kyiv, 2011. — P. 55. — URL: <http://www.bitp.kiev.ua/confyoung11/>.

70. Pylypovskiy, O. Influence of magnetic and stray field on a Bloch point structure / O. Pylypovskiy, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Proceeding of XII International Young Scientists' Conference on Applied Physics, May 23-26, 2012, Kiev, Ukraine. — Kyiv, 2012. — P. 77–78. — URL: <http://www.rpd.univ.kiev.ua/downloads/conference/icap/2012.pdf>.
71. Pylypovskiy, O. V. Radial-dependent Bloch point in magnetic nanosphere / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Abstracts of the Young Scientists' Conference "Low Temperature Physics", May 14-18, 2012, Kharkiv, Ukraine. — Kharkiv, 2012. — P. 85. — URL: <http://www.ilt.kharkov.ua/kmu2012/index.php>.
72. Deterministic and chaotic vortex dynamics in magnetic nanodots / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk [et al.] // Proceedings of the International Conference "Problems of Theoretical Physics", October 8-10, 2012, Kiev, Ukraine. — Kyiv, 2012. — P. 102. — URL: <http://davydov2012.bitp.kiev.ua/index.html>.
73. Axial-symmetric vortex polarity switching in ferromagnetic particles / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk [et al.] // Proceedings of the VIII International Conference "Electronics and Applied physics" (Kyiv, Ukraine, October 24-27, 2012). — Kyiv, 2012. — P. 61–62. — URL: http://www.rpd.univ.kiev.ua/conference/el_and_pricl_fiz.php.
74. Vortex Polarity Reversal in Magnetic Nanodisk Under AC Magnetic Field Pumping / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk [et al.] // Proceedings of the IV Young Scientists Conference "Modern Problems of Theoretical Physics" October 23-26, 2012, Kiev, Ukraine. — Kyiv, 2012. — P. 60.
75. Pylypovskiy, O. Origin of regular and chaotic ultrafast reversal of magnetic

- vortex core / O. Pylypovskiy // Abstracts of the International Workshop “Domain microstructure and dynamics in magnetic elements”, Heraklion, Crete, April 8—11, 2013.— Heraklion, 2013.— P. 17.— URL: <http://www.acmac.uoc.gr/%CE%BCMAGelm2013/>.
76. Pylypovskiy, O. V. SLaSi: a spin-lattice simulation tool / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka // Book of Abstract of 11th EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization, Florence, Italy, June 26-28, 2013.— Florence, 2013.— P. 11.
77. The breaking of the vortex polarity switching symmetry by the surface anisotropy / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, Y. Gaididei // Proceedings of the 4th International Conference of Young Scientists “Low Temperature Physics”, Kharkiv, Ukraine, June 3-7, 2013.— Kharkiv, 2013.— P. 49.
78. Bloch Point Mediated Vortex Polarity Switching In Presence of Surface Anisotropy / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, Y. Gaididei // Proceeding of the XIII International Young Scientists’ Conference on Applied Physics, June 12-15, 2013, Kyiv, Ukraine.— Kyiv, 2013.— P. 83–84.
79. Magnetic vortex core reversal in Heisenberg magnets with surface anisotropy / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, Y. Gaididei // Proceedings of the V Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”, Kyiv, Ukraine, December 24-27, 2013.— Kyiv, 2013.— P. 93.
80. Coupling of Magnetical and Geometrical Chiralities in a Möbius Ring / O. V. Pylypovskiy, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka [et al.] // Proceedings

of the VI Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”, Kyiv, Ukraine, November 25-27, 2014. — Kyiv, 2014. — P. 36.

81. Ground magnetization states in a Möbius Strip / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk [et al.] // Proceedings of the V International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics” (Kharkiv, Ukraine, June 2-6, 2014). — Kharkiv, 2014. — P. 74.
82. Möbius-strip shaped nanomagnet with easy-axis anisotropy / O. V. Pylypovskiy, D. D. Sheka, V. P. Kravchuk [et al.] // Book of Abstracts, Humboldt Kolleg “The Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society”, Kyiv, Ukraine, June 12–14, 2014. — Kyiv, 2014. — P. 44. — URL: <http://hk2014.humboldt.org.ua/>.
83. Geometry-induced effects on domain walls on curved surfaces / O. Pylypovskiy, D. Sheka, V. Kravchuk [et al.] // International Conference on Magnetism, July 5–10, 2015, Barcelona, Spain. Book of Abstracts. — Barcelona, 2015. — July. — P. TU.F–P83.
84. Ахиезер, А. И. Спиновые волны / А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский. — М. : Наука, 1967. — 368 с.
85. Stöhr, J. Magnetism: From Fundamentals to Nanoscale Dynamics / J. Stöhr, H. C. Siegmann. — Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. — Vol. 152 of Springer Series in solid-state sciences. — 820 p. — URL: <http://www.springer.com/us/book/9783540302827>.
86. Барьяхтар, В. Г. Функции Грина в теории магнетизма / В. Г. Барьяхтар, В. Н. Криворучко, Д. А. Яблонский. — Киев : Наукова думка, 1984. — 368 с.

87. Magnetism: Fundamentals / Ed. by E. du Tremolet Lacheisserie, D. Gignoux, M. Schlenker. — USA : Springer Science + Business Media, Inc., 2005. — ISBN: 0387229671. — URL: <http://www.amazon.com/Magnetism-Fundamentals-University-Joseph-Fourier/dp/0387229671%3FSubscriptionId%3D0JYN1NVW651KCA56C102%26tag%3Dtechkie-20%26linkCode%3Dxm2%26camp%3D2025%26creative%3D165953%26creativeASIN%3D0387229671>.
88. Hubert, A. Magnetic domains: The analysis of magnetic microstructures / A. Hubert, R. Schäfer. — Berlin : Springer Berlin Heidelberg, 2009. — 696 p.
89. Fiorani, D. Surface Effects in Magnetic Nanoparticles / D. Fiorani. Nanostructure Science and Technology. — New York : Springer, 2005. — ISBN: 9780387232799. — URL: http://books.google.com.ua/books?id=_WFXYnjlcnIC.
90. Guslienko, K. Y. Vortex state stability in soft magnetic cylindrical nanodots / K. Y. Guslienko, V. Novosad // J. Appl. Phys. — 2004. — Vol. 96, no. 8. — P. 4451–4455. — URL: <http://link.aip.org/link/?JAP/96/4451/1>.
91. Малоземов, А. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами / А. Малоземов, Д. Слонзуски. — М. : Мир, 1982. — 380 с.
92. Ландау, Л. Д. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // Phys. Zs. Sowjet.; Перепечатано в Укр. физ. ж. 53 25–35 (2008). — 1935. — Т. 8. — С. 153–169. — URL: <http://ujp.bitp.kiev.ua/files/journals/53/si/53SI08p.pdf>.

93. Gilbert, T. A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials / T. Gilbert // IEEE Transactions on Magnetics. — 2004. — Vol. 40, no. 6. — P. 3443 – 3449. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2004.836740>.
94. Барьяхтар, В. Г. Феноменологическое описание релаксационных процессов в магнетиках / В. Г. Барьяхтар // ЖЭТФ. — 1984. — Т. 87, № 4. — С. 1501–1508.
95. Барьяхтар, В. Г. Обменная релаксация как источник сверхбыстрой переориентации спинов в ферримагнетике с двумя подрешетками / В. Г. Барьяхтар, В. И. Бутрим, Б. А. Иванов // Письма в ЖЭТФ. — 2013. — Т. 98, № 5. — С. 327–331.
96. Ястребский, И. А. Формирование фронта продольной эволюции магнитного момента ферромагнетика при сильном неоднородном возбуждении / И. А. Ястребский // Физика твердого тела. — 2014. — Т. 56, № 6. — С. 1076–1081.
97. Transition from single-domain to vortex state in soft magnetic cylindrical nanodots / W. Scholz, K. Y. Guslienko, V. Novosad [et al.] // J. Magn. Magn. Mater. — 2003. — oct. — Vol. 266, no. 1-2. — P. 155–163. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJJ-48XJG14-2/2/99674233c0c57efed3e8c330363537c0>.
98. Metlov, K. L. Stability of magnetic vortex in soft magnetic nano-sized circular cylinder / K. L. Metlov, K. Y. Guslienko // J. Magn. Magn. Mater. — 2002. — apr. — Vol. 242-245, no. Part 2. — P. 1015–1017. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJJ-44PKP2R-F/2/3cb3318ef44a490869eeae7cf4d79650>.

99. Micromagnetic behavior of electrodeposited cylinder arrays / C. A. Ross, M. Hwang, M. Shima [et al.] // Phys. Rev. B. — 2002. — Vol. 65. — P. 144417. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v65/e144417>.
100. Electromagnetic, magnetostatic, and exchange-interaction vortices in confined magnetic structures / Ed. by E. Kamenetskii. — Kerala, India : Research Signpost, 2008. — ISBN: 978-81-7895-373-1. — URL: <http://www.ressign.com/UserBookDetail.aspx?bkid=830&catid=188>.
101. Magnetic Vortex Core Observation in Circular Dots of Permalloy / T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf [et al.] // Science. — 2000. — Vol. 289, no. 5481. — P. 930–932. — <http://www.sciencemag.org/cgi/reprint/289/5481/930.pdf>.
102. Иванов, Б. А. Вихри в конусной фазе классического квазидвумерного ферромагнетика / Б. А. Иванов, Д. Д. Шека // ФНТ. — 1995. — Т. 21, № 10. — С. 1148–1156.
103. Gaididei, Y. Magnetic vortex dynamics induced by an electrical current / Y. Gaididei, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka // International Journal of Quantum Chemistry. — 2010. — Vol. 110, no. 1. — P. 83–97. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/qua.22253>.
104. Sheka, D. D. Current induced switching of vortex polarity in magnetic nanodisks / D. D. Sheka, Y. Gaididei, F. G. Mertens // Appl. Phys. Lett. — 2007. — Vol. 91. — P. 082509. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/91/082509/1>.
105. Control of the polarity of magnetization vortex by torsion / J. Wang, G.-P. Li, T. Shimada [et al.] // Applied Physics Letters. — 2013. — Vol. 103, no. 24. — P. 242413. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4847375>.

106. Chirality control and switching of vortices formed in hexagonal shaped ferromagnetic elements / S. Y. H. Lua, S. S. Kushvaha, Y. H. Wu [et al.] // Applied Physics Letters. — 2008. — Vol. 93, no. 12. — P. 122504. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/93/122504/1>.
107. Кравчук, В. П. Тонкий ферромагнитный нанодиск в поперечном магнитном поле / В. П. Кравчук, Д. Д. Шека // Физика твердого тела. — 2007. — Т. 49, № 10. — С. 1834–1841. — URL: <http://www.ioffe.ru/journals/ftt/2007/10/page-1834.html.ru>.
108. Ivanov, B. A. Magnon modes for a circular two-dimensional easy-plane ferromagnet in the cone state / B. A. Ivanov, G. M. Wysin // Phys. Rev. B. — 2002. — Vol. 65, no. 13. — P. 134434. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v65/e134434>.
109. Höllinger, R. Statics and fast dynamics of nanomagnets with vortex structure / R. Höllinger, A. Killinger, U. Krey // J. Magn. Magn. Mater. — 2003. — apr. — Vol. 261, no. 1-2. — P. 178–189. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJJ-47F1D5K-1/2/02a9f675dac9cbb50d643664d50b98be>.
110. Kravchuk, V. P. Nucleation of a vortex-antivortex pair in the presence of an immobile magnetic vortex / V. P. Kravchuk, Y. Gaididei, D. D. Sheka // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 80, no. 10. — P. 100405. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v80/e100405>.
111. Multiple vortex-antivortex pair generation in magnetic nanodots / Y. Gaididei, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, F. G. Mertens // Phys. Rev. B. — 2010. — Mar. — Vol. 81, no. 9. — P. 094431. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.094431>.

112. Switching phenomena in magnetic vortex dynamics / Y. B. Gaididei, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, F. G. Mertens // Low Temperature Physics. — 2008. — Vol. 34, no. 7. — P. 528–534. — URL: <http://link.aip.org/link/?LTP/34/528/1>.
113. Exchange-Biased Magnetic Vortices / A. Hoffmann, J. Sort, K. S. Buchanan, J. Nogues // IEEE Transactions on Magnetics. — 2008. — Vol. 44, no. 7. — P. 1968–1973.
114. Schuster, H. G. Deterministic Chaos. An Introduction / H. G. Schuster, W. Just. — Weinheim, Germany : Wiley-VCH, 2005.
115. Moon, F. C. Chaotic Vibrations / F. C. Moon. — Hoboken, New Jersey : Wiley-VCH, 2004. — P. 309.
116. Кузнецов, С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. Современная теория колебаний и волн. — М. : Физмат, 2006.
117. The Duffing Equation. Nonlinear Oscillators and their Behaviour / Ed. by I. Kovacic, M. J. Brennan. — Wiley, 2011.
118. Shutyi, A. Nonlinear dynamic magnetization regimes in (100) ferrite-garnet films / A. Shutyi, D. Sementsov // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2007. — Vol. 104. — P. 758–765. — 10.1134/S106377610705010X. URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S106377610705010X>.
119. Xi, H. Static, periodic, and chaotic magnetization behavior induced by spin-transfer torque in magnetic nanopillars / H. Xi, Y. Shi, K.-Z. Gao // Phys. Rev. B. — 2005. — Vol. 71, no. 14. — P. 144418. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v71/e144418>.

120. Spin-transfer torque and current-induced vortex superlattices in nanomagnets / O. M. Volkov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Phys. Rev. B. — 2011. — Aug. — Vol. 84, no. 5. — P. 052404. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.052404>.
121. Periodic magnetic structures generated by spin-polarized currents in nanostripes / O. M. Volkov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2013. — Vol. 103, no. 22. — P. 222401. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/apl/103/22/10.1063/1.4831748>.
122. Berkov, D. Transition from the macrospin to chaotic behavior by a spin-torque driven magnetization precession of a square nanoelement / D. Berkov, N. Gorn // Phys. Rev. B. — 2005. — Feb. — Vol. 71. — P. 052403. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.71.052403>.
123. Yang, Z. Chaotic Dynamics of Spin-Valve Oscillators / Z. Yang, S. Zhang, Y. C. Li // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Sep. — Vol. 99. — P. 134101. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.134101>.
124. Commensurability and chaos in magnetic vortex oscillations / S. Petit-Watelot, J.-V. Kim, A. Ruotolo [et al.] // Nat Phys. — 2012. — sep. — Vol. 8, no. 9. — P. 682–687. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2362>.
125. Magnetization Dynamics Under a Quasiperiodic Magnetic Field / D. Laroze, D. Becerra-Alonso, J. A. C. Gallas, H. Pleiner // IEEE Transactions on Magnetics. — 2012. — Nov. — Vol. 48, no. 11. — P. 3567–3570. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2012.2207378>.

126. From chaos to selective ordering of vortex cores in interacting mesomagnets / S. Jain, V. Novosad, F. Fradin [et al.] // Nat Commun.—2012.—dec.—Vol. 3.—P. 1330.—URL: <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms2331>.
127. Nanoscale switch for vortex polarization mediated by Bloch core formation in magnetic hybrid systems / P. Wohlhüter, M. T. Bryan, P. Warnicke [et al.] // Nat Comms.—2015.—Aug.—Vol. 6.—P. 7836.—URL: <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms8836>.
128. Kim, S.-K. Micromagnetic computer simulations of spin waves in nanometre-scale patterned magnetic elements / S.-K. Kim // Journal of Physics D: Applied Physics.—2010.—Vol. 43, no. 26.—P. 264004.—URL: <http://stacks.iop.org/0022-3727/43/i=26/a=264004>.
129. The Object Oriented MicroMagnetic Framework .—URL: <http://math.nist.gov/oommf/>. Developed by M. J. Donahue and D. Porter mainly, from NIST. We used the 3D version of the 1.2 α 5 release.
130. Antos, R. Magnetic Vortex Dynamics / R. Antos, Y. Otani, J. Shibata // J. Phys. Soc. Jpn.—2008.—Vol. 77.—P. 031004.—URL: <http://journals.jps.jp/doi/abs/10.1143/JPSJ.77.031004>.
131. Magnon modes and magnon-vortex scattering in two-dimensional easy-plane ferromagnets / B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F. G. Mertens, G. M. Wysin // Phys. Rev. B.—1998.—Vol. 58, no. 13.—P. 8464–8474.—URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v58/p8464>.
132. Chen, W.-K. The Electrical Engineering Handbook / W.-K. Chen ; Ed. by W.-K. Chen.—Elsevier Academic Press, 2004.—290 p.

133. Swiching of vortex polarization in 2D easy-plane magnets by magnetic fields / J. P. Zagorodny, Y. Gaididei, F. G. Mertens, A. R. Bishop // Eur. Phys. J. — 2003. — Vol. B 31. — P. 471–487. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2003-00057-y>.
134. NIST Handbook of Mathematical Functions / Ed. by F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark. — New York, NY : Cambridge University Press, 2010. — ISBN: 0521140633. — URL: <http://www.cambridge.org/us/academic/subjects/mathematics/abstract-analysis/nist-handbook-mathematical-functions>.
135. Kevorkian, J. Perturbation methods in applied mathematics / J. Kevorkian, J. Cole. Applied mathematical sciences. — New York, NY : Springer-Verlag, 1981. — ISBN: 9783540905073. — URL: <http://books.google.com.ua/books?id=pT3vAAAAIAAJ>.
136. Nayfeh, A. Problems in perturbation / A. Nayfeh. A Wiley Interscience publication. — Wiley, 1985. — ISBN: 9780471822929. — URL: <http://books.google.com.ua/books?id=3zbvAAAAMAAJ>.
137. Nayfeh, A. Perturbation Methods / A. Nayfeh. Physics textbook. — John Wiley & Sons, 2008. — ISBN: 9783527617616. — URL: <http://books.google.com.ua/books?id=eh6RmWZ51NIC>.
138. Wysin, G. M. Instability of in-plane vortices in two-dimensional easy-plane ferromagnets / G. M. Wysin // Phys. Rev. B. — 1994. — Apr. — Vol. 49, no. 13. — P. 8780–8789. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v49/p8780>.
139. Ковалев, А. С. Механизм переворота вихрей в магнитных нанодотах под действием циркулярного магнитного поля. II. Динамика спинового

- плакета с вихрем / А. С. Ковалев, . Е. Прилепский // ФНТ. — 2003. — Т. 29, № 12. — С. 71–83.
140. Vortex core scattering and pinning by impurities in nanomagnets / D. Toscano, S. A. Leonel, R. A. Dias [et al.] // J. Appl. Phys. — 2011. — Vol. 109, no. 7. — P. 076104. — URL: <http://link.aip.org/link/?JAP/109/076104/1>.
141. Dong, X. Deep sub-nanosecond reversal of vortex cores confined in a spin-wave potential well / X. Dong, Z. Wang, R. Wang // Appl. Phys. Lett. — 2014. — Mar. — Vol. 104, no. 11. — P. 112413. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4868725>.
142. Kravchuk, V. P. Equilibrium magnetisation structures in ferromagnetic nanorings / V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. B. Gaididei // J. Magn. Magn. Mater. — 2007. — Mar. — Vol. 310, no. 1. — P. 116–125. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2006.07.035>.
143. Microwave-induced dynamic switching of magnetic skyrmion cores in nanodots / B. Zhang, W. Wang, M. Beg [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2015. — Mar. — Vol. 106, no. 10. — P. 102401. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4914496>.
144. Arrott, A. Point singularities and magnetization reversal in ideally soft ferromagnetic cylinders / A. Arrott, B. Heinrich, A. Aharoni // Magnetics, IEEE Transactions on. — 1979. — Vol. 15. — P. 1228–1235. — URL: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?tp=&arnumber=1060342&isnumber=22837.
145. Higher order vortex gyrotropic modes in circular ferromagnetic nanodots / J. Ding, G. N. Kakazei, X. Liu [et al.] // Scientific Reports. — 2014. — Apr. — Vol. 4. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/srep04796>.

146. Feldtkeller, E. Mikromagnetisch stetige und unstetige Magnetisierungskonfigurationen / E. Feldtkeller // Zeitschrift für angewandte Physik. — 1965. — Bd. 19. — S. 530–536.
147. Döring, W. Point Singularities in Micromagnetism / W. Döring // J. Appl. Phys. — 1968. — Vol. 39, no. 2. — P. 1006–1007. — URL: <http://link.aip.org/link/?JAP/39/1006/1>.
148. Aharoni, A. Introduction to the theory of Ferromagnetism / A. Aharoni. — Oxford University Press, 1996. — 319 p.
149. Elías, R. Magnetization structure of a Bloch point singularity / R. Elías, A. Verga // The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems. — 2011. — P. 1–8. — 10.1140/epjb/e2011-20146-6. URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2011-20146-6>.
150. Andreas, C. Numerical micromagnetism of strong inhomogeneities / C. Andreas, S. Gliga, R. Hertel // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2014. — Aug. — Vol. 362. — P. 7–13. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmmm.2014.02.097>.
151. Galkina, E. G. Phenomenological theory of Bloch point relaxation / E. G. Galkina, B. A. Ivanov, V. A. Stephanovich // J. Magn. Magn. Mater. — 1993. — Jan. — Vol. 118, no. 3. — P. 373–378. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJJ-46FHH1R-CR/2/d01239b41a403665b912fdb1c3ec94b>.
152. Khodenkov, G. Exchange reduction of the magnetization modulus in the vicinity of a Bloch point / G. Khodenkov // Technical Physics. — 2010. — Vol. 55. — P. 738–740. — 10.1134/S1063784210050245. URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063784210050245>.

153. Key role of temperature in ferromagnetic Bloch point simulations / K. M. Lebecki, D. Hinzke, U. Nowak, O. Chubykalo-Fesenko // Phys. Rev. B. — 2012. — Sep. — Vol. 86. — P. 094409. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.094409>.
154. Reinhardt, J. Gittertheoretische behandlung von mikromagnetischen singularitseten / J. Reinhardt // Int. J. Magn. — 1973. — Vol. 5. — P. 263.
155. Gliga, S. Energy thresholds in the magnetic vortex core reversal / S. Gliga, Y. Liu, R. Hertel // Journal of Physics: Conference Series. — 2011. — Vol. 303, no. 1. — P. 012005. — URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/303/i=1/a=012005>.
156. Kim, S. K. Pinning of a Bloch point by an atomic lattice / S. K. Kim, O. Tchernyshyov // Physical Review B. — 2013. — Nov. — Vol. 88, no. 17. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.88.174402>.
157. Andreas, C. Multiscale and multimodel simulation of Bloch-point dynamics / C. Andreas, A. Kákay, R. Hertel // Phys. Rev. B. — 2014. — Apr. — Vol. 89. — P. 134403. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.134403>.
158. A Systematic Approach to Multiphysics Extensions of Finite-Element-Based Micromagnetic Simulations: Nmag / T. Fischbacher, M. Franchin, G. Bordignon, H. Fangohr // IEEE Trans. Magn. — 2007. — Jun. — Vol. 43, no. 6. — P. 2896–2898. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2007.893843>.
159. Andreas, C. Multiscale Multimodel Simulation of Micromagnetic Singularities : Ph. D. thesis / C. Andreas ; Forschungszentrum Jülich. — Forschungszentrum Jülich GmbH 2014. — URL: <http://juser.fz-juelich.de/record/156001/files/FZJ-2014-04916.pdf>.

160. Галкина, Е. Г. Феноменологическая теория релаксации блоховской точки / Е. Г. Галкина, Б. А. Иванов // ФТТ. — 1991. — Т. 33, № 4. — С. 1277–1281.
161. Куфаев, Ю. А. Колебания блоховской линии с блоховской точкой / Ю. А. Куфаев, Э. Б. Сонин // ФТТ. — 1988. — Т. 30, № 11. — С. 3272–3275.
162. Куфаев, Ю. А. Динамика точки Блоха — точечного солитона в ферромагнетике / Ю. А. Куфаев, Э. Б. Сонин // ЖЭТФ. — 1989. — Т. 95, № 4. — С. 1523–1529. — URL: <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/68/4/p879?a=list>.
163. Кабанов, Ю. П. Блоховские точки на осцилирующей Блоховской линии / Ю. П. Кабанов, Л. М. Дедух, В. И. Никитенко // Письма в ЖЭТФ. — 1989. — Т. 49, № 10. — С. 551–554. — URL: http://www.jetpleters.ac.ru/ps/1121/article_16982.shtml.
164. Горнаков, В. С. Подвижность Блоховской точки вдоль Блоховской линии / В. С. Горнаков, В. И. Никитенко, И. А. Прудников // Письма в ЖЭТ. — 1989. — Т. 50, № 11. — С. 479–482.
165. Куфаев, Ю. А. Влияние дальнодействующих полей рассеяния на динамику и взаимодействие точек Блоха / Ю. А. Куфаев, Э. Б. Сонин // ЖЭТ. — 1992. — Т. 101, № 5. — С. 1550. — URL: <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/68/4/p879?a=list>.
166. Thiaville, A. Domain-Wall Dynamics in Nanowires and Nanostrips / A. Thiaville, Y. Nakatani // Spin dynamics in confined magnetic structures III / Ed. by B. Hillebrands, A. Thiaville. — Berlin : Springer, 2006. — Vol. 101 of Topics in Applied Physics. — P. 161–206.

167. Head-to-head domain walls in one-dimensional nanostructures: An extended phase diagram ranging from strips to cylindrical wires / S. Jamet, N. Rougemaille, J. Toussaint, O. Fruchart // Magnetic nano- and microwires: design, synthesis, properties and applications / Ed. by M. Vázquez. — Cambridge, UK : Woodhead Publishing is an imprint of Elsevier, 2015. — P. 783–811.
168. Hertel, R. Exchange Explosions: Magnetization Dynamics during Vortex-Antivortex Annihilation / R. Hertel, C. M. Schneider // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97, no. 17. — P. 177202. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRL/v97/e177202>.
169. Bloch-point-mediated magnetic antivortex core reversal triggered by sudden excitation of a suprathreshold spin-polarized current / X. J. Xing, Y. P. Yu, S. X. Wu [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2008. — Vol. 93, no. 20. — P. 202507. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/93/202507/1>.
170. Hertel, R. Magnetic drops in a soft-magnetic cylinder / R. Hertel, J. Kirschner // J. Magn. Magn. Mater. — 2004. — jul. — Vol. 278, no. 3. — P. L291–L297. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJJ-4BYP1W4-4/2/f85731b704a46f19c401b90833e467b7>.
171. Thiaville, A. Controlled Injection of a Singular Point along a Linear Magnetic Structure / A. Thiaville, J. Miltat // EPL (Europhysics Letters). — 1994. — Vol. 26, no. 1. — P. 57–62. — URL: <http://stacks.iop.org/0295-5075/26/57>.
172. Porroati, F. Micromagnetic structure and vortex core reversal in arrays of iron nano-cylinders / F. Porroati, M. Huth // J. Magn. Magn. Mater. — 2005. — apr. — Vol. 290-291, no. Part

- 1.— P. 145–148.— URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TJJ-4DXT3YT-5/2/b071400d1def405a08ece5113cf1f28f>.
173. Niedoba, H. Magnetization reversal via bloch points nucleation in nanowires and dots: a micromagnetic study / H. Niedoba, M. Labrune // The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems. — 2005. — oct. — Vol. V47, no. 4. — P. 467–478. — URL: <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2005-00353-6>.
174. Галкина, Е. Г. Квантовое туннелирование в магнитном вихре двумерного легкоплоскостного магнетика / Е. Г. Галкина, Б. А. Иванов // Письма в ЖЭТФ. — 1995. — Т. 61, № 6. — С. 495–498. — URL: <http://www.jetpletters.ac.ru/ps/866/index.shtml>.
175. Deconfined Quantum Critical Points / T. Senthil, A. Vishwanath, L. Balents [et al.] // Science. — 2004. — Vol. 303, no. 5663. — P. 1490–1494. — <http://www.sciencemag.org/content/303/5663/1490.full.pdf>.
176. Manton, N. Topological solitons / N. Manton, P. Sutcliffe. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. — Cambridge : Cambridge University Press, 2004. — 493 p.
177. Kireev, V. E. Inhomogeneous states in a small magnetic disk with single-ion surface anisotropy / V. E. Kireev, B. A. Ivanov // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 68, no. 10. — P. 104428. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v68/e104428>.
178. A model for vortex formation in magnetic nanodots / S. A. Leonel, I. A. Marques, P. Z. Coura, B. V. Costa // J. Appl. Phys. — 2007. — Vol. 102, no. 10. — P. 104311. — URL: <http://link.aip.org/link/?JAP/102/104311/1>.

179. Desimone, A. Hysteresis and imperfection sensitivity in small ferromagnetic particles / A. Desimone // Meccanica. — 1995. — Vol. 30, no. 5. — P. 591–603. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01557087>.
180. Carbou, G. Thin layers in micromagnetism / G. Carbou // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS). — 2001. — Vol. 11. — P. 1529–1546. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218202501001458>.
181. A reduced theory for thin-film micromagnetics / A. Desimone, R. V. Kohn, S. Müller, F. Otto // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 2002. — Vol. 55. — P. 1408–1460. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3028>.
182. Moser, R. Ginzburg–Landau vortices for thin ferromagnetic films / R. Moser // Applied Mathematics Research eXpress. — 2003. — Vol. 2003, no. 1. — P. 1–32. — URL: <http://dx.doi.org/10.1155/S1687120003010104>.
183. Moser, R. Boundary vortices for thin ferromagnetic films / R. Moser // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 2004. — Vol. 174. — P. 267–300. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00205-004-0329-2>.
184. Kohn, R. Effective dynamics for ferromagnetic thin films: a rigorous justification / R. Kohn, V. Slastikov // Proc. R. Soc. A. — 2005. — Jan. — Vol. 461, no. 2053. — P. 143–154. — URL: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2004.1342>.
185. Kurzke, M. Boundary vortices in thin magnetic films / M. Kurzke // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. — 2006. — Vol. 26, no. 1. — P. 1–28. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00526-005-0331-z>.

186. Tailoring magnetic vortices in nanostructures / F. Garcia, H. Westfahl, J. Schoenmaker [et al.] // Applied Physics Letters. — 2010. — Vol. 97, no. 2. — P. 022501. — URL: <http://link.aip.org/link/?APL/97/022501/1>.
187. Properties of magnetic nanodots with perpendicular anisotropy / E. R. P. Novais, P. Landeros, A. G. S. Barbosa [et al.] // Journal of Applied Physics. — 2011. — Vol. 110, no. 5. — P. -. — URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/110/5/10.1063/1.3631081>.
188. Usov, N. A. Theory of magnetization curling in a fine cylindrical particle / N. A. Usov, S. E. Peschany // Electromagnetic, magneto-static, and exchange-interaction vortices in confined magnetic structures / Ed. by E. Kamenetskii. — Kerala, India : Research Signpost, 2008. — P. 133–157. — URL: <http://www.ressign.com/UserBookDetail.aspx?bkid=830&catid=188>.
189. Weisstein, E. W. The CRC Concise Encyclopedia of Mathematics / E. W. Weisstein. — CRC Press, 1998. — ISBN: 0849396409. — URL: <http://www.amazon.com/The-CRC-Concise-Encyclopedia-Mathematics/dp/0849396409%3FSubscriptionId%3D0JYN1NVW651KCA56C102%26tag%3Dtechkie-20%26linkCode%3Dxm2%26camp%3D2025%26creative%3D165953%26creativeASIN%3D0849396409>.
190. Kachkachi, H. Hysteretic properties of a magnetic particle with strong surface anisotropy / H. Kachkachi, M. Dimian // Phys. Rev. B. — 2002. — Nov. — Vol. 66. — P. 174419. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.66.174419>.
191. Kachkachi, H. Surface-induced cubic anisotropy in nanomagnets /

- H. Kachkachi, E. Bonet // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 73, no. 22. — P. 224402. — URL: <http://link.aps.org/abstract/PRB/v73/e224402>.
192. Effective anisotropies and energy barriers of magnetic nanoparticles with Néel surface anisotropy / R. Yanes, O. Chubykalo-Fesenko, H. Kachkachi [et al.] // Phys. Rev. B. — 2007. — Aug. — Vol. 76. — P. 064416. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.76.064416>.
193. Ferromagnetic nanoparticles with strong surface anisotropy: Spin structures and magnetization processes / L. Berger, Y. Labaye, M. Tamine, J. M. D. Coey // Phys. Rev. B. — 2008. — Mar. — Vol. 77. — P. 104431. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.104431>.
194. Nanoscale Magnetism Control via Surface and Exchange Anisotropy for Optimized Ferrimagnetic Hysteresis / S.-h. Noh, W. Na, J.-t. Jang [et al.] // Nano Lett. — 2012. — Jul. — Vol. 12, no. 7. — P. 3716–3721. — URL: <http://dx.doi.org/10.1021/nl301499u>.
195. Noske, M. Unidirectional Vortex Core Reversal by Two Orthogonal Monopolar Field Pulses: The Essential Role of Three-dimensional Magnetization Dynamics . — arXiv: 1511.03486. — 2015. — URL: <http://arxiv.org/abs/1511.03486>.
196. High-speed strained-single-crystal-silicon thin-film transistors on flexible polymers / H.-C. Yuan, Z. Ma, M. M. Roberts [et al.] // Journal of Applied Physics. — 2006. — Vol. 100, no. 1. — P. 013708. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2214301>.
197. Stretchable Magnetoelectronics / M. Melzer, D. Makarov, A. Calvimontes [et al.] // Nano Letters. — 2011. — Vol. 11, no. 6. — P. 2522–2526. — <http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/nl201108b>.

198. A highly flexible and compact magnetoresistive analytic device / G. Lin, D. Makarov, M. Melzer [et al.] // Lab Chip. — 2014. — Vol. 14, no. 20. — P. 4050–4058. — URL: <http://dx.doi.org/10.1039/c4lc00751d>.
199. Stretchable and Foldable Silicon Integrated Circuits / D.-H. Kim, J.-H. Ahn, W. M. Choi [et al.] // Science. — 2008. — Apr. — Vol. 320, no. 5875. — P. 507–511. — URL: <http://dx.doi.org/10.1126/science.1154367>.
200. Yoneya, M. Domain-wall structure of a classical Heisenberg ferromagnet on a Möbius strip / M. Yoneya, K. Kuboki, M. Hayashi // Phys. Rev. B. — 2008. — Aug. — Vol. 78, no. 6. — P. 064419. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.78.064419>.
201. Bogdanov, A. Chiral Symmetry Breaking in Magnetic Thin Films and Multilayers / A. Bogdanov, U. Rößler // Physical Review Letters. — 2001. — Jun. — Vol. 87, no. 3. — P. 037203. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.037203>.
202. Rößler, U. K. Spontaneous skyrmion ground states in magnetic metals / U. K. Rößler, A. N. Bogdanov, C. Pfleiderer // Nature. — 2006. — aug. — Vol. 442, no. 7104. — P. 797–801. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature05056>.
203. Chiral magnetic order at surfaces driven by inversion asymmetry / M. Bode, M. Heide, K. von Bergmann [et al.] // Nature. — 2007. — may. — Vol. 447, no. 7141. — P. 190–193. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature05802>.
204. Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet / S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz [et al.] // Science. — 2009. — Vol. 323, no. 5916. — P. 915–919. — URL: <http://www.sciencemag.org/content/323/5916/915.abstract>.

205. Controllable vortex chirality switching on spherical shells / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Journal of Applied Physics. — 2015. — Feb. — Vol. 117, no. 8. — P. 083908. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4913486>.
206. Curvature-induced domain wall pinning / K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei // Phys. Rev. B. — 2015. — Sep. — Vol. 92. — P. 104412. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.92.104412>.
207. MAGPAR finite element micromagnetics package . — Developed by Werner Scholz. We used the 0.9 release. URL: <http://www.magpar.net>.
208. Single-Domain Circular Nanomagnets / R. P. Cowburn, D. K. Koltsov, A. O. Adeyeye [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Aug. — Vol. 83, no. 5. — P. 1042–1045. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.1042>.
209. Vortex formation in narrow ferromagnetic rings / M. Kläui, C. A. F. Vaz, L. Lopez-Diaz, J. A. C. Bland // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2003. — Vol. 15, no. 21. — P. R985–R1024. — URL: <http://stacks.iop.org/0953-8984/15/R985>.
210. Spin-orbit torque magnetization switching controlled by geometry / C. K. Safeer, E. Jué, A. Lopez [et al.] // Nature Nanotechnology. — 2015. — Nov. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nnano.2015.252>.