

Convexité

Hamza Ennaji

18 février 2024

1 Ensembles convexes

Définition 1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$. On dit que C est convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

Remarque. La définition est équivalent à dire que le segment $[x, y] \subset C$. La Figures-1 illustre quelques exemples d'ensembles convexes et non-convexes.

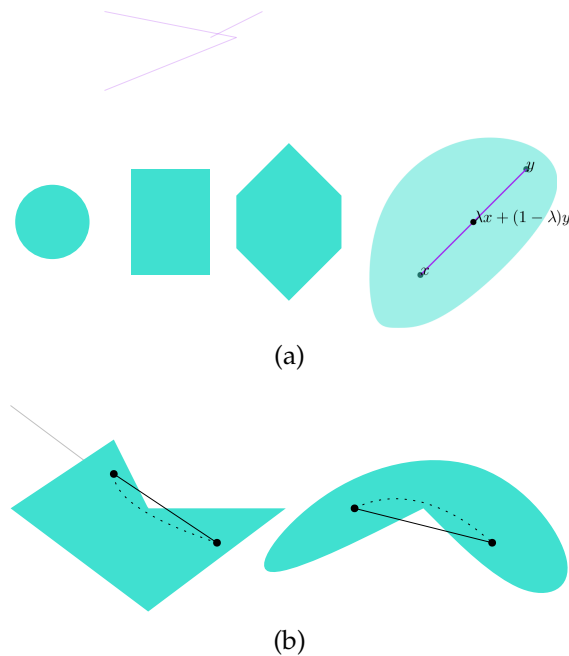


FIG. 1 : La Figure-1a des ensembles convexes de \mathbb{R}^2 . Tandis que Figure-1b montre des exemples de d'ensembles non convexes.

Exemple (Voir Td). Voici quelques exemples d'ensembles convexes :

- Les boules (ouvertes, fermées) :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\} \text{ et } \bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$$

avec $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$.

- Les hyperplans :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}, a \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

- Les demis-plans, les ellipsoïdes etc.

Proposition 1 (Intersection de convexes). Soient $C_i \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in I$, des ensembles convexes, alors $C \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

Preuve 1. Laissée en exercice.

Remarque. Dans la Proposition-1, on remarque que l'ensemble des indices I est quelconque, i.e., possiblement infini.

Le résultat suivant récapitule quelques opérations préservant la convexité.

Theorem 1. 1. Soient C_1, \dots, C_m des convexes de \mathbb{R}^n et $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, alors

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i C_i = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : x_i \in C_i, \forall i = 1, \dots, m \right\}$$

est convexe.

2. Soient C_1, \dots, C_m des convexes de \mathbb{R}^n , alors

$$\prod_{i=1}^m C_i = \left\{ (x_1, \dots, x_m) : x_i \in C_i, \forall i = 1, \dots, m \right\}$$

est convexe.

3. Si $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors

$$A(C) = \{Ax : x \in C\}$$

est convexe.

Définition 2. Soient $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Une combinaison convexe des x_i est un vecteur de la forme $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. On écrit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Delta_m$ où

$$\Delta_m = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, m \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

Theorem 2. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe et $x_1, \dots, x_m \in C$. Alors pour tout $\lambda \in \Delta_m$ on a $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in C$.

Preuve 2. *Laissée en exercice.*

Définition 3. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. On appelle enveloppe convexe de S , et on note $\text{Conv}(S)$ l'ensemble des combinaisons convexes de S :

$$\text{Conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : x_i \in S \forall i = 1, \dots, m \text{ et } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Delta_m \right\}.$$

Remarque. L'enveloppe convexe d'un ensemble S est le plus petit convexe qui le contient : Si $S \subset U$ avec U convexe alors $\text{Conv}(S) \subset U$.

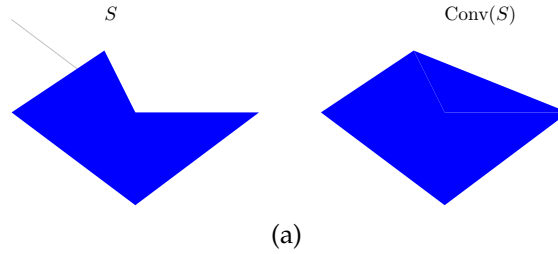


FIG. 2 : Exemple d'un ensemble non-convexe et son enveloppe convexe.

2 Fonctions convexes

Dans cette section, on considère un convexe C de \mathbb{R}^n .

Définition 4. On dit qu'une fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \text{ pour tout } x, y \in C, \lambda \in [0, 1].$$

On dira que f est strictement convexe si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \text{ pour tout } x \neq y \in C, \lambda \in (0, 1).$$

On dira que f est concave si $-f$ est convexe.

Exemple (Voir Td). Voici quelques exemples de fonctions convexes :

- Les normes : $f(x) = \|x\|$ sur \mathbb{R}^n .
- Les fonctions affines : $f(x) = a^T x + b$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$.

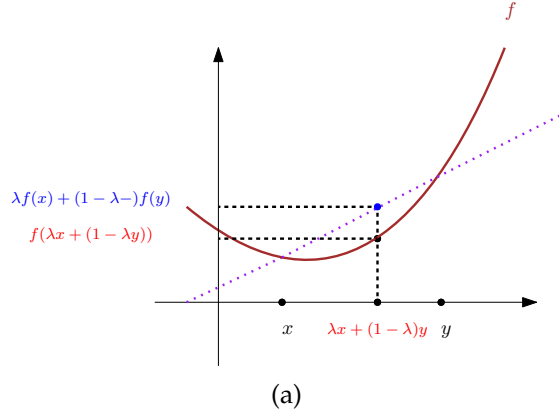


FIG. 3 : Illustration de l'inégalité de convexité dans la Définition-4

- La fonction $f(x) = -\log(x)$.

D'après la Définition-4, une fonction f est convexe si l'image par f , d'une combinaison convexe de deux points x et y , par f est plus petite que la combinaison convexe des valeurs $f(x)$ et $f(y)$. Cette propriété s'étend à la combinaison convexe de n'importe quel nombre de vecteurs.

Theorem 3 (Inégalité de Jensen). Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tout $x_1, \dots, x_m \in C$ et $\lambda \in \Delta_m$:

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i).$$

Preuve 3. Par récurrence. Laissée en exercice.

Le résultat suivant récapitule quelques opérations préservant la convexité de fonctions.

Theorem 4. 1. Soit f une fonction convexe sur C et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Alors αf est convexe sur C .

2. Soient f_1, \dots, f_m des fonctions convexes sur C . Alors $\sum_{i=1}^m f_i$ est convexe sur C .

3. Soient f_1, \dots, f_m des fonctions convexes sur C . Alors $f = \sup_{i=1, \dots, m} f_i$ est convexe sur C .

4. Si $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Alors $f(Ax + b)$ est convexe sur

$$D = \{y \in \mathbb{R}^m : Ay + b \in C\}.$$

3 CARACTÉRISATION DES FONCTIONS CONVEXES DIFFÉRENTIABLES

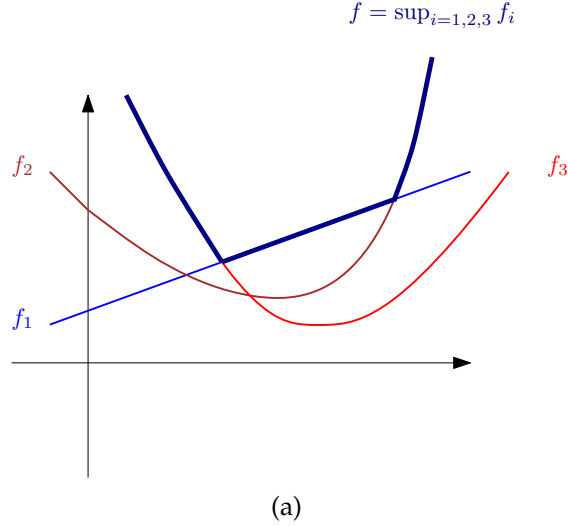


FIG. 4 : Convexité du la fonction sup de trois fonctions f_1, f_2, f_3 .

3 Caractérisation des fonctions convexes différentiables

Theorem 5. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. f est convexe.
2. $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$ pour tout $x, y \in C$.
3. Monotonie du gradient : $(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(y - x) \geq 0$ pour tout $x, y \in C$.

Quand la fonction est deux fois différentiable, alors la convexité de f est équivalente au fait que la matrice Hessienne est semi-définie positive.

Theorem 6. Soit f une fonction deux fois différentiable sur un ouvert convexe C de \mathbb{R}^n alors f est convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x) \geq 0$ pour tout $x \in C$.

Remarque. Dans le Théorème-6, $\nabla^2 f(x) \geq 0$ est à comprendre dans le sens : $u^T \nabla^2 f(x) u \geq 0$ pour tout vecteur u de \mathbb{R}^n .

Remarque. Jusqu'ici on a travaillé avec des fonctions f à valeurs dans \mathbb{R} . Les fonctions qu'on va rencontrer dans la pratique peuvent prendre des valeurs infinie. Il se trouve que la définition de convexité introduite précédemment marche aussi pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. À cette définition, il faut rajouter les règles suivantes : $\alpha + \infty = \infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot \infty = \infty$ pour tout $\alpha > 0$ et $0 \cdot \infty = 0$. Cela revient à dire que le domaine de f définie par

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\},$$

3 CARACTÉRISATION DES FONCTIONS CONVEXES DIFFÉRENTIABLES

est convexe et que $f|_{\text{dom}(f)}$ est convexe. L'exemple typique de telles fonctions est l'indicatrice d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ définie par

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in S, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on peut démontrer que δ_S est convexe si et seulement si S est convexe.

Exemple (Voir Td). 1. $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$ avec $A \in \mathcal{S}^n$. Montrer que f est convexe si et seulement si $A \in \mathcal{S}_+^n$.

2. On appelle fonction support ou d'appui de $S \subset \mathbb{R}^n$ la fonction

$$\sigma_S(x) = \sup_{y \in S} x^T y.$$

Montrer que σ_S est convexe.

3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On définit la conjuguée de f par

$$f^*(x) = \sup_y y^T x - f(y).$$

Montrer que f^* est convexe.