Modélisation et résolutions numérique et symbolique de problèmes via les logiciels Maple et MATLAB (MODEL)

Cours n°2 : Codes correcteurs d'erreurs

Stef Graillat & Mohab Safey El Din

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Résumé du cours précédent

- Introduction à Maple
- Rappels sur Euclide
- Rappels sur les corps finis

Objectifs de ce cours

1. Introduction aux codes correcteurs d'erreurs
2. Codes linéaires
3. Algorithme de codage et de décodage des codes linéaires

Plan du cours

1. Généralités
2. Modélisation
3. Codes linéaires
4. Décodage par syndrome

Bibliographie en français

- Algèbre discrète et codes correcteurs, Odile Papini et Jacques Wolfmann, Springer, 1996
- Cours d'algèbre. Primalité. Divisibilité. Codes, Michel Demazure, Cassini, 1997
- Codage, cryptologie et applications, Bruno Martin, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), 2004
- Théorie des Codes : Compression, Cryptage et Correction, J.-G. Dumas, J.-L. Roch, E. Tannier and S. Varrette, Dunod, 2007
- Codes correcteurs : théorie et applications, A. Poli et L. Huguet, Masson, 1989
- Mathématiques et Technologie, C. Rousseau et Y. Saint-Aubin, Springer, 2008
- Codes correcteurs d'erreurs, G. Cohen, J.L. Dornstetter et P. Godlewski, Masson, 1992
- Article « Code correcteur » de Wikipedia

Bibliographie en anglais

- Applications of Abstract Algebra with Maple and MATLAB, Richard E. Klima, Neil Sigmon et Ernest Stitzinger, 2nd édition, Chapman & Hall/CRC, 2006
- An Introduction to Coding Theory, J.H. van Lint, 3e édition, Springer, 1998
- The theory of error-correcting codes, F. MacWilliams et N. Sloane, 11e édition North-Holland, 2003
- Information and Coding Theory, G. A. Jones and J. M. Jones, Springer, 2000
- Introduction to coding theory, R. M. Roth, Cambridge University Press, 2006
- Coding theory and cryptography, the essentials, 2nd édition, D.R. Hankerson, D.G Hoffman, et al, Marcel Dekker, 2000
- Fundamentals of error-correcting codes, W. C. Huffman et V. Pless, Cambridge University Press, 2003

Généralités

Problématique

Message $\rightarrow$ Encodeur $\rightarrow$ Message encodé $\rightarrow$ Canal $\rightarrow$ Message reçu $\rightarrow$ Message décodé

Problème : lors de la transmission via le canal, des erreurs peuvent s'être introduites (communications satellites, CD/DVD, modems, etc).

Un message $\mathcal{M}$ sera une suite de k bits.

Idée : ajouter de la redondance permet de pallier des erreurs (détection/correction).

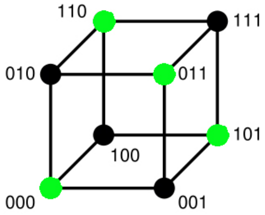
Modélisation du problème

L'information à transmettre peut être vue comme une suite de symboles pris dans un ensemble fini.

- un alphabet $\mathcal{A}$ est un ensemble fini de symboles (typiquement $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$ ou $\mathcal{A} = \mathbb{F}_q$ corps fini de cardinalité $q = p^r$ avec p premier).
- Un message ou un mot est une suite à valeur dans un alphabet, il correspond à une suite de lettres.
- possibilité de modification (pas d'effacement) de symboles lors de la transmission.
- on traite l'information bloc par bloc (code en bloc).

Détection d'erreur par ajout de redondance : Le bit de parité

Sur un paquet de k bits, on ajoute un bit de parité de sorte que la somme des $k+1$ bits envoyés soit paire. On détecte une erreur sur $k+1$ bits envoyés.



Exemple : $|10| \rightarrow |101|$

$\rightsquigarrow$ permet de détecter une erreur mais pas de corriger $\Rightarrow$ on a vraiment besoin d'une distance

Définition de codes

Définition 1

Un code correcteur $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{F}_q$ de longueur n est un sous-ensemble de $\mathbb{F}_q^n$. Les éléments de $\mathcal{C}$ sont appelés des mots.

Problématique : On envoie un mot $c \in \mathcal{C}$ mais le mot reçu r n'appartient pas à $\mathcal{C}$; on va chercher à le décoder.

2 idées :

1. Doter $\mathbb{F}_q^n$ d'une structure d'espace métrique (on se donne une distance) $\rightsquigarrow$ trouver un mot c' de $\mathcal{C}$ t.q. sa distance à r est exactement la distance de r à $\mathcal{C}$;
   Principe de vraisemblance
2. Construire les codes correcteurs en les dotant de propriétés supplémentaires (algébriques)

Définition de codes

Définition 1

Un code correcteur $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{F}_q$ de longueur n est un sous-ensemble de $\mathbb{F}_q^n$. Les éléments de $\mathcal{C}$ sont appelés des mots.

Problématique : On envoie un mot $c \in \mathcal{C}$ mais le mot reçu r n'appartient pas à $\mathcal{C}$; on va chercher à le décoder.

2 idées :

1. Doter $\mathbb{F}_q^n$ d'une structure d'espace métrique (on se donne une distance) $\rightsquigarrow$ trouver un mot c' de $\mathcal{C}$ t.q. sa distance à r est exactement la distance de r à $\mathcal{C}$;
   Principe de vraisemblance
2. Construire les codes correcteurs en les dotant de propriétés supplémentaires (algébriques)

Définition de codes

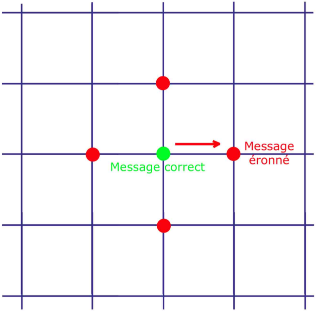
Définition 1

Un code correcteur $\mathcal{C}$ *sur* $\mathbb{F}_q$ *de* longueur n *est un sous-ensemble de* $\mathbb{F}_q^n$*. Les éléments de* $\mathcal{C}$ *sont appelés des* mots*.*

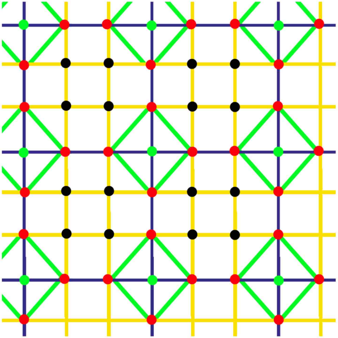
Problématique : On envoie un mot $c \in \mathcal{C}$ mais le mot reçu r n'appartient pas à $\mathcal{C}$; on va chercher à le décoder.
2 idées :

1. Doter $\mathbb{F}_q^n$ d'une structure d'espace métrique (on se donne une distance) $\leadsto$ trouver un mot c' de $\mathcal{C}$ t.q. sa distance à r est exactement la distance de r à $\mathcal{C}$;
   Principe de vraisemblance
2. Construire les codes correcteurs en les dotant de propriétés supplémentaires (algébriques)

Principe des codes correcteurs



Code sans redondance



Code correcteur

Distance de Hamming

Définition 2

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini de symboles ($\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$ ou $\mathcal{A}$ un corps fini).

- *La distance de Hamming de deux mots $x = x_1 \cdots x_n$ et $y = y_1 \cdots y_n$ de $\mathcal{A}^n$ est le nombre de lettres qui diffèrent entre x et y, i.e.*

$$d_H(x, y) = \mathrm{card}\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid x_i \neq y_i\}$$

- *Le poids de Hamming de x est $w_H(x) = d_H(x, \mathbf{0}_n)$.*

Richard Wesley Hamming
1915 - 1998

Distance de Hamming (suite)

La distance de Hamming mesure le nombre d'erreurs entre un vecteur u envoyé et un vecteur v réceptionné.

Propriété 1

La distance de Hamming est une distance, c'est-à-dire,

- $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Boule de Hamming

Définition 3

La boule (fermée) de centre $c \in \mathcal{A}^n$ *et de rayon* r *est définie par*

$$B_H(c, r) = \{u \in \mathcal{A}^n, d_H(c, u) \leq r\}.$$

On note :

$$V_r(c) = \mathrm{card}(B_H(c, r)).$$

Propriété 2

Si $q = \mathrm{card}(\mathcal{A})$ *alors*

$$V_r(c) = \sum_{i=0}^{r} C_n^i (q-1)^i.$$

Code correcteur d'erreurs

Définition 4

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini de symboles ($\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$ ou A un corps fini).

- *Un code (correcteur d'erreur) en bloc de longueur n est un sous-espace métrique non vide de $\mathcal{A}^n$.*
- *La distance d'un mot $u \in \mathcal{A}^n$ à un code $\mathcal{C}$ est*

$$d_H(u, \mathcal{C}) = \min_{c \in \mathcal{C}} d_H(u, c).$$

- *La distance minimale d'un code $\mathcal{C}$ est*

$$d_H(\mathcal{C}) = \min_{u,v \in \mathcal{C}, u \neq v} d_H(u, v).$$

Décodage

Définition 5

Un algorithme de décodage d'un code $\mathcal{C}$ est une procédure qui à tout élément de $\mathcal{A}^n$ associe un mot de $\mathcal{C}$ ou échoue (symbole ∞),

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathcal{A}^n & \rightarrow & \mathcal{C} \cup \infty \\ & c & \mapsto & \phi(c) \end{array}$$

Définition 6

Un algorithme de décodage de $\mathcal{C}$ est dit à vraisemblance maximale si pour tout $y \in \mathcal{A}^n$, le mot $x = \phi(y) \in \mathcal{C}$ est dans et réalise le maximum de la probabilité $P(x \text{ "émis"} \mid y \text{ "reçu"})$.

Distance minimale et décodage

Soit $\mathcal{C}$ un code de distance minimale d.

- Deux boules de rayon $(d-1)/2$ centrées en deux mots de code distincts sont disjointes.
  $\Rightarrow$ un code de distance minimale d peut corriger $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ erreurs
- Toute boule de rayon $d-1$ centrée en un mot de code ne contient aucun autre mot de code.
  $\Rightarrow$ un code de distance minimale d peut détecter $d-1$ erreurs

On dit que le code est $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$-correcteur et $d-1$-détecteur.

Capacité de correction

Définition 7

Soit $\mathcal{C}$ un code sur $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ de cardinal q). La capacité de correction de $\mathcal{C}$ est le plus grand entier t pour lequel toutes les boules fermées de rayon t centrées sur les mots de code sont disjointes.

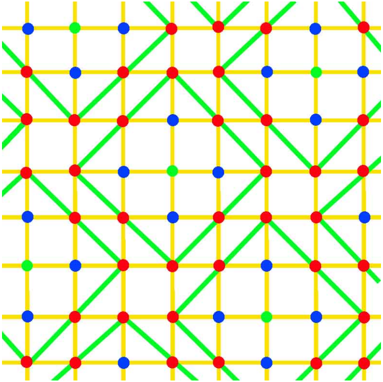
Nous avons la majoration :

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} V_t(c) \leq q^n$$

Le code est parfait si nous avons l'égalité, i.e. :

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} V_t(c) = q^n$$

Illustration d'un code parfait



Définition 8 (Codes linéaires)

Un code linéaire $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{F}_q$ de longueur n et de dimension k est un sous-espace vectoriel de dimension k.

$\rightsquigarrow$ algèbre linéaire pour coder/corriger/décoder.

Propriété 3

La distance minimale d'un code linéaire $\mathcal{C}$ est le poids minimum des mots de $\mathcal{C}$ distincts de l'origine.

Les questions d'efficacité et de complexité sont ici essentielles !

Codes linéaires

Définition 8 (Codes linéaires)

Un code linéaire $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{F}_q$ de longueur n et de dimension k est un sous-espace vectoriel de dimension k.

$\rightsquigarrow$ algèbre linéaire pour coder/corriger/décoder.

Propriété 3

La distance minimale d'un code linéaire $\mathcal{C}$ est le poids minimum des mots de $\mathcal{C}$ distincts de l'origine.

Les questions d'efficacité et de complexité sont ici essentielles !

Code linéaire

Définition 9

L'alphabet est un corps fini $\mathcal{A} = \mathbb{F}_q$. L'espace de Hamming $\mathcal{A}^n$ est un espace vectoriel.

- *Un code linéaire $\mathcal{C}$ de longueur n sur $\mathbb{F}_q$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_q^n$*
- *La dimension d'un code $\mathcal{C}$ est sa dimension en tant que sous espace vectoriel de $\mathbb{F}_q^n$ ($\mathbb{F}_q^n$ est un espace vectoriel)*
- *Si k est la dimension de $\mathcal{C}$, son taux d'information est k/n*

Nous parlerons de code $[n; k]_q$ si le code est de dimension k et de code $[n; k; d]_q$ si sa distance minimale est d.

Matrice génératrice

Définition 10

Soit $\mathcal{C}$ un code $[n;k]_q$. Il existe une matrice $G \in \mathbb{F}_q^{k\times n}$ dont les k lignes sont les vecteurs d'une base de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{F}_q^n$. Ainsi :

$$\mathcal{C} = \{u \cdot G \mid u \in \mathbb{F}_q^k\}$$

La matrice G est appelée matrice génératrice de $\mathcal{C}$.

Cette matrice est de rang k (par définition).

Si $m \in \mathbb{F}_q^k$, mG est un mot de $\mathcal{C}$. L'application $m \to mG$ est un isomorphisme de $\mathbb{F}_q^k$ sur $\mathcal{C}$.

Mise sous forme systématique

La matrice génératrice est sous forme systématique si

$$G = [I_k \mid M],$$

avec I_k est l'identité de $\mathbb{F}_q^{k \times k}$ et $M \in \mathbb{F}_q^{k \times (n-k)}$ (cette dernière matrice contient l'information redondante).

Propriété 4

Tout code linéaire peut être mis sous forme systématique.

Exemple du bit de parité :

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$. On transmet 3 bits d'information avec 1 bit de parité paire. C'est un code linéaire de matrice génératrice :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le beurre et l'argent du beurre ?

Peut-on avoir une capacité de correction importante (corrélée à d) et un nombre de mots important (corrélé à la dimension k) ?

Propriété 5 (Borne de Singleton)

$d + k \leq n + 1$

Matrice de contrôle

Définition 11 (Code dual)

Soit $\mathcal{C}$ un code $[n; k]_q$. Le code dual $\mathcal{C}^\perp$ de $\mathcal{C}$ est l'ensemble des vecteurs $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}_q^n$ tels que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{C}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = 0.$$

Le code dual $\mathcal{C}^\perp$ a pour dimension $\dim(\mathcal{C}^\perp) = n - \dim(\mathcal{C})$.

Nous pouvons donc définir une matrice $H \in \mathbb{F}_q^{(n-k)\times n}$ dont les $n-k$ lignes sont les vecteurs d'une base de $\mathcal{C}^\perp$ sur $\mathbb{F}_q^n$

$$\mathcal{C}^\perp = \{u \cdot H \mid u \in \mathbb{F}_q^{n-k}\}$$

La matrice H est appelée matrice de contrôle de $\mathcal{C}$.

Matrice de contrôle (suite)

Théorème 1

Soit $\mathcal{C}$ un code $[n; k]_q$, G une matrice génératrice et H une matrice de contrôle. Alors on a

$$GH^T = 0.$$

Les lignes de H forment une base du noyau de G.

Propriétés des codes linéaires

Propriété 6

Soit $\mathcal{C}$ un code $[n; k; d]_q$. Nous avons

- $$\min_{\{u,v\in\mathcal{C}:u\neq v\}}(d_H(u,v)) = \min_{\{u\in\mathcal{C}:u\neq 0\}}(w_H(u))$$
- *Soit H la matrice de contrôle de C*

  $$d = \min\{s \in \mathbb{N}^* : \exists s \textit{ colonnes de } H \textit{ linéairement dépendantes}\}$$
- *Borne de Singleton* : $d \leq n - k + 1$.

Forme systématique

Définition 12

Un code est sous forme systématique si les bits d'information sont au début des mots.

Propriété 7

Soit $\mathcal{C}$ *un code* $[n; k]_q$ *sous forme systématique. La matrice génératrice* G *s'écrit alors sous la forme*

$$G = [I_k \mid M],$$

avec I_k *l'identité sur* $\mathbb{F}_q^{k\times k}$ *et* $M \in \mathbb{F}_q^{k\times(n-k)}$.

Théorème 2

Soit $\mathcal{C}$ *un code sous forme systématique de matrice génératrice* $G = [I_k \mid M]$. *Alors on peut choisir une matrice de contrôle* H *sous la forme*

$$H = [-M^T | I_{n-k}]$$

Équivalence de codes

Définition 13

Deux codes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de longueur n sont équivalents si on obtient $\mathcal{C}'$ à partir de $\mathcal{C}$ en réordonnant les vecteurs de base de $\mathbb{F}_q^n$.

Théorème 3

Tout code est équivalent à un code sous forme systématique.

Syndrome

Définition 14

Soit $\mathcal{C}$ un code $[n; k]_q$ et $H \in \mathbb{F}_q^{(n-k)\times n}$ sa matrice de contrôle. Le syndrome d'un mot $x \in \mathbb{F}_q^n$ est le mot de longueur $n-k$

$$s = x \cdot H^T.$$

Nous avons

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{F}_q^n \mid x \cdot H^T = 0\}$$

Les mots du code sont donc les mots dont le syndrome est nul.
Le syndrome définit un isomorphisme du quotient $\mathbb{F}_q^n/\mathcal{C}$ sur $\mathbb{F}_q^{n-k}$.
Principe du décodage : *Si un syndrome est non nul, on corrige le mot reçu r en appliquant le principe de vraisemblance : on soustrait à r un mot de poids minimum dans sa classe modulo $\mathcal{C}$ (i.e. un mot de poids minimum ayant même syndrome que r).*

Décodage par syndrome

Décode par syndrome

Soit $\mathcal{C}$ un code $[n; k; d]_q$, et $H \in \mathbb{F}_q^{(n-k)\times k}$ une matrice de contrôle. On transmet $c = u + e$, avec $u \in \mathcal{C}$ et une erreur $e \in \mathbb{F}_q^n$

- On calcule

$$s = c \cdot H^T = u \cdot H^T + e \cdot H^T = e \cdot H^T.$$

- On cherche ensuite $e' \in \mathbb{F}_q^n$ de poids minimum tel que :

$$s = e' \cdot H^T.$$

- On décode $c - e' \in \mathcal{C}$. Nous avons $c - e' = u$, si $w_H(e) \leq t$, avec t la capacité de correction du code.

Décode par syndrome

- Calculer les syndromes s_i des mots e_i de poids inférieurs à la capacité de correction t du code.
- On les stocke dans une table d'association $[(s_i, e_i)]_{i=1}^{i=t}$, les syndromes corrigeables.
- Si on reçoit un mot $c \in \mathbb{F}_q^n$ de syndrome $s = c \cdot H^T$ non nul, il faut regarder si s est corrigeable.
- soit $s \in \mathbb{F}_q^{n-k}$ un syndrome corrigeable et $e \in \mathbb{F}_q^n$ le mot de poids minimum produisant s. Décoder $c = u - e$.

Complexité du décodage : exponentielle en n (c'est trop !)

Conclusion

- Nous avons vu les codes linéaires
- Une famille importante de codes linéaires est la famille des codes cycliques