全国硕士研究生统一入学考试
数学公式大全
高等数学公式

导数公式：

$$(tgx)'=\sec^2 x$$
$$(ctgx)'=-\csc^2 x$$
$$(\sec x)'=\sec x\cdot tgx$$
$$(\csc x)'=-\csc x\cdot ctgx$$
$$(a^x)'=a^x\ln a$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$$
$$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

基本积分表：

$$\int tgxdx=-\ln|\cos x|+C$$
$$\int ctgxdx=\ln|\sin x|+C$$
$$\int \sec xdx=\ln|\sec x+tgx|+C$$
$$\int \csc xdx=\ln|\csc x-ctgx|+C$$
$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$$
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$
$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$
$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 xdx=tgx+C$$
$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\csc^2 xdx=-ctgx+C$$
$$\int\sec x\cdot tgxdx=\sec x+C$$
$$\int\csc x\cdot ctgxdx=-\csc x+C$$
$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$
$$\int shxdx=chx+C$$
$$\int chxdx=shx+C$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$
$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$
$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$
$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

三角函数的有理式积分：

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad u=tg\frac{x}{2},\quad dx=\frac{2du}{1+u^2}$$

一些初等函数：

$$双曲正弦:shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$双曲余弦:chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$双曲正切:thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$arshx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$archx=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$arthx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e=2.718281828459045...$$

三角函数公式：

· 诱导公式：

函数 角 A	sin	cos	tg	ctg
-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
90°-α	cosα	sinα	ctgα	tgα
90°+α	cosα	-sinα	-ctgα	-tgα
180°-α	sinα	-cosα	-tgα	-ctgα
180°+α	-sinα	-cosα	tgα	ctgα
270°-α	-cosα	-sinα	ctgα	tgα
270°+α	-cosα	sinα	-ctgα	-tgα
360°-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
360°+α	sinα	cosα	tgα	ctgα

· 和差角公式：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp 1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$$

· 和差化积公式：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

· 倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$
$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

· 半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

· 正弦定理：$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$　　· 余弦定理：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

· 反三角函数性质：$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$　　$arctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx$

高阶导数公式——莱布尼兹（Leibniz）公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$
$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用：

拉格朗日中值定理：$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$\mathrm{F}(x) = x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率：

弧微分公式：$ds = \sqrt{1+y'^2}dx$,其中$y' = tg\alpha$

平均曲率：$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$.$\Delta\alpha$：从M点到M′点，切线斜率的倾角变化量；Δs：$\overset{\frown}{MM'}$弧长。

M点的曲率：$K = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

直线：$K = 0$;

半径为a的圆：$K = \frac{1}{a}$.

定积分的近似计算：

矩形法：$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$

梯形法：$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+\cdots+y_{n-1}]$

抛物线法：$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})]$

定积分应用相关公式：

功：$W = F \cdot s$

水压力：$F = p \cdot A$

引力：$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, k$为引力系数

函数的平均值：$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

均方根：$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$

空间解析几何和向量代数：

空间2点的距离：$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi, \varphi$是$\overrightarrow{AB}$与$u$轴的夹角。

$\Pr j_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2) = \Pr j\vec{a}_1 + \Pr j\vec{a}_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$，是一个数量，

两向量之间的夹角：$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, |\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$.例：线速度：$\vec{v} = \vec{w}\times\vec{r}$.

向量的混合积：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\alpha, \alpha$为锐角时，

代表平行六面体的体积。

平面的方程：

1、点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$\vec{n}=\{A,B,C\},M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

3、截距世方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，其中$\vec{s}=\{m,n,p\}$；参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

二次曲面：

1、椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$，（$p,q$同号）

3、双曲面：

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（马鞍面）

多元函数微分法及应用

全微分： $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算： $\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)] \qquad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)] \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$**时，**

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$， $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$， $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ $\quad J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

微分法在几何上的应用：

空间曲线$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点M处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，则切向量$\vec{T}=\{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\}$

曲面$F(x,y,z)=0$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则：

1、过此点的法向量：$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

2、过此点的切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

3、过此点的法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

方向导数与梯度：

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$沿任一方向l的方向导数为：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中φ为x轴到方向l的转角。

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$的梯度：$\mathrm{grad}f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

它与方向导数的关系是：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}\,f(x,y)\cdot\vec{e}$，其中$\vec{e}=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}$，为$l$方向上的单位向量。

$\therefore\dfrac{\partial f}{\partial l}$是$\mathrm{grad}f(x,y)$在$l$上的投影。

多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$

$$\text{则：}\begin{cases} AC-B^2>0\text{时}, \begin{cases} A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值} \\ A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值} \end{cases} \\ AC-B^2<0\text{时}, \qquad \text{无极值} \\ AC-B^2=0\text{时}, \qquad \text{不确定} \end{cases}$$

重积分及其应用：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$\text{曲面}z=f(x,y)\text{的面积}A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$\text{平面薄片的重心：}\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma},\qquad \bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$$

$$\text{平面薄片的转动惯量：对于}x\text{轴}I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,\qquad \text{对于}y\text{轴}I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$$

平面薄片（位于xoy平面）对z轴上质点$M(0,0,a),(a>0)$的引力：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中：

$$F_x=f\iint_D \frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_y=f\iint_D \frac{\rho(x,y)yd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_z=-fa\iint_D \frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标：

$$\text{柱面坐标：}\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta, \\ z=z \end{cases}\qquad \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega F(r,\theta,z)rdrd\theta dz,$$

其中：$F(r,\theta,z)=f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$

$$\text{球面坐标：}\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi \end{cases}\qquad dv=rd\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot d\theta\cdot dr=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr$$

$$\text{重心：}\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho dv,\qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho dv,\qquad \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho dv,\qquad \text{其中}M=\bar{x}=\iiint_\Omega \rho dv$$

$$\text{转动惯量：}I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho dv,\qquad I_y=\iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho dv,\qquad I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho dv$$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设$f(x,y)$在L上连续，L的参数方程为:$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$(\alpha \le t \le \beta)$,则：

$\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta)$ 特殊情况:$\begin{cases} x=t \\ y=\varphi(t) \end{cases}$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，则：

$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$

两类曲线积分之间的关系:$\int\limits_L Pdx+Qdy = \int\limits_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha$和$\beta$分别为$L$上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式:$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_L Pdx+Qdy$格林公式:$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_L Pdx+Qdy$

当$P=-y,Q=x$，即:$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$时，得到$D$的面积：$A=\iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx$

·平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、G是一个单连通区域；

2、$P(x,y)$，$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如(0,0)，应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

·二元函数的全微分求积：

在$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$时，$Pdx+Qdy$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中：

$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，通常设$x_0=y_0=0$。

曲面积分：

对面积的曲面积分:$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分:$\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$，**其中：**

$\iint\limits_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，**取曲面的上侧时取正号；**

$\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$，**取曲面的前侧时取正号；**

$\iint\limits_\Sigma Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，**取曲面的右侧时取正号。**

两类曲面积分之间的关系:$\iint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iint\limits_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

高斯公式：

$$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\boxed{\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds}$$

高斯公式的物理意义 — —通量与散度：

散度：$\mathrm{div}\,\vec{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$,即：单位体积内所产生的流体质量，若$\mathrm{div}\,\vec{v}<0$,则为消失...

通量:$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}ds=\iint_{\Sigma}A_n ds=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds,$

因此，高斯公式又可写成:$\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\vec{A}dv=\oiint_{\Sigma}A_n ds$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

上式左端又可写成:$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无关的条件:$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

旋度：$\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线Γ的环流量:$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{t}ds$

常数项级数：

等比数列:$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

等差数列:$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$

调和级数:$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$**是发散的**

级数审敛法：

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

2、比值审敛法：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

3、定义法：

$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n;\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在，则收敛；否则发散。

交错级数$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$(或$-u_1+u_2-u_3+\cdots,u_n>0$)的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足$\begin{cases}u_n\ge u_{n+1}\\ \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{cases}$，那么级数收敛且其和$s\le u_1$,其余项$r_n$的绝对值$|r_n|\le u_{n+1}$。

绝对收敛与条件收敛：

(1)$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，其中$u_n$为任意实数；

(2)$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数:$\sum\frac{1}{n}$发散，而$\sum\frac{(-1)^n}{n}$收敛；

级数:$\sum\frac{1}{n^2}$收敛；

p级数:$\sum\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases}p\le 1\text{ 时发散}\\ p>1\text{时收敛}\end{cases}$

幂级数：

$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ $\begin{cases}|x|<1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x}\\ |x|\ge 1\text{时，发散}\end{cases}$

对于级数(3)$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存在R，使$\begin{cases}|x|<R\text{时收敛}\\ |x|>R\text{时发散}\\ |x|=R\text{时不定}\end{cases}$ 其中R称为收敛半径。

求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则$\begin{cases}\rho\ne 0\text{时，}R=\dfrac{1}{\rho}\\ \rho=0\text{时，}R=+\infty\\ \rho=+\infty\text{时，}R=0\end{cases}$

函数展开成幂级数：

函数展开成泰勒级数：$f(x)=f(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

余项：$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

$x_0=0$时即为麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

一些函数展开成幂级数：

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\qquad(-1<x<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

欧拉公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\qquad\text{或}\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\end{cases}$$

三角级数：

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中，$a_0=aA_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x$。

正交性：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\cdots\sin nx,\cos nx\cdots$任意两个不同项的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分＝0。

傅立叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)，\text{周期}=2\pi$$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx & (n=0,1,2\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx & (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}\qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\text{（相加）}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{24}\qquad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}\text{（相减）}$$

正弦级数：$a_n=0$，$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$　$n=1,2,3\cdots$　$f(x)=\sum b_n\sin nx$是奇函数

余弦级数：$b_n=0$，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$　$n=0,1,2\cdots$　$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$是偶函数

周期为$2l$的周期函数的傅立叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),\text{ 周期}=2l$$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (n=0,1,2\cdots)\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

微分方程的相关概念：

一阶微分方程：$y'=f(x,y)$ 或 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为$g(y)dy=f(x)dx$的形式，解法：

$\int g(y)dy=\int f(x)dx$ 得：$G(y)=F(x)+C$称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi(x,y)$，即写成$\frac{y}{x}$的函数，解法：

设$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，$u+\frac{du}{dx}=\varphi(u),\therefore\frac{dx}{x}=\frac{du}{\varphi(u)-u}$分离变量，积分后将$\frac{y}{x}$代替$u$，

即得齐次方程通解。

一阶线性微分方程：

1、一阶线性微分方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$$\begin{cases}\text{当}Q(x)=0\text{时,为齐次方程，}y=Ce^{-\int P(x)dx}\\ \text{当}Q(x)\neq 0\text{时，为非齐次方程，}y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx}\end{cases}$$

2、贝努力方程：$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)}$

全微分方程：

如果$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$中左端是某函数的全微分方程，即：

$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，其中：$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

$\therefore u(x,y)=C$应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x),\begin{cases}f(x)\equiv 0\text{时为齐次}\\ f(x)\neq 0\text{时为非齐次}\end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

$(*)y''+py'+qy=0$，其中p,q为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程：$(\Delta)r^2+pr+q=0$，其中r^2，r的系数及常数项恰好是$(*)$式中y'',y',y的系数；

2、求出(Δ)式的两个根r_1,r_2

3、根据r_1,r_2的不同情况，按下表写出(*)式的通解：

r_1，r_2的形式	(*)式的通解
两个不相等实根$(p^2-4q>0)$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
两个相等实根$(p^2-4q=0)$	$y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根$(p^2-4q<0)$ $r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$，p,q为常数

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型，λ为常数；

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

线性代数部分

1、行列式

1. n 行列式共有 n^2 个元素，展开后有 $n!$ 项，可分解为 2^n 行列式；
2. 代数余子式的性质：

   ①、A_{ij} 和 a_{ij} 的大小无关；

   ②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；

   ③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为 $|A|$；

3. 代数余子式和余子式的关系：$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$　　　　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
4. 设 n 行列式 D：

   将 D 上、下翻转或左右翻转，所得行列式为 D_1，则 $D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；

   将 D 顺时针或逆时针旋转 90°，所得行列式为 D_2，则 $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；

   将 D 主对角线翻转后（转置），所得行列式为 D_3，则 $D_3=D$；

   将 D 主副角线翻转后，所得行列式为 D_4，则 $D_4=D$；

5. 行列式的重要公式：

   ①、主对角行列式：主对角元素的乘积；

   ②、副对角行列式：副对角元素的乘积 $\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

   ③、上、下三角行列式（$|◥|=|◣|$）：主对角元素的乘积；

   ④、$|◤|$ 和 $|◢|$：副对角元素的乘积 $\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；

   ⑤、拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|$、$\begin{vmatrix}C & A\\ B & O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O & A\\ B & C\end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}|A||B|$

   ⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；

   ⑦、特征值；

6. 对于 n 阶行列式 $|A|$，恒有：$|\lambda E-A|=\lambda^n+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k S_k\lambda^{n-k}$，其中 S_k 为 k 阶主子式；
7. 证明 $|A|=0$ 的方法：

   ①、$|A|=-|A|$；

   ②、反证法；

   ③、构造齐次方程组 $Ax=0$，证明其有非零解；

   ④、利用秩，证明 $r(A)<n$；

   ⑤、证明 0 是其特征值；

2、矩阵

1. A 是 n 阶可逆矩阵：

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$（是非奇异矩阵）；

$\Leftrightarrow r(A) = n$ （是满秩矩阵）

$\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组线性无关；

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解；

$\Leftrightarrow \forall b \in R^n$， $Ax = b$ 总有唯一解；

$\Leftrightarrow A$ 与 E 等价；

$\Leftrightarrow A$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积；

$\Leftrightarrow A$ 的特征值全不为 0；

$\Leftrightarrow A^T A$ 是正定矩阵；

$\Leftrightarrow A$ 的行（列）向量组是 R^n 的一组基；

$\Leftrightarrow A$ 是 R^n 中某两组基的过渡矩阵；

2. 对于 n 阶矩阵 A： $AA^* = A^*A = |A|E$ **无条件恒**成立；

3. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ $\qquad$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ $\qquad$ $(A^*)^T = (A^T)^*$

$(AB)^T = B^T A^T$ $\qquad$ $(AB)^* = B^* A^*$ $\qquad$ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数和；

5. 关于分块矩阵的重要结论，其中均 A 、 B 可逆：

若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，则：

Ⅰ、 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

Ⅱ、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

②、 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$； （主对角分块）

③、 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$； （副对角分块）

④、 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$； （拉普拉斯）

⑤、 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$； （拉普拉斯）

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个 $m \times n$ 矩阵 A，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的： $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$；

等价类：所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

对于同型矩阵 A、B，若 $r(A)=r(B) \Leftrightarrow A \sim B$；

2. 行最简形矩阵：

①、只能通过初等行变换获得；

②、每行首个非 0 元素必须为 1；

③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；

3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

①、若 $(A,E)\overset{r}{\sim}(E,X)$，则 A 可逆，且 $X=A^{-1}$；

②、对矩阵 (A,B) 做初等行变化，当 A 变为 E 时，B 就变成 $A^{-1}B$，即：$(A,B)\overset{c}{\sim}(E,A^{-1}B)$；

③、求解线形方程组：对于 n 个未知数 n 个方程 $Ax=b$，如果 $(A,b)\overset{r}{\sim}(E,x)$，则 A 可逆，且 $x=A^{-1}b$；

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

②、$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，左乘矩阵 A，λ_i 乘 A 的各行元素；右乘，λ_i 乘 A 的各列元素；

③、对调两行或两列，符号 $E(i,j)$，且 $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$，例如：$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}$；

④、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$，且 $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$，例如：$\begin{pmatrix}1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$，且 $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$，如：$\begin{pmatrix}1 & & k\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & -k\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

5. 矩阵秩的基本性质：

①、$0\le r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$；

②、$r(A^T)=r(A)$；

③、若 $A \sim B$，则 $r(A)=r(B)$；

④、若 P、Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；**（可逆矩阵不影响矩阵的秩）**

⑤、$\max(r(A),r(B))\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑥、$r(A+B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑦、$r(AB)\le \min(r(A),r(B))$；（※）

⑧、如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=0$，则：（※）

Ⅰ、B 的列向量全部是齐次方程组 $AX=0$ 解（转置运算后的结论）；

Ⅱ、$r(A)+r(B)\le n$

⑨、若 A、B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为 1 的矩阵：一定可以分解为**列矩阵（向量）$\times$行矩阵（向量）**的形式，再采用结合律；

②、型如$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^0 \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^1 \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{b}^1 + \cdots + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}} + \cdots + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{a}^1 \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}-1} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{m}=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}$；

注：Ⅰ、$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$展开后有$\boldsymbol{n}+1$项；

Ⅱ、$C_n^m = \dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \qquad C_n^0 = C_n^n = 1$

Ⅲ、组合的性质：$C_n^m = C_n^{n-m} \qquad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \qquad \sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n \qquad rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$；

③、利用特征值和相似对角化：

7. 伴随矩阵：

①、伴随矩阵的秩：$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n} \\ 1 & \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}-1 \\ 0 & \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) < \boldsymbol{n}-1 \end{cases}$；

②、伴随矩阵的特征值：$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{X})$；

③、$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$、$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{n}-1}$

8. 关于$\boldsymbol{A}$矩阵秩的描述：

①、$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{A}$中有$\boldsymbol{n}$阶子式不为 0，$\boldsymbol{n}+1$阶子式全部为 0；（两句话）

②、$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) < \boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{A}$中有$\boldsymbol{n}$阶子式全部为 0；

③、$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) \geq \boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{A}$中有$\boldsymbol{n}$阶子式不为 0；

9. 线性方程组：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵，则：

①、$\boldsymbol{m}$与方程的个数相同，即方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有$\boldsymbol{m}$个方程；

②、$\boldsymbol{n}$与方程组得未知数个数相同，方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$为$\boldsymbol{n}$元方程；

10. 线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的求解：

①、对增广矩阵$\boldsymbol{B}$进行初等行变换（**只能使用初等行变换**）；

②、齐次解为对应齐次方程组的解；

③、特解：自由变量赋初值后求得；

11. 由$\boldsymbol{n}$个未知数$\boldsymbol{m}$个方程的方程组构成$\boldsymbol{n}$元线性方程：

①、$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{1\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{2\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}1}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}2}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{nm}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}} \end{cases}$；

②、$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2\boldsymbol{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}1} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{mn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{m}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$（向量方程，$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵，$\boldsymbol{m}$个方程，$\boldsymbol{n}$个未知数）

③、$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta$（全部按列分块，其中$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$）；

④、$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \beta$（线性表出）

⑤、有解的充要条件：$r(A) = r(A, \beta) \le n$（n为未知数的个数或维数）

4、向量组的线性相关性

1. m个n维列向量所组成的向量组A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$构成$n \times m$矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$；

   m个n维行向量所组成的向量组B：$\beta_1^T, \beta_2^T, \cdots, \beta_m^T$构成$m \times n$矩阵$B = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$；

   含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

2. ①、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax = 0$有、无非零解；（齐次线性方程组）
   ②、向量的线性表出 $\Leftrightarrow Ax = b$是否有解；（线性方程组）
   ③、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow AX = B$是否有解；（矩阵方程）

3. 矩阵$A_{m \times n}$与$B_{l \times n}$行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组$Ax = 0$和$Bx = 0$同解；(P_{101}例 14)

4. $r(A^TA) = r(A)$；(P_{101}例 15)

5. n维向量线性相关的几何意义：
   ①、α线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$；
   ②、α, β线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta$坐标成比例或共线（平行）；
   ③、α, β, γ线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$共面；

6. 线性相关与无关的两套定理：
   若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$必线性相关；
   若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s-1}$必线性无关；（向量的个数加加减减，二者为对偶）
   若r维向量组A的每个向量上添上$n-r$个分量，构成n维向量组B：
   若A线性无关，则B也线性无关；反之若B线性相关，则A也线性相关；（向量组的维数加加减减）
   简言之：无关组延长后仍无关，反之，不确定；

7. 向量组A（个数为r）能由向量组B（个数为s）线性表示，且A线性无关，则$r \le s$(二版P_{74}**定理 7**);

   向量组A能由向量组B线性表示，则$r(A) \le r(B)$；（P_{86}**定理 3**）

   向量组A能由向量组B线性表示
   $\Leftrightarrow AX = B$有解；

   $\Leftrightarrow r(A) = r(A, B)$（$P_{85}$**定理 2**）

   向量组A能由向量组B等价$\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$（$P_{85}$**定理 2 推论**）

8. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$；

①、矩阵行等价：$A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow PA=B$（左乘，$P$ 可逆）$\Leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

②、矩阵列等价：$A\overset{c}{\sim}B\Leftrightarrow AQ=B$（右乘，$Q$ 可逆）；

③、矩阵等价：$A\sim B\Leftrightarrow PAQ=B$（$P$、$Q$ 可逆）；

9. 对于矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$：

①、若 A 与 B 行等价，则 A 与 B 的行秩相等；

②、若 A 与 B 行等价，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性；

③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；

④、矩阵 A 的行秩等于列秩；

10. 若 $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$，则：

①、C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，B 为系数矩阵；

②、C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A^T 为系数矩阵；（转置）

11. 齐次方程组 $Bx=0$ 的解一定是 $ABx=0$ 的解，**考试中可以直接作为定理使用，而无需证明**；

①、$ABx=0$ 只有零解 $\Rightarrow Bx=0$ 只有零解；

②、$Bx=0$ 有非零解 $\Rightarrow ABx=0$ 一定存在非零解；

12. 设向量组 $B_{n\times r}:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 可由向量组 $A_{n\times s}:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为：（**P_{110} 题 19 结论**）

$$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K \quad (B=AK)$$

其中 K 为 $s\times r$，且 A 线性无关，则 B 组线性无关 $\Leftrightarrow r(K)=r$；（**B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性**）

（必要性：$\because r=r(B)=r(AK)\le r(K),r(K)\le r,\therefore r(K)=r$；充分性：反证法）

注：当 $r=s$ 时，K 为方阵，可当作定理使用；

13. ①、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $Q_{n\times m}$，$AQ=E_m$ $\Leftrightarrow r(A)=m$、Q 的列向量线性无关；（P_{87}）

②、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $P_{n\times m}$，$PA=E_n$ $\Leftrightarrow r(A)=n$、P 的行向量线性无关；

14. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立；（定义）

$\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解，即 $Ax=0$ 有非零解；

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

15. 设 $m\times n$ 的矩阵 A 的秩为 r，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩为：$r(S)=n-r$；

16. 若 η^* 为 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；（**P_{111} 题 33 结论**）

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA=E$ 或 $A^{-1}=A^T$（定义），性质：

①、A 的列向量都是单位向量，且两两正交，即 $a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} (i, j = 1, 2, \cdots n)$；

②、若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1} = A^T$ 也为正交阵，且 $|A| = \pm 1$；

③、若 A 、 B 正交阵，则 AB 也是正交阵；

注意：求解正交阵，千万不要忘记**施密特正交化**和**单位化**；

2. 施密特正交化：$(a_1, a_2, \cdots, a_r)$

$b_1 = a_1$；

$b_2 = a_2 - \dfrac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} \cdot b_1$

………

$b_r = a_r - \dfrac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} \cdot b_1 - \dfrac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} \cdot b_2 - \cdots - \dfrac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} \cdot b_{r-1}$；

3. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；
对于**实对称阵**，不同特征值对应的特征向量正交；

4. ①、A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ A 经过初等变换得到 B；
$\Leftrightarrow PAQ = B$， P 、 Q 可逆；
$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$， A 、 B 同型；
②、A 与 B 合同 $\Leftrightarrow C^T AC = B$，其中可逆；
$\Leftrightarrow x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的正、负惯性指数；
③、A 与 B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP = B$；

5. 相似一定合同、合同未必相似；
若 C 为正交矩阵，则 $C^T AC = B \Rightarrow A \sim B$，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

6. A 为对称阵，则 A 为二次型矩阵；

7. n 元二次型 $x^T Ax$ 为正定：
$\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 n；
$\Leftrightarrow A$ 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使 $C^T AC = E$；
$\Leftrightarrow A$ 的所有特征值均为正数；
$\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式均大于 0；
$\Rightarrow a_{ii} > 0, |A| > 0$；**(必要条件)**

概率论与数理统计部分

1．随机事件及其概率

$$A\cup\Omega=\Omega \qquad A\cap\Omega=A$$

吸收律：$A\cup\varnothing=A \qquad A\cap\varnothing=\varnothing$

$$A\cup(AB)=A \qquad A\cap(A\cup B)=A$$

$$A-B=A\overline{B}=A-(AB)$$

反演律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B} \qquad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

2．概率的定义及其计算

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

若 $A\subset B \quad \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

对任意两个事件 A,B，有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$

加法公式：对任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

3．条件概率

$$P\left(B\mid A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

乘法公式

$$P(AB)=P(A)P\left(B\mid A\right) \quad (P(A)>0)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P\left(A_2\mid A_1\right)\cdots P\left(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}\right)$$
$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)$$

Bayes 公式

$$P(B_k|\ A)=\frac{P(AB_k)}{P(A)}\ =\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

4．随机变量及其分布

分布函数计算

$$P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)$$
$$=F(b)-F(a)$$

5．离散型随机变量

(1)　0 – 1 分布

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1$$

(2) 二项分布　$B(n,p)$

若 $P(A)=p$

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

* Possion 定理

$$\lim_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$$

有　$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$k=0,1,2,\cdots$$

(3)　Poisson 分布　$P(\lambda)$

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

6．连续型随机变量

(1)　均匀分布　$U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0,\\ \dfrac{x-a}{b-a},\\ 1\end{cases}$$

(2) 指数分布　$E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$$

(3) 正态分布　$N(\mu,\sigma 2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad -\infty<x<+\infty$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,t$$

* $N(0,1)$ — 标准正态分布

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad -\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\qquad -\infty<x<+\infty$$

7.多维随机变量及其分布

二维随机变量(X,Y)的分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$

边缘分布函数与边缘密度函数

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dvdu$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)dv$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)du$$

8. 连续型二维随机变量

(1)　区域 G 上的均匀分布，$U(G)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

9. 二维随机变量的 条件分布

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \qquad f_X(x)>0$$

$$=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \qquad f_Y(y)>0$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}$$

10. 随机变量的数字特征

数学期望

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_k p_k$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

随机变量函数的数学期望

X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)$

X 的 k 阶绝对原点矩 $E(|X|^k)$

X 的 k 阶中心矩 $E((X-E(X))^k)$

X 的 方差 $E((X-E(X))^2)=D(X)$

X,Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩 $E(X^kY^l)$

X,Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩

$$E\left((X-E(X))^k(Y-E(Y))^l\right)$$

X,Y 的 二阶混合原点矩 $E(XY)$

X,Y 的二阶混合中心矩 X,Y 的协方差

$$E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$$

X,Y 的相关系数

$$E\left(\frac{(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right)=\rho_{XY}$$

X 的方差

$D(X) = E((X - E(X))2)$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

协方差

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)\\&=E(XY)-E(X)E(Y)\\&=\pm\frac{1}{2}\big(D(X\pm Y)-D(X)-D(Y)\big)\end{aligned}$$

相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$