Espaces vectoriels

ENSIMAG Alternance $1^{\text{ère}}$ année

Hamza Ennaji

Dernière modification: December 19, 2023

Contents

❈ Corps

Nous avons besoins de rappeler la notion de corps pour préciser l'ensemble où vivent les scalaires.

Définition 1. Un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ dites addition et multiplication de scalaires tel que pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ et $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ et $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
- $0_{\mathbb{K}} + \alpha = \alpha$ et $1_{\mathbb{K}} \cdot \alpha = \alpha$.
- Il existe un élément $-\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha + (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$. Pour $\alpha \neq 0_K$, il existe un élément $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha \cdot \alpha^{-}1 = 1_K$.
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Example. • L'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$ est un corps pour l'addition et multiplication usuelles.

- L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un corps pour les lois $+$ et $\cdot$ usuelles. On rappelle que pour $z = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \gamma + i\delta$:

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) \text{ et } z_1 z_2 = (\alpha\beta - \gamma\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : \ (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$ est un corps pour l'addition et multiplication usuelles.

- L'ensemble $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ muni de l'addition et multiplication définies comme suit:

$$0 + 0 = 1 + 1 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \ 0 + 1 = 1 + 0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \ 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ and } 1 \cdot 1 \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Remark. S'il y'a pas d'ambiguïté, on notera simplement 0 et 1 au lieu de $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$.

Convention *Le long du cours le corps $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.*

※ *Espaces véctoriels*

Définition 2. Un espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-ev) est un espace muni de deux opérations:

i) Addition de vecteur: $\forall x, y \in \mathbb{E}$ il existe un élément $x + y \in \mathbb{E}$.

ii) Multiplication par scalaires: pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$, il existe un élément $\lambda \cdot x \in \mathbb{E}$.

Ces opération vérifient les hypothèses suivantes:

A1. $x + y = y + x \ \forall x, y \in \mathbb{E}$.

A2. $(x + y) + z = x + (y + z) \ \forall x, y, z \in \mathbb{E}$.

A3. il existe un élément $0_{\mathbb{E}}$ă $\in \mathbb{E}$ dit élément neutre pour l'addition, tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$ pour tout $x \in \mathbb{E}$.

A4. Pour tout $x \in \mathbb{E}$ il existe $y \in \mathbb{E}$ tel que $x + y = 0_{\mathbb{E}}$.

A5. $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ pour tout $x \in E$.

A6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

A7. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathbb{E}$.

A8. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{E}$.

Remark. Les hypothèses (A1-A2-A3-A4) expriment le fait que $(\mathbb{E}, +)$ est un group commutatif (ou abélien). Autrement dit, $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sit $(\mathbb{E}, +)$ est un group abélien et que les hypothèses (A5-A6-A7-A8) sont vérifiées.

Example. • Exemple trivial: $\mathbb{E} = \{0\}$.

- $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{K} \ \forall i = 1, \ldots, n\}$.

- $\mathbb{E} = \mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément P de $\mathbb{E}$ s'écrit de la forme
$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,$$
où les $a_i \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'entier n s'appelle le degré de P et on écrit $n = \deg(P)$. Pour un $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit λP par
$$(\lambda \cdot P)(X) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot a_i X^i.$$
Soit maintenant $Q(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ un autre polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que Q est de même degré que P. On définit alors $P + Q$ par
$$(P + Q)(X) \stackrel{\text{def}}{=} P(X) + Q(X) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) X^i.$$

- Soient $E_1, \ldots, E_n$ n espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors
$$\mathbb{E} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times \cdots E_n$$
est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Soit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille 2×2 à coefficients réels. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_{2,2}(R)$ avec Plus généralement, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

2.1 Propriétés

Proposition 1. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-e.v et $x, y, z \in \mathbb{E}$. On a

i) Si $x + z = y + z$ alors $x = y$.

ii) Si $z + x = z + y$ alors $x = y$.

iii) $0_{\mathbb{E}}$ est unique: s'il existe $0' \in \mathbb{E}$ tel que $x + 0_{\mathbb{E}} = x$ et $x + 0' = x$ alors $0_{\mathbb{E}} = 0'$.

Preuve. i) D'après Définition-2-(A4), il existe $z' \in \mathbb{E}$ tel que: $z + z' = 0_{\mathbb{E}}$. On a donc

$$x = x+0_{\mathbb{E}} = x+(z+z') = (x+z)+z' = (y+z)+z' = y+(z+z') = y+0_{\mathbb{E}} = y.$$

ii) Si $z + x = z + y$ alors par commutativité (Définition-2-(A1)) $x + z = y + z$ et on conllut d'après i) que $x = y$.

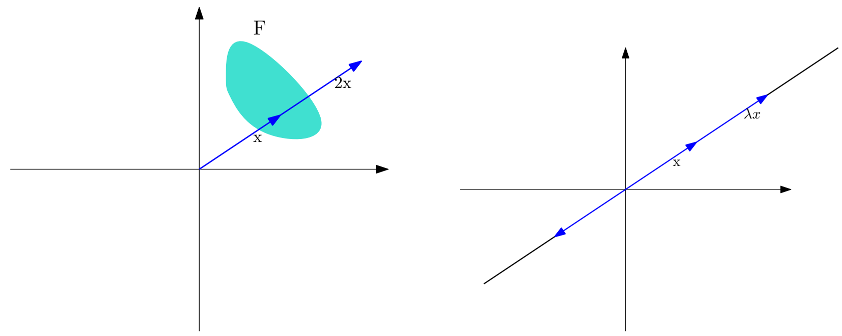
iii) On a $x = x + 0_{\mathbb{E}} = x + 0'$ donc $0_{\mathbb{E}} = 0'$ toujours d'après i).

$\square$

Corollaire. Soit $x \in \mathbb{E}$ alors l'élément $y \in \mathbb{E}$ dans Définition-2 vérifiant (A4) est unique, i.e., si $y, y' \in \mathbb{E}$ vérifient $x + y = x + y' = 0_{\mathbb{E}}$ alors $y = y'$. On note $y = -x$.

Example.
- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$.
- Dans $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, on a $0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ alors $0_{\mathbb{R}[X]} = 0$ est le polynôme nul.

2.2 Sous-espaces vectoriels



(a) (b)

Figure 1: La Figure-1a montre un sous ensemble F du plan qui n'est stable ni pas addition de vecteurs ni par multiplications par scalaires. Tandis que Figure-1b montre une partie du plan, dite droite vectorielle, qui est pas addition de vecteurs et par multiplications par des scalaires.

Définition 3. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev. Un ensemble $F \subset \mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ s'il est lui même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ par rapport à l'addition de vecteurs et multiplications de scalaires définies sur $\mathbb{E}$. Autrement dit, si $(F, +_{\mathbb{E}}, \cdot_{\mathbb{E}})$ vérifie (A1-A8).

Example. Examples de sous-espaces vectoriels

$F = \{0_{\mathbb{E}}\} \subset \mathbb{E}$, où $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

- $F = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0), x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$.
- $F = \mathbb{K}_n[X] \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{K}[X] : \ \deg(p) \leq n\} \subset \mathbb{K}[X]$.

Le résultat suivant fourni "un test" pour vérifier si un ensemble est oui ou non un sous-espace vectoriel d'un e.v donné.

Proposition 2 (Tests de sous-ev)**.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset \mathbb{E}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si et seulement si

- $0_{\mathbb{E}} \in F$.
- Si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$.
- Si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda x \in F$.

Cela est équivalent à dire

$$\lambda x + y \in F$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$.

Exercise

Vérifier si les ensembles suivant sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 1\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z \geq 0\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 01\}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 = 0\}$.