Transfer Functions Theory, Derivation, and Applications

This paper is part of the Engineering and Technology Learning Portfolio, documenting continuous self-study and experimental work.

Mini Research Paper by Altanbaatar Enkhsuld

はじめに

転送関数は、線形時不変（LTI）システムの振る舞いを周波数領域で表現する数学モデルである。
微分方程式をラプラス変換によって代数方程式へと変換することで、入力と出力の関係を簡潔に表現できる。

転送関数は、制御工学、パワーエレクトロニクス、信号処理、機械システム解析において基盤となる概念であり、
モデリング、安定性評価、制御器設計を大幅に簡略化できる。

転送関数の定義

LTI システムに対して、転送関数 $G(s)$ は以下で定義される：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

ここで
- $X(s)$：入力のラプラス変換
- $Y(s)$：出力のラプラス変換
- s：複素周波数変数（$s = \sigma + j\omega$）

初期条件をゼロとすることで、システムの過去状態に依存しない解析が可能となる。

微分方程式からの導出

多くの物理システムは微分方程式で記述される。

例：RC 回路

$$RC\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = v_i(t)$$

ゼロ初期条件でラプラス変換：

$$RCsV_o(s) + V_o(s) = V_i(s)$$

比を解くと：

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

これは一次ローパスフィルタの転送関数である。

一般形

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}$$

- **分子：ゼロ点（zeros）を決定**
- **分母：極（poles）を決定**
- **システム次数：分母の最高次数**

極と零点

Poles（極）

分母が 0 となる s の値：

$$a_n s^n + \cdots + a_0 = 0$$

極は以下に影響する：

- 安定性
- 応答速度
- 減衰特性
- 振動特性

全ての極の実部が負ならシステムは安定。

Zeros（零点）

分子が 0 となる s の値：

$$b_m s^m + \cdots + b_0 = 0$$

零点は周波数応答や位相・過渡特性を shaping する。

一次系の例

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

主要パラメータ：

- 時定数：τ = RC
- 極：$s = -\frac{1}{RC}$

解釈：

- RC が大 → 応答が遅い
- RC が小 → 応答が速い
- 低周波を通し高周波を減衰させる基本的フィルタ

ステップ応答

ステップ入力 $V_{in}(t) = V_0 u(t)$に対して：

$$V_o(t) = V_0(1 - e^{-t/RC})$$

特徴：

- 指数関数的に上昇
- $t \to \infty$で V_0に収束
- 63% 到達時間 ＝RC

極の位置が時間応答を直接決定する。

制御システムでの利用

PI Controller

$$G_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

比例成分と積分成分を持ち、定常偏差除去に効果的。

$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

安定性、感度、ロバスト性の解析に必須。

ブロック線図の演算

1. 直列接続

$$G_{eq}(s) = G_1(s)G_2(s)$$

2. 並列接続

$$G_{eq}(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

3. フィードバック

$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

周波数応答・ボード線図

$$s = j\omega$$

を代入して G(jω) を得る

- 振幅特性
- 位相特性

ボード線図では：

- 帯域幅
- カットオフ周波数
- ゲイン余裕
- 位相余裕
- 共振特性

などを評価できる。

これらは制御器設計・フィルタ設計の中心となる。

安定性解析

安定性は極の位置で決まる。

条件：

$$\mathrm{Re}(s_i) < 0$$

極が右半平面へ入ると：

- 出力が発散
- 閉ループ性能が悪化
- 危険な動作

転送関数は分母多項式から安定性を直接判断できる。

工学分野での応用

転送関数は次の分野で利用される：

- パワーエレクトロニクス（Buck / Boost / Buck-Boost、電流制御・電圧制御）
- モータ制御（トルク制御、速度制御）
- 通信（フィルタ、変調器）
- 信号処理（周波数特性 shaping）
- 機械システム（振動・減衰解析）
- ロボティクス（位置制御、速度制御）

数理的明確性と設計手法との親和性により、広く採用されている。

結論

転送関数は、物理システムの挙動と数学的モデリングを結びつける重要な解析手法である。
ラプラス変換により微分方程式を s 領域の代数式へ変換することで、

- システム動特性
- 安定性
- 周波数応答
- 制御設計

を効率的に解析できる。

極と零点による構造はシステムの基本特性を正確に捉え、
現代制御理論の基盤となっている。