

Elementos de Matemática Aplicada para Aplicaciones Tecnológicas

Practica II: Filtro de Kalman 2D

Enrique Nicanor Mariotti (mariottien@gmail.com)

Diciembre 2022

1. Introducción

El filtro de Kalman es un algoritmo para actualizar, observación a observación, la proyección lineal de un sistema de variables sobre el conjunto de información disponible, según se va disponiendo de nueva información. Para ello, es preciso representar el modelo en la formulación de espacio de los estados.

El filtro de Kalman permite calcular de modo sencillo la verosimilitud de un modelo dinámico lineal, lo que permite estimar los parámetros de dicho modelo, así como obtener predicciones de dicho tipo de modelos.

Ya que el filtro de Kalman es un algoritmo recursivo, puede correr en tiempo real usando únicamente las mediciones de entrada actuales, el estado calculado previamente y su matriz de incertidumbre, y no requiere ninguna otra información adicional.

En esta practica se implementara un filtro de Kalman para estimar la posición y orientación de un vehículo moviéndose en dos dimensiones.

2. Algoritmo

Se tiene un sistema representado en el espacio de estado:

$$x_k = \mathbf{A}x_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1} + w_{k-1} \quad (1)$$

$$z_k = \mathbf{H}x_k + v_k \quad (2)$$

Siendo x_k el vector de estado del sistema y z_k y su observación en el tiempo k .

Se considera w_k como un ruido blanco de valor promedio igual a cero y con matriz de covarianza Q_k en el instante k .

A su vez v_k es un ruido blanco de valor promedio igual a cero y con matriz de covarianza R_k en el instante k .

El filtro de Kalman permite estimar el estado x_k a partir de las mediciones anteriores de u_{k-1} , z_{k-1} y las estimaciones anteriores de x_{k-1} .

El algoritmo recursivo se puede describir por dos pasos principales: *predicción* y *corrección*:

Predicción:

- Estimación a priori: $x_k^- = \mathbf{A}\hat{x}_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1}$
- Covarianza a priori: $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_k$

Corrección:

- Ganancia de Kalman: $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$
- Actualización del estado estimado: $\hat{x}_k = x_k^- + \mathbf{K}_k (z_k - \mathbf{H}x_k^-)$
- Actualización covarianza: $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^-$

3. Implementación

En la presente sección se aborda el proceso de implementación de un filtro de Kalman para estimación de posición y orientación de un vehículo moviéndose en dos dimensiones.

El movimiento del vehículo que se mueve en dos dimensiones puede ser estimado mediante la fusión de sensores, utilizando una *Unidad de Medición Inercial* o *IMU*, un *GPS* y un magnetómetro. Estos sensores proveen mediciones con distinta frecuencia de actualización, generalmente el *GPS* y el magnetómetro tienen frecuencias menores de actualización que la *IMU*.

En este ejemplo de aplicación el tiempo de muestreo *IMU* será de $0,1[sec]$ mientras que el tiempo de muestreo del *GPS* y magnetómetro de $1[sec]$.

Modelado

Las variables de estado que componen el vector de estado x_k son la posición y velocidad en el plano (x, y) mas la rotación angular θ , por lo que la matriz \mathbf{A} queda dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Si consideramos el sistema con las mediciones de la *IMU* como entrada tenemos el modelo. La matriz \mathbf{B} que incorpora las rotaciones en el plano queda formada como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/2\Delta t^2 \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & -1/2\Delta t^2 \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ \Delta t \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & -\Delta t \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ 1/2\Delta t^2 \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & 1/2\Delta t^2 \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ \Delta t \sin(\hat{\theta}_{k-1}) & \Delta t \cos(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ya que las mediciones de la fase de *update* se corresponden con el *GPS* y el magnetómetro la matriz de mediciones \mathbf{H} queda formada como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Finalmente, los ruidos del modelo w_k y de las mediciones de actualización v_k tienen matrices de covarianza \mathbf{Q}_k y \mathbf{R}_k respectivamente.

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \sigma_{gps}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{gps}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{mag}^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T \quad (7)$$

Donde \mathbf{Q} queda definida como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{acc}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{acc}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{gyro}^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Nótese que en la Ec. 7 hemos incorporado las rotaciones en el plano sobre las errores de la *IMU*. Esta rotación no es necesaria en el caso de las mediciones del *GPS* o del magnetómetro, como evidencia la Ec. 6.

Estimación de covarianzas

Los los elementos de la diagonal de las matrices de covarianza R_k y Q_k son las varianzas σ_{sensor}^2 de los la mediciones de los sensores.

En el caso de *IMU*, las varianzas del acelerómetro y giroscopo puede estimarse a partir de los valores de densidad espectral de potencia tabulados según las Ecs. 9 y 10. Para el caso del *GPS* y del magnetómetro es estiman las varianzas como los errores absolutos cuadrados de los instrumentos según las Ecs. 11 y 12.

$$\sigma_{acc}^2 = \frac{(PSD_{acc})^2}{\delta t_{IMU}} \quad (9)$$

$$\sigma_{gyro}^2 = \frac{(PSD_{gyro})^2}{\delta t_{IMU}} \quad (10)$$

$$\sigma_{gps}^2 = \epsilon_{gps}^2 \quad (11)$$

$$\sigma_{mag}^2 = \epsilon_{mag}^2 \quad (12)$$

Ejecución

Teniendo este modelado, se implemento el algoritmo de la Sec. 2 usando programación orientada a objetos en *Python3*.

La ejecución del código adjunto puede realizarse mediante:

```
python3 kalman-filter.py [-h ] -d { acc,linear }
-s { default,acc,gps } -l { default,mag,gps }
```

4. Resultados

La presente sección se muestran distintas corridas del código implementado según la Sec. 3.

En primera instancia se simularon una trayectoria lineal uniforme y otra circular uniforme. Posteriormente se repitió el caso lineal con aumento el error del *GPS* y luego del acelerómetro de la *IMU*. Finalmente, se simula para el caso de movimiento circular uniforme en primer lugar perdida total de *GPS* y posteriormente la perdida total del magnetómetro.

4.1. Trayectoria lineal

Se simula el movimiento lineal uniforme con un ángulo de $\theta = 45^\circ$, velocidad constante y un tiempo de simulación de $1000[sec]$. El vector de estados x_k esta inicializado de manera acorde. Las Figs. 1 a 4 presentan los resultados.

La trayectoria estimada por el filtro sigue la trayectoria real, y la orientación del vehículo se estima correctamente. El filtro es capaz de rechazar el ruido de los sensores como se puede ver en las Figs. 1, 2.

Se puede observar en las Figs. 7, 8 que los valores de la matriz K_∞ y P_k se establecen en un valor fijo luego de alcanzada la estimación del estado.

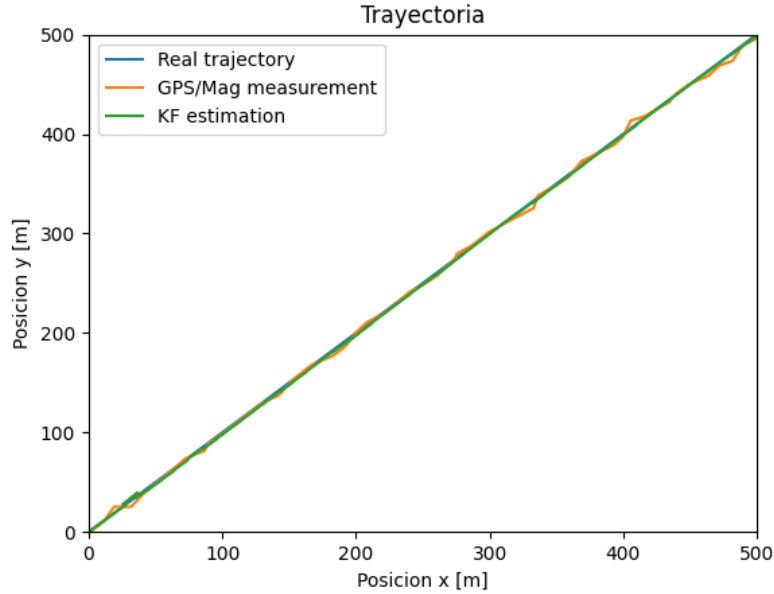


Figura 1: Trayectorias en el plano del vehículo para movimiento lineal uniforme.

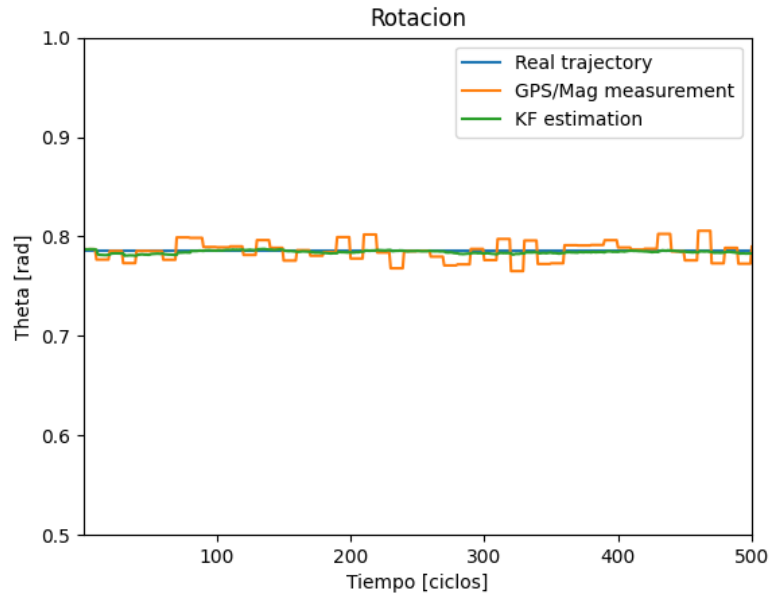


Figura 2: Rotaciones en el plano del vehículo para movimiento lineal uniforme.

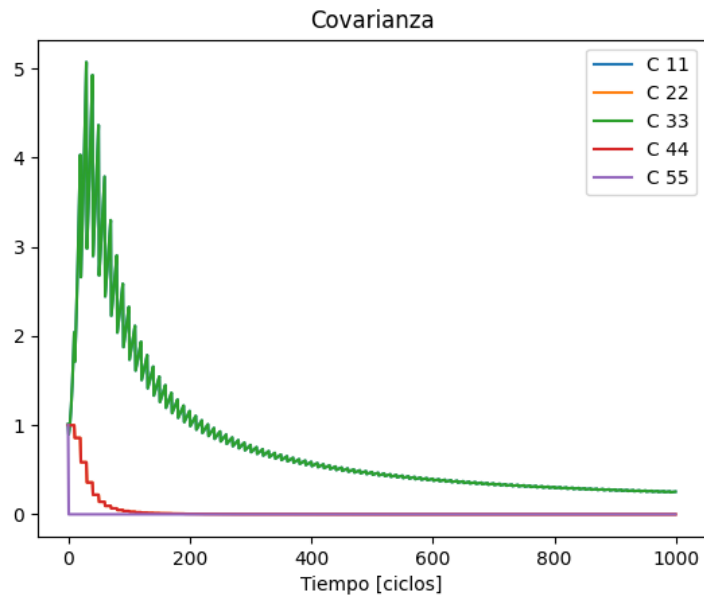


Figura 3: Componentes de la diagonal de matriz de covarianza del filtro de Kalman.

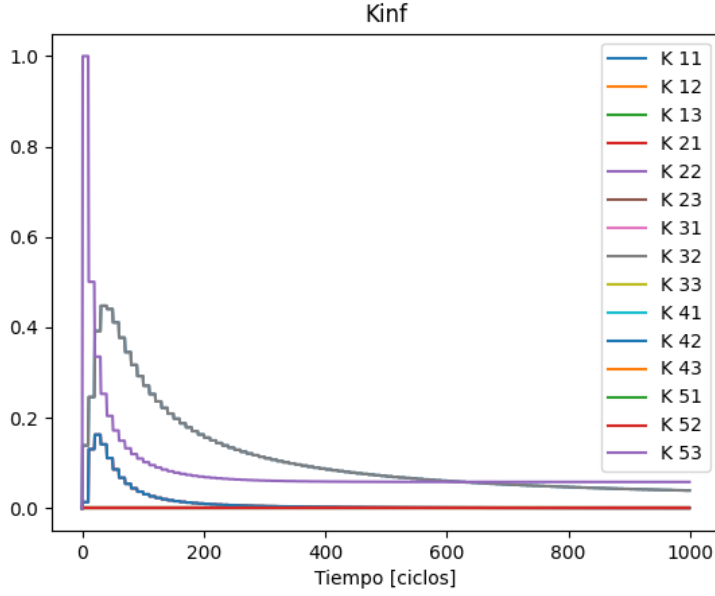


Figura 4: Componentes de la matriz de ganancias del filtro de Kalman.

4.2. Trayectoria circular

Se simula el movimiento circular uniforme con velocidad angular constante, un radio de $1000 [m]$ y un tiempo de simulación de $1000 [sec]$. El vector de estados x_k esta inicializado de manera acorde. Las Figs. 5 a 8 presentan los resultados.

La trayectoria estimada por el filtro sigue la trayectoria real, y la orientación del vehículo se estima correctamente. El filtro es capaz de rechazar el ruido de los sensores como se puede ver en las Figs. 5, 6.

Se puede observar en las Figs. 7, 8 que los valores de la matriz K_∞ y P_k se establecen en un valor fijo luego de alcanzada la estimación del estado.

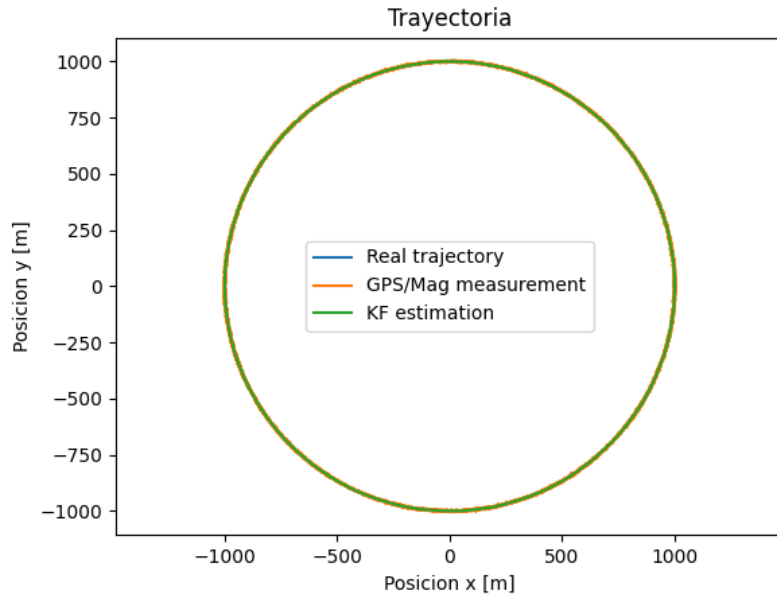


Figura 5: Trayectorias en el plano del vehículo para movimiento circular uniforme.

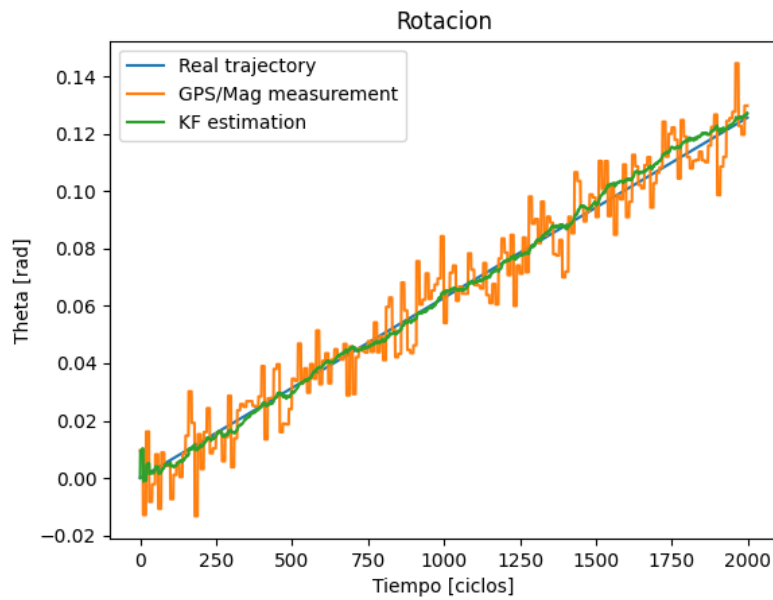


Figura 6: Rotaciones en el plano del vehículo para movimiento circular uniforme.

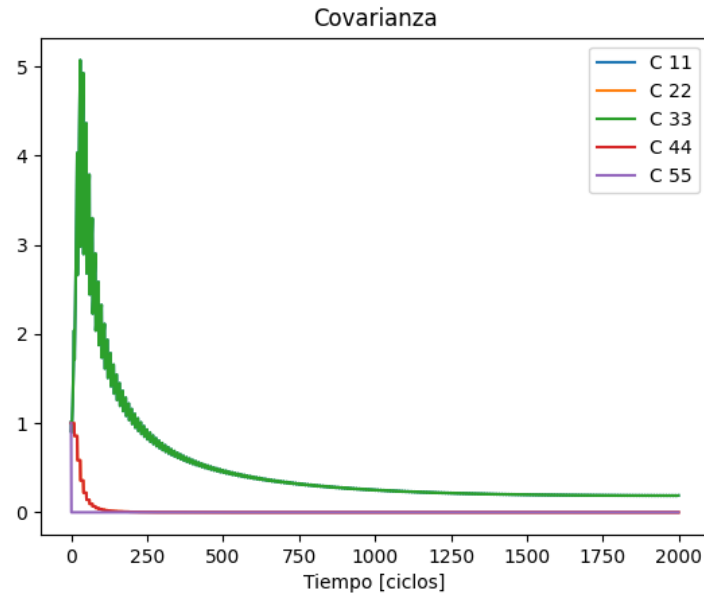


Figura 7: Componentes de la diagonal de matriz de covarianza del filtro de Kalman.

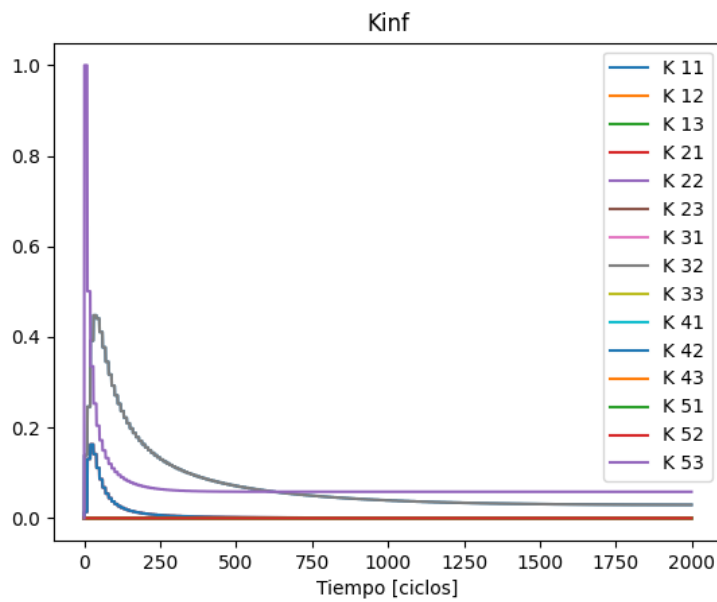


Figura 8: Componentes de la matriz de ganancias del filtro de Kalman.

4.3. Incremento del error del GPS

A continuación se aumento el error del *GPS* por 5 veces y se evaluaron los resultados en las las Figs. 9 a 12 para movimiento lineal uniforme.

El efecto de aumentar el error del *GPS* se puede apreciar sobre las Figs. 11 y 12. A su vez las mediciones de Figs. 9 se muestran mas ruidosas.

El filtro es capas de rechazar el ruido de los sensores como se puede ver en las Figs. 9, 10.

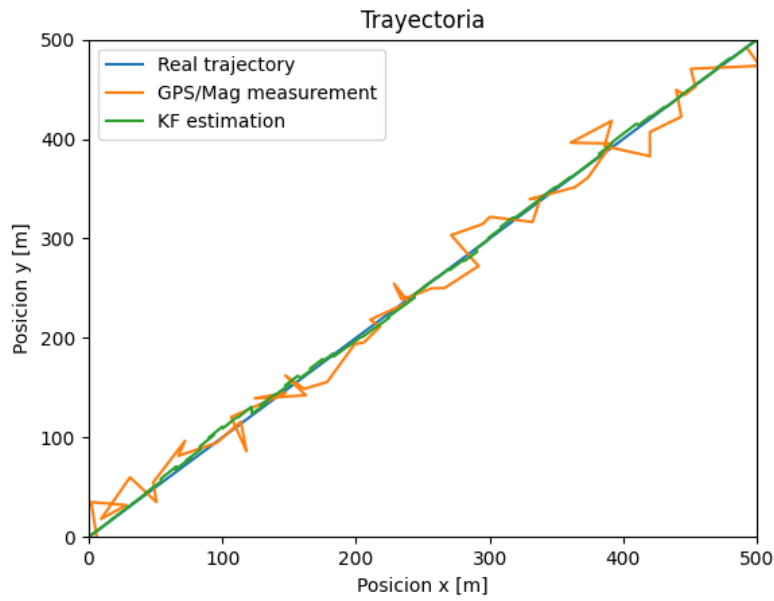


Figura 9: Trayectorias en el plano del vehículo para movimiento lineal uniforme, con el error del *GPS* aumentado 5 veces.

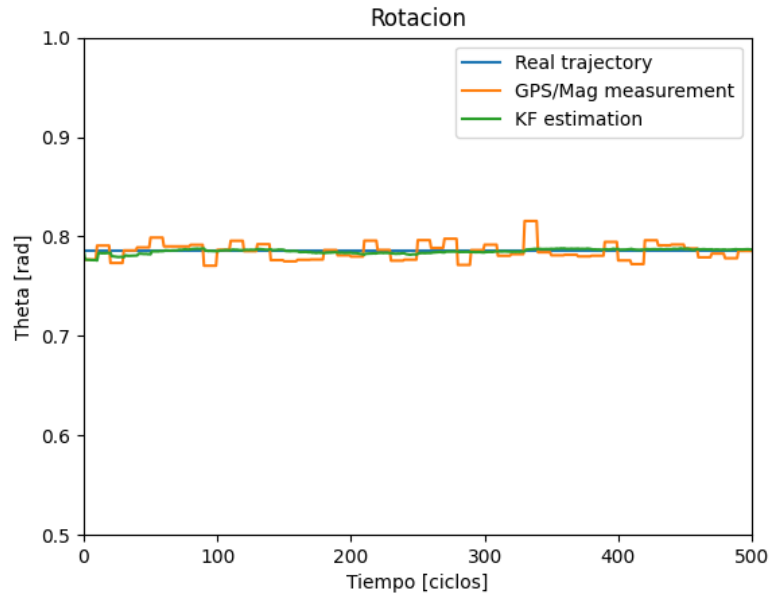


Figura 10: Rotaciones en el plano del vehículo para movimiento lineal uniforme, con el error del *GPS* aumentado 5 veces.

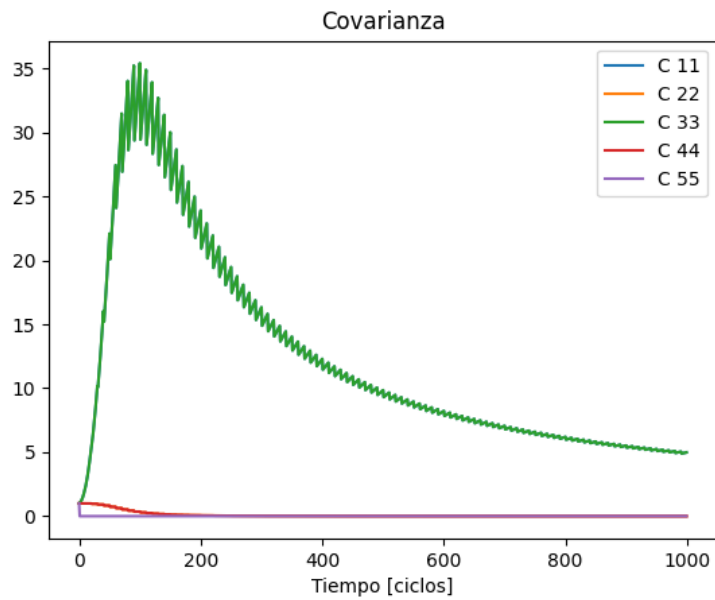


Figura 11: Componentes de la diagonal de matriz de covarianza del filtro de Kalman, con el error del *GPS* aumentado 5 veces.

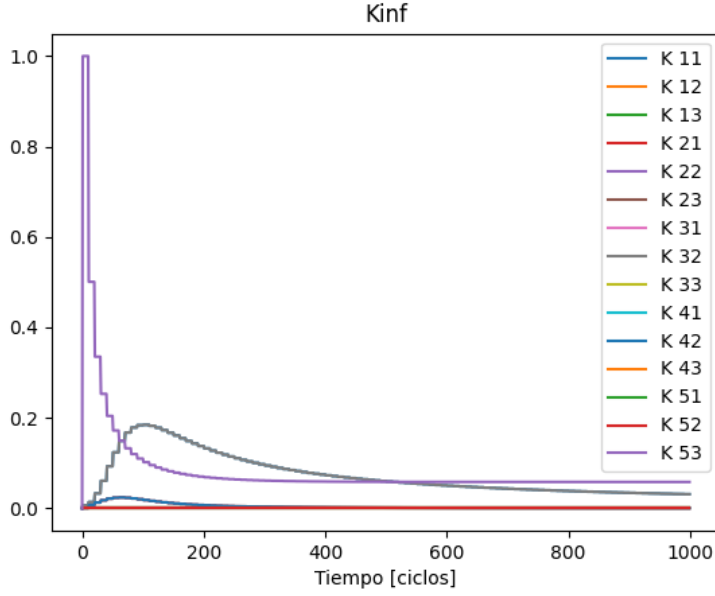


Figura 12: Componentes de la matriz de ganancias del filtro de Kalman, con el error del *GPS* aumentado 5 veces.

4.4. Incremento del error de la IMU

A continuación se aumento el error del acelerómetro de la *IMU* por 5 veces y se evaluaron los resultados en las Figs. 13 a 16 para movimiento lineal uniforme.

El efecto de aumentar el error del acelerómetro de la *IMU* se puede apreciar sobre las Figs. 15 y 16. A su vez las mediciones de Figs. 13 se muestran mas ruidosas.

El filtro es capaz de rechazar el ruido de los sensores como se puede ver en las Figs. 13, 14. Notar que la varianzas σ_{acc}^2 y σ_{gyro}^2 de la *IMU* continúan siendo relativamente bajas, por lo que el efecto no es notable en las trayectorias.

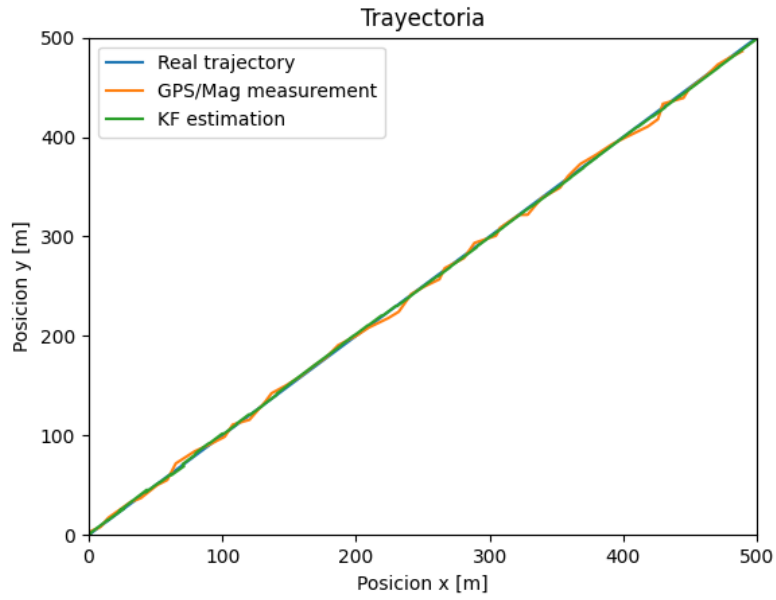


Figura 13: Trayectorias en el plano del vehículo para movimiento lineal uniforme, con el error del acelerómetro de la *IMU* aumentado 5 veces.

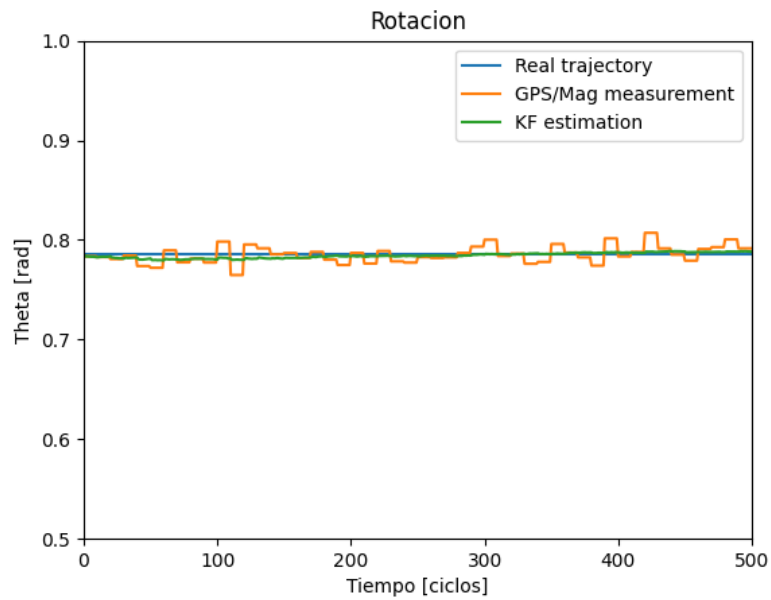


Figura 14: Rotaciones en el plano del vehículo para movimiento lineal uniforme, con el error del acelerómetro de la *IMU* aumentado 5 veces.

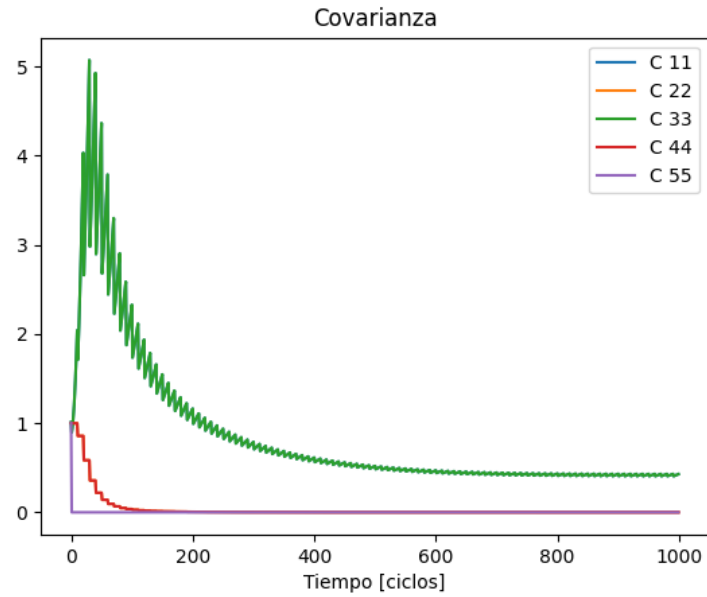


Figura 15: Componentes de la diagonal de matriz de covarianza del filtro de Kalman, con el error del acelerómetro de la *IMU* aumentado 5 veces.

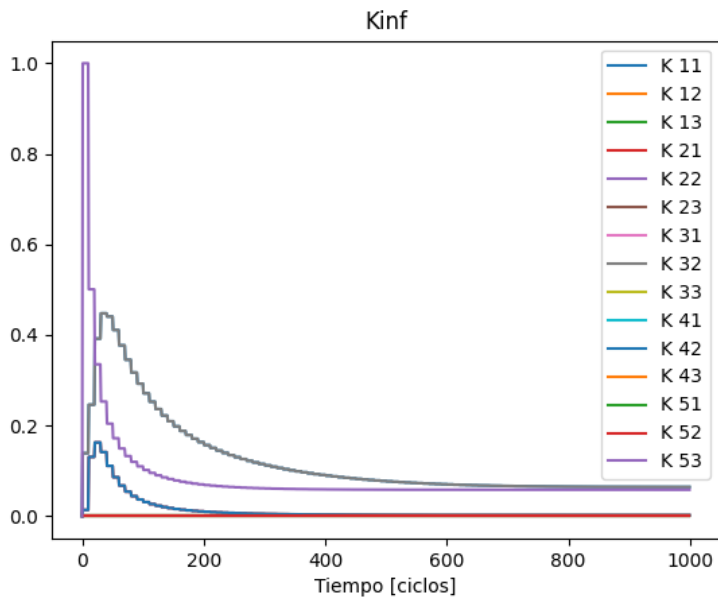


Figura 16: Componentes de la matriz de ganancias del filtro de Kalman, con el error del acelerómetro de la *IMU* aumentado 5 veces.

4.5. Perdida del GPS

A continuación se evaluó el efecto de la perdida total del *GPS* para movimiento circular uniforme. Para ellos las componentes correspondientes de R_k se multiplicaron por una constante $\alpha = 10^6$. El efecto de esta estrategia se puede apreciar sobre las Figs. 19 y 20.

A su vez, en Fig. 17 podemos observar que la estimación de la posición empieza a divergir con el tiempo debido a la integración del ruido propio de la *IMU* sin la corrección de la posición que proveen las mediciones del *GPS*.

Sin embargo, la trayectoria propagada por las ecuaciones del sistema es aproximadamente correcta.

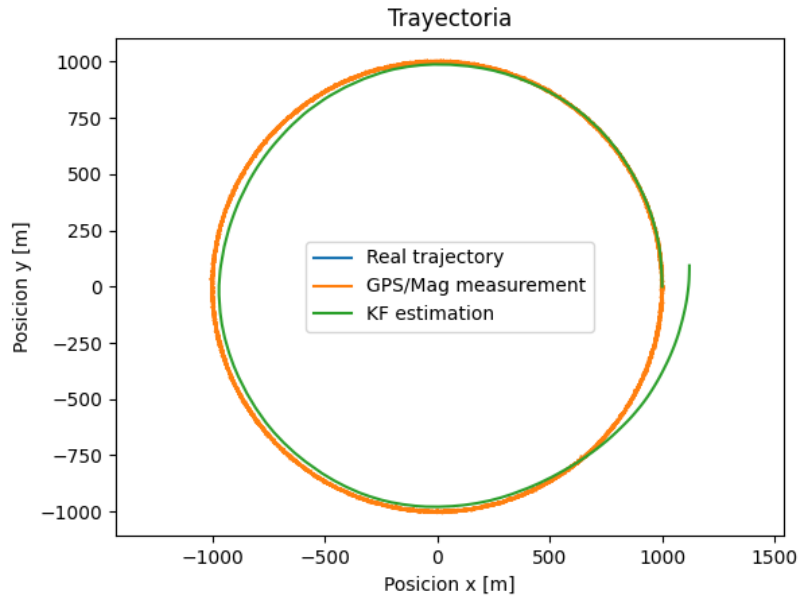


Figura 17: Trayectorias en el plano del vehículo para movimiento circular uniforme, con perdida total de *GPS*.

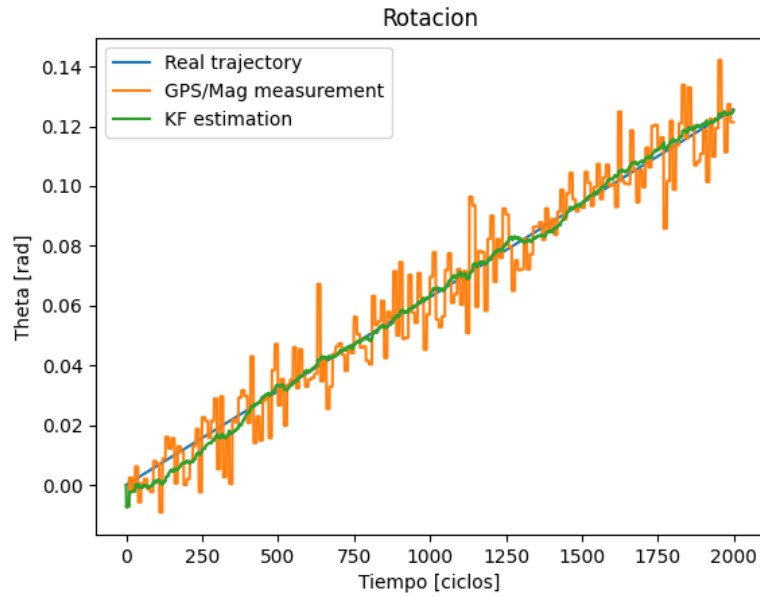


Figura 18: Rotaciones en el plano del vehículo para movimiento circular uniforme, con perdida total de *GPS*.

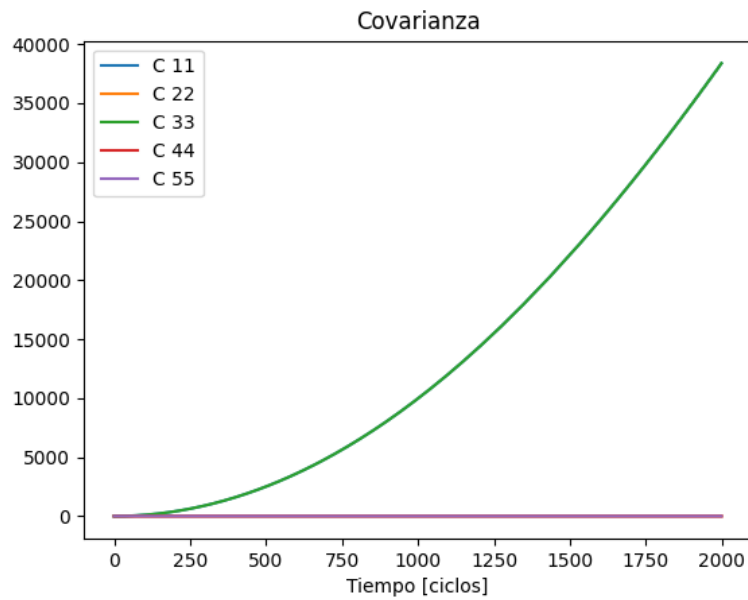


Figura 19: Componentes de la diagonal de matriz de covarianza del filtro de Kalman, con perdida total de *GPS*.

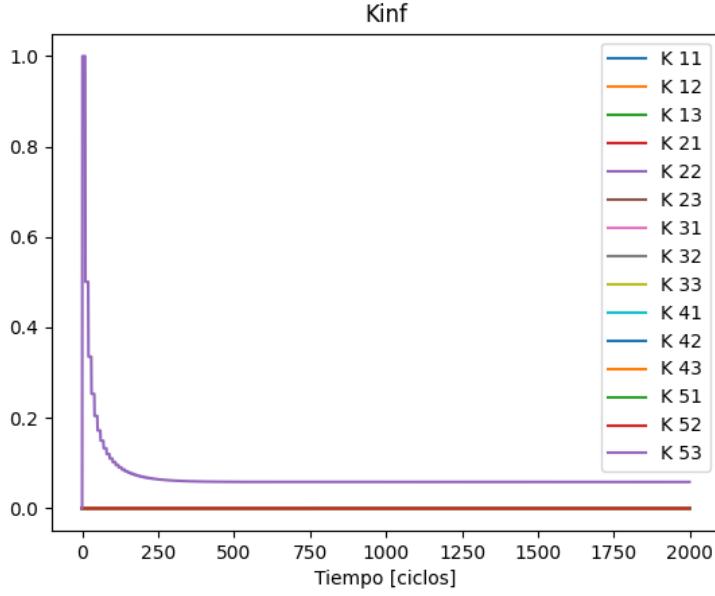


Figura 20: Componentes de la matriz de ganancias del filtro de Kalman, con perdida total de *GPS*.

4.6. Perdida del Magnetómetro

A continuación se evaluó el efecto de la perdida total del magnetómetro para movimiento circular uniforme. Para ellos las componentes correspondientes de R_k se multiplicaron por una constante $\alpha = 10^6$. El efecto de esta estrategia se puede apreciar sobre las Figs. 23 y 24.

A su vez, en Fig. 22 podemos observar que la estimación de la orientación angular empieza a divergir con el tiempo debido a la integración del ruido propio de la *IMU* sin la corrección de la posición que proveen las mediciones del magnetómetro.

Sin embargo, la orientación propagada por las ecuaciones del sistema es aproximadamente correcta.

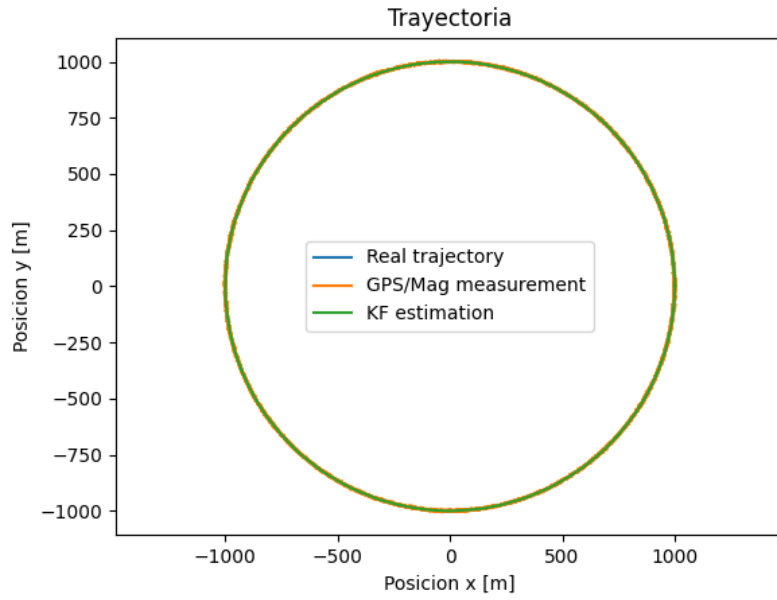


Figura 21: Trayectorias en el plano del vehículo para movimiento circular uniforme, con perdida total del magnetómetro.

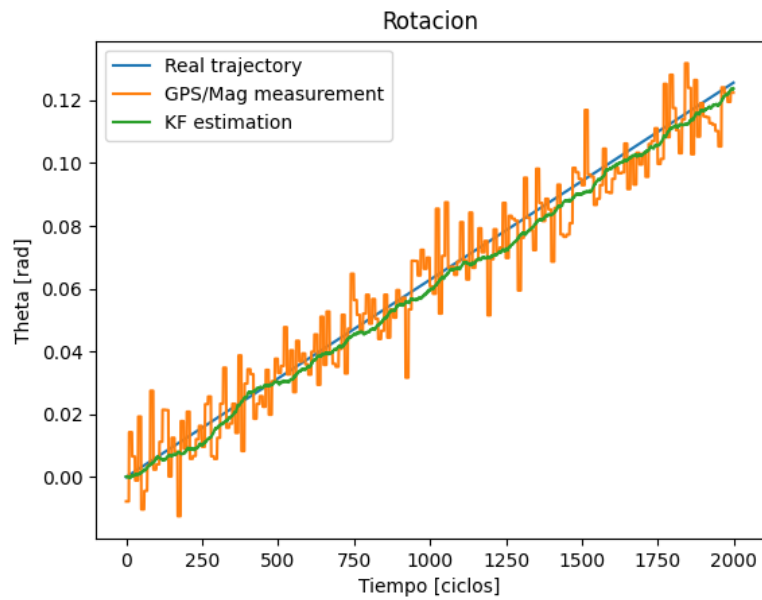


Figura 22: Rotaciones en el plano del vehículo para movimiento circular uniforme, con perdida total del magnetómetro.

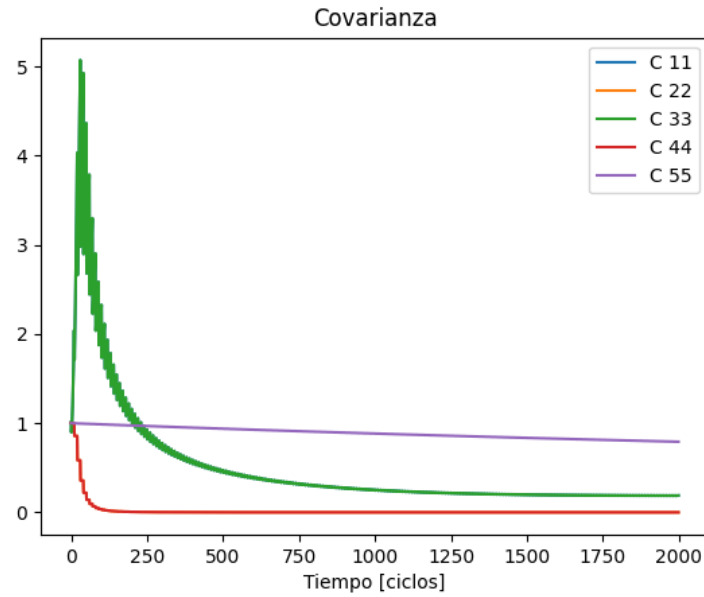


Figura 23: Componentes de la diagonal de matriz de covarianza del filtro de Kalman, con perdida total del magnetómetro.

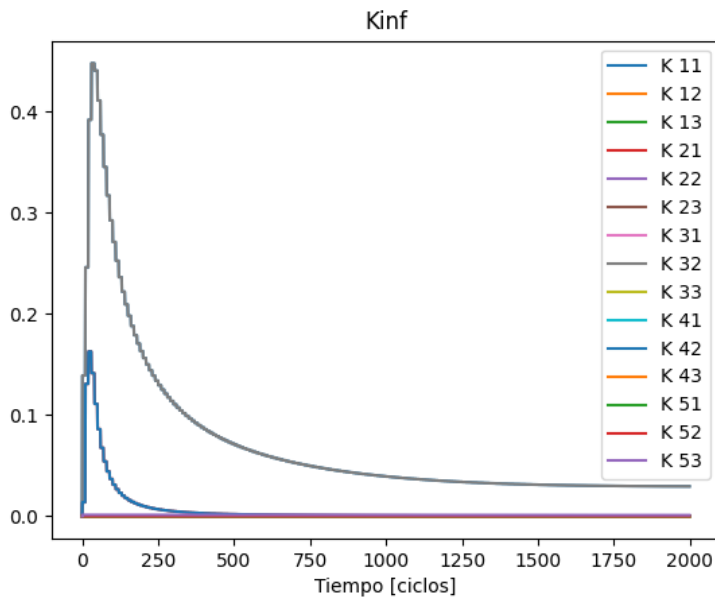


Figura 24: Componentes de la matriz de ganancias del filtro de Kalman, con perdida total del magnetómetro.

5. Conclusiones

Se presento el proceso de diseño e implementación de un filtro de Kalman de posición y orientación angular para un vehículo moviéndose en el plano 2D.

Se modelaron las variables del sistema y se realizo la estimación de los errores de los sensores del vehículo y se probó el algoritmo frente a distintas situaciones, las cuales incluyeron distintas trayectorias, aumento de los errores del *GPS* y de la *IMU*, y pérdidas de de *GPS* y de *magnetómetro*.

Los resultados muestran que la trayectoria estimada por el filtro sigue la trayectoria real en ambos casos simulados. Se pudo comprobar que el algoritmo es relativamente robusto al aumento de los valores de las matrices de covarianzas y no hay mayor influencia en la trayectoria estimada.

En el caso de la pérdida total de los sensores en la fase de *update*, se puede ver como las trayectorias reales y estimadas van divergiendo lentamente en el tiempo debido a la integración paulatina del ruido del sistema.

Por ultimo se pudo observar al avanzar el tiempo de simulación la convergencia de la matriz de covarianza estimada \mathbf{P}_k al igual que las ganancias de equilibrio K_∞ .