

Exercice 1. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact non vide et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x^* \in C$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in C} f(x)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on rappelle que f est dite propre si $-\infty \notin f(\mathbb{R}^n)$ et $\text{dom}(f) \neq \emptyset$. On dira que f est coercive si $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Finalement, f est dite semi-continue inférieurement (sci) ssi pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x on a $f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

- (1) Montrer que f est coercive si et seulement si $\text{Lev}(f, \alpha)$ est borné pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (2) Supposons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ est propre, semi-continue inférieurement et coercive. Montrer qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.
- (3) Supposons que f est continue et coercive et soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vide. Montrer que $x^* \in S$ tel que $f(x^*) = \min_{x \in S} f(x)$.
- (4) Montrer que $f(x, y) = x^2 + y^2$ admet un minimum global sur $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq -1\}$.

Exercice 3. Trouver et déterminer la nature des points critique des fonctions $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $d = 2, 3$.

- (1) $f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 + 3x^2y - 24y$.
- (2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.
- (3) $f(x, y) = x^2 - y^2$.
- (4) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.
- (5) $f(x, y, z) = -3z^2 + 2y^2 + 2xz + 2y + 1$.

Exercice 4. Soit $n \geq 2$ et $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto p(x) := (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

- (1) Montrer que $0_{\mathbb{R}^n}$ est le seul point critique de p .
- (2) Montrer que $0_{\mathbb{R}^n}$ est minimum local strict de p , mais qu'il n'est pas minimum global de p .

Exercice 5. Soit $f(x) = x^T A x + 2b^T x + c$ avec $A \in \mathcal{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

- (1) Montrer que x^* est un point stationnaire si et seulement si $Ax^* = -b$.

(2) Si $A \succeq 0$, alors x^* est un minimum global si et seulement si $A^*x = -b$.

(3) Si $A \succ 0$, alors $x^* = -A^{-1}b$ est un minimum global strict de f .

(4) Montre que f est coercive ssi $A \succ 0$.

(5) Montrer que

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & b \\ b^\top & c \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Exercice 6. Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable sur \mathbb{R}^n , et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe, fini en au moins un point. On pose

$$f(x) := (g + h)(x) = g(x) + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et on considère le problème $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

(1) Montrer que \bar{x} minimise f sur \mathbb{R}^n si et seulement si

$$\langle \nabla g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{E})$$

(2) Vérifier que (E) est équivalente à

$$\langle \nabla g(x), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{F})$$

Exercice 7. On considère le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^n} f(x), \quad (\text{P})$$

avec f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$. Montrer que $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ est un point stationnaire ssi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_i^* > 0, \\ \geq 0, & \text{si } x_i^* = 0. \end{cases}$$

Exercice 8. On considère le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) : \langle a, x \rangle = 1\}, \quad (\text{P})$$

où f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}_{++}^n$. Montre que qu'un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle a, x \rangle = 1$ est un point stationnaire de (P) ssi

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \frac{1}{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = \dots = \frac{1}{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*).$$