Espaces vectoriels

ENSIMAG Alternance 1$^{\text{ère}}$ année

Hamza Ennaji

Dernière modification: January 29, 2024

Contents

Corps **2**

Espaces véctoriels **3**

2.1 Propriétés 4
2.2 Sous-espaces vectoriels 5
2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels 6
2.4 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels engendrés . . . 7
2.5 Famille libre, famille liée 9
2.6 Bases et dimension 11
2.7 Somme de sous-espaces vectoriels. 13

Matrices et systèmes linéaires **16**

3.1 Calcul matriciel 16
3.1.1 Vecteurs lignes et colonnes 17
3.1.2 Opérations sur les matrices 18
3.1.3 Inverse d'une matrice 20
3.2 Opérations élémentaires sur les matrices 21
3.2.1 Transvection de lignes 21
3.2.2 Dilatation de lignes 22
3.3 Échange de lignes 23

❉ Corps

Nous avons besoins de rappeler la notion de corps pour préciser l'ensemble où vivent les scalaires.

Définition 1. Un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ dites addition et multiplication de scalaires tel que pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ et $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ et $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
- $0_{\mathbb{K}} + \alpha = \alpha$ et $1_{\mathbb{K}} \cdot \alpha = \alpha$.
- Il existe un élément $-\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha + (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$. Pour $\alpha \neq 0_K$, il existe un élément $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha \cdot \alpha^{-}1 = 1_K$.
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Example.
- L'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$ est un corps pour l'addition et multiplication usuelles.
- L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un corps pour les lois $+$ et $\cdot$ usuelles. On rappelle que pour $z = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \gamma + i\delta$:

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) \text{ et } z_1 z_2 = (\alpha\beta - \gamma\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$ est un corps pour l'addition et multiplication usuelles.
- L'ensemble $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ muni de l'addition et multiplication définies comme suit:

$$0 + 0 = 1 + 1 \overset{\text{def}}{=} 0, \; 0 + 1 = 1 + 0 \overset{\text{def}}{=} 1, \; 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 \overset{\text{def}}{=} 0 \text{ and } 1 \cdot 1 \overset{\text{def}}{=} 1.$$

Remarque. S'il y'a pas d'ambiguïté, on notera simplement 0 et 1 au lieu de $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$.

Convention *Le long du cours le corps $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.*

❋ *Espaces véctoriels*

Définition 2. Un espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-ev) est un espace muni de deux opérations:

i) Addition de vecteur: $\forall x, y \in \mathbb{E}$ il existe un élément $x + y \in \mathbb{E}$.

ii) Multiplication par scalaires: pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$, il existe un élément $\lambda \cdot x \in \mathbb{E}$.

Ces opération vérifient les hypothèses suivantes:

A1. $x + y = y + x \ \forall x, y \in \mathbb{E}$.

A2. $(x + y) + z = x + (y + z) \ \forall x, y, z \in \mathbb{E}$.

A3. il existe un élément $0_{\mathbb{E}}$ă $\in \mathbb{E}$ dit élément neutre pour l'addition, tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.

A4. Pour tout $x \in \mathbb{E}$ il existe $y \in \mathbb{E}$ tel que $x + y = 0_{\mathbb{E}}$.

A5. $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ pour tout $x \in E$.

A6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

A7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{E}$.

A8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$.

Remarque. Les hypothèses (A1-A2-A3-A4) expriment le fait que $(\mathbb{E}, +)$ est un group commutatif (ou abélien). Autrement dit, $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sit $(\mathbb{E}, +)$ est un group abélien et que les hypothèses (A5-A6-A7-A8) sont vérifiées.

Example.
- Exemple trivial: $\mathbb{E} = \{0\}$.
- $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{K} \ \forall i = 1, \ldots, n\}$.
- $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément P de $\mathbb{E}$ s'écrit de la forme
$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,$$

où les $a_i \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'entier n s'appelle le degré de P et on écrit $n = \deg(P)$. Pour un $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit λP par

$$(\lambda \cdot P)(X) \overset{\text{def}}{=} \lambda \cdot P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot a_i X^i.$$

Soit maintenant $Q(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ un autre polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que Q est de même degré que P. On définit alors $P + Q$ par

$$(P+Q)(X) \overset{\text{def}}{=} P(X) + Q(X) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) X^i.$$

- Soient $E_1, \ldots, E_n$ n espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors

$$\mathbb{E} \overset{\text{def}}{=} \Pi_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times \cdots E_n$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients réels. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_{2,2}(R)$ avec Plus généralement, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

2.1 *Propriétés*

Proposition 1. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-e.v et $x, y, z \in \mathbb{E}$. On a

i) Si $x + z = y + z$ alors $x = y$.

ii) Si $z + x = z + y$ alors $x = y$.

iii) $0_{\mathbb{E}}$ est unique: s'il existe $0' \in \mathbb{E}$ tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$ et $x + 0' = x$ alors $0_{\mathbb{E}} = 0'$.

Preuve. i) D'après Définition-2-(A4), il existe $z' \in \mathbb{E}$ tel que: $z + z' = 0_{\mathbb{E}}$. On a donc

$$x = x + 0_{\mathbb{E}} = x + (z + z') = (x + z) + z' = (y + z) + z' = y + (z + z') = y + 0_{\mathbb{E}} = y.$$

ii) Si $z + x = z + y$ alors par commutativité (Définition-2-(A1)) $x + z = y + z$ et on conllut d'après i) que $x = y$.

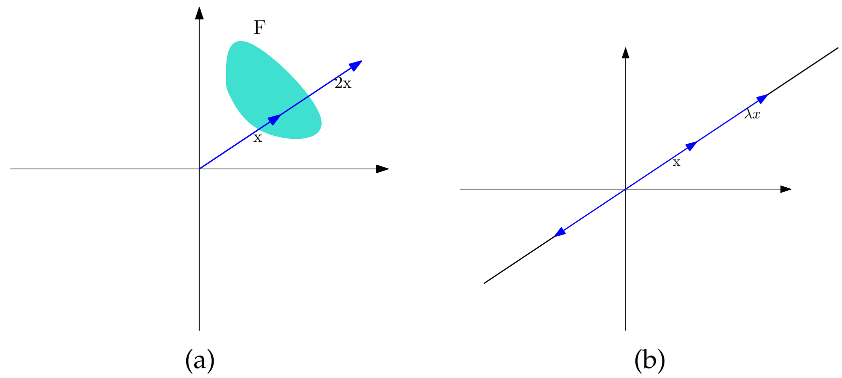


Figure 1: La Figure-1a montre un sous ensemble F du plan qui n'est stable ni pas addition de vecteurs ni par multiplications par scalaires. Tandis que Figure-?? montre une partie du plan, dite droite vectorielle, qui est pas addition de vecteurs et par multiplications par des scalaires.

iii) On a $x = x + 0_{\mathbb{E}} = x + 0'$ donc $0_{\mathbb{E}} = 0'$ toujours d'après i).

□

Corollaire. Soit $x \in \mathbb{E}$ alors l'élément $y \in \mathbb{E}$ dans Définition-2 vérifiant (A4) est unique, i.e., si $y, y' \in \mathbb{E}$ vérifient $x + y = x + y' = 0_{\mathbb{E}}$ alors $y = y'$. On note $y = -x$.

Example.
- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0)$.
- Dans $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, on a $0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ alors $0_{\mathbb{R}[X]} = 0$ est le polynôme nul.

2.2 *Sous-espaces vectoriels*

Définition 3. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Un ensemble $F \subset \mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ s'il est lui même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ par rapport à l'addition de vecteurs et multiplications de scalaires définies sur $\mathbb{E}$. Autrement dit, si $(F, +_{\mathbb{E}}, \cdot_{\mathbb{E}})$ vérifie (A1-A8).

Example. Examples de sous-espaces vectoriels

$F = \{0_{\mathbb{E}}\} \subset \mathbb{E}$, où $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

- $F = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0), x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$.

- $F = \mathbb{K}_n[X] \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{K}[X] : \ \deg(p) \leq n\} \subset \mathbb{K}[X]$.

Le résultat suivant fourni "un test" pour vérifier si un ensemble est oui ou non un sous-espace vectoriel d'un e.v donné.

Proposition 2 (Tests de sous-ev)**.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset \mathbb{E}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si et seulement si

- $0_{\mathbb{E}} \in F$.
- Si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$.
- Si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda x \in F$.

Cela est équivalent à dire

$$\lambda x + y \in F$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$.

Exercise

Vérifier si les ensembles suivant sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 1\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z \geq 0\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 01\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 = 0\}$.

2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Définition 4. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Alors $F \overset{\text{def}}{=} \cap_{i\in I} F_i$ est aussi un sous-espace vectoriel.

Preuve. On utilise la Proposition-2. Dans un premier temps, comme les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ on sait que $0_{\mathbb{E}} \in F$. Maintenant pour $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x, y \in F_i$ pour tout $i \in I$. Cela donne que $\lambda x + y \in F_i$ pour tout $i \in I$. On en déduit que $\lambda x + y \in \cap F_i$. D'où le résultat. □

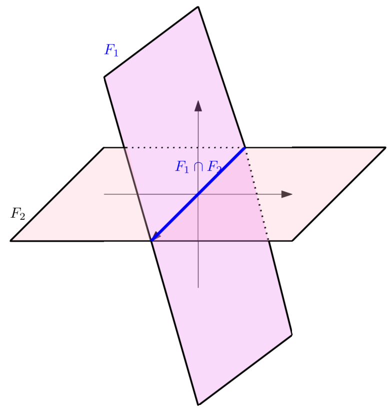


Figure 2: Illustration de l'intersection entre deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (ici, deux plans vectoriels), leur intersection est une droite vectorielle.

Example. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$F_1 = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\} \text{ et } F_2 = \{(0, x),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

On vérifie facilement que $F_1 \cap F_2 = \{(0, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2.4 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 5. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $S \subset \mathbb{E}$. Un vecteur $x \in \mathbb{E}$ est une combinaison linéaire d'éléments de S s'il existe $n \in \mathbb{N}$, des vecteurs $v_1, \cdots, v_n \in S$ et des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

À partir d'une partie S de $\mathbb{E}$, on peut définir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ avec les combinaisons linéaires des vecteurs de S.

Définition 6. Soit $S \subset \mathbb{E}$ un sous-ensemble non vide. On note par $\mathrm{Vect}(S)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de S, i.e.,

$$\mathrm{Vect}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ :\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{K},\ v_i \in S \right\}.$$

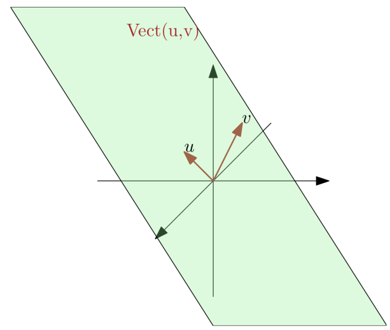


Figure 3: Deux vecteurs non-colinéaires u et v. Le sous-espace vectoriel Vect($\{u, v\}$) est le plan vectoriel qui les contient.

Remarque.
- Par convention $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.
- On remarque facilement que $S \subset \mathrm{Vect}(S)$. En effet, on a $v = 1_{\mathbb{K}} \cdot v$ pour tout $v \in S$.

Theorem 1. Soit $S \subset \mathbb{E}$, alors:

- $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
- $S \subset \mathrm{Vect}(S)$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ tel que $S \subset F$, alors $S \subset \mathrm{Vect}(S) \subset F$

Définition 7. Une famille $S \subset \mathbb{E}$ est dite génératrice de $\mathbb{E}$ si $\mathrm{Vect}(S) = \mathbb{E}$.

Example.
- La famille $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ avec

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1),$$

  est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. En effet, tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit:

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1(1, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, \cdots, 1).$$

- Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ des nombres complexes est engendré par $\{1, i\}$ car tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x \cdot 1 + y \cdot i$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
- L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est engendré par la famille $(M_i)_{i=1,2,3,4}$ des ma-

trices dites élémentaires avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ s'écrit:

$$M = a \cdot M_1 + b \cdot M_2 + c \cdot M_3 + d \cdot M_4.$$

- La famille de monômes $\{1, X, \cdots, X^n\}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \cdots + a_n \cdot X^n.$$

2.5 *Famille libre, famille liée*

*Étant donnée une famille génératrice $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{E}$, on remarque que $0_{\mathbb{E}}$ se réalise de façon **trivial** comme combinaison linéaire des v_i, i.e.,*

$$0_{\mathbb{E}} = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

*Néanmoins, on peut avoir un réalisation **non-triviale** de $0_{\mathbb{E}}$ comme combinaison linéaire des v_i, dans le sens où on peut trouver des scalaires $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$0_{\mathbb{E}} = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n.$$

Cela motive la définition suivante

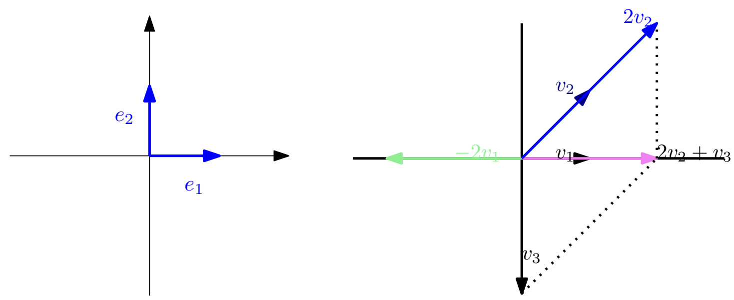
Définition 8.
- Une famille $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de vecteurs de $\mathbb{E}$ est dite libre si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}} \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i.$$

Autrement dit la seule façon d'écrire $0_{\mathbb{E}}$ comme combinaison linéaire des v_i est la combinaison triviale.

- Une famille S qui n'est pas libre est liée. Cela revient à dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}}.$$



(a) (b)

Figure 4: La Figure-4a illustre une famille libre de $\mathbb{R}^2$, $S = \{e_1, e_2\}$. La Figure-4b illustre une famille $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ qui est liée avec $v_1 = (1,0), v_2 = (1,1), v_3 = (0,-2)$.

Proposition 3. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$−ev et $S_1 \subset S_2 \subset \mathbb{E}$ deux ensembles. Alors:

- Si S_1 est liée alors S_2 est liée.
- Si S_2 est libre alors S_1 est libre.

Exercise

Soient $E, F \subset \mathbb{R}^3$ définies par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; y - x = 0 \;\; et \;\; z - y - 2x = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; 2x - 3y + z = 0\}$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $S_1 = \{u_1\}$ avec $u_1 = (1, 1, 3)$.

b) En déduire que $Vect(S_1) \subset E$.

c) Justifier que $E = Vect(S_1)$.

3) Soit $S_2 = (u_2, u_3)$ avec $u_2 = (3, 2, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

b) Montrer que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de S_2.

   c) *Justifier que $F = Vect(S_2)$.*

   d) *La partie F est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?*

4) *La famille $S = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle libre ou liée ? Que peut-on en déduire pour S_1 et S_2 ?*

2.6 Bases et dimension

Définition 9. Une famille $S \subset \mathbb{E}$ est une base de $\mathbb{E}$ si elle libre et génératrice.

Example.
- La famille $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est une base (dite canonique) de $\mathbb{R}^n$.
- La famille $(E_{ij})_{i,j}$ avec $i = 1, \cdots, m$ et $1, \cdots, n$ des matrices dites unitermes est une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Chaque matrice $E_{i,j}$ ne possède qu'une entrée non nulle qui vaut 1 est qui se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne (cf. Exemple- pour $m = n = 2$):

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} & \text{colonne } j \\ & \downarrow \\ \text{ligne } i \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- La famille $\{1, X, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n[X]$.
- La famille $\{1, X, \ldots, X^n, \ldots\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Remarque. Les examples précédents montrent en particulier qu'une base peut contenir un nombre infini d'éléments.

Le résultat suivant montre que toute famille génératrice finie peut être réduite à une base, essentiellement en enlevant les vecteur redondant.

Theorem 2 (de la base extraite)**.** Soit S une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$. Alors on peut extraite une base $B \subset S$ de $\mathbb{E}$.

Le résultat reste vraie en dimension infinie et repose sur l'Axiome du choix.

Example. On considère la famille $S = \{(-2,0),(1,1),(0,1)\}$. On vérifie facilement que S est une partie génératrice de $\mathbb{R}^2$ et qu'en supprimant un de ses vecteurs on trouver une base de $\mathbb{R}^2$. En effet le premier vecteur n'est rien d'autre que $-2.(1,0)$ et le deuxième $(1,1)$ s'écrit : $(1,0)+(0,1)$.

Le résultat suivant affirme que famille libre L dans $\mathbb{E}$ contient au plus le même nombre d'éléments d'une famille génératrice S de $\mathbb{E}$. En plus, L peut être complétée de façon convenable à partir de S pour obtenir une base.

Theorem 3 (de la base incomplète)**.** Soit S une famille génératrice de $\mathbb{E}$, i.e., $\mathrm{Vect}(S) = \mathbb{E}$ avec $\sharp(S) = n$ et soit $L \subset \mathbb{E}$ une famille libre telle que $\sharp(L) = m$. Alors

- m≤n.
- Il existe une partie H de S avec $\sharp(H) = n - m$ telle que

$$\mathrm{Vect}(L \cup H) = \mathbb{E}.$$

Définition 10. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Si $\mathbb{E}$ admet une base finie S, on dite que $\mathbb{E}$ est de dimension finie et on note

$$\dim(\mathbb{E}) = \sharp(S).$$

Si $\mathbb{E}$ n'a pas de base finie, on dit qu'il est de dimension infinie et on note $\dim(\mathbb{E}) = \infty$.

Example.
- $\dim(\{0\}) = 0$ (pourquoi ?).
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ et $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$.
- $\dim(\mathbb{R}^n[X]) = n + 1$.
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ alors que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ (pourquoi ?).

Corollaire. Soit $\mathbb{E}$ un ev de dimension n. Alors

- Toute famille libre de $\mathbb{E}$ à n éléments est une base de $\mathbb{E}$.
- Toute famille libre de $\mathbb{E}$ peut être étendue en une base de $\mathbb{E}$.

Proposition 4. Soit F un sev de $\mathbb{E}$ avec $\dim(E) < \infty$. Alors $\dim(F) \leq \dim(\mathbb{E})$ avec égalité si et seulement si $\mathbb{E} = F$.

Corollaire. Soit F un sev de $\mathbb{E}$ avec $\dim(E) < \infty$. Alors toute base de F peut être étendue en une base de $\mathbb{E}$.

Exercise

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Pour quelles valeurs de λ les familles $\{(1, \lambda), (\lambda, 2)\}$ et $\{(1, 0, \lambda), (1, 1, \lambda), (\lambda, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.*

Exercise

On considère $S = \{(1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}$.

- *Montrer que tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ avec les $a_i \in \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de S.*
- *Donner les coordonnées de P dans S.*

On a vu que l'intersection de sev reste un sev. Le cas de l'union est peu plus subtile. En effet, il est facile de ce convaincre que l'union de deux sev reste stable par multiplication par des scalaire mais pas par somme de vecteur comme illustré dans la Figure-5. Pour combler cette lacune, on introduit la notion de somme de sev.

2.7 Somme de sous-espaces vectoriels.

Soient F, G deux sev de $\mathbb{E}$. On définit

$$F + G = \{x + y : \quad x \in F, y \in G\}.$$

On a le résultat suivant:

Theorem 4.
- $F + G$ est un sev de $\mathbb{E}$.
- $F \cup G \subset F + G$.

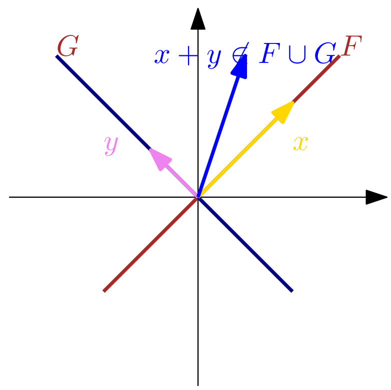


Figure 5: Illustration du fait que l'union de deux sev n'est pas stable par addition de vecteur.

- Tout sev H de $\mathbb{E}$ qui contient $F \cup G$ contient $F+G$:

$$F \cup G \subset F + G \cup H.$$

Proposition 5. On a $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Example. On revient à l'exemple illustré par la Figure-2. La somme des deux plans F_1 et F_2 engendre $\mathbb{R}^3$, i.e., $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ (voir la prochaine section). On a donc

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Une question naturelle qui se pose, c'est celle de l'unicité ou non de l'écriture $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Définition 11 (Somme directe)**.** On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0_{\mathbb{E}}\}$. Dans ce cas on note:

$$F + G := F \oplus G.$$

Remarque. La condition $F \cap G = \{0\}$ exprime le fait que 0 s'écrit de façon unique. En effet, si $F \cap G = \{0\}$ alors l'écriture $x + y = 0$ avec $x \in F$ et $y \in G$ implique que $y = -x \in F \cap G$, i.e., $x = y = 0$. Inversement, si 0 s'écrit de façon unique $x + y = 0$, alors tout vecteur $x \in F \cap G$ vérifie $x + (-x) = 0$ avec $x \in F$ et $-x \in G$, donc $x = 0$.

Proposition 6. F et G sont en somm directe et leur somme engendre $\mathbb{E}$, i.e., $\mathbb{E} = F \oplus G$ si et seulement si tout vecteur $z \in \mathbb{E}$ s'écrit de manière unique comme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. Dans ce cas:

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(F) + \dim(G).$$

On dira que F est un supplémentaire de G dans $\mathbb{E}$ (et inversement).

Exercise

On considère les deux sev de $E = \mathbb{R}^4$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{E} : \quad x + y + z + t = 0\} \;\; et \;\; G = \{(2x, -x, 0, x) : \quad x \in \mathbb{E}\}.$$

- *Montrer que F et G sont en somme directe.*
- *Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{E}$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x - 2\alpha, y + \alpha, z, t - \alpha) \in F$.*
- *En déduire que F et G sont supplémentaires.*

❈ *Matrices et systèmes linéaires*

Dans ce chapitre m, n, p, q désignent des entiers naturels non nuls.

3.1 Calcul matriciel

Définition 12. On appelle matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$, de taille (m, n) (ou de format $m \times n$, un tableau de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour $i = 1, \cdots, m$ et $j = 1, \cdots, n$. Ici m désigne le nombre de ligne et n le nombre de colonnes de A. On note des fois $A = (a_{ij})_{i,j}$ s'il n'ya pas de confusion.

Notation. On rappelle que l'ensemble des matrices de taille (m, n) à coefficient dans $\mathbb{K}$ est noté par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^{m \times n}$. Quand $m = n$ on note tout simplement $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrée de taille (n, n).

Proposition 7 (Égalité entre deux matrices)**.** Deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont égales lorsqu'elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et que les coefficients de même indices sont égaux. Autrement dit:

$$A = B \iff m = p, n = q \text{ et } a_{ij} = b_{ij} \; \forall (i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}.$$

Example (Matrices particulières)**.** • Matrice nulle:

$$\mathbf{0}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

- Matrice identité:
$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- Matrices diagonale: elles sont de la forme:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
Et on écrit de façon plus compacte: $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$. En particulier $\mathbf{I}_n = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1)$.

- Matrices triangulaires:
$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ (triangulaire supérieure).}$$
$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ (triangulaire inféreiure).}$$

3.1.1 Vecteurs lignes et colonnes

Définition 13. On appelle i$^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ la matrice ligne
$$(a_{i1}, \cdots, a_{in}) := l_i(A) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$
On appelle j$^{\text{ème}}$ colonne de A la matrice colonne
$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} := c_j(A) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}).$$

Example. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} \\ \log(2) & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Alors:

$$l_1(A) = (1, 3, \sqrt{2}), l_2(A) = (\log(2), 0, 2),$$

et

$$c_1(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ \log(2) \end{pmatrix}, \; c_2(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3(A) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Opérations sur les matrices

Définition 14 (Somme et multiplication par scalaires)**.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors la somme $A + B := C = (c_{ij})_{i,j}$ est définie par

$$c_{ij} = a_{aij} + b_{ij}, \;\; \forall (i,j) \in \{i, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda A = C$ est définie par

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \;\; \forall (i,j) \in \{i, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}.$$

Example. On considère $\lambda = 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -9 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \lambda C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & -\frac{3}{2} \\ 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 15 (Transposée d'une matrice)**.** La transposée d'une matrice est la matrice ayant pour lignes les colonnes de la matrice de départ. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on note sa transposée par A^T qui appartient à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. En particulier, si $A^T = B = (b_{ij})_{ij}$ alors

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, m\}$$

Proposition 8. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

- $\forall i = 1, \cdots, n \ l_i(A^T) = c_i(A)$.
- $\forall j = 1, \cdots, m \ c_j(A^T) = l_j(A)$.
- $(A^T)^T = A$.
- $(A+B)^T = A^T + B^T$ et $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Example.
- On a $\mathbf{I}_n^T = \mathbf{I}_n$.
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Produit de matrice: échauffement *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & h & i \end{pmatrix}$ *et* $X = (x, y, z)^T$. *En effectuant le produit scalaire de chaque ligne de A avec X on a*

$$AX = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ jx + hy + iz \end{pmatrix} = xc_1(A) + yc_2(A) + zc_3(A).$$

Maintenant on considère $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \eta & \kappa \\ \theta & \rho & \phi \end{pmatrix}$. *De la même manière on a*

$$\begin{cases} Ac_1(B) = \alpha c_1(A) + \delta c_2(A) + \theta c_3(A) \\ Ac_2(B) = \beta c_1(A) + \eta c_2(A) + \rho c_3(A) \\ Ac_3(B) = \gamma c_1(A) + \kappa c_2(A) + \phi c_3(A). \end{cases}$$

On voit que le produit de A et chaque colonne de B donne un vecteur colonne. Cela serait une façon naturelle de définir les colonnes de ce qui serait la matrice produit AB. Cela motive la définition suivante.

Définition 16 (Produit de matrice)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le produit AB est bien définit et donné par $AB = C := (c_{ij})_{i,j})$ avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = l_i(A) \cdot c_j(B), \;\; \forall (i,j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, p\}.$$

Remarque. On ne peut définir le produit de deux matrice que si les tailles sont compatibles. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors on peut effectuer le produit AB que si $p = n$ et le produit BA que si $q = m$.

Example. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = (2, 1, -1)^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$AB = (-34)^T \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$

Proposition 9. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $D, E \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $F \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

- $\lambda(AD) = (\lambda A)D = A(\lambda D)$.
- $(A + B)E = AE + BE$ et $A(D + E) = AD + AE$.
- $A(EF) = (AE)F$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

3.1.3 Inverse d'une matrice

Définition 17. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = \mathbf{I}_n.$$

On note la matrice B par A^{-1} et est appelée la matrice inverse de A.

Notation. On note par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (groupe linéaire) l'ensemble des matrices inversible de taille (n, n).

Proposition 10. Soient $A, B\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

3.2 *Opérations élémentaires sur les matrices*

3.2.1 Transvection de lignes

Définition 18. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $h, k \in \{1, \cdots, m\}$ avec $h \neq k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Effectuer sur A la transvection de rapport λ de la ligne k sur la ligne h consiste à ajouter à chaque composante de $l_k(A)$ le produit par λ à l'entrée de A située à l'intersection de la colonne de cette entrée avec $l_k(A)$.

D'après cette définition, si la matrice obtenue est $B = (b_{ij})_{ij}$, alors

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ \ si \ \ i \neq k, \\ a_{kj} + \lambda a_{kj} \ \ si \ \ i = h. \end{cases}$$

Ou encore, en fonction des lignes de A, pour tout $i = 1, \cdots, m$:

$$l_i(B) = \begin{cases} l_i(A) \ \ si \ \ i \neq k \\ l_k(A) + \lambda l_k(A) \ \ si \ \ i = h. \end{cases}$$

Proposition 11. Le résultat de la transvection de rapoort λ de $l_k(A)$ sur $l_h(A)$ est égale au produit obtenu en multipliant à A à gauche par

$$\mathbf{I}_m + \lambda E_{h,k}.$$

Example. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$. Le résultat de la transvection de rapport $\lambda = 2$ de $l_3(A)$ sur $l_1(A)$ donne Soit $B = \begin{pmatrix} a+2a'' & b+2b'' & c+2c'' & d+2d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$.

Notation. On note par $\mathrm{T}^{h,k}(\lambda)$ la matrice $\mathbf{I}_m + \lambda E_{h,k}$.

Example (À connaître). • On distingue deux matrices de transvection de taille $(2,2)$:

$$\mathrm{T}^{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathrm{T}^{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

• On distingue six matrices de transvection de taille $(3,3)$:

$$\mathrm{T}^{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{T}^{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^{1,3}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{T}^{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^{2,3}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{T}^{3,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Dilatation de lignes

Définition 19. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $h \in \{1, \cdots, m\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Effectuer sur A la dilatation de rapport λ de la ligne h consiste à multiplier par λ chaque entrée de $l_h(A)$.

D'après cette définition, si la matrice obtenue est $B = (b_{ij})_{ij}$, alors

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \ \ i \neq h, \\ \lambda a_{hj} & si \ \ i = h. \end{cases}$$

Example. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$. Le résultat de la dilatation de rapport $\lambda = 3$ de $l_2(A)$ donne Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3a' & 3b' & 3c' & 3d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$.

Notation. On note $\mathbf{u}_h(\lambda) = \sum_{j=1, j\neq h}^{m} e_j + \lambda e_h$.

Proposition 12. Le résultat de la dilatation de raport λ de $l_h(A)$ sur est égale au produit obtenu en multipliant à A à gauche par

$$\mathrm{D}^h(\lambda) := \mathrm{diag}(\mathbf{u}_h(\lambda)).$$

Example (À connaître). • On distingue deux matrices de dilatation de taille $(2,2)$:

$$\mathrm{D}^1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ et } \mathrm{D}^2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- On distingue trois matrices de transvection de taille $(3,3)$:

$$\mathrm{D}^1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{D}^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{D}^3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3.3 Échange de lignes

Définition 20. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $h, k \in \{1, \cdots, m\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Effectuer sur A l'échange de $l_k(A)$ et $l_h(A)$ consiste à remplacer chaque composante de $l_h(A)$ par la composante de $l_k(A)$ située sur la même colonne et inversement.

Si la matrice obtenue en échangeant $l_k(A)$ et $l_h(A)$ est $B = (b_{ij})_{ij}$, alors

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ \ si \ \ i \neq h \ et \ \neq k, \\ a_{kj} \ \ si \ \ i = h, \\ a_{hj} \ \ si \ \ i = k. \end{cases}$$

Remarque. Effectuer sur A l'échange de $l_h(A)$ et $l_k(A)$ revient à effectuer successivement les opération suivantes:

- Transvection de rapport 1 de $l_k(A)$ sur $l_h(A)$, cela revient à multiplier A par $\mathrm{T}^{h,k}(1)$. La matrice obtenue $B = \mathrm{T}^{h,k}(1)A$.
- Transvection de rapport -1 de $l_h(B)$ sur $l_k(A)$, cela revient à multiplier B par $\mathrm{T}^{k,h}(-1)$. La matrice obtenue $C = \mathrm{T}^{k,h}(-1)B$.
-

- Transvection de rapport 1 de $l_k(C)$ sur $l_h(C)$, cela revient à multiplier A par $\mathrm{T}^{h,k}(1)$. La matrice obtenue $D = \mathrm{T}^{h,k}(-1)C$.

- La dilatation de rapport -1 de $l_k(D)$. La matrice finale est donc $E = \mathrm{D}^h(-1)D$, soit

$$E = \mathrm{D}^h(-1)\mathrm{T}^{h,k}(-1)\mathrm{T}^{k,h}(-1)\mathrm{T}^{h,k}(1)A.$$

Illustrons ça par l'exemple suivant:

Example. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$. On veut échanger les lignes 1 et 3.

- Transvection de rapport 1 de $l_3(A)$ sur $l_1(A)$, cela donne

$$B = \begin{pmatrix} a+a'' & b+b'' & c+c'' & d+d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

- Transvection de rapport -1 de $l_1(B)$ sur $l_3(A)$, cela donne

$$C = \begin{pmatrix} a+a'' & b+b'' & c+c'' & d+d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ -a & -b & -c & -d \end{pmatrix}$$

- Transvection de rapport 1 de $l_3(C)$ sur $l_1(C)$, cela donne

$$D = \begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ -a & -b & -c & -d \end{pmatrix}$$

- La dilatation de rapport -1 de $l_3(D)$. La matrice finale est

$$E = \begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

.

Proposition 13. Le résultat de l'échange des lignes $l_h(A)$ et $l_k(A)$ est égale au produit obtenu en multipliant à A à gauche par

$$\mathrm{P}^{h,l} := \mathrm{D}^{h}(-1)\mathrm{T}^{h,k}(1)\mathrm{T}^{k,h}(-1)\mathrm{T}^{h,k}(1) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}).$$

La matrice $\mathrm{P}^{h,k}$ est la matrice dont les seules composantes non nulles valent 1 et sont d'indices soit (h,k), soit (k,h) soit (i,j) avec $i \neq h$ et $j \neq k$.

Example (À connaître). • Il existe exactement une seule matrice d'échange de taille $(2,2)$:

$$\mathrm{P}^{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Il existe trois matrices d'échange de taille $(3,3)$:

$$\mathrm{P}^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P}^{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{P}^{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise

Un matrice carrée S de taille $n \times n$ est dite scalaire lorsqu'elle est colinéaire avec $\mathbf{I}_n$.

- *Soit S une matrice scalaire de taille 2×2. Trouver deux matrices de dilatations D^1,D^2 telles que $S = D^1D^2$.*
- *Soit S une matrice scalaire de taille 3×3. Trouver deux matrices de dilatations D^1,D^2, D^3 telles que $S = D^1D^2D^3$.*
- *Montrer que pour toute matrice carrée A de taille $n \times n$ et pour toute matrice scalaire S de taille $n \times n$, on a $AS = SA$.*
- *Si A est une matrice diagonale de taille 2×2 telle que $AT = TA$ pour toute matrice de transvection T de taille 2×2, montrer que A est scalaire.*