はじめに

本稿では，制御工学および信号処理分野で広く用いられるラプラス変換の基本概念とその応用について概説する。
ラプラス変換は，時間領域で表現された線形動的システムを複素周波数領域へ写像し，微分方程式を代数的な形に変換することで，システム解析を大幅に簡略化する手法である。

このため，ラプラス変換は制御系のモデル化，安定性解析，周波数応答解析，フィードバック設計など，制御理論の基盤となる重要な数学的枠組みとして位置付けられている。

ラプラス変換の定義

時間領域で与えられた関数
f(t) を複素周波数領域の関数
F(s) に対応づける積分変換をラプラス変換と呼ぶ。

ラプラス変換は次式で定義される：

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

ここで s は複素周波数（$s = \sigma + j\omega$）を表し，指数的減衰・増大成分（σ）と振動成分（ω）を同時に取り扱うことができる。

逆ラプラス変換

ラプラス変換によって得られた
F(s) から元の f(t) を復元する操作を逆ラプラス変換という。

一般形は次式で与えられる：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s)e^{st}ds$$

実際の計算では，部分分数分解や既知の変換表を用いて求めることが一般的である。
これにより，システムの時間応答と周波数特性を統一的に記述することが可能となる。

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Function ($\boldsymbol{f}(t)$)	**Laplace Transform ($\boldsymbol{F}(s)$)**
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin wt$	$\frac{\omega}{(s+\omega^2)}$
$\cos wt$	$\frac{s}{(s+\omega^2)}$
$e^{-at}\sin wt$	$\frac{\omega}{((s+a)^2+\omega^2)}$
$e^{-at}\cos wt$	$\frac{(s+a)}{((s+a)^2+\omega^2)}$

基本的な信号とその意味

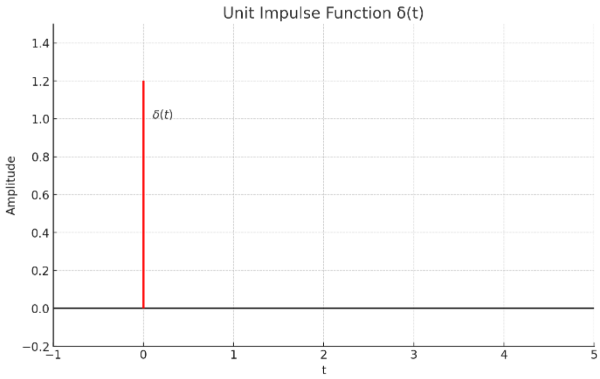
制御工学で頻繁に用いられる代表的な入力信号を以下に示す。

1）インパルス信号

無限に鋭く，単位面積をもつ理想的な入力。

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

システムのインパルス応答を評価する際に用いられる。



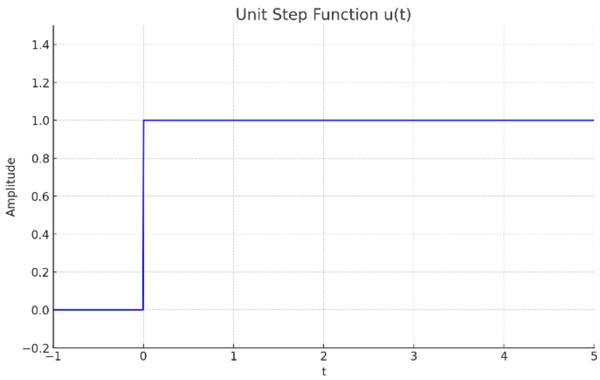
2) ステップ信号

ある時刻で値が急激に立ち上がる入力。

$$u(t) = \{\begin{matrix} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0' \end{matrix}$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

定常特性や過渡応答を確認するための代表的な試験信号。

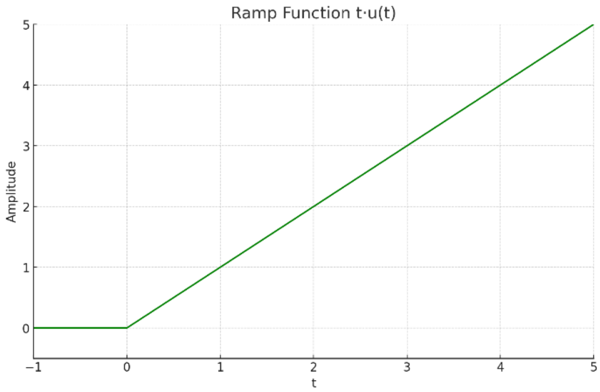


3) ランプ信号

時間に対して線形に増加する入力。

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

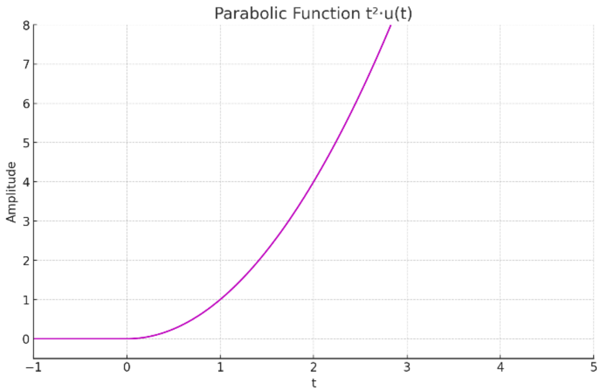
追従性能や低周波帯の特性を評価するのに用いられる。



4） パラボラ入力

加速度的に増加する信号で，高次の追従性能を評価する際に使用される。

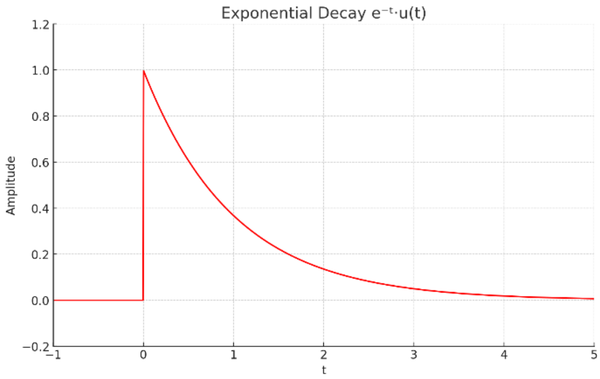
$$\mathcal{L}\{t^2 u(t)\} = \frac{2}{s^3}$$



5） 指数関数入力

RC・RL 回路などの減衰・増大特性を表す典型的な信号。

$$\mathcal{L}\{e^{-bt}\} = \frac{1}{s+b}$$

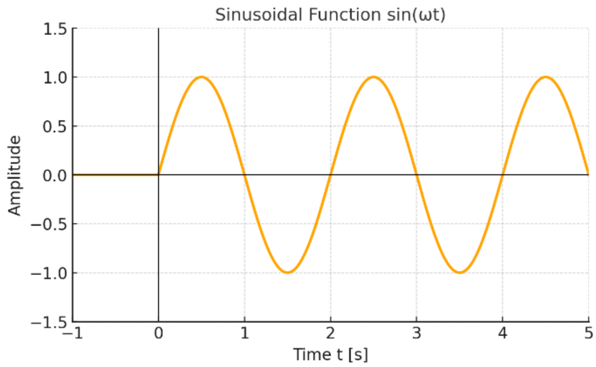


6）正弦波入力

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos\ \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

周波数応答解析，レゾナンス解析に用いられる。



ラプラス変換の基本性質

1）線形性

$$\mathcal{L}\{K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)\} = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s)$$

複数の信号の重ね合わせをそのまま変換できるため，システム解析では不可欠な性質。

2）微分と積分のラプラス変換

時間領域での微分はラプラス領域では s 倍に対応し，

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

積分は 1/s 倍に対応する。

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\{\int_0^t \int_0^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2\, d\tau_1\} = \frac{F(s)}{s^2}$$

これらの性質は制御器の設計，特に PI・PID 制御における数学的表現に直接利用される。

微分方程式の解法としてのラプラス変換

ラプラス変換を用いることで，初期値付きの微分方程式を代数方程式に書き換えられ，
過渡応答・定常応答を体系的に解析することが可能となる。

制御工学で扱う次の概念はすべてラプラス変換に基づく：

- 伝達関数
- 過渡応答
- 定常特性
- 安定性解析
- フィードバック制御設計

この手法により，初期値を含む線形微分方程式を体系的に解くことができる。

結論

ラプラス変換は，時間領域での複雑な動的挙動を複素周波数領域に写像することで，

システムの安定性，過渡応答，定常特性を体系的に評価するための基本的な手法である。

制御系のモデル化，周波数解析，フィードバック制御設計など，

制御工学における多くの解析手法の基盤として不可欠な役割を果たしている。

References

Hiroshi Takeda, Tomoyuki Matsuzaka, Nobuhiro Tomabechi, Introduction to Control Engineering (入門制御工学), Asakura Publishing Co., Ltd., Tokyo, 2000.

Gene F. Franklin, J. Da Powell, Abbas Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, 8th Edition, Pearson, 2019.]

Erickson, R. W., Maksimovic, D., Fundamentals of Power Electronics, 3rd Edition, Springer, 2020.

Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 11th Edition, Wiley, 2019.