2. Ракета

Јавна је тајна да уколико желите да идете на Марс морате имати ракету. Међутим, само ретки знају да уколико желите и да стигнете до Марса, мотори на вашој ракети морају бити што избалансиранији.

Пошто је Марс четврта планета Сунчевог система, ракета којом желите да идете на њега мора имати четири мотора, и они морају бити распоређени у формацију 2×2. Приликом лансирања, сваки од мотора је подешен на неку своју почетну снагу. Капетан ракете, Марско, помоћу система полуга може да појачава снагу мотора, и то тако да приликом сваке операције за 1 појача снагу тачно два мотора која су или у истој врсти или у истој колони. У науци о ракетама, клацкавост ракете се дефинише као разлика највеће и најмање снаге од снага њена четири мотора. Помозите капетану да што боље избалансира ракету тако што ће применом расположивих операција довести клацкавост на најмању могућу вредност.

Опис улаза

Са стандардног улаза се учитавају четири ненегативна цела броја који представљају почетне снаге четири мотора. У првом реду улаза записане су почетне снаге левог и десног мотора из горњег реда, а у другом реду улаза записане су почетне снаге левог и десног мотора из доњег реда.

Опис излаза

У први и једини ред стандардног излаза записати један број који представља најмању могућу клацкавост ракете која се може постићи.

Пример 1

Улаз	Излаз
`1 1` `0 3`	`2`

Пример 2

Улаз	Излаз
`9 8` `7 0`	`3`

Објашњење примера

У првом примеру, ако операцију појачавања снаге применимо једном на горњу врсту и два пута на леву колону, добићемо следећу конфигурацију снага:
4 2
2 3
Како није могуће постићи мању клацкавост, оптимална клацкавост је $4 - 2 = 2$.

Ограничења

- Све почетне снаге мотора су ненегативни цели бројеви.

Тест примери су подељени у пет дисјунктних група:

- У тест примерима који вреде 32 поена почетна снага сваког мотора није већа од 44.

- У тест примерима који вреде 12 поена почетна снага сваког мотора није већа од 110.
- У тест примерима који вреде 12 поена почетна снага сваког мотора није већа од 1300.
- У тест примерима који вреде 12 поена почетна снага сваког мотора није већа од 10^7.
- У тест примерима који вреде 32 поена почетна снага сваког мотора није већа од $5 \cdot 10^8$.

Аутор задатка	Задатак припремио	Тестер	Текстуално решење
Марко Савић	**Марко Савић**	**Никола Спасић**	**Марко Савић**

Анализа проблема

Овај задатак дозвољава мноштво различитих приступа његовом решавању, и као такав одличан је пример за то како мало више времена потрошеног на размишљање може значити много мање времена потрошеног на куцање. Најдужи код који је такмичар предао за овај задатак има преко 360 линија. Најкраће решење које доноси свих 100 бодова дугачко је свега десетак линија!

Приказаћемо неколико решења, редом од најмање ефикасног до најефикаснијег. За конструкцију тих решења користићемо неколико запажања.

Запажање 1 *Уместо да посматрамо операције којима се снага повећава за 1, можемо сматрати да постоји само операција која повећава снагу у врсти или колони за произвољан природан број.*

Запажање 2 *Обзиром на то да редослед операција није битан, операцију повећања за произвољан природан број је потребно извршити само једном за једну посматрану врсту, односно колону.*

Запажање 3 *Операцију можемо још више уопштити, тако што дозволимо да може и да смањује снагу. Другим речима, једна операција сад додаје на врсту или колону произвољан цео број (дакле, дозвољено је да буде и негативан). Ово је могуће јер су нам једино битне међусобне разлике између бројева, па је смањивање једне врсте, односно колоне, суштински исто као и повећавање друге врсте, односно колоне.*

Приступ који користимо у решењима која следе је да испробавамо повећавања врста и колона за различите вредности и видимо која је најмања клацкавост коју можемо тако добити. Питање је само где се зауставити, односно колико износи највећа операција повећања врсте или колоне коју морамо испробати.

Запажање 4 *Највећи број који ће бити искоришћен у некој од операција није већи од m, где је m највећа од почетних снага мотора.*

Чак и ако такмичар није приметио да ни једно повећање не мора бити веће од m, интуитивно је доста јасно да ће горња граница од $2m$ бити довољна.

У даљем тексту сматраћемо да су почетне вредности дате као

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

Решење сложености $O(m^4)$

Из запажања 2 нам је јасно да је потребно извршити највише четири операције. У четири for петље бирамо четири броја од 0 до m, који нам говоре колико ће износити свака операција, тј. за колико ћемо повећати сваку од врста и колона. За сваку такву четворку бројева извршимо операције повећавања, израчунамо резултујућу разлику највећег и најмањег, и уколико је та разлика мања од до сада најмање пронађене разлике, упамтимо је.

Овакво решење доноси 32 бода.

Решење сложености $O(m^3)$

Запажање 5 *Није потребно применити операцију на обе врсте.*

На пример, уместо да горњу врсту повећамо за 8, а доњу за 2, довољно је да само горњу врсту повећамо за 6; резултујућа клацкавост ће бити иста у оба случаја.

Зато одредимо једну врсту коју нећемо дирати, а за преосталу једну врсту и две колоне испробајмо све могуће вредности повећавања. Све ово испробајмо и ако одредимо да нећемо мењати другу врсту.

Ако искористимо запажање 3, можемо и мало упростити кодирање овог решења тако што приметимо да је довољно да мењамо само горњу врсту, али тад за њу морамо испробати опсег бројева од $-m$ до m.

Овакво решење доноси 44 бода.

Решење сложености $O(m^2)$

Зашто не бисмо запажање 5 применили и на колоне? :)

Запажање 6 *Довољно је применити операцију на само једну врсту и само једну колону.*

За горњу врсту и леву колону испробавамо операције додавање свих бројева од $-m$ до m.

Овакво решење доноси 56 бодова.

Решење сложености $O(m)$

Пошто смо већ два пута успели да умањимо број врста и колона за које испробавамо све могуће вредности повећавања, зашто не бисмо покушали то да урадимо још једном!

Ово јесте могуће, међутим оптимално решење сад не добијамо директном провером, већ морамо бити сналажљивији. Као и у претходним решењима, довољно је да испробамо само све операције промене горње врсте за вредности од $-m$ до m.

Претпоставимо да смо променили горњу врсту за вредност i. Опет, према запажањима 6 и 3, само још треба одредити за колико је потребно променити вредност леве колоне.

Након повећања горње врсте за i стање изгледа овако:

$$\begin{matrix} a+i & b+i \\ c & d \end{matrix}$$

Мењањем леве колоне се разлика бројева унутар леве колоне, као и разлика бројева унутар десне колоне неће променити, па се не може постићи мања клацкавост од $max(|a+i-c|, |b+i-d|)$. Са друге стране, ова клацкавост се може постићи тако што леву колону променимо тако да интервал дефинисан бројевима једне од колона у потпуности обухвати интервал дефинисан бројевима друге колоне.

Дакле, све што је потребно је испробати све могућности од $-m$ до m за промену горње врсте, а за сваку такву промену се најбоља клацкавост рачуна по претходно наведеној формули.

Овакво решење доноси 68 бодова.

Запажање 7 *У запажању 4 смо рекли да највећа операција не мора бити већа од m. Међутим можемо донети и бољи закључак, а то је да највећа операција није већа од разлике највећег и најмањег броја у почетном стању.*

Такмичар који би ово искористио би добио још 4 додатна бода на свако од претходних решења.

Решење сложености $O(1)$

Да бисмо добили решење у константном времену користићемо мало математике.

Следеће неједнакости увек важе.

$$\begin{array}{ccccc} \min(a,d) & \leq & (a+d)/2 & \leq & \max(a,d) \\ \min(b,c) & \leq & (b+c)/2 & \leq & \max(b,c) \end{array}$$

Из њих даље следи

$$\begin{array}{ccccc} \max(a,b,c,d) & = & \max(\max(a,d),\max(b,c)) & \geq & \max((a+d)/2,(b+c)/2) \\ \min(a,b,c,d) & = & \min(\min(a,d),\min(b,c)) & \leq & \min((a+d)/2,(b+c)/2) \end{array}$$

Коначно, последње две неједнаскости можемо искористити да дамо доње ограничење за клацкавост.

$$\begin{aligned} klackavost &= \max(a,b,c,d) - \min(a,b,c,d) \\ &\geq \max\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right) - \min\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \\ &= \frac{|(a+d)-(b+c)|}{2} \end{aligned}$$

Шта више, како су почетне вредности, као и вредности свих операција цели бројеви, свака клацкавост коју можемо постићи је такође цео број. Зато важи

$$klackavost \geq \left\lceil \frac{|(a+d)-(b+c)|}{2} \right\rceil.$$

Покажимо још да је могуће постићи баш толику клацкавост.

Запажање 8 *Пошто нам је запажање 3 омогућило да смањујемо вредности у редовима и колонама, можемо увести и операцију "пресипања" из једног елемента у њему дијагонални елемент. На пример, ако горњу врсту смањимо за r, а десну колону повећамо за r, добијамо матрицу*

$$\begin{array}{cc} a-r & b \\ c & d+r \end{array}$$

Применом операције пресипања можемо учинити да се бројеви који су међусобно дијагонални разликују највише за 1. На тај начин да добијемо следећу матрицу.

$$\begin{array}{cc} \lfloor (a+d)/2 \rfloor & \lceil (b+c)/2 \rceil \\ \lfloor (b+c)/2 \rfloor & \lceil (a+d)/2 \rceil \end{array}$$

Клацкавост овако добијене матрице је управо $\left\lceil \frac{|(a+d)-(b+c)|}{2} \right\rceil$, па је ова вредност уједно и решење задатка.