Мат.Ан.

Дз №6.

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \cos\pi n \left(\frac{1}{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\cos\pi n \overset{(-1)^n}{=}$ ~~част. сумма огр.~~

$\left|\frac{1}{\underbrace{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sim\frac{1}{n}}} - \cos\frac{1}{n}\right| \sim \left|1 - \cos\frac{1}{n}\right| \overset{1-\cos\frac{1}{n}}{=}$ ~~$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ монотон.~~ $\sim$

$\sim \frac{1}{2n^2}$ сх $\Rightarrow$ сх. абс.

Ответ: сх. абс.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$

$a_n = 1 - \overbrace{\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}}^{\to 1} \to 0$ монотон.

(т.к. $\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}$, $n = [1;+\infty)$ монотон)

По пр. Лейбница сх.

$\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right| \sim \frac{\pi}{2n}$ расх. $\Rightarrow$ нет абс. сх-ти

Ответ: сх. условно

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sin 2n}{n^2 - \ln n}$

$\cancel{\frac{(n+1)\sin 2n}{n^2 - \ln n}}$ $\sin 2n$ — част. сум. огр.

$\frac{n+1}{n^2-\ln n}$ $\xrightarrow{}$ 0 монотон => сх. по т. Д.

$\left|\frac{(n+1)\sin 2n}{n^2-\ln n}\right| \geq \frac{(n+1)\sin^2 2n}{n^2-\ln n} =$

част. сум. огр.

$= \underbrace{\frac{n+1}{2(n^2-\ln n)}}_{\sim \frac{1}{n}\text{ расх.}} - \frac{(n+1)\cos 4n}{2(n^2-\ln n)}$

$\to 0$ монотон

по т. Д. сх.

=> нет абс. сх-ти

Ответ: сх. условно

4. $\cancel{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)}$

$\cancel{\sin \underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}}_{\to 0} = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{\sin^3 n}{n} + \frac{\sin^5 n}{n^{\frac{5}{3}}} + o\left(\frac{\sin^5 n}{n^{\frac{5}{3}}}\right)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\ln(n^2+1)}$

$(-1)^n \frac{\ln n}{\ln(n^2+1)} \sim \frac{(-1)^n \ln n}{\ln n^2} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}$

Расх., т.к. для чёт. n: $\lim = \frac{1}{2}$

для нечёт. n: $\lim = -\frac{1}{2}$

т.к. не выполнено необх. условие сх-ти

$\Rightarrow$ расх. **Ответ:** расх.

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi n\right) \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) =$

$= \sum^{\infty} \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos \pi n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) =$

$= \sum^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

$\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \to 0$ монотон

$\Rightarrow$ сх-се по лейбницу

абс. сх-ть:

$\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$ расх $\Rightarrow$ нет абс. сх-ти

Ответ: сх-се условно.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$

$$\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right) = \underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}}_{\text{сх. условно}} + \underbrace{\frac{\sin^3 n}{n}}_{\text{сх.}} + \underbrace{O\left(\frac{\sin^3 n}{n}\right)}_{\text{сх.}}$$

$$\frac{\sin^3 n}{n} = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4n} = \underbrace{\frac{3\sin\alpha}{4n}}_{\text{сх}} - \underbrace{\frac{\sin 3\alpha}{4n}}_{\text{сх.}}$$

по Абелю-Д.

$$\frac{|\sin n|}{\sqrt[3]{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}_{\text{расх.}} - \underbrace{\frac{\cos 2n}{\sqrt[3]{n}}}_{\text{сх. по А.-Д.}} \Rightarrow \text{нет. абс. сх-ти}$$

$\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ сх. условно по А.Д.

$\Rightarrow \sin \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ сх. условно

<u>Ответ:</u> сх. условно.