Resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

Introducción

En esta unidad vamos a estudiar cómo resolver mediante el uso de Matlab

- Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condición inicial (problemas de valor inicial o problemas de Cauchy)
- Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condiciones iniciales.
- Ecuaciones diferenciales de orden superior con condiciones iniciales.

Todas estas ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$\mathbf{y}' = f(t, \mathbf{y}),\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

El asistente Matlab tiene incorporados variuos métodos de resolución de problemas de valor iniciual del tipo anterior, el nombre de todos ellos empieza por **ode** y le siguen dos o más números, y quizás alguna letra. Los números y letras están relacionados con los métodos utilizados para la resolución de la ecuación diferencial. Todos ellos requieren los mismos datos de entrada y proporcionan los resultados de salida en el mismo formato. Eltos comandos son llamados en el argot del programa Matlab "edo solvers".

Ode "solvers" disponibles

Los algoritmos implementados en MATLAB son:

ode45 es un método explícito del tipo Runge-Kutta de orden 5 con control de error basado en la fórmula de orden 5, RK4-5. Es un método de un paso y es el primer método que se debe probar.

ode23 es también un método explícito del tipo Runge-Kutta pero de menor orden, RK23. Si no se requiere demasiada precisión y la ecuación es poco rígida puede ser más eficiente que ode45.

ode113 es un método de tipo Adams-Bashforth-Moulton PECE de orden variable. Es por tanto un método multipaso. Estos métodos son adecuados para sistemas no rígidos.

Si no resuelven el problema de forma adecuada se debe probar con uno de los siguientes:

ode15s es un método multipaso de orden variable. Si se sospecha que el sistema es rígido y ode45 no da buen resultado se recomienda probar este método.

ode23s es un método de un paso que puede ser más eficiente que el anterior si no se requiere demasiada precisión.

ode23t es una implementación basada en la regla del trapecio. Se puede utilizar si el problema es moderadamente rígido y no se requiere demasiada precisión.

ode23tb es un método Runge-Kutta implícito.

Entradas y salidas de los comandos (input/output for solvers)

La forma de proporcionar los datos, tanto los de entrada como los de salida, es misma para todos los comandos. Escribiremos `ode*` para referirnos a uno cualquiera de ellos.

Todos los métodos generan una tabla de valores de la variable independiente t y los correspondientes de la variable dependiente y, además todos ellos los proporcionan por separado. Es decir, se han de guardar los resultados en dos matrices, la primera es en realidad un vector columna con los valores de t donde se ha calculado la solución y la segunda será una matriz con los valores correspondientes de las variables dependientes. Esta matriz será un vector si sólo se tiene una variable dependiente y la ecuación diferencial es de orden 1, si se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales o de una ecuación de mayor orden tendrá varias columnas tal como veremos posteriormente.

Los datos mínimos requeridos para resolver un problema de valor inicial

$$y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$$

son:

- la función f,
- el intervalo en el que se quiere la solución y
- la condición inicial y_0.

En este orden hay que proporcionar los datos a los distintos comandos de Matlab. Por tanto escribiremos

```
[T, Y] = ode*(f, tspan, y0)
```

Las matrices `T` e `Y` contienen los resultados, tal como se ha dicho. El primer argumento del comando, `f`, es la función. Puede ser una función en línea (inline), un fichero `.m` en el que está definida la función o una funciñón anónima. En ningún caso puede pasarse como una cadena de texto. El segundo argumento, `tspan`, es el intervalo en el que queremos resolver la ecuación diferencial. Desde el punto de vista de Matlab es un vector de al menos dos componentes, siendo la primera el punto t_0 donde se especifican las condiciones iniciales y la última el extremo final del intervalo (puede ser menor que t_0 y en este caso se resuelve la ecuación "hacia atrás" en el tiempo o en el espacio --hacia la izquierda--). Si se especifican más de dos componentes en este vector se obtendrán resultados en los puntos indicados en el mismo (y sólo en ellos). Hay que tener en cuenta que las componentes han de estar en orden creciente o decreciente.

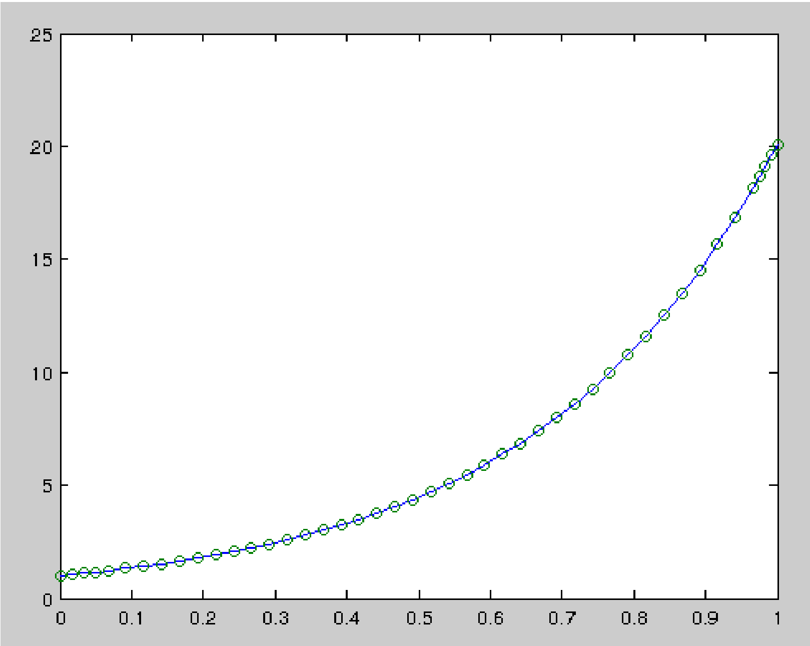
Ejemplo

Para resolver el problema

$$y' = 3y, \quad y(0) = 1$$

cuya solución exacta es $y(t) = \exp(3t)$, en el intervalo $[0, 1]$ y ver gráficamente el resultado podríamos escribir

```
>> f=inline('3*y','t','y');
>> [T,Y]=ode45(f,[0 1],1);
>> plot(T,Y,T,Y,'o');
```



En la gráfica aparecen marcados los puntos calculados y una curva construida a partir de ellos.

Otra alternativa es definir la función como anónima

```
>> [T,Y]=ode45(@(t,y) 3*y,[0 1],1);
```

Es importante observar que aunque en la ecuación diferencial $y' = f(t,y) = 3y$ no aparece la variable independiente t, es decir, f es sólo función de y, es necesario indicar a Matlab que la función depende de de las dos variables t e y. Para ello se define la función incluyendo explícitamente las variables, tanto si se define la función mediante `inline` o como anónima.

Si se quisiera obtener la solución en el intervalo $[-1,0]$, habría que cambiar la llamada a `ode*` por

```
>> [T,Y] = ode45(f,[0 -1],1);
```

Es muy importante observar que en la llamada a `ode` se ha especificado el intervalo como $[0,-1]$ y no como $[-1,0]$, como parece natural. Ello es debido a que Matlab asigna la condición inicial al primer elemento del intervalo.

Por último si sólo estamos interesados en conocer el valor de la solución en los puntos $t=1$ y $t=2$, habría que escribir

```
>> [T,Y]=ode45(f,[0 1 2],1);
```

Ejercicios ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

---

Ejercicio 1

La población de ciertas especies crece a una velocidad proporcional a la población presente y que responde a un problema de valor inicial como

$$y' = 0,02y, \quad y(0) = 5000$$

Hallar la solución en el intervalo $[0,5]$ usando ode45, ode23 y ode113 y comparar gráficamente los resultados. Observa la diferencia que hay para el valor
$t = 5$.

Ejercicio 2

Un paracaidista salta desde un avión. Hasta el momento de abrir el paracaidas la resistencia del aire es proporcional a $v^{3/2}$, donde v es la velocidad de descenso. Si la velocidad responde a la ecuación diferencial

$$v' = 10 - 0,01v^{3/2}$$

y abre el paracaídas a los 6 segundos ¿Qué velocidad ha alcanzado en ese momento?

Ejercicio 3

Supongamos que en una comunidad de L personas hay P personas contagiadas de una enfermedad no muy grave que les permite seguir en activo. Si $y(t)$ denota el número de personas contagiadas, los posibles contactos entre personas contagiadas y sanas son proporcionales a $y(t)(L-y(t))$, por lo que el problema puede modelarse como

$$y' = ky(L-y), \quad y(0) = P$$

Tomando $L = 25000$, $k = 0.00003$ e $y(0) = 250$, calcular la evolución de la epidemia en el intervalo $[0, 60]$. Estimar el número medio de personas contagiadas calculando la media aritmética de las ordenadas obtenidas anteriormente.

Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

---

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden puede escribirse como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

donde $\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}_0$ son vectores con el mismo número de componentes. Sabemos que para resolver este tipo de problemas se utilizan los mismos métodos que para resolver la ecuación escalar. La única diferencia desde el punto de vista de Matlab es que la única forma de definir la función vectorial $\mathbf{f}$ es mediante un fichero de función (fichero `*.m`) que ha de tener como salida además un vector columna. Supongamos por ejemplo que tenemos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y - z \\ y' &= z - x \\ z' &= x - y \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = -1, y(0) = 0, z(0) = 1$. Este problema puede escribirse también como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{f}\left(t, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolverlo en el intervalo $[0, 1]$ habría que definir en primer lugar la función en un fichero llamado `sistema.m`

```
function dy = sistema(t, y)
dy=zeros(3,1); % vector columna
dy(1) = y(2) - y(3);
dy(2) = y(3) - y(1);
dy(3) = y(1) - y(2);
```

donde hemos de resaltar que aunque t no aparezca en ninguna de las ecuaciones del sistema debe ser un dato del fichero; la segunda línea fuerza a que la función devuelva un vector columna, tal como requieren las funciones `ode*`. Por último nótese que aunque en el sistema se hayan utilizado diferentes letras para las variables dependientes, tal como es usual, en Matlab hay que trabajar con un vector, por tanto se utiliza un sólo nombre (y) para todas las variables y estas se distinguen porque corresponden a distintos elementos del vector. Por esta razón, la función que ha de programarse en el fichero es más natural si se reescribe el sistema como

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 - y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_2 \end{aligned}$$

Una vez escrita la función se obtiene la solución con la orden

```
>> [T,Y]=ode*(@sistema,[0 10],[-1 0 1]);
```

Ejercicio

La araña roja es una plaga frecuente en el cultivo de cítricos. Como es difícil de eliminar mediante productos químicos se suele realizar un control biológico de la plaga, introduciendo el ácaro como depredador que devora larvas y huevos de la araña roja. Este ecosistema agronómico del tipo depredador-presa se modeliza mediante las ecuaciones de Lokta-Volterra

$$\begin{aligned} P' &= 0.95P - \frac{PD}{3} \\ D' &= -0.75D + 0.12PD \end{aligned}$$

donde la variable t indica el tiempo, $P = P(t)$ es la población de arañas rojas y $D = D(t)$ es la población de ácaros. Si en el momento de introducir los ácaros ($t = 0$), la población de arañas rojas es de 4 individuos por hoja y se introducen 8 ácaros por hoja, se pide:

1. Número máximo y mínimo de arañas rojas y ácaros por hoja en el intervalo de tiempo $[0, 50]$.
2. Representar gráficamente la población de arañas rojas y ácaros en el intervalo anterior. ¿Cómo es el comportamiento del sistema?

Resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior

Para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior (de orden mayor que 1) con condiciones iniciales se transforman en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden 1 equivalente y se resuelve este. El número de ecuaciones diferenciales de primer orden del sistema es igual al orden de la ecuación diferencial original.

Ejemplo

Supongamos ahora que queremos resolver la ecuación de segundo orden

$$y'' = 3y't + 5y - 2t,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$$

Haciendo el cambio de variable $y_1 = y, y_2 = y'$, podemos escribir la ecuación de segundo orden como el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = 3y_2 t + 5y_1 - 2t \end{array} \right\},\quad \left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = 2 \end{array} \right\}$$

Para resolver el problema hemos de definir la función del sistema, que en este caso es vectorial con dos coordenadas. Escribimos el fichero `ejemplo.m` cuyo contenido es

```
function dy = ejemplo(t,y)
dy=zeros(2,1); %vector columna
dy(1)=y(2);
dy(2)=3*y(2)*t+5*y(1)-2*t;
```

y luego resolvemos mediante

```
>> [T2,Y2]=ode23(@ejemplo,[0 1],[-1 2]);
```

Se observa que `Y2` es ahora una matriz; la primera columna corresponde a los valores de la solución $y(t)$, y la segunda a su derivada $y'(t)$.

Ejercicio 1

Un cierto sistema resonante de muelles sobre el que se ejerce una fuerza externa periódica se modela mediante la ecuación

$$x''(t) + 25x(t) = 8\sin(5t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

Resolver la ecuación en $[0, 2]$.

Ejercicio 2

El modelo matemático de un cierto circuito eléctrico RCL (Resistencia, Condensador e Inductancia) es:

$$Q''(t) + 20Q'(t) + 125Q(t) = 9\sin(5t),\ Q(0) = 0,\ Q'(0) = 0$$

Resolver la ecuación en el intervalo $[0, 2]$.