Espaces vectoriels

ENSIMAG Alternance $1^{\text{ère}}$ année

Hamza Ennaji

Dernière modification: December 25, 2023

Contents

❊ Corps

Nous avons besoins de rappeler la notion de corps pour préciser l'ensemble où vivent les scalaires.

Définition 1. Un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ dites addition et multiplication de scalaires tel que pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ et $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ et $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
- $0_{\mathbb{K}} + \alpha = \alpha$ et $1_{\mathbb{K}} \cdot \alpha = \alpha$.
- Il existe un élément $-\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha + (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$. Pour $\alpha \neq 0_K$, il existe un élément $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha \cdot \alpha^-1 = 1_K$.

- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Example.
- L'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$ est un corps pour l'addition et multiplication usuelles.
- L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un corps pour les lois $+$ et $\cdot$ usuelles. On rappelle que pour $z = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \gamma + i\delta$:

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) \text{ et } z_1 z_2 = (\alpha\beta - \gamma\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : \ (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$ est un corps pour l'addition et multiplication usuelles.
- L'ensemble $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ muni de l'addition et multiplication définies comme suit:

$$0 + 0 = 1 + 1 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \ 0 + 1 = 1 + 0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \ 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ and } 1 \cdot 1 \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Remarque. S'il y'a pas d'ambiguïté, on notera simplement 0 et 1 au lieu de $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$.

Convention *Le long du cours le corps $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.*

※ *Espaces véctoriels*

Définition 2. Un espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-ev) est un espace muni de deux opérations:

i) Addition de vecteur: $\forall x, y \in \mathbb{E}$ il existe un élément $x + y \in \mathbb{E}$.

ii) Multiplication par scalaires: pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$, il existe un élément $\lambda \cdot x \in \mathbb{E}$.

Ces opération vérifient les hypothèses suivantes:

A1. $x + y = y + x \ \forall x, y \in \mathbb{E}$.

A2. $(x + y) + z = x + (y + z) \ \forall x, y, z \in \mathbb{E}$.

A3. il existe un élément $0_{\mathbb{E}}$ă $\in \mathbb{E}$ dit élément neutre pour l'addition, tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.

A4. Pour tout $x \in \mathbb{E}$ il existe $y \in \mathbb{E}$ tel que $x + y = 0_{\mathbb{E}}$.

A5. $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ pour tout $x \in E$.

A6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

A7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{E}$.

A8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$.

Remarque. Les hypothèses (A1-A2-A3-A4) expriment le fait que $(\mathbb{E}, +)$ est un group commutatif (ou abélien). Autrement dit, $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sit $(\mathbb{E}, +)$ est un group abélien et que les hypothèses (A5-A6-A7-A8) sont vérifiées.

Example. • Exemple trivial: $\mathbb{E} = \{0\}$.

- $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : \; x_i \in \mathbb{K} \; \forall i = 1, \ldots, n\}$.

- $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément P de $\mathbb{E}$ s'écrit de la forme
$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,$$
où les $a_i \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'entier n s'appelle le degré de P et on écrit $n = \deg(P)$. Pour un $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit λP par
$$(\lambda \cdot P)(X) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot a_i X^i.$$
Soit maintenant $Q(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ un autre polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que Q est de même degré que P. On définit alors $P + Q$ par
$$(P + Q)(X) \stackrel{\text{def}}{=} P(X) + Q(X) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) X^i.$$

- Soient $E_1, \dots, E_n$ n espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors

$$\mathbb{E} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times \cdots E_n$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients réels. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_{2,2}(R)$ avec Plus généralement, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

2.1 Propriétés

Proposition 1. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-e.v et $x, y, z \in \mathbb{E}$. On a

i) Si $x + z = y + z$ alors $x = y$.

ii) Si $z + x = z + y$ alors $x = y$.

iii) $0_{\mathbb{E}}$ est unique: s'il existe $0' \in \mathbb{E}$ tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$ et $x + 0' = x$ alors $0_{\mathbb{E}} = 0'$.

Preuve. i) D'après Définition-2-(A4), il existe $z' \in \mathbb{E}$ tel que: $z + z' = 0_{\mathbb{E}}$. On a donc

$$x = x + 0_{\mathbb{E}} = x + (z + z') = (x + z) + z' = (y + z) + z' = y + (z + z') = y + 0_{\mathbb{E}} = y.$$

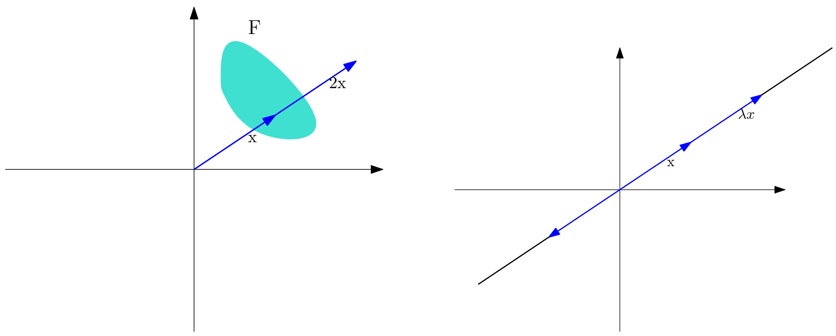
ii) Si $z + x = z + y$ alors par commutativité (Définition-2-(A1)) $x + z = y + z$ et on conllut d'après i) que $x = y$.

iii) On a $x = x + 0_{\mathbb{E}} = x + 0'$ donc $0_{\mathbb{E}} = 0'$ toujours d'après i).

□

Corollaire. Soit $x \in \mathbb{E}$ alors l'élément $y \in \mathbb{E}$ dans Définition-2 vérifiant (A4) est unique, i.e., si $y, y' \in \mathbb{E}$ vérifient $x + y = x + y' = 0_{\mathbb{E}}$ alors $y = y'$. On note $y = -x$.

Example.
- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$.
- Dans $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, on a $0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



(a) (b)

Figure 1: La Figure-1a montre un sous ensemble F du plan qui n'est stable ni pas addition de vecteurs ni par multiplications par scalaires. Tandis que Figure-?? montre une partie du plan, dite droite vectorielle, qui est pas addition de vecteurs et par multiplications par des scalaires.

- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ alors $0_{\mathbb{R}[X]} = 0$ est le polynôme nul.

2.2 *Sous-espaces vectoriels*

Définition 3. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Un ensemble $F \subset \mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ s'il est lui même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ par rapport à l'addition de vecteurs et multiplications de scalaires définies sur $\mathbb{E}$. Autrement dit, si $(F, +_{\mathbb{E}}, \cdot_{\mathbb{E}})$ vérifie (A1-A8).

Example. Examples de sous-espaces vectoriels

$F = \{0_{\mathbb{E}}\} \subset \mathbb{E}$, où $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

- $F = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0), x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$.
- $F = \mathbb{K}_n[X] \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{K}[X] : \ \deg(p) \leq n\} \subset \mathbb{K}[X]$.

Le résultat suivant fourni "un test" pour vérifier si un ensemble est oui ou non un sous-espace vectoriel d'un e.v donné.

Proposition 2 (Tests de sous-ev)**.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset \mathbb{E}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si et seulement si

- $0_{\mathbb{E}} \in F$.
- Si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$.
- Si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda x \in F$.

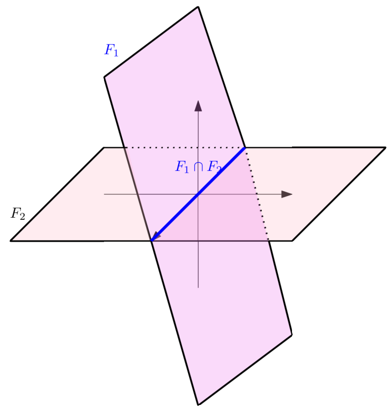


Figure 2: Illustration de l'intersection entre deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (ici, deux plans vectoriels), leur intersection est une droite vectorielle.

Cela est équivalent à dire
$$\lambda x + y \in F$$
pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$.

Exercise

Vérifier si les ensembles suivant sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 1\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z \geq 0\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 01\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + 2y^2 = 0\}$.

2.3 *Intersection de sous-espaces vectoriels*

Définition 4. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Alors $F \overset{\text{def}}{=} \cap_{i \in I} F_i$ est aussi un sous-espace vectoriel.

Preuve. On utilise la Proposition-2. Dans un premier temps, comme les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ on sait que $0_{\mathbb{E}} \in F$. Maintenant pour $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x, y \in F_i$ pour tout $i \in I$. Cela donne que $\lambda x + y \in F_i$ pour tout $i \in I$. On en déduit que $\lambda x + y \in \cap F_i$. D'où le résultat. □

Example. On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$F_1 = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\} \text{ et } F_2 = \{(0, x),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

On vérifie facilement que $F_1 \cap F_2 = \{(0, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2.4 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 5. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $S \subset \mathbb{E}$. Un vecteur $x \in \mathbb{E}$ est une combinaison linéaire d'éléments de S s'il existe $n \in \mathbb{N}$, des vecteurs $v_1, \cdots, v_n \in S$ et des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

À partir d'une partie S de $\mathbb{E}$, on peut définir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ avec les combinaisons linéaires des vecteurs de S.

Définition 6. Soit $S \subset \mathbb{E}$ un sous-ensemble non vide. On note par $\text{Vect}(S)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de S, i.e.,

$$\text{Vect}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ :\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{K},\ v_i \in S \right\}.$$

Remarque.
- Par convention $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.
- On remarque facilement que $S \subset \text{Vect}(S)$. En effet, on a $v = 1_{\mathbb{K}} \cdot v$ pour tout $v \in S$.

Theorem 1. Soit $S \subset \mathbb{E}$, alors:

- $\text{Vect}(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
- $S \subset \text{Vect}(S)$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ tel que $S \subset F$, alors $S \subset \text{Vect}(S) \subset F$

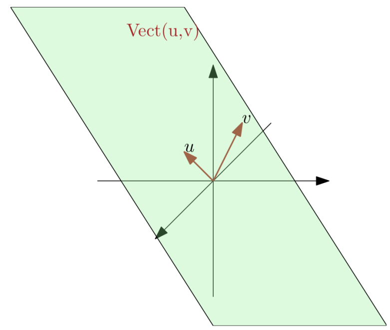


Figure 3: Deux vecteurs non-colinéaires u et v. Le sous-espace vectoriel Vect$(\{u, v\})$ est le plan vectoriel qui les contient.

Définition 7. Une famille $S \subset \mathbb{E}$ est dite génératrice de $\mathbb{E}$ si $\mathrm{Vect}(S) = \mathbb{E}$.

Example.
- La famille $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ avec

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1),$$

  est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. En effet, tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit:

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \dot{(}1, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n \dot{(}0, \cdots, 1).$$

- Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ des nombres complexes est engendré par $\{1, i\}$ car tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x \cdot 1 + y \cdot i$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

- L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est engendré par la famille $(M_i)_{i=1,2,3,4}$ des matrices dites élémentaires avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  En effet, toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ s'écrit:

$$M = a \cdot M_1 + b \cdot M_2 + c \cdot M_3 + d \cdot M_4.$$

- La famille de monômes $\{1, X, \cdots, X^n\}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit

$$P(X) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \cdots + a_n \cdot X^n.$$

2.5 *Famille libre, famille liée*

*Étant donnée une famille génératrice $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{E}$, on remarque que $0_{\mathbb{E}}$ se réalise de façon **trivial** comme combinaison linéaire des v_i, i.e.,*

$$0_{\mathbb{E}} = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

*Néanmoins, on peut avoir un réalisation **non-triviale** de $0_{\mathbb{E}}$ comme combinaison linéaire des v_i, dans le sens où on peut trouver des scalaires $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$0_{\mathbb{E}} = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n.$$

Cela motive la définition suivante

Définition 8.

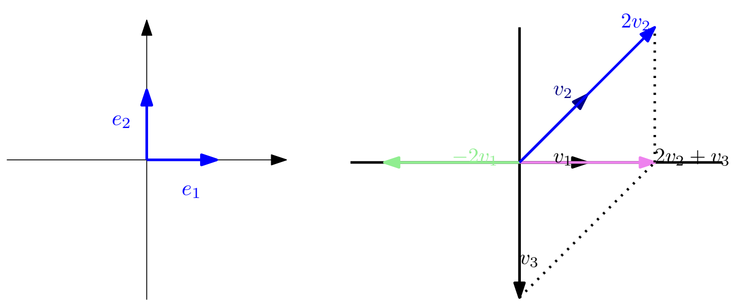
- Une famille $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de vecteurs de $\mathbb{E}$ est dite libre si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}} \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i.$$

  Autrement dit la seule façon d'écrire $0_{\mathbb{E}}$ comme combinaison linéaire des v_i est la combinaison triviale.

- Une famille S qui n'est pas libre est liée. Cela revient à dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{E}}.$$



(a) (b)

Figure 4: La Figure-4a illustre une famille libre de $\mathbb{R}^2$, $S = \{e_1, e_2\}$. La Figure-4b illustre une famille $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ qui est liée avec $v_1 = (1,0), v_2 = (1,1), v_3 = (0,-2)$.

Proposition 3. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$−ev et $S_1 \subset S_2 \subset \mathbb{E}$ deux ensembles. Alors:

- Si S_1 est liée alors S_2 est liée.
- Si S_2 est libre alors S_1 est libre.

Exercise

Soient $E, F \subset \mathbb{R}^3$ définies par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y - x = 0 \;\; et \;\; z - y - 2x = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x - 3y + z = 0\}$$

1) *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

2) *Soit $S_1 = \{u_1\}$ avec $u_1 = (1, 1, 3)$.*

   b) *En déduire que $Vect(L_1) \subset E$.*

   c) *Justifier que $E = Vect(L_1)$.*

3) *Soit $S_2 = (u_2, u_3)$ avec $u_2 = (3, 2, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.*

   b) *Montrer que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de S_2.*

   c) *Justifier que $F = Vect(S_2)$.*

   d) *La partie F est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?*

4) *La famille $S = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle libre ou liée ? Que peut-on en déduire pour S_1 et S_2 ?*