Fundação Getulio Vargas
Escola de Pós-Graduação em Economia
Mestrado em Finanças e Economia Empresarial

UTILIZAÇÃO DO MODELO DE BLACK-LITTERMAN PARA GESTÃO DE *HEDGE FUNDS* DO BRASIL

Ricardo Lafayette Stockler Macintyre da Silva Porto

Rio de Janeiro
Maio 2010

UTILIZAÇÃO DO MODELO DE BLACK-LITTERMAN PARA GESTÃO DE HEDGE FUNDS DO BRASIL

RICARDO LAFAYETTE STOCKLER MACINTYRE DA SILVA PORTO

Dissertação apresentada ao Mestrado em Finanças e Economia Empresarial como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Finanças e Economia Empresarial.

ORIENTADOR: PROF. DR. ALEXANDRE LOWENKRON

CO-ORIENTADOR: PROF. CÉSAR SANTIAGO LIMA DE ARAGÃO

RIO DE JANEIRO
MAIO DE 2010

UTILIZAÇÃO DO MODELO DE BLACK-LITTERMAN PARA GESTÃO DE HEDGE FUNDS DO BRASIL

RICARDO LAFAYETTE STOCKLER MACINTYRE DA SILVA PORTO

Dissertação apresentada ao Mestrado em Finanças e Economia Empresarial como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Finanças e Economia Empresarial.

Avaliação:

BANCA EXAMINADORA:

____

PROF. DR. ALEXANDRE LOWENKRON (Orientador)
Instituição: Banco BBM

____

PROF. CÉSAR SANTIAGO LIMA DE ARAGÃO (Co-orientador)
Instituição: Banco BBM

____

PROF. DR. MARCO ANTONIO CESAR BONOMO
Instituição: EPGE-FGV/RJ

____

DR. GABRIEL CHEQUER HARTUNG
Instituição: Banco BBM

Rio de Janeiro, 26 de maio de 2010

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Alexandre Lowenkron e Prof. César Aragão, com os quais tenho a honra de trabalhar desde o início do curso, por toda por toda orientação, empenho, sabedoria e, acima de tudo, exigência, tanto na presente disseração quanto no lado profissional.

Aos meus pais, pelo amor, pela educação e pelo apoio, nesta fase da minha vida e em todas as outras pelas quais passei.

A minha namorada e amiga Carolina Villar pelo carinho, pela atenção, paciência e pela sua eterna vontade de sempre ajudar mesmo estando longe. Seu companheirismo foi e continua sendo fundamental para eu seguir adiante.

A todos os meus amigos e amigas que sempre estiveram presentes me aconselhando e incentivando.

A todo o corpo docente da EPGE pela atenção e pelo aprendizado concedido durante esse curso.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução dessa Dissertação de Mestrado.

RESUMO

O modelo Black-Litterman calcula os retornos esperados de mercado como uma combinação de um conjunto de expectativas específicas de cada investidor e um ponto de referência neutro. A combinação dessas duas fontes de informações são feitas pelo modelo utilizando a abordagem bayesiana. Os resultados obtidos a partir do modelo Black-Litterman, ao contrário da abordagem tradicional, são bastante intuitivos, estáveis e consistentes em relação as expectativas dos investidores. O objetivo dessa dissertação é fazer uma análise detalhada de cada um dos componentes do modelo Black-Litterman e verificar se a utilização o modelo de Black-Litterman, introduzindo as opiniões de mercado com base no relatório FOCUS do Banco Central, supera o retorno dos fundos multimercados brasileiros.

Palavras-chave: Black-Litterman, Markowitz, FOCUS, fundos multimercados.

ABSTRACT

The Black-Litterman model calculates the expected market returns as a combination of a set of investor views and a neutral reference point. The model uses Bayesian approach to blend both sources of information. The results from the Black-Litterman model, in contrast to the traditional approach, are quite intuitive, stable and consistent with the investors views. The purpose of this thesis is to provide a detailed analysis of each component of the Black-Litterman model and verify if the use of the Black-Litterman model, introducing the views of the market based on the Central Bank report, FOCUS, outperforms brasilians Hegde Funds.

Keywords: Black-Litterman, Markowitz, FOCUS, hedge funds.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O trabalho pioneiro de Harry Markowitz (1952) forneceu uma base conceitual para a análise de carteiras de investimentos, marcando o início da teoria moderna de portfólios (a análise da seleção racional de carteiras com base no uso eficiente de risco). Markowitz definiu um processo de otimização para a construção de portfólios eficientes em termos de média e variância dos retornos dos ativos financeiros. De acordo com o critério de média-variância, uma carteira eficiente é aquela que proporciona o maior retorno para um dado nível de risco ou, o que é o mesmo, o menor nível de risco para um dado retorno.

Apesar do atrativo teórico do modelo de Markowitz, muitos investidores têm dificuldade em aplicá-lo porque, na prática, as carteiras obtidas a partir do modelo são pouco intuitivas, pouco diversificadas, muito sensíveis aos parâmetros e bastante instáveis. Vários estudos têm constatado que esses problemas não advém do próprio otimizador de Markowitz, mas principalmente devido ao erro de estimação dos retornos esperados e covariâncias introduzidos no otimizador.

Portanto, o erro de estimação implícito nos parâmetros calculados é o principal problema que enfrentam os investidores quando utilizam o modelo padrão de Markowitz. O otimizador tende a selecionar os ativos com características mais atraentes (alta rentabilidade e baixo risco e/ou correlação) e vender a descoberto ou desfavorecer aqueles com características opostas. Justamente, essas características extremas representam os casos em que o erro da estimação é maior e, portanto, tendem a pensar que o otimizador maximiza o impacto do erro de estimação.

Alguns investidores adicionam restrições ao modelo para tentar controlar a instabilidade das carteiras resultantes e torná-las mais coerentes com as suas opiniões. No caso de muitas restrições artificiais, as carteiras otimizadas tendem, simplesmente, a refletir as expectativas pré-determinadas, que nem sempre são economicamente intuitivas. Quando impomos restrições para vendas a descoberto, o modelo geralmente aponta para "soluções de canto", com muitos ativos sem posição, o que implica numa redução da utilização de diversificação. Além disso, quando os pesos dos ativos estão indo de encontro às restrições artificiais, a otimização já não balanceia o retorno e o risco entre todos os ativos (Black e Litterman, 1992).

Fischer Black e Robert Litterman (1991, 1992) propuseram um modelo para estimar os retornos dos ativos que serão introduzidos ao otimizador de Markowitz, de modo a reduzir os problemas da metodologia tradicional. Esse é conhecido como o modelo de Black Litterman, que é baseado em métodos bayesianos para combinar várias fontes de informação.

De acordo com a estatística bayesiana, as características dos estimadores podem ser melhoradas através de uma contração (*shrinkage*) a um ponto neutro que atua como um centro de gravidade. Quanto mais razoável é esse ponto, melhor serão as propriedades dos estimadores. No modelo de Black-Litterman os retornos de equilíbrio derivados do CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) são o centro de gravidade (Litterman, 2003). O modelo pressupõe que existam duas fontes de informação sobre os retornos futuros: as expectativas ou opiniões pessoais dos investidores e o equilíbrio do mercado. Os retornos esperados, que são calculados e introduzidos no otimizador padrão, são estimações que combinam ambas fontes de informação.

Os retornos esperados calculados a partir das duas fontes de informação se desviarão dos retornos de equilíbrio de acordo com as expectativas definidas explicitamente pelo investidor. A magnitude dos desvios do equilíbrio depende do grau de confiança que o investidor tenha em qualquer expectativa ou estratégia. Se eles não tem uma expectativa sobre um mercado ou ativo em particular, não é necessário introduzir uma. Por isso, o modelo possibilita aproveitar a experiência e a intuição do investidor combinando de forma consistente todas as suas expectativas (Scherer, 2007).

O modelo de Black-Litterman é uma ferramenta de apoio na tomada de decisões de investimento que emolduram o processo de forma transparente e disciplinada, para ser usado como parte de um processo iterativo. O modelo permite ao administrador analisar sistematicamente o relacionamento entre suas opiniões e os portfólios ótimos.

O objetivo deste trabalho é realizar uma análise detalhada do modelo de Black-Litterman e efetuar uma aplicação do mesmo sobre o ponto de vista de um fundo multimercado brasileiro. Iremos verificar se utilizar o modelo com as opiniões do relatório FOCUS gera um retorno superior em relação aos fundos multimercados brasileiros. Para isso é levado em conta o mercado de capitais local com seus ativos e suas peculiaridades.

Este trabalho está organizado em cinco partes: a primeira constitui a presente introdução; na segunda parte é feita uma breve revisão da lógica de um processo de investimento e, em particular, o processo de alocação estratégica de capital; a terceira seção apresenta formalmente o modelo; na quarta parte se apresentam os resultados de sua aplicação para os fundos multimercados brasileiros. Finalmente, nas conclusões, são apresentadas as interpretações sobre os resultados obtidos.

2. OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS

A Teoria Moderna de portfólio explica como investidores racionais irão apressar um ativo arriscado e utilizar o princípio da diversificação para otimizar suas carteiras de investimentos. As técnicas de otimização de portfólios são ferramentas quantitativas que permitem combinar ativos de forma eficiente a fim de atingir um conjunto de objetivos com relação ao risco e retorno do portfólio. Os gestores de carteira podem utilizar técnicas de otimização para determinar a composição de um portfólio.

O trabalho pioneiro na área de otimização de portfólio foi a proposição do modelo de média-variância por Markowitz (1952).

2.1 O MODELO DE MARKOWITZ

Em seu artigo, *Portfólio Selection* de 1952, Markowitz assume que investidores racionais escolhem entre ativos de risco baseado puramente sobre o retorno esperado e risco, com este último medido pela variância dos retonos. Markowitz identificou a necessidade de se considerar as caracteristicas individuais dos ativos na hora de construir um portfólio. Investidores devem levar em consideração os co-movimentos representados pela covariância dos ativos. Se os investidores considerarem a covariância na hora de montar o portfólio, Markowitz afirma que eles poderão construir portfólios que resultam em maior expectativa de retorno para um mesmo nível de risco ou um menor risco para um portfólio com o mesmo retorno esperado, do que portfólios que ignoram os co-movimentos de retorno dos ativos. A eficiência de média-variância se baseia em teorias firmes (Scherer & Martin, 2005):

- Os investidores têm função de utilidade quadrática, caso em que ignoram a não-normalidade dos dados, ou
- Os retornos são multivariadamente normais, caso em que a função de utilidade específica do investidor é irrelevante.

O modelo de portfólio de média-variância de Markowitz é a base para diversos estudos sobre avaliação das teorias de portfólio. É desta mesma base que o modelo de Black-

Litterman foi desenvolvido e, diante disso, é importante compreender o modelo de Markowitz.

De acordo com Markowitz (1952), os inputs necessários para criar um portfólio ótimo são: o excesso de retorno de cada ativo, a variância de cada ativo e covariâncias entre todos os ativos que serão usados pelo modelo.

No modelo de Markowitz os investidores assumem querer o maior retorno esperado mas com o menor risco possível. Para extrair o conjunto de carteiras possíveis (derivado do retorno esperado e da matriz de covariância estimada) que um investidor pode adquirir, é preciso resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} \min_{w} w^T \sum w \\ w^T \bar{r} = \bar{r}_p \end{cases} \qquad (2.1)$$

ou

$$\begin{cases} \max_{w} w^T \bar{r} \\ w^T \sum w = \sigma_p^2 \end{cases} \qquad (2.2)$$

w - coluna do vetor de pesos do portfólio

w* - portfólio ótimo de Markowitz

σ - variância do portfólio

r_p - retorno esperado do portfólio

r - coluna do vetor de retornos esperados

μ - coluna do vetor de excesso de retorno esperado

Σ - matriz de covariância[1]

Δ - parâmetro de aversão ao risco dos investidores.[2]

---

[1]. É necessário verificar se a matriz de covariância, Σ, é positiva semi-definida com o fim de assegurar que $w^T \Sigma w \geq 0$, porque uma variância nunca é negativa. Assumir que é positiva definida é equivalente a assumir que não existem ativos redundantes no portfólio.

[2] Advém do *trade-off* entre risco e retorno, e equivale a $\frac{\mu_p}{\sigma_p^2}$

Porém, muitas vezes o problema abaixo é resolvido, em vez dos expostos acima:

$$\max_{w} w^T \mu - \frac{\delta}{2} w^T \sum w$$

Este é efetivamente o mesmo que resolver o problema (2.1) e (2.2).

Resolver essa equação gera:

$W^* = (\delta\Sigma)^{-1}\mu$

Esta é a fórmula do portfólio ótimo de Markowitz.

2.2 PROBLEMAS NO USO DO MODELO DE MARKOWITZ

Apesar do modelo de média-variância de Markowitz parecer interessante e bastante razoável sob o ponto de vista teórico, vários problemas surgem quando se utiliza o modelo na prática. No artigo *The Markowitz optimization Enigma: Is "Optimized" Optimal?* (1989), Michaud discute os entraves práticos da utilização do modelo. Ele alega que em muitas vezes o modelo leva a portfólios ótimos irrelevantes e que alguns estudos mostraram que mesmo utilizando-se pesos iguais nos ativos, isso pode ser superior a otimização de portfólio de Markowitz. Em seu artigo Michaud também analisa outras desvantagens em utilizar o modelo.

Ao se utilizar o modelo de Markowitz, surgem importantes adversidades:

- De acordo com Michaud (1989), e Black e Litterman (1992), a otimização de Markowitz maximiza erros. Uma vez que não há previsão exata e correta dos retornos esperados e nem das variâncias e covariâncias, essas estimativas estão sujeitas a estimar erros. O otimizador de Markowitz coloca mais peso em ativos com alto retorno esperado e correlação negativa, e coloca menos peso naqueles com baixa expectativa de retorno e correlação positiva. Estes ativos são, segundo Michaud, aqueles que são mais propensos a ser sujeitos a grandes erros estimação.

- Michaud afirma que o hábito de usar dados históricos para produzir uma média da amostra e substituir o retorno esperado por essa média não é uma boa alternativa. Ele concluiu que isto contribui muito para maximizar o erro do modelo.

- O modelo de Markowitz não leva em conta o peso de mercado dos ativos (*market cap*). Isto sigifica que se os ativos com baixa captalização têm alto retorno esperado e estão negativamente correlacionados com outros ativos da carteira, o modelo pode sugerir um alto peso neles. Isto é normalmente um problema, especialmente quando inserimos uma restrição à posições *short* (venda de ativos). O modelo então, costuma sugerir alta concentração em ativos com baixa captalização.

- O modelo de média-variância de Markowitz não diferencia níveis de incerteza diferentes associados às estimativas introduzidas no modelo.

- Modelos de média-variância são frequentemente instáveis, o que significa que pequenas alterações nos dados introduzidos no modelo podem mudar drasticamente o portfólio. O modelo é especialmente instável em relação ao retorno esperado que se utiliza. Uma pequena mudança no retorno esperado de um ativo pode gerar um portfólio extremamante diferente. De acordo com Michaud, isso depende principalmente de uma matriz de covariância má estimada. Ele exemplifica matrizes de covariância má estimadas por aquelas estimadas com histórico de dados insuficiente.

Um dos problemas empíricos mais marcantes na utilização do modelo de Markowitz é quando se utiliza o otimizador sem restrições, visto que o modelo quase sempre recomenda carteiras com grandes pesos negativos (Black & Litterman, 1992). Fundos ou gestores de portfólio muitas vezes são impedidos de assumir posições vendidas (*shorts*). Por isso, uma restrição à venda de ativos é geralmente inserida no processo de otimização. O que acontece depois é que quando se otimiza o portfólio com as restrições, o modelo gera solução com peso zero em muitos ativos e portanto tem grandes posições em poucos ativos. Muitos investidores acham que portfólios desse perfil não são razoáveis e que, embora, muitos investidores estejam familiarizados com a idéia de otimização média-variância, esse problema é a maior razão para não utilizarem o modelo. Na realidade, porém, cada aproximação sobre retorno futuro e risco é bastante incerta e a chance de que esteja absolutamente correta é baixa. Uma vez que a estimação do risco e retorno futuros é incerto, parece razoável que os investidores queiram investir em carteiras que não são potenciais desastres se suas estimativas se mostrarem incorretas. No entanto, o modelo de Markowitz costuma gerar carteiras que são muito instáveis como, por exemplo, sensíveis à mudanças nos parâmetros, o que significa que uma pequena mudança nos inputs muda radicalmente a composição da carteira. Michaud (1989) afirma que estimativas melhores para os inputs poderia ajudar com os problemas de não-intuitividade dos portfólios de Markowitz. Contudo, não é possível prever os retornos esperados futuros, variâncias e covariâncias com 100% de confiança.

Estimar a covariância entre ativos também é um problema: em um portfólio com 10 ativos, o número de variâncias que precisam ser estimadas serão de 10, mas o número de covariâncias que precisam ser estimadas serão 45. Isto, parece ser muito para um único gestor/investidor estimar.

Embora existam várias desvantagens graves no uso do modelo de média-variância de Markowitz, a idéia de maximizar o retorno esperado, minimizando o risco ou otimizando o *trade-off* entre risco e retorno esperado, é tão intuitiva que a busca por modelos melhores e mais bem comportados continuou. O modelo de Black-Litterman é um deles.

3. O MODELO DE BLACK-LITTERMAN

O modelo de Black-Litterman foi criado para tentar resolver os problemas encontrados quando se utiliza na prática o modelo de Markowitz, tornando possível o uso de ferramentas quantitativas de alocação de ativos. Black e Litterman (1992) propuseram um meio de estimar os retornos esperados dos ativos para conseguir um modelo de portfólio mais bem comportado, exigindo, no entanto, que a carteira de ativos se situasse na fronteira-eficiente. Se esse não fosse o caso, seria possivel obter um portfólio melhor por meio da abordagem de média-variância. O modelo Black-Litterman, geralmente, é referido como um modelo completamente novo. Na verdade, o modelo Black-Litterman se difere do modelo de Markowitz apenas no que diz respeito ao retorno esperado. Contudo, o modelo de Black-Litterman gera portfólios que diferem consideravelmente dos portfólios gerados pelo modelo de Markowitz.

3.1 A ABORDAGEM BAYESIANA PARA O MODELO DE BLACK-LITTERMAN

A estatística bayesiana é uma abordagem natural para interpretar o modelo de Black-Litterman, pois fornece uma teoria para combinar informações de diferentes fontes e modelar a incerteza inerente a essa informação (Herold, 2003).

A abordagem combina informação prévia (informação considerada relevante, embora não necessariamente na forma de amostra de dados) com a amostra de dados. Através do uso repetido do Teorema de Bayes, a informação prévia é atualizada. A idéia é mesclar as informações do mercado, com informações do investidor.

Na abordagem bayesiana precisamos definir o que será considerado informação prévia e o que será considerado informação amostral. Satchell e Scowcroft, assim como Christodoulakis e Cass, usam as opiniões dos investidores como informações prévias e a informação do mercado (retorno de equilíbrio) como informação amostral para atualizar a informação prévia gerando o retorno esperado *posteriori*.

Vamos considerar duas possibilidades de eventos:

A = retorno esperado

B = retono de equilíbrio

Usando o Teorema de Bayes podemos decompor a probabilidade conjunta de A e B da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\Pr(A, B) &= \Pr(A|B)\,\Pr(B) \\
&= \Pr(B|A)\,\Pr(A)
\end{aligned}
$$

Então,

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A)\Pr(A)}{\Pr(B)}$$

Assim, a função densidade de probabilidade (FDP) do retorno esperado, dado o retorno de equilíbrio, Pr(A|B), é definido pelo produto da FDP condicional do retorno de equilíbrio, Pr(B|A), e do FDP do retorno esperado, Pr(A), que especifica a opinião subjetiva do gestor, em unidades marginais de probabilidades, Pr(B), dos retornos de equilíbrio. Portanto, a Teoria de Bayes prevê um mecanismo formal para especificar as opiniões subjetivas com os dados de mercado. Com novos dados incorporados, a densidade posterior é a distribuição mais consistente possível com as duas fontes de informação.

Um problema geral no uso de teoria de Bayes é identificar uma distribuição prévia intuitiva e tratável. Um dos pressupostos fundamentais do modelo de Black-Litterman (e da otimização de média-variância) é que os retornos de ativos são normalmente distribuídos. Por esse motivo, limitaremos ao caso da distribuição condicional e distribuições prévias normais. Dado que as entradas são distribuições normais, então conclui-se que a posterior também será normalmente distribuída.

3.2 O RETORNO DE EQUILÍBRIO, Π

Na economia, o equilibrio é um estado idealizado em que a oferta se iguala a demanda (Litterman, 2003). Essa situação nunca ocorre realmente nos mercados financeiros, mas há uma série de atrativos sobre essa idéia. Segundo Litterman, existem “forças naturais”, na forma de arbitragem, no sistema financeiro que funcionam para eliminar desvios do equilíbrio. Mesmo se houver perturbações nos mercados, como ruído dos operadores, incerteza sobre as informações e a falta de liquidez, que resulta em situações em que os desvios são grandes e que o ajuste leva tempo, há uma tendência de que esses desvios, ao longo do tempo, serão corrigidos. Assim, os mercados não assumem estar em equilíbrio (Litterman 2003). O equilíbrio é visto como um centro de gravidade. Os mercados desviam deste estado, mas forças no sistema irão empurrar os mercados no sentido do equilíbrio. Portanto, a idéia de equilíbrio como um ponto de referência para o modelo de Black-Litterman é uma espécie de condição ideal.

Litterman (Litterman, 2003) admite que nenhuma teoria financeira pode capturar a complexidade dos mercados financeiros. Ainda assim, “Teoria de finanças tem mais a dizer sobre os mercados que se comportem de uma maneira racional. Se começarmos supondo que os mercados são simplesmente irracionais, então temos pouco mais a dizer” (Litterman 2003). A extensa quantidade de literatura que aceita essa hipótese, de mercados livre de arbitragem, corrobora com essa idéia. De acordo com Litterman, também precisamos adicionar o pressuposto de que os mercados, ao longo do tempo, se moverão para um equilíbrio racional, a fim de tomar vantagem da teoria de portfólio. Ele afirma que a teoria de portfólio faz previsões sobre como os mercados irão se comportar, diz a investidores como estruturar suas carteiras, como minimizar o risco e também, a melhor maneira de desviar do equilíbrio.

Um dos modelos de equilíbrio mais utilizado em finanças é o CAPM. Este fornece uma visão sobre os retornos de longo prazo de diferentes ativos, assumindo o mais simples de todos os mundos. O CAPM é baseado no conceito de que existe uma relação linear entre o risco (medido pelo desvio padrão dos retornos) e o retorno. Além disso, exige que os retornos sejam normalmente distribuidos. A fórmula do modelo é a seguinte:

$E(r) = r_f + \beta r_m + \alpha$

Onde:

r_f - taxa livre de risco

r_m- excesso de retorno do portfólio de mercado

β - coeficiente de regressão. $\beta = \rho \frac{\sigma_p}{\sigma_m}$

α - o residuo, ou excesso de retorno de ativos específicos (idiossincráticos)

O CAPM afirma que os investidores serão apenas compensados por tomar riscos necessários. O risco da carteira de mercado, β, é inevitável e necessário, enquanto o risco não correlacionado com o mercado, α, pode ser evitado através da diversificação. Assim, o investidor é recompensado pelo risco sistemático, mas não é recompensado por ter assumido o risco idiossincrático.

O teorema da separação de carteiras é estritamente relacionado com a teoria do estado CAPM e afirma que todos os investidores devem manter dois ativos: a carteira de mercado do CAPM e o ativo livre de risco. A chamada *Capital Market Line* é derivada desenhando uma linha tangente a partir do ponto de intercepto na fronteira eficiente até o ponto onde o retorno esperado iguala o retorno do ativo livre de risco. Dependendo de sua aversão ao risco, os investidores terão um portfólio nessa linha, com uma fração da sua riqueza em ativos de risco, e o restante no ativo livre de risco. Todos os investidores compartilham o mesmo portfólio arriscado, a carteira de mercado do CAPM. Essa carteira está na fronteira eficiente e possuí o maior Índice de Sharpe[3] que qualquer outra situada na fronteira eficiente. Todos os investidores devem ter seu portfólio nessa linha por possuir uma mistura do ativo livre de risco e a carteira de mercado. Porque todos os investidores detêm apenas a carteira de mercado para a sua carteira de ativos de risco, em equilíbrio, a capitalização de mercado dos diferentes ativos vai determinar seus pesos na carteira de mercado.

[3] Índice de Sharpe - indicador que mede o retorno por nível de risco de cada carteira ou ativo. O objetivo é ajustar o retorno do ativo pelo seu risco, ou seja, quanto maior o retorno e menor o risco do investimento, melhor será o Índice de Sharpe. Índice de Sharpe = (Retorno do Ativo - Taxa livre de Risco)/Devio Padrão dos retorno do ativo)

Como estamos iniciando com a carteira de mercado, o somatório dos pesos de cada ativo naturalmente soma 1. A carteira de mercado inclui apenas os ativos de risco, porque, por definição, os investidores são recompensados apenas para a tomada de risco sistemático. No modelo CAPM, o ativo livre de risco, com β=0, não estará presente na carteira de mercado.

Vamos restringir o problema ao afirmar que a matriz de covariância dos retornos, Σ, é conhecida. Na prática, esta matriz de covariância é calculada a partir dos dados de retorno histórico. Ela também poderia ser estimada, no entanto, existem questões importantes envolvidas em estimar uma matriz de covariância consistente. Conforme dito no capítulo anterior, pesquisas afirmam que os resultados do modelo de média-variância são menos sensíveis aos erros na estimativa da variância e que a covariância da população é mais estável ao longo do tempo que o retorno, por isso, nos basearmos em dados de covariância histórica não deverá apresentar erro excessivo ao modelo. Além disso, computando a partir de dados reais, sabemos que a matriz de covariância resultante será definida positiva. É possível, quando estimamos uma matriz de covariância, criar uma que não seja positiva definida e, portanto, não-realizável.

Para derivarmos o retorno esperado estimado pelo mercado, definimos a seguinte função de utilidade dos agentes:

$$U = w^T \Pi - \left(\frac{\delta}{2}\right) w^T \Sigma w \qquad (3.1)$$

U - utilidade dos investidores, essa é a função objetivo durante a otimização de carteiras;
W - vetor de pesos investidos em cada ativo;
Π - vetor de equilíbrio de excesso de retorno para cada ativo;
δ - parâmetro de aversão ao risco do mercado;
Σ - matriz de covariância dos ativos.

U é uma função côncava, por isso terá um máximo global único. Se maximizarmos a utilidade, sem restrições, encontraremos uma forma de solução fechada. A solução exata é encontrada calculando a primeira derivada de (3.1) com relação aos pesos (w) e defini-lo igual a 0.

$$\frac{dU}{dw} = \Pi - \delta\Sigma w = 0$$

Resolvendo isto por Π (vetor de excesso de retorno) temos:

$$\Pi = \delta\Sigma w \qquad (3.2)$$

Para usar a fórmula (3.2) precisamos ter um valor para δ, o coeficiente de aversão ao risco de mercado. Bevan e Winkelmann (1998) descrevem o seu processo de calibração dos retornos a um Índice de Sharpe médio com base em suas experiências.

Podemos encontrar δ multiplicando ambos os lados de (3.2) por w^T e substituindo os termos do vetor com os termos escalar.

$$Rm - Rf = \delta\sigma^2$$

Com isso, o coeficiente de aversão ao risco, δ, é geralmente determinado como

$$\delta = \frac{Rm - Rf}{\sigma_m^2}$$

onde

R*m* - retorno de mercado ($Rm = w^T\Pi + r_f$);

R*f* - taxa livre de risco;

σ^2_m - variância da carteira de mercado ($\sigma^2_m = w^T\Sigma w$).

Uma vez que temos um valor para δ, então nós inserimos w, δ e Σ na fórmula (3.2) e geramos o conjunto de retornos de equilíbrio dos ativos. A fórmula (3.2) é a solução fechada para o problema de otimização reversa de ativos gerando retornos dos ativos para uma carteira ótima de média-variância, sem restrições.

Como pode-se ver, as informações históricas não influenciam diretamente na determinação de Π. A variável δ pode ser interpretada como o parâmetro de aversão ao risco. Os retornos de equilíbrio podem ser interpretados como o retorno de longo prazo que os mercados de capitais fornecem e que igualam a oferta e demanda dos ativos financeiros. No Black-Litterman são utilizados para "centrar" a carteira ótima em torno da carteira de mercado. Ao comparar os retornos implícitos com os retornos esperados que um investidor pode ter, os pesos da carteira podem ser modificados de forma interativa.

Segundo Grinold (1996), a engenharia reversa tem várias vantagens. Primeiro, ela fornece um ponto de partida para encontrar retornos razoáveis. Em segundo lugar, a qualidade dos retornos esperados dependem em grande medida da qualidade das estimativas de variâncias e covariâncias, erros que tendem a ser pequenos. Em terceiro lugar, os retornos esperados são consistentes com um portfólio que se presume ser eficiente. Em quarto lugar, esta metodologia permite separar as expectativas incondicionais das condicionais, pois os retornos esperados obtidos não incluem qualquer informação adicional ao do mercado.

No entanto, Grinold (1996) constata que existem certas dificuldades e perigos na utilização da engenharia reversa. O maior problema é esquecer que os retornos obtidos são contextuais, ou seja, dependente da relação entre uma carteira e uma matriz de covariância. Caso se abandone esse contexto provavelmente, a calibração e os resultados não farão sentido.

O vetor de excesso de retornos esperados, μ, assume ter uma distribuição de probabilidade que é proporcional ao produto de duas distribuições normais. A primeira distribuição representa o equilíbrio: é centrado em Π com matriz de covariância $\tau\Sigma$, onde τ é uma constante que reflete o grau de incerteza sobre a precisão com que Π é calculado.

Portanto, a distribuição de μ é a seguinte:

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

Esta é a distribuição prévia para o modelo Black-Litterman, e representa a estimativa da média da distribuição dos excessos de retorno.

3.3 A CONFIANÇA NO EQUILÍBRIO: O PARÂMETRO τ

O parâmetro escalar τ pode ser interpretado como o grau de incerteza dos investidores sobre a validade do CAPM. Também pode ser visto como um parâmetro que representa a incerteza sobre a precisão com que se estima o vetor Π. Neste último sentido, um pequeno valor de τ corresponde a um elevado nível de confiança nas estimativas de retornos de equilíbrio devido ao redimensionamento para baixo da matriz de covariância dos retornos históricos.

Como a incerteza sobre a média deve ser menor do que a incerteza da variável, geralmente τ é determinado como um valor inferior a 1 e próximo de zero. Alguns autores, geralmente, estabelecem um valor entre 0,01 e 0,05 para τ (Idzorek, 2004).

Outros autores consideram τ como a incerteza no valor estimado de Π dada a amostra de retornos de tamanho T, utilizados para estimar a matriz de covariância, então:

$\tau = \frac{1}{T}$ O estimador de máxima verossimilhança

$\tau = \frac{1}{T-K}$ O melhor estimador quadrático não-viesado

T O número de amostras

K O número de ativos

Existem outros estimadores, mas, geralmente, a primeira definição acima é a mais utilizada. Comumente os artigos utilizam um número de amostras em torno de 60 (5 anos de amostragens mensais), então τ é da ordem de 0,02. Isto é, provavelmente, consistente também com o modelo para calcular a variância da distribuição, Σ.

Também poderíamos calibrar τ em relação ao montante investido no ativo sem risco, dada a distribuição prévia. Aqui verifica-se que a carteira investida em ativos de risco, dada opinião prévia será

$$w = \Pi[\delta(1+\tau)\Sigma]^{-1}$$

Assim, os pesos atribuídos aos ativos são menores em [1/(1 + τ)] do que os pesos de mercado do CAPM. Isso ocorre porque o nosso investidor Bayesiano é incerto em sua estimativa da prévia, e portanto não querem estar 100% investidos em ativos de risco.

3.4 ESPECIFICANDO AS OPINIÕES, A MATRIZ P E A MATRIZ Q

A idéia por trás do modelo de Black-Litterman é combinar o retorno de equilíbrio com as opiniões específicas dos investidores sobre os retornos do mercado. Esta opinião será definida como a distribuição condicional.

Primeiramente, por construção, iremos exigir que cada opinião seja não correlacionada com as outras opiniões. Isto dará a distribuição condicional a propriedade que a matriz de covariância seja diagonal, com todas as entradas fora da diagonal iguais a 0. Restringir o problema desta forma ajuda a melhorar a estabilidade dos resultados e simplifica o problema. Estimar as covariâncias entre as opiniões seria ainda mais complicado e sujeito a erros do que estimar as variâncias das opiniões. Segundo, exigiremos que as opiniões sejam totalmente investidas, ou a soma dos pesos em uma opinião é zero (opinião relativa) ou soma um (opinião absoluta). Não é exigido uma opinião sobre todos os ativos.

Então, o investidor tem um conjunto de K opiniões representadas por relações lineares. Uma opinião é expressa de forma que o retorno esperado de uma carteira P_k é normalmente distribuído com média Q_k e um desvio padrão de ω_k.

As N opiniões, com seus respectivos retornos esperados, podem ser representados como:

$P' = [\ p_1, p_2, \ldots, p_k]$
$Q' = [q_1, q_2, \ldots, q_k]$

Do exposto, expectativas ou opiniões são expressas da seguinte maneira:

$P \,.\, \mu = Q + e$

Onde

P - matriz K x n conhecida
Q - vetor K x 1 conhecido
e - vetor aleatório K x 1 normalmente distribuido com média zero e matriz diagonal de covariâncias Ω.

Ou seja,

$P.\mu \sim N\ (\ Q, \Omega\ )$

onde Ω é uma matriz diagonal K x K com elementos ω_{ii} na diagonal e zeros nas outras posições. Um grande ω_{ii} representa um menor grau de confiança nos retornos esperados Q.

Devido à complexa interação entre os retornos esperados, as volatilidades e as correlações entre os ativos, as opiniões sobre poucos ativos envolvem mudanças nos retornos esperados de todos os bens. O modelo ajusta os retornos esperados a partir de seus valores iniciais de uma maneira consistente com as opiniões expressas. Adicionar uma opinião cria um viés em direção a essa opinião só quando a expectativa é mais otimista do que o retorno esperado implícito no Black-Litterman, sem essa expectativa (Litterman, 2003).

3.5 CONFIANÇA NAS OPINIÕES, A MATRIZ Ω

Litterman (2003) afirma que não há um método único ou universal para a determinação da matriz de covariância das opiniões, Ω. Segundo a metodologia Black-Litterman, o gestor da carteira sabe o que esses parâmetros representam e pode, portanto, tratar de forma intuitiva a questão de saber se estas especificações fazem sentido ou não.

O valor de ω_{kk} é inversamente proporcional ao grau de confiança dos investidores na k-ésima opinião. Se o investidor não confia muito em suas opiniões, a composição da carteira final deve pender mais para o portfólio de equilíbrio. Se, no entanto, o investidor está muito confiante em suas opiniões, a composição da carteira final será determinada principalmente pelas opiniões e com isso os pesos da carteira irão se afastar mais da carteira de equilíbrio do mercado.

Existem várias formas de calcular Ω.

- Proporcional à variância a *priori*
- Utilizando um intervalo de confiança
- Utilizando a variância dos resíduos em um modelo de fator
- Utilizando o método de Idzorek para especificar a confiança ao longo da dimensão dos pesos

He e Litterman (1999) calibram a confiança de uma opinião de tal forma que $\omega_k/\tau = p_k\Sigma p_k$ ou, o que é igual $\omega_k = \tau(p_k\Sigma p_k)$, ou seja, é proporcional para a variância a *priori*. Quando a matriz Ω é estimada desta forma, o valor escalar, τ, é irrelevante, porque só a razão ω_k/τ entra no modelo. Neste caso,

$$\Omega = \mathrm{diag}(P(\tau\Sigma)P')$$

Alterações nos níveis de confiança das opiniões podem ser usadas para controlar o balanço da carteira ótima, ou seja, para reduzir o impacto das posições extremas e torná-la mais diversificada. Black e Litterman (1992) definem o equilíbrio de uma carteira como uma medida de quão similar é o portfólio da carteira de equilíbrio global. A medida usada para determinar a distância é a volatilidade da diferença de retornos das duas carteiras. Outra maneira de calcular Ω é definindo intervalos de confiança em torno do retorno médio estimado, como mostrado no exemplo a seguir.

Suponha que o universo de investimento é constituído por quatro ativos A, B, C e D e considere as seguintes opiniões do mercado:

- O ativo A deve apresentar um rendimento de 8%
- O ativo B irá exceder o ativo D em 3%

A primeira opinião é do tipo absoluta, enquanto a segunda é do tipo relativa. Os elementos de uma linha da matriz P que corresponde a uma opinião absoluta deve somar um, enquanto uma opinião relativa deve somar zero. De acordo com o exposto acima, então, deve

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Uma possível abordagem para determinar os elementos da diagonal Ω, ω_{ii}, é fazer uma suposição estatística sobre a distribuição de cada opinião. Por exemplo, suponha que, na opinião relativa anterior, o investidor tem uma confiança de 95% de que sua projeção deve estar entre 2% e 4%. Supondo que a opinião é normalmente distribuída pode ser encontrado que o desvio padrão implícito é de 0,5% e, portanto, $\omega_{22} = (0{,}5\%)^2 = 0{,}25\%$.

3.6 O RETONO ESPERADO DE BLACK-LITTERMAN

O equilíbrio de mercado, se combina com as opiniões dos agentes de acordo com a abordagem bayesiana para gerar a distribuição posterior dos retornos esperados, μ, que é normal com média μ_{BL} dada por:

$$\mu_{BL} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q\right]$$

$$= \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}P\hat{\mu}\right]$$

e variância posterior M^{-1} dada por:

$$\overline{M}^{-1} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}$$

onde μ é o valor estimado dos retornos esperados implícito nas opiniões, ou seja, $\hat{\mu} = (P'P)^{-1}P'Q$. Concentrando-se na expressão no segundo conjunto de parênteses, pode-se observar que o modelo de Black-Litterman é simplesmente uma média ponderada do equilíbrio de mercado, Π, e do retorno esperado implícito nas opiniões do investidor, $\hat{\mu}$, com pesos iguais à

$$w_{\Pi} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}$$

$$w_{Q} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}P'\Omega^{-1}P$$

Onde

$$w_{\Pi} + w_{Q} = I$$

Isto significa que os pesos relativos são determinados pelo grau de dispersão percebida nos retornos esperados de equilíbrio e na confiança nas expectativas, respectivamente.

Como os retornos dos ativos estão correlacionados, opiniões sobre alguns ativos implicará mudanças nos retornos esperados de todos os ativos. Na verdade, $P' \Omega^{-1}$ é uma matriz NxK que propaga as K opiniões em N componentes, $P' \Omega^{-1} Q$. Se esse ajuste não for feito no vetor dos retornos esperados, as diferenças entre os retornos esperados de equilibrio e as opiniões do investidor poderiam ser interpretadas como oportunidades de arbitragem pelo otimizador conduzindo a portfólios concentrados em poucos ativos ("soluções de canto"). Em termos intuitivos, qualquer erro de estimação é dispersa entre todos os ativos, fazendo o retorno de Black-Litterman menos sensível a erros de opiniões individuais (Fabozzi et al., 2007).

Os retornos esperados, μ_{BL}, não devem ser tratados como projeções ou expectativas de curto prazo, mas como pontos de referência. As situações em que as expectativas estão em desacordo com estes prêmios de risco são consideradas oportunidades de investimento. Também é importante notar que a aproximação dos retornos esperados de Black-Litterman não dependem diretamente dos retornos históricos.

De acordo com a teoria financeira moderna, um investidor neutro em relação ao mercado, ou seja, que não tem expectativas diferentes do consenso de mercado, deve manter a carteira de mercado. O modelo de Black-Litterman é coerente com esta proposição, porque quando o investidor não manifestar qualquer expectativa, ou a confiança nas opiniões é zero (a matriz P é composta somente por zeros), os retornos esperados posteriores serão $\mu_{BL} = \Pi$. Da mesma forma, quando a incerteza na expectativa é muito grande, μ_{BL} é dominado por Π e no limite tende a este, em ambos os casos um investidor racional acaba possuindo a carteira de mercado e o ativo livre de risco. Na ausência de restrições, o Black-Litterman recomenda um desvio da ponderação da capitalização de mercado de um ativo somente se houver uma opinião sobre ele.

O retorno esperado de Black-Litterman também pode ser escrito como

$$\mu_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P'\left(\Omega + \tau P\Sigma P'\right)^{-1}\left(Q - \mathrm{P}\Pi\right)$$

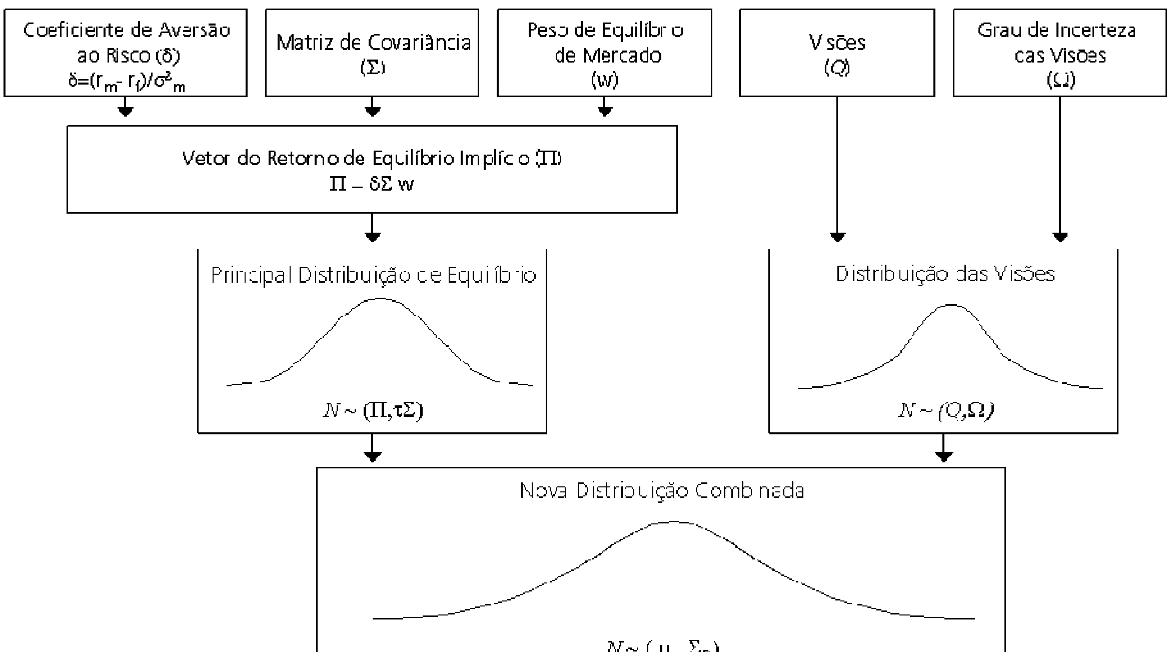
onde fica evidente que o investidor se desvia do equilíbrio com um vetor proporcional a $\tau\Sigma P'(\Omega + \tau P\Sigma P')^{-1}(Q - P\Pi)$. A partir desta definição, podemos observar que quando o investidor está 100% confiante em todas as K opiniões (o que equivale a colocar todos os elementos de Ω iguais a zero), os retornos de Black-Litterman serão iguais a

$$\mu_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P'(\tau P\Sigma P')^{-1}(Q - P\Pi)$$

Como afirmado por Lee (2000), embora o Black-Litterman original pressupõe que o CAPM é válido ou que pode ser aplicado na prática, esta hipótese não afeta os conceitos e a derivação acima. Uma alternativa é substituir o vetor de retornos de equilíbrio do CAPM pelo vetor de retornos esperados que fazem o investidor neutro com relação a qualquer aposta tática ou de curto prazo. Ou seja, ao invés de assumir que o retorno do CAPM se aplica, o investidor pode usar o vetor de retornos que o faria manter a sua carteira de referência estratégia ou de longo prazo, como discutido acima.

Uma vez calculados os retornos de Black-Litterman pode-se continuar a realizar a otimização de carteiras. A Figura 1 resume a metodologia do modelo de Black-Litterman que foi apresentada até agora.

Gráfico 1. Metodología de Black-Litterman



Fonte Idzorek, 2004

Para resolver o problema de otimização de média-variância é necessário conhecer a média e covariância da distribuição dos retornos esperados. A média da distribuição dos retornos é igual a média posterior dos retornos esperados, μ_{BL}, enquanto que a covariância da distribuição preditiva inclui um termo que reflete o erro de estimação. A média e a covariância são, respectivamente, (Rachev et al., 2008):

$$\tilde{\mu} = \mu_{BL} \qquad \text{e} \qquad \tilde{\Sigma} = \Sigma + \mathrm{M}^{-1}$$

Assim, a solução para o problema de otimização de uma carteira sem restrições é dado pelo vetor de pesos ótimos w*

$$w^* = \left(\lambda \tilde{\Sigma}\right)^{-1} \tilde{\mu}$$

Na presença de restrições ao investimento, o vetor de retornos μ_{BL} e a matriz de covariância Σ são introduzidos em um otimizador de média-variância.

3.7 VANTAGENS DO MODELO DE BLACK-LITTERMAN

As principais vantagens do modelo são as seguintes:

1. Sua flexibilidade. O modelo permite que o gestor da carteira inclua suas expectativas sobre o mercado e, antes da chegada de novas informações, atualizá-las. Diferentemente do modelo padrão de média-variância, o modelo de Black-Litterman não exige que os retornos esperados de cada ativo sejam estimados. Só é necessário que o investidor estime o retorno esperado para os ativos sobre os quais ele tem uma opinião valiosa. Isto é mais consistente com a prática, pois é muito difícil para o administrador ter conhecimento detalhado ou uma expectativa significativa de cada um dos ativos em carteira. Além disso, existem muitos graus de liberdade na aplicação do modelo, que geralmente são usados interativamente até que o investidor sinta que ele conseguiu obter o equilíbrio da carteira. Esta flexibilidade é que torna o modelo tão atraente para diferentes investidores com diferentes situações (Lee, 2000).

2. Em relação à anterior, outra vantagem é que o investidor pode tomar risco onde ele realmente tem uma opinião e em uma maior magnitude em que tem a maior confiança (Bevan e Winkelmann, 1998). Na verdade, o modelo permite aos investidores separar as projeções ("para onde vai o mercado?") do grau de crença ou confiança nelas ("Como eu confio muito que a minha projeção esta correta?") (Scherer, 2007.) Em outras palavras, o modelo permite diferenciar entre a "força" de uma opinião (a magnitude da opinião) e a "confiança" em uma opinião (o grau de certeza com que é expressa).

3. A metodologia produz carteiras mais equilibradas e estáveis no tempo ao utilizar os retornos de equilíbrio como um centro de gravidade. A solução é "ancorada" na reconhecida carteira de mercado. Consequentemente, a necessidade de girar a carteira e os custos de transação são menores.

4. Mitiga o problema de maximizar os erros de estimação espalhando os erros ao longo do vetor de retornos esperados (Idzorek, 2004). Esta abordagem bayesiana para seleção de carteiras leva em conta diretamente a incerteza na estimação (Rachev et al., 2008). O modelo reconhece que apenas a utilização de informações da amostra não pode lidar com o impacto da incerteza nos parâmetros na seleção da carteira (Scherer, 2002).

5. Permite expressar opiniões ou expectativas de mercado de forma relativa, ou seja, classificar o desempenho esperado de um ativo em relação à outro. As estratégias relativas são muito comuns na prática do mercado. Se todas as opiniões são relativas, não há necessidade de prever a direção do mercado.

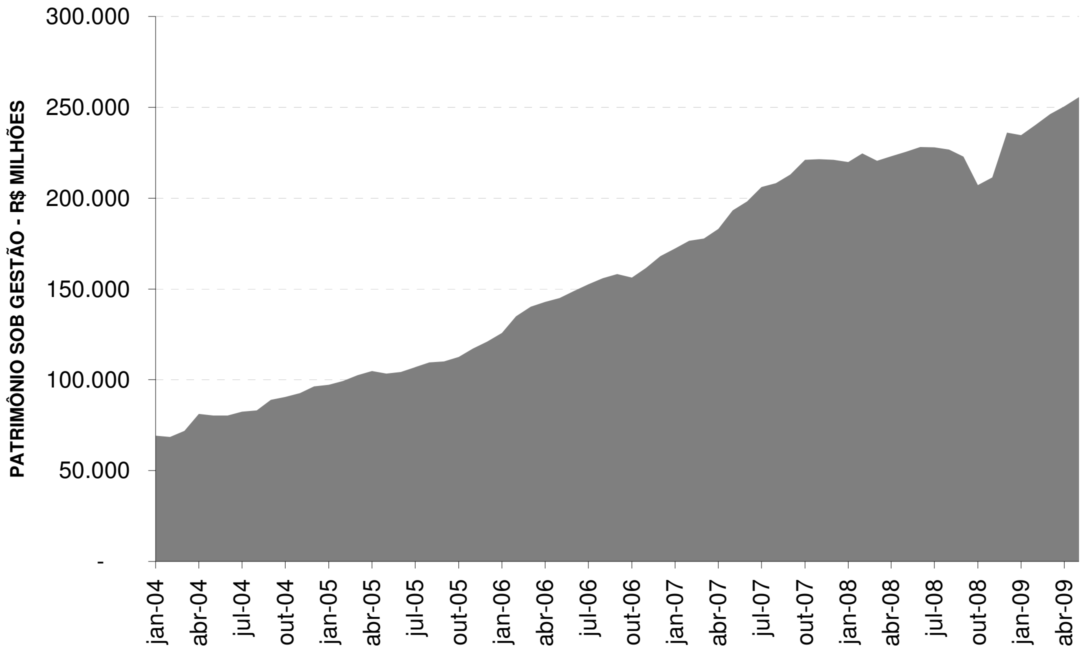
6. Permite aos administradores aderir as mesmas opiniões enquanto lidam com diferentes restrições em suas carteiras. Sob a abordagem de Black-Litterman, as restrições detalhadas de cada carteira de investimentos ou mandato podem ser tratadas na fase final de otimização, com as opiniões aplicadas de forma consistente através de todos portfólios. Na verdade, o retorno esperado não deve ser afetado pelas restrições da carteira. Separando estas duas fases é muito mais fácil para garantir a consistência e explicar as diferentes atribuições entre carteiras (Fok e Benzschawel, 2007).

4. APLICAÇÃO AO MERCADO BRASILEIRO DE HEDGE FUNDS

A indústria de fundos multimercados (*hedge funds*) no Brasil foi criada em 2004 com a Instrução n°409 da CVM (Comissão de Valores Mobiliários), que dispõe sobre a constituição, a administração e o funcionamento dos fundos de investimento. De acordo com essa instrução, os fundos classificados como multimercados devem possuir políticas de investimento que envolvam vários fatores de risco, sem o compromisso de concentração em nenhum fator em especial ou em fatores diferentes das demais classes (Art. 97, CVM 409).

Efetivamente, não foi a partir desta data que fundos com essas características foram criados, mas a partir desta resolução, a indústria de fundos multimercados teve um crescimento considerável de volume sob gestão, como pode ser observado no gráfico abaixo.

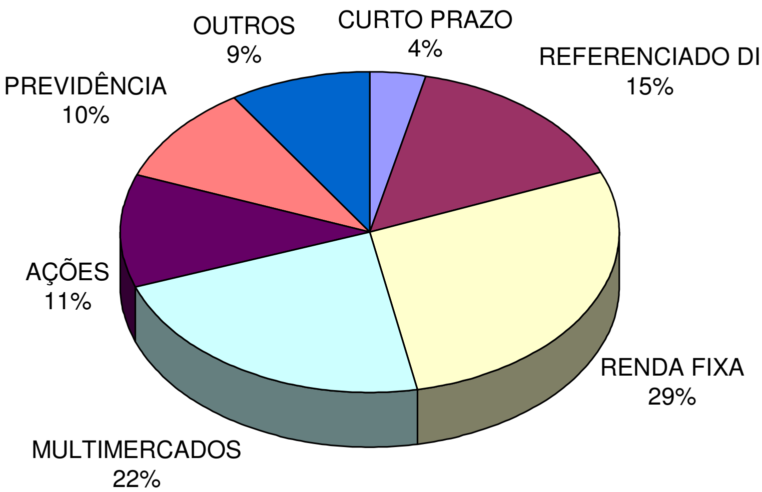
Gráfico 2. Evolução do valor patimonial dos fundos multimercados (janeiro 2004 - maio 2009)



Fonte: Anbima

Atualmente existem cerca de 5.000 fundos classificados como multimercados, administrando um total de R$ 250 bilhões de reais, representando, atualmente, a segunda maior classe de fundos em volume sob gestão.

Gráfico 3. Distribuição do patrimônio da indústria em maio de 2009 (classificação Anbima)



Outros: FIDC, Participações, Cambial, Dívida Externa, Off-Shore, Imobiliário e Exclusivos Fechados
Fonte: Anbima

Grande parte dos gestores destes fundos utiliza um processo de investimento bem definido, com uma reunião diária pela manhã (reunião de caixa), uma semanal sobre macroeconomia e uma sobre posições. Contudo, a escolha dos ativos e, principalmente, o montante de risco a ser alocado em cada ativo é um processo bastante subjetivo, sem que haja uma abordagem quantitativa teórica para dar suporte à tomada de decisão. Efetivamente, significa dizer que os gestores não utilizam um modelo teórico para definir qual a melhor alocação em termos de risco x retorno de acordo com suas opiniões, a respeito de determinados ativos.

Nessa etapa do estudo pretendemos: aplicar o modelo de Black-Litterman para a construção e gestão estratégica do fundos multimercados no Brasil; e testar a eficácia das informações obtidas no relatório FOCUS do Banco Central, utilizando-as como inputs das opiniões dos gestores sobre os ativos. Iremos criar carteiras de investimento teóricas de acordo com o resultado apresentado por cada modelo e compará-las entre si e entre a média da industria de fundos multimercados brasileiros. Iniciaremos, compondo uma carteira pelo método tradicional de média-variância e iremos compará-la ao portfólio de equilíbrio de mercado (carteira do modelo de Black-Litterman sem a introdução das opiniões), para verificar se a alocação de equilíbrio de mercado se sobressai ao modelo tradicional de otimização no mercado brasileiro. Posteriormente, iremos analizar a performance da carteira de equilíbrio de mercado comparando-a em relação a uma carteira gerada com as opiniões do FOCUS sobre alguns ativos, para verificar se essas opiniões agregam valor ao portfólio. E, por fim, iremos comparar essa carteira pelo método de Black-Litterman com as opiniões do FOCUS, com três índices de fundos multimercados brasileiros e verificar se o modelo, juntamente com as opiniões do FOCUS, superam o resultado obtido pela média da indústria de fundos.

4.1 DADOS

Primeiramente, é necessário determinarmos os índices de referência com o qual se aproximam as diferentes classes de ativos que compõem o universo de investimento dos fundos multimercado. Analisando as carteiras de alguns destes fundos e a classe de ativos que são mais negociados, encontramos que os investimentos dos fundos multimercados podem ser representados pelas seguintes fontes de risco: bolsa, dólar, renda fixa pré-fixado, renda fixa pós-fixado e juros reais.

A tabela 1 resume os índices utilizados para cada classe de ativos e a fonte onde os dados foram obtidos.

Tabela 1. Séries utilizadas

Classe de Ativos	Descrição	Fonte
Bolsa	IBX-100. As 100 ações mais negociadas na Bovespa.	Bovespa [Bloomberg IBRX Index]
Dólar	Pcot Venda. Cotação de fechamento do dólar comercial na data de cálculo (venda).	Banco Central [AE Broadcast AEUSCO]
Renda Fixa Pré-Fixado	IRF-M. Carteira composta por todos os títulos públicos federais prefixados.	Andima [www.andima.rtm/site-andima/ima/ima-carteira.asp]
Renda Fixa Pós-Fixado	IMA-S. Carteira composta por todos os títulos públicos federais pós-fixados atrelados a Selic.	Andima [www.andima.rtm/site-andima/ima/ima-carteira.asp]
Juros Reais	IMA-B. Carteira composta por títulos públicos federais atrelados ao IPCA.	Andima [www.andima.rtm/site-andima/ima/ima-carteira.asp]

Para representar o *market cap* dos ativos foi selecionado o volume total de recursos para cada classe, conforme exposto na tabela abaixo.

Tabela 2. Descrição do *market cap* de cada classe de ativos e sua fonte

Classe de Ativos	Descrição	Fonte
Bolsa	Valor de Mercado das ações do IBX-100	Bovespa
Dólar	Valor total de títulos da Dívida Externa Nacional	Banco Central
Renda Fixa Pré-Fixado	Valor total de títulos pré-fixados da Dívida Interna Nacional, CDB's e Debentures	Banco Central, CETIP e ANDIMA
Renda Fixa Pós-Fixado	Valor total de títulos pró-fixados da Dívida Interna Nacional, CDB's e Debentures	Banco Central, CETIP e ANDIMA
Juros Reais	Valor total de títulos indexados ao IPCA da Dívida Interna Nacional, CDB's e Debentures	Banco Central, CETIP e ANDIMA

Para expressar a opinião dos gestores sobre os ativos, foram utilizados os dados do boletim FOCUS do Banco Central. Esse relatório divulga uma pesquisa semanal com os agentes participantes do mercado. Nela, os agentes informam suas previsões para alguns indicadores da economia brasileira, como a taxa de câmbio, o nível dos juros nominais, inflação, PIB, dentre outros. O relatório informa o valor médio das estimativas para cada indicador e o respectivo desvio padrão.

Para representar a média da indústria de fundos multimercados utilizamos os índices de fundos multimercados. Assim como no mercado internacional, o Brasil posssuí vários índices de fundos multimercados de divulgação pública, que diferem entre si basicamente por sua metodologia de seleção dos fundos e composição da carteira teórica. Para não desviar do escopo deste trabalho avaliando qual é o índice mais indicado, utilizaremos os três índices com maior histórico disponível: o índice do BTG Pactal; da Arsenal Investimentos e; da Risk-Office. Todos esses índices disponibilizam seus métodos de cálculos em seus websites, assim como a composição das carteiras.

O período das amostras se iniciará em janeiro de 1999 até maio de 2009, um total de 2.613 observações diárias.

4.2 IMPLEMENTAÇÃO

Os portfólios simulados serão composto por cinco classes de ativos, que terão seus pesos na carteia rebalanceados mensalmente utilizando como referência a volatilidade e correlação dos ativos dos últimos cinco anos, além do valor de mercado (*market cap*) de cada classe referente ao mês do efetivo rebalanceamento. Os cálculos para a correlação e volatilidade serão efetuados com dados diários.

Como primeira análise, vamos comparar uma carteira composta pela metodologia de média x variância de Markowitz *versus* a alocação de equilíbrio de mercado (método de Black-Litterman sem a introdução de opiniões).

A simulação de Markowitz utilizará o retorno médio dos últimos cinco anos de cada ativo como retorno do modelo. Já, os valores da matriz de covariância são os mesmo utilizados pelo modelo de Black-Litterman. Como não estamos utilizando nenhuma opinião dos investidores sobre o retorno dos ativos no modelo de Markowitz, não incluiremos opiniões dos agentes no modelo de Black-Litterman.

A próxima análise será feita entre a simulação da alocação de equilíbrio de mercado, com o modelo de Black-Litterman inserindo opinião sobre os ativos por meio do relatório FOCUS do Banco Central. Escolhemos para utilizar no modelo o valor médio do dólar e o valo médio da taxa de juros pré-fixada para um horizonte de tempo de 12 meses a frente. Nas simulações, esses valores médios serão o Q do modelo e o desvio padrão das estimativas será o ω.

Por fim, iremos comparar a performance da carteira simulada com opiniões do FOCUS e os índices de fundos multimercados, representando a média da indústria brasileira.

Como a categoria de fundos multimercados permite alavancagem, o que significa manter uma alocação com valor superior ao valor patrimonial, e posições vendidas a descoberto (*short selling*), não iremos inserir tais restrições nas simulações.

Assim como em outros artigos, utilizaremos para todas as simulações um grau de aversão ao risco de 2,5 e um valor para τ de 0,025.

4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Na tabela 3 fazemos uma análise estática do mês de maio de 2009, onde se apresentam os excessos de retorno dos ativos encontrados pela média dos retornos históricos, os excessos de retorno de equilíbrio implícitos pelo modelo de Black-Litterman e os pesos otimizados correspondentes por cada método. Essa análise é interessante para verificarmos se há diferenças significativas entre os pesos utilizados por cada modelo.

Tabela 3. Vetor de retornos e pesos resultantes (Markowitz e Black-Litterman)

Classe de Ativos	Vetor de Retorno Históricos R_{hist}	Vetor de Retornos de Equilíbrio Implícitos Π	Diferença $R_{hist} - \Pi$	Pesos de Markowitz	Pesos de Black-Litterman	Diferença $W_{mktz} - W_{BL}$
Bolsa	12,59%	5,71%	6,87%	-1,91%	8,44%	-10,34%
Dólar	-24,09%	-1,04%	-23,05%	-15,84%	1,70%	-17,55%
Renda Fixa Pré-Fixado	1,40%	0,09%	1,32%	40,20%	4,02%	36,17%
Renda Fixa Pós-Fixado	0,00%	0,00%	0,00%	100,71%	80,71%	20,00%
Juros Reais	1,84%	-0,01%	1,85%	-23,16%	5,13%	-28,28%

Acima, observa-se diferenças significativas entre os retornos históricos e os retornos de equilíbrio. Consequentemente, na otimização dos portfólios, essas diferenças se refletem nos pesos sugeridos pelo modelo de Markowitz e pelo modelo de Black-Litterman. O ativo Renda Fixa Pré-Fixado possui uma alocação muito mais expressiva na carteira de Markowitz do que no portfólio de Black-Litterman. Da mesma forma, o ativo Juros Reais tem um grande peso negativo pela metodologia de Markowitz e um pequeno peso positivo pela metodologia de Black-Litterman.

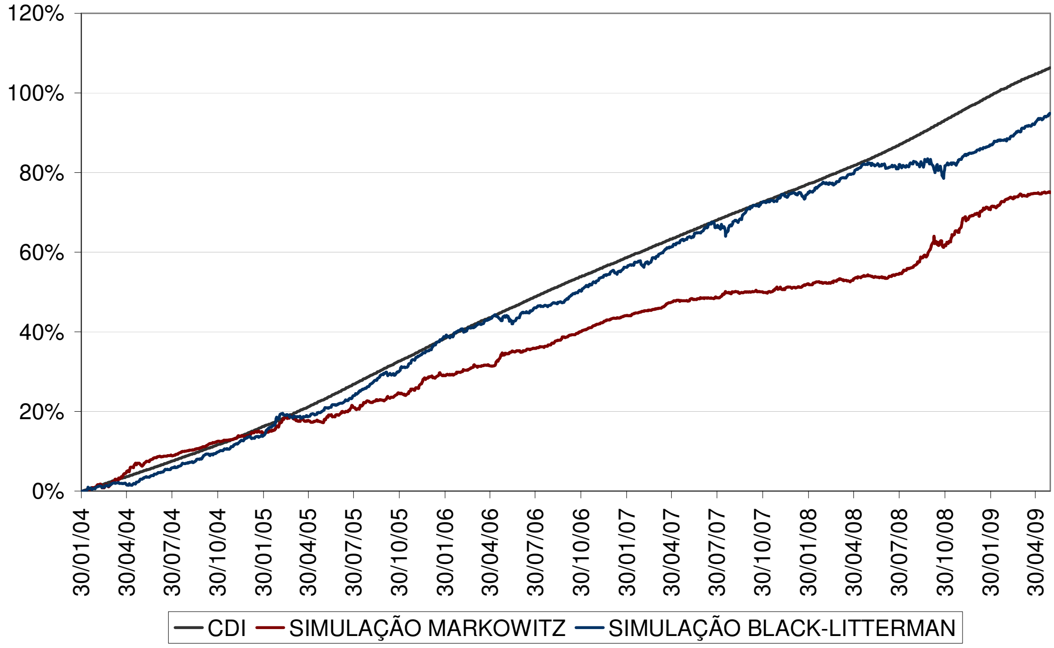
Na tabela abaixo temos a comparação dos resultados obtidos pelas simulações com base no modelo de Markowitz, e, pela alocação de equilíbrio de mercado (modelo de Black-Litterman sem opiniões). Observamos indicadores de rentabilidade, risco e performance ajustada a risco para tirarmos uma conclusão sobre o melhor método de alocação.

Tabela 4. Estatísticas (Markowitz e Black-Litterman)

	SIMULAÇÃO MARKOWITZ	SIMULAÇÃO BLACK-LITTERMAN
Retorno		
Retorno Acumulado	74,97%	94,87%
Mensal Médio	0,88%	1,05%
Mensal Mínimo	-0,35%	-0,78%
Mensal Máximo	2,72%	3,65%
% Meses Acima do Benchmark	70%	47%
% Meses Abaixo do Benchmark	30%	53%
% Meses Retorno > 0	94%	92%
% Meses Retorno < 0	6%	8%
Risco		
Volatilidade	2,25%	2,44%
Semivolatilidade	1,47%	1,77%
Maximo DrawDown	-1,06%	-1,80%
CVaR (5%)	-0,26%	-0,32%
Performance ajustada a risco		
Sharpe	-1,37	-0,43
Sortino	-1,91	-0,59

Na tabela acima, conseguimos verificar que a simulação por Black-Litterman gerou um portfólio mais atraente em termos de retorno, com perfil de risco semelhante. Apesar disso, nota-se que nenhuma das duas simulações obtiveram um retorno superior ao *benchmark*, no caso, o CDI, pois ambas apresentaram um Índice de Sharpe negativo. O gráfico 4 ilustra esse resultado.

Gráfico 4. Retono acumulado (janeiro 2004 até maio 2009)



Na próxima análise, iremos comparar a performance de duas carteiras utilizando o modelo de Black-Litterman. Uma representará uma carteira sem opinião sobre os ativos, a mesma do exercício anterior, e a outra será uma carteira com opinião sobre dois ativos (dólar e juros pré-fixados).

Na tabela 5 fazemos uma análise estática do mês de maio de 2009, onde se apresentam os excessos de retorno de equilíbrio implícitos pelo modelo de Black-Litterman sem opinião, os excessos de retorno posteriores com opinião e os pesos otimizados.

Tabela 5. Vetor de retornos e pesos resultantes (Black-Litterman com e sem opinião)

Classe de Ativos	**Vetor de Retornos Black-Litterman Sem Opinião**	**Vetor de Retornos Black-Litterman Com Opinião**	**Diferença $R_{\text{sem opinião}} - P_{\text{com opinião}}$**	**Pesos de Black-Litterman Sem Opinião**	**Pesos de Black-Litterman Com Opinião**	**Diferença $W_{\text{sem opinião}} - W_{\text{com opinião}}$**
Bolsa	5,71%	12,09%	-6,38%	8,44%	2,06%	6,37%
Dólar	-1,04%	-8,33%	7,29%	1,70%	-9,74%	11,44%
Renda Fixa Pré-Fixado	0,09%	0,33%	-0,24%	4,02%	3,24%	0,79%
Renda Fixa Pós-Fixado	0,00%	0,00%	0,00%	80,71%	102,54%	-21,83%
Juros Reais	-0,01%	0,04%	-0,05%	5,13%	1,89%	3,23%

Na tabela anterior observa-se que o retorno do dólar fica mais negativo em comparação com o retorno implícito de equilíbrio devido a opinião negativa para a moeda americana. Consequentemente, o retorno da bolsa foi aumentado em relação ao de equilíbrio. Apesar de não termos opinião direta sobre a bolsa, o fato de introduzirmos uma opinião sobre um ativo que possui correlação negativa com a bolsa afeta o excesso de retorno a *posteriori* desse ativo. Em virtude da opinião mais convicta sobre o dólar, diferenças podem ser vistas nas alocações otimizadas. O ativo dólar tem uma alocação muito mais expressiva na carteira com opinião do que no portfólio sem opinião.

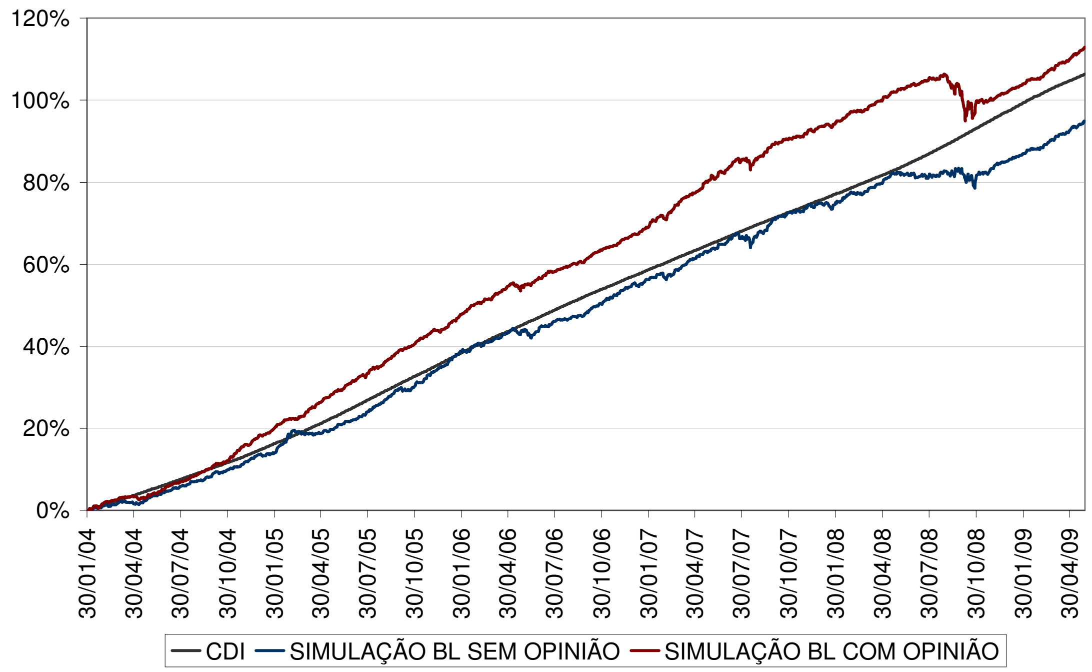
Na tabela seguinte, temos uma comparação dos resultados obtidos pelas simulações com base na alocação de equilíbrio e pelo modelo de Black-Litterman com opinião. Observamos, novamente, indicadores de rentabilidade, risco e performance ajustada a risco.

Tabela 6. Estatísticas (Black-Litterman com e sem opinião)

	SIMULAÇÃO BL SEM OPINIÃO	SIMULAÇÃO BL COM OPINIÃO
Retorno		
Retorno Acumulado	94,87%	112,96%
Mensal Médio	1,05%	1,19%
Mensal Mínimo	-0,78%	-1,96%
Mensal Máximo	3,65%	3,14%
% Meses Acima do Benchmark	47%	58%
% Meses Abaixo do Benchmark	53%	42%
% Meses Retorno > 0	92%	95%
% Meses Retorno < 0	8%	5%
Risco		
Volatilidade	2,44%	2,49%
Semivolatilidade	1,77%	2,22%
Maximo DrawDown	-1,80%	-3,59%
CVaR (5%)	-0,32%	-0,34%
Performance ajustada a risco		
Sharpe	-0,43	0,25
Sortino	-0,59	0,34

Na tabela acima conseguimos verificar que as opiniões do mercado sobre os ativos dólar e pré-fixado melhoraram o resultado da carteira. A simulação com as opiniões gerou um portfólio mais atraente em termos de retorno, com perfil de risco semelhante, o que gera um retorno ajustado a risco melhor. Nota-se que, a simulação com as opiniões gerou um retorno superior ao *benchmark*, no caso, o CDI, enquanto que a simulação pelo equilíbrio de mercado não superou o indicador. O gráfico 5 ilustra esse resultado.

Gráfico 5. Retono acumulado (janeiro 2004 até maio 2009)



Na próxima análise, iremos comparar a performance da carteira simulada com as opiniões do FOCUS e os índices de fundos multimercados do Brasil. Esta comparação é util para identificar se os gestores de fundos multimercados no Brasil teriam uma performance, na média, superior se utilizassem o modelo de Black-Litterman juntamente com as opiniões do relatório do Banco Central.

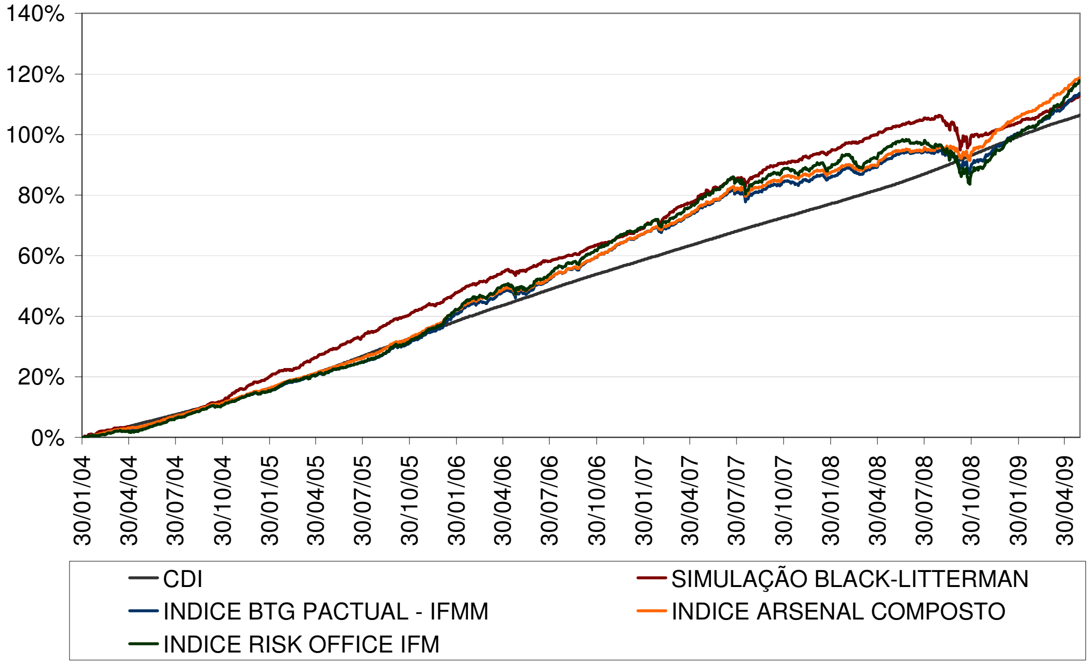
Tabela 7. Estatísticas (Black-Litterman e Índices de fundos multimercados)

	SIMULAÇÃO BLACK-LITTERMAN	INDICE BTG PACTUAL - IFMM	INDICE ARSENAL COMPOSTO	INDICE RISK OFFICE IFM
Retorno				
Retorno Acumulado	112,96%	113,59%	118,82%	117,82%
Mensal Médio	1,19%	1,19%	1,23%	1,23%
Mensal Mínimo	-1,96%	-1,21%	-1,02%	-2,67%
Mensal Máximo	3,14%	3,43%	3,12%	3,64%
% Meses Acima do Benchmark	58%	59%	63%	59%
% Meses Abaixo do Benchmark	42%	41%	38%	41%
% Meses Retorno > 0	95%	88%	91%	86%
% Meses Retorno < 0	5%	13%	9%	14%
Risco				
Volatilidade	2,49%	2,38%	2,10%	3,20%
Semivolatilidade	2,22%	2,06%	1,82%	2,85%
Maximo DrawDown	-3,59%	-7,81%	-4,79%	-14,73%
CVaR (5%)	-0,34%	-0,34%	-0,29%	-0,49%
Performance ajustada a risco				
Sharpe	0,25	0,29	0,54	0,34
Sortino	0,34	0,38	0,73	0,44

Avaliando os dados acima, vemos que a simulação não obtém um resultado melhor que os índices. Apenas nos ítens de retorno medido pelo "% de meses com retorno positivo" e de risco medido pelo "Máximo Draw Down", que é a perda máxima consecutiva dos retornos, a simulação consegue ser superior aos demais indicadores. Esse resultado mostra que a carteira simulada possui uma aversão à risco maior que os índices. Nos outros quesitos avaliados, a simulação apresenta um resultado inferior no retorno acumulado e nos índices de performance ajustada a risco (Sharpe e Sortino).

Analizando o gráfico de retorno acumulado abaixo, vemos que durante a maior parte do período simulado a carteira de Black-Litterman foi superior aos índices, porém, após a crise do *subprime*, em 2008, a carteira não obteve a mesma força de recuperação que os índices de fundos.

Gráfico 6. Retono acumulado (janeiro 2004 até maio 2009)



5. CONCLUSÕES

No atual cenário brasileiro, sabemos a importância que há em se ter uma boa gestão de recursos. O modelo de otimização de Black-Litterman surge no cenário mundial como mais uma ferramenta de auxílio aos agentes do mercado, proporcionando aos mesmos a flexibilidade de poderem inserir suas projeções, por mais subjetivas que sejam, dentro de um modelo robusto e que lhes proporcionam um resultado condizente com suas expectativas.

O maior benefício do modelo de Black-Litterman é enfrentar os problemas tradicionais das decisões de investimento de uma forma sistemática e transparente. Ademais, o mesmo foca em aspectos do processo de investimento que são controlados e faz recomendações táticas disciplinadas consistentes com as expectativas dos investidores.

O gestor da carteira deve usar o modelo iterativamente até que os resultados sejam razoáveis e coerentes com suas expectativas. O procedimento de otimização reversa serve como um instrumento de calibração. A idéia é usar um instrumento de calibração imperfeito de maneira consistente e focar em suas diferenças. Da mesma forma, o modelo permite que o administrador tenha uma idéia clara de que opiniões representam sua carteira.

No caso dos fundos multimercados brasileiro, a aplicação do modelo de Black-Litterman produz, como nos mercados externos, carteiras diversificadas e intuitivas do que aquelas obtidas através da aplicação da metodologia tradicional. Apesar da simulação com as opiniões do FOCUS se mostrar superior à simulação do modelo sem opinião, quando comparamos com os índices ela não demostra essa superioridade. Um dos possíveis motivos para esse resultado é a falta de uma opinião para os outros ativos centrais do portfólio como inflação e principalmente renda variável. Durante o período analisado passamos pela crise do *sub-prime* em 2008, fazendo com que o Ibovespa encerrasse o ano com perdas de 41%, e passamos também por parte do *rebound* de 2009. Nesse período é provável que os gestores tivessem opinião sobre renda variável, tanto no período de queda, quanto durante a recuperação.

Além disso, os rebalanceamentos do porfólio foram realizados mensalmente e olhando para retornos 12 meses a frente. É provável que durante períodos de crise, os gestores prefiram ter uma opinião sobre os ativos em horizontes de tempo menores e que as carteiras tenham uma movimentação dos ativos (*turnover*) mais frequente do que apenas uma vez por mês.

Essa diferença entre a performance da simulação em comparação com os índíces, por outro lado, não se mostrou muito grande, sugerindo que o implemento do modelo, se bem utilizado, não acarreta em piora na performance. Portanto, o ganho que se pode obter na utilização do modelo é na certeza de se realizar um processo bem estruturado e disciplinado, aonde os gestores capturam e aplicam suas opiniões de forma sistemática e controlada.

Portando, apesar das imperfeições do mercado local e das consequentes hipóteses que devem ser feitas, o modelo de Black-Litterman é uma ferramenta útil para apoiar decisões de investimento estratégicas dos fundos multimercados brasileiros.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Black, F. and Litterman, R. (1991) 'zGlobal Asset Allocation with Equities, Bonds, and Currencies', Fixed Income Research, Goldman Sachs.

Black, F. and Litterman, R. (1992) 'Global Portfolio Optimization', Financial Analysts Journal, September-October, 28-43.

Bevan, A. and Winkelmann, K. (1998) 'Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience', Fixed Income Research, Goldman Sachs.

Christodoulakis, G.A. & J.C. Cass, (2002) "Bayesian Optimal Portfolio Selection: the B-L Approach." Notes for Quantitative Asset Pricing MSc Mathematical Trading and Finance.

Fabozzi, F., Kolm, P., Pachamanova, D., Focardi, S. (2007) Robust Portfolio Optimization and Management, Wiley, New Jersey

Fok, H. and Benzschawel, T. (2007) 'Asset Allocation Using the Black-Litterman Model', Quantitative Credit Analyst, Citigroup.

Fusai, G. Meucci, A. (2003) 'Assessing Views', Risk Magazine, 16.

Grinold, R. & Kahn, R. (2000) Active Portfolio Management: A Quantitative Approach for Providing Superior Returns and Controlling Risk, McGraw-Hill, New York.

He, G. and Litterman, R. (1999) 'The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios, Goldman Sachs Quantitative Resources Group.

Herold, U. (2003) 'Portfolio Construction with Qualitative Forecasts', The Journal of Portfolio Management, Fall, 61-72.

Idzorek, T. (2004) 'A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model: Incorporating user specified confidence levels', Zephyr Associates.

Lee, W. (2000) Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation, Frank J. Fabozzi Associates, Pennsylvania.

Litterman, R. (ed.) (2003) Modern Investment Management: An Equilibrium Approach, John Wiley, New Jersey.

Maginn, J., D. Tuttle, D. McLeavey y J. Pinto (2005) Managing Investment Portfolios: A Dynamic Process, CFA Institute.

Markowitz, H. (1952) 'Portfolio Selection', The Journal of Finance, 7 (1), 77-91.

Markowitz, H. (2000) Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets, Frank J Fabozzi Associates, Pennsylvania.

Martellini, L. and Ziemann, V. (2007) ‘Extending Black-Litterman Analysis Beyond the Mean-Variance Framework, Journal of Portfolio Management, summer, 33.

Mauboussin, M. (2007) More Than You Know: Finding Financial Wisdom in Unconventional Places, Columbia Business School Publishing.

Meucci, A. (2008a) ‘The Black-Litterman Approach: original model and extensions’.

Meucci, A. (2008b) ‘Enhancing the Black-Litterman and Related Approaches: views and stress-test on risk factors’

Meucci, A. (2006) ‘Beyond Black-Litterman: views on non-normal markets’, RISK, February.

Meucci, A. (2005) Risk and Asset Allocation, Springer, New York.

Michaud, Richard O., (1989) “The Markowitz Optimization Enigma: Is ‘Optimized Optimal?” Financial Analyst Journal, vol. 45, no. 1 (January/February), pp. 31-42.

Rachev, S., Hsu, J., Bagasheva, B. and Fabozzi, F. (2008) Bayesian Methods in Finance, Wiley, New Jersey.

Satchell, S. and Scowcroft, A. (2000) ‘A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction’, Journal of Asset Management, Vol. 1, 2, 138-150.

Scherer, B. (2007) Portfolio Construction and Risk Budgeting, Riskbooks, Navarra.

Scherer, B. and Douglas, M. (2005) Introduction to Modern Portfolio Optimization with NuOPT™, S-Plus®, and S⁺ Bayes™, Springer, New York.

Sharpe, W. (2007) ‘Expected Utility Asset Allocation’, Financial Analysts Journal, Volume 63, number 5.

Walters, J. (2008) ‘The Black-Litterman Model: A detailed exploration’, working paper

APÊNDICE

Este apendice contém a derivação da fórmula de Black-Litterman utilizando a abordagem Bayesiana para a modelagem de duas distribuições normais posteriores.

1. A Abordagem Baseada na FDP

A Abordagem baseada na FDP segue uma abordagem bayesiana para o cálculo da FDP da distribuição posterior, quando as distribuições a priori e condicionais são distribuições normais.

Começando com nossa distribuição a priori, obtemos uma expressão proporcional ao valor da FDP.

Notação:

r - vetor de excessos de retorno n x 1
Σ - matriz de covariância n x n
$E(r) = E(r_{t+1}|I_t)$ o n x 1 vetor excesso de retorno esperado do investidor π o equilíbrio de excesso de retorno do CAPM, como:

$$\begin{aligned} \pi &= \beta r_m \\ &= \beta\, w'_m r \end{aligned}$$

onde w_m é o vetor de captalização do mercado, e $\beta = \dfrac{\operatorname{cov}(r, w'_m r)}{\operatorname{var}(w'_m r)}$.

Pretendemos agora fazer as suposições necessárias para construir o teorema de Bayes, que em nossa notação estabelecida iria escrever

$$\Pr(E(r) \mid \pi) = \frac{\Pr(\pi \mid E(r))\Pr(E(r))}{\Pr(\pi)} \qquad \text{(A1)}$$

Vamos assumir que as opiniões prévias Pr(E(r)), deve assumir a forma de k restrições lineares no vetor de n retornos esperados E(r), que, pode ser expressa com uma matriz P K×N tal que

$$P\,E(r) = q + v$$

onde $v \sim N(0, \Omega)$ e Ω é uma matriz de variância diagonal k x k. Então,

$$P\,E(r) \sim N(q, \Omega) \qquad \text{(A2)}$$

A existência de um vetor de erro v significa a existência de pontos de vista incertos, no entanto, a suposição de normalidade juntamente com uma diagonal Ω implica que as opiniões subjetivas do gestor de investimentos são formados independentemente uns dos outros. Como os elementos da diagonal Ω tendendo para zero, as opiniões são formadas exatamente (com certeza) pelo P E(r) = q. Note que P, Ω e q são conhecidos pelo investidor.

A função densidade de probabilidade dos dados dos retornos de equilíbrio condicionais as opiniões dos investidores, será considerado

$$\pi|E(r) \sim N\,(E(r), \tau\Sigma) \qquad \text{(A3)}$$

O fato de que E (π) = E (R) reflete o pressuposto de pontos de vista homogeneos de todos os investidores no mundo tipo CAPM. Além disso, o escalar τ é uma quantidade conhecida para o investidor que se adapta a matriz de covariância histórica Σ.

Finalmente, a função densidade marginal dos dados de retorno de equilíbrio, Pr (π), é uma constante que será absorvida a constante integração do Pr (E (r) | π).

2. Opiniões com 100% de confiança sobre os retornos esperados

Neste caso, a certeza quanto crenças anteriores corresponde ao desvio padrão zero. Assim, as opiniões dos investidores são expressas como uma relação exata que se limitará a restrição de forma em um problema de otimização. Em particular, temos

$$\min_{E(r)} (E(r)-\pi)'\tau\Sigma\big(E(r)-\pi\big)$$

$$\text{s.r. } PE(r) = q$$

$$\begin{aligned} L &= (E(r)-\pi)'\tau\Sigma(E(r)-\pi) - \lambda(PE(r)-q) \\ &= E(r)'\tau\Sigma E(r) - E(r)'\tau\Sigma\pi - \pi'\tau\Sigma E(r) + \pi'\tau\Sigma\pi - \lambda PE(r) + \lambda q \end{aligned}$$

A condição de primeira ordem será:

$$\frac{\partial L}{\partial E(r)} = \tau\Sigma' E(r) + \tau\Sigma E(r) - \tau\Sigma\pi - \tau\Sigma'\pi = 0$$

$$= 2\tau\Sigma E(r) - 2\tau\Sigma\pi - \mathrm{P}'\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = PE(r) - q = 0 \qquad (2)$$

Resolvendo a equação (1) para E(r) obtemos

$$E(r) = \pi + \frac{1}{2\tau}\lambda\Sigma^{-1}P'$$

Então, substituindo na equação (2) para obter o valor do multiplicador de Lagrange

$$\lambda = (P\Sigma^{-1}P')^{-1}2\tau(q-P\pi)$$

Substituindo λ novamente em (1) obtemos o valor ótimo para E(r)

$$E(r) = \pi + \Sigma^{-1}P'(P\Sigma^{-1}P')^{-1}(q - P\pi)$$

O melhor preditor de E (r) que minimiza a variância em torno do equilíbrio π e satisfaz k restrições lineares exatas.

3. Opiniões incertas sobre os retornos esperados

Quando o investidor forma opiniões prévias, com um grau de incerteza, isto é marcado no valor não-zero dos elementos da matriz diagonal Ω. Partindo das premissas (A2) e (A3) na equação (A1) obtemos o seguinte resultado:

$$fdp(PE(r)) = \frac{k}{\sqrt{2\pi_c \mid \Omega \mid}} \exp\left(-\frac{1}{2}(PE(r) - q)'\Omega^{-1}(PE(r) - q) \right)$$

e

$$fdp(\pi \mid E(r)) = \frac{k}{\sqrt{2\pi_c \mid \tau\Sigma \mid}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\pi - E(r))'(\tau\Sigma)^{-1}(\pi - E(r)) \right)$$

De (A1) sabemos que

$$\Pr(E(r) \mid \pi) = \frac{\Pr(\pi \mid E(r))\Pr(E(r))}{\Pr(\pi)}$$

Substituindo a fdp, a densidade posterior será proporcional a

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(\pi - E(r))'(\tau\Sigma)^{-1}(\pi - E(r)) - \frac{1}{2}(PE(r) - q)'\Omega^{-1}(PE(r) - q) \right)$$

que pode ser escrito como

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left[E(r)'HE(r) - 2C'E(r) + A\right] \right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left[E(r) - H'HH^{-1}E(r) - 2C'H^{-1}HE(r) + A\right] \right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left[(HE(r) - C) - H^{-1}(HE(r) - C) - C'H^{-1}C + A\right] \right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left[A - C'H^{-1}C\right] \right) \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(HE(r) - C\right)'H^{-1}(HE(r) - C) \right)$$

onde

$$H = (\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P$$
$$C = (\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q$$
$$A = \pi'(\tau\Sigma)^{-1}\pi + q'\Omega^{-1}q$$

Assim, o termo $\exp\left(-\frac{1}{2}\left[A - C'H^{-1}C\right]\right)$ e o denominador fdp(π) que não é modelado será absorvido na constante de integração da fdp posterior. Assim, o resultado segue imediatamente.

Então, a função de densidade de probabilidade posterior pdf (E(r)|π) é multivariada normal com média

$$\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q\right]$$

e variância

$$\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}$$