ポテンシャル逆問題の新たな設定とバブリング法による数値計算

守田龍平　今川真城　磯祐介

京都大学大学院情報学研究科先端数理科学専攻

研究の概要

ポテンシャルは観測量として有効では？

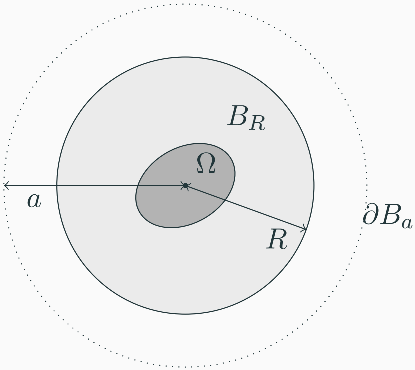


Figure 1: 惑星の二層モデルの人工衛星による推定

ポテンシャルの定義と性質

領域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上の密度関数 $\mu(x)$ に対し，ポテンシャルを定義する．

$$U^\mu(x) := \int_D E(x-y)\mu(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

但し，E は Laplace 方程式の基本解であり，

$$E(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$$

である．

$\mu \in L_c^\infty$ のとき，ポテンシャル U^μ には次の性質がある．

- $x \in \mathbb{R}^3$ で連続
- （超関数の意味で）$\overline{D}^c$ で調和

二層モデル

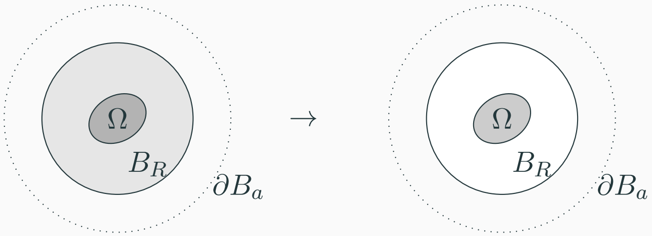
二層モデルを考える．

領域 $\Omega \subset B_R$ とする．密度関数が $\mu_e = \mathbb{1}_{B_R} + \rho \mathbb{1}_\Omega$ とすると，
∂B_a 上で観測するポテンシャル U^{μ_e} は次の通り．

$$U^{\mu_e}(x) = U^{\mathbb{1}_{B_R}}(x) + U^{\rho \mathbb{1}_\Omega}(x), \quad x \in \partial B_a.$$

これより，Ω のポテンシャルを ∂B_a で観測することが可能である．

$$U^{\rho \mathbb{1}_\Omega}(x) = U^{\mu_e}(x) - U^{\mathbb{1}_{B_R}}(x), \quad x \in \partial B_a.$$



ポテンシャル逆問題

（測地学における）ポテンシャル逆問題[1] では，観測面 ∂B_a 上で重力 g を観測し，物体の形状 Ω を回復する．つまり，境界条件

$$\nabla U^{\rho \mathbb{1}_\Omega} = \overrightarrow{g} \quad \text{on} \quad \partial B_a$$

をみたす Ω を求める．

新たな設定

ポテンシャルの減衰は重力に比べて弱いので，

$$U^{\rho \mathbb{1}_\Omega} = p \quad \text{on} \quad \partial B_a$$

を境界条件とする．

[1] G.Anger, *Inverse Problems in Differential Equations*, Plenum Press, 1990.

離散化した境界条件

先ほどの問題設定における境界条件は

- 重力観測

$$\nabla U^{\rho \mathbb{1}_\Omega} = \overrightarrow{g} \quad \text{on} \quad \partial B_a$$

- ポテンシャル観測

$$U^{\rho \mathbb{1}_\Omega} = p \quad \text{on} \quad \partial B_a$$

だった．しかし，実際には観測できるのは観測面 ∂B_a 上の有限個の地点 $\{A_n\}_{n=1}^N$ なので，各 n に対し

- 重力観測

$$\nabla U^{\rho \mathbb{1}_\Omega} = \overrightarrow{g_n} \quad \text{on} \quad A_n$$

- ポテンシャル観測

$$U^{\rho \mathbb{1}_\Omega} = p_n \quad \text{on} \quad A_n$$

という離散化した境界条件を考えることにする．

数値計算概要 (1/2)

（離散版）境界条件は次の通り．

- 重力観測

$$\nabla U^{\rho \mathbb{1}_\Omega} = \overrightarrow{g_n} \quad \text{on} \quad A_n$$

- ポテンシャル観測

$$U^{\rho \mathbb{1}_\Omega} = p_n \quad \text{on} \quad A_n$$

領域回復のアルゴリズムは次の 2 つのアルゴリズムから成る．数値計算は主として Zidarov [2] に倣う．

1. 観測点上の重力またはポテンシャルを有限個の質点で近似
2. バブリング法（質量を均す）

---

[2] D.Zidarov, *Inverse Gravimetric Problem in Geoprospecting and Geodesy*, Elsevier, 1990.

数値計算概要 (2/2)

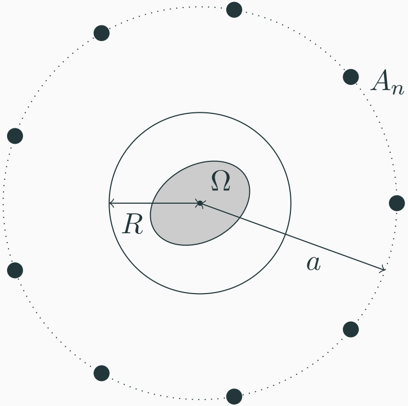


Figure 2: ポテンシャル逆問題の数値計算概要

観測した重力を有限個の質点で近似する

観測点を $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$ とする．

質点の系を $(X, M) = (X_1, \dots X_K, \dots, M_1, \dots M_K)$ で表す．コスト関数 J_G を

$$J_G(X, M) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \nabla U^{\rho \mathbb{1}_\Omega}(A_n) - G_K(A_n; X, M) \right|^2,$$

$$G_K(A_n; X, M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{K} \frac{M_k(A_n - X_k)}{|A_n - X_k|^3}$$

として定め，J_G を（局所）最小化する．

観測したポテンシャルを有限個の質点で近似する

観測点を $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \partial B_a$ とする．

質点の系を $(X, M) = (X_1, \dots X_K, \dots, M_1, \dots M_K)$ で表す．コスト関数 J_P を

$$J_P(X, M) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (U^{\rho \mathbb{1}_\Omega}(A_n) - P_K(A_n; X, M))^2,$$

$$P_K(A_n; X, M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{K} \frac{M_k}{|A_n - X_k|}$$

として定め，J_P を（局所）最小化する．

数値計算 最適化アルゴリズムの設定

観測面 ∂B_a 上等間隔に N 個の観測地点 $\{A_n\}_{n=1}^N$ をとる.

初期値とする質点は ∂B_a 上等間隔に K 個の初期地点 $\{X_k^{(0)}\}_{k=1}^K$ とし，各質点の質量は $M_k^{(0)} = \rho\pi R^2/K$ とする.

Remark
人工衛星による重力の分解能は高々 10^{-5}m/s^2 であり，[3] 原子時計によるポテンシャル観測の分解能は高々 10^{-4}m^2/s^2 である．[4]

---

[3]宮原伐折羅,『国土地理院の重力観測の展望-測定技術と重力基準の将来像』,国土地理院時報，2018, No. 131, 95-108.
[4]野崎京三,『原子時計をセンサーとした重力ポテンシャル計の可能性』，応用地質技術年報，2011, No. 30, 65-71.

観測半径 a を変えたとき，最適化法＋バブリング法による領域 Ω の形状回復への影響を調査する．

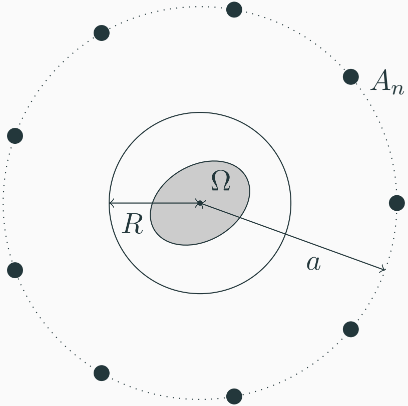
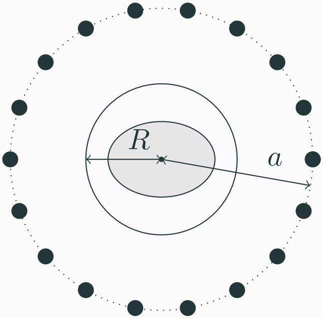


Figure 3: ポテンシャル逆問題の数値計算概要

数値計算例：楕円形のコアの回復

惑星の半径 $R = 2$ とする．長半径 $\sqrt{2}$, 短半径 1, 密度 $\rho = 10$ の楕円の回復を試みる．最適化には Levenberg-Marquardt 法を用いた．



数値計算例：楕円形のコアの回復 重力観測

質点の数 $K = 30$, 観測点数 $N = 90$ とする． a は観測半径である．

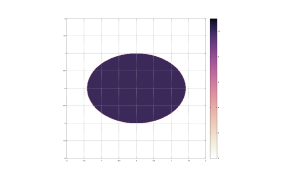


Figure 4: 厳密解

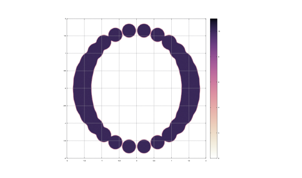


Figure 5: $a = 4$

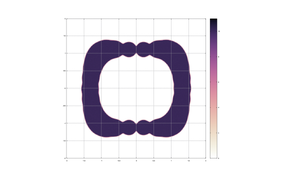


Figure 6: $a = 10$

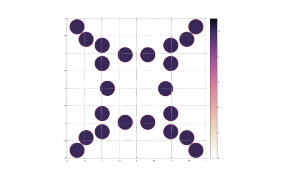


Figure 7: $a = 30$

数値計算例：楕円形のコアの回復 ポテンシャル観測

質点の数 $K = 30$, 観測点数 $N = 90$ とする．a は観測半径である．

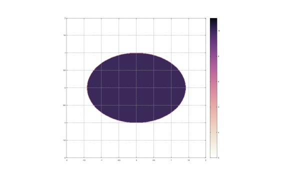


Figure 6: 厳密解

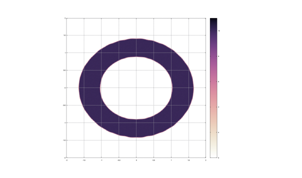


Figure 10: $a = 4$

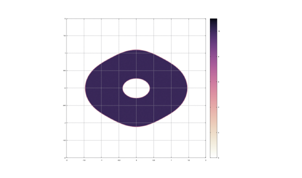


Figure 11: $a = 10$

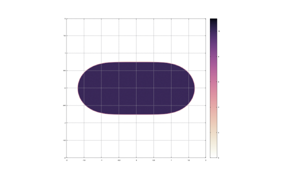


Figure 12: $a = 30$

結論

ポテンシャル逆問題において，境界でポテンシャルを既知とする問題設定を行い，重力を既知とする場合と比較して数値計算を行った.

- 楕円形のコアの回復
  重力観測と比べてポテンシャル観測の方がよりよい回復が望める.

参考文献

- G.Anger, *Inverse Problems in Differential Equations*, Plenum Press, 1990.
- R.Kress, *Numerical Analysis*, Springer, 1998.
- 野崎京三,『原子時計をセンサーとした重力ポテンシャル計の可能性』, 応用地質技術年報, 30 号 (2011), 65-71.
- 佐々木晶,『惑星内部構造』, 地震, 61 巻特集号 (2009), 285-296.
- L.Zalcman, Some Inverse Problems of Potential Theory, *Contemporary Mathematics*, Vol.63(1987), 337-339.
- D.Zidarov, *Inverse Gravimetric Problem in Geoprospecting and Geodesy*, Elsevier, 1990.