ポテンシャル逆問題の新たな設定とバブリング法による数値計算

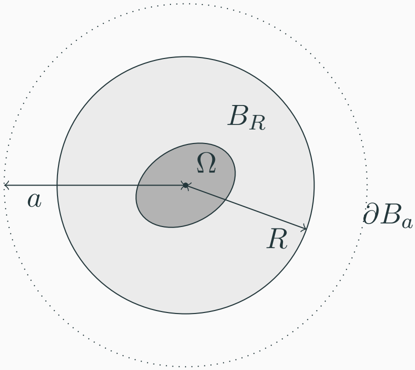
守田龍平　今川真城　磯祐介

京都大学大学院情報学研究科先端数理科学専攻

研究の概要

ポテンシャルは重力に代わる観測量になるのでは？

観測面 ∂B_a 上で観測するとき，Ω の形状回復への影響を調べる．



二層モデルの推定

二層モデル

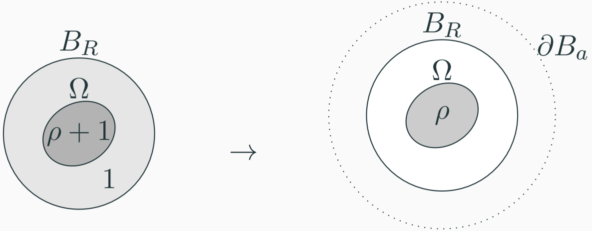
領域 B_R 上の二層構造物体のポテンシャル U は次の通り．

$$U(x) = \underbrace{\int_{B_R} E(x-y)dy}_{U^{B_R}} + \rho \underbrace{\int_{\Omega} E(x-y)dy}_{U^{\Omega}}$$

但し，E は Laplace 方程式の基本解である．

ポテンシャル ρU^{Ω} は ∂B_a 上で計算可能である．

$$\rho U^{\Omega} = U(\text{観測値}) - U^{B_R}(\text{既知}) \quad \text{on} \quad \partial B_a.$$

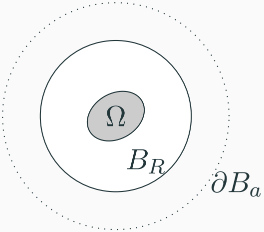


二層構造をもつ物体

埋蔵物体の影響を取り出す

測地学のポテンシャル逆問題 新たな設定

観測面 ∂B_a で観測し，領域 Ω の形状を回復する．



従来設定と新規設定を比較する．

- 重力観測（従来）

$$\rho \nabla U^{\Omega} = \overrightarrow{g} \quad \text{on} \quad \partial B_a$$

- ポテンシャル観測（新規）

$$\rho U^{\Omega} = p \quad \text{on} \quad \partial B_a$$

数値計算概要

実際は有限個の地点 $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$ で観測する.

- 重力観測

$$\rho \nabla U^\Omega = \overrightarrow{g} \quad \text{on} \quad \{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$$

- ポテンシャル観測

$$\rho U^\Omega = p \quad \text{on} \quad \{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$$

領域回復のアルゴリズムは次の 2 つのアルゴリズムから成る.

1. 質点系による近似 $\rightarrow$ 最適化法
2. 質量の均一化 $\rightarrow$ バブリング法

数値計算概要

実際は有限個の地点 $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$ で観測する.

- 重力観測

$$\rho \nabla U^{\Omega} = \overrightarrow{g} \quad \text{on} \quad \{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$$

- ポテンシャル観測

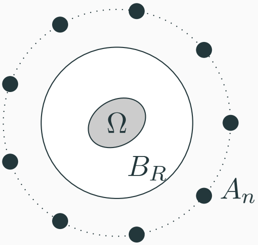
$$\rho U^{\Omega} = p \quad \text{on} \quad \{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$$

領域回復のアルゴリズムは次の 2 つのアルゴリズムから成る.

1. 質点系による近似 → 最適化法
2. 質量の均一化 → バブリング法

質点系による近似 重力観測

観測点を $\{A_n\}_{n=1}^{N} \subset \partial B_a$ とする．



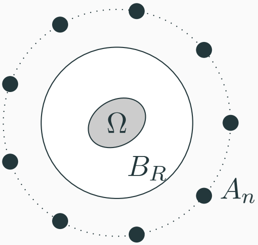
質点の系を $(X, M) = (X_1, \dots X_K, M_1, \dots M_K)$ で表す．コスト関数 J_G を以下のように定め，最小化する．

$$J_G(X, M) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \rho \nabla U^{\Omega}(A_n) - G_K(A_n; X, M) \right|^2,$$

$$G_K(A_n; X, M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{K} \frac{M_k (A_n - X_k)}{|A_n - X_k|^3}$$

質点系による近似 ポテンシャル観測

観測点を $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$ とする．



質点の系を $(X, M) = (X_1, \ldots X_K, M_1, \ldots M_K)$ で表す．コスト関数 J_P を以下のように定め，最小化する．

$$J_P(X, M) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\rho U^{\Omega}(A_n) - P_K(A_n; X, M)\right|^2,$$

$$P_K(A_n; X, M) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{K}\frac{M_k}{|A_n - X_k|}$$

実際は有限個の地点 $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$ で観測する.

- 重力観測

$$\rho \nabla U^\Omega = \overrightarrow{g} \quad \text{on} \quad \{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$$

- ポテンシャル観測

$$\rho U^\Omega = p \quad \text{on} \quad \{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$$

領域回復のアルゴリズムは次の 2 つのアルゴリズムから成る.

1. 質点系による近似 → 最適化法
2. 質量の均一化 → バブリング法

バブリング法 (Partial Mass Scattering)

質点の系を密度 ρ の物体に均す.

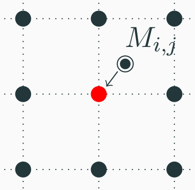
領域 B_R を幅 h のメッシュで切り，質点 (X_k, M_k) を最近傍格子点 $\widetilde{X}_k = (ih, jh)$ に移動する．$\widetilde{M}_{i,j} = M_k$ とする.

$\Delta\widetilde{M}_{i,j} = \widetilde{M}_{i,j} - \rho h^2 > \varepsilon$ のとき,

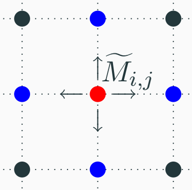
$$\widetilde{M}^{(1)}_{i,j} = \rho h^2 - \varepsilon,$$

$$\widetilde{M}^{(1)}_{i\pm1,j} = \widetilde{M}_{i\pm1,j} + \frac{1}{4}(\Delta\widetilde{M}_{i,j} + \varepsilon), \quad \widetilde{M}^{(1)}_{i,j\pm1} = \widetilde{M}_{i,j\pm1} + \frac{1}{4}(\Delta\widetilde{M}_{i,j} + \varepsilon)$$

として更新する.

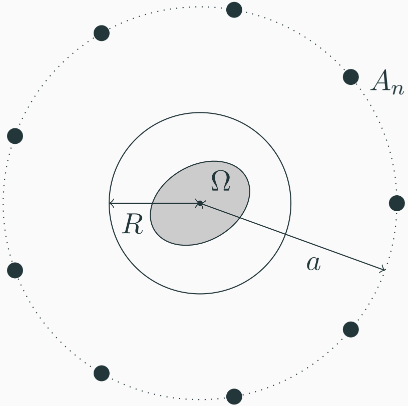


格子点に移動



質量の拡散

観測半径 a を変えたとき，最適化法＋バブリング法による領域 Ω の形状回復への影響を調査する．

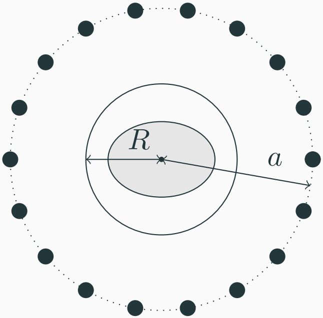


A_n で観測し，$\Omega \subset B_R$ を回復する

数値計算例：楕円形のコアの回復

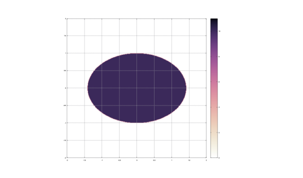
$R = 2$ とする．長半径 $\sqrt{2}$, 短半径 1, 密度 $\rho = 10$ の楕円の回復を試みる．観測器の分解能は 10^{-4} とする．

最適化には Levenberg-Marquardt 法を用いた．

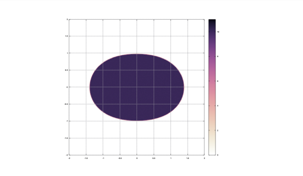


数値計算例：楕円形のコアの回復 重力観測

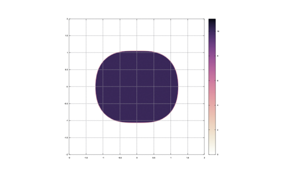
質点数 $K = 100$, 観測点数 $N = 300$ とする．a は観測半径である．



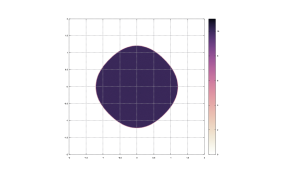
厳密解



$a = 10$



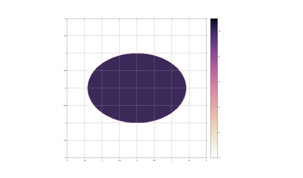
$a = 30$



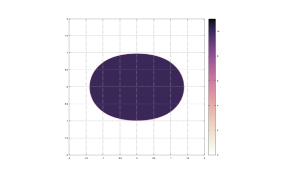
$a = 100$

数値計算例：楕円形のコアの回復 ポテンシャル観測

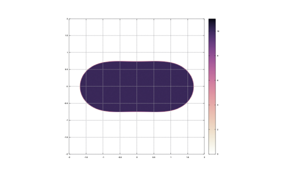
質点数 $K = 100$, 観測点数 $N = 300$ とする．a は観測半径である．



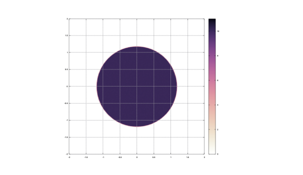
厳密解



$a = 10$



$a = 30$

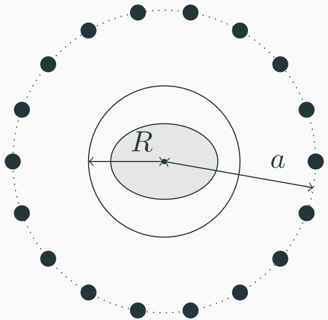


$a = 100$

結論

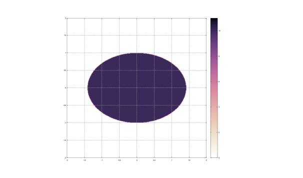
ポテンシャル逆問題において，境界でポテンシャルを既知とする問題設定を行い，重力を既知とする場合と比較した．

- 楕円形のコアの回復
  重力観測と比べてポテンシャル観測の方がよりよい回復が望める．

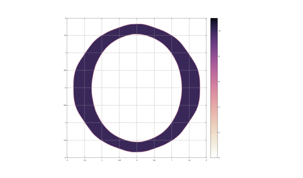


付録：初期値依存

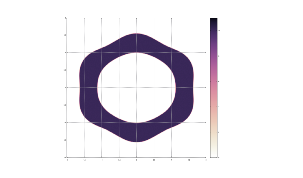
質点数 $K = 100$, 観測点数 $N = 300$ とする．a は観測半径である．



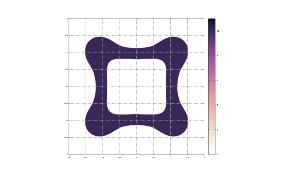
厳密解



$a = 4$

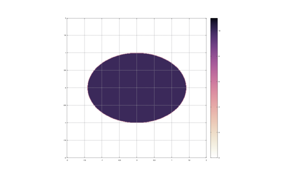


$a = 10$

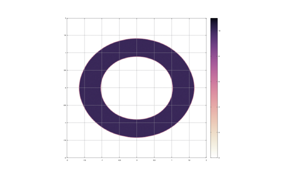


$a = 30$

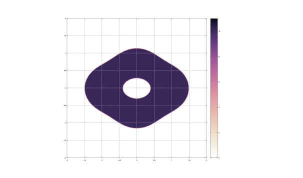
質点数 $K = 100$, 観測点数 $N = 300$ とする．a は観測半径である．



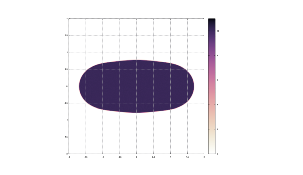
厳密解



$a = 4$



$a = 10$



$a = 30$