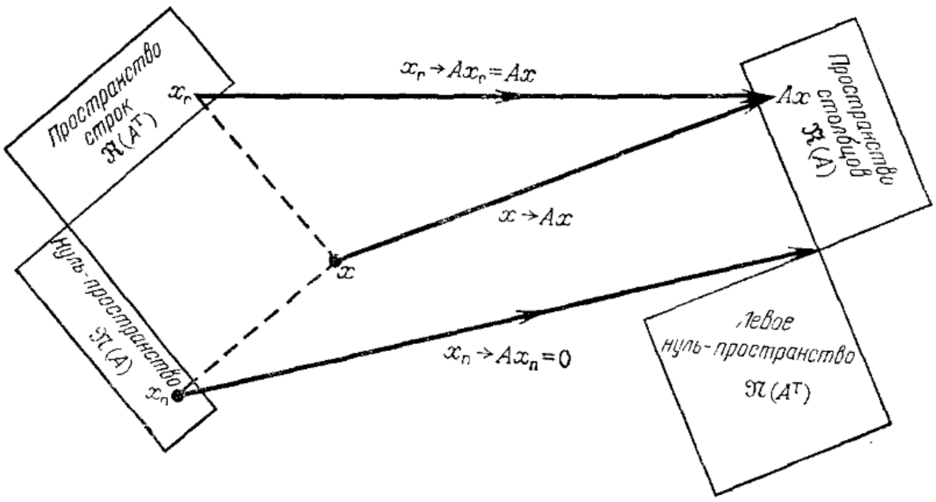
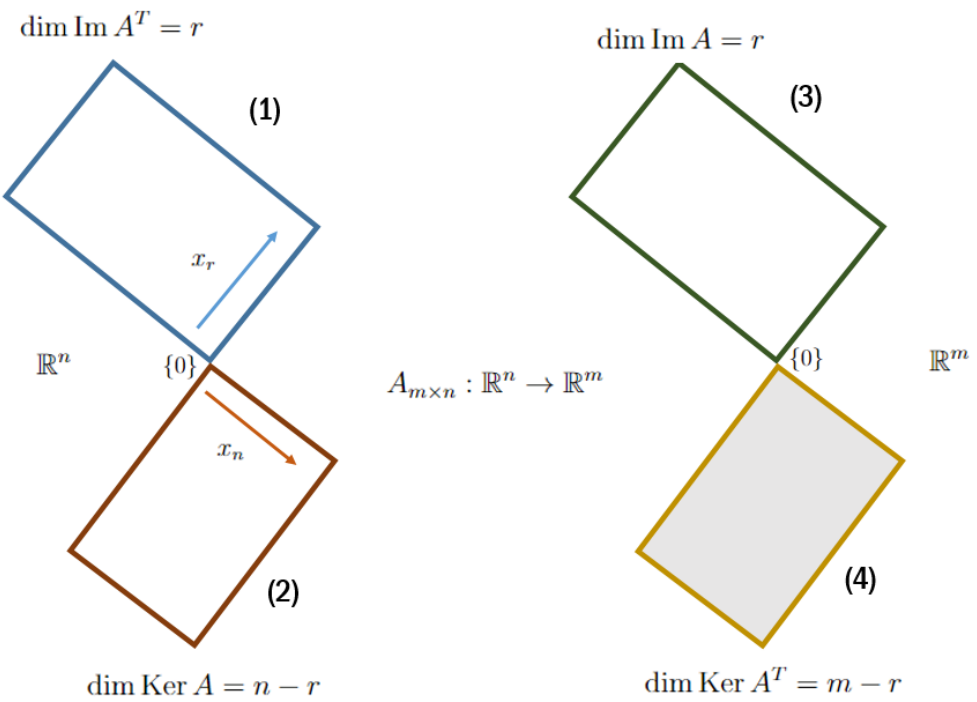
Заметки о системах линейных уравнений

https://github.com/enlacroix

21 февраля 2024 г.

Системы линейных уравнений I: Визуализация. Теорема Фредгольма





Приведенные выше рисунки называют также '*big picture of linear algebra*'. Сверху представлена версия с терминологией, принятой в западном изложении линейной алгебры, снизу - с привычными нам понятиями образа и ядра.
Суть в том, что систему линейных уравнений в матричной форме $Ax = b$ можно представить, как действие линейного преобразования A на произвольный вектор x. A описывается четырьмя подпространствами: пространством строк, пространством столбцов, нуль-пространством и левым нуль-пространством.
Например, *пространство строк* - всевозможные линейные комбинации строк матрицы A. Вектор x раскладывается на две составляющие $x_r \in ImA^T$, проекция на пространство строк, и $x_n \in KerA$ - ортогональная составляющая. Компонента x_n это ядро преобразования, решение системы $Af = 0$. A переводит x_n в левое нуль-пространство ($KerA^T$). Вторая компонента x_r раскладывается по строкам матрицы A и $Ax_r = b \in ImA$.
Данный подход полезен своей наглядностью. **Теорема Кронекера-Капелли**, которая гарантирует совместность системы при равенстве ранга основной и расширенной (добавили к основной столбец b) матрицы. Следовательно, $b \in \operatorname{Im} A$, иными словами принадлежит *пространству столбцов* - существует линейная комбинация, через которую выразится правая часть. Подпространства (1) и (2), (3) и (4) пересекаются только в нулевом векторе. Отметим, что:

$$\operatorname{Im} A^T \perp \operatorname{Ker} A$$

$$\operatorname{Ker} A^T \perp \operatorname{Im} A$$

Пространство $\mathbb{R}^m$ раскладывается на прямую сумму подпространств (3) и (4). Аналогично $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A^T \oplus \operatorname{Ker} A$.
Можно придумать одно упражнение, основанное на этом факте:
Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

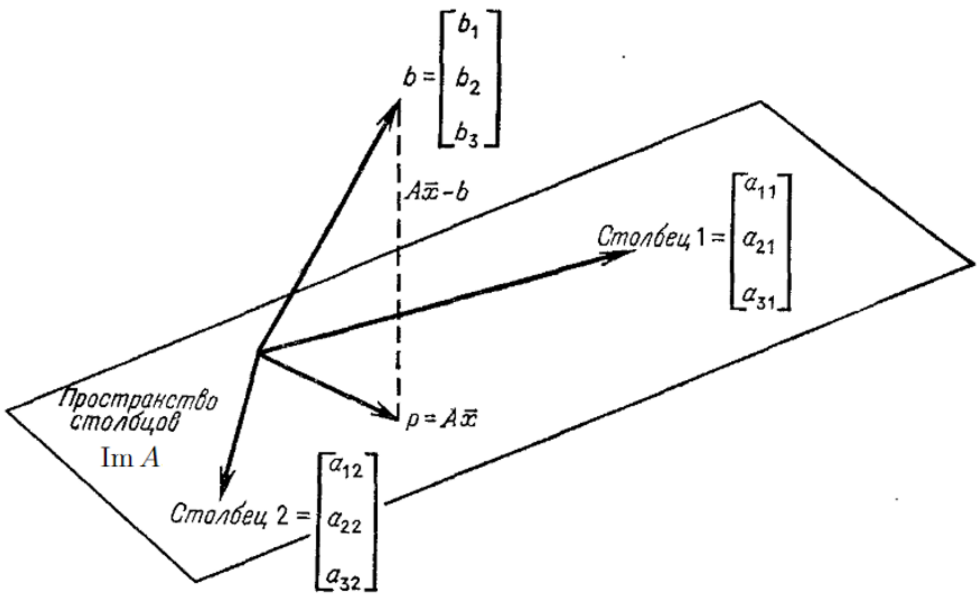
Не используйте метод Гаусса или любой другой известный вам классический способ решения (в том числе и школьные).
Разгадка состоит в том, что искомый вектор ортогонален пространству строк. Так как мы работаем в трехмерном пространстве, то можно воспользоваться векторным произведением для нахождения столбца фундаметальной системы решений.
Подчеркнём, что $b \perp \forall w \in \operatorname{Ker} A^T$, в силу ортогональности подпространств. Вектора, лежащие в подпространстве (4) описываются системой уравнений:

$$A^T w = 0$$

Это ни что иное, как **теорема Фредгольма**. Напомним ее:
Теорема Фредгольма о системах линейных уравнений.
Для того чтобы система $Ax = b$ была совместна, *необходимо и достаточно*, чтобы каждое решение сопряженной однородной системы $A^T w = 0$ удовлетворяло уравнению $w^T b = 0$.
Наглядное представление позволяет с легкостью восстановить классическое доказательство данной теоремы. Из рисунка также легко вывести и **альтернативу Фредгольма**: Либо $Ax = b, \forall b(1)$, либо $A \cdot w = 0(2)$ имеет нетривиальное (ненулевое) решение. Предположим противное, что у системы (1) нет решения, а у (2) только тривиальное. Тогда размерность подпространства $\operatorname{Ker} A^T$ равна 0, следовательно $m = r, \rightarrow dim \operatorname{Im} A = r = m$. Получается, что образ преобразования полностью покрывает все пространство $\mathbb{R}^m$. В таком случае любой вектор Ax будет лежать в $\operatorname{Im} A$, значит система будет совместна при любом b. Получили противоречие.
Предположим, что $r < m$. Тогда $\dim \operatorname{Ker} A^T > 0$, $ImA \neq \mathbb{R}^m$, найдется такой вектор b, при котором у системы не будет решений (достаточно взять любой, лежащий в $\operatorname{Ker} A^T$).

Системы линейных уравнений II.
Псевдообратные матрицы. Метод наименьших квадратов

Теорема Кронекера - Капелли гарантирует, что система $Ax = b$ разрешима, если b лежит в (гипер)плоскости пространства столбцов. На практике нам так не всегда будет везти, а потребность в определении хотя бы приблизительного решения $\bar{x}$ останется. Будем исходить из принципа минимизации невязки $A\bar{x} - b$. И, как известно, перпендикуляр - кратчайшее из возможных расстояний между объектами (иными словами, нужно найти такой элемент p в пространстве столбцов, что он будет ближайшим для b. Это достигается, когда p – проекция).



Тогда $p = Pb$, где P - матрица проектирования:

$$P = A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} A^T$$

Добавим, что невязка может выражаться, как $b - p = b - Pb = b(E - P)$, и она ортогональна $\operatorname{Im} A$. Из этого факта и выводится знакомое нам уравнение метода наименьших квадратов.

Для любого нетривиального набора коэффициентов линейной комбинации столбцов матрицы A (набор запишем в виде произвольного вектора w) справедливо, что их скалярное произведение с вектором невязки нулевое:

$$(Aw)^T \cdot (A\bar{x} - b) = w^T \cdot (A^T A\bar{x} - A^T b) = 0$$

Так как w - произвольный ненулевой вектор, то именно второй множитель равен нулю.

1. $Ax = p$ имеет *единственное* решение

Эта ситуация хорошо изучена в стандартном МНК:

$$A^T A \cdot x = A^T b \rightarrow \bar{x} = (A^T \cdot A)^{-1} A^T \cdot b$$

Единственная проблема систем из случая 1 в том, что b не является точной линейной комбинацией исходных столбцов (например, из-за погрешностей в измерениях). Решив эту проблему, система становится 'обычной' и разрешимой. Для этого должно выполняться хотя бы одно из условий:

- $rg(A) = n$, то есть ранг равен количеству столбцов (неизвестных). Тогда столбцы линейно независимы.

- $A^T A$ имеет обратную матрицу.

2. $Ax = p$ имеет *бесконечно много* решений

Из всех векторов, удовлетворяющих $Ax = p$ нужно выбрать единственный, который будет примерным решением системы $\bar{x}$. Логично положить (для минимизации ошибки), что $\bar{x}$ имеет минимальную длину из возможных. Как мы установили в предыдущем разделе, любое решение разглагается на проекции на $\mathrm{pr}_{\mathrm{Im}\, A^T} x = x_r$ и $\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}\, A} x = x_n$. Отметим, что компонента x_r сама по себе является решением $Ax = A(x_r + x_n) = Ax_r = p$.

Матрица A^+, которая задана условием $\bar{x} = A^+ b$, называется **псевдообратной**. Рассмотрим схему, аналогичную той, которая рассматривалась в предыдущем очерке:

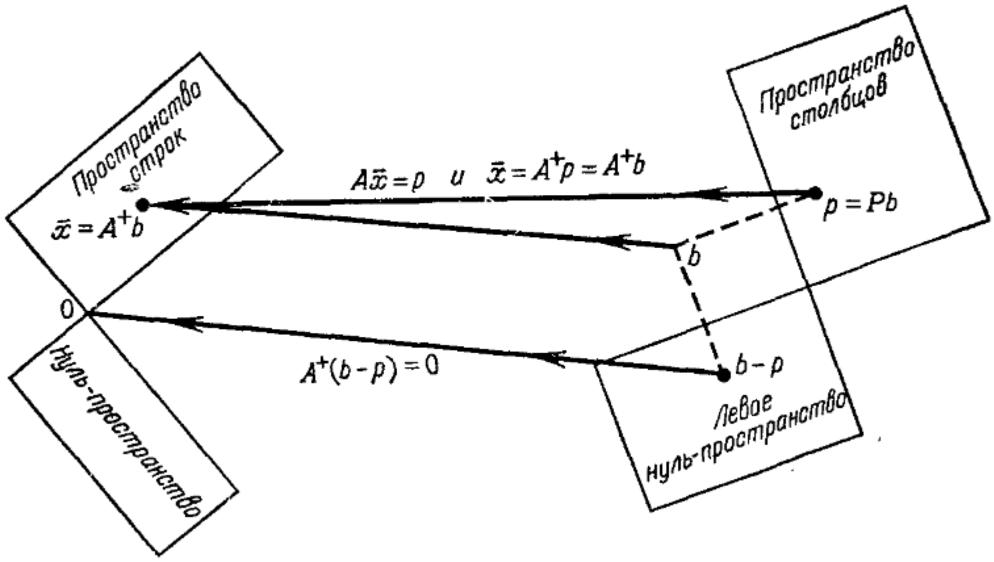


Схема построена для исходной матрицы A, однако так как изучается обратная к ней, то стрелки идут уже в другую сторону. Теперь вектор b разлагается на компоненты, а матрица A^+ проводит линейное преобразование.
Интересны частные случаи:

$p = 0, b \perp ImA$, тогда A^+ переводит все векторы из $KerA^T$ в нулевой.
$r = n, KerA = 0$. Поскольку пространство строк занимает теперь весь $\mathbb{R}^n$, то обращение можно однозначно задать.
Свойства псевдообратной матрицы:

- A^+ имеет размер $n \times m$.

- Например, из схемы видно, что $ImA = Im(A^+)^T$. Тогда $rg(A) = rg(A^+)$.

- $(A^+)^+ = A$

- $AA^+ = P$, так как $AA^+b = A\bar{x} = p = Pb$.

Из последнего пункта можно вывести 'формулу' для псевдообратной матрицы, но только в том случае, когда $rg(A) = n$. Универсальная же формула выводится из сингулярного разложения.

Пример. Рассмотрим матрицы A и псевдообратной к ней A^+. Процесс её вычисления пока оставим 'за кадром'.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ -x + 2y - 3z + u = 6 \\ y - z + u = 0. \end{cases}$$

Матрица A: (как видим, $rg(A) = 2, r < n$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Попробуем решить систему без знания о псевдообращении. Тогда нужно найти проекцию b на пространство столбцов (выбираем линейно независимые первый и четвертые столбцы). Осуществляем обычную процедуру проектирования, считаем скалярные произведения, и получим, что $p = 0 \cdot e_1 + 3 \cdot e_4 = (0, 3, 3)^T$.
Решаем систему $A\bar{x} = p$ и получаем, что

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Можно показать, что наименьшая длина достигается при комбинации $C_1 = 0, C_2 = 2$. Тогда $\bar{x} = (1, 1, 0, 2)^T$.
Псевдообратная выглядит так:

$$A^+ = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица проекции $P = AA^+$:

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Можно проверить, что проекция, рассчитаная вручную и вычисленная по формуле $p = Pb$, совпадут. Находим $\bar{x} = A^+b$ и получим $\bar{x} = (1, 1, 0, 2)^T$.