Kreu 11

ELEMENTE TË TEORISË SË GRAFEVE

Teoria e grafeve është shumë e aplikueshme, meqë shumë thjeshtë i modelojmë problemet komplekse, siç janë vendosja e rrugëve dhe udhëkryqeve, vendosja e rrjeteve të energjisë elektrike, rrjetet kompjuterike, etj. Kështu, shumë struktura diskrete që hasen në informatikë me lehtësi mund të përshkruhen me ndihmën e grafeve.

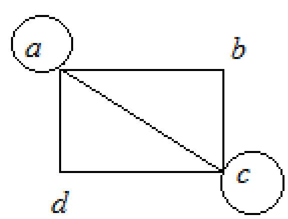
Problemi i parë dhe zgjidhja e tij në një mënyrë më ndryshe nga zgjidhjet e zakonshme, që mund të konsiderohet edhe pararendësi i teorisë së grafeve është punimi i Leonard Euler-it i quajtur Shtatë Urat e Kenigsberg-ut, botuar në 1736.

11.1. Kuptimi dhe shembuj

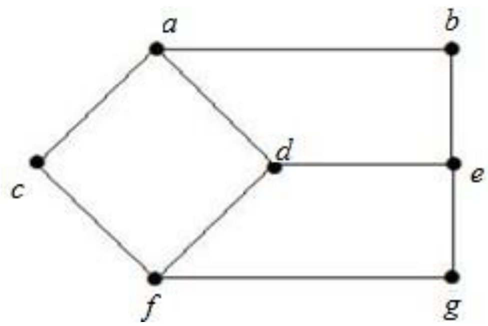
Përkufizim 11.1.1. Struktura $G=(V(G), E(G))$, ku $V(G)$ është bashkësi e fundme joboshe kulmesh, ndërsa $E(G)$ është bashkësi e fundme brinjësh quhet *graf*.

Shembull 11.1.1. Le të jenë dhënë $V=\{a,b,c,d\}$ dhe $E=\{aa,ab,ac,bc, cc, cd,ad\}$. Të vizatohet grafi $G=(V,E)$.

*Zgjidhje.*Veprojmë sipas të dhënave që kemi dhe marrim:



Shembull 11.1.2. Është dhënë grafi G . Të caktohen V dhe E?



Zgjidhje. $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $E=\{ab,ac,ad,be,ed,eg,df,fg,fc\}$.

Sqarim: Te teoria e grafeve kemi liri në shënimin e kulmeve, pra mundemi ti shënojmë me shkronja të mëdha, shkronja të vogëla, me numra etj.

Përkufizim 11.1.2. Brinja e llojit A_iA_i quhet *lak (loop.)*

Përkufizim 11.1.3. Dy grafe $G_1=(V_1, E_1)$ dhe $G_2=(V_2, E_2)$ quhen izomorfe, nëse ekzison pasqyrimi bijektiv f: $V_1 \to V_2$, ashtu që brinja $f(v)f(w)$ në G_2 ekziston, vetëm kur ekziston brinja vw në G_1.

Shembull 11.1.3.Të tregohet se grafet e mëposhtme janë izomorfe

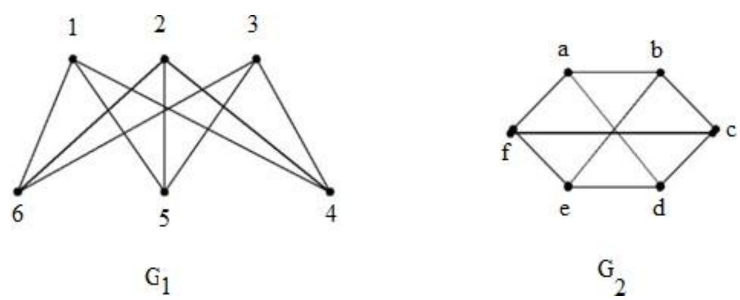


Fig.11.1.1. Grafe izomorfe

Zgjidhje. Në fillim shohim se bashkësitë e kulmeve janë ekuipotente, pra $|V_1|=|V_2|$.

Ndërtojmë pasqyrimin f: $V_1 \to V_2$ si : $f(1) = a$; $f(2) = c$; $f(3) = e$; $f(4) = b$; $f(5) = d$; $f(6) = f$.

Pra, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & c & e & b & d & f \end{pmatrix}$ është një permutacion dhe meqë permutacionet janë pasqyrime bijektive, atëherë $G_1 \cong G_2$.

Përkufizim 11.1.4.

- Kulmet e një brinje quhen skaje të saj;
- Dy kulme quhen fqinje nëse ekziston brinja e përbashkët që i lidh ato;
- Dy brinjë quhen incidente nëse kanë kulm të përbashkët;
- Grafi quhet i thjeshtë nëse nuk ka laqe;
- Grafi që ka kulme, por që nuk ka brinjë quhet graf bosh.

Përkufizim 11.1.5 Nëngraf të grafit *G*, quajmë grafin *H*, çdo kulm i të cilit i takon *V*(*G*) dhe çdo brinjë e të cilit i takon *E*(*G*).Pra $V(H) \subseteq V(G)$ dhe $E(H) \subseteq E(G)$. Shënojmë $H \leq G$

Shembull 11.1.4. Në figurën e mëposhtme janë paraqitur dy grafe. Vërejmë që $G_1 \leq G_2$.

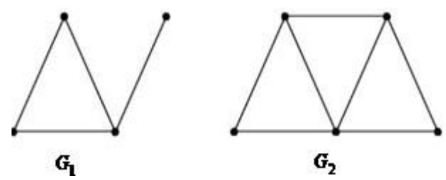


Fig.11.1.2. Nëngrafi $G_1 \leq G_2$

11.2. Emërtimi i grafeve

Deri më tani kemi punuar vetëm me grafe të emërtuara, pra grafi quhet i emërtuar nëse i ka të gjitha kulmet të emërtuar (të shënuar me ndonjë simbol). Por, në shumë raste emërtimi i kulmeve nuk është i nevojshëm, prandaj emërtimin e largojmë në tërësi. Grafi i fituar në këtë rast quhet *graf i paemërtuar*.

Tani lind problemi i iyomorfizmit të grafeve të paemërtuara, prandaj shtrohet pyetja:

- Kur dy grafe të paemërtuara janë izomorfe?

Përgjigje: Dy grafe të paemërtuara janë izomorfe, nëse ekziston mundësia e emërtimit të kulmeve, ashtu që grafet e fituara të emërtuara të jenë izomorfe. Pra, patjetër duhet të emërtohen kulmet dhe pastaj të shqyrtohet izomorfizmi.

Dallimi në mes të grafeve të emërtuara dhe të paemërtuara bëhet i qartë nëse provojmë t'i vizatojmë ato.

Shembull 11.2.1. Të vizatohen të gjitha grafet e thjeshta me tre kulme

a) të emërtuara;
b) të paemërtuarë.

Zgjidhje.

a) Grafet e emërtuara

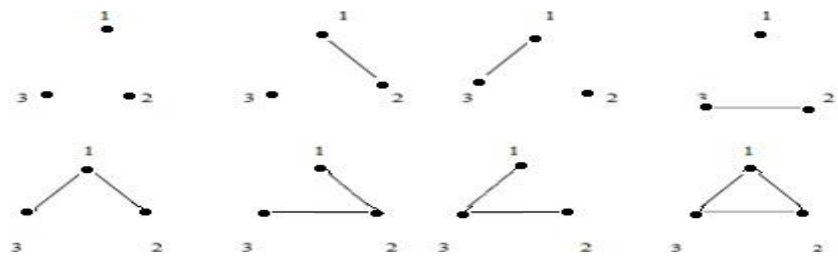


Fig.11.2.1. Grafe të thjeshta me tre kulme të emërtuara

b) Grafet e paemërtuara

Fig.11.2.2. Grafe të thjeshta me tre kulme të paemërtuara

11.3. Orientimi i grafeve

Përkufizim 11.3.1. Grafi G=(V, E) quhet i *paorientuar* nëse për çdo brinjë $(u,v)\in E$, rrjedh që edhe $(v, u)\in E$ për çdo $u,v \in V$. Në rast të kundërt, grafi quhet i *orientuar*.

Shembull 11.3.1.

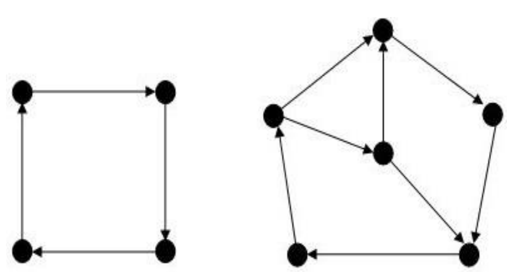


Fig.11.3.1 Grafe të orientuar

Grafi i orientuar, ku të gjitha brinjët janë të orientuara me shigjeta

Ndërsa te grafi i paorientuar, të gjitha brinjët janë të paorientuara, pra merren dykahëshe dhe nuk shënohen me shigjeta

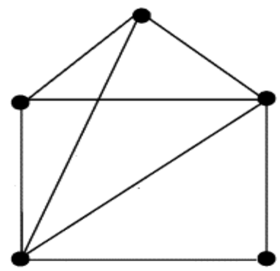


Fig.11.3.2. Graf i paorientuar

11.4. Disa lloje grafesh

Përkufizim 11.4.1. Grafin *G* te i cili ekzistojnë të paktën dy kulme *a* dhe *b* të cilët janë të lidhur me më shumë se një brinjë quhet *multigraf*.

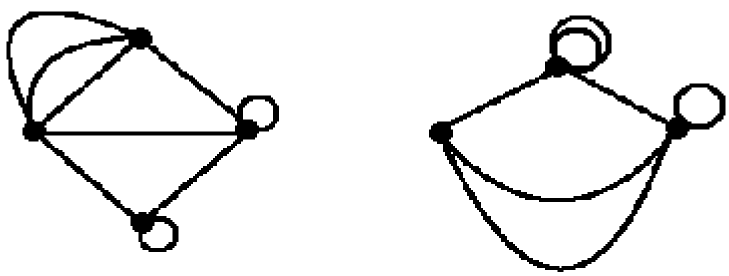


Fig.11.4.1. Multigrafe

Përkufizim 11.4.2. Graf *komplet* quajmë grafin te i cili të gjitha kulmet janë të lidhura me brinjë midis veti.

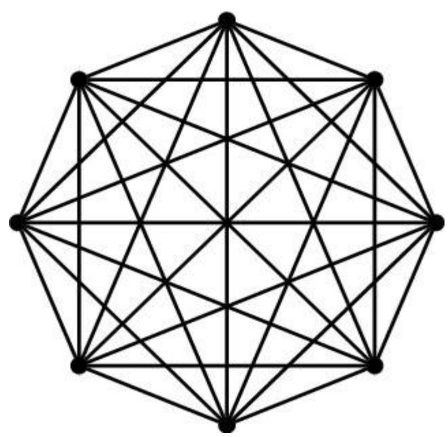


Fig.11.4.2. Graf komplet

Përkufizim 11.4.3. Grafi *komplet* me $n \geq 3$ kulme quhet graf i Hamiltonit.

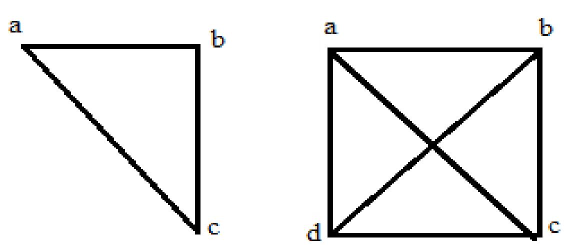


Fig.11.4.3. Grafe komplet hamiltoniane

Përkufizim 11.4.4. Grafi *G* quhet *planar* nëse mundet të paraqitet në rrafsh dhe brinjët e tij të mos priten.

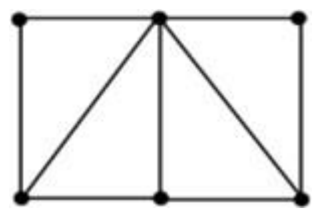


Fig.11.4.3. Graf planar

Përkufizim 11.4.5._ Vargu i kulmeve p_0, p_1, ..., p_m quhet *rrugë* në *G*, nëse për çdo $k \in \{1,...,n\}$, vlen $(p_{k-1}, p_k) \in E$.

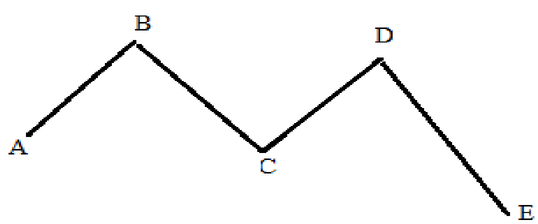


Fig.11.4.4. Rrugë

Përkufizim 11.4.6. Cikël apo kontur quajmë grafin që fitohet nga rruga me shtimin e një brinje që lidh skajet e saj.

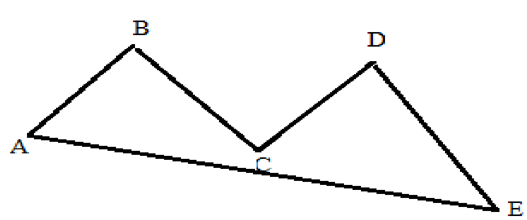
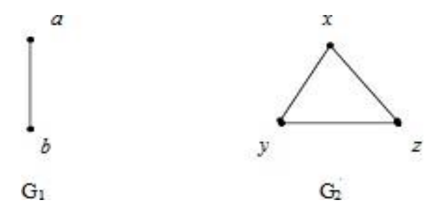


Fig.11.4.5. Cikël

11.5. Lidhëshmëria e grafeve. Vargu i shkallëve të kulmeve

Përkufizim 11.5.1. Le të jenë dhënë grafet $G_1 = (V_1, E_1)$ *dhe* $G_2 = (V_2, E_2)$, ku $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ (janë disnjukte). Grafi $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$, ku $V = V_1 \cup V_2$ dhe $E = E_1 \cup E_2$, quhet union i grafeve G_1 dhe G_2.

Shembull 11.5.1. Le të jetë dhënë grafet G_1 me $V_1= \{a, b\}$, $E_1= \{ab\}$ dhe G_2 me $V_2=\{x,y,z\}$, $E_2 = \{xy, xz, yz\}$. Pra,



Atëherë $G_1 \cup G_2$ është : $V(G_1 \cup G_2) = \{a, b, x, y, z\}$; $E(G_1 \cup G_2) = \{ab, xy, xz, yz\}$, apo:

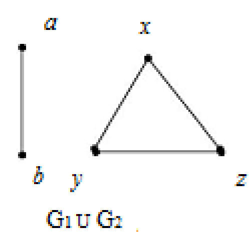


Fig.11.5.1. Grafe të palidhura

Përkufizim 11.5.2. Grafi quhet i lidhur, nëse nuk mund të shprehet si union i dy grafeve. Në rast të kundër themi se është i palidhur.

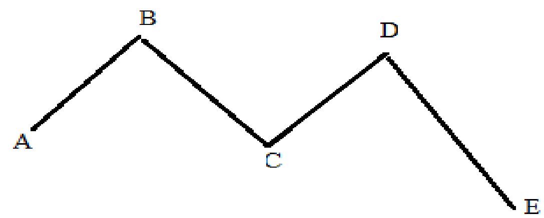
Është e qartë se çdo graf i palidhur G, mund të shprehet si union i grafeve të lidhur dhe secili graf në këtë rast është komponentë e G-së.

Përkufizim 11.5.3. Shkallë të kulmit v të grafit G quajmë numrin i brinjëve incidente (takuese) në *v*. Shënojmë *deg* v.

Përkufizim 11.5.4.

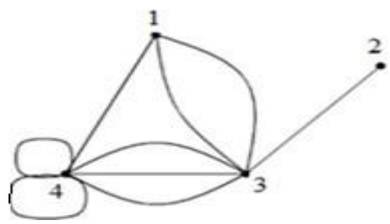
- deg $(A_iA_i)=2$, pra laku (*loop*) në *v* kontribuon 2 herë (e jo 1) në shkallën e *v*.
- Kulmi me shkallë 0 quhet *kulmi i izoluar*
- Kulmi me shkallë 1 quhet *kulmi i skajit*

Shqyrtojmë shkallët e kulmeve në grafet vijues:



sh^oA=1, sh^oB=2, sh^oC=2, sh^oD=2, sh^oE=1.

Ndërsa për grafin:



Kemi: sh^o1=3, sh^o2=1, sh^o3=6, sh^o4=8.

Përkufizim 11.5.5. *Varg të shkallëve* të grafit quajmë vargun jozvogëlues të përbërë nga shkallët e kulmeve, duke i shënuar edhe shkallët që përsëriten.

Përkufizim 11.5.6. Grafi ku të gjitha lulmet kanë shkallë të njëjtë quht graf i rregullt.

Përkufizim 11.5.7. Grafi i rregullt, ku kulmet kanë shkallë çift quhet graf i Eulerit.

Shembull 11.5.2. Vargu i shkallëve të grafeve të mësipërm është përkatësisht:

1,1,2,2,2 dhe 1,3,6,8.

Nga vargjet e shkallëve, vërejmë këto veti:

- Shuma e shkallëve në vargun e shkallëve është gjithmonë numër çift;
- Kjo shumë është sa dyfishi i birnjëve që ka grafi.

Këto rezultate janë dhënë nga Euleri në vitin 1736, dhe njihet si "lema e duarështërngimeve":

Teoremë 11.5.1 (Lema e duarështërngimeve). Në çdo graf G, shuma e shkallëve të të gjitha kulmeve është

$$\sum_{v \in G} \deg v = 0(\bmod 2) .$$

*Vërtetim***.** Mundemi të vërtetojmë edhe direkt barazimin:

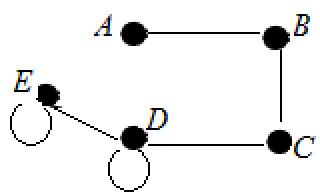
$$\sum_{v\in G}\deg v = 2\cdot|E(G)|$$

Por, ne do ta vërtetojmë atë duke numëruar të gjitha "incidencat" e grafit, d.m.th. gjithsej

$\{(v,e)|v\in V(G),\ e\in E(G),\ v\in e\}$ në dy mënyra. Nëse fillojmë nga kulmet, për secilin kulm kemi aq incidenca sa është shkalla kulmit në fjalë. Duke u nisur tani nga brinjët, shohim se çdo brinjë ka "dy skaje", d.m.th. është nënbashkësi me dy elemente, kështu që në përgjithësi kemi $2\cdot|E(G)|$ incidenca. Kështu, ne e kemi vërtetuar barazimin e kërkuar. Meqenëse ana e djathtë është shumëfish i numrit 2, i tillë duhet të jetë gjithashtu edhe ana e majtë, gjë që vërteton saktësisht lemën.

Shembull 11.5.3. Është dhënë vargu i shkallëve 1,2,2,3,4. Të vizatohet grafi G.

*Zgjidhje***.** Nga vargu i shkallëve 1,2,2,3,4, vërejmë se grafi ka 5 kulme dhe 6 brinjë.



Pra, sh^{o}A=1, sh^{o}B=2, sh^{o}C=2, sh^{o}D=4, sh^{o}E=3.