2023 考研数学冲刺串讲（11 月）

主讲：高昆轮

第一讲　高等数学重点题型串讲

一、研究微分方程的解

1.设可导函数$f\left(x\right)$满足微分方程$xf'\left(x\right)-f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，且$f\left(1\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

（1）讨论曲线$y=f\left(x\right)$的凹凸性;

（2）求曲线$y=f\left(x\right)$的所有渐近线.

注: 关于解方程, 一般只需按照类型逐步求解即可, 同时还要注意以下几种方程的求解.

1.（分段函数）求微分方程$y''+y'-2y=\min\{e^x,1\}$的通解.

分析: $f(x)=\min\{e^x,1\}=\begin{cases}e^x, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$是分段函数,注意微分方程的解$y$在$x=0$处是具有二阶导数的.

解: $y''+y'-2y=\begin{cases}e^x, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}C_1e^{-2x}+C_2e^x+\frac{1}{3}xe^x, x\le 0\\ C_3e^{-2x}+C_4e^x-\frac{1}{2}, x>0\end{cases}$,为保证$y$及$y'$都在$x=0$处连续,

则$\begin{cases}C_1+C_2=C_3+C_4-\frac{1}{2}\\ -2C_1+C_2+\frac{1}{3}=-2C_3+C_4\end{cases}$,于是$\begin{cases}C_3=C_1+\frac{1}{18}\\ C_4=C_2+\frac{4}{9}\end{cases}$,故$y=\begin{cases}C_1e^{-2x}+C_2e^x+\frac{1}{3}xe^x, x\le 0\\ \left(C_1+\frac{1}{18}\right)e^{-2x}+\left(C_2+\frac{4}{9}\right)e^x-\frac{1}{2}, x>0\end{cases}$.

2.（换元）用变换$t=\tan x$,把微分方程$\cos^4 x\frac{d^2y}{dx^2}+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\frac{dy}{dx}+y=\tan x$

化成y关于t的微分方程,并求原方程的通解.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dy}{dt}$;

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\cos^4 x}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$;

带入原方程,有$2\sin x\cos x\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-2\sin x\cos x\cdot\frac{dy}{dt}+y=t$,

即$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=t$,解得$y=(C_1t+C_2)e^{-t}+t-2$,于是原方程的通解$y=(C_1\tan x+C_2)e^{-\tan x}+\tan x-2$.

3.（差分方程）差分方程$\Delta y_t-2y_t=2^t-1$满足$y_0=1$的解$y_t=$____.

解: $\Delta y_t=y_{t+1}-y_t$,于是原方程为$y_{t+1}-3y_t=2^t-1$,

对应的齐次差分方程的通解为$A\cdot 3^t$. 由于

$y_{t+1}-3y_t=2^t$的特解为-2^t,而$y_{t+1}-3y_t=1$的特解为

$-\frac{1}{2}$.

由叠加原理可得,原方程的通解为

$$y_t=A\cdot 3^t-2^t+\frac{1}{2}.$$

代入定解条件$y_0=1$,可求得$A=\frac{3}{2}$,故原方程的特解

为$y_t=\frac{1}{2}\cdot 3^{t+1}-2^t+\frac{1}{2}$.

2.设函数$f(u)$在$(0,+\infty)$内可导，$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+y$满足关系式$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$，且$f(1)=1$.

⑴ 求$f(x)$的表达式；（2）求曲线$f(x)$的所有渐近线.

注: 关于建方程, 可借助求导、求偏导、导数定义、动区域上的二重积分及积分与路径无关等.

1.（换序求导）设$f(x)$是R上的连续函数, $y(x)=\int_0^x e^t dt\int_0^{x-t} f(u)du, -\infty<x<+\infty.$

(1) 证明$y=y(x)$满足微分方程$\begin{cases} y''-y'=f(x) \\ y(0)=0, y'(0)=0 \end{cases}$;

(2) 求微分方程$y''-y'=f(x)$的通解.

证明: $y(x)=\int_0^x e^t dt\int_0^{x-t} f(u)du=\int_0^x du\int_0^{x-u} e^t f(u)dt=\int_0^x \left(e^{x-u}-1\right)f(u)du$

$=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du-\int_0^x f(u)du.$

(1) $y'(x)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du+e^x\cdot e^{-x}f(x)-f(x)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du,$

且$y''(x)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du+e^x\cdot e^{-x}f(x)=e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du+f(x),$

$\Rightarrow y''(x)-y'(x)=f(x)$, 且$y(0)=0, y'(0)=0.$

(2) 由$\lambda^2-\lambda=0$, 得$\lambda_1=0, \lambda_2=1$, 于是齐次通解为$Y=C_1+C_2e^x$,

进而微分方程$y''-y'=f(x)$的通解为$y=C_1+C_2e^x+\int_0^x e^t dt\int_0^{x-t} f(u)du$, 这里$C_1, C_2$是任意常数.

2.（导数定义）设$f(x)$在$(0,+\infty)$内有定义, 对$\forall x, y\in(0,+\infty)$有$f(xy)=yf(x)+xf(y)$,

且$f'(1)=2$.证明: $f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=2$, 并求$f(x)$.

解: 在$f(xy)=yf(x)+xf(y)$中令$x=y=1\Rightarrow f(1)=0$, 又$f(x+\Delta x)-f(x)=f\left[x\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)$

$=\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)f(x)+xf\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)-f(x)=\dfrac{\Delta x}{x}f(x)+xf\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right),$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}f(x)+xf\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$=\dfrac{f(x)}{x}+f'(1)=\dfrac{f(x)}{x}+2$, 于是$f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=2$, 解得$f(x)=x(2\ln x+C)$, 又$f(1)=0$, 故$C=0$,

所以$f(x)=2x\ln x(x>0)$.

3.（动区域上的二重积分）设$f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} x\left(1+\dfrac{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}\right)dxdy$，其中$x\ge 0, y\ge 0, t>0$.

(1) 求$f(t)$的表达式；(2) 求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{\tan x-\sin x}$.

解：(1) $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} x\left(1+\dfrac{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^t r\cos\theta\left(1+\dfrac{f(r)}{r^2}\right)\cdot rdr$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^t\left(r^2+f(r)\right)dr=\dfrac{t^3}{3}+\int_0^t f(r)dr$，即$f(t)=\dfrac{t^3}{3}+\int_0^t f(r)dr$，且$f(0)=0$

两端对t求导，得$f'(t)=t^2+f(t)$，即$f'(t)-f(t)=t^2$，解得$f(t)=2e^t-t^2-2t-2, t>0$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2e^x-x^2-2x-2}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)-x^2-2x-2}{\tan x\cdot(1-\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}=\dfrac{2}{3}$.

4.（积分与路径无关）设函数$f(x), g(x)$均具有二阶连续导数，$f(0)=g(0)=0$，且xOy面内任一简单闭曲线L，有$\oint_L\left[y^2f(x)+2ye^x+2yg(x)\right]dx+2\left[yg(x)+f(x)\right]dy=0$，求$f(x)$和$g(x)$的表达式.

解 记 $P=y^2f(x)+2ye^x+2yg(x), Q=2[yg(x)+f(x)]$

$\Rightarrow\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即 $2[yg'(x)+f'(x)]=2yf(x)+2e^x+2g(x)$

$\Rightarrow y[g'(x)-f(x)]=e^x+g(x)-f'(x)$，令 $y=0$，则

$$e^x+g(x)-f'(x)=0. \qquad ①$$

将 $e^x+g(x)-f'(x)=0$ 代入上式并取 $y=1$，则

$$g'(x)-f(x)=0. \qquad ②$$

由式 ① 和式 ②，得 $g''(x)-g(x)=e^x$，并注意 $g(0)=0, g'(0)=f(0)=0$，

解得 $g(x)=\dfrac{1}{4}e^{-x}-\dfrac{1}{4}e^x+\dfrac{1}{2}xe^x$，且 $f(x)=g'(x)=-\dfrac{1}{4}e^{-x}-\dfrac{1}{4}e^x+\dfrac{1}{2}(x+1)e^x$.

3.设$P(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且以T为周期，则“$P(x)$是奇函数”是“微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的全部非零解均以T为周期”的____条件.

(A)充分非必要　　(B)必要非充分

(C)充分且必要　　(D)既不充分也不必要

4.设$f(x)$具有二阶连续导数，且$(x-1)f''(x)-2(x-1)f'(x)=1-e^{1-x}$，如果$x=a$是$f(x)$的极值点，则$x=a$是$f(x)$的极____值点.

(A)小　　(B)大　　(C)与具体a值有关，可能是小也可能是大　　(D)以上都不对

5.设$y=y\left(x\right)$是$y''+2y'+y=e^{3x}$满足$y\left(0\right)=y'\left(0\right)=0$的解,则$x\to 0$时与$y\left(x\right)$等价的是____.

$\left(A\right)\ln\cos x$ $\left(B\right)x\cos x-\sin x$ $\left(C\right)e^{\tan x}-e^{\sin x}$ $\left(D\right)\int_0^x\frac{\sin t^2}{t}dt$

6. 设$e^x\cos x$与x为某n阶常系数齐次线性微分方程的两个解,且n尽可能低,则该微分方程是____.

二、极限

7. 要使函数$f\left(x\right)=\left(\dfrac{1+x2^{x}}{1+x3^{x}}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$在$x=0$处连续,应补充定义$f\left(0\right)=$____.

$(A)\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$　　$(B)\ln\dfrac{2}{3}$　　$(C)\dfrac{2}{3}$　　$(D)e^{\frac{2}{3}}$

8.设$a>0$,若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(4+\sin x\right)^{x}-4^{x}}{1-\sqrt{\cos ax}}=\dfrac{1}{2}$,则$a=$____.

9.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin^{2}x\right)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)}{x^{4}}$.

10. （1）计算$a_n=\int_0^{n\pi}t\left|\sin t\right|dt$,其中$n$为正整数；（2）求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^{x\pi}t\left|\sin t\right|dt.$

解:(1) 考虑$t=n\pi-u$的区间再现, 有$a_n=\int_0^{n\pi}t\left|\sin t\right|dt=\int_{n\pi}^0(n\pi-u)\left|\sin(n\pi-u)\right|(-du)$

$=\int_0^{n\pi}(n\pi-u)\left|\sin(n\pi-u)\right|du=\int_0^{n\pi}(n\pi-u)\left|\sin u\right|du=n\pi\int_0^{n\pi}\left|\sin u\right|du-\int_0^{n\pi}u\left|\sin u\right|du$

$=n\pi\cdot n\int_0^{\pi}\left|\sin u\right|du-a_n=2n^2\pi-a_n$, 于是$a_n=n^2\pi$, 这里利用了$\left|\sin u\right|$周期为$\pi$的性质.

（2）当$n\le x<n+1$时, 有$\int_0^{n\pi}t\left|\sin t\right|dt\le\int_0^{x\pi}t\left|\sin t\right|dt<\int_0^{(n+1)\pi}t\left|\sin t\right|dt$,

即$n^2\pi\le\int_0^{x\pi}t\left|\sin t\right|dt<(n+1)^2\pi$, 进而$\frac{n^2\pi}{(n+1)^2}\le\frac{\int_0^{x\pi}t\left|\sin t\right|dt}{x^2}\le\frac{(n+1)^2\pi}{n^2}$,

且$x\to+\infty$时, 有$n\to\infty$, 根据夹逼准则, 有$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^{x\pi}t\left|\sin t\right|dt=\pi.$

注: 本题是用积分$\int_0^{n\pi}t\left|\sin t\right|dt$来制造数列$\{a_n\}$, 这种类型在2019年出现过, 下面再举一例,

设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx, n=1,2,\cdots$.(1) 计算$a_n+a_{n+2}$的值；（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$.

解:（1）$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\left(1+\tan^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd\tan x=\left.\frac{\tan^{n+1}x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}.$

（2）注意到$a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$(因为在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上$0\le\tan x\le1$)$=a_n$, 即数列$\{a_n\}$单调减,

并由（1）的$a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$, 知$\frac{1}{n+1}<a_n+a_n$, 于是$a_n>\frac{1}{2(n+1)}$, 且$\frac{1}{n+1}>a_{n+2}+a_{n+2}$,

于是$a_n<\frac{1}{2(n-1)}$, 从而$\frac{n}{2(n+1)}<na_n<\frac{n}{2(n-1)}$, 由夹逼准则, 知$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{2}.$

三、导数

11. 设$f(x)$在$x=a$的某邻域内有定义, 在$x=a$的某去心邻域内可导, 下列论断正确的是____.

(A)若$\lim\limits_{x\to a} f'(x)=A$,则$f'(a)=A$

(B)若$f'(a)=A$,则$\lim\limits_{x\to a} f'(x)=A$

(C)若$\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$,则$f'(a)$不存在

(D)若$f'(a)$不存在,则$\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$

12. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续,则$f^{(8)}(0)=$____.

13.已知$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t\ln t\\ y=\dfrac{\ln t}{t}\end{cases}$（$t\geq 1$）确定,则曲线$y(x)$的凹区间为____.

14. 证明:$2^n\ge 1+n\sqrt{2^{n-1}}$（$n=1,2,\cdots$）.

证明:令$f\left(x\right)=2^x-1-x\cdot 2^{\frac{x-1}{2}},x\ge 1;$

$f'\left(x\right)=2^x\ln 2-2^{\frac{x-1}{2}}-x\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}\ln 2\cdot\dfrac{1}{2}=2^{\frac{x-1}{2}}\ln 2\cdot\left(2^{\frac{x+1}{2}}-\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{x}{2}\right);$

令$g\left(x\right)=2^{\frac{x+1}{2}}-\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{x}{2},x\ge 1;\quad g'\left(x\right)=2^{\frac{x+1}{2}}\ln 2\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2},$

由于$x\ge 1$时,$2^{\frac{x+1}{2}}\ln 2\ge 2\ln 2>1$,故$g'\left(x\right)>0$,从而$g\left(x\right)$单调增,

于是$g\left(x\right)\ge g\left(1\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\ln 2}>0$,进而$f'\left(x\right)>0$,从而$f\left(x\right)$单调增,

于是$f\left(x\right)\ge f\left(1\right)=0$,故$x\ge 1$时,$2^x\ge 1+x\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}$.

15.设$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上存在二阶导数,$f\left(0\right)<0$, $f'\left(0\right)=a$, $f''\left(x\right)>0$.证明:

（1）无论$a\ne 0$还是$a=0$, $f\left(x\right)$至多有两个零点,至少有一个零点;

（2）若$f\left(x\right)$恰有两个零点,则此两零点必反号.

四、积分

16. 求不定积分$\int \frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx.$

解：$I=\int \frac{e^{-\sin x}\cdot 2\sin x\cos x}{\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\right)^2}dx=\int \frac{e^{-\sin x}\cdot 8\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}dx=8\int \frac{e^{-\sin x}\cdot \sin x}{(1-\sin x)^2}d\sin x$

$=8\int \frac{e^{-u}\cdot u}{(1-u)^2}du=8\int e^{-u}\frac{u-1+1}{(1-u)^2}du=8\int e^{-u}\frac{1}{u-1}du+8\int e^{-u}\frac{1}{(u-1)^2}du$

$=8\int e^{-u}\frac{1}{u-1}du-8\int e^{-u}d\frac{1}{u-1}=8\int e^{-u}\frac{1}{u-1}du-\frac{8e^{-u}}{u-1}+8\int \frac{1}{u-1}\cdot e^{-u}\cdot(-1)du=\frac{8e^{-u}}{1-u}+C$

$=\frac{8e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$，其中$C$是任意常数.

17. 设连续非负函数$f(x)$满足$f(x)f(-x)=1(-\infty<x<+\infty)$，则$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+f(x)}dx=$_____.

18.（2022年数二真题）设p为常数，若反常积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$收敛，则$p$的取值范围是_____.

$(A)(-1,1)$　　$(B)(-1,2)$　　$(C)(-\infty,1)$　　$(D)(-\infty,2)$

19. 以下命题正确的个数是____.

（1）设连续函数$f\left(x\right)$对$\forall x,y$都有$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$,则$\int_0^x f\left(t\right)dt$是偶函数;

（2）$\int_{-a}^{a}\left|x-t\right|e^{-t^2}dt$（$-\infty<x<+\infty$）是偶函数；

（3）若函数$f\left(x\right)$不连续,则$\int_0^x f\left(t\right)dt$不可导；

（4）设连续函数$f\left(x\right)$以T为周期,则$\int_0^x f\left(t\right)dt-\frac{\int_0^T f\left(x\right)dx}{T}x$也以$T$为周期.

$\left(A\right)1$　　$\left(B\right)2$　　$\left(C\right)3$　　$\left(D\right)4$

20. 设函数$f\left(x,y\right)$可微，$f\left(0,0\right)=0,\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f\left(x,y\right),\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{-x}\cos y$，求$f\left(x,x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$部分与$x$轴围成的图形绕$x$轴旋转一周所成旋转体的体积.

五、偏导数

21. 设$f(x),g(x)$为连续可微函数，若存在u，使得$du=yf(xy)dx+xg(xy)dy$，则$f(xy)-g(xy)=$____.

解：依题意$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf(xy)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xg(xy)$；

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f(xy)+xyf'(xy)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=g(xy)+xyg'(xy)$；

根据$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$的连续性，得$f(xy)+xyf'(xy)=g(xy)+xyg'(xy)$；

令$xy=s$，则$f(s)+sf'(s)=g(s)+sg'(s)$，即$\dfrac{f'(s)-g'(s)}{f(s)-g(s)}=-\dfrac{1}{s}$；

两端对s积分，有$\ln\left|f(s)-g(s)\right|=-\ln|s|+\ln C_0=\ln\dfrac{C_0}{|s|}$，于是$\left|f(s)-g(s)\right|=\dfrac{C_0}{|s|}$，

进而（回代）$f(xy)-g(xy)=\dfrac{C}{xy}$，其中$C$是任意常数.

22. 已知$f(x,y,z)=(x+ay)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$正定,其中$a$为非零整数,且$-2<a<2$.

⑴ 求a的值；

(2) 对（1）的a,求由$f(x,y,z)=12$所确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值.

解:⑴ 令$\begin{cases} u=x+ay \\ v=y+z \\ w=z+x \end{cases}$（∗）,当$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$,即$a\neq -1$时,（∗）是可逆变换,在（∗）下,

有$f(x,y,z)=u^2+v^2+w^2$,显然此时是正定的,而a为非零整数,且$-2<a<2$,所以$a=1$.

或 ⑴ $f(x,y,z)=(x+ay)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$正定$\Leftrightarrow\begin{cases} x+ay=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}$只有零解

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow a\neq -1$.又$a$为非零整数,且$-2<a<2$,所以$a=1$.

(2) 对（1）的$a=1$,此时$f(x,y,z)=12$,即是$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=12$,以下求极值了.

首先,由$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$,得$\begin{cases} y=x \\ z=-3x \end{cases}$代入原方程$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=12$,

得$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}$和$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$；其次,由$A=z'''_{xx},B=z''_{xy},C=z''_{yy}$,可判得$\begin{cases} z(1,1)=-3\text{是极小值} \\ z(-1,-1)=3\text{是极大值} \end{cases}$.

23. 现有函数$u(x,t)$,试利用变量代换$\begin{cases}\xi=x-2t\\ \eta=x+3t\end{cases}$将方程$6\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$化为$u$关于变量$\xi,\eta$的方程,其中$u$具有二阶连续偏导数.

解

（1）由于 $\xi=x-2t,\eta=x+3t$,有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1,\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot(-2)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 3.$$

进一步,$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 1$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot 3\right]+$$

$$3\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 3\right]$$

$$=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot 3+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 3$$

$$=-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

此时,方程 $6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ 化为

$$6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\left(-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)-$$

$$\left(4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=0,$$

从而 $25\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$,即$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$.

24.设二元连续可微函数$F(x,y)$在直角坐标系下表示为$F(x,y)=f(x)g(y)$,
在极坐标系下可写成$F(x,y)=h(r)$($r=\sqrt{x^2+y^2}$),且$F(x,y)$无零点,求$F(x,y)$的表达式.

六、二重积分

25.求极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\int_0^t dx\int_t^x e^{-(x-y)^2}dy}{1-e^{-t^2}}$.

26. 设D由曲线$\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$围成, 则$\iint\limits_D xyd\sigma=$_____.

27. 已知$f(t)=\iint\limits_{D_t:x^2+y^2\le t^2}\left(e^{x^2+y^2}-ky^2\right)dxdy$在$t\in(0,+\infty)$内是单调增加函数, k为常数, 求k的最大取值范围.

七、级数

28.对级数（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$和（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}\right)$判别正确的是____.

(A)(1）和（2）都收敛　　(B)(1）收敛,(2）发散

(C)(1）发散,（2）收敛　　(D)(1）和（2）都发散

29. 设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$x=-2$处条件收敛, 则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$在$x=\ln\frac{1}{2}$处____.

(A)条件收敛　　(B)绝对收敛　　(C)发散　　(D)是否收敛与a值有关

30. 设数列$\{a_n\}$满足$a_0=1, a_1=1, a_{n+1}=3a_n+4a_{n-1}$（$n=1,2,3,\cdots$).

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域及和函数$S(x)$.

注： 幂级数的系数a_n还可通过如下几种方式构造

1.（借助微分方程）设$a_n(x)$满足$a_n'(x)=a_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$为正整数），且$a_n(1)=\dfrac{e}{n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)=$____.

解：先解一阶线性微分方程$a_n'(x)-a_n(x)=x^{n-1}e^x, a_n(1)=\dfrac{e}{n}$，得$a_n(x)=\dfrac{x^n}{n}e^x$，

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-e^x\ln(1-x), -1\le x<1.$

2.（借助递推）设$a_0=1, a_1=-2, a_2=\dfrac{7}{2}, a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n(n\ge 2)$，证明当$|x|<1$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛，并求出其和函数$S(x)$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$，于是$R=1$，所以$|x|<1$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛.

由$a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n$可推出$a_n=\dfrac{7}{6}(-1)^n(n+1)(n\ge 3)$，

则$S(x)=1-2x+\dfrac{7}{2}x^2+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{7}{6}(-1)^n(n+1)x^n=\cdots=\dfrac{1}{(1+x)^2}\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+1\right), |x|<1.$

3.（借助积分）设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，且$F(0)=1, F(x)f(x)=\cos 2x$，$a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|dx(n=1,2,\cdots)$.（1）求$a_n$；（2）求幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^2-1}x^n$的收敛域与和函数.

解：(1) $F'(x)=f(x)\Rightarrow F(x)f(x)=F(x)F'(x)=\left[\dfrac{1}{2}F^2(x)\right]'=\cos 2x$，即$\left[F^2(x)\right]'=2\cos 2x$，

则$F^2(x)=\sin 2x+C$，由$F(0)=1$知$C=1$，于是$F(x)=\sqrt{\sin 2x+1}=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=|\sin x+\cos x|$，

因此$f(x)=\dfrac{\cos 2x}{F(x)}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{|\sin x+\cos x|}$，故$a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|dx=\int_0^{n\pi}\dfrac{|\cos^2 x-\sin^2 x|}{|\sin x+\cos x|}dx=\int_0^{n\pi}|\cos x-\sin x|dx$

（利用了周期性）$=n\int_0^{\pi}|\cos x-\sin x|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=2\sqrt{2}n.$

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^2-1}x^n=2\sqrt{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{n^2-1}x^n$，收敛域为$[-1,1)$，记$S(x)=2\sqrt{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{n^2-1}x^n=\sqrt{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n+1}\right)x^n$

$=\sqrt{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}x^n+\sqrt{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^n=\sqrt{2}x\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}x^{n-1}+\dfrac{\sqrt{2}}{x}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}=-\sqrt{2}\left(\dfrac{1+x^2}{x}\ln(1-x)+1+\dfrac{x}{2}\right)$，

且$S(0)=0$或利用$\lim\limits_{x\to 0}S(x)=0$，得和函数$S(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\left(\dfrac{1+x^2}{x}\ln(1-x)+1+\dfrac{x}{2}\right), -1\le x<1, 且x\ne 0\\ 0, x=0.\end{cases}$

八、数一专项

31. 设$f\left(x\right)$是以2π为周期的连续函数，且其傅里叶系数为a_n（$n=0,1,2,\cdots$）和b_n（$n=1,2,\cdots$）．则$f\left(x+l\right)$（这里l为常数）的傅里叶系数c_n和d_n分别为____．

$(A)\, a_n\cos nl+b_n\sin nl$和$b_n\cos nl-a_n\sin nl$

$(B)\, a_n\cos nl+b_n\sin nl$和$b_n\cos nl+a_n\sin nl$

$(C)\, a_n\cos nl-b_n\sin nl$和$b_n\cos nl-a_n\sin nl$

$(D)\, a_n\cos nl-b_n\sin nl$和$b_n\cos nl+a_n\sin nl$

解：$c_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+l\right)\cos nxdx$（令$x+l=t$）$=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi+l}^{\pi+l}f\left(t\right)\cos n\left(t-l\right)dt$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+l}^{\pi+l}f\left(t\right)\left(\cos nt\cos nl+\sin nt\sin nl\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)\left(\cos nt\cos nl+\sin nt\sin nl\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)\cos nt\cos nldt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)\sin nt\sin nldt=a_n\cos nl+b_n\sin nl\ (n=0,1,2,\cdots).$$

同理可算出$d_n=b_n\cos nl-a_n\sin nl$（$n=1,2,\cdots$），选$(A)$.

32. 若函数$u\left(x,y\right)$和$v\left(x,y\right)$在点$\left(x,y\right)$的某邻域内具有连续的偏导数，则在该点的梯度$grad\left(uv\right)=$____．

$(A)\, ugradv$　　$(B)\, vgradu$　　$(C)\left(gradu\right)\left(gradv\right)$　　$(D)\, ugradv+vgradu$

33. 设$\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j},\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$，且二元可微函数$f\left(x,y\right)$在点$P$处有$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}=-6,\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}=17$，则$f\left(x,y\right)$在点$P$的最大方向导数是____．

注：一条鲨鱼在发现血腥味时总是向着血腥味最浓的方向追寻. 在海面上进行试验表明, 如果把坐标原点取在血源处, 在海平面上建立直角坐标系, 那么点(x,y)处血液的浓度C可近似表示为$C=e^{-\frac{x^2+2y^2}{10^4}}$,求鲨鱼从点$(x_0,y_0)$出发向血源前进的路线.

解: 设鲨鱼前进路线为$y=f(x)$,由于鲨鱼追踪最强的血腥味,所以它每一瞬间都将按血液浓度增加最快, 即C的梯度方向前进, $gradC=\frac{\partial C}{\partial x}i+\frac{\partial C}{\partial y}j=10^{-4}e^{-\frac{x^2+2y^2}{10^4}}(-2xi-4yj)$.

鲨鱼前进的方向即$y=f(x)$的切线方向,切线的方向向量可表示为$\{dx,dy\}$,这样$\{dx,dy\}$与$gradC$方向一致,从而有$\frac{dx}{-2x}=\frac{dy}{-4y}$,且$y(x_0)=y_0$,解得$y=\frac{y_0}{x_0^2}x^2$,这便是要求的鲨鱼前进路线.

34. 设$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdxzz+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,依次对下面四个曲面计算上$I$值.

(1) Σ是上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的上侧（$R>0$);

(2) Σ是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的外侧（$a,b,c>0$）；

(3) Σ是抛物面$z=2-x^2-y^2$在$z\geq 0$部分的上侧;

(4) Σ是抛物面$z=2-x^2-y^2$在$z\geq -2$部分的上侧.

第二讲　线性代数重点串讲

1. 已知二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left[x_1,x_2,x_3\right]\begin{bmatrix}1 & -4 & 6\\0 & a & -12\\0 & 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$的规范形为$z_1^2$.

(1) 求常数a,b的值；

(2) 求正交变换$x=Qy$,化二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$为标准形.

2. 设A是三阶实对称矩阵, 其秩为2, 且满足$A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 设$\beta=\left[4,-3,2\right]^T$, 求$A^n\beta$.

(2) 求正交变换$x=Qy$, 化二次型$x^T\left(A+A^*\right)x$为标准形, 并写出这个标准形.

3.设矩阵$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$可逆,另有3阶矩阵$B$满足$BA=\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{11}+a_{12} & a_{11}+a_{13} \\ 2a_{21} & a_{21}+a_{22} & a_{21}+a_{23} \\ 2a_{31} & a_{31}+a_{32} & a_{31}+a_{33} \end{bmatrix}$.

(1) 求可逆矩阵P,使得$P^{-1}BP$为对角矩阵;

(2) 求$(B-E)^*$.

4.设$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$,矩阵$B$满足$AB=A-B$,求可逆矩阵$P$,使得$P^{-1}\left(A+B\right)P$为对角矩阵.

5. 设α,β都是3维非零列向量，$A=E+\alpha\beta^T$，且$\beta^T\alpha=3$，则$A^{-1}=$____.

6. 设向量组(I)：$\alpha_1=(1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(2,0,1)^T$与向量组$(\mathrm{II})$：$\beta_1=(a,-1,1)^T,\beta_2=(4,0,b)^T$ $\beta_3=(0,c,1)^T$等价，则a,b,c的值分别是____.

7. 设3阶实对称矩阵A的特征值是$1,2,3$，其中$1,2$对应的特征向量分别为$\alpha_1=[-1,-1,1]^T,\alpha_2=[1,-2,-1]^T$.则方程组$A^*x=\alpha_1+2\alpha_2$的解是_____.

$(A)\left[\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]^T$ $(B)\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]^T$ $(C)\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]^T$ $(D)\left[-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]^T$

8. 命题：⑴ 设A是$m\times n$阶矩阵，则A^TA的特征值都是非负数；
（2）设A是n阶反对称矩阵，则它的实特征值只能是0.
对以上命题描述正确的是____.

(A)⑴ 和（2）都对　　(B)⑴ 对，但（2）不对
(C)⑴ 不对，但（2）对　　(D)⑴ 和（2）都不对

9. 设A是n阶矩阵，则“任一n维非零列向量都是n阶A矩阵的特征向量”与“$A=\lambda E$”是____关系.

(A)充分非必要 (B)必要非充分 (C)充分必要 (D)既非充分也非必要

10. 设A是n阶实矩阵，则“$A^2=A$”与“$r(A)+r(A-E)=n$”是____关系.

(A)充分非必要 (B)必要非充分 (C)充分必要 (D)既非充分也非必要

11. 设A是3阶实矩阵，则“A是实对称矩阵”是“A有3个相互正交的特征向量”的____条件.

(A)充分非必要 (B)必要非充分 (C)充分必要 (D)既非充分也非必要

12.设A是3阶实对称矩阵，特征值$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，且$\xi_1=[0,1,1]^T$是$\lambda_1=-1$的特征向量，$\alpha$是3维非零列向量，则″$\alpha$是$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量"是"$\alpha$与$\xi_1$正交"的____条件.

(A)充分非必要 (B)必要非充分 (C)充分必要 (D)既非充分也非必要

12′.设A是3阶实对称矩阵，特征值$\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$，且$\xi_1=(1,2,2)^T$是$\lambda_1=-2$的特征向量，$\alpha$是3维非零列向量，则″$\alpha$是$\lambda_2=1$或$\lambda_3=4$的特征向量"是"$\alpha$与$\xi_1$正交"的____条件.

(A)充分非必要 (B)必要非充分 (C)充分必要 (D)既非充分也非必要

13. 已知二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(1-a\right)x_1^2+\left(1-a\right)x_2^2+2x_3^2+2\left(1+a\right)x_1x_2$的秩为2,则方程$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=0$的通解为____.

14.已知$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&-4\end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-5\end{bmatrix}$,若可逆矩阵$C$可使$C^TAC=\Lambda$,则$C=$____.

15. 以下二次曲线表示椭圆的是____.

$(A)\,x^2+4xy+2y^2=1$　　$(B)\,x^2-4xy+2y^2=1$

$(C)\,x^2+2xy+4y^2=1$　　$(D)\,x^2-2xy+y^2=1$

解:选(C). 一般地, 对二次曲线$L:ax^2+2bxy+cy^2=1,a>0$,

记二次型$f\left(x,y\right)=ax^2+2bxy+cy^2$,其矩阵$A=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$,

若A正定,则A的特征值λ_1,λ_2都为正,此时$f\left(x,y\right)$在正交变换下的标准形为$f\left(x,y\right)=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$,注意到标准形$\lambda_1u^2+\lambda_2v^2=1$此时是椭圆,进而原不标准形$ax^2+2bxy+cy^2=1$就是椭圆.

（正交变换也称旋转变换, 不改变变换前后图形的面貌及大小）.

16. （数一）设$C=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$是由基$\alpha_1=\left(1,0,0\right)^T,\alpha_2=\left(1,1,0\right)^T\ \alpha_3=\left(1,1,1\right)^T$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵, 则$\alpha=-\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标为____.

$(A)\left(2,3,5\right)^T$　　$(B)\left(-2,-3,5\right)^T$　　$(C)\left(-2,3,-5\right)^T$　　$(D)\left(2,-3,-5\right)^T$

解:$\left[\beta_1,\beta_2,\beta_3\right]=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]C=\left[\alpha_1,-\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_2+\alpha_3\right]$,

则$\beta_1=\alpha_1=\left(1,0,0\right)^T,\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2=\left(0,1,0\right)^T,\beta_3=-\alpha_2+\alpha_3=\left(0,0,1\right)^T$,

于是$\alpha=-\alpha_1-2\alpha_2+5\alpha_3=\left(2,3,5\right)^T=2\beta_1+3\beta_2+5\beta_3$,选$(A)$.

第三讲　概率统计重点串讲

1.设随机变量X与Y相互独立,且分别服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$与$N\left(\mu,2\sigma^2\right)$,其中$\sigma$是未知参数且$\sigma>0$.记$Z=X-Y$.

(1) 求Z的概率密度$f\left(z;\sigma^2\right)$;

(2) 设$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$为来自总体Z的简单随机样本,求σ^2的最大似然估计量σ^2;

(3) 是否存在实数a,使得对任何$\varepsilon>0$,都有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\sigma^2-a\right|\geq\varepsilon\right\}=0$?

注： 本题是先求出总体的分布，然后再做最大似然估计，离散型也有类似的这种题型，如下：
设一个袋子中装有黑球和白球，黑球数：白球数 $=R:1$，现从袋子中有放回地一个一个取球，
直到取到黑球为止，记 X 为取出的白球数，这样做了 n 次（每次袋子中黑、白求比列保持不变），
得到样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.则 R 的最大似然估计为____.

解 由题意，总体 X 的分布律应为

$$P\{X=k\}=\left(\frac{1}{R+1}\right)^k\left(\frac{R}{R+1}\right),k=0,1,2,\cdots$$

所以似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{R+1}\right)^{x_i}\frac{R}{R+1}\right]=(R+1)^{-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\left(\frac{R}{R+1}\right)^n$$

所以 $\ln L=-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\ln(R+1)+n[\ln R-\ln(R+1)]$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial R}=-\frac{1}{R+1}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{R}-\frac{n}{R+1}$$

令 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial R}=0$，解得 $R=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$，

故知 R 的最大似然估计为 $\hat{R}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

2. 罐子中有N枚硬币,其中θ枚是普通硬币（掷出正面与反面的概率均为0.5),其余$N-\theta$ 枚硬币两面都是正面, 从罐子中有放回地随机取出一枚硬币, 把它连续掷两次, 记下结果, 但不去查看它属于哪种硬币, 如此重复n次,若掷出0 次、1 次、2 次正面的次数分别为n_0, n_1, n_2（$n_0+n_1+n_2=n$).(1）求θ的矩估计θ_1和最大似然估计θ_2;

（2）求θ_1和θ_2的数学期望;（3）当$N=n=10$时, 比较θ_1和θ_2的方差的大小.

常用分布的估计：

X 服从的分布	矩估计法	最大似然估计法
$0-1$ 分布	$\hat{p}=\overline{X}$	$\hat{p}=\overline{X}$
$B(n,p)$	$\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$	$\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$
$G(p)$	$\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$	$\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$
$P(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\overline{X}$	$\hat{\lambda}=\overline{X}$
$U(a,b)$	$\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ $\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$	$\hat{a}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ $\hat{b}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$
$E(\lambda)$	$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$	$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$\hat{\mu}=\overline{X},\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	$\hat{\mu}=\overline{X},\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

3.设总体X服从参数为λ（$\lambda>0$,未知）的泊松分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的一个样本,则$P\{X=0\}$的最大似然估计量为____.

4.设总体X服从参数为μ,σ^2（均未知）的正态分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的一个样本,则$E\left(e^X\right)$的最大似然估计量为____.

5. 设X,Y_1,Y_2相互独立,$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$,$Y_1\sim U(0,1)$,$Y_2\sim U(0,1)$,且$S=XY_1$,$T=(1-X)Y_2$. 求:（1）$Z=S+T$的概率密度$f_Z(z)$；（2）$S$与$T$的相关系数$\rho_{ST}$.

6.X_1,X_2,X_3,X_4相互独立且都服从$U(0,\theta)$,记$\xi=\frac{5}{4}\max\{X_1,X_2,X_3,X_4\},\eta=5\min\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$.

(1) 证明$E\xi=E\eta=\theta$;（2）比较$D\xi$和$D\eta$的大小.

7. 设X是随机变量,s,t是正数,m,n是正整数,则下列结论中正确个数是____.

（1）若$X\sim G(p)$,则$P(X>m+n|X>m)$与m无关;

（2）若$X\sim P\{X=k\}=\dfrac{1}{k(k+1)},k=1,2,\cdots$,则$P(X\ge 2n|X\ge n)$与$n$无关;

（3）若$X\sim E(\lambda)$,则$P(X>s+t|X>s)$与s无关;

（4）若$X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2},x>1\\ 0,其他\end{cases}$,则当$t>1$时,$P(X\ge 2t|X\ge t)$与$t$无关.

$(A)1$ $(B)2$ $(C)3$ $(D)4$

8.设$X\sim U(0,1)$,则$Y=X^{\ln X}$的概率密度$f_Y(y)=$____.

9.设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}6x,0<x<y<1\\ 0,\quad 其他\end{cases}$,则$P\left\{0<Y<\dfrac{1}{2}\middle|X=\dfrac{1}{3}\right\}=$____.

10.（1）设X,Y独立且分别服从参数为λ_1和λ_2的指数分布,则$\min\{X,Y\}$也服从指数分布;

(2)$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+y)},0<x<y\\ 0,其他\end{cases}$,则$Y-X$服从指数分布;

(3) 设$(X,Y)\sim f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$,则$X^2+Y^2$服从指数分布.

上述命题正确的个数是____.

$(A)0$ $(B)1$ $(C)2$ $(D)3$

11. 某人用n把钥匙去开门,假设只有一把能打开,今逐个任取一把试开,
记X为打开此门所需的开门次数,又设打不开的钥匙不放回,则$DX=$____.

12.设$X\sim E(\lambda),Y=[X+1]$,其中$[\bullet]$表示取整符号,则$EY=$____.

13.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的一组样本,记$Y=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$,

则$EY=$____.

14.设总体$X\sim N(0,1),X_1,X_2,\cdots,X_n$是一个样本,记$\overline{X},S^2$分别是样本均值和样本方差,

则$E\left[\left(\overline{X}+S^2\right)^2\right]=$____.

15. 设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$,从$X$中抽得样本$X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$,记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,

$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,则统计量$\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$服从____.

$(A)\,t(n)$　　$(B)\,t(n-1)$　　$(C)\,F(1,n)$　　$(D)\,F(n,1)$

16.设$X \sim U(-1,1)$,$Y=|X|$,$Z=X^2$,则以下说法正确的是____.

(A) X与Y不相关,也不独立,但X与Z独立

(B) X与Z不相关,也不独立,但X与Y独立

(C) X与Y不相关,也不独立,且X与Z也不相关,且也不独立

(D) X与Y独立,且X与Z也独立