Analyse pour l'ingénieur

ENSIMAG Alternance $1^{\text{ère}}$ année

Hamza Ennaji

Dernière modification : 2 février 2026

Table des matières

❊ Corps

Nous avons besoin de rappeler la notion de corps pour préciser l'ensemble des scalaires.

Définition 1. Un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations $+$ et $\cdot$, dites addition et multiplication, telles que pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

— **Commutativité :** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ et $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

— **Associativité :** $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ et $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

— **Éléments neutres :** Il existe $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$ (avec $0_{\mathbb{K}} \neq 1_{\mathbb{K}}$) tels que $0_{\mathbb{K}} + \alpha = \alpha$ et $1_{\mathbb{K}} \cdot \alpha = \alpha$.

— **Inverses :** Il existe un opposé $-\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha + (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$. Pour tout $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, il existe un inverse $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1_{\mathbb{K}}$.

— **Distributivité :** $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Exemple. Voici quelques exemples classiques :

— L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles.

— L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ muni des lois usuelles. On rappelle que pour $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \gamma + i\delta$:

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

— L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\right\}$.

— L'ensemble fini $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ (aussi noté $\mathbb{F}_2$) avec les opérations suivantes (arithmétique binaire) :

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Remarque. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement 0 et 1 au lieu de $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$.

Convention. Tout au long du cours, le corps $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

❊ Espaces vectoriels

Définition 2. Un espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-ev) est un ensemble $\mathbb{E}$ muni de deux opérations :

i) **Addition de vecteurs** (loi interne) : pour tous $x, y \in \mathbb{E}$, il existe un élément noté $x + y \in \mathbb{E}$.

ii) **Multiplication par un scalaire** (loi externe) : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$, il existe un élément noté $\lambda \cdot x \in \mathbb{E}$.

Ces opérations doivent vérifier les axiomes suivants pour tous $x, y, z \in \mathbb{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

A1. **Commutativité :** $x + y = y + x$.

A2. **Associativité :** $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A3. **Élément neutre :** Il existe un élément $0_{\mathbb{E}} \in \mathbb{E}$ tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$.

A4. **Opposé :** Pour tout $x \in \mathbb{E}$, il existe un élément (noté $-x$) tel que $x+(-x) = 0_{\mathbb{E}}$.

A5. $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

A6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$.

A7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

A8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

Remarque. Les hypothèses (A1-A4) expriment le fait que $(\mathbb{E}, +)$ est un **groupe abélien** (ou commutatif). Autrement dit, un espace vectoriel est un groupe abélien muni d'une loi externe vérifiant (A5-A8).

Exemple. Quelques exemples fondamentaux :

— **L'espace nul :** $\mathbb{E} = \{0_{\mathbb{E}}\}$.

— **Les vecteurs colonnes :** $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots, n\}$.

— **Les polynômes :** $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément $P \in \mathbb{E}$ s'écrit :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{K} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit le polynôme $\lambda \cdot P$ par :

$$(\lambda \cdot P)(X) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) X^i.$$

Pour un autre polynôme $Q(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ (on suppose ici $m = n$ pour simplifier l'écriture, quitte à compléter par des zéros), on définit la somme par :

$$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i.$$

— **Produit cartésien :** Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, alors l'ensemble produit $\mathbb{E} = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-ev.

— **Les matrices :** Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients réels. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ définies par :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

On définit l'addition et la multiplication par un scalaire terme à terme :

$$\lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M + N = \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, l'espace $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ des matrices à m lignes et n colonnes est un espace vectoriel.

2.1 Propriétés élémentaires

Proposition 1. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{E}$, on a les propriétés suivantes :

i) **Simplification à droite :** Si $x + z = y + z$, alors $x = y$.

ii) **Simplification à gauche :** Si $z + x = z + y$, alors $x = y$.

iii) **Unicité du neutre :** L'élément neutre $0_{\mathbb{E}}$ est unique. Si un autre élément $0'$ vérifie $x + 0' = x$ pour tout x, alors $0' = 0_{\mathbb{E}}$.

Preuve. i) D'après la définition (existence de l'opposé), il existe $z' \in \mathbb{E}$ tel que $z + z' = 0_{\mathbb{E}}$. On a donc :

$$\begin{aligned} x &= x + 0_{\mathbb{E}} \\ &= x + (z + z') \\ &= (x+z) + z' \quad \text{(par associativité)} \\ &= (y+z) + z' \quad \text{(par hypothèse } x+z = y+z\text{)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= y + (z + z') \quad \text{(par associativité)} \\
&= y + 0_{\mathbb{E}} \\
&= y.
\end{aligned}
$$

ii) Si $z + x = z + y$, alors par commutativité (Définition 2), on a $x + z = y + z$. On conclut d'après le point i) que $x = y$.

iii) Supposons que $0'$ soit un élément neutre. On a alors $0_{\mathbb{E}} + 0' = 0_{\mathbb{E}}$ (car $0'$ est neutre) et $0_{\mathbb{E}} + 0' = 0'$ (car $0_{\mathbb{E}}$ est neutre). Donc $0_{\mathbb{E}} = 0'$.

□

Corollaire (Unicité de l'opposé)**.** Soit $x \in \mathbb{E}$. L'élément $y \in \mathbb{E}$ vérifiant $x+y = 0_{\mathbb{E}}$ est unique. Autrement dit, si y et y' sont deux opposés de x, alors $y = y'$. On note cet unique élément $-x$.

Exemple. — Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, le vecteur nul est $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0)$.

— Dans $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, la matrice nulle est $0_{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$, l'élément neutre est le polynôme nul, noté 0.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{E}$ est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v.) de $\mathbb{E}$ s'il est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les opérations induites (l'addition et la multiplication scalaire de $\mathbb{E}$).

Autrement dit, $(F, +_{\mathbb{E}}, \cdot_{\mathbb{E}})$ doit vérifier les 8 axiomes (A1-A8) vus dans la Définition 2.

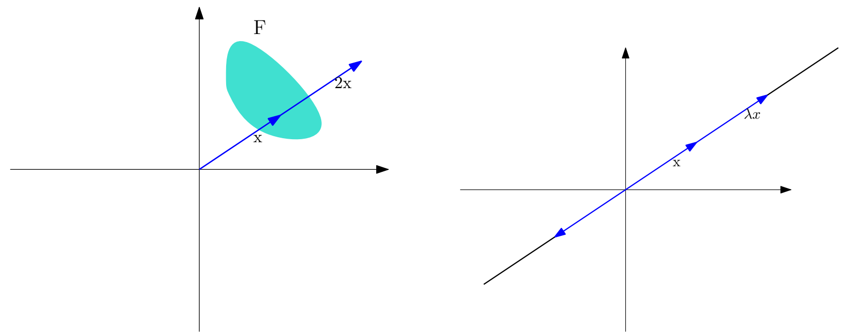
Exemple. Exemples de sous-espaces vectoriels

L'espace nul : $F = \{0_{\mathbb{E}}\} \subset \mathbb{E}$.

— L'hyperplan "horizontal" : $F = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$.

— Les polynômes de degré borné : $F = \mathbb{K}_n[X] \overset{\text{def}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg(P) \leq n\} \subset \mathbb{K}[X]$.

Le résultat suivant fournit un "test" pratique pour vérifier si un ensemble est un sous-espace vectoriel.



(a) (b)

Figure 1 – La Figure 1a montre un sous-ensemble F du plan qui n'est stable ni par addition de vecteurs, ni par multiplication par un scalaire. En revanche, la Figure 1b montre une partie du plan (une droite vectorielle) qui est stable par addition et par multiplication scalaire.

Proposition 2 (Caractérisation des sous-ev)**.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset \mathbb{E}$ un sous-ensemble non vide. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si et seulement si :

1. $0_{\mathbb{E}} \in F$ (condition nécessaire, utile pour réfuter rapidement).
2. **Stabilité par addition :** Si $x, y \in F$, alors $x + y \in F$.
3. **Stabilité par multiplication scalaire :** Si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$.

Ces conditions sont équivalentes à une seule condition (stabilité par combinaison linéaire) :

$$F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F.$$

2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 3. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Alors l'intersection $F \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i \in I} F_i$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Preuve. On utilise la caractérisation donnée par la Proposition 2.

— **Élément neutre :** Comme chaque F_i est un sous-espace vectoriel, on sait que $0_{\mathbb{E}} \in F_i$ pour tout $i \in I$. Donc $0_{\mathbb{E}} \in F$.

— **Stabilité :** Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition de l'intersection, x et y appartiennent à F_i pour tout indice $i \in I$. Or, chaque F_i est stable par combinaison linéaire (car c'est un s.e.v.), donc $\lambda x + y \in F_i$ pour tout $i \in I$. On en déduit que $\lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$, c'est-à-dire $\lambda x + y \in F$.

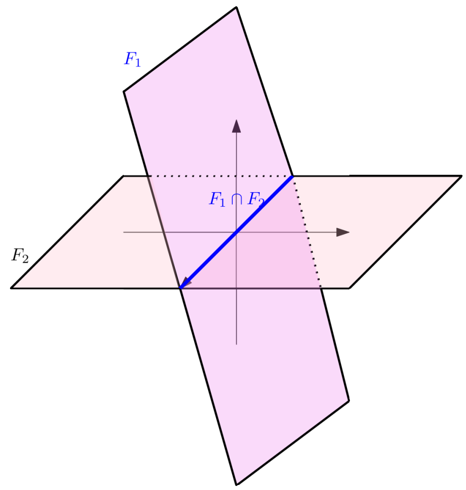


FIGURE 2 – Illustration de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (ici, deux plans vectoriels). Leur intersection est une droite vectorielle.

Conclusion : F est bien un s.e.v. de $\mathbb{E}$. □

Exemple. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ correspondant aux axes de coordonnées :

$$F_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

On vérifie facilement que leur intersection $F_1 \cap F_2 = \{(0, 0)\}$ est le sous-espace vectoriel nul.

Remarque. Si l'intersection de sous-espaces est toujours un sous-espace, ce n'est **pas vrai** pour l'union. Par exemple, reprenons F_1 et F_2 ci-dessus. L'union $F_1 \cup F_2$ est la "croix" des axes. Si on prend $u = (1, 0) \in F_1$ et $v = (0, 1) \in F_2$, leur somme $u + v = (1, 1)$ n'est ni dans F_1, ni dans F_2. L'union n'est pas stable par addition.

2.4 Combinaisons linéaires et sous-espaces engendrés

Définition 4. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $S \subset \mathbb{E}$ une partie de $\mathbb{E}$. Un vecteur $x \in \mathbb{E}$ est une **combinaison linéaire** d'éléments de S s'il peut s'écrire comme une somme **finie** d'éléments de S pondérés par des scalaires.

Autrement dit, s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, des vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in S$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

À partir d'une partie S, on peut construire un sous-espace vectoriel en prenant toutes les combinaisons possibles :

Définition 5 (Sous-espace engendré)**.** Soit $S \subset \mathbb{E}$ un sous-ensemble non vide. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par S*, noté $\mathrm{Vect}(S)$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de S :

$$\mathrm{Vect}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, v_i \in S \right\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. De plus, c'est le *plus petit* s.e.v. de $\mathbb{E}$ contenant S.

Remarque. — Par convention, $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_{\mathbb{E}}\}$.

— On a toujours l'inclusion $S \subset \mathrm{Vect}(S)$. En effet, tout vecteur $v \in S$ peut s'écrire $v = 1_{\mathbb{K}} \cdot v$ (c'est une combinaison linéaire à un seul terme).

— Si S est fini, par exemple $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$, on note souvent $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

Exemple. — Dans $\mathbb{R}^3$, si $u = (1, 0, 0)$ et $v = (0, 1, 0)$, alors $\mathrm{Vect}(u, v)$ est le plan (xOy), c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de la forme $(x, y, 0)$.

— Si $S = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ où $P_k = X^k$, alors $\mathrm{Vect}(S) = \mathbb{K}_n[X]$ (l'espace des polynômes de degré au plus n).

Théorème 1. Soit $S \subset \mathbb{E}$ une partie non vide. On a les propriétés suivantes :

— $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

— $S \subset \mathrm{Vect}(S)$.

— $\mathrm{Vect}(S)$ est le **plus petit** sous-espace vectoriel contenant S. Autrement dit, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ tel que $S \subset F$, alors $\mathrm{Vect}(S) \subset F$.

Définition 6. Une famille $S \subset \mathbb{E}$ est dite **génératrice** de $\mathbb{E}$ si $\mathrm{Vect}(S) = \mathbb{E}$. Autrement dit, tout vecteur de $\mathbb{E}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de S.

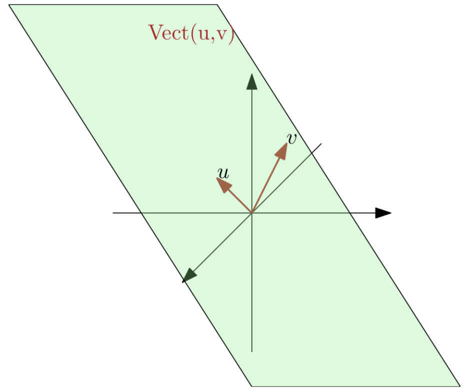


Figure 3 – Deux vecteurs non-colinéaires u et v. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{u, v\})$ est le plan vectoriel qui les contient (ici représenté par le parallélogramme engendré).

Exemple. Voici les familles génératrices canoniques (usuelles) :

— Dans $\mathbb{R}^n$: La famille $(e_1, \dots, e_n)$ définie par :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1),$$

est génératrice de $\mathbb{R}^n$. En effet, tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n.$$

— Dans $\mathbb{C}$: Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par la famille $\{1, i\}$. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x \cdot 1 + y \cdot i$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

— Dans les matrices : L'espace $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est engendré par la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) des matrices élémentaires :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'écrit $M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$.

— Dans les polynômes : La famille des monômes $\{1, X, \dots, X^n\}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$. Tout polynôme P de degré $\leq n$ s'écrit :

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \cdots + a_n \cdot X^n.$$

2.5 Famille libre, famille liée

Étant donnée une famille $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{E}$, on remarque que le vecteur nul $0_{\mathbb{E}}$ s'obtient de façon **triviale** comme combinaison linéaire des v_i, c'est-à-dire :

$$0_{\mathbb{E}} = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

La question est de savoir si c'est la *seule* façon d'obtenir $0_{\mathbb{E}}$. Il est parfois possible d'avoir une réalisation **non-triviale** de $0_{\mathbb{E}}$, c'est-à-dire de trouver des scalaires $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ *non tous nuls* tels que :

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = 0_{\mathbb{E}}.$$

Cela motive les définitions suivantes :

Définition 7 (Indépendance linéaire)**.** Soit $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

— La famille S est dite **libre** (ou linéairement indépendante) si la seule combinaison linéaire nulle est la triviale :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}} \right) \implies (\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0).$$

— La famille S est dite **liée** (ou linéairement dépendante) si elle n'est pas libre. Autrement dit, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **non tous nuls** tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}}.$$

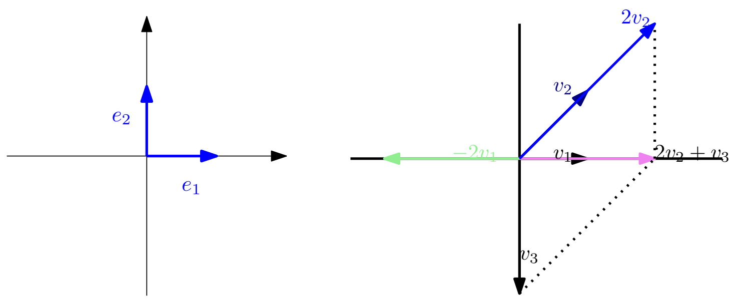
Remarque (Intuition : La Redondance)**.** Dire qu'une famille est *liée*, c'est dire qu'il y a de l'information "en double" ou "redondante".

Concrètement, une famille est liée si et seulement si *l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres*. Dans l'exemple illustré par la Figure 4, la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ avec

$$v_1 = (0, 0), v_2 = (1, 1), v_3 = (0, -2),$$

est liée (car $2v_1 - 5v_2 - 1v_3 = 0$, et les coefficients ne sont pas tous nuls).

Exemple. — Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{(1,0),(0,1)\}$ est libre.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{(1,0),(2,0)\}$ est liée (car le deuxième est le double du premier).
- Toute famille contenant le vecteur nul $0_{\mathbb{E}}$ est forcément liée (car $1 \cdot 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}}$).



(a) (b)

Figure 4 – Comparaison entre famille libre et liée dans $\mathbb{R}^2$. La Figure 4a illustre la base canonique, qui est libre. La Figure 4b montre une famille liée $S = \{v_1, v_2, v_3\}$: on peut voir que v_3 est une combinaison des deux autres ($v_3 = 2v_1 - 2v_2$).

Proposition 4. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $S_1 \subset S_2 \subset \mathbb{E}$ deux parties de $\mathbb{E}$.
- Si S_1 est liée, alors S_2 est liée. (Une sur-famille d'une famille liée est liée).
- Si S_2 est libre, alors S_1 est libre. (Une sous-famille d'une famille libre est libre).

2.6 Bases et dimension

Définition 8. Une famille $S \subset \mathbb{E}$ est une **base** de $\mathbb{E}$ si elle est à la fois **libre** et **génératrice**.

Cela signifie que tout vecteur de $\mathbb{E}$ s'écrit de manière **unique** comme combinaison linéaire des éléments de S.

Exemple. — La famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée **base canonique**.
- La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Elle est constituée des matrices *élémentaires*. Chaque matrice $E_{i,j}$ ne possède qu'une seule entrée non nulle (qui vaut 1) située à l'intersection de la ligne i et

de la colonne j.

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} & \text{colonne } j \\ & \downarrow \\ \text{ligne } i \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

— La famille $\{1, X, \dots, X^n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ (polynômes de degré $\leq n$).

— La famille infinie $\{1, X, X^2, \dots\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ (l'espace de tous les polynômes).

Le résultat suivant montre que toute famille génératrice finie peut être réduite à une base, essentiellement en éliminant les vecteurs redondants (ceux qui sont combinaisons linéaires des autres).

Théorème 2 (de la base extraite)**.** Soit S une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$. Alors on peut extraire une sous-famille $B \subset S$ qui est une base de $\mathbb{E}$.

Remarque. Le résultat reste **vrai** en dimension infinie (la démonstration repose alors sur *l'Axiome du choix*).

Exemple. On considère la famille $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^2$ avec :

$$u_1 = (-2, 0), \quad u_2 = (1, 1), \quad u_3 = (0, 1).$$

C'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ (car elle contient "plus" de vecteurs qu'une base). Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, il y a nécessairement un vecteur en trop (redondant). On observe la relation suivante :

$$u_1 = -2(1, 0) = -2(u_2 - u_3) \implies u_1 = -2u_2 + 2u_3.$$

Le vecteur u_1 est donc combinaison linéaire de u_2 et u_3. On peut le supprimer. La famille restante $B = \{u_2, u_3\}$ est libre (vecteurs non colinéaires) et génératrice, c'est donc une base extraite de S.

Le résultat suivant affirme qu'une famille libre L dans $\mathbb{E}$ contient au plus autant d'éléments qu'une famille génératrice S. De plus, on peut compléter L en piochant intelligemment dans S pour fabriquer une base.

Théorème 3 (de la base incomplète)**.** Soit S une famille génératrice finie de $\mathbb{E}$ avec $\mathrm{Card}(S) = n$, et soit $L \subset \mathbb{E}$ une famille libre avec $\mathrm{Card}(L) = m$. Alors :

— $m \leq n$.

— Il existe une sous-famille $H \subset S$ telle que la réunion $L \cup H$ soit une base de $\mathbb{E}$.

— Le nombre d'éléments ajoutés est $\mathrm{Card}(H) = \dim(\mathbb{E}) - m$.

2.7 Dimension d'un espace vectoriel

Pour définir la dimension, nous avons besoin d'un résultat fondamental qui assure que ce nombre est bien défini (qu'il ne dépend pas de la base choisie).

Théorème 4 (Invariance de la dimension)**.** Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel admettant une base finie. Toutes les bases de $\mathbb{E}$ ont le même nombre d'éléments (le même cardinal).

Définition 9. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev.

— Si $\mathbb{E}$ admet une base finie S, on dit que $\mathbb{E}$ est de **dimension finie**. On appelle **dimension** de $\mathbb{E}$ le cardinal de cette base, noté :

$$\dim(\mathbb{E}) = \mathrm{Card}(S).$$

— Si $\mathbb{E}$ n'admet pas de base finie, on dit qu'il est de **dimension infinie** (on note parfois $\dim(\mathbb{E}) = \infty$).

Exemple. — $\dim(\{0_{\mathbb{E}}\}) = 0$. *(Car la base est l'ensemble vide, de cardinal 0).*

— $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ et $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$.

— $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

— La dimension dépend du corps des scalaires $\mathbb{K}$:

  — $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ (Base $\{1, i\}$).

  — $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ (Base $\{1\}$).

Corollaire. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie n. Soit S une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Si $\mathrm{Card}(S) = n$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

— S est une famille **libre**.

— S est une famille **génératrice**.
— S est une **base** de $\mathbb{E}$.

Remarque. Le résultat ci-dessus est très puissant : si on a le bon nombre de vecteurs, il suffit de vérifier une seule condition pour prouver que c'est une base.

Proposition 5 (Dimension d'un sous-espace)**.** Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ (avec $\dim(\mathbb{E}) < \infty$). Alors F est de dimension finie et :

$$\dim(F) \leq \dim(\mathbb{E}).$$

De plus, l'égalité $\dim(F) = \dim(\mathbb{E})$ a lieu si et seulement si $F = \mathbb{E}$.

Corollaire. Soit F un sev de $\mathbb{E}$. Toute base de F peut être complétée en une base de $\mathbb{E}$ (en utilisant des vecteurs de $\mathbb{E} \setminus F$).

2.8 Somme de sous-espaces vectoriels

On a vu que l'intersection de sous-espaces vectoriels reste un sous-espace vectoriel. Le cas de l'union est **un peu plus subtil**. En effet, il est facile de se convaincre que l'union de deux s.e.v. reste stable par multiplication par un scalaire mais **pas par somme** de vecteurs, comme illustré dans la Figure 5. Pour combler cette lacune, on introduit la notion de **somme** de s.e.v.

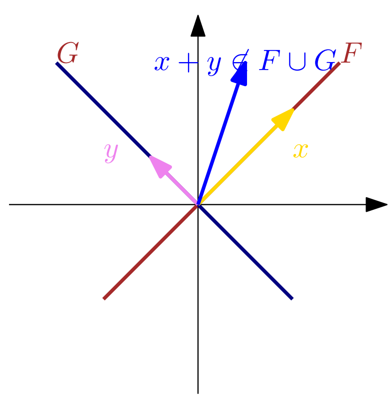


Figure 5 – Illustration du fait que l'union de deux s.e.v. n'est pas stable par addition de vecteurs.

Soient F, G deux s.e.v. de $\mathbb{E}$. On définit :

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 5. — $F + G$ est un s.e.v. de $\mathbb{E}$.
— $F \cup G \subset F + G$.
— $F + G$ est le plus petit s.e.v. contenant l'union : si H est un s.e.v. tel que $F \cup G \subset H$, alors $F + G \subset H$.

Proposition 6. Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exemple. On revient à l'exemple illustré par la Figure 5. La somme des deux plans F_1 et F_2 engendre $\mathbb{R}^3$, i.e., $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$. On a donc :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Une question naturelle qui se pose est celle de l'unicité de l'écriture $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Définition 10 (Somme directe)**.** On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0_{\mathbb{E}}\}$. Dans ce cas on note :

$$F + G = F \oplus G.$$

Remarque. La condition $F \cap G = \{0_{\mathbb{E}}\}$ exprime le fait que le vecteur nul s'écrit de façon unique $(0 = 0 + 0)$. En effet, si $F \cap G = \{0_{\mathbb{E}}\}$, alors l'égalité $x + y = 0$ (avec $x \in F, y \in G$) implique $x = -y$. Comme $x \in F$ et $-y \in G$, alors $x \in F \cap G$, donc $x = 0$ et $y = 0$.

Proposition 7. F et G sont en somme directe et leur somme engendre $\mathbb{E}$ (i.e. $\mathbb{E} = F \oplus G$) si et seulement si tout vecteur $z \in \mathbb{E}$ s'écrit de manière **unique** comme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. Dans ce cas :

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(F) + \dim(G).$$

On dira que F est un **supplémentaire** de G dans $\mathbb{E}$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces vectoriels suivants sont en somme directe :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad V = \mathrm{Vect}((2, 0, 0)).$$

En effet, déterminons leur intersection. Soit $u = (u_1, u_2, u_3) \in U \cap V$.

— Comme $u \in V$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(2, 0, 0) = (2\lambda, 0, 0)$.

— Comme $u \in U$, ses coordonnées vérifient $u_1+u_2+u_3 = 0$, soit $2\lambda+0+0 = 0$.

Ceci donne $\lambda = 0$ et par la suite $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc bien $U \cap V = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui prouve qu'ils sont en somme directe.

Exemple (Fonctions paires et impaires)**.** Soit $\mathbb{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérons les sous-espaces des fonctions paires F et impaires G. Montrons que $\mathbb{E} = F \oplus G$.

— **Intersection nulle ($F \cap G = \{0\}$) :**
Soit $f \in F \cap G$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = f(x) \quad (\text{car } f \in F) \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x) \quad (\text{car } f \in G).$$

On en déduit que $f(x) = -f(x)$, soit $2f(x) = 0$, donc $f(x) = 0$ pour tout x. La seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

— **Décomposition ($\mathbb{E} = F + G$) :**
Toute fonction $f \in \mathbb{E}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire via la formule :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\in F} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\in G}.$$

❊ Matrices et systèmes linéaires

Dans ce chapitre m, n, p, q désignent des entiers naturels non nuls.

3.1 Calcul matriciel

Définition 11. On appelle matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$, de taille (m, n) (ou de format $m \times n$), un tableau de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour $i = 1, \cdots, m$ et $j = 1, \cdots, n$. Ici m désigne le nombre de lignes et n le nombre de colonnes de A. On note parfois $A = (a_{ij})_{i,j}$ s'il n'y a pas de confusion.

Notation. On rappelle que l'ensemble des matrices de taille (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^{m\times n}$. Quand $m = n$, on note tout simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n.

Proposition 8 (Égalité entre deux matrices)**.** Deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont égales lorsqu'elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et que les coefficients de mêmes indices sont égaux. Autrement dit :

$$A = B \iff m = p, n = q \ \text{ et } \ a_{ij} = b_{ij}, \ \forall (i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}.$$

Exemple (Matrices particulières)**.** — **Matrice nulle :**

$$\mathbf{0}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

— **Matrice identité :**

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

— **Matrices diagonales :** elles sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On écrit de façon plus compacte : $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$. En particulier $\mathbf{I}_n = \operatorname{diag}(1, \cdots, 1)$.

— **Matrices triangulaires :**

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(triangulaire supérieure).}$$

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(triangulaire inférieure).}$$

3.1.1 Vecteurs lignes et colonnes

Définition 12. On appelle i-ème ligne de la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice ligne

$$l_i(A) := (a_{i1}, \cdots, a_{in}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

On appelle j-ème colonne de A la matrice colonne

$$c_j(A) := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}).$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} \\ \log(2) & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Alors :

$$l_1(A) = (1, 2, \sqrt{2}), \quad l_2(A) = (\log(2), 0, 2),$$

et

$$c_1(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ \log(2) \end{pmatrix}, \; c_2(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_3(A) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Opérations sur les matrices

Définition 13 (Somme et multiplication par un scalaire)**.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. La somme $A + B := C = (c_{ij})_{i,j}$ est définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \;\; \forall (i, j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice $\lambda A := C$ est définie par

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \;\; \forall (i, j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\}.$$

Exemple. On considère $\lambda = 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \\ 5 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -9 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & -\frac{3}{2} \\ 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 14 (Transposée d'une matrice)**.** La transposée d'une matrice est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on note sa transposée A^T qui appartient à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. En particulier, si $A^T = B = (b_{ij})_{i,j}$ alors

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, m\}.$$

Proposition 9. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

— $\forall i = 1, \cdots, n, \ \ l_i(A^T) = (c_i(A))^T$.
— $\forall j = 1, \cdots, m, \ \ c_j(A^T) = (l_j(A))^T$.
— $(A^T)^T = A$.
— $(A+B)^T = A^T + B^T$ et $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Exemple. — On a $\mathbf{I}_n^T = \mathbf{I}_n$.

— $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

— $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Produit de matrices : échauffement Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & h & i \end{pmatrix}$ et $X = (x, y, z)^T$. En effectuant le produit scalaire de chaque ligne de A avec X on a

$$AX = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ jx + hy + iz \end{pmatrix} = xc_1(A) + yc_2(A) + zc_3(A).$$

Maintenant on considère $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \eta & \kappa \\ \theta & \rho & \phi \end{pmatrix}$. De la même manière on a

$$\begin{cases} Ac_1(B) = \alpha c_1(A) + \delta c_2(A) + \theta c_3(A) \\ Ac_2(B) = \beta c_1(A) + \eta c_2(A) + \rho c_3(A) \\ Ac_3(B) = \gamma c_1(A) + \kappa c_2(A) + \phi c_3(A). \end{cases}$$

On voit que le produit de A et chaque colonne de B donne un vecteur colonne. Cela serait une façon naturelle de définir les colonnes de ce qui serait la matrice produit AB. Cela motive la définition suivante.

Définition 15 (Produit de matrices)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le produit AB est bien défini et donné par $AB = C := (c_{ij})_{i,j}$ avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = l_i(A) \cdot c_j(B), \quad \forall (i,j) \in \{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, p\}.$$

Remarque. On ne peut définir le produit de deux matrices que si les tailles sont compatibles. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors on ne peut effectuer le produit AB que si $p = n$, et le produit BA que si $q = m$.

Exemple. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = (2, 1, -1)^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}).$$

Proposition 10. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $D, E \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $F \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

— $\lambda(AD) = (\lambda A)D = A(\lambda D)$.

— $(A + B)E = AE + BE$ et $A(D + E) = AD + AE$.

— $A(EF) = (AE)F$.

— $(AB)^T = B^T A^T$.

3.1.3 Inverse d'une matrice

Définition 16. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = \mathbf{I}_n.$$

On note la matrice B par A^{-1}, appelée matrice inverse de A.

Notation. On note par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (groupe linéaire) l'ensemble des matrices inversibles de taille n.

Proposition 11. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et

— $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

— $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

3.2 Opérations élémentaires sur les matrices

3.2.1 Transvection de lignes

Définition 17. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $h, k \in \{1, \cdots, m\}$ avec $h \neq k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Effectuer sur A la transvection de rapport λ de la ligne k sur la ligne h ($L_h \leftarrow L_h + \lambda L_k$) consiste à ajouter à la ligne h la ligne k multipliée par λ.

D'après cette définition, si la matrice obtenue est $B = (b_{ij})_{i,j}$, alors

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } \; i \neq h, \\ a_{hj} + \lambda a_{kj} & \text{si } \; i = h. \end{cases}$$

Ou encore, en fonction des lignes de A, pour tout $i = 1, \cdots, m$:

$$l_i(B) = \begin{cases} l_i(A) & \text{si } \; i \neq h \\ l_h(A) + \lambda l_k(A) & \text{si } \; i = h. \end{cases}$$

Proposition 12. Le résultat de la transvection de rapport λ de $l_k(A)$ sur $l_h(A)$ est égal au produit obtenu en multipliant A à gauche par

$$\mathbf{I}_m + \lambda E_{h,k}.$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$. Le résultat de la transvection de rapport $\lambda = 2$ de $l_3(A)$ sur $l_1(A)$ ($L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$) donne :

$$B = \begin{pmatrix} a + 2a'' & b + 2b'' & c + 2c'' & d + 2d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Notation. On note par $T^{h,k}(\lambda)$ la matrice $\mathbf{I}_m + \lambda E_{h,k}$.

Exemple (À connaître). — On distingue deux types de matrices de transvection de taille $(2, 2)$:

$$T^{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad T^{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

— On distingue six matrices de transvection de taille $(3,3)$, par exemple :

$$T^{1,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{2,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{1,3}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{3,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{2,3}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{3,2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Dilatation de lignes

Définition 18. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $h \in \{1, \cdots, m\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Effectuer sur A la dilatation de rapport λ de la ligne h consiste à multiplier par λ chaque entrée de $l_h(A)$.

D'après cette définition, si la matrice obtenue est $B = (b_{ij})_{i,j}$, alors

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq h, \\ \lambda a_{hj} & \text{si } i = h. \end{cases}$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$. Le résultat de la dilatation de rapport $\lambda = 3$ de $l_2(A)$ donne

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3a' & 3b' & 3c' & 3d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Notation. On note $\mathbf{u}_h(\lambda) = \sum_{j=1, j\neq h}^{m} e_j + \lambda e_h$.

Proposition 13. Le résultat de la dilatation de rapport λ de $l_h(A)$ est égal au produit obtenu en multipliant A à gauche par

$$D^h(\lambda) := \operatorname{diag}(\mathbf{u}_h(\lambda)).$$

Exemple (À connaître). — On distingue deux matrices de dilatation de taille $(2,2)$:

$$D^1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } D^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

— On distingue trois matrices de dilatation de taille $(3,3)$:

$$D^1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D^3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Échange de lignes

Définition 19. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $h, k \in \{1, \cdots, m\}$. Effectuer sur A l'échange de $l_k(A)$ et $l_h(A)$ consiste à remplacer chaque composante de $l_h(A)$ par la composante de $l_k(A)$ située sur la même colonne et inversement.

Si la matrice obtenue en échangeant $l_k(A)$ et $l_h(A)$ est $B = (b_{ij})_{i,j}$, alors

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq h \text{ et } i \neq k, \\ a_{kj} & \text{si } i = h, \\ a_{hj} & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Remarque. Effectuer sur A l'échange de $l_h(A)$ et $l_k(A)$ revient à effectuer successivement les opérations suivantes (attention à l'ordre des multiplications matricielles) :

1. Transvection de rapport 1 de l_k sur l_h ($L_h \leftarrow L_h + L_k$). Matrice : $T^{h,k}(1)$.
2. Transvection de rapport -1 de l_h sur l_k ($L_k \leftarrow L_k - L_h$). Matrice : $T^{k,h}(-1)$.
3. Transvection de rapport 1 de l_k sur l_h ($L_h \leftarrow L_h + L_k$). Matrice : $T^{h,k}(1)$.
4. Dilatation de rapport -1 de l_k ($L_k \leftarrow -L_k$). Matrice : $D^k(-1)$.

La matrice d'échange est donc :

$$P^{h,k} = D^k(-1)T^{h,k}(1)T^{k,h}(-1)T^{h,k}(1).$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$. On veut échanger les lignes 1 et 3. (L'exemple détaille la méthode décrite ci-dessus pour arriver à :)

$$E = \begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' & d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Proposition 14. Le résultat de l'échange des lignes $l_h(A)$ et $l_k(A)$ est égal au produit obtenu en multipliant A à gauche par

$$P^{h,k} \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}).$$

Exemple (À connaître)**.** — Il existe exactement une seule matrice d'échange de lignes (non triviale) de taille $(2,2)$:

$$P^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

— Il existe trois matrices d'échange élémentaire de taille $(3,3)$:

$$P^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Matrices et systèmes triangulaires

3.3.1 Profondeur et pivot d'un vecteur

Définition 20. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On appelle profondeur de x, notée $\mathbf{pf}(x)$, le plus petit entier qui est l'indice d'une composante non nulle de x. La composante de x dont l'indice est la profondeur de x est appelée pivot de x et est notée $\mathbf{pv}(x)$.

Exemple. On a

$$\mathbf{pf}((0,1)) = 2, \quad \mathbf{pf}((3,0)) = 1, \quad \mathbf{pf}((0,0,2)) = 3, \quad \mathbf{pv}((3,1)) = 3, \quad \mathbf{pv}((0,0,2)) = 2.$$

Par convention $\mathbf{pf}(0_{\mathbb{R}^n}) = n+1$, mais il n'a pas de pivot.

Proposition 15. Soit $k \in \{1, \cdots, n+1\}$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.

— Si $\mathbf{pf}(x) \geq k$ et $\mathbf{pf}(y) \geq k$ alors

$$\mathbf{pf}(x+y) \geq k.$$

— Si $\mathbf{pf}(x) < \mathbf{pf}(y)$ alors x et $x+y$ ont la même profondeur et le même pivot.

3.3.2 Matrice, matrice élargie d'un système

Définition 21. Étant donné un système linéaire de m équations à n inconnues

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{1}$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est appelée matrice du système $(\mathcal{S})$, la matrice $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ est appelée colonne du second membre de $(\mathcal{S})$, et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne des inconnues. La matrice élargie du système $(\mathcal{S})$ est la matrice de taille $m \times (n+1)$

$$\tilde{A} = [A \mid B],$$

dont les n premières colonnes sont celles de A et la dernière est B.

Un cas particulier de systèmes est le suivant :

Définition 22. Un système linéaire $(\mathcal{S})$ est dit triangulaire si sa matrice A est triangulaire supérieure et que toutes ses entrées diagonales sont non nulles.

Pour résoudre $(\mathcal{S})$ dans le cas triangulaire, on procède comme suit. Comme $a_{ii} \neq$

$0, \forall i = 1, \cdots, n$, et que $\mathbf{pf}(l_n(A)) = n$, la $n^{\text{ème}}$ équation donne $a_{nn}x_n = b_n$, soit $x_n = b_n/a_{nn}$. On injecte la valeur de x_n dans la $(n-1)^{\text{ème}}$ équation. Cela donne un système triangulaire à $(n-1)$ équations en $(n-1)$ inconnues. On répète ce processus jusqu'à la première équation et ainsi on retrouve toutes les valeurs des x_i. On parle ici de **remontée triangulaire**.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. On s'intéresse à la solution du système $AX = B$, c'est-à-dire du système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 & = & -1 \\ 2x_3 + x_4 & = & -3 \\ 3x_4 & = & 3 \end{array} \right.$$

La dernière équation donne $x_4 = 1$. On obtient le système suivant :

$$(\mathcal{S}_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -2 \\ x_2 - x_3 & = & -5 \\ 2x_3 & = & -4 \end{array} \right.$$

De même, la dernière équation donne $x_3 = -2$ et le système devient :

$$(\mathcal{S}_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 - x_2 & = & 2 \\ x_2 & = & -7 \end{array} \right.$$

On obtient $x_2 = -7$ et la première équation donne $x_1 = -1$. Le système $(\mathcal{S})$ admet donc une unique solution $x = (-1, -7, -2, 1)$.

On finit ce paragraphe avec le résultat suivant :

Théorème 6. Tout système triangulaire (dont les coefficients diagonaux sont non nuls) admet une unique solution.

3.3.3 Matrices échelonnées

Définition 23. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est dite échelonnée (en lignes) si

1. ses vecteurs lignes sont de profondeurs croissantes en allant du haut vers le bas
$$\mathbf{pf}(l_i(A)) < \mathbf{pf}(l_{i+1}(A)),\ \forall i = 1, \cdots, n-1.$$
2. si deux lignes sont de même profondeur, alors elles sont nulles, i.e., pour $i \neq j$
$$\mathbf{pf}(l_i(A)) = \mathbf{pf}(l_j(A)) \Rightarrow l_i(A) = l_j(A) = 0_m.$$

Exemple. — La matrice nulle $0_{m,n}$ est échelonnée.

— La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée car $\mathbf{pf}(l_1(A)) = 3$ (convention) et $\mathbf{pf}(l_2(A)) = 1$. (L'ordre n'est pas respecté).

— La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée car $\mathbf{pf}(l_1(A)) = \mathbf{pf}(l_2(A))$ mais les deux lignes ne sont pas nulles.

— La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée. Les lignes $l_5(A)$ et $l_4(A)$ sont de même profondeur (ici, 7) et sont nulles.

— Toute matrice de la forme $\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ avec les $a_i \neq 0$ est échelonnée.

3.3.4 Résolution d'un système échelonné

Définition 24. Un système $(\mathcal{S})$ est dit échelonné si sa matrice est échelonnée. On dira que $(\mathcal{S})$ est consistant (ou compatible) si l'ensemble de ses solutions est non vide.

Méthode à retenir Soit $(\mathcal{S})$ un système échelonné de m équations en n inconnues.

Compatibilité : Si le système échelonné donne lieu à des équations de la forme :

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = b \neq 0,$$

alors le système est incompatible.

Observer : Repérer les pivots et en déduire les inconnues principales, c'est-à-dire celles dont les indices sont les profondeurs des vecteurs lignes de la matrice du système.

Paramétrer : Soustraire aux deux membres de chaque équation du système tous les termes du premier membre où figurent les inconnues auxiliaires.

Résolution : On obtient un système triangulaire en les inconnues principales où les inconnues auxiliaires figurent comme paramètres dans les seconds membres.

Exemple. On considère le système suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & = & 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 & = & 15 \\ x_4 + 2x_5 + 3x_6 & = & 6 \\ 3x_6 & = & 1 \end{array} \right.$$

On voit bien que le système est compatible. En observant les profondeurs des lignes, les inconnues principales sont x_1, x_2, x_4, x_6 et les inconnues auxiliaires sont x_3, x_5. Le système devient :

$$(\mathcal{S}') \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_4 + x_6 & = & 1 - x_3 - x_5 \\ x_2 + 3x_4 + 5x_6 & = & 15 - 4x_5 - 2x_3 \\ x_4 + 3x_6 & = & 6 - 2x_5 \\ 3x_6 & = & 1 \end{array} \right.$$

C'est un système triangulaire en les variables principales. On trouve $x_6 = 1/3$.

Note : Pour simplifier l'exemple pédagogique, supposons ici que la dernière ligne soit $3x_6 = 3$, ce qui donne $x_6 = 1$.

Le nouveau système est :

$$(\mathcal{S}'') \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_4 & = & -x_3 - x_5 \\ x_2 + 3x_4 & = & 10 - 4x_5 - 2x_3 \\ x_4 & = & 3 - 2x_5 \end{array} \right.$$

On applique à nouveau la méthode de remontée, en remplaçant x_4 par sa valeur dans les deux premières équations. Cela donne :

$$(\mathcal{S}''') \quad \begin{cases} x_1 + x_2 &= -3 - x_3 + x_5 \\ x_2 &= 1 + 2x_5 - 2x_3 \end{cases}$$

On trouve finalement $x_1 = -4 + x_3 - x_5$. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est donc de dimension infinie et dépend des deux paramètres x_3, x_5 :

$$S = \{(-4 + x_3 - x_5, 1 - 2x_3 + 2x_5, x_3, 3 - 2x_5, x_5, 1), \quad x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

3.3.5 Méthode du pivot de Gauß

La méthode du pivot de Gauß consiste à effectuer une suite d'opérations élémentaires sur les lignes afin de transformer une matrice donnée en une matrice échelonnée. La méthode s'applique à la matrice élargie d'un système linéaire quelconque, de sorte que tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné ou encore pour le calcul de l'inverse d'une matrice.

Lemme 1. Étant donné $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ avec $\mathbf{pf}(u) = \mathbf{pf}(v) = k$. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{pf}(u + \lambda v) > k$. En effet $\lambda = -\mathbf{pv}(u)/\mathbf{pv}(v)$.

Définition 25. On appelle opération sur les lignes d'une matrice A toute application $\mathcal{O} : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ qui est composée d'opérations élémentaires sur les lignes : $\mathcal{O} = E_1 \circ \cdots \circ E_n$ où les E_i sont des matrices élémentaires (dilatation, échange ou transvection).

Étapes de la méthode : Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, le but est de trouver une opération $\mathcal{O}$ et une matrice échelonnée M telles que $M = \mathcal{O}(A)$.

— Choix du pivot : On choisit un vecteur ligne de A, disons $l_i(A)$, de profondeur aussi petite que possible.

— Échange de lignes : Si la ligne choisie n'est pas $l_1(A)$ on effectue l'échange de $l_1(A)$ et $l_i(A)$, cela donne une matrice $A_1 = PA$ où P est une matrice d'échange.

— Nettoyage sous le pivot : On effectue sur une ligne de même profondeur que $l_1(A_1)$, s'il en existe, la transvection de lignes avec la première, avec un rapport bien choisi pour que la ligne obtenue soit de profondeur plus grande que la première (voir Lemme 1). On obtient ainsi $A_2 = T(A_1) = TP(A)$ où T est une matrice de transvection. On répète le procédé pour toute ligne de même profondeur que la première, obtenant ainsi une matrice $M_1 = \mathcal{O}_1(A)$ dont toutes les lignes autres que la première ont une profondeur plus grande que la première.

— Répéter : On répète le même processus sur la matrice M_1 avec des opérations ne faisant pas intervenir $l_1(M_1)$ (on travaille sur la sous-matrice restante).

Exemple. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Comme $\mathbf{pf}(l_i(A)) = 2$ pour tout i, on peut choisir $l_2(A)$ ou $l_4(A)$ comme ligne de pivot puisque $\mathbf{pv}(l_2(A)) = \mathbf{pv}(l_4(A)) = 1$ (c'est plus simple de pivoter avec un 1). On choisit donc la ligne 2.

On permute donc les deux premières lignes, cela donne

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = P^{1,2}A.$$

Toutes les lignes de A_1 étant de même profondeur 2, on doit effectuer trois transvections pour augmenter la profondeur de chacune des lignes suivantes. On ajoute à la ligne 2 le produit de -2 par la première ligne ($L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$). On obtient :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = T^{2,1}(-2)P^{1,2}A.$$

On ajoute à la ligne 3 le produit de -3 par la première ligne ($L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$). On obtient :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = T^{3,1}(-3)T^{2,1}(-2)P^{1,2}A.$$

On ajoute à la ligne 4 le produit de -1 par la première ligne ($L_4 \leftarrow L_4 - L_1$). On obtient :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = T^{4,1}(-1)T^{3,1}(-3)T^{2,1}(-2)P^{1,2}A$$

On oublie la première ligne. Les lignes 3 et 4 sont maintenant de profondeur minimale, égale à 4. La ligne 2, de profondeur plus grande (5), n'est pas un choix possible pour le pivot. On choisit la ligne 3. On permute dans la matrice M_1 la ligne 3 avec la ligne 2. On obtient

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = P^{2,3}\left(M_1\right).$$

Omettant les lignes 1 et 2, on a à transvecter la ligne 3 sur la ligne 4 pour éliminer le coefficient 2. On fait $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$ (car le pivot est -2).

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Pour finir, on utilise la ligne 3 (pivot -6) pour annuler le -8 de la ligne 4. On fait $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{8}{6}L_3 = L_4 - \frac{4}{3}L_3$. Finalement, on obtient la matrice échelonnée (le calcul final donne 0 sur la dernière ligne) :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.4 Calcul d'inverse

Soit A une matrice inversible de taille n. On se propose d'utiliser la méthode de Gauß pour calculer son inverse.

Étapes de la méthode :

— Matrice élargie : On considère la matrice élargie $[A \mid \mathbf{I}_n] \in \mathbb{R}^{n\times(2n)}$.

— Pivot de Gauß : Appliquer la méthode du pivot de Gauß à $[A \mid \mathbf{I}_n]$ jusqu'à obtenir une matrice $[M \mid V]$ où M est une matrice carrée échelonnée et V une matrice inversible.

— Test d'inversibilité : Si une ligne de M est nulle, alors A n'est pas inversible. Sinon, on passe à l'étape suivante.

— Dilatation des lignes : On divise chaque ligne de $[M \mid V]$ par son pivot. Cela donne une matrice $[M_1 \mid V_1]$ dont tous les pivots sont égaux à 1.

— Nettoyer au-dessus des pivots : On traite successivement chaque colonne de la matrice triangulaire M_1, en commençant par la seconde colonne, puis la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière. Dans chacune de ces colonnes de M_1, il y a un pivot 1 avec des 0 en-dessous et des coefficients quelconques au-dessus. On amène ces coefficients au-dessus à 0 par des transvections de rapport convenable de la ligne du pivot sur leur ligne.

— Inverse : On obtient une matrice $[I_n \mid W]$ et on a $W = A^{-1}$.

Exemple. On cherche à calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

— On construit la matrice élargie en ajoutant à la droite de la matrice A les trois colonnes de la matrice unité I_3.

$$[A \mid I_3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— On commence par choisir la ligne 1 comme ligne de pivot. On transvecte cette ligne pivot sur la deuxième ligne avec le rapport -2, puis sur la troisième avec le rapport -3. Par cette opération sur les lignes, la matrice élargie devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laissant ensuite la première ligne pivot, on s'intéresse à la sous-matrice constituée par les deux dernières lignes de la matrice obtenue. Au sein de cette sous-matrice, on choisit la ligne $n°2$ comme deuxième ligne pivot : en effet cette ligne a pour pivot -1 qui est plus simple à inverser que celui -5 de la ligne $n°3$. On transvecte ensuite cette nouvelle ligne pivot sur la ligne $n°3$ avec rapport -5, ce qui conduit à la matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & | & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} := [M \mid V].$$

— Comme toutes les lignes de M sont non nulles, on en déduit que A est inversible.

— On procède à la dilatation de lignes. On multiplie chaque ligne par l'inverse de son pivot pour amener tous ces pivots à la valeur 1. Donc on divise la deuxième ligne par -1, et on multiplie la troisième par $\frac{1}{18}$, la première restant inchangée. On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

— Pour annuler le coefficient au-dessus du pivot de la deuxième ligne, on transvecte la ligne 2 sur la ligne 1 avec rapport -2, ce qui conduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & | & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Pour annuler ensuite les coefficients au-dessus du pivot de la troisième ligne, on transvecte cette dernière sur la ligne $n°1$ (rapport 7), puis sur la ligne $n°2$ (rapport -5), obtenant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

— La succession d'opérations élémentaires sur les lignes ainsi effectuée a transformé les trois premières colonnes de la matrice élargie en celles de la matrice unité, et les trois dernières en une matrice W. Elle transforme donc A en I_3 en même temps que I_3 en W. Par conséquent, la matrice W est l'inverse de A. On obtient finalement :

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

❊ Rang d'une matrice

4.1 Rappels et motivation

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Si $F = \mathrm{Vect}(L)$ où $L = (u_1, \dots, u_k)$ est une famille de vecteurs, il existe une sous-famille de L qui est une base de F.

Question : Étant donnée $L = (u_1, \dots, u_k)$, comment trouver une base de $\mathrm{Vect}(L)$?

Méthode : On résout le système homogène vectoriel :

$$\sum x_i u_i = 0_{\mathbb{E}}$$

- Si le système n'admet d'autre solution que la solution triviale $(0, \dots, 0)$, alors L est libre et est une base de $\mathrm{Vect}(L)$.
- Sinon, on a une relation de liaison. L'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. On l'élimine et on recommence avec la famille restante L'.

4.2 Rang d'une matrice

Définition 26. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Soient $l_1(A), \dots, l_m(A)$ ses vecteurs lignes. On appelle **rang** de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(l_1(A), \dots, l_m(A))).$$

Proposition 16. On a les propriétés suivantes :

- Si $\mathrm{rg}(A) = 0$, alors $A = 0_{m,n}$.
- $\mathrm{rg}(\mathbf{I}_n) = n$.
- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.
- On a toujours $\mathrm{rg}(A) \leq \min(m, n)$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(A) \leq 2$. Comme $A \neq 0$ et que les lignes ne sont pas colinéaires, $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Théorème 7. Pour toute sous-matrice B extraite de A, on a $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$.

4.3 Calcul pratique du rang

Lemme 2. Toute liste de vecteurs non nuls échelonnée (c'est-à-dire que les vecteurs sont de profondeurs strictement croissantes) est libre.

Théorème 8. Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses lignes non nulles.

Exemple.

1. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
est de rang 3 (car c'est une matrice échelonnée avec trois lignes non nulles).
2. $\mathrm{rg}(\mathbf{I}_n) = n$.
3. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice triangulaire avec $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, alors $\mathrm{rg}(A) = n$.

Proposition 17 (Opérations élémentaires)**.** Le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Si A' est obtenue à partir de A par la méthode du pivot de Gauß, alors :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A').$$

Proposition 18 (Rang du produit)**.** Soient A, B deux matrices dont le produit AB est défini. Alors :

$$\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)).$$

Théorème 9. Si P est une matrice inversible (et Q inversible), alors multiplier par P (ou Q) ne change pas le rang :

$$\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(AQ) = \mathrm{rg}(A).$$

Définition 27 (Matrice de rang plein)**.** Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite de **rang plein** lorsque $\mathrm{rg}(A) = n$. Ceci est équivalent à dire que A est inversible ($A \in GL_n(\mathbb{R})$).

4.4 Applications aux systèmes linéaires

Théorème 10 (Rouché-Capelli)**.** Pour qu'un système linéaire $AX = B$ soit compatible (admette au moins une solution), il faut et il suffit que le rang de la matrice du système soit égal au rang de la matrice élargie :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A}) \quad \text{où } \tilde{A} = [A \mid B].$$

Exemple. Considérons le système :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 3 \\ x + y + z & = & 2 \\ -x - y + z & = & 1 \end{array} \right.$$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $C_1(A) = C_2(A)$, donc les colonnes sont liées. On trouve $\mathrm{rg}(A) = 2$. La matrice élargie est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Après échelonnement, on trouve que $\mathrm{rg}(\tilde{A}) = 3$. Comme $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(\tilde{A})$, le système n'admet pas de solution.

4.4.1 Systèmes homogènes

Un système est dit homogène si le second membre est nul ($AX = 0$). L'ensemble des solutions S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 11. La dimension de l'espace des solutions d'un système homogène est donnée par :

$$\dim(S) = n - \mathrm{rg}(A)$$

où n est le nombre d'inconnues (nombre de colonnes de A).

Exemple. Considérons le système homogène :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{cases}$$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En échelonnant A, on obtient la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc un système équivalent à $(\mathcal{S})$ est

$$(\mathcal{S}') : \begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Les inconnues principales sont x, z et y est l'inconnue auxiliaire. On trouve immédiatement que $z = 0$ et $x = -y$. L'ensemble S des solutions de $(\mathcal{S}')$ est

$$S = \{(-y, y, 0), y \in \mathbb{R}\},$$

et on a bien $1 = \dim(S) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 2$.

❊ Déterminant d'une matrice

5.1 Déterminant 2x2

Interprétation géométrique : Le déterminant correspond à l'aire algébrique du parallélogramme engendré par les deux vecteurs (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le plan comme illustré dans la figure Figure 6. En calculant l'aire du grand rectangle et en soustrayant l'aire des triangles B,C,D E et l'aire des rectangles A et D, on retrouve la formule :

$$\text{Aire}(P) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

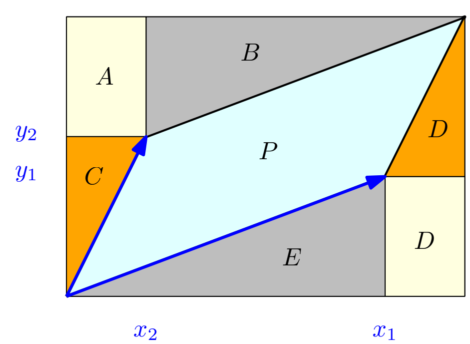


FIGURE 6 – Le déterminant d'une matrice carrée de taille 2 a pour valeur absolue l'aire du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs lignes de la matrice.

Définition 28. Étant donnée une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on appelle déterminant de A le scalaire :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Supposons $ad - bc \neq 0$ et calculons l'inverse de A. On distingue deux cas $a \neq 0$ et $a = 0$. Supposons dans un premier temps que $a \neq 0$. On élargit la matrice A à la matrice

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cccc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right].$$

On effectue transvection de $l_1(A)$ sur $l_2(A)$ avec rapport $-\frac{c}{a}$, ce qui donne

$$[A_1 \mid V_1] = \left[\begin{array}{cccc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d-\frac{cb}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right].$$

On pose $\delta = ad - bc$ et on dilate les lignes 1 et 2 avec rapports respectifs $\frac{1}{a}$ et $\frac{a}{\delta}$ pour amener leurs pivots à 1, ce qui donne

$$[A_2 \mid V_2] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{\delta} & \frac{a}{\delta} \end{array}\right].$$

Transvectons enfin la ligne 2 sur la ligne 1 avec un rapport $-\frac{b}{a}$. On trouve

$$[A_3 \mid V_3] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{a}+\frac{bc}{a\delta} & -\frac{b}{\delta} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{\delta} & \frac{a}{\delta} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{d}{\delta} & -\frac{b}{\delta} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{\delta} & \frac{a}{\delta} \end{array}\right].$$

On obtient donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si $a = 0$, on vérifie immédiatement que

$$A^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \delta = -bc \neq 0.$$

Proposition 19 (Inverse d'une matrice 2x2)**.** Si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

5.1.1 Systèmes de Cramer (2x2)

On considère le système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} ax + by = \ell \\ cx + dy = m \end{cases}$$

La matrice de $(\mathcal{S})$ est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et la colonne des seconds membres est $B = \binom{\ell}{m}$. Soit $\delta = ad - bc$ le déterminant de A. Le système $(\mathcal{S})$ s'écrit sous forme matricielle $AX = B$. On dira que $(\mathcal{S})$ est de Cramer si A est inversible ($\det(A) \neq 0$).

Proposition 20 (Formules de Cramer)**.** Si $(\mathcal{S})$ est de Cramer, son unique solution est donnée par :

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} l & b \\ m & d \end{vmatrix}}{ad - bc}, \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a & l \\ c & m \end{vmatrix}}{ad - bc}.$$

Proposition 21 (Propriétés du déterminant)**.** Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. On a

— $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

— $\det(I_2) = 1$.

— A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$. Et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

— $\det(A^T) = \det(A)$.

— Pour une matrice triangulaire (ou diagonale), le déterminant est le produit des coefficients diagonaux : $\det(A) = a_{11}a_{22}$.

5.2 Déterminant 3x3 et Produit Mixte

Avant de définir le déterminant 3x3, introduisons des outils géométriques sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

5.2.1 Mineurs et rang

Définition 29. On appelle **mineur** d'ordre 2 d'une matrice, le déterminant d'une sous-matrice carrée de taille 2×2.

Exemple. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

On peut en extraire trois sous-matrices carrées de taille 2

$$A^{\emptyset\wedge 1} = \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}, \quad A^{\emptyset\wedge 2} = \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}, \quad \text{et } A^{\emptyset\wedge 3} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}.$$

Les déterminants $\delta_1 = bf - ce, \delta_2 = af - cd, \delta_3 = ae - bd$ de ces trois sous-matrices sont les trois mineurs d'ordre deux de A.

Théorème 12. Soit $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Le rang de A est < 2 si et seulement si tous ses mineurs d'ordre 2 sont nuls.

5.2.2 Produit vectoriel

Soient $u = (a, b, c)$ et $v = (d, e, f)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Leur produit vectoriel est le vecteur défini par :

$$u \wedge v = (bf - ce,\ cd - af,\ ae - bd).$$

Proposition 22. — $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.
— $u \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (u, v)$ est liée (colinéaires).
— **Identité de Lagrange :** $\|u \wedge v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.

5.2.3 Produit mixte

Définition 30. Le produit mixte de trois vecteurs u, v, w, noté $[u, v, w]$, est le scalaire défini par :

$$[u, v, w] = u \cdot (v \wedge w).$$

Proposition 23 (Propriétés fondamentales). — **Trilinéaire :** Linéaire par rapport à chaque variable.
— **Antisymétrique :** Échanger deux vecteurs change le signe (ex : $[u, v, w] = -[v, u, w]$).
— **Alterné :** Si deux vecteurs sont égaux, le produit mixte est nul ($[u, u, w] = 0$).
— **Invariant par permutation circulaire :** $[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v]$.
— Le produit mixte est nul si et seulement si la famille (u, v, w) est liée.

5.2.4 Définition du déterminant 3x3

Définition 31. Le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est égal au produit mixte de ses vecteurs lignes (ou colonnes) :

$$\det(A) = \det(l_1(A), l_2(A), l_3(A)) = [l_1(A), l_2(A), l_3(A)].$$

Formule de Leibniz (Règle de Sarrus) :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

❈ Exercices

Exercice 1. Vérifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

— $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.
— $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0\}$.
— $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
— $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 0\}$.

Exercice 2. Soient $E, F \subset \mathbb{R}^3$ définies par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad y - x = 0 \ \ et \ \ z - y - 2x = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 2x - 3y + z = 0\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $S_1 = \{u_1\}$ avec $u_1 = (1, 1, 3)$.
   (a) Vérifier que $u_1 \in E$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Vect}(S_1) \subset E$.
   (c) Justifier que $E = \mathrm{Vect}(S_1)$.
3. Soit $S_2 = \{u_2, u_3\}$ avec $u_2 = (3, 2, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Vect}(S_2)$ est contenu dans F.
   (b) Montrer que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de S_2.
   (c) En déduire que $F = \mathrm{Vect}(S_2)$.
   (d) La partie F est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
4. La famille $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ou liée ? Que peut-on en déduire pour les familles S_1 et S_2 ?

Exercice 3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

— Pour quelles valeurs de λ les familles $\{(1, \lambda), (\lambda, 2)\}$ et $\{(1, 0, \lambda), (1, 1, \lambda), (\lambda, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Exercice 4. On considère $S = \{(1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}$.

— Montrer que tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ avec les $a_i \in \mathbb{R}$

s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de S.

— Donner les coordonnées de P dans S.

Exercice 5. On considère les deux sev de $E = \mathbb{R}^4$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{E} : \quad x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = \{(2x, -x, 0, x) : \quad x \in \mathbb{E}\}.$$

— Montrer que F et G sont en somme directe.

— Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{E}$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x - 2\alpha, y + \alpha, z, t - \alpha) \in F$.

— En déduire que F et G sont supplémentaires.

Exercice 6. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : \quad P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
2. Montrer que tout élément de F s'écrit
$$a_1X + a_2X^2 - (a_1 + a_2)X^3.$$
3. En déduire que $\{X - X^3, X^2 - X^3\}$ est une base de F.

Exercice 7. Soit $V = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : \quad (X + 1)P' - (2 - X^2)P'' = 0\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. En donner $\{X - X^3, X^2 - X^3\}$ est famille génératrice.

Exercice 8. Un matrice carrée S de taille $n \times n$ est dite scalaire lorsqu'elle est colinéaire avec $\mathbf{I}_n$.

— Soit S une matrice scalaire de taille 2×2. Trouver deux matrices de dilatations D^1,D^2 telles que $S = D^1D^2$.

— Soit S une matrice scalaire de taille 3×3. Trouver deux matrices de dilatations D^1,D^2, D^3 telles que $S = D^1D^2D^3$.

— Montrer que pour toute matrice carrée A de taille $n \times n$ et pour toute matrice scalaire S de taille $n \times n$, on a $AS = SA$.

— Si A est une matrice diagonale de taille 2×2 telle que $AT = TA$ pour toute matrice de transvection T de taille 2×2, montrer que A est scalaire.

Exercice 9. Résoudre les systèmes suivants en échelonnant leur matrice élargie. (On discutera éventuellement selon la valeur du paramètre m).

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ -2x & & & + & 3z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (b)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & 4z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & z & + & 2t & = & 1 \\ -x & + & 2y & & & + & t & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & -1 \\ 4x & + & 3y & + & 2z & + & 3t & = & 3 \\ x & - & y & + & z & - & 2t & = & 1 \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 10. Calculer, s'ils existent, les inverses des matrices suivantes, en augmentant par la matrice unité et en échelonnant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Trouver les rangs des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. En discutant selon la valeur du paramètre réel m, déterminer le rang des matrices

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ m & 0 & -2 & 1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}; \quad B_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 5 \\ -1 & 4 & m \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. On suppose qu'il existe deux matrices $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ et $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la valeur de x.

Exercice 14. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n. On pose $B = A^\top A$. On appelle noyau de A, et on le note $\mathrm{Ker}(A)$, l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \mathbf{0}_{n,1}$. On appelle image de A, noté $\mathrm{Im}(A)$, l'espace $\mathrm{Vect}(c_1(A), \cdots, c_n(A))$, où les $c_i(A)$ sont les colonnes de A. On rappelle le résultat suivant

Théorème 13. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors

$$n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)).$$

1. Montrer que, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $Y^\top Y = \mathbf{0}_{n,1}$ si et seulement si $Y = \mathbf{0}_{n,1}$.
2. Montrer que, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $BX = \mathbf{0}_{n,1}$ si et seulement si $AX = \mathbf{0}_{n,1}$.
3. En déduire que les matrices A et B ont même rang.

Exercice 15. Étant donnés trois nombres réels α, β, γ, on considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ en 3 inconnues x, y, z qui suit : $(\mathcal{S})$ $\begin{cases} 2x + 3y + z = \alpha \\ 3x + 3y + z = \beta \\ 2x + 4y + z = \gamma \end{cases}$.

1. Donner la matrice du système $(\mathcal{S})$.
2. En augmentant la matrice $\mathbf{I}_3$, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

3. Le système $(\mathcal{S})$ est-il de Cramer ? Justifier la réponse.
4. Déduire du calcul de l'inverse de A l'expression de la solution de $(\mathcal{S})$.
5. Trouver explicitement la solution de $(\mathcal{S})$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $(\alpha, \beta, \gamma) = (6; 7; 7)$.
   (b) $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1; 1; -2)$.
   (c) $(\alpha, \beta, \gamma) = (4; 4; 5)$.
   (d) $(\alpha, \beta, \gamma) = (1; 2; 1)$.