Bütünleme Sınavı Soru ve Cevap Kağıdı				1. S	2. S	3. S	4. S	Toplam
Adı Soyadı								
Numarası		Grup no						
Bölümü						Tarih	12.06.2019	
Dersin Adı	MAT1320 LİNEER CEBİR		Süre	80 dk.		Sınıf		
Öğretim Üyesi				İmza				

S1) $\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ kx + 2y - 3z &= -6 \\ 3x + y + kz &= 3 \end{aligned}$ lineer denklem sisteminin hangi $\boldsymbol{k}$ değerleri için

a) Çözümü yoktur?
b) Sonsuz çözümü vardır?
c) Tek çözümü vardır? **[25 p]**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ k & 2 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & k & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[-3S_1+S_3 \to S_3]{-kS_1+S_2 \to S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & k+2 & -2k-3 & -5k-6 \\ 0 & 4 & k-6 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & k-6 & -12 \\ 0 & k+2 & -2k-3 & -5k-6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}S_2 \to S_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{k-6}{4} & -3 \\ 0 & k+2 & -2k-3 & -5k-6 \end{array}\right] \xrightarrow[-(k+2)S_2+S_3 \to S_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{k-6}{4} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{-k(k+4)}{4} & -2k \end{array}\right]$$

(a) $k=-4$ için $\operatorname{rank}A = 2 < 3 = \operatorname{rank}(A \vdots \vec{B})$ olduğundan, çözüm yoktur.

(b) $k=0$ için $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}(A \vdots \vec{B}) = 2 < 3 =$ değişken sayısı, olduğundan sonsuz çözüm vardır.

(c) $k \notin \{-4, 0\}$ için $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}(A \vdots \vec{B}) =$ değişken sayısı $=3$ olduğundan tek çözüm vardır.

S2) $S = \{t^2 + 1,\ t^2 + t,\ t + 1\}$ kümesinin P_2 'yi gerdiğini gösteriniz. [20 p]

P_2 'nin standart taban vektörleri $\{t^2, t, 1\}$ olduğundan $Boy(P_2) = 3$ dür. S'nin vektör sayısı $Boy(P_2)$'ye eşit olduğundan S'nin lineer bağımsız olduğunu göstermek yeterli.

$$c_1(t^2+1) + c_2(t^2+t) + c_3(t+1) = 0$$

$$(c_1+c_2)t^2 + (c_2+c_3)t + c_1 + c_3 = 0$$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

olduğundan S lineer bağımsızdır.

$\langle S \rangle = P_2$ dir.

Scanned by CamScanner

S3) $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektörleri $A = \begin{bmatrix} a & b & -2 \\ c & -1 & 2 \\ d & 2 & e \end{bmatrix}$ matrisinin aynı öz değerine karşılık gelen öz vektörleridir.

a) Buna göre, $\boldsymbol{A}$ matrisini ve verilen öz vektörlerin karşılık geldiği öz değeri bulunuz.

b) $\boldsymbol{A}$ matrisinin diğer öz değerini ve bu öz değere karşılık gelen bir öz vektörü bulunuz. ~~[25 p]~~ [35 p]

(a) $\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ vektörleri A matrisinin λ_1 özdeğerine karşılık gelen öz vektörler olsun. O halde, $A\vec{v_1}=\lambda_1\vec{v_1}$ ve $A\vec{v_2}=\lambda_1\vec{v_2}$ olur.

$$\begin{bmatrix} a & b & -2 \\ c & -1 & 2 \\ d & 2 & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} b-4=0 \Rightarrow \boxed{b=4} \\ -1+4=\lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=3} \\ 2+2e=2\lambda_1=6 \Rightarrow \boxed{e=2} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & -2 \\ c & -1 & 2 \\ d & 2 & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a+2=3 \Rightarrow \boxed{a=1} \\ c-2=0 \Rightarrow \boxed{c=2} \\ d-e=-3 \Rightarrow d-2=-3 \Rightarrow \boxed{d=-1} \end{array}$$

O halde, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $\lambda_1=3$ bulunur.

(b)
$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ -\lambda+3 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & -6 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)\cdot\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -6 & \lambda \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-3)\cdot(\lambda^2+\lambda-12) = (\lambda-3)^2\cdot(\lambda+4)$. O halde, A matrisinin diğer öz değeri $\lambda_2=-4$'tür.

$\lambda_2=-4$ için, $\lambda I - A = 0$ ise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ -5 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[5S_1+S_3 \to S_3]{2S_1+S_2 \to S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & 0 \\ 0 & -14 & -28 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{14}S_3 \to S_3]{-\frac{1}{7}S_2 \to S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[2S_2+S_1 \to S_1]{-S_2+S_3 \to S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1-2x_3=0 \Rightarrow x_1=2x_3$

$x_2+2x_3=0 \Rightarrow x_2=-2x_3$

$x_3=r$

$\begin{bmatrix} 2r \\ -2r \\ r \end{bmatrix}$ vektörü özvektördür. $r=1$ seçersek, $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü $\lambda_2=-4$ öz değerine karşılık gelen bir özvektördür.

S4) P_3 'te $c = 2a - 3b$ olmak üzere $at^2 + bt + c$ biçimindeki tüm vektörlerin W alt uzayı için bir taban bulunuz ve W'nin boyutunu belirleyiniz. **[20p]**

W alt uzayının her vektörü

$at^2 + bt + 2a - 3b$ biçiminde olup

$a(t^2+2) + b(t-3) = 0$ olarak yazılabilir.

t^2+2 ve $t-3$ vektörleri W'yi gerer.

Ayrıca bu iki vektör biri diğerinin katı olmadığından lineer bağımsızdır.

$\{t^2+2, t-3\}$ W'nin bir tabanıdır.

$Boy(W) = 2$ 'dir.

Lineer bağımsızlık için ikinci çözüm

$c_1(t^2+2) + c_2(t-3) = 0$

$c_1t^2 + c_2t + 2c_1 - 3c_2 = 0$

$c_1 = 0$ $c_2 = 0$ dır

$\{t^2+2\}$ ve $\{t-3\}$ lineer bağımsızdır