

# Laplace Transform and Its Role in Control System Analysis

*This paper is part of the Engineering and Technology Learning Portfolio, documenting continuous self-study and experimental work.*

**Mini Research Paper by Altanbaatar Enkhsuld**

## Оршил

Энэхүү бичвэр нь инженерийн удирдлагын систем, дохиоллын онолд өргөн хэрэглэгддэг Лапласын хувиргалтын үндсэн ойлголт, хэрэглээг тайлбарласан болно. Лапласын хувиргалт нь шугаман динамик системийг дифференциал тэгшитгэлээс алгебрын хэлбэрт шилжүүлж, анализ хийх ажиллагааг хялбарчилдаг тул хяналт-автоматжуулалтын онолын гол аргачлалуудын нэг юм.

Шугаман динамик системийн зан төлөвийг ихэвчлэн дифференциал тэгшитгэлээр илэрхийлдэг. Гэвч эдгээрийг цагийн мужид шууд бодох нь төвөгтэй байдаг. Лапласын хувиргалт нь тухайн тэгшитгэлийг комплекс тоон мужид буулгаж, алгебрын хэлбэрт хөрвүүлснээр системийн тогтвортой байдал, шилжих процесс, тогтмол төлөвийн хариуг илүү ойлгомжтойгоор шинжлэх боломж олгодог.

### Лапласын хувиргалтын тодорхойлолт

Цагийн мужид өгөгдсөн  $f(t)$  функцийг комплекс тоон мужид дүрслэгдсэн  $F(s)$  функц болгон илэрхийлдэг интеграл хувиргалтыг Лапласын хувиргалт гэнэ.

Лапласын хувиргалт дараах байдлаар тодорхойлогдоно:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Энэ томъёо нь  $t \geq 0$  мужид өгөгдсөн сигнал буюу функцыг комплекс давтамжийн муж (s-plane) руу шилжүүлж буй хэлбэр юм.

### Урвуу Лапласын хувиргалт

Өгөгдсөн  $F(s)$  функцээс анхны  $f(t)$  функцийг сэргээх үйлдлийг урвуу Лапласын хувиргалт гэдэг.

Түүний ерөнхий томъёо:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s)e^{st} ds$$

Энэ интеграл нь комплекс хавтгайд явагдах тусгай контур интеграл бөгөөд практикт ихэвчлэн хүснэгт, хэсэгчилсэн бутархай задлал (partial fraction) ашиглан шийддэг.

Товчилсон тэмдэглэгээ:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Энд:

- $\mathcal{L}$ — Лапласын хувиргалт
- $\mathcal{L}^{-1}$ — урвуу Лапласын хувиргалт

**Үндсэн функциуд ба тэдгээрийн хувиргалтууд:**

Function ( $f(t)$ )	Laplace Transform ( $F(s)$ )
1	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$
$\sin wt$	$\frac{\omega}{(s + \omega^2)}$
$\cos wt$	$\frac{s}{(s + \omega^2)}$
$e^{-at} \sin wt$	$\frac{\omega}{((s + a)^2 + \omega^2)}$
$e^{-at} \cos wt$	$\frac{(s + a)}{((s + a)^2 + \omega^2)}$

## Лапласын хувиргалтын гол шинж чанарууд

### (1) Импульсийн функц

Маш богино хугацаанд нөлөөлөх, нэгж талбайтай хурц дохио.

Системийн импульсийн хариу (impulse response)-г тодорхойлоход ашиглагддаг.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

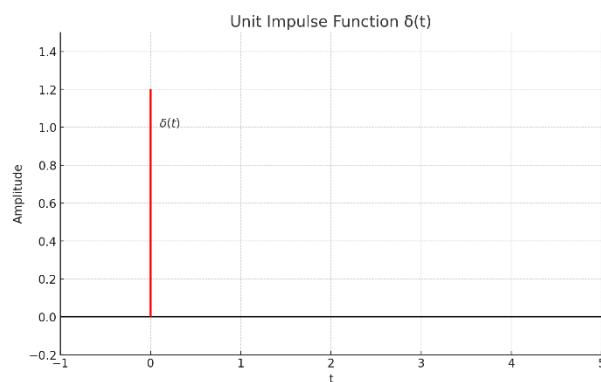


Figure 1 Unit Impulse Function

### (2) Шаталбар функц (Unit Step)

Тодорхой мөчид огцом өсөлттэй оролт. Системийн тогтмол төлөвийн хариу болон шилжих процесийг шинжлэхэд хамгийн өргөн хэрэглэгддэг.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

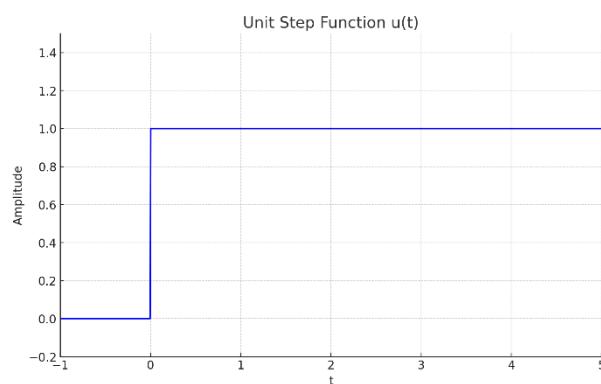


Figure 2 Unit Step Function

### (3) Рамп функц $tu(t)$

Цаг хугацаанд шугаман өсөлттэй оролт:

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

Системийн “удаан өөрчлөгдөх оролтыг дагах” чадварыг шалгахад ашиглана.

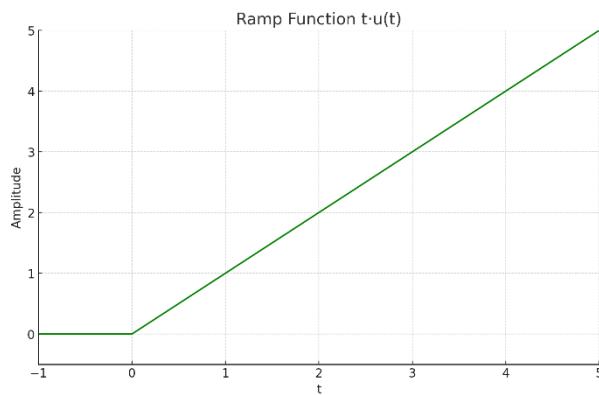


Figure 3 Ramp Function

### (4) Параболик оролт $t^2u(t)$

Хурдсацтай өсөлттэй дохионд системийн хариуг шинжлэхэд хэрэглэнэ.

$$\mathcal{L}\{t^2u(t)\} = \frac{2}{s^3}$$

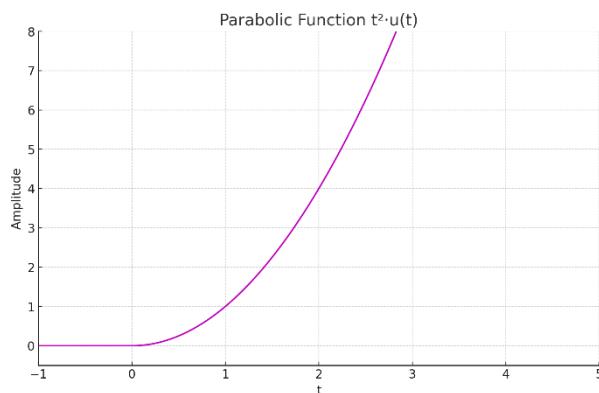


Figure 4 Parabolic Function

### (5) Экспоненциал дохионууд $e^{-bt}$

RC, RL хэлхээний үндсэн зан төлвийг илэрхийлдэг өсөх/унангуй сигналь.

$$\mathcal{L}\{e^{-bt}\} = \frac{1}{s + b}$$

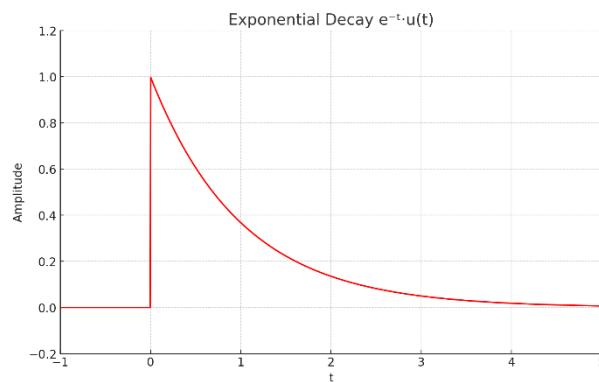


Figure 5 Exponential Decay

### (6) Синусоид оролт

Давтамжийн хариу, resonance шинжлэлд ашиглагдана.

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

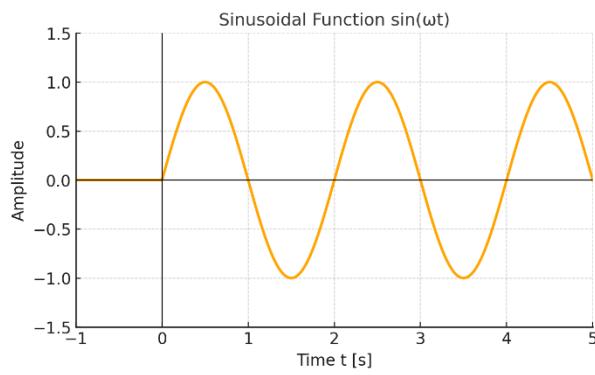


Figure 6 Sinusoidal Function

## Лапласын хувиргалтын гол шинж чанарууд

### Шугаман чанар

$$\mathcal{L}\{K_1f_1(t) + K_2f_2(t)\} = K_1F_1(s) + K_2F_2(s)$$

Хэд хэдэн дохионуудын нийлбэрийн хариу тэдгээрийн тус бүрийн хариугийн нийлбэртэй тэнцүү. Системийг загварчлахад зайлшгүй шаардлагатай.

### Дифференциал ба интеграл

#### (1) Дифференциал

Цагийн мужид дифференциал хийх нь комплекс мужид s-ээр үржих-тэй тэнцдэг.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0) \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

#### (2) Интеграл

Интеграл хийх нь комплекс мужид 1/s-ээр хуваах-тай адил.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Давтан интегралчлалын хувьд:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^{\tau_1} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\right\} = \frac{F(s)}{s^2}$$

Энэ шинж чанар нь PI, PID контроллерийн математик тайлбарт шууд хэрэглэгддэг.

#### (3) Эхний ба эцсийн утгын теоремүүд

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Inverse хийхгүйгээр системийн эхний болон тогтмол төлөвийн хариуг хурдан тодорхойлох боломж олгодог.

## Урвуу Лаплас ба хэсэгчилсэн бутархай задлал

Хэрэглээний инженерчлэлд rational хэлбэрийн функцийг хэсэгчилсэн бутархайд задлаад бүрдэл бүрээр нь урвуу Лаплас хийж, системийн цагийн хариуг гарган авдаг.

$$F(s) = \frac{a_1}{s - p_1} + \frac{a_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - p_n}$$

$$a_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s)$$

$$f(t) = a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t} + \cdots + a_n e^{p_n t}$$

Давтагдсан язгууртай тохиолдолд урвуу Лапласын илэрхийлэлд хугацааны  $t$ -тэй үржигдсэн нэмэлт гишүүд үүсэх нь Лапласын хувиргалтын нийтлэг математик шинж юм.

$$\frac{1}{(s + 1)^2(s + 2)} \rightarrow f(t) = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}$$

## Дифференциал тэгшитгэл шийдэхэд Лапласын хувиргалтыг ашиглах нь

Лапласын хувиргалт нь дифференциал тэгшитгэлийг энгийн алгебрын тэгшитгэл болгон хувиргана.

**жишээлбэл:**

$$\begin{aligned} 2 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) &= 0, x(0) = 1 \\ 2[sX(s) - 1] + 3X(s) &= 0 \Rightarrow X(s) = \frac{2}{2s + 3} \\ x(t) &= e^{-1.5t} \end{aligned}$$

Үүний үр дүнд эхний нөхцөлтэй (initial condition) системийн хариуг хурдан, алдаагүй гаргах боломжтой.

Control engineering-ийн үндсэн ойлголтууд болох:

- Transfer function
- Шилжих процесс (transient)
- Тогтмол төлөвийн хариу (steady-state)
- Тогтвортой байдлын шинжилгээ

Эдгээр нь бүгд Лапласын хувиргалтын үндсэн дээр суурилдаг.

## Дүгнэлт

Лапласын хувиргалт нь удирдлагын системийн онолын үндсэн тулгуур аргуудын нэг бөгөөд шугаман динамик системийн зан төлвийг шинжлэхэд өргөн ашиглагддаг.

Дифференциал тэгшитгэлийг алгебрын хэлбэрт хөрвүүлэх боломж олгодог тул системийн тогтвортой байдал, шилжих процесс, үндсэн динамик үзүүлэлтүүдийг нарийвчлан тодорхойлоход чухал ач холбогдолтой.

Иймээс Лапласын хувиргалт нь загварчлал, frequency-domain анализ, feedback зохиомж зэрэг хяналтын системийн үндсэн аргачлалуудын суурийг бүрдүүлдэг.

## References

Hiroshi Takeda, Tomoyuki Matsuzaka, Nobuhiro Tomabechi, *Introduction to Control Engineering* (入門制御工学), Asakura Publishing Co., Ltd., Tokyo, 2000.

Gene F. Franklin, J. Da Powell, Abbas Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 8th Edition, Pearson, 2019.]

Erickson, R. W., Maksimovic, D., *Fundamentals of Power Electronics*, 3rd Edition, Springer, 2020.

Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 11th Edition, Wiley, 2019.