رياضيات (ريض 101)

مقدمة

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته .

الحمد لله رب العالمين تم الانتهاء من عمل مذكرة الرياضيات (رياض 101)

وهي تشمل كل من الأبواب (المجموعات ، العمليات الحسابية ، كثيرات الحدود ، المصفوفات ، المعادلات ، الهندسة المستوية و الفراغية) وتم الاستفادة والنسخ من المذكرة الصادرة من إدارة المناهج

وتم وضع فيها الكثير من الأمثلة والتمارين حيث يتم الاستفادة والمحاولة وكثرة التجربة .

الوحدة الأولى

المجموعات

المجموعات

تعريف:

المجموعة هي أي تجمع من الأشياء الحسية أو المعنوية المستقلة التي يمكن تمييزها عن غيرها من الأشياء بشكل دقيق وقاطع لا يختلف فيه ، وكل عنصر منها يهتبر كائن مستقل بذاته في المجموعة .

مثلاً لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:

١. مجموعة أحرف اللغة العربية .
٢. مجموعة الحدائق الجميلة في المملكة .

نعتبر ١. مجموعة لأن عناصرها معروفة ومحددة . أما بالنسبة للمجموعة ٢. فلا نعتبرها مجموعة رياضية لأنها غير معرفة بشكل محدد ودقيق لأن الجمال نسبي وليس دقيق ويتفاوت من حديقة الى حديقة أخرى .

رمز المجموعة وعناصرها:

نرمز للمجموعات (تسميتها) عادة بالأحرف اللاتينية الكبيرة مثل A,B,C,.......,Y,Z والاشياء التي تتألف منها المجموعات تسمى عناصر ويرمز للعناصر بالأحرف الصغيره مثل a,b,c,....,y,z

طرق كتابة المجموعة:

يتم كتابة المجموعة بين قوسين بهذا الشكل { } وعناصر المجموعة تكتب داخل القوسين ، ومثال على ذلك :

$$A = \{2,a,3,5,7,b,s,m\}$$

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين:

طريقة السرد (الحصر) :

مثل مجموعة الحروف المكونة لكلمة red هي : $A = \{r,e,d\}$

طريقة الوصف :

ويتم فيها ذكر صفة أو خاصية تميز عناصر

$B = \{ x:$ الخاصية أو الصفة $\}$

مثلاً مجموعة أيام الأسبوع

$B = \{ x:x$ يوم من أيام الأسبوع $\}$

العلاقة بين العنصر والمجموعة:

تكون العلاقة بين العنصر والمجموعة اما ينتمي بالرمز $\in$ أو لا ينتمي بالرمز $\notin$

مثلاً المجموعة $A = \{2,4,7,a,c\}$

العنصر 2 هو أحد عناصر المجموعة A يقال 2 ينتمي إلى المجموعة A ونرمز له بالرمز

$(2 \in A)$

العنصر 8 ليس أحد عناصر المجموعة A يقال 8 لا ينتمي إلى المجموعة A ونرمز له بالرمز

$(8 \notin A)$

المجموعة الجزئية:

نقول ان A هي مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر المجموعة A موجودة في المجموعة B ونرمز $A \subseteq B$ أي انها علاقة بين مجموعة ومجموعة أخرى ، ويمكن كتابتها رياضيا كالتالي :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

إذا كانت $A \subseteq B$ و $A \neq B$ فنقول ان A مجموعة جزئية فعلية من B ونكتب $A \subset B$ ، أما اذا كانت A ليس مجموعة جزئية فعلية من B فتكتب $A \not\subset B$

مثلاً اذا كانت لدينا المجموعتين $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$

وبالتالي $A \subseteq B$ (A مجموعة جزئية من B) لأن جميع عناصر المجموعة A موجودة في B

ولكن $B \not\subset A$ (B ليست مجموعة جزئية من A) ، لأنه يوجد عنصر واحد على الأقل ليس موجود في المجموعة A .

مثال 1 : اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2\}$ اكتب العبارات التالية $\in, \notin, \subseteq, \not\subset$ في الفراغ المناسب :

a) 2........... A , b) 1...........B
c) 6........... B , d) 8........... A
e) {1,2,3}....... A , f) {1} .... B
g) {8,9}........ B , h) {6,7}........ A

الحل:

a) $2 \in A$, b) $1 \in B$

c) $6 \notin B$, d) $8 \notin A$

e) $\{1,2,3\} \subseteq A$, f) $\{1\} \subseteq B$

g) $\{8,9\} \not\subset B$, h) $\{6,7\} \not\subset A$

تمرين1: اذا كانت $A = \{a, b, c, 4, d\}$, $B = \{a, b\}$ اكتب العبارات التالية $\in, \notin, \subseteq, \not\subset$ في الفراغ المناسب

a) a.......... A , b) b...........B

c) c ....B , d) e ....A

e) $\{a, b\}$.......A , f) $\{b\}$ ....B

g) $\{c, d\}$.........B , h) $\{e, f\}$..........A

تساوي مجموعتين:

يقال للمجموعتين A و B متساويتين ونكتب $A = B$ اذا كانت كل منهما مجموعة جزئية من الأخرى ($A \subseteq B$ و $B \subseteq A$) أي ان:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \,,\ B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall\, x \epsilon A \Rightarrow x \epsilon B \,,\ \forall\, x \epsilon B \Rightarrow x \epsilon A)$$

مثل إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{2,3,1\}$ فان $A = B$ لأن $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

أي أن عناصر المجموعة A وعناصر المجموعة B لهما العناصر نفسها , وترتيب العناصر في المجموعة غير مهم.

تمرين2: اذا كانت $A = B$ حيث ان $A = \{2,5,6,9\}$ و $B = \{5, x, 2,9\}$ فان قيمة x

$a)$ 6 $b)$ 5 $c)$ 9 $d)$ 2

أنواع المجموعات:

١. المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر وُيُرمز لها بالرمز Ø أو { }

مثل مجموعة الاعداد الزوجية بين العددين 2.5 و 3.5

٢. مجموعة وحيدة العنصر: هي مجموعة مكونة من عنصر وحيد.

مثلاً مجموعة الاعداد الزوجية التي هي اكبر من العدد1 واقل من العدد 3

٣. المجموعة المنتهية:ـ وهي المجموعة التي تحتوي عدد محدود من العناصر.
مثل أيام الأسبوع

٤. المجموعة اللانهائية (الغير منتهية) : وهي المجموعة التي تحتوي عدد غير محدود من العناصر

مثلاً مجموعة الأعداد الطبيعة الزوجية

٥. المجموعة الشاملة : هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر تحت الدراسة ويرمز لها U .

خصائص المجموعة الجزئية:

$1)\ \emptyset \subseteq A \subseteq U \quad 2)\ A \subseteq A \quad 3)\ A \subseteq B$ و $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

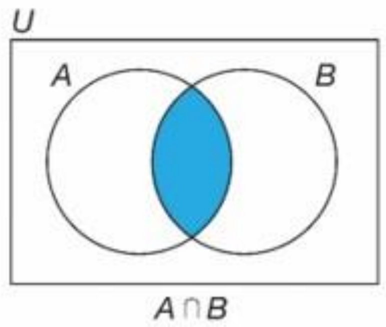
العمليات على المجموعات:

1- تقاطع مجموعتين:

تقاطع المجموعتين A و B هي مجموعة جميع العناصر المشتركة بين A و B وتكتب كالتالي: $A \cap B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A \cap B = \{x: x \in A\ , x \in B\}$$

ويمكن تمثيل ذلك بشكل فن حيث U المجموعة الشاملة بالمستطيل والمجموعتين A و B بدوائر داخل المستطيل ويكون تقاطعهما المنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:



(شكل 1 – 1)

مثال2: اذا كانت $B = \{2,4,3\}$ و $A = \{1,3,4,5\}$ اوجد $A \cap B$.

الحل:

$$A \cap B = \{3,4\}$$

مثال3: اذا كانت $D = \{50,100\}$ و $C = \{10,30, m, k\}$ اوجد $C \cap D$.

الحل:

$$C \cap D = \phi$$

خصائص التقاطع:

1) $A \cap A = A$

2) $A \cap U = A$

3) $A \cap \phi = \phi$

4) $A \cap B = B \cap \mathrm{A}$

5) $(A \cap B) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq B$

6) $(A \cap B) \cap \mathrm{C} = A \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$

تمرين3: اذا كانت $A = \{1,3,5, a\}$ و $B = \{1,20, a, 5,8\}$ فان $A \cap B$.

$a)$ $\{1,5, a\}$ $b)$ $\{1, a\}$ $c)\{20,5, a\}$ $d)$ ϕ

تمرين4: اذا كانت $D = \{10,20,50\}$ و $C = \{30,60,90\}$ فان $C \cap D$.

$a)$ $\{30,60,90\}$ $b)$ $\{20,50\}$ $c)\{20,50,90\}$ $d)$ ϕ

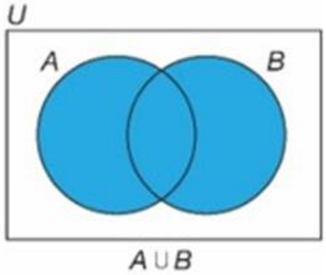
2- اتحاد مجوعتين:

اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة جميع عناصر المجموعتين A و B بدون تكرار العنصر ويرمز لهما بالرمز $A \cup B$ ونعرفها رياضيا كما يلي:

$$A \cup B = \{x: x \in A \quad \text{أو} \quad x \in B\}$$

ويمكن تمثيل الاتحاد في شكل فن بالمنطقة المظللة كالشكل التالي :

(شكل 1 – 2)



خصائص الاتحاد:

1) $A \cup A = A$ 2) $A \cup U = U$

3) $A \cup \phi = A$ 4) $A \cup B = B \cup A$

5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 6) $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$

مثال4: اذا كانت $A = \{2,4,3\}$ و $B = \{1,3,4,5\}$ اوجد $A \cup B$.

الحل: $A \cup B = \{1,3,4,5,2\}$

مثال5: اذا كانت $D = \{, 50,100\}$ و $C = \{10,30, m, k\}$ اوجد $C \cup D$
.

الحل: $C \cup D = \{10,30, m, k, 50,100\}$

تمرين5: اذا كانت $A = \{1,5, a\}$ و $B = \{1,20, a, 5,8\}$ فان $A \cup B$
يساوي:

$a)$ $\{1,5, a, 20,8\}$ $b)$ $\{1,5, a\}$ $c)$$\{8,20\}$ $d)$ ϕ

تمرين6: اذا كانت $D = \{10,20,50\}$ و $C = \{30,60,90\}$ فان $C \cup D$
يساوي:

$a)$ $\{30,60,90,10,20,50\}$ $b)$ $\{10,20,50\}$ $c)$$\{30,60,90\}$ $d)$ ϕ

العلاقة بين الاتحاد والتقاطع:

اذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات فان:

أي ان الاتحاد توزيع على التقاطع

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$$

أي ان التقاطع توزيع على الاتحاد

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$$

3-الفرق بين مجموعتين :

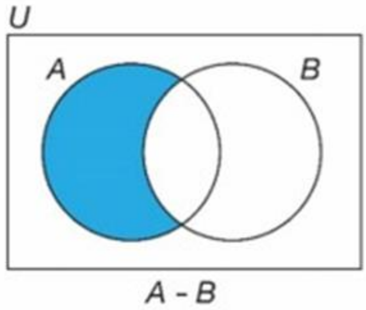
نعرف حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A هي مجموعة جميع العناصر الموجودة في A وليست في B ويرمز لها بالرمز $A - B$ ونكتب رياضيا:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x : x \in B \text{ و } x \notin A\}$$

ويمكن تمثيل الفرق $A - B$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:

(شكل 1 – 3)



<u>خصائص الفرق:</u>

1) $A - A = \phi$

2) $A - U = \phi$

3) $A - \phi = A$

4) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

5) $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

6) $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subseteq B$

مثال6: اذا كانت $A = \{2,4,3,5\}$ و $B = \{1,3, a, 5, b\}$ اوجد A - B و $B - A$

الحل : $B - A = \{1,a,b\}$ $A - B = \{2,4\}$

تمرين 7: اذا كانت $D = \{10,20,50,100\}$ و $C = \{10,30,40,50\}$ فان $C - D$

$a)$ {30,40} $b)$ {10,20,50} $c)${30,60,90} $d)$ ϕ

تمرين8: اذا كانت $D = \{10,20,50,100\}$ و $C = \{10,30,40,50\}$ فان $D - C$

$a)$ {30,40} $b)$ {20,100} $c)${30,60,90} $d)$ ϕ

تمرين9: اذا كانت $A = \{10,20,30\}$ و $B = \{10,20,30\}$ فان $A - B$

$a)$ {10,20,30} $b)$ {10,20,30} $c)${30} $d)$ ϕ

4– متممة المجموعة :

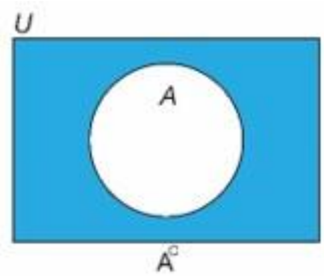
اذا كانت U مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A نعرف متممة A بانها مجموعة جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U وليست في A

ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو A^C وتعرف رياضيا:

$$\bar{A} = U - A = \{x : x \in U \text{ و } x \notin A\}$$

ويمكن تمثيل المتممة $\bar{A}$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:

(شكل 1 – 4)



مثال7: اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A = \{1,2,3\}$ اوجد $\bar{A}$

الحل:

$$\bar{A} = \{4,5,6,7\}$$

مثال8: اذا كانت $U = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$

اوجد $\bar{B}$

الحل: $\bar{B} = \emptyset$

<u>خصائص المتممة:</u>

$1)\bar{A} \cup A = U$ $\quad 2)\bar{A} \cap A = \emptyset$ $\quad 3)\bar{\emptyset} = U$

$4)\bar{U} = \emptyset$ $\quad 5)\ \bar{\bar{A}} = A$

تمرين10: اذا كانت $U = \{10,20,30,40,50\}$ و $A = \{10,20\}$ فان $\bar{A}$

$a)\{10,20,30\}$ $\quad b)\ \{30,40,50\}$ $\quad c)\ \{40,50\}$ $\quad d)\ \emptyset$

تمرين11: اذا كانت $U = \{60,70,80,90,100\}$ و

$B = \{60,70,80,90,100\}$ فان $\bar{B}$

a) $\{60,70,80,90,100\}$ b) $\{60,70,80\}$ c) $\{90,100\}$ d) ϕ

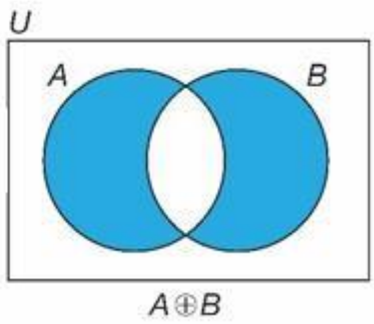
5- الفرق التناظري بين مجموعتين :

نعرف الفرق التناظري بين مجموعتين A و B هي مجموعة جميع العناصر الموجودة اما في A أو في B ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين ويرمز لها بالرمز $A \oplus B$ ونكتب رياضيا:

$$A \oplus B = \{x : x \in A \cup B \ \text{و} \ x \notin A \cap B\}$$

ويمكن تمثيل الفرق التناظري $A \oplus B$ في شكل فن بالمنطقة المظللة كما في الشكل التالي:

(شكل 1 – 5)



مثال9: اذا كانت $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{1,2,7\}$ اوجد $A \oplus B$

الحل: $A \oplus B = \{7,3,4,5\}$

تمرين12: اذا كانت $A = \{20,40,60,80\}$ و $B = \{20,30,40,50\}$ فان $A \oplus B$

a) {20,30,40,50} b) {30,50,60,80} c){20,40,60,80} d) ϕ

<u>خصائص الفرق التناظري:</u>

1) $A \oplus A = \emptyset$, 2) $A \oplus \emptyset = A$, 3) $A \oplus U = \bar{A}$, 4) $A \oplus B = B \oplus A$
5) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$, 6) $A \oplus B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

<u>قانون ديمورغان:</u>

1- $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$

2- $(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$

مثال 10: اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{10,20,30,40,50\}$

وكانت $A = \{10,30\}$, $B = \{30,50\}$, $C = \{40,50\}$ اوجد

1) $A \cap B$ 2) $A \cap C$ 3) $A \cup B$ 4) $B \cup C$ 5) $A - B$

6) $C - B$ 7) A^c 8) B^c 9) C^c 10) $A \oplus B$

الحل:

1) $A \cap B = \{30\}$

2) $A \cap C = \emptyset$

3) $A \cup B = \{10,30,50\}$

4)$B \cup C$ = {30,50,40}

5)$A - B$ = {10}

6)$C - B$ = {40}

7)A^c = {20,40,50}

8)B^c = {10,20,40}

9)C^c = {10,20,30}

10)$A \oplus B$ = {10,50}

تمرين 13 : اذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

وكانت $A = \{1,3,5,6\}, B = \{2,5,9\}, C = \{4,7\}$ اوجد

1)$A \cap B$ =

$a)$ {5} $b)$ {1,3} $c)$ {1,3,5,6,2,9} $d)$ ∅

2)$A \cap C$ =

$a)$ {1,3} $b)$ {1,3,5,6,4,7} $c)$ {4,7} $d)$ ∅

3)$B \cup C$ =

$a)$ {4,7} $b)$ {1,3} $c)$ {2,5,9,4,7} $d)$ ∅

4)$A - B$ =

$a)$ {10,4,7} $b)$ {1,3,6} $c)$ {2,5} $d)$ ∅

5) $C - B$ =

$a)$ {4,7} $b)$ {1,3} $c)$ {2,5,9,4,7} $d)$ ∅

6)A^c =

$a)$ {4,7} $b)$ {1,3,5,6} $c)$ {2,4,7,8,9,10} $d)$ ∅

7)$C^c =$

$a)$ {4,7} $b)$ {1,2,3,5,6,8,9,10} $c)$ {8,9,10} $d)$ ∅

10)$A \bigoplus B$

$a)$ {1,3,5,6,2,9} $b)$ {1,3,6,2,9} $c)$ {5} $d)$ ∅

المجموعات العددية

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عدة مجموعات عددية كل منها توسيع وامتداد لسابقتها.

مجموعة الأعداد الطبيعية:

هي مجموعة الاعداد الأساسية المألوف عليها ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N

$$N = \{1,2,3,4,5, \dots\}$$

مجموعة الأعداد الكلية:

هي مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مضافا اليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف W

$$W = \{0,1,2,3,4,5, \dots\}$$

مجموعة الأعداد الصحيحة:

هي مجموعة الاعداد الكلية مضافا اليها مجموعة الاعداد السالبة ويرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعة الأعداد الكسرية (النسبية) :

هي مجموعة الاعداد التي يمكن كتابتها على صورة كسر ($\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$) ، بحيث المقام لا يساوي صفر ، ونرمز لها بالرمز Q ويمكن كتابتها على الصورة

$$Q = \{x : x = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0\}$$

مجموعة الأعداد الغير كسريه (غير نسبية):

هي مجموعة الاعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة كسر مثل : $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \frac{1}{\sqrt{5}}, e, \pi$

ويرمز لها بالرمز $(\bar{Q})$.

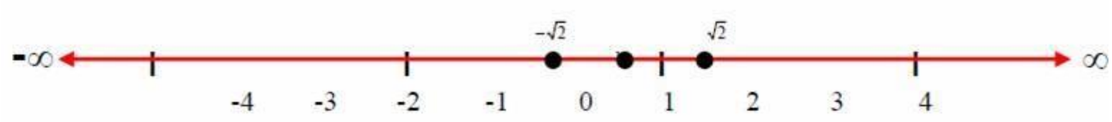
فمثلا التمثيل العشري للأعداد غير الكسرية:

$\sqrt{3} = 1.7320508 \ldots \quad ; \quad e = 2.71828 \ldots \quad ; \quad \pi = 3.1415 \ldots.$

ملاحظه1 : التقريب النسبي للعدد الغير النسبي π هو $\pi \approx 3.14$ أو $\pi \approx \frac{22}{7}$

مجموعة الأعداد الحقيقية :

هي مجموعة جميع الاعداد الطبيعية والكلية والصحيحة والكسرية والغير كسرية ويرمز لها بالرمز R ويمكن تمثيلها بيانيا بنقاط على خط افقي يسمى خط الاعداد الحقيقية، بحيث تقع نقطة الصفر في المنتصف والاعداد الموجبة على اليمين والاعداد السالبة عل اليسار كما في الشكل التالي:

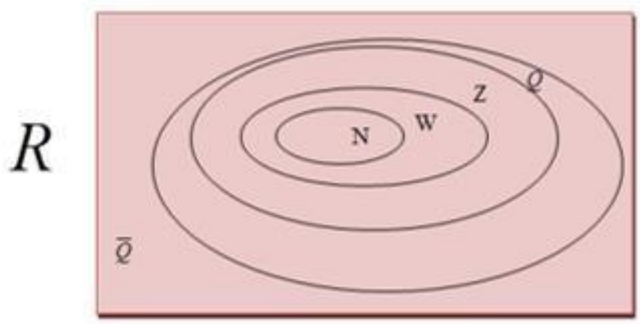


ملاحظه

1) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq \overline{Q} \subseteq R$

2) $Q \cup \overline{Q} = R$

3) $Q \cap \overline{Q} = \emptyset$



تمارين نهاية باب المجموعات

تمرين: أجب بصح أمام العبارة الصحيحة وخطأ أمام العبارة الخاطئة

١. **المجموعة : هي تجمع من الأشياء الحسية أو المعنوية المستقلة التي يمكن تمييزها عن غيرها ( )**
٢. **إذا كان العنصر 2 ينتمي إلى المجموعة A يكتب بالطريقة $2 \notin A$ ( )**
٣. **المجموعة التي تحتوي على عدد محدود من العناصر في المجموعة غير المنتهية ( )**
٤. **المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر وتكتب $\emptyset$ ( )**
٥. **نقول A مجموعة جزئية من B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B وتكتب $A \subseteq B$ ( )**

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1. يرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة بالرمز

a) R b) Z c) N d) Q

2. يرمز لمجموعة الاعداد الغير الكسرية بالرمز

a) R b) Z c) W d) $\overline{Q}$

3. يرمز لمجموعة الاعداد الحقيقية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

4. يرمز لمجموعة الاعداد الكسرية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

5. يرمز لمجموعة الاعداد الكلية بالرمز

a) R b) Z c) W d) Q

6. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,3,4,5\}$ فان

a) $A \subseteq B$ b) $A \nsubseteq B$ c) $A \in B$ d) $A \notin B$

7. اذا كانت $B = \{1,2,3\}$ فان

a) $1 \subseteq B$ b) $1 \nsubseteq B$ c) $1 \in B$ d) $1 \notin B$

8. يرمز للمجموعة الخالية بالرمز

a) A b) $\emptyset$ c) U d) A^c

9. يرمز للمجموعة الشاملة بالرمز

a) A b) $\emptyset$ c) U d) A^c

10. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5\}$ فان $A \cup B =$

a) $\{4,5\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$

11. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{3,4\}$ فان $A \cap B =$

a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$

12. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{5,4\}$ فان $A \cap B =$

a) $\{3\}$ b) $\{1,2,3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{1,2,3,4,5\}$

13. اذا كانت $B = \{ 1,2\}$ و $A = \{ 1,2,3,4\}$ فان $A - B =$

a) $\{ 1,2,3,4\}$ b) $\{ 1\}$ c) $\{ 3,4\}$ d) $\{ 1,2\}$

14. اذا كانت $U = \{ 1,2,3,4,5\}$ و $A = \{ 1,2\}$ و فان $\bar{A} =$

a) $\{ 1,2\}$ b) $\{ 1,3\}$ c) $\{ 4,2\}$ d) $\{ 3,4,5\}$

15. $\overline{(A \cap B)} =$

a) $\bar{A} \cap \bar{B}$ b) $\bar{A} \cup \bar{B}$ c) $\bar{A} \cup B$ d) $A \cap \bar{B}$

16. $(\overline{A \cup B}) =$

a) $\bar{A} \cap \bar{B}$ b) $A \cup B$ c) $\bar{A} \cup B$ d) $A \cap \bar{B}$

17. العدد التالي يمثل عدد صحيح

a) π b) -6 c) e d) $\frac{2}{3}$

18. اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,4,5\}$ فان $A \oplus B$ تساوي

a) $\{3,4,5\}$ b) $\{1,2\}$ c) $\{1,2,3,4,5\}$ d) $\emptyset$

تمرين : إذا كانت المجموعة الشاملة $U : \{4,5,6,7,8,9,10\}$

وكانت $A =\{4,5,6,7\}$, $B =\{4,5\}$, $C = \{5,6\}$

$1\backslash\ A \cup B =$	$6\backslash\ A \cup B$
$2\backslash\ A \cap B =$	$7\backslash\ A \cap B$
$3\backslash\ A - B =$	$8\backslash\ \overline{A}$
$4\backslash\ B - A =$	$9\backslash\ \overline{B}$
$5\backslash\ A \oplus B =$	$10\backslash\ \overline{C}$

تمرين : إذا كان لدينا $A = \{5,6,7,8,9\}$, $B =\{6,7,8\}$, $C =\{4,5,6\}$ اكتب العبارات التالية

$\not\subset,\subseteq,\notin,\in$ في الفراغ المناسب

5 ....B	5......A
7........B	7......A
{1,2,3}.......B	{1,2,3}........A
{5,6,7}......B	{5,6,7}......A
C......B	C.........A

الوحدة الثانية

العمليات الحسابية

العمليات الحسابية على الأعداد الصحيحة :

- جمع وطرح الأعداد الصحيحة

*عند اختلاف الإشارات نضع إشارة العدد الأكبر ثم نطرح

*إذا وجد إشارة – بجانب – فإنها تتحول إلى +

$a-(-b) = a+b \longrightarrow 5-(-3) = 8$

*عند الضرب إذا تشابهت الإشارات الناتج + وإذا اختلفت الناتج –

+×+= +

- × - = +

+ × - = -

- × + = -

* أي عدد يضرب في صفر يكون الناتج صفر $a\times 0 = 0$

مثال: أوجد ناتج العمليات التالية

5 + 2 =	4 – (-6) =
3 + 7 =	20 – (-2) =
10 + 3 =	-10 – (-2) =
9 + 2 =	-3 – (-5) =
9 – 2 =	2 × 3 =
6 – 5 =	3 × -4 =
2 – 9 =	-10 × -4 =
4 – 10 =	1 × -5 =
-15 + 3 =	-20 × 0 =
- 7 - 2 =	4 × 5 =
10 – 14 =	-7 × 2 =
20 – 4 =	5 × -5 =
7 – 15 =	0 × -9 =

العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد النسبية (الكسرية) :

إذا كان $a,b,c,d \in Z$, $b, d \neq 0$ فإن

أولا : الجمع والطرح

1\ الجمع والطرح في حالة المقامات المتساوية :

عند جمع او طرح كسرين ذات مقامات متساوية فإننا نجمع او نطرح البسط ونكتب المقام نفسه

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \qquad b \neq 0$$

مثال: احسب ما يلي :

a) $\frac{2}{4}+\frac{3}{4} =$ b) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5} =$ c) $\frac{-3}{7}+\frac{1}{7} =$

a) $\frac{2}{4}+\frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$

b) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) $\frac{5}{6}+\frac{3}{6} =$

a) $\frac{8}{6}$ b) $\frac{15}{12}$ c) $\frac{8}{36}$ d) $\frac{8}{12}$

2) $\frac{4}{8}-\frac{7}{8} =$

a) $\frac{-24}{40}$ b) $\frac{-11}{13}$ c) $\frac{3}{13}$ d) $\frac{-3}{8}$

3) $\frac{-5}{9}-\frac{3}{9} =$

a) $\frac{-10}{24}$ b) $\frac{-8}{9}$ c) $\frac{7}{24}$ d) $\frac{-7}{24}$

2\ الجمع والطرح في حالة المقامات غير المتساوية

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) \pm (c \times b)}{b \times d} \qquad b, d \neq 0$$

مثال : احسب ما يلي :

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4} =$ b) $\frac{4}{5}-\frac{5}{6} =$ c) $\frac{-3}{4}+\frac{2}{6}=$

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}= \frac{(2\times 4)+(3\times 5)}{5\times 4}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20}$

b) $\frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{(4\times 6)-(5\times 5)}{5\times 6}=\frac{24-25}{30}=\frac{-1}{30}$

c) $\frac{-3}{4}+\frac{2}{6}=\frac{(-3\times 6)+(2\times 4)}{4\times 6}=\frac{-18+8}{24}=\frac{-10}{24}$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) $\frac{2}{6}+\frac{5}{8}=$

a) $\frac{7}{14}$ b) $\frac{7}{48}$ c) $\frac{2}{14}$ d) $\frac{46}{48}$

2) $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=$

a) $\frac{-3}{18}$ b) $\frac{-2}{13}$ c) $\frac{5}{18}$ d) $\frac{-24}{40}$

3) $\frac{-7}{8}-\frac{1}{2}=$

a) $\frac{-7}{8}$ b) $\frac{-10}{16}$ c) $\frac{-22}{16}$ d) $\frac{-1}{2}$

- **العمليات الحسابية على الاعداد العشرية :**

1 . جمع وطرح الاعداد العشرية :

يتم جمع وطرح الاعداد العشرية وذلك بتوحيد عدد الخانات العشرية على يمين الفاصلة العشرية وذلك بإضافة اصفار على يمين العدد الأقل خانات، حيث ان إضافة اصفار على يمين العدد العشري لا يؤثر في قيمة العدد العشري ،وبعدها يتم جمع وطرح الاعداد في الخانات المتناظرة مع الاحتفاظ بموقع الفاصلة العشرية.

مثلاً : $\mathbf{2.54 + 3.1392 =}$

$$\begin{array}{r} 2.5400 \\ +\quad 3.1392 \\ \hline 5.6792 \end{array}$$

مثال : احسب ما يلي :

a) 3.125 + 21.32 b) 6.48 – 1.3

a) 3.125 + 21.32

$$\begin{array}{r} 3.125 \\ +\ 21.320 \\ \hline 24.445 \end{array}$$

b) 6.48 – 1.3

$$\begin{array}{r} 6.48 \\ -\ \ 1.30 \\ \hline 5.18 \end{array}$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) 4.3521 + 2.15

a) 6.5021 b)6.50 c) 6.5032 d) 6.5

2) 5.79 – 3.1135

a) 2.6765 b) 2.6775 c) 2.6710 d) 2.8

2 . ضرب الاعداد العشرية :

لضرب عددين عشريين نجري عملية الضرب كما نجريها لعددين صحيحين بدون أي اعتبار للفاصلة العشرية ، وعند الانتهاء من عملية الضرب نضع الفاصلة العشرية بحيث تكون عدد الخانات العشرية في ناتج عملية الضرب مساوية لعدد خانات العددين العشريين .

مثلاً :

$$2.31 \times 3.2 =$$

$$\begin{array}{r} 231 \\ \times\ 32 \\ \hline 462 \\ +\ 693 \\ \hline 7392 \end{array}$$

$2.31 \times 3.2 = 7.392$

مثال : احسب ما يلي :

a) 3.24×2.1 b) 5.2×4.21

الحل :

a) $3.24 \times 2.1 = 6.804$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times\ 21 \\ \hline 324 \\ +\ 648 \\ \hline 6804 \end{array}$$

b) $5.2 \times 4.21 = 21.892$

$$\begin{array}{r} 421 \\ \times\ 52 \\ \hline 842 \\ +\ 2105 \\ \hline 21892 \end{array}$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) 4.352 × 2.1

a) 9.1392 b) 91.383 c) 913.54 d) 9139.1

2) 5.7 × 3.11

a) 1.7727 b) 177.27 c) 1772.7 d)17.727

3 . قسمة الاعداد العشرية :

لقسمة الاعداد العشرية نساوي عدد الخانات العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات ونلغي الفواصل ثم نقوم بالقسمة كقسمة عددين صحيحين حتى يصبح القاسم أقل من المقسوم عليه فنضيف الى يمينه صفراً مع وضع الفاصلة في الناتج ونتابع القسمة مع إضافة صفر الى القاسم كلما اصبح اقل من المقسوم عليه.

مثلاً

21.566 ÷ 6.8

نوحد عدد الخانات العشرية ونلغي الفواصل فيصبح المطلوب حساب حاصل القسمة

21566 ÷ 6800

```
         3.17
6800 | 21556
     - 20400
       11560
     -  6800
       47600
     - 47600
       00000
```

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) 151.34 ÷ 65.8

a) 5.3   b) 2.3   c) 6.3   d) 8.3

2) 13.392 ÷ 3.1

a) 5.32   b) 8.32   c) 1.32   d) 4.32

- **تقريب عدد عشري :**

عند تقريب عدد عشري ينُظر إلى الرقم أو الجزء العشري التي تقع إلى اليمين من الرقم أو الجزء العشري المراد التقريب إليها :

١) إذا كان الرقم أقل من او يساوي 4 يبقى الرقم المراد التقريب اليه ولا يتغير

٢) إذا كان الرقم اكبر من او يساوي 5 يُضاف واحد إلى الرقم الذي يقع في الجزء العشري المراد التقريب إليه.

٣) عند الانتهاء من عملية التقريب نحذف جميع الاعداد العشرية التي يمين العدد العشري المراد تقريبه.

مثال: قرب الاعداد العشرية التاليه الى عدد صحيح و جزء من عشره – جزء من مائة – جزء من الف :

جزء من ألف	جزء من مئة	جزء من عشره	عدد صحيح	العدد العشري
3.627	3.63	3.6	4	3.62685
16.252	16.25	16.3	16	16.25217
8.562	8.56	8.7	9	8.5619

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) تقريب 3.52681 الى عدد صحيح

a) 3   b) 4   c) 5   d) 6

2) تقريب 3.52681 الى جزء من عشره

a) 3.2 b) 3.5 c) 3.52 d) 3.62681

3) تقريب 3.52681 الى جزء من مئة

a) 3.5 b) 3.53 c) 3.52 d)3.52681

4) تقريب 3.52681 الى جزء من الف

a) 3.52 b) 3.526 c) 3.527 d) 3.52781

- **خصائص الاعداد الحقيقية :**

اذا كان a,b,c ∈ R فان :

الضرب	الجمع	الخاصية
$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$ $\mathbf{2 \times 4 = 4 \times 2}$	$\boldsymbol{a + b = b + a}$ $\mathbf{3 + 5 = 5 + 3}$	1- الابدال
$\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$ $\mathbf{(3 \times 5) \times 2 = 3 \times (5 \times 2)}$	$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$ $\mathbf{(2 + 4) + 3 = 2 + (4 + 3)}$	2- التجميع
$\boldsymbol{a \cdot 1 = 1 \cdot a}$ $\mathbf{5 \times 1 = 1 \times 5}$	$\boldsymbol{a + 0 = 0 + a}$ $\mathbf{2 + 0 = 0 + 2}$	3- العنصر المحايد
$\boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} . a = 1, a \neq 0$ $3 . \frac{1}{3} = \frac{1}{3} . 3 = 1$	$\boldsymbol{a + (-a) = (-a) + a = 0}$ $\mathbf{7 + (-7) = (-7) + 7 = 0}$	4- النظير
$\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac}$, $\boldsymbol{(b + c)a = ba + ca}$		5- التوزيع

ملاحظة:

١- الصفر هو العنصر المحايد الجمعي.

٢- الواحد هو العنصر المحايد الضربي.

مثال : اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد 5

الحل :

- النظير الجمعي للعدد 5 هو -5 لان $5 - 5 = 0$

- النظير الضربي للعدد 5 هو $\frac{1}{5}$ لان $5 \times \frac{1}{5} = 1$

ملاحظة : $5 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{5\times 1}{1\times 5} = \frac{5}{5} = 1$

مثال : اوجد النظير الجمعي والضربي للعدد $\frac{2}{3}$ ؟

الحل: النظير الجمعي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $-\frac{2}{3}$ لان $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$

النظير الضربي للعدد $\frac{2}{3}$ هو $\frac{3}{2}$ لان $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$

تمرين: اختر الإجابة الصحيحة:

1) النظير الجمعي للعدد -8

$a)\ 8 \qquad b)\ -8 \qquad c)\ \frac{1}{8} \qquad d)\ -\frac{1}{8}$

2) النظير الضربي للعدد -8

$a)\ 8 \qquad b)\ -8 \qquad c)\ \frac{1}{8} \qquad d)\ -\frac{1}{8}$

- العمليات على الأعداد الحقيقية :

لمنع حدوث خطأ و التباس أثناء حل المسائل استخدم عزيزي المتدرب ترتيب العمليات الحسابية التالي:

- ترتيب العمليات

١) احسب كل القوى والجذور

٢) أجر عملية الضرب أو القسمة حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين
٣) أجر عملية الجمع والطرح حسب الترتيب مبتدئاً من اليسار إلى اليمين

ملاحظات مهمة :

١ – إذا كان في المسألة أقواس فإننا نجري العمليات التي بداخل الأقواس أولاً وهو ما يسمى بفك الأقواس .

٢ – أجر العمليات الموجودة فوق وتحت خط الكسر كلاً على حده

مثال 10 : احسب ما يلي:

$a)\ \ 6+3-1 \qquad b)\ \ 3-(-2) \qquad c)\ \ 4-(5-1)$

$d)\ \ 3+2.5$

$e)\ \dfrac{5-3+1}{3(2+5)} \qquad f)\ 2(5+\dfrac{3}{5})$

الحل:

$a)\ \ 6+3-1\ =9-1=8$

$b)\ \ 3-(-2)=3+2=5$

$c)\ \ 4-(5-1)=4-(4)=4-4=0$

$d)\ \ 3+2.5=5.5$

e) $\frac{5-3+1}{3(2+5)}=\frac{3}{3(7)}=\frac{3}{21}$

f) $2\left(5+\frac{3}{5}\right)=2\ \left(\frac{5}{1}+\frac{3}{5}\ \right)=2\left(\frac{5\times5+3\times1}{1\times5}\ \right)=$

$2\left(\frac{25+3}{5}\right)=2\left(\frac{28}{5}\right)=\frac{2\times28}{5}=\frac{56}{5}$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) 7 + 4 -2 =

a) 9   b) 4   c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$

2) 2 (3 – 1) =

a) 9 b) 4 c) $\frac{1}{8}$ d) - $\frac{1}{8}$

3) 3.1 + 2.25 =

a) 5.25 b) 5.35 c) 6.25 d) 3.25

4) $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=$

a) $\frac{8}{12}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{4}$ d) $\frac{3}{3}$

تمارين نهاية باب العمليات الحسابية

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة

1\ $7\times2-10=$..........

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

2\ $3\times(-2)=$.............

a) -2 b) 5 c) -6 d)6

3\ $\frac{2}{5}+\frac{8}{5}=$. … ..

a)$\frac{10}{10}$ b)$\frac{20}{10}$ c)$\frac{10}{5}$ d)$\frac{1}{10}$

4\ $\frac{2}{3}-\frac{3}{7}=$. … ….

a)$\frac{5}{21}$ b)$\frac{5}{7}$ c) $\frac{-2}{-4}$ d)$\frac{7}{21}$

5\ تقريب العدد 8.7601 إلى عدد صحيح هو

a) 6 b)7 c) 8 d) 9

6\ تقريب العدد 8.7601 إلى جزء من عشرة هو

a) 8.6 b) 8.7 c) 8.8 d) 8

7\ النظير الجمعي للعدد 3

a) 3 b) -3 c) $\frac{1}{3}$ d) 0

8\ النظير الضربي للعدد 3

a) 3 b) -3 c) $\frac{1}{3}$ d) 0

تمرين : أوجد ناتج ما يلي

1 \ الأعداد النسبية

1\ $\frac{7}{3} \times \frac{-1}{4} =$

2\ $\frac{8}{-3} \div \frac{2}{5} =$

3\ $\frac{-11}{7} \times \frac{7}{5} =$

4\ $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} =$

5\ $\frac{2}{3} - \frac{3}{-2} =$

6\ $\frac{10}{6} + \frac{1}{5} =$

2\ الأعداد العشرية

1\ 5.63 + 7.32 =

2\ 2.53 + 8.125

3\ 11.603 – 2.32

4\ 2.53 × 1.125

3 \ تقريب الأعداد العشرية

جزء من ألف	جزء من مئة	جزء من عشرة	عدد صحيح	عدد عشري
				0.6375
				15.8454

4\ ترتيب العمليات الحسابية

1\ $(5 - 2)^2 \times 6 - 2 =$

2\ $10 - 2 \times 3^2 =$

3\ $(7 - 2)^2 + 6^2 \times 1 - 2 =$

4\ $\frac{6-2}{3- 5 \times 1} =$

تمرين : أوجد ناتج العمليات التالية

$34 + 9 =$	$4 - (-1) =$
$3 + 10 =$	$5 - (-2) =$
$10 + 2 =$	$-1 - (-9) =$
$8 + 10 =$	$-3 - (-10) =$

الوحدة الثالثة

كثيرات الحدود

- **كثيرات الحدود :**

تعريف 1 : الحد الجبري يكون إما ثابتا أو متغيرا أو حاصل ضرب ثابتاً في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عددا صحيحا غير سالب يسمى الثابت معامل الحد الجبري وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه

مثال : ما هو معامل الحد الجبري $-2x^3y$

الحل :

معامل الحد الجبري هو 2- ودرجته تساوي 4 لأن ($3 + 1 = 4$)

الحدود المتشابهة :

هي الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيها الأس)

مثلاً : $4x^2$ و $6x^2$ حدان متشابهان

$-2x^3$ و $5x^3$ حدان متشابهان

ولكن الحد $3x^2$ لا يشبه $5x$

وكذلك $2x^3$ و $2y^3$ غير متشابهان

ملاحظة : درجة الحد الثابت دائما تساوي الصفر ($4 = 4x^0$)

تعريف 2 : كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منته من الحدود الجبرية ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها .

الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير x

إذا كانت n عدد صحيح غير سالب فإن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن كتابتها على الصورة :

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0 \qquad , a_n \neq 0$$

مثال : الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي ، الدرجة ، الحدود والمعاملات لكثيرات الحدود :

كثيرة الحدود	الحدود	الدرجة	المعامل الرئيسي	الحد الثابت	المعاملات
$4x^2 - 3x + 1$	$4x^2,-3x,1$	2	4	1	4,-3,2,1
$X^3 - 2$	X^3 , -2	3	1	-2	1,-2
$3x^4 - 2x^3$	$3x^4$, $-2x^3$	4	3	0	3,-2

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١) درجة كثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

٢) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

٣) الحد الثابت لكثيرة الحدود التالية $4x^2 - 5x + 3$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

تمرين : أوجد الدرجة والمعامل الرئيسي والحد الثابت والحدود والمعاملات لكثيرات الحدود

كثيرة الحدود	الدرجة	المعامل الرئيسي	الحد الثابت	الحدود	المعاملات
$4x^6 - 5x + 3$					
$X^2 + 9$					
$6x^2 - x + 2$					

- **العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :**

- **جمع وطرح كثيرات الحدود :**

عند جمع او طرح كثيرتي حدود فإننا نجمع او نطرح معاملات الحدود المتشابهة .

مثلاً :

$(3x + 5) + (x - 2) = 3x + x + 5 - 2 = 4x + 3$

$(3x + 5) - (x - 2) = 3x - x + 5 - (-2) = 2x + 7$

مثال : اختصر كل من التالي :

a) $(2x^2 + 3x + 5) + (x^2 - x + 2)$

b) $(3x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 3)$

c) $(x^2 + 4x - 1) + (5x^2 + x)$

a) $(2x^2 + 3x + 5) + (x^2 - x +2) = 2x^2 + x^2 + 3x - x + 5 +2 = 3x^2 + 2x + 7$

b) $(3x^2 - 5x +6) - (2x^2 + 3x - 3)= 3x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 3$

$= 3x^2 - 2x^2 - 3x + 6 + 3 = x^2 - 8x + 9$

c) $(x^2 + 4x - 1) + (5x^2 +x) = x^2 + 5x^2 +4x + x - 1 = 6x^2 + 5x - 1$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١) $(5x + 3) + (2x - 1) =$

a) $7x +3$ b) $3x - 1$ c) $7x + 2$ d) $3x + 2$

٢) $(5x + 3) - (2x - 1)$

a) $3x - 4$ b) $3x - 2$ c) $3x + 4$ d) $3x + 2$

- **ضرب كثيرة الحدود بعدد حقيقي :**

تعريف : عند ضرب عدد حقيقي k في كثيرة حدود من الدرجة n فإننا نضرب العدد الحقيقي في جميع معاملات كثيرة الحدود (خاصية التوزيع) :

$$K (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x^1 + a_0)$$

$$= k a_nx^n + ka_{n-1}x^{n-1} + ... + ka_1x^1 + ka_0$$

مثال : اختصر ما يلي :

a) $3 (2x^2 + 4x - 1)$

b) $-2 (5x - 3)$

الحل :

a) $3(2x^2 - 4x + 1) = (3 \times 2)x^2 + (3)(-4)x + (3\times1)$

$= 6x^2 - 12x + 3$

b) $-2(5x - 3) = (-2)(5)x + (-2) \times (-3) = -10x + 6$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) $5(3x^2 + 2x - 4) =$

a) $15x^2 + 10x - 20$　　　b) $15x^2 + 7x + 20$

c) $8x^2 - 7x + 9$　　　d) $x^2 + 10x - 20$

2) $-3(x^2 - 4x) =$

a) $-3x^2 + 12x$　　　b) $-3x^2 + x$

c) $x^2 + 12x$　　　d) $-3x^2 - 12x$

- **ضرب كثيرات الحدود :**

خصائص الأسس : اذا كان x,y عددين حقيقيين و m,n عددين صحيحين فان :

الخاصية	مثال
1) $x^0 = 1 \quad ,x\neq0$	$8^0 = 1$
2) $x^m . x^n = x^{m+n}$	$X^2.x^5 = x^{2+5} = x^7$ $3 . 3^2 = 3^{1+2} = 3^3 = 27$
3) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad ,x \neq 0$	$\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4$ $\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3$
4) $x^{-m} = \frac{1}{x^m} \quad , \frac{1}{x^{-m}} = x^m \quad x \neq 0$	$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad , \frac{1}{x^{-2}} = x^2$
5) $(x^m)^n = x^{m.n}$	$(x^3)^2 = x^{3.2} = x^6$

	$(2^2)^4 = 2^{2.4} = 2^8$
6) $(x . y)^m = x^m . y^m$	$(3x)^2 = 3^2x^2 = 9x^2$
7) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \quad , y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$
8) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m = \frac{y^m}{x^m} \quad , x \neq 0 \ , y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} = \left(\frac{y}{x}\right)^5 = \frac{y^5}{x^5}$

تعريف : عند ضرب كثيرتي حدود فإننا نقوم بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني، وبعد ذلك نجمع الحدود المتشابهة إذا أمكن .

مثال : اوجد حاصل ضرب كثيرتي الحدود التالية واكتب الناتج في ابسط صوره اذا امكن :

a) $(2x^2 + 3) (4x + 5)$

b) $(x + 3) (x – 2)$

الحل :

a) $(2x^2 + 3) (4x + 5)$

$= 2x^2 (4x + 5) + 3 (4x + 5)$

$= 2x^2 (4x) + 2x^2 (5) + 3 (4x) + 3 (5)$

$= 8x^3 + 10x^2 + 12x + 15$

b) $(x – 2) (x + 1)$

$= x (x+1) – 2(x +1)$

$= x (x) + x (1) – 2(x) -2 (+1)$

$= x^2 + x -2x -2$

$= x^2 – x – 2$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) $(x^2 + 4) (2x – 2) =$

a) $2x^2 - 2x^2 + 8x - 8$ b) $2x^3 - x^2 + 8x - 8$

c) $2x^3 - 2x^2 + x - 8$ a) $2x^3 - 2x^2 + 8x - 2$

2) (3x + 1) (x + 4)

a) $3x^2 + 13x + 4$ b) $3x^2 + 12x + 4$

c) $3x^2 + x + 4$ d) $3x^2 + 13x + 1$

بعض القوانين المشهورة :

1) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$	$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2$
2) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ $= x^2 + 2xy + y^2$	$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$ $= x^2 + 2 . 5x + 5^2$ $= x^2 + 10x + 25$
3) $(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$ $= x^2 - 2xy + y^2$	$(5 - x)^2 = (x - 5)(x - 5)$ $= x^2 - 2 . 5x + 5^2$ $= x^2 - 10x + 25$
4) $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	$(x + 5)^3 = (x + 5)(x + 5)(x + 5)$ $= x^3 + 3x^2 . 5 + 3x . 5^2 + 5^3$ $= x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

- **حساب كثيرة حدود عند قيمة معينة :**

لحساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير نعوض المتغير في كثيرة الحدود بهذه القيمة

مثال : احسب قيمة كثيرة الحدود عند قيم المتغير x المعطاة :

كثيرة الحدود	قيم x	الحل
$X^2 + 4x - 1$	X=0	$(0)^2 + 4(0) - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$
$4x^3 + 2$	X=1	$4(1)^3 + 2 = 4(1) + 2 = 4 + 2 = 6$
$2x - 3$	X=2	$2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$
$3x^2 - 1$	X=-3	$3(-3)^2 - 1 = 3(9) - 1 = 27 - 1 = 26$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١) قيمة $2x + 4$ عند $x = 3$

a) 8 b) 10 c) 6 d) 4

٢) قيمة $2x^2 + 1$ عند $x = -1$

a) 3 b) 5 c) -3 d) -1

- **قسمة كثيرات الحدود :**

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى تشبه عملية القسمة المطولة في الاعداد الصحيحة .

مثال : اوجد حاصل قسمة $6x^2 + 8x + + 2$ على $2x + 2$

الحل :

$$\begin{array}{r|l} & 3x + 1 \\ \hline 2x + 2 & 6x^2 + 8x + 2 \\ & -\ 6x^2 + 6x \\ \hline & \quad 2x + 2 \\ & -\ 2x + 2 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) $(2x^2 + 11x + 12) \div (2x + 3) =$

a) $x + 4$ b) $2x + 4$ c) $2x$ d) $x - 4$

- **<u>تحليل كثيرات الحدود :</u>**

يستخدم التحليل لحل المعادلات الجبرية عادة ، وهو يعني كتابة كثيرة الحدود على شكل حاصل ضرب كثيرتي حدود أو أكثر تقل درجتهما عن درجة كثيرة الحدود الأصلية ، ويُطلق على كل كثيرة حدود ناتج من عملية التحليل اسم العامل ، ولا يمكن تحليل أي عامل من هذه العوامل أبداً ، كما يساوي حاصل ضرب جميع العوامل كثيرة الحدود الأصلية دائماً.

طريقة المعامل المشترك الأكبر :

تم التحليل من خلال هذه الطريقة باستخراج الثوابت أو المتغيرات المشتركة بين جميع الحدود لتكون هذه الثوابت والمتغيرات حدّاً يُعرف بالعامل المشترك الأكبر .

مثال : حلل كثيرات الحدود التالية باستخدام المعامل المشترك الأكبر

a) $6x^2 + 8x^4$ b) $3x^7 - x^3y^4$

الحل :

a) $6x^2 + 8x^4$

العامل المشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $8x^4$ و $6x^2$ هو $2x^2$ وبالتالي :

$$6x^2 + 8x^4 = 2x^2 \left(\frac{6x^2}{2x^2} + \frac{8x^4}{2x^2}\right) = 2x^2(3 + 4x^2)$$

b) $3x^7 - x^3 y^4$

العامل المشترك الأكبر بين الحدين الجبريين $-x^3 y^4$ و $3x^6$ هو x^3 وبالتالي :

$$3x^7 - x^3 y^4 = x^3 \left(\frac{3x^7}{x^3} - \frac{x^3y^4}{x^3}\right) = x^3(3x^4 - y^4)$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة التالية :

1) ($2x^2 + 12x$)   تحليل كثيرة الحدود

a) 2x (x + 6)   b) 2 (x + 6)   c) 2x (x + 6x)   d) x (x + 6)

2) ($4x^2y + 8xy$)   تحليل كثيرة الحدود

a) 4xy (x + 2)   b) 2xy (xy + 4)   c) 4y (x + 8x)   d) xy (x + 8y)

- تحليل كثيرة حدود من الدرجة الثانية :

تحليل فرق مربعين :

$$(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$$

مثال : حلل كثيرات الحدود التالية :

a) a) $x^2 - 16$ b) $y^2 - 4$ c) $9 - x^2$

الحل :

a) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

b) $y^2 - 4 = (y - 2)(y + 2)$

c) $9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) $x^2 - 25$

a) $(x - 5)(x + 5)$ b) $(x - 4)(x + 4)$

c) $(x - 25)(x + 1)$ d) $(5 - x)(5 + x)$

2) $x^2 - 1$

a) $(x - 1)(x + 2)$ b) $(x - 1)(x + 1)$

c) $(x - 2)(x + 1)$ d) $(1 - x)(1 + x)$

$3)\ 81 - x^2$

$a)\ (x-81)(x+1)$ $\qquad$ $b)\ (x-9)(x+9)$

$c)\ (9-x)(9+x)$ $\qquad$ $d)\ (81-x)(1+x)$

- **تحليل كثيرة حدود على الصورة :**

$$ax^2 + bx + c$$

الحالة الأولى : a=1

في هذه الحالة يجب ان نوجد كثيرتي حدود بحيث يكون حاصل ضرب حديهما الأول يساوي x^2 وحاصل ضرب حديهما يساوي c وجمعهما الجبري يساوي b

مثال : حلل كثيرات الحدود التالية :

$a)\ x^2 + 5x + 6$ $\qquad$ $b)\ x^2 - 6x + 8$ $\qquad$ $c)\ x^2 + x - 12$

الحل :

$a)\ x^2 + 5x + 6$

في هذه الحالة نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي *6* ومجموعهما الجبري يساوي5

العددين هما *2* و *3*

$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$b)\ x^2 - 6x + 8$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي *8* ومجموعهما الجبري يساوي *6*-

العددين هما *2*- و *4*-

$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$

$c)\ x^2 + x - 12$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي *12*- ومجموعهما الجبري يساوي *1*+

العديين هما *4* و *3*-

$x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة التالية :

1)$(x^2+7x+10)$ تحليل كثيرة الحدود

a) $(x+2)(x+5)$ b) $(x+1)(x+10)$

c) $(x-2)(x-5)$ d) $(x+2)(x+5)$

2)$(x^2-8x+15)$ تحليل كثيرة الحدود

a) $(x+3)(x+5)$ b) $(x-3)(x-5)$

c) $(x+3)(x-5)$ d) $(x-3)(x+5)$

الحالة الثانية : a≠ 1

في هذه الحالة نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m,n,p,q تستوفي الشروط الثلاثة التالية :

1) $mn=a$ b) $pq=c$ 3)$mq+np=b$

وعند إيجاد هذه الاعداد يكون التحليل كما يلي :

$$ax^2+bx+c=(mx+p)(nx+q)$$

مع ملاحظة ان إشارة العددين p,q تكون نفس إشارة العدد b اذا كان $c>0$ ومختلفتان اذا كان $c<0$ يتم اختيار العددين n و m على أساس الشرط الأول ويتم اختيار العددين p,q

على أساس الشرط الثاني ثم نستخدم الشرط الثالث للتاكد من صحة الاعداد m,n,p,q

مثال : حلل كثيرات الحدود التالية :

a) $3x^2+5x+2$ b) $10x^2-27x+5$

الحل :

a) $3x^2+5x+2$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m,n,p,q تستوفي الشروط الثلاثة التالية :

1) $mn=3$ 2)$pq=2$ 3) $mq+np=5$

$$3x^2+5x+2=(3x+2)(x+1)$$

b)$10x^2 - 27x + 5$

نبحث عن أربعة اعداد صحيحة m, n, p, q تستوفي الشروط الثلاثة التالية :

1) $mn = 10$ 2) $pq = 5$ 3) $mq + np = -27$

$$10x^2 - 27x + 5 = (2x - 5)(5x - 1)$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة التالية :

تحليل كثيرة الحدود 1) $(8x^2 - 2x - 15)$

a) $(2x - 3)(4x + 5)$ b) $(2x + 3)(4x - 5)$

c) $(2x - 2)(4x - 4)$ d) $(2x + 3)(4x + 5)$

تحليل كثيرة الحدود 2) $(8x^2 + 2x - 3)$

a) $(4x + 3)(2x - 1)$ b) $(4x + 2)(2x - 4)$

c) $(4x - 3)(2x - 1)$ d) $(4x - 2)(2x + 4)$

- **الكسور الجبرية :**

الكسر الجبري هو عبارة عن قسمة كثيرتي حدود ، ويعامل الكسر الجبري كما تعاملنا مع الكسور النسبية في الوحدة السابقة .

- **اختصار الكسور الجبرية :**

عملية اختصار الكسر الجبري هو حذف الحدود المشتركة في البسط والمقام ، فان عملية الاختصار تتطلب منا الادراك الجيد بعمليات التحليل التي سبق دراستها في هذه الوحدة .

مثال: اختصر ما يلي :

$$a)\ \frac{x^2+5x+6}{x^2-9}= \qquad\qquad b)\ \frac{x+4}{x^2+2x-8}$$

$$c)\ \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}$$

الحل : نقوم بتحليل البسط والمقام اذا امكن وبعدها نحذف الحدود المشتركة

$$a)\ \frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x+2)}{(x-3)}$$

$$b)\ \frac{x+4}{x^2+2x-8}=\frac{x+4}{(x+4)(x-2)}$$

$$c)\ \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\ \cdot\ \frac{x-1}{x-2}=\frac{(x^2-5x+6)(x-1)}{(x^2+x-2)(x-2)}$$

$$=\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2}$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1) $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + 9 + 20}$

a) $\dfrac{x + 2}{x + 4}$ b) $\dfrac{x - 2}{x - 4}$ c) $\dfrac{x + 10}{x + 20}$ d) $\dfrac{x - 10}{x - 20}$

2) $\dfrac{x^2 - 4x - 21}{x^2 + 8x + 15}$

a) $\dfrac{x + 2}{x + 4}$ b) $\dfrac{x - 7}{x + 5}$ c) $\dfrac{x + 10}{x + 20}$ d) $\dfrac{x - 10}{x - 20}$

3) $\dfrac{x^2 + 12x + 7}{x^2 - 9} \div \dfrac{x + 4}{x + 3}$

a) $\dfrac{x + 3}{x - 3}$ b) $\dfrac{x + 4}{x - 4}$ c) $\dfrac{x + 7}{x - 7}$ $\dfrac{x + 12}{x - 9}$

تمارين نهاية باب كثيرات الحدود

تمرين : أجب بصح امام العبارة الصحيحة وخطأ أمام العبارة الخاطئة :

1 \ كثيرة الحدود هي جمع عدد منته من الحدود الجبرية ودرجتها أكبر أس فيها ( )

2 \ درجة كثيرة الحدود $3x^4 + 2x - 10$ هو 4 ( )

3 \ الحد الثابت لكثيرة الحدود $3x^4 + 2x - 10$ هي 4 ( )

4 \ قانون الفرق بين مربعين هو $(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$ ( )

5 \ عند ضرب كثيرات الحدود نطرح الأس $x^n . x^m = x^{n-m}$ ( )

6 \ درجة كثيرة الحدود هي أقل أس في كثيرة الحدود ( )

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1 \ درجة كثيرة الحدود $4x^2 + 2x + 1$

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

2 \ المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $4x^2 + 2x + 1$

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

3 \ الحد الثابت لكثيرة الحدود $4x^2 + 2x + 1$

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

4 \ قيمة كثيرة الحدود $4x^2 + 2x + 1$ عند $x = 1$

a) 8 b) 7 c) 6 d) 5

5 \ قيمة كثيرة الحدود $4x^2 + 2x + 1$ عند $x = 2$

a) 23 b) 22 c) 21 d) 20

6 \ تحليل كثيرة الحدود $x^2 - 25$

a) $(x-5)(x+5)$ **b**) $(x-4)(x+4)$ **c**) $(x-7)(x+7)$ **d**) $(x-6)(x+6)$

7 \ تحليل كثيرة الحدود $x^2 + 8x + 15$

a) $(x-10)(x+10)$ **b**) $(x-9)(x+9)$ **c**) $(x-8)(x+8)$ **d**) $(x-7)(x+7)$

تمرين : أوجد الدرجة والمعامل الرئيسي والحد الثابت والحدود والمعاملات لكثيرات الحدود

المعاملات	الحدود	الحد الثابت	المعامل الرئيسي	الدرجة	كثيرة الحدود
					$2x^6 - 5x + 9$
					$5x^2 - 20$

تمرين : اختصر ما يلي :

$1\backslash\ (7x+3)+(2x+1)$

$2\ \backslash\ (7x+3)-(2x+1)$

$3\backslash\ (7x+3)(2x+1)$

تمرين : اوجد قيمة كثيرة الحدود عند القيمة المعطاة

الحل	قيمة x	كثيرة الحدود
	$x = 2$	$x^2 + 9$
	$x = 3$	$5x^2 + 4x + 3$

تمرين : حلل كثيرات الحدود التالية

$1\backslash x^2 - 25 =$

$2\ \backslash x^2 + 12x + 36 =$

تمرين : اختصر الكسر الجبري

$$1\backslash \frac{x^2 - 25}{x^2 + 12 + 35}$$

$$2\backslash \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$$

الوحدة الرابعة :

المصفوفات والمحددات

- **<u>مفهوم المصفوفة وانواعها :</u>**

تعريف المصفوفة : هي عبارة عن مجموعة من الأعداد او الرموز مرتبة على شكل صفوف واعمدة مكتوبة [ ] ، ويرمز لاسم المصفوفة بأحد احرف الإنجليزية الكبيرة $A, B, C, D, \dots$ كما في الشكل التالي :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots\dots\dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث ان عدد الصفوف يرمز له بالرمز m وعدد الاعمدة يرمز له بالرمز n

رتبة المصفوفة :

رتبة المصفوفة A = عدد الصفوف m × عدد الاعمدة n

رتبة المصفوفة $A = m \times n$

مثلاً :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{عمود 1} & \text{عمود 2} \end{array} \\ A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{صف 1} \\ \text{صف 2} \\ \text{صف 3} \end{array} \end{array}$$

$$A = 3 \times 2$$

ملاحظة : قيمة العنصر a_{31} يساوي 5

مثال : أوجد رتب المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل :

رتبة المصفوفة $A = 2 \times 3$

رتبة المصفوفة $B = 2 \times 2$

رتبة المصفوفة $C = 3 \times 2$

رتبة المصفوفة $D = 1 \times 3$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

1 – رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$a\,)\ 3 \times 2$ $\qquad b\,)\ 2 \times 3$ $\qquad c\,)\ 3 \times 3$ $\qquad d\,)\ 2 \times 2$

2 – قيمة العنصر b_{22} في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$a\,)\ 3$ $\qquad b\,)\ 2$ $\qquad c\,)\ -3$ $\qquad d\,)\ 0$

3 – رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$a\,)\ 2 \times 3$ $\qquad$ $b\,)\ 3 \times 1$ $\qquad$ $c\,)\ 3 \times 2$ $\qquad$ $d\,)\ 2 \times 2$

4 – قيمة العنصر a_{22} في المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$a\,)\ 3$ $\qquad$ $b\,)\ -1$ $\qquad$ $c\,)\ 1$ $\qquad$ $d\,)\ 0$

- **أنواع المصفوفات :**

١) **المصفوفة الصفية :** هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط .

مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

٢) **المصفوفة العمودية :** هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط .

مثلاً $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

٣) **المصفوفة المربعة :** هي مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد اعمدتها

مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

٤) **المصفوفة الصفرية:** هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار .

مثلاً $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٥) المصفوفة القطرية : هي مصفوفة مربعه جميع عناصرها تساوي صفر ما عدا القطر الرئيسي

القطر الرئيسي

مثلاُ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

٦) **المصفوفة الوحدة :** هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها تساوي صفر ما عدا القطر الرئيسي يساوي واحد .

ويرمز لها بالرمز $I_n = I_{n\times n}$

مثلاً $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

مثال : حدد نوع المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :

نوع المصفوفة A: مصفوفة عمودية

نوع المصفوفة B: مصفوفة الوحدة I_3

نوع المصفوفة C : مصفوفة قطرية

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) مربعة b) صفرية c) صفية d) عمودية

٢- نوع المصفوفة $[3 \quad -2]$

a) مربعة b) صفرية c) صفية d) عمودية

٣- مصفوفة الوحدة

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

تساوي مصفوفتين :

نقول عن المصفوفة A تساوي المصفوفة B إذا تحقق الشرطين :

١- إذا كانتا من نفس الرتبة
٢- عناصرهما المتناظرة متساوية

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

مثال : هل المصفوفتين A و B لان لهما نفس الرتبة 2×2 وعناصرهما المتناظرة متساوية.

مثال : هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ ولماذا ؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل : نعم ، المصفوفة A تساوي المصفوفة B لان لهما نفس المصفوفة 2×2 وعناصرهما المتناظرة متساوية .

مثال : هل المصفوفتين A و B متساويتين ؟ ولماذا ؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل : لا ، لأن المصفوفتان A و B غير متساويان لان احد عناصرها المتناظرة غير متساوية $(0 \neq 1)$ ، مع العلم ان لهما نفس الرتبة

مثال : أوجد قيمة x التي تجعل المصفوفتين A و B متساوية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} x & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل : نلاحظ ان المصفوفتين A و B لهما نفس الرتبة 3×2 وان جميع عناصرهما المتناظرة متساوية وبالتالي فان قيمة $x = 1$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة

١- قيمة x التي تجعل المصفوفتين $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & x \end{bmatrix}$

$a\,)\ 2$ $\qquad b\,)\ 4$ $\qquad c\,)\ 1$ $\qquad d\,)\ 3$

- **<u>العمليات الحسابية على المصفوفات :</u>**

جمع وطرح المصفوفات :

لجمع او طرح مصفوفتين لهما الرتبة نفسها فإننا نجمع او نطرح العناصر المتناظرة للمصفوفتين

مثلاً $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{bmatrix}$

مثال : إذا كانت $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}\ ,\ B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\ ,\ A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

اوجد كلا مما يأتي إذا امكن :

$a\,)\ A + B \qquad b\,)\ A - B \qquad c\,)\ B + c$

الحل :

$$a\,)\ A + B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + 0 & 5 + (-2) \\ -2 + 5 & 1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b\,)\ A - B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 0 & 5 - (-2) \\ -2 - 5 & 1 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$c\,)\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لا يمكن إجراء عملية الجمع لان المصفوفتين ليس لهما نفس الرتبة

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة

١- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}\ ,$ $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوي

$a\,)\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \qquad b\,)\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -9 & 16 \end{bmatrix} \qquad c\,)\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \qquad d\,)\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

٢- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ فإن $A - B$ تساوي

$a)\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$

٣- إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$ فإن $A + B$ تساوي

$a)$ لا يمكن $b)\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

عند ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه فإننا نضرب العدد في جميع عناصر المصفوفة أو نقسم العدد على جميع عناصر المصفوفة .

مثلاً $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow k\,A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{A}{k} = \begin{bmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} \\ \frac{c}{k} & \frac{d}{k} \end{bmatrix}$$

مثال: إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد كلا مما يأتي :

$a)\ 2A$ $b)\ 2a + B$ $c)\ \frac{B}{2}$

الحل :

$$a)\ 2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 8 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b)\ 2A + B = 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \frac{B}{2}=\frac{\begin{bmatrix}6 & -4\\ 2 & 8\end{bmatrix}}{2}=\begin{bmatrix}\frac{6}{2} & \frac{-4}{2}\\ \frac{2}{2} & \frac{8}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- إذا كانت $B=\begin{bmatrix}8 & 0 & 3\\ -1 & -4 & -2\end{bmatrix}$ فإن ‎-4B‎ تساوي

$a)\ \begin{bmatrix}-32 & 0 & -12\\ 4 & 16 & 8\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}-32 & -4 & -12\\ 4 & -16 & -8\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}8 & 0 & 3\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix}4 & -4 & -1\\ -5 & -8 & -6\end{bmatrix}$

٢- إذا كانت $B=\begin{bmatrix}8 & -6\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ فإن $\frac{B}{-2}$ تساوي

$a)\ \begin{bmatrix}-4 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $d)\ \begin{bmatrix}-16 & 12\\ 4 & -4\end{bmatrix}$

٣- إذا كانت $B=\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}5 & 13\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ فإن $2A+3B$ تساوي

$a)\ \begin{bmatrix}4 & 56\\ 15 & -2\end{bmatrix}$ $b)\ \begin{bmatrix}3 & 23\\ 6 & -1\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}-10 & 13\\ 9 & 0\end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix}5 & 10\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

٤- إذا كانت $B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 2\\ 1 & 7 & -3\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}5 & 13\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ فإن $2A-3B$ تساوي

$a)$ لا يمكن $b)\ \begin{bmatrix}9 & 18\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ $c)\ \begin{bmatrix}9 & 5 & 15\\ 4 & 7 & -4\end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix}5 & 15\\ 7 & -4\end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات :

ضرب صف في عمود :

حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود وهذا الضرب ليس تبديليا

$$\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=[a\times c+b\times d]$$

فمثلاً

$$\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = [2\times 1 + 4\times 3] = [2+12] = [14]$$

$\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ لا يمكن حسابها لان عدد عناصر الصف لا تساوي عدد عناصر العمود

ضرب مصفوفتين :

حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times k$ (أي ان عدد أعمدة المصفوفة الأولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هي مصفوفة من الرتبة $m \times k$

وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية .

فمثلاً :

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}e & f\\g & h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n} \quad \cdot \quad B_{n\times k}$$

متساوية (n=n)

رتبة المصفوفة

AB هي $m \times k$

مثال : أوجد رتبة المصفوفة $B \,.\, A$:

$a)\ A_{3\times 4} \;.\; B_{4\times 2}$ $\qquad$ $b)\ A_{5\times 3} \;.\; B_{3\times 4}$

الحل :

$a)\ 3 \times 2$

$b)\ 5 \times 4$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب مصفوفتين $A_{4\times6} \;.\; B_{3\times2}$

$a\,)\; 4\times2$ $\qquad b\,)6\times3$ $\qquad c\,)\; 4\times3$ $\qquad d\,)$ لا يمكن

٢- رتبة المصفوفة الناتجة $A_{3\times4} \;.\; B_{4\times4}$ هي

$a\,)\; 4\times2$ $\qquad b\,)\; 6\times3$ $\qquad c\,)\; 3\times4$ $\qquad d\,)$ لا يمكن

مثال : اوجد حاصل $\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{bmatrix} \;.\; \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}$

الحل :

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{bmatrix} \;.\; \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[2 \quad 3]\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} & [2 \quad 3]\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix}\\ [1 \quad 4]\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} & [1 \quad 4]\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\times5+3\times7 & 2\times6+3\times8\\1\times5+4\times7 & 1\times6+4\times8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}10+21 & 12+24\\5+28 & 6+32\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}31 & 36\\33 & 38\end{bmatrix}$$

مثال : إذا كانت $A = \begin{bmatrix}2 & 8\\1 & 3\end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix}2 & 8\\1 & -3\end{bmatrix} \;,\; C = \begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\6 & 1 & -2\end{bmatrix}$

اوجد ناتج كل مما يأتي :

$a\,)\; A\,.B$ $\qquad b\,)\; B\;.\;A$ $\qquad c\,)\; A\,.\;C$ $\qquad d\,)\; C\;.\;B$

الحل :

$$a\,)\; A\,.B = \begin{bmatrix}2 & 8\\1 & 3\end{bmatrix} \;.\; \begin{bmatrix}2 & 8\\1 & -3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\times2+8\times1 & 2\times8+8\times(-3)\\1\times2+3\times1 & 1\times8+3\times(-3)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4+8 & 16+(-24)\\2+3 & 8+(-9)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 & -8\\5 & -1\end{bmatrix}$$

$$b\,)\; B\,.A = \begin{bmatrix}2 & 8\\1 & -3\end{bmatrix} \;.\; \begin{bmatrix}2 & 8\\1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+8 & 16+24\\2+(-3) & 8+(-9)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 & 40\\-1 & -1\end{bmatrix}$$

$$c)\ A.C=\begin{bmatrix}2&8\\1&3\end{bmatrix}\ .\ \begin{bmatrix}2&0&4\\6&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\times2+8\times6&2\times0+8\times1&2\times4+8(-2)\\1\times2+3\times6&1\times0+3\times1&1\times4+3\times(-2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+48&0+8&8+(-16)\\2+18&0+3&4+(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52&8&-8\\20&3&-2\end{bmatrix}$$

$$d)\ C\ .B=\begin{bmatrix}2&0&4\\6&1&-2\end{bmatrix}_{2\times3}.\ \ \begin{bmatrix}2&8\\1&-3\end{bmatrix}_{2\times2}$$

غير معرفه لان عدد أعمدة المصفوفة C لا تساوي عدد صفوف المصفوفة B

لاحظ أن :

$$A.B=\begin{bmatrix}12&-8\\5&-1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}12&40\\-1&-1\end{bmatrix}$$

أي أن $A.B\ \neq B.A$ (عملية الضرب ليس ابدالي في المصفوفات)

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- إذا كانت $B=\begin{bmatrix}-1&2\\7&6\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1&5\\2&4\end{bmatrix}$ فان $A\cdot B$ تساوي

$a)\begin{bmatrix}34&32\\26&28\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}-1&2\\7&6\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}34&-32\\26&24\end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix}1&7\\9&10\end{bmatrix}$

٢- إذا كانت $B=\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}2&3\\5&-1\end{bmatrix}$ فان $A\cdot B$ تساوي

$a)\begin{bmatrix}12\\-21\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}-6\\18\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix}-6&-9\\30&-6\end{bmatrix}$

- المحددات :

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن محدد المصفوفة A هو عبارة عن عدد حقيقي ونرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

حساب المحددات 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (4 \times 6) - (5 \times 3) = 24 - 15 = 9$$

مثال: اوجد قيمة كل محدده المصفوفات التالية إذا امكن :

$$a\,)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad b\,)\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$a\,)\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times -4) = 6 - (-4) = 6 + 4 = 10$$

$$b\,)\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

لا يمكن حساب المحددة لأن المصفوفة ليست مربعة

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- محددة $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$ تساوي

$d\,) - 7$ $\qquad c\,) - 6$ $\qquad b\,)\ 10$ $\qquad a\,)\ 22$

٢- محددة $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ تساوي

$d\,)\ 45$ $\qquad c\,) - 17$ $\qquad b\,)$ لا يمكن $\qquad a\,) - 73$

حساب المحددات 3×3 :

المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هي عبارة عن مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الموازية للقطر الرئيسي (من اعلى الى اسفل) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية (من اسفل الى اعلى) ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على اليمين

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right.$$

$$= (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

مثال : أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

الحل :

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{array} \right.$$

$$= \Big((4 \times 2 \times 1) + \big(-1 \times 6 \times (-2)\big) + (3 \times (-3) \times 5)\Big)$$
$$- \Big(\big(3 \times 2 \times (-2)\big) + (4 \times 6 \times 5) + (-1 \times (-3) \times 1)\Big)$$

$$= \big(8 + 12 + (-45)\big) - \big((-12) + 120 + 3\big) = -25 - 111 = -136$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -136$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ تساوي

$a) -60 \qquad b) -525 \qquad c) -8 \qquad d) 60$

٢- $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ تساوي

$a) -174 \qquad b) 174 \qquad c) 60 \qquad d) 45$

- **مقلوب (معكوس) مصفوفة :**

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت محددتها لا تساوي الصفر وبالتالي يوجد مقلوب للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^{-1} أي أن :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

سنتطرق في هذه الوحدة على معكوس مصفوفة 2×2 فقط

نظرية : اذا كانت a, b, c, d اعداد حقيقية بحيث أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

فإن مقلوب المصفوفة تساوي :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$$

مثال : أوجد مقلوب المصفوفات التالية :

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$a\ )\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

أولاً نوجد $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (1 \times 6) = 6 - 6 = 0$$

بما ان $|A| = 0$ اذن لا يمكن إيجاد A^{-1}

$$b\ )\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

بما ان $|B| \neq 0$ اذن يمكن إيجاد B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|B|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- إذا كان $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ فإن A^{-1}

a) لا يمكن $\qquad b$) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad c$) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad d$) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

٢- اذا كان $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ فإن B^{-1}

a) لا يمكن $\qquad b$) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \qquad c$) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad d$) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

تمارين نهاية باب المصفوفات

تمرين : أجب بصح أمام العبارة الصحيحة وخطأ أمام العبارة الخاطئة

1 \ المصفوفة عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة على شكل صفوف وأعمدة ( )

2 \ رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 9 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ هي 2×2 ( )

3 \ جمع وطرح المصفوفات يجب أن تكون نفس الرتبة ( )

4 \ مصفوفة الصف هي التي تتكون من عمود واحد فقط ( )

5 \ المصفوفة الصفرية هي التي جميع عناصرها أصفار ( )

6 \ مصفوفة الوحدة هي على الشكل $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ( )

7 \ المصفوفة المربعة هي التي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها ( )

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$a)\ 2 \times 2$ $b)\ 2 \times 3$ $c)\ 3 \times 2$ $d)\ 3 \times 1$

٢- رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$a)\ 2 \times 2$ $b)\ 2 \times 3$ $c)\ 3 \times 2$ $d)\ 3 \times 1$

٣- قيمة العنصر a_{21} من المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$a)\ 1$ $b)\ 3$ $c)\ 5$ $d)\ 8$

٤- حاصل العملية $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$

$a)\ \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $b)\ \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $c)\ \begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ $d)\ \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

٥- حاصل العملية $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \dots\dots\dots$

$a)\ \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $b)\ \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $c)\ \begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ $d)\ \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

٦- حاصل العملية ... ... $= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$a)\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

٧- حاصل العملية $2\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$a)\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

٨- محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$a)\ 1$ $b)\ 2$ $c)\ 3$ $d)\ 4$

٩- مقلوب المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$a)\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

١٠- يرمز لمحدد المصفوفة A

$a)\ A$ $b)\ A^2$ $c)\ |A|$ $d)\ A^{-1}$

١١- يرمز لمعكوس المصفوفة A

$a)\ A$ $b)\ A^2$ $c)\ |A|$ $d)\ A^{-1}$

١٢- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

$a)$ صف $b)$ عمود $c)$ صفرية $d)$ وحدة

١٣- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

$a)$ صف $b)$ عمود $c)$ صفرية $d)$ وحدة

١٤- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$a)$ صف $b)$ عمود $c)$ صفرية $d)$ وحدة

١٥- نوع المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) صف　　b) عمود　　c) صفرية　　d) وحدة

تمرين : لدينا $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 10 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد الآتي :

$1\backslash$ رتبة A　　$2\backslash$ رتبة B　　$3\backslash$ رتبة C　　$4\backslash$ رتبة D　　$5\backslash$ رتبة E

$6\backslash a_{12}$　　$7\backslash b_{21}$　　$8\backslash c_{21}$　　$9\backslash d_{23}$　　$10\backslash e_{23}$

$11\backslash a_{11}$　　$12\backslash b_{22}$　　$13\backslash c_{11}$　　$14\backslash d_{21}$　　$15\backslash e_{31}$

$16\backslash A+B$　　$17\backslash B+D$　　$18\backslash C-E$　　$19\backslash \frac{C}{2}$

$20\backslash 3E$　　$21\backslash B\cdot A$　　$22\backslash D\cdot C$　　$23\backslash B\cdot E$

$24\backslash |A|$　　$25\backslash |B|$　　$26\backslash |C|$　　$27\backslash |D|$

$28\backslash |E|$　　$29\backslash A^{-1}$　　$30\backslash B^{-1}$

الوحدة الخامسة:

المعادلات

تعريف : المعادلة هي التساوي بين عبارتين (ككثيرتي حدود) وتكون هذه المعادلة صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى .

مثلاً المعادلة $2x+1=9$ تكون صحيحة عندما $x=4$ وخاطئة لأية قيمة أخرى ل x إذن نقول إن $x=4$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 4 تصبح المعادلة

$2(4)+1=9$ وهذا صحيح .

إذن عملية حل المعادلة هي إيجاد كل قيم المتغير التي تستوفي المعادلة ، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة .

- **المعادلات الخطية :**

تعريف: المعادلة الخطية هي التي تكتب على الصورة $ax+b=0$ حيث a و b اعداد حقيقية و $a\neq 0$ ويكون الحل العام $x=\frac{-b}{a}$

مثال: حل المعادلات التالية :

$$a\,)\ 2x=10 \qquad b\,)\ 3x+2=8 \qquad c\,)\ 5x+1=\frac{x}{2}+10$$

الحل :

$a\,)\ 2x=10$

$\frac{2}{2}x=\frac{10}{2} \rightarrow x=5$

$b\,)\ 3x+2=8$

$3x+2=8 \rightarrow 3x=8-2 \rightarrow 3x=6$

$x=\frac{6}{2} \rightarrow x=3$

$c\ )\ 5x + 1 = \frac{x}{2} + 10$

$2 \times (5x + 1) = 2 \times \left(\frac{x}{2} + 10\right) \quad \rightarrow \quad 10x + 2 = x + 20$

$10x - x = 20 - 2 \quad \rightarrow \quad 9x = 18 \quad \rightarrow \quad x = \frac{18}{9} \quad \rightarrow x = 2$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة لحل المعادلات التالية :

$1\ )\ 5x - 2 = 18$

$a\ )\ x = 4 \qquad b\ )\ x = -4 \qquad c\ )\ x = 5 \qquad d\ )\ x = -5$

$2\ )\ 6x + 4 = 2x + 12$

$a\ )\ x = 2 \qquad b\ )\ x = -2 \qquad c\ )\ x = 4 \qquad d\ )\ x = -4$

$3\ )\ \frac{2x + 3}{3} = \frac{x - 1}{2}$

$a\ )\ x = 9 \qquad b\ )\ x = -9 \qquad c\ )\ x = 3 \qquad d\ )\ x = -3$

- **معادلات من الدرجة الثانية :**

معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد يمكن كتابتها على الصورة القياسية التالية :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad ,a \neq 0$$

ولحلها نستخدم القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثلا :

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

ملاحظة : يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة ويرمز له بالرمز Δ (دلتا) وعليه فيمكن كتابة القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

وأما دور المميز فهو تحديد عدد جذور (حلول) المعادلة في R كما يوضحه الجدول الآتي :

المميز	عدد الحلول
$\Delta > 0$	حلان حقيقيان
$\Delta = 0$	حل واحد حقيقي
$\Delta < 0$	لا توجد حلول حقيقية

مثال : اوجد حل المعادلات الآتية في R

$a\,)\ x^2 + 5x = -6 \qquad b\,)\ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad c\,)\ 3x^2 + 2x = -1$

أولا : نكتب المعادلة على الصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$:

$a\,)\ x^2 + 5x + 6 = 0$

ثانيا : نوجد قيمة المعاملات a, b, c :

$a = 1 \quad , \qquad b = 5 \quad , \qquad c = 6$

ثالثا : نوجد قيمة المميز : $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 5^2 - 4(1)(6) \qquad \Longrightarrow \Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1 \qquad , \Delta = 1 > 0$

يوجد حلان حقيقيان

رابعا : نعوض باستخدام القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+1}{2} = \dfrac{-4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-5-1}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

وبالتالي يكون الحلان هما : -3 و -2

$b\ )2x^2-4x+2=0$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية وبالتالي نستطيع الحل باستخدام الخطوات السابقة في الفقرة a او التعويض مباشرة في القانون العام :

$$ax^2+bx+c=0$$

$$2x^2-4x+2=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(2)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{4}=\frac{4\pm 0}{4}$$

$$x=\frac{4}{4}\Longrightarrow x=1$$

يوجد حل واحد فقط لان$0=\Delta$ وبالتالي يكون الحل هو *1*

$c\ )\ 3x^2+2x=-1$

أولا : نكتب المعادلة على الصورة القياسية

$$ax^2+bx+c=0$$

$$3x^2+2x+1=0$$

ثانيا : نوجد قيمة المعاملات a,b,c :

$$a=3\quad,\quad b=2\quad,\quad c=1$$

ثالثا : نوجد قيمة المميز : $\Delta=b^2-4ac$

$$\Delta=2^2-4(3)(1)\quad\Longrightarrow\quad\Delta=4-12$$

$$\Delta=-8\qquad,\Delta=-8<0$$

وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة لأن المميز اقل من الصفر

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة لحل المعادلات التالية :

$1)\ x^2 + 7x = -10$

$a)\ x = -2\ , x = -5$ $\quad$ $b)\ x = 2\ , x = 5$ $\quad$ $c)$ لا يوجد حل $\quad$ $d)\ x = 4$

$2)\ x^2 + 8x + 16 = 0$

$a)\ x = -3\ \ , x = 4$ $\quad$ $b)\ x = 5$ $\quad$ $c)$ لا يوجد حل $\quad$ $d)\ x = -4$

$3)\ 5x^2 + x + 2 = 0$

$a)\ x = 4$ $\quad$ $b)\ x = 5$ $\quad$ $c)$ لا يوجد حل $\quad$ $d)\ x = -4$

- **<u>حل مجموعة معادلات خطية :</u>**

المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجة الأولى .

مثلاً

معادلة خطية من الدرجة الأولى في متغير واحد $\quad 5x + 10 = 0$

معادلة خطية من الدرجة الثانية في متغيرين $\quad 2x + 3y = 5$

معادلة خطية من الدرجة الأولى في ثلاثة متغيرات $\quad x + 2y - 5z = 1$

تعريف : جملة المعادلات الخطية هي عبارة عن مجموعة من المعادلات الخطية

- **جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين :**

لدينا طريقتين لحل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين :

- **المعادلات المصفوفية :**

لتمثيل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين يمكن استخدام المصفوفات. فمثلاً يمكن كتابة معادلة مصفوفية لحل جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين :

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ويمكن التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الاتية :

$$A \cdot X = C$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة المعاملات}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة المجاهيل}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\text{مصفوفة الثوابت}}$$

ثم نحل المعادلة المصفوفية بالطريقة التالية :

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

لاحظ أن حل المعادلة المصفوفية من الشكل $AX = B$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت .

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2×2 :

النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $A^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}}{|A|}$

وذلك إذا كانت $|A| \neq 0$

مثال : اوجد حل المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية :

$$2x + 3y = 1$$

$$3x - 4y = 2$$

الحل :

$$2x + 3y = 1$$

$$3x - 4y = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-8 - 9) = -17$$

حيث أن $\Delta \neq 0$ فإن المصفوفة A لها معكوس ضربي

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-17} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -4 - 6 \\ -3 + 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{-1}{17} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{10}{17} \quad , \quad y = \frac{-1}{17}$$

مثال: أوجد حل جملة المعادلتين باستخدام طريقة المعادلات المصفوفية:

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$

الحل :

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$
$$Ax = b$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 1) = -2$$

حيث أن$0 \neq \Delta$ فإن المصفوفة A لها معكوس ضربي

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$x = A^{-1}b$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -5 + 1 \\ -5 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$
$$x = 2 \quad , \qquad y = 3$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١) إذا كانت المعادلتين $x + y = 5$, $2x - 7y = 3$ فإن مجموعة حل المعادلتين تساوي

$a)\ x = \frac{38}{9}\ ,\quad y = \frac{7}{9}$ $\qquad b)\ x = 5\ ,\quad y = 3$

$c)\ x = 2\ ,\ y = 7$ $\qquad d)\ x = 1\ ,\ y = 1$

٢) إذا كانت المعادلتين $x + y = 5$, $x - y = 4$ فإن مجموعة حل المعادلتين تساوي

$a)\ x = 1\ ,\quad y = 1$ $\qquad b)\ x = 7\ ,\ y = 3$

$c)\ x = 1\ ,\ y = -1$ $\qquad d)\ x = 4\ ,\quad y = 10$

٣) إذا كانت المعادلتين $3x + y = 1$, $x + 2y = 5$ فإن مجموعة حل المعادلتين تساوي

$a)\ x = 3\ ,\quad y = 5$ $\qquad b)\ x = 2\ ,\quad y = 3$

$c)\ x = 1\ ,\ y = 1$ $\qquad$ $d)$ لا يوجد حل

- **طريقة كرايمر :**

ليكن لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y على الشكل التالي :

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

بحيث ان المعاملات a_1, a_2, b_1, b_2 والثوابت c_1, c_2 اعداد حقيقية فإن حل جملة المعادلتين :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

حيث ان :

محدد الجملة D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة آي أن :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد 2×2 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة ، أي ان :

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

ملاحظة :

١. اذا كان $D \neq 0$ فإن للجملة حل وحيد هو :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}$$

٢. اذا كان $D = 0$ فإن لدينا حالتين :

- **الحالة الأولى :** اذا كان واحدا على الأقل من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فان الجملة مستحيلة الحل .
- **الحالة الثانية :** اذا كانت كل محددات المجاهيل تساوي الصفر فان للجملة عدد لا نهائي من الحلول

مثال : حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرايمر :

$$a)\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} -2x + y = 5 \\ x - 0.5y = 2 \end{cases}$$

الحل :

$$a)\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

أولا : نحسب محدد الجملة D :

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (1)(5) = 4 - 5 = -1$$

وبالتالي يوجد حل وحيد لان $D = -1 \neq 0$

ثانيا : نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y :

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (1)(5) = 3 - 5 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (1)(3) = 4 - 3 = 1$$

ثالثا : نوجد قيم x و y :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{-1} = -1$$

ملاحظة : للتأكد من الحل نعوض عن قيمة كلا من قيم x وy في جملة المعادلات

$$b\ ) \begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

أولا : نحسب محدد الجملة D :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (6)(1) = 6 - 6 = 0$$

ثانيا : نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y :

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (2)(6) = 12 - 12 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (1)(4) = 4 - 4 = 0$$

بما ان محدد الجملة $D = 0$ ومحددات المجاهيل $D_x = D_y = 0$ اذن للجملة عدد لا نهائي من الحلول

$$c)\ \begin{cases} -2x + y = 5 \\ x - 0.5y = 2 \end{cases}$$

أولا : نحسب محدد الجملة D :

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = (-2)(-0.5) - (1)(1) = 1 - 1 = 0$$

ثانيا : نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{vmatrix} = (5)(-0.5) - (2)(1) = -2.5 - 2 = -4.5 \neq 0$$

بما أن محدد الجملة $D = 0$ ومحدد $D_x \neq 0$ اذن الجملة مستحيلة الحل

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة لحل جملة المعادلات التالية :

$$1)\ \begin{cases} 3x + 4y = -14 \\ -2x - 3y = 11 \end{cases}$$

$a)\ x = 2\ , y = -5$ $\quad b)\ x = -5\ \ , y = -2$

c)مستحيلة الحل $\quad d$) عدد لا نهائي

$$2)\ \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$$

$a)\ x = 2\ \ , y = 0$ $\quad b)\ x = 1\ \ , y = 3$

c)مستحيلة الحل $\quad d$) عدد لا نهائي

$$3)\ \begin{cases} 7x + 3y = 27 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases}$$

$a)\ x = 3\ \ , y = 2$ $\quad b)\ x = 2\ \ , y = 3$

c)مستحيلة الحل $\quad d$) عدد لا نهائي

- **<u>جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل :</u>**

تعريف : ليكن لدينا جملة ثلاث معادلات خطية ذات المجاهيل x و y و z على الشكل التالي :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

فإن حل هذه الجملة :

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad , \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad , \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

بحيث ان المعاملات $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ والثوابت d_1, d_2, d_3 اعداد حقيقية

حيث :

محدد الجملة D هو المحدد 3×3 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة آي أن :

$$D = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

محدد مجهول ما هو المحدد 3×3 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة ، أي ان :

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{array}$$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{array}$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

ملاحظة :

١) اذا كان $D \neq 0$ فان للجملة حل وحيد هو :

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} \quad , \quad z = \frac{D_z}{D}$$

٢) اذا كان $D = 0$ فان لدينا حالتين :

- الحالة الأولى : اذا كان واحدا على الأقل من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فان الجملة مستحيلة الحل
- الحالة الثانية : اذا كانت كل محددات المجاهيل تساوي الصفر فان للجملة عدد لا نهائي من الحلول

مثال : حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرايمر :

$$a\,)\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases} \qquad\qquad b\,)\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 12 \end{cases}$$

الحل :

$$a\,)\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 13 \end{cases}$$

أولا : نحسب محدد الجملة D :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 6 + 3 + 4 - 9 - 2 - 4 = -2 \neq 0$$

ثانيا : نحسب محددات المجاهيل D_x و D_y و D_z :

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ 13 & 2 \end{matrix} = 36 + 13 + 22 - 39 - 12 - 22 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 11 \\ 3 & 13 \end{matrix} = 22 + 18 + 26 - 33 - 13 - 24 = -4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 39 + 33 + 24 - 54 - 22 - 26 = -6$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad , \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$b\ ) \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 12 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 2 + 6 - 2 - 3 - 1(-8) = 10 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ 12 & -1 \end{matrix} = 6 + 24 - 5 - 12 - 3 - (-20) = 30$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 12 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 12 \end{matrix} = 10 - 9 + 24 - 15 - (-12) - 12 = 10$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 12 - 30 - 6 - 9(-5) - (-48) = 20$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{30}{10} = 3 \quad , y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{10} = 1 \quad , z = \frac{D_z}{D} = \frac{20}{10} = 2$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة لحل جملة المعادلات التالية :

$$1)\ \begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x + y - 4z = -6 \\ 2x + 3y - 4z = 4 \end{cases}$$

a) $x = -2 , y = 4 , z = 1$ $\quad$ b) $x = -2 , y = 4 , z = -1$

c) مستحيلة الحل $\quad$ d) عدد لا نهائي

$$2)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = 17 \\ 3x + 2y + z = 11 \\ x - 5y + z = -5 \end{cases}$$

a) $x = 1 , y = 2 , z = 4$ $\quad$ b) $x = -1 , y = 3 , z = -4$

c) مستحيلة الحل $\quad$ d) عدد لا نهائي

تمارين نهاية باب المعادلات

تمرين : اجب بصح امام العبارة الصحيحة وخطا امام العبارة الخاطئة

١. المعادلة هي التساوي بين عبارتين كثيرتي ( )
٢. إذا كانت قيمة المميز $\Delta = \sqrt{b_2 - 4ac}$ موجبة فهناك حلان حقيقيان ( )

تمرين : اوحد حل المعادلات التالية :

1) $4x + 2 = 14$

2) $3x - 10 = 20$

3) $9x + 2 = x + 6$

4)$3x + 2 = 7$

5) $x^2 = 16$

6) $x^2 + 9x + 20 = 0$

تمرين : اوجد حل المعادلة بالقانون العام :

$x^2 - 12x + 20 = 0$

تمرين : حل جملة المعادلات الخطية بطريقة كرامر :

$$\begin{Bmatrix} 2x - y = 8 \\ 3x - 2y = 11 \end{Bmatrix}$$

الوحدة السادسة :
الهندسة المستوية والفراغية

الهندسة المستوية

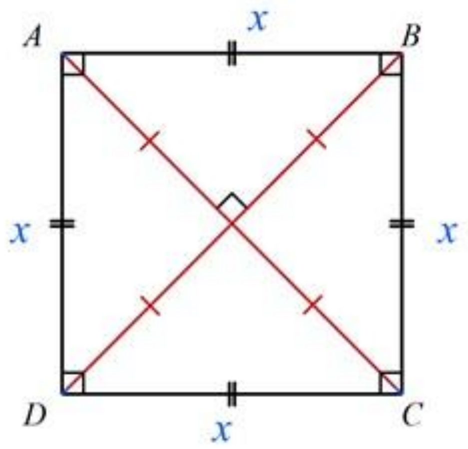
الهندسة المستوية فرع من الرياضيات يهتم بدراسة الأشكال الهندسية التي تقع كل نقاطها في مستوٍ واحد وتنقسم الى قسمين هما المضلعات والدائرة :

- **الاشكال الرباعية :**

الشكل الرباعي هو شكل هندسي مغلق له أربعة اضلاع وأربعة زوايا ومجموع زواياه تساوي $360°$ ومن الأمثلة على الشكل الرباعي (المربع – المستطيل – المعين – شبه المنحرف – متوازي الأضلاع)

- **المربع :**

المربع هو شكل رباعي له أربعة أضلاع متساوية وجميع زواياه قائمة كما في الشكل *1-6*



شكل $1-6$

مساحة ومحيط المربع :

إذا كان طول ضلع المربع x فإن :

مساحة المربع : $A = x^2$

محيط المربع : $P = 4\,x$

مثال : احسب مساحة ومحيط المربع الذي طول ضلعه $3\ cm$.

الحل :

المساحة

$$A = x^2$$

$$A = (3)^2 = 9\ cm^2$$

المحيط

$$P = 4\ x$$

$$P = 4\ \times 3 = 12\ cm^2$$

مثال : سجادة مربعة الشكل طولها $6m$ احسب مساحتها ومحيطها

الحل :

المساحة

$$A = x^2$$

$$A = (6)^2 = 36\ m^2$$

المحيط

$$P = 4\ x$$

$$P = 4\ \times 6 = 24\ m^2$$

مثال : حديقة مربعة الشكل محيطها $24\ m$ احسب طول ضلعها ثم احسب مساحة الحديقة

الحل :

$$P = 4\ x = 24$$

$$4\ x = 24$$

$$x = \frac{24}{4} = 6\ m$$

إذا طول ضلع الحديقة يساوي $6\ m$

$$A = x^2$$

$$A = (6)^2 = 36\ m^2$$

إذا مساحة الحديقة تساوي $36\ m^2$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- مربع طول ضلعه $7\ cm$ فإن محيطه يساوي

a) $14\ cm$ b) $28\ cm$ c) $49\ cm$ d) $11\ cm$

٢- حديقة مربعة الشكل طولها $10\ cm$ فإن مساحة الحديقة تساوي

a) $40\ m^2$ b) $20\ m^2$ c) $10\ m^2$ d) $100\ m^2$

٣- مربع محيطه $12\ cm$ فإن طوله ضلعه يساوي

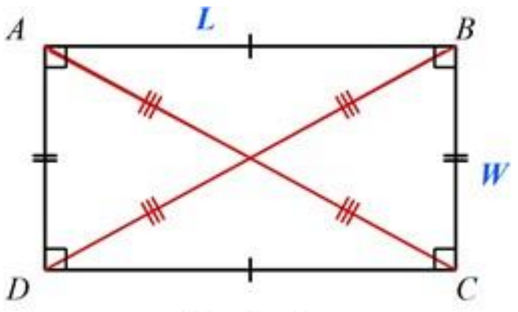
a) $3\ cm$ b) $7\ cm$ c) $4\ cm$ d) $12\ cm$

٤- مربع مساحته $100\ cm^2$ فإن طول ضلع المربع يساوي

a) $20\ cm$ b) $100\ cm$ c) $4\ cm$ d) $10\ cm$

- **المستطيل :**

المستطيل هو شكل رباعي له أربعة أضلاع كل ضلعين متقابلين متساويين وجميع زواياه قائمة كما في الشكل 2-6



شكل $2-6$

مساحة ومحيط المستطيل :

إذا كان طول المستطيل L وعرض المستطيل W فإن :

مساحة المستطيل: $A = L \times W$

محيط المستطيل : $P = 2(L + W)$

مثال : احسب مساحة ومحيط مستطيل طوله $3\ cm$ وعرضه $2\ cm$

الحل :

$$A = L \times W$$

$$A = 2 \times 3 = 6\ cm^2$$

إذا مساحة المستطيل تساوي $6\ cm^2$

$$P = (L + W) \times 2$$

$$P = (3 + 2) \times 2$$

$$P = 5 \times 2 = 10\ cm$$

إذا محيط المستطيل يساوي $10\ cm$

مثال : غرفة معيشة طولها $6\ m$ وعرضها $4\ m$ ، أوجد مساحتها ومحيطها

الحل :

$$A = L \times W$$

$$A = 6 \times 4 = 24\ m^2$$

إذا مساحة الغرفة تساوي $24\ m^2$

$$P = 2(L + W)$$

$$P = 2(6 + 4)$$

$$P = 2(10) = 20\ m$$

إذا محيط الغرفة يساوي $20\ m$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة

١. مستطيل طوله $5\ cm$ وعرضه $3\ cm$ فإن مساحته تساوي

$d\ )\ 10\ cm^2$ $\quad c\ )\ 15\ cm^2$ $\quad b\ )\ 12\ cm^2$ $\quad a\ )\ 24\ cm^2$

٢. مستطيل طوله $7\ cm$ وعرضه $4\ cm$ فإن محيطه يساوي

$d\ )\ 12\ cm$ $\quad c\ )\ 14\ cm^2$ $\quad b\ )\ 22\ cm$ $\quad a\ )\ 14\ cm$

٣. إذا كانت لدينا حديقة طولها $10\ cm$ وعرضها $5\ m$ فإن مساحتها

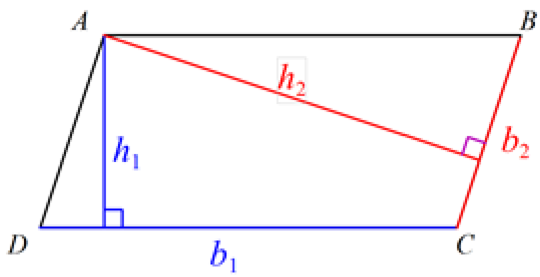
$d\ )\ 50\ m^2$ $\quad c\ )\ 25\ m^2$ $\quad b\ )\ 15\ m^2$ $\quad a\ )\ 10\ m^2$

٤. إذا كانت لدينا حديقة طولها $10\ m$ وعرضها $5\ m$ فإن محيطها يساوي

$d\ )\ 10\ m$ $\quad c\ )\ 30\ m^2$ $\quad b\ )\ 15\ m$ $\quad a\ )\ 30\ m$

- **متوازي الأضلاع :**

هو عبارة عن شكل رباعي كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين في الطول وكل زاويتين متقابلتين متساويتين ، كما فيل الشكل 3-6



شكل $3-6$

مساحة ومحيط متوازي الاضلاع :

إذا كان طول القاعدة b والارتفاع المناظر له h

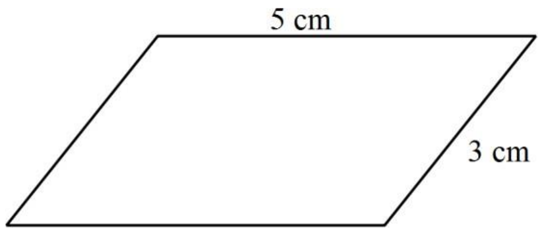
المحيط $\quad P = AB + BC + CD + AD$

المساحة $\quad A = b_1 \times h_1$

ملاحظة : القاعدة الصغرى b_2 يقابلها الارتفاع الأكبر h_2

والقاعدة الكبرى b_1 يقابلها الارتفاع الأصغر h_1

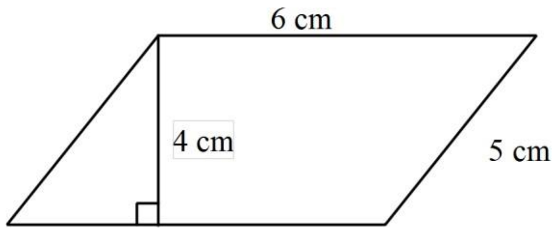
مثال : اوجد محيط متوازي الأضلاع



الحل :

$$P = 5 + 3 + 5 + 3 = 16\ cm$$

مثال : أوجد مساحة متوازي الأضلاع



الحل :

$$A = b \times h$$

$$A = 6 \times 4 = 24cm^2$$

مثال : متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $14\ cm$ $8\ cm$ احسب محيطه ومساحته إذا كان ارتفاعه الأصغر $5\ cm$

الحل :

المحيط $P = 2($مجموع ضلعين متجاورين$)$

$$P = 2(8 + 14) = 2(22) = 44\ cm$$

المساحة $A = b \times h$ (الارتفاع الاصغريقابل القاعدة الكبرى)

$$A = 14 \times 5 = 70\ cm^2$$

مثال : متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه$10\ cm\ ,8\ cm$ احسب مساحته إذا كان ارتفاعه الأكبر $6\ cm$

الحل :

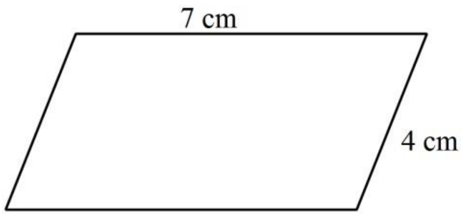
الارتفاع الأكبر يقابل القاعدة الصغرى

$$A = b \times h$$

$$A = 8 \times 6 = 48\ cm^2$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- محيط متوازي الاضلاع يساوي

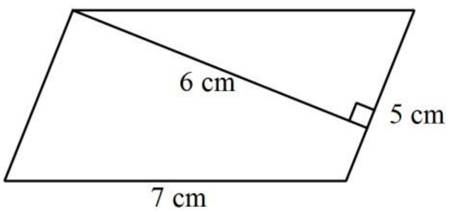


$a\ )\ 11\ cm$ $\quad b\ )\ 20\ cm$ $\quad c\ )\ 22\ cm$ $\quad d\ )\ 7\ cm$

٢- متوازي اضلاع طول قاعدته $6\ cm$ وطول الارتفاع المناظر للقاعدة $3\ cm$ فإن مساحته تساوي

$a\ )\ 18\ cm^2$ $\quad b\ )\ 20\ cm^2$ $\quad c\ )\ 9\ cm^2$ $\quad d\ )\ 17\ cm^2$

٣- مساحة متوازي الأضلاع يساوي



$a\ )\ 24\ cm^2$ $\quad b\ )\ 20\ cm^2$ $\quad c\ )\ 30\ cm^2$ $\quad d\ )\ 42\ cm^2$

٤- متوازي الأضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $5\ cm, 11\ cm$ واذا كان إرتفاعه الأصغر $4\ cm$ فإن مساحته تساوي

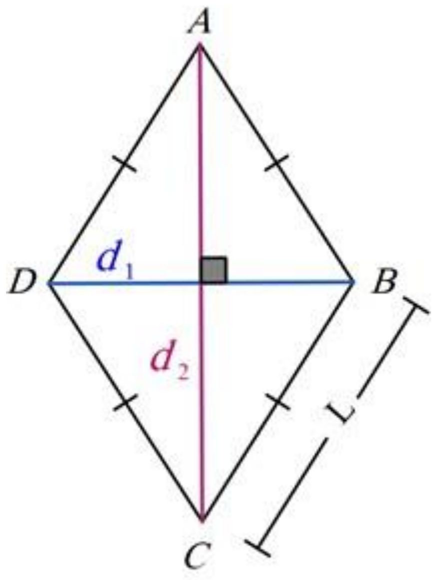
$a\ )\ 32\ cm^2$ $\quad b\ )\ 20\ cm^2$ $\quad c\ )\ 40\ cm^2$ $\quad d\ )\ 44\ cm^2$

٥- متوازي الاضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $12\ cm, 7\ cm$ واذا كان ارتفاعه الأكبر $5\ cm$ فان مساحته تساوي

$a\ )\ 20\ cm^2$ $\quad b\ )\ 35cm^2$ $\quad c\ )\ 60\ cm^2$ $\quad d\ )\ 30\ cm^2$

- **المعين :**

هو عبارة عن شكل رباعي جميع اضلاعه متساوية وكل زاويتين متقابلتين متساويتين كما في الشكل *4-6*



شكل 6 – 4

مساحة ومحيط المعين :

إذا كان طول ضلع المعين L وقطراه d_2, d_1

المحيط $P = AB + BC + CD + AD$

المساحة $A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

مثال : اوجد محيط المعين الذي طول ضلعه $6\ cm$

الحل :

$$P = 4\,L$$

$$P = 4 \times 6 = 24\ cm$$

مثال : اوجد مساحة المعين الذي طولا قطريه $4\ cm, 7\ cm$

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$A = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14\ cm^2$$

مثال : معين محيطه $12\ cm$ ، اوجد طول ضلعه

الحل :

$$P = 4\ L$$

$$L = \frac{P}{4} = \frac{12}{4}$$

$$L = 3\ cm^2$$

إذا طول ضلع المعين يساوي $3\ cm^2$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- معين طول ضلعه $7\ cm$ فان محيطه يساوي

a) $7\ cm$ b) $8\ cm$ c) $49\ cm$ d) $28\ cm$

٢- معين طولا قطريه $6\ cm, 7\ cm$ فإن مساحة المعين تساوي

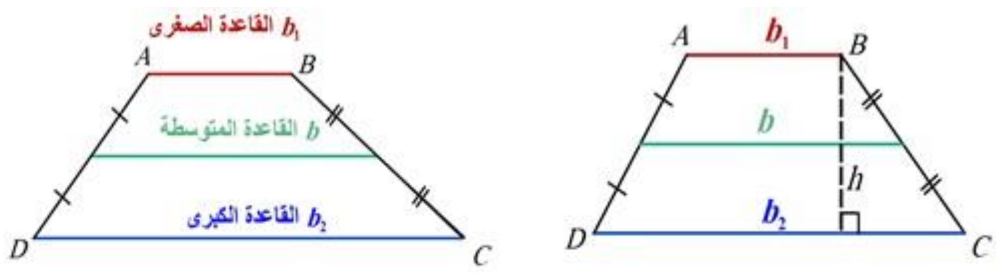
a) $42\ cm^2$ b) $13\ cm^2$ c) $21\ cm^2$ d) $50\ cm^2$

٣- معين محيطه $16\ cm$ فان طول ضلعه يساوي

a) $16\ cm$ b) $8\ cm$ c) $2\ cm$ d) $4\ cm$

- **شبه المنحرف :**

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان قاعدتي شبه المنحرف القاعدة الصغرى والقاعدة الكبرى كما في الشكل 5-6



شكل 6 – 5

مساحة ومحيط شبه المنحرف :

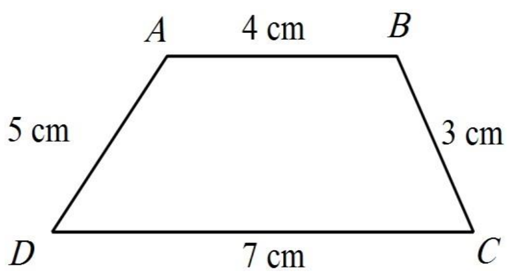
إذا كان طول القاعدة الصغرى b_1 وطول القاعدة الكبرى b_2 وطول القاعدة المتوسطة b والارتفاع h

محيط شبه المنحرف : $P = AB + BC + CD + AD$

مساحة شبه المنحرف : $A = b \times h$

$$A = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$

مثال : اوجد محيط شبه المنحرف



الحل :

$$P = 7 + 3 + 4 + 5 = 19\ cm$$

مثال : شبه المنحرف طول قاعدته المتوسطة $17\ cm$ وإرتفاعه $11\ cm$, أوجد مساحة شبه المنحرف .

الحل :

$$A = b \times h$$

$$A = 17 \times 11 = 187\ cm^2$$

مثال : أوجد مساحة شبه المنحرف الذي طوله قاعدته الصغرى $3\ cm$ وقاعدته الكبرى $5\ cm$ وطول ارتفاعه $4\ cm$

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times (3 + 5) \times 4 = 16 cm^2$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

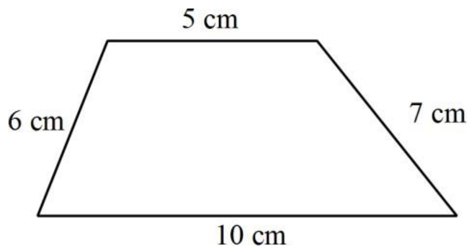
١- شبه منحرف طول قاعدته المتوسطة $6\ cm$ وطول ارتفاعه $5\ cm$ ، فإن مساحته تساوي

a) $25\ cm^2$ b) $11\ cm$ c) $30\ cm^2$ d) $20\ cm^2$

٢- شبه منحرف طول قاعدتيه الكبرى والصغرى $5\ cm, 7\ cm$ وطول ارتفاعه $4\ cm$ فإن مساحته تساوي

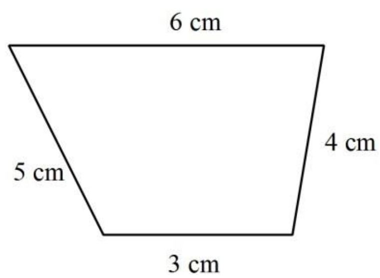
a) $24\ cm^2$ b) $12\ cm$ c) $28\ cm^2$ d) $20\ cm^2$

٣- محيط شبه المنحرف المقابل يساوي



a) $38\ cm$ b) $18\ cm$ c) $27\ cm$ d) $28\ cm$

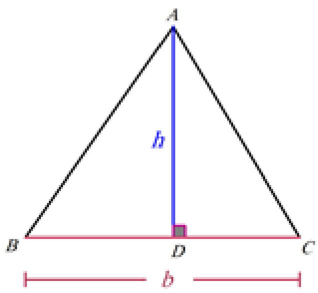
٤- محيط شبه المنحرف المقابل يساوي



a) $18\ cm$ b) $8\ cm$ c) $15\ cm$ d) $20\ cm$

- **المثلث :**

المثلث هو مضلع يتكون من ثلاث أضلاع وثلاث زوايا ومجموع زوايا المثلث الداخلية تساوي $180°$ كما في الشكل 6-6



شكل $6-6$

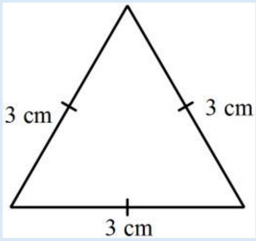
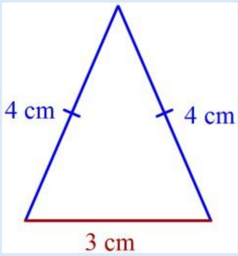
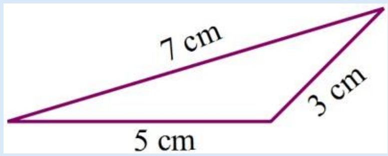
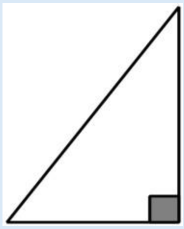
مساحة ومحيط المثلث :

إذا كان طول القاعدة للمثلث b وارتفاع المثلث h :

محيط المثلث : $P = AC + BC + AB$

مساحة المثلث : $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

أنواع المثلثات :

١- مثلث متساوي الأضلاع  	٢- مثلث متساوي الساقين 
٣- مثلث مختلف الأضلاع  	٤- مثلث قائم الزاوية 

مثال : أوجد محيط المثلث الذي أطوال أضلاعه $3\ cm, 4\ cm, 5\ cm$

الحل :

$$P = 3 + 4 + 5 = 12\ cm$$

مثال : أوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته $12\ cm$ وطول ارتفاعه $8\ cm$

الحل :

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48cm^2$$

مثال : مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $7\ cm$ احسب محيط ومساحة المثلث إذا كان طول ارتفاعه $8\ cm$

الحل :

$$P = 7 + 7 + 7 = 3(7) = 21\ cm$$

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$A = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 = 28\ \ cm^2$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- مثلث أطوال اضلاعه $4\ cm, 3\ cm, 4\ cm$ فإن محيطه يساوي

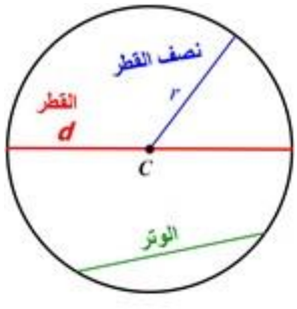
$a\ )\ 7\ cm$ $\quad b\ )\ 8\ cm$ $\quad c\ )\ 48\ cm$ $\quad d\ )\ 11\ cm$

٢- مثلث طول قاعدته $8\ cm$ ، وطول إرتفاعه $3\ cm$ فإن محيطه يساوي

$a\ )\ 12\ cm^2$ $\quad b\ )\ 12\ cm$ $\quad c\ )\ 24\ cm^2$ $\quad d\ )\ 11\ cm^2$

- **الدائرة :**

هي مجموعة النقاط التي تبعد نفس البعد عن نقطة ثابته ، وهذه النقطة تسمى مركز الدائرة والبعد الثابت يسمى نصف القطر .



شكل 6 – 7

مساحة ومحيط الدائرة :

إذا كان r طول نصف قطر الدائرة فإن :

مساحة الدائرة : $A = \pi r^2$

محيط الدائرة : $P = 2 \pi r$

حيث π هي نسبة محيط الدائرة إلى قطرها (النسبة التقريبية) تساوي :

$$\pi = \frac{22}{7} = 3.14$$

مثال : اوجد محيط ومساحة الدائرة التي طول نصف قطرها $7\ cm$

الحل :

$$C = 2 \pi r$$

$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44\ cm$$

$$A = \pi r^2$$

$$A = \frac{22}{7} \times (7)^2 = 154\ cm^2$$

مثال : دائرة طول قطرها $20\ cm$ أوجد محيط ومساحة الدائرة

الحل :

طول القطر يساوي $20\ cm$ إذا نصف القطر يساوي $r = 10\ cm$

$$C = 2 \pi r$$

$$C = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 = 62.85\ cm$$

إذا محيط الدائرة يساوي $62.85\ cm$

$$A = \pi r^2$$

$$A = \frac{22}{7} \times (10)^2 = 314.28\ cm^2$$

إذا مساحة الدائرة تساوي $314.28\ cm^2$

مثال : حديقة دائرية الشكل طول محيطها $66\ m$ ،اوجد مساحة الحديقة

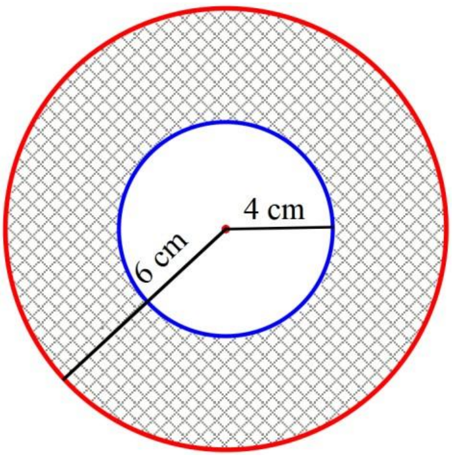
الحل :

$$C = 2\,\pi\, r$$

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{66}{2 \times 3.14} \approx 10.5\ m$$

$$A = \pi\, r^2 = 3.14 \times (10.5)^2 = 346.2\ m^2$$

مثال : أوجد مساحة الجزء المظلل



$$\pi \approx 3.14$$

الحل :

مساحة الجزء المظلل A ، مساحة الدائرة الخارجي A_1

،مساحة الدائرة الداخلية A_2

مساحة الجزء المظلل= مساحة الدائرة الخارجيةA_1 – مساحة الدائرة الداخلية A_2

$$A_1 = \pi\, r^2 = 3.14 \times (6)^2 = 113.04\ cm^2$$

$$A_2 = \pi\, r^2 = 3.14 \times (4)^2 = 50.24\ cm^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 113.04 - 50.24 = 62.8\ cm^2$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- دائرة نصف قطرها يساوي $8\ cm$ ،فإن محيطها يساوي

a) $62.8\ cm$ b) $68.2\ cm$ c) $50.24\ cm$ d) $10\ cm$

٢- دائرة نصف قطرها يساوي $3\ cm$ ، فإن مساحتها يساوي

a) $9\pi\ cm^2$ b) $3\pi\ cm^2$ c) $9\ cm^2$ d) $6\pi\ cm^2$

٣- دائرة طول قطرها يساوي $14\ cm$ ، فإن طول نصف قطرها يساوي

a) $28\ cm$ b) $14\ cm$ c) $2\ cm$ d) $7\ cm$

٤- دائرة طول نصف قطرها يساوي $8\ cm$ ،فإن طول قطرها يساوي

a) $8\ cm$ b) $16\ cm$ c) $12\ cm$ d) $4\ cm$

تمارين

١- محيط الدائرة

$a)\ 2\,\pi\,r$ $b)\ \pi\,r^2$ $c)\ \pi\,d$ $d)\ \pi$

٢- مساحة الدائرة =

$a)\ \pi\,r^2$ $b)\ 2\,\pi\,r$ $c)\ \pi\,d$ $d)\ \pi$

٣- مربع طول ضلعه $5\ cm$ فإن محيطه يساوي

$a)\ 20\ cm$ $b)\ 25\ cm$ $c)\ 10\ cm$ $d)\ 15\ cm$

٤- مربع طول ضلعه $8\ cm$ فإن مساحته تساوي

$a)\ 64\ cm^2$ $b)\ 28\ cm^2$ $c)\ 24\ cm^2$ $d)\ 32\ cm^2$

٥- مستطيل طوله $10\ cm$ وعرضه $5\ cm$ فإن محيطه يساوي

$a)\ 30\ cm$ $b)\ 15\ cm$ $c)\ 50\ cm$ $d)\ 10\ cm$

٦- مستطيل طوله $7\ cm$ وعرضه $3\ cm$ فإن مساحته تساوي

$a)\ 15\ cm^2$ $b)\ 10\ cm^2$ $c)\ 20\ cm^2$ $d)\ 21\ cm^2$

٧- معين محيطه $28\ cm$ ، فإن طول ضلع المعين يساوي

$a)\ 7\ cm$ $b)\ 24\ cm$ $c)\ 4\ cm$ $d)\ 8\ cm$

٨- مثلث أطوال أضلاعه $5\ cm, 7\ cm, 4\ cm$ ، فإن محيطه يساوي

$a)\ 15\ cm$ $b)\ 12\ cm$ $c)\ 16\ cm$ $d)\ 100\ cm$

٩- مساحة المثلث =

$a)\ \frac{1}{2} \times b \times h$ $b)\ b \times h$ $c)\ s \times 4$ $d)\ L \times W$

١٠- مثلث طول قاعدته $10\ cm$ وإرتفاعه $7\ cm$ فإن مساحته تساوي

$a)\ 21\ cm^2$ $b)\ 70\ cm^2$ $c)\ 17\ cm^2$ $d)\ 35\ cm^2$

١١- مساحة المستطيل =

$a)\ L \times W$ $b)\ 2(L + W)$ $c)\ L \times 4$ $d)\ \pi\,r^2$

١٢- دائرة طول قطرها $10\ cm$ ، فإن طول نصف قطرها

$a)\ 10\ cm$ $b)\ 5\ cm$ $c)\ 3\ cm$ $d)\ 2\ cm$

١٣- متوازي الاضلاع طول ضلعين متجاورين فيه $6\ cm, 10\ cm$ وإذا كان ارتفاعه الأصغر $4\ cm$ فإن مساحته تساوي

a) $24\ cm^2$ b) $40\ cm^2$ c) $60\ cm^2$ d) $240\ cm^2$

١٤- مساحة متوازي الاضلاع =

a) $b \times h$ b) $\frac{1}{2} \times b \times h$ c) S^2 d) $L \times W$

١٥- مساحة المعين =

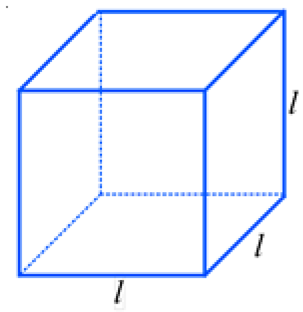
a) $b \times h$ b) $\frac{1}{2} \times b \times h$ c) $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ d) $L \times W$

الهندسة الفراغية

درسنا الهندسة المستوية التي لها بعدان فقط هما الطول والعرض ، أما في الهندسة الفراغية فإننا سوف ندرس المجسمات أو الاشكال الثلاثية الابعاد التي ابعادها هي الطول والعرض والارتفاع.

- **المكعب :**

المكعب هو جسم له ستة أوجه متطابقة ، كل وجه منها عبارة عن مربع وكل أحرفه الجانبية متساوية وأي مربعين متقابلين يسميان بقاعدتي المكعب ، كما في الشكل 8-6



شكل $6-8$

مساحة وحجم المكعب :

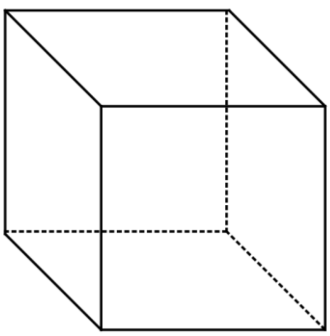
إذا كان طول حرف المكعب l

المساحة $S \cdot A = 6\, l^2$

الحجم $V = l^3$

مثال : مكعب طول حرفه $5\ cm$ اوجد مساحته سطحه وحجمه

الحل:



المساحة $S \cdot A = 6l^2$

$S \cdot A = 6 \times (5)^2 = 150\ cm^2$

الحجم $V = l^3 = (5)^3 = 125\ cm^2$

مثال : وعاء مكعب الشكل طول حرفه $7\ cm$ ، اوجد مساحته سطحه وحجمه

الحل :

$$S \cdot A = 6\ l^2 = 6 \times (7)^2 = 294\ cm^2$$

$$V = l^3 = (7)^3 = 343\ cm^2$$

مثال : مكعب حجمه $27\ m^3$ ، اوجد طول حرفه

الحل :

$$V = l^3$$

$$l = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{27} = 3\ cm$$

إذا طول حرف المكعب $3\ cm$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- مكعب طول حرفه $4\ cm$ ،فإن حجمه يساوي

a) $16\ cm^3$ b) $32\ cm^3$ c) $64\ cm^3$ d) $12\ cm^3$

٢- مكعب طول حرفه $6\ cm$ ، فإن مساحته سطحه تساوي

a) $6\ cm^2$ b) $36\ cm^2$ c) $12\ cm^2$ d) $216\ cm^2$

٣- مكعب حجمه $8\ cm^3$ ، فإن طول حرفه يساوي

a) $12\ cm$ b) $4\ cm$ c) $8\ cm$ d) $2\ cm$

٤- مكعب مساحة سطحه $216\ cm^2$ ، فإن طول حرفه يساوي

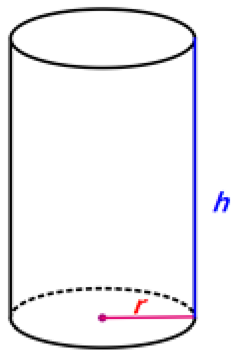
a) $4\ cm$ b) $6\ cm$ c) $8\ cm$ d) $5\ cm$

- **الأسطوانة :**

الأسطوانة هي جسم له سطح منحنى مغلق وقاعدته عبارة عن دائرتين متطابقتين ومتوازيتين.

من الممكن الحصول على شكل الأسطوانة من دوران مستطيل حول أحد أضلاعه دورة كاملة.

ارتفاع الأسطوانة هو العمود الواصل بين مركزي دائرتي قاعدتي الأسطوانة . كما في الشكل 9-6



شكل 6 – 9

مساحة وحجم الأسطوانة :

إذا كان نصف قطر القاعدة r والارتفاع h فإن :

المساحة $S \cdot A = 2\,\pi\, r\,(h + r)$

الحجم $V = \pi\, r^2\, h$

مثال : أسطوانة نصف قطر قاعدتها $9\ cm$ وإرتفاعها $11\ cm$ ، اوجد مساحة سطحه وحجم الأسطوانة .

الحل :

$$S \cdot A = 2\,\pi\,r\,(h + r) = 2 \times 3.14 \times 9 \times (11 + 9)$$

$$S \cdot A = 1130.4\ cm^2$$

إذا مساحة السطح تساوي $1130.4\ cm^2$

$$V = \pi\,r^2\,h$$

$$V = 3.14 \times (9)^2 \times 11 = 2797.74\ cm^3$$

إذا الحجم يساوي $2797.74\ cm^3$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- إسطوانة إرتفاعها $7\ cm$ ونصف قطرها $5\ cm$ فإن مساحة سطحه تساوي

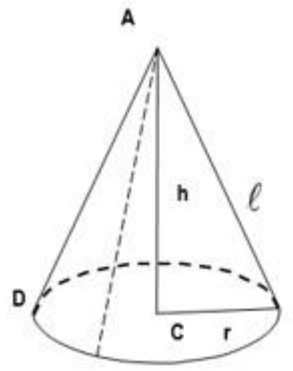
a) $376.8\ cm^2$ b) $366.8\ cm^2$ c) $35\ cm^2$ d) $12\ cm^2$

٢- إسطوانة إرتفاعها $20\ cm$ ونصف قطرها $6.5\ cm$ فإن حجم الأسطوانة تساوي

a) $2653.3\ cm^2$ b) $130\ cm^2$ c) $100\ cm^3$ d) $65.2\ cm^3$

- **المخروط :**

المخروط هو جسم يتألف من قاعدة واحدة عبارة عن دائرة نصف قطرها r ،ورأس بعده العمودي عن الدائرة يسمى ارتفاع المخروط ، كما في الشكل *10-6*



شكل $10-6$

مساحة وحجم المخروط :

إذا كان نصف قطر القاعدة r والارتفاع h و l طول المولد فإن :

المساحة $S \cdot A = \pi\, r\, l + \pi\, r^2$

$= \pi\, r\, (l + r)$

الحجم $V = \frac{1}{3} \pi\, r^2\, h$

مثال : مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $14\ cm$ وطول ارتفاعه $11\ cm$ وطول المولد $10\ cm$ احسب مساحة سطحه وحجمه

الحل :

المساحة

$$S \cdot A = \pi\, r\, l + \pi\, r^2 = \pi r(l + r)$$

$$S \cdot A = 3.14 \times 14(10 + 14) = 615.44\ cm^2$$

الحجم

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (4)^2 \times 11 = 2256.61\ cm^3$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $9\ cm$ وطول المولد $11\ cm$ ، فإن مساحة سطحه تساوي

a) $461.58\ cm^2$ b) $207.24\ cm^2$ c) $565.2\ cm^2$ d) $100\ cm^2$

٢- مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $8\ cm$ وطول إرتفاعه $12\ cm$ ، فإن الحجم يساوي

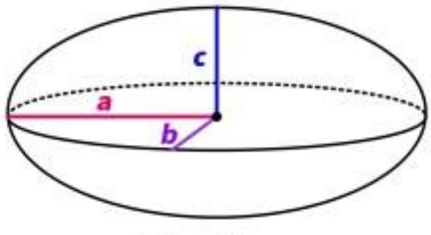
a) $96\ cm^3$ b) $803.84\ cm^3$ c) $66.9\ cm^3$ d) $20\ cm^3$

- **البيضاوي :**

هو المنحني المستوي الذي يحقق الخاصية التالية :

مجموع بُعد أي نقطة على هذا المنحنى عن نقطتين ثابتين داخله يبقى ثابتا

والشكل الهندسي البيضاوي (كرة مضغوطة بانتظام) والمتماثل بالنسبة لمحورية الرئيسي والثانوي .



شكل 6 – 11

مساحة و حجم البيضاوي :

إذا كان a, b, c أنصاف أقطار البيضاوي فإن :

المساحة $S \cdot A = 4\,\pi\left(\frac{(ab)^{1.6}+(ac)^{1.6}+(bc)^{1.6}}{3}\right)^{0.625}$

الحجم $V = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$

مثال : بيضاوي أنصاف أقطاره $a = 21\ cm\ , b = 15\ cm\ , c = 2\ cm$ احسب مساحة البيضاوي وحجمه .

الحل :

مساحة البيضاوي

$$S \cdot A = 4\pi\left(\frac{(ab)^{1.6}+(ac)^{1.6}+(bc)^{1.6}}{3}\right)^{0.625}$$

$$S \cdot A = 4 \times 3.14\left(\frac{(21\times 15)^{1.6}+(21\times 2)^{1.6}+(15\times 2)^{1.6}}{3}\right)^{0.625}$$

$$S \cdot A \approx 2068.67\ cm^2$$

حجم البيضاوي

$$V = \frac{3}{4}\pi\, a\, b\, c$$

$$V = \frac{3}{4}\times 3.14 \times 21 \times 15 \times 2 = 2640\ cm^3$$

مثال : بيضاوي انصاف أقطاره $a = 12\ cm\ , b = 10\ cm\ , c = 9\ cm$ احسب مساحة البيضاوي وحجمه

الحل :

مساحة البيضاوي

$$S \cdot A = 4\pi\left(\frac{(ab)^{1.6} + (ac)^{1.6} + (bc)^{1.6}}{3}\right)^{0.625}$$

$$S \cdot A = 4 \times 3.14\left(\frac{(12 \times 10)^{1.6} + (12 \times 9)^{1.6} + (10 \times 9)^{1.6}}{3}\right)^{0.625}$$

$$S \cdot A \approx 1336.78\ cm^2$$

حجم البيضاوي

$$V = \frac{4}{3}\pi\ a\ b\ c$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 12 \times 10 \times 9 = 4521.6\ cm^3$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- بيضاوي انصاف اقطاره $a = 9\ cm\ , b = 6\ cm\ , c = 3\ cm$ فإن مساحة البيضاوي =

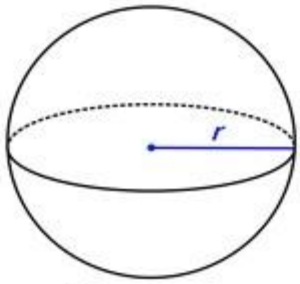
$a\ )\ 440.75\ cm^2$ $b\ )\ 18\ cm^2$ $c\ )\ 162\ cm^2$ $d\ )\ 200.5\ cm^2$

٢- بيضاوي انصاف اقطاره $a = 12\ cm\ , b = 10\ cm\ , c = 6\ cm$ فإن حجم البيضاوي =

$a\ )\ 3015.92\ cm^3$ $b\ )\ 207.24\ cm^2$ $c\ )\ 28\ cm^2$ $d\ )\ 720\ cm^2$

- **الكرة :**

الكرة هي جسم ذات سطح منحنى مغلق متماثل بحيث تكون كل نقطة من نقاط هذا السطح تبتعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابته داخل الكرة وتسمى هذه النقطة بمركز الكرة كما في الشكل *12-6*



شكل 6 – 12

مساحة وحجم الكرة :

إذا كان نصف قطر الكرة r فإن :

المساحة $S \cdot A = 4\pi r^2$

الحجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مثال : كرة نصف قطرها $17\ cm$ احسب كلا من حجمها ومساحة سطحه

الحل :

$$S \cdot A = 4\pi r^2$$

$$S \cdot A = 4 \times 3.14 \times (17)^2 = 3631.68\ cm^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.15 \times (10)^3 \approx 4186.7 cm^3$$

تمرين : اختر الإجابة الصحيحة :

١- كرة نصف قطرها $3\ cm$ ، فإن حجمها يساوي

a) $27.3\ cm^3$ b) $121.05\ cm^3$ c) $30\ cm^3$ d) $113.04\ cm^3$

٢- كرة نصف قطرها $4\ cm$ ، فإن مساحتها تساوي

a) $200.96\ cm^2$ b) $130\ cm^2$ c) $100\ cm^2$ d) $267.9\ cm^2$

تمارين

١- حجم المكعب =

$a)\ l^3$ $b)\ 4\,l^2$ $c)\ 6\,l^2$ $d)\ 2\,\pi\,r$

٢- مساحة المكعب =

$a)\ 4\,l^2$ $b)\ l^3$ $c)\ 6\,l^2$ $d)\ \pi$

٣- مكعب طول حرفه $5\ cm$ فإن حجمه يساوي

$a)\ 64\ cm^3$ $b)\ 16\ cm^3$ $c)\ 20\ cm^3$ $d)\ 125\ cm^3$

٤- مكعب طول ضلعه $8\ cm$ فإن مساحته تساوي

$a)\ 256\ cm^2$ $b)\ 64\ cm^2$ $c)\ 384\ cm^2$ $d)\ 32\ cm^2$

٥- مكعب طول ضلعه $6\ cm$ فإن مساحته تساوي

$a)\ 216\ cm^2$ $b)\ 36\ cm^2$ $c)\ 6\ cm^2$ $d)\ 18\ cm^2$

٦- كرة نصف قطرها $3\ cm$ فإن حجمها يساوي

$a)\ 113.04\ cm^3$ $b)\ 3\ cm^3$ $c)\ 27\ cm^3$ $d)\ 100\ cm^3$

٧- حجم الأسطوانة =

$a)\ \pi\,r^2\,h$ $b)\ \pi\,r^2$ $c)\ 6\,l^2$ $d)\ \frac{1}{3}\pi\,r^2\,h$

٨- مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته $9\ cm$ وطول المولد $13\ cm$ ، فإن مساحته تساوي

$a)\ 621.72\ cm^2$ $b)\ 400.26\ cm^2$ $c)\ 244.92\ cm^2$ $d)\ 78\ cm^2$

٩- حجم المخروط =

$a)\ \frac{1}{3}\ \pi\,r^2\,h$ $b)\ \frac{4}{3}\ \pi\,r^3$ $c)\ \frac{1}{3}\ \pi\,r^2\,h$ $d)\ \pi\,r^2$

١٠- أسطوانة ارتفاعها $15\ cm$ ونصف قطرها $5\ cm$ فإن حجم الأسطوانة تساوي

$a)\ 1177.5\ cm^3$ $b)\ 177,5\ cm^3$ $c)\ 375\ cm^3$ $d)\ 20\ cm^2$

١١- حجم البيضاوي =

$a)\ \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$ $\quad b)\ \frac{4}{3}\pi\, r^3$ $\quad c)\ \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h$ $\quad d)\ \pi\, r^2$