

**Exercice 1.** Soit  $C \subset \mathbb{R}^n$  un compact non vide et  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer qu'il existe  $x^* \in C$  tel que  $f(x^*) = \min_{x \in C} f(x)$ .

**Exercice 2.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on rappelle que  $f$  est dite propre si  $-\infty \notin f(\mathbb{R}^n)$  et  $\text{dom}(f) \neq \emptyset$ . On dira que  $f$  est coercive si  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . Finalement,  $f$  est dite semi-continue inférieurement (sci) ssi pour toute suite  $(x_n)_n$  convergeant vers  $x$  on a  $f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ .

- (1) Montrer que  $f$  est coercive si et seulement si  $\text{Lev}(f, \alpha)$  est borné pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (2) Supposons que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$  est propre, semi-continue inférieurement et coercive. Montrer qu'il existe  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ .
- (3) Supposons que  $f$  est continue et coercive et soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  un fermé non vide. Montrer que  $x^* \in S$  tel que  $f(x^*) = \min_{x \in S} f(x)$ .
- (4) Montrer que  $f(x, y) = x^2 + y^2$  admet un minimum global sur  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq -1\}$ .

**Exercice 3.** Trouver et déterminer la nature des points critique des fonctions  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d = 2, 3$ .

- (1)  $f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 + 3x^2y - 24y$ .
- (2)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ .
- (3)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .
- (4)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ .
- (5)  $f(x, y, z) = -3z^2 + 2y^2 + 2xz + 2y + 1$ .

**Exercice 4.** Soit  $n \geq 2$  et  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction polynomiale définie par

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto p(x) := (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

- (1) Montrer que  $0_{\mathbb{R}^n}$  est le seul point critique de  $p$ .
- (2) Montrer que  $0_{\mathbb{R}^n}$  est minimum local strict de  $p$ , mais qu'il n'est pas minimum global de  $p$ .

**Exercice 5.** Soit  $f(x) = x^T A x + 2b^T x + c$  avec  $A \in \mathcal{S}^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ .

- (1) Montrer que  $x^*$  est un point stationnaire si et seulement si  $Ax^* = -b$ .

- (2) Si  $A \succeq 0$ , alors  $x^*$  est un minimum global si et seulement si  $A^*x = -b$ .
- (3) Si  $A \succ 0$ , alors  $x^* = -A^{-1}b$  est un minimum global strict de  $f$ .
- (4) Montre que  $f$  est coercive ssi  $A \succ 0$ .
- (5) Montrer que

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & b \\ b^\top & c \end{pmatrix} \succeq 0.$$

**Exercice 6.** Soit  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et différentiable sur  $\mathbb{R}^n$ , et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  convexe, fini en au moins un point. On pose

$$f(x) := (g + h)(x) = g(x) + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et on considère le problème  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ .

- (1) Montrer que  $\bar{x}$  minimise  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si

$$\langle \nabla g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{E})$$

- (2) Vérifier que (E) est équivalente à

$$\langle \nabla g(x), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{F})$$

**Exercice 7.** On considère le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^n} f(x), \quad (\text{P})$$

avec  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ . Montrer que  $x^* \in \mathbb{R}_+^n$  est un point stationnaire ssi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_i^* > 0, \\ \geq 0, & \text{si } x_i^* = 0. \end{cases}$$

**Exercice 8.** On considère le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) : \langle a, x \rangle = 1\}, \quad (\text{P})$$

où  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in \mathbb{R}_{++}^n$ . Montre que qu'un point  $x^* \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\langle a, x \rangle = 1$  est un point stationnaire de (P) ssi

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \frac{1}{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = \dots = \frac{1}{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*).$$