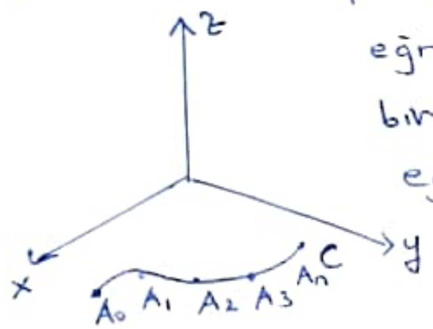
Eğrisel integraller

$f(x,y,z)$ nin $r(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k}$, $a \le t \le b$ seklinde parametrik olarak verilen f in tanım kümesinde yatan bir C eğrisi üzerinde integralini almak istediğimiz reel değerli bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Eğri boyunca f'in aldığı değerler $f(g(t), h(t), k(t))$ bileşke fonksiyonu ile verilir.

Bu bileşkeyi $t=a$ dan $t=b$ ye kadar yay uzunluğuna göre integre edeceğiz.

Tanım, C bir düzgün eğri $P = \{A_0, A_1 \dots A_n\}$ de C nin bir parçalanması olsun. (x_k, y_k, z_k), $A_{k-1}A_k$ eğri parçası üzerinde alınan herhangi bir nokta ve ΔS_k , $A_{k-1}A_k$ eğri parçasının uzunluğu olmak üzere



$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k$$

limiti varsa bu limite fonksiyonun C eğrisi üzerindeki eğrisel integrali denir.

$$\int_C f(x,y,z)\,ds \text{ ile gösterilir.}$$

Yay uzunluğunun parametre özelliği;

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \text{idi} \quad S = \int_a^b \left|\frac{dr}{dt}\right| dt$$

Bu bize yayuzunluğu ile t parametresi arasındaki ilişkiyi verir. Her iki tarafın t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dr}{dt}\right| \text{ elde edilir.} \qquad \left|\frac{dr}{dt}\right| = |\vec{v}|$$

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{v}| \Rightarrow ds = |\vec{v}|\,dt$$

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f\,(g(t), h(t), k(t))\ |\vec{v}|\,dt$$ dir.

Bir eğrisel integral nasıl hesaplanır.

Bir C eğrisi üzerinde sürekli olan $f(x,y,z)$ fonksiyonunu integre etmek için;

1) Cnin düzgün parametrizasyonu bulunur.

$$r(t) = g(t)\,\vec{i} + h(t)\,\vec{j} + k(t)\,\vec{k} \qquad a \le t \le b$$

2) $$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\ |\vec{v}|\,.dt$$

ÖR/ Orjin noktasını $(1,1,1)$ noktasına birleştiren C doğru parçası üzerinden $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ fonksiyonunun integralini bulunuz.

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + t\,\vec{k} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\frac{dr}{dt} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \qquad \left|\frac{dr}{dt}\right| = |\vec{v}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\int_0^1 f(t,t,t).\sqrt{3}\,dt = \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3}\,dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (-3t^2 + 2t)\,dt$$

$$= \sqrt{3}\left[-\frac{\cancel{3}t^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}}\right|_0^1$$

$$\sqrt{3}\,[-1+1] = 0$$

Vektör Alanları

Bir vektör alanı tanım kümesindeki bir noktaya bir vektörü eşleyen bir fonksiyondur.

Uzayda bir vektör alanı

$$F(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k} \text{ dır.}$$

Diferansiyellenebilir bir $f(x,y,z)$ fonksiyonunun gradyent alanı gradyent vektörlerinin alanı olarak tanımlanır.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ÖR/ Uzayın herhangi bir bölgesinde bir (x,y,z) noktasındaki T sıcaklığının aşağıdaki denklemle verildiğini kabul edelim.

$$T = 100 - x^2 - y^2 - z^2$$

$F(x,y,z)$, T nın gradyenti olarak tanımlansın. F vektör alanını bulunuz.

F gradyent alanı,

$$F = \nabla T = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k} \text{ alanıdır.}$$

Uzayın her noktasında, F vektör alanı sıcaklık artışının en yüksek olduğu yönü verir.

Vektör Alanının Eğrisel İntegrali

$F = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$
vektör alanının bileşenleri olduğunu ve C eğrisinin
$\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k}$, $a \le t \le b$ parametrik denklemiyle düzgün bir eğri olduğunu varsayalım.

C eğri üzerindeki her noktada $T = \frac{dr}{ds}$ teğet vektörü eğriye teğet olan hız vektörüdür.

T eğrinin (x,y,z) noktasındaki birim teğet vektör olmak üzere

$$\int_C F \cdot T\, ds = \int_C \left(F \cdot \frac{dr}{ds}\right) ds = \int_C F \cdot dr$$

C; $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k}$ boyunca $F = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ nın eğrisel integralin hesaplanması;

1) F vektör alanını $F(r(t))$ olarak parametrize edilmiş C eğrisi cinsinden ifade ediniz. bunun için F nın $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$, $P(x,y,z)$ skaler bileşenleri yerine r nın $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = k(t)$ bileşenlerini koyun.

2) $\dfrac{dr}{dt}$ türev vektörünü (hız) bul.

3) Eğrisel integrali t, $a \le t \le b$ parametresine göre hesaplayın.

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot \frac{dr}{dt} \cdot dt$$

ÖR/ $F(x,y,z) = z\vec{i} + xy\vec{j} - y^2\vec{k}$ bir vektör alanıdır. $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k}$ $0 \le t \le 1$ olarak tanımlı C eğrisi boyuncadır. $\int_C F \cdot dr$ hesaplayınız.

$$F(r(t)) = \sqrt{t}\,\vec{i} + t^3\vec{j} - t^2\vec{k}$$

$$\frac{dr}{dt} = 2t\,\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{k}$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot \frac{dr}{dt} \cdot dt = \int_0^1 \left(2t^{3/2} + t^3 - \frac{1}{2}t^{3/2}\right)dt = \int_0^1 \left(t^3 + \frac{3}{2}t^{3/2}\right)dt$$

$$= \frac{t^4}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}t^{5/2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{17}{20}$$

xyz- koordinatlarına göre eğrisel integraller

$$\int_C M(x,y,z)\,dx = \int_a^b M(g(t), h(t), k(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

$$\int_C N(x,y,z)\,dy = \int_a^b N(g(t), h(t), k(t))\; h'(t)\,dt$$

$$\int_C P(x,y,z)\,dz = \int_a^b P(g(t), h(t), k(t))\; k'(t)\,dt$$

$$\int_C M\,dx + \int_C N\,dx + \int_C P\,dz$$

ÖR/ $\int_C -y\,dx + z\,dy + 2x\,dz$ eğrisel integralini $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ $0 \le t \le 2\pi$ hesapla

$$\int_C -y\,dx + z\,dy + 2z\,dz = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + t.\cos t + 2\cos t]\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin^2 t}_{\frac{1-\cos 2t}{2}} + \underbrace{2\cos t}_{2\sin t} + \underbrace{t\cos t}_{\substack{\text{kısmi int} \\ t=u \\ dt=du \\ \cos t\,dt = dv \\ \sin t = v}})\,dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + 2\sin t + t\sin t + \cos t\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \pi - 0 + 0 + 0 + \cancel{1} - 0 - 0 + 0 - \cancel{1}$$

$$= \pi$$

ÖR/ $\int_C (x^2-y^2)\,ds$ integralini $C;\ r(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}$

$0\le t\le 2$ eğri parçası üzerinde hesaplayalım.

$\vec{r}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}$

$\dfrac{dr}{dt}=-a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}$

$\left|\dfrac{dr}{dt}\right|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=\sqrt{a^2(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1})}$

$=a$

$\int_C (x^2-y^2)\,ds=\int_0^2 (a^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t)\,a\,dt$

$=a^3\int_0^2 (\cos 2t)\,dt=a^3\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^2$

$=a^3\dfrac{\sin 4}{2}$

ÖR/ $\int_C (xy+y+z)\,ds$ integralini $C;\ r(t)=2t\,\vec{i}+t\,\vec{j}+(2-2t)\vec{k}$

$0\le t\le 1$ eğri parçası üzerinde hesaplayalım.

$\vec{r}(t)=2t\,\vec{i}+t\,\vec{j}+(2-2t)\,\vec{k}$

$\vec{r}\,'(t)=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ $\qquad |r'(t)|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{9}=3$

$\int_0^1 (2t.t+t+(2-2t)\,3\,dt=3\int_0^1(2t^2-t+2)\,dt$

$=\cancel{3}\left[\dfrac{2t^3}{\cancel{3}}-\dfrac{t^2}{2}+2t\right]\Big|_0^1$

$=2-\dfrac{3}{2}+6=8-\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{13}{2}$

ÖR/ Aşağıdaki F alanı ve r eğrisi için

$\int_C F(r)\cdot dr$ integralini hesapla.

$F = x^2\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$ $\qquad r(t) = 3t\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}$

$0 \le t \le 1$

$$F(0,3t,4t) = 12t^2\,\vec{j} + 9t^2\,\vec{k}$$

$$\frac{dr}{dt} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^1 72t^2 = 24t^3 \Big|_0^1 = 24$$

ÖR/ $\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy$ integralini $C:\ y = x^{1/2}$

$0 \le x \le 1$ eğri parçası üzerinde hesapla.

$$x = t \qquad y = \sqrt{t} = t^{1/2}$$

$$r(t) = t\,\vec{i} + t^{1/2}\,\vec{j}$$

$$\int_0^1 \left(2t.t^{1/2} + t^2 \cdot \frac{1}{2} t^{-1/2}\right) dt$$

$$\int_0^1 \left(2t^{3/2} + \frac{1}{2} t^{3/2}\right) dt = \frac{4}{5} t^{5/2} + \frac{1}{5} t^{5/2} \Big|_0^1 = 1$$

t parametresi s yay uzunluğu cinsinden ifade edildiğine göre C eğrisinin r(t) vektör denkleminde s ye bağlı olarak r'(s) şeklinde ifade edilebilir. Bu bu durumda C eğrisinin T teğet birim vektörü doğrudan doğruya

$T = \frac{dr}{ds}$ olarak yazılabilir.

ÖR/ $r(t) = 5\cos t \vec{i} + 5\sin t \vec{j} + \vec{k}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

dairesel helis denklemini s yay uzunluğu cinsinden ifade ediniz. teğet birim vektörü bul (T)

$$\frac{dr}{dt} = -5\sin t \vec{i} + 5\cos t \vec{j}$$

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = |r'(t)| = \sqrt{(-5\sin t)^2 + (5\cos t)^2} = 5$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left|\frac{dr}{dt}\right| dt = \int_0^{2\pi} 5\,dt = 5t\Big|_0^{2\pi} = 10\pi$$

$$t = \frac{s}{5}$$

$S = \int_a^b \left|\frac{dr}{dt}\right| dt \Rightarrow$ t ye göre türev al.

$$\frac{ds}{dt} = \underbrace{\left|\frac{dr}{dt}\right|}_{\text{skaler } k \text{ diyelim.}}$$

$$\frac{ds}{dt} = k \Rightarrow \int ds = \int k\,dt$$

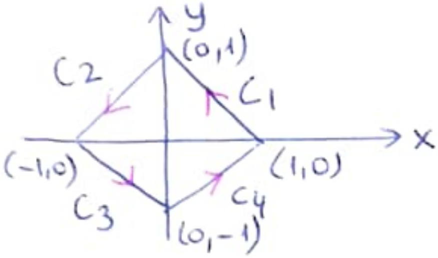
$$s = kt$$

$$t = \frac{s}{k}$$

$$\vec{r}(t) = 5\cos\frac{s}{5}\vec{i} + 5\sin\frac{s}{5}\vec{j} + \vec{k}$$

$$T = \frac{dr}{ds} = -\sin\frac{s}{5}\vec{i} + \cos\frac{s}{5}\vec{j}$$

ÖR/ C eğrisi köşe noktaları $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ ve $(0,-1)$ olan karenin yönü saatin dönme yönünün tersinde olduğuna göre $\int_C (x-y)\,ds$ int hesaplayınız.



$C_1: x+y=1$

$C_2: -x+y=1$

$C_3: -x-y=1$

$C_4: x-y=1$

$$\int_C (x-y)\,ds = \int_{C_1}(x-y)\,ds + \int_{C_2}(x-y)\,ds + \int_{C_3}(x-y)\,ds + \int_{C_4}(x-y)\,ds$$

$$\int_{C_1}(x-y)\,ds = \int_0^1 (x-(1-x))\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 (2x-1)\,dx = 0$$

$$\int_{C_2}(x-y)\,ds = \int_{-1}^{0} (x-(1+x))\sqrt{2}\,dx = -\sqrt{2}\int_{-1}^{0} dx = \sqrt{2}$$

$$\int_{C_3}(x-y)\,ds = \int_{-1}^{0} (x+1+x)\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\int_{-1}^{0}(2x+1)\,dx$$

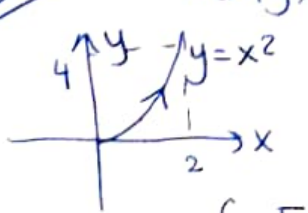
$$= \sqrt{2}\left[x^2+x\right|_{-1}^{0} = -\sqrt{2}\left[1-1\right] = 0$$

$$\int_{C_4}(x-y)\,ds = \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 dx = \sqrt{2}\,x\Big|_0^1 = \sqrt{2}$$

$$\int_C (x-y)\,ds = 0+\sqrt{2}+0+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

ÖR/ C eğrisi $y=x^2$ parabolü boyunca orjinden $(2,4)$ noktasına kadar

1 yol $F(x,y) = x^2y\,\vec{i} + (x^2+y)\,\vec{j}$ nin eğrisel int hesapla



$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ $\qquad x=t$, $y=t^2$

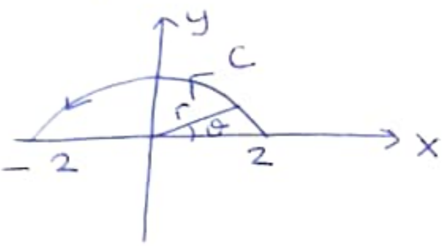
$0 \le t \le 2$ $\qquad \vec{r}\,'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^2 (t^4\vec{i} + 2t^2\vec{j})(\vec{i} + 2t\vec{j})$$

$$= \int_0^2 (t^4 + 4t^3)\,dt = \frac{t^5}{5} + \frac{\cancel{4}t^4}{\cancel{4}}\Big|_0^2$$

$$= \frac{32}{5} + 16 = \frac{32+80}{5} = \frac{112}{5}$$

ÖR/ C, orjin merkezli ve 2 yarıçaplı çemberin üst yarısı boyunca yönü saatin dönme yönünün tersinde olan eğrinin $F(x,y) = x^2\vec{i} + y\vec{j}$ olmak üzere eğrisel integrali hesapla.



$x = 2\cos t$

$y = 2\sin t$

$\vec{r}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}$

$F = 4\cos^2 t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}$

$$\int_C F \cdot r'(t)\,dt = \int_0^{\pi} (4\cos^2 t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j})(-2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j})\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} (-8\cos^2 t\sin t + 4\sin t\cos t)\,dt$$

$$= \frac{8}{3}\cos^3 t + 2\sin^2 t \Big|_0^{\pi} = -\frac{16}{3}$$

$\cos t = u$

$-\sin t\,dt = du$

$-8\int -u^2 \cdot du = 8 \cdot \frac{\cos^3 t}{3}$

2 yol:

$y = x^2 \qquad dy = 2x\,dx \qquad 0 \le x \le 2$

$$\int_C x^2y\,dx + (x^2+y)\,dy = \int_0^2 x^2 \cdot x^2 dx + (x^2+x^2)2x\,dx$$

$$= \int_0^2 (x^4 + 4x^3)\,dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{4x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{112}{5}$$

ÖR/ Orijinden $(1,-1,1)$ noktasına kadar

$F(x,y,z) = (x+y^2)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + xy\vec{k}$

eğrisel integralini

a) Bu iki noktayı birleştiren doğru boyunca

b) $\vec{r}(t) = t\vec{i} - t^2\vec{j} + t^3\vec{k} \quad 0 \le t \le 1$ eğrisi boyunca hesapla

a) $x = t \qquad 0 \le t \le 1$
$y = -t$
$z = t$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 \left[(t+t^2)dt + (t+t)(-dt) + (-t^2)\right] dt$$

$$= \int_0^1 (-t)\,dt = -\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{2}$$

b) $$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 \left[(t+t^4)\vec{i} + (t+t^3)\vec{j} - t^3\vec{k}\right]\left[\vec{i} - 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}\right]dt$$

$$= \int_0^1 \left[(t+t^4) - 2t(t+t^3) - t^3 \cdot 3t^2\right]dt$$

$$= \frac{13}{5}$$