Содержание

Теория меры

1 Системы множеств

1.1 Алгебра и сигма-алгебра множеств

Областью определения меры (как функции множества) является система (семейство, набор) множеств, удовлетворяющая некотором требованиям. В этом пункте рассмотрим некоторые стандартные системы множеств и их свойства.

Напомним полезный факт из теории множеств.

Лемма 1 *Для произвольного набора множеств A_λ, $\lambda \in L$ и множества A выполнено*

$$A \setminus \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in L} A \setminus A_\lambda, \quad A \setminus \bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in L} A \setminus A_\lambda,$$

$$A \cap \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in L} A \cap A_\lambda.$$

Первые два равенства называют законами де Моргана.

Будем считать, что всегда есть некоторое универсальное множество X, содержащее все другие множества. Тогда для любого множества можно определить его дополнение:

$$A^c = X \setminus A.$$

Тогда из законов де Моргана следует, что дополнение объединения равно пересечению дополнений и наоборот:

$$\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda^c.$$

Определение 1 (Разбиение множества) *Семейство множеств A_λ, $\lambda \in L$ называется разбиением множества A, если $A = \bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ и все A_λ попарно не пересекаются, т.е. $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = \emptyset$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Обозначать это будем так:*

$$A = \bigsqcup_{\lambda\in L} A_\lambda,$$

операцию $\sqcup$ называют дизъюнктным объединением множеств.

Определение 2 (Симметричная система множеств) *Система множеств называется симметричной, если вместе с каждым множеством она содержит и его дополнение.*

Введем полезные свойства системы множеств $\mathfrak{M}$ и их названия:
Свойство σ_0: Если $A, B \in \mathfrak{M}$, то $A \cup B \in \mathfrak{M}$;
Свойство δ_0: Если $A, B \in \mathfrak{M}$, то $A \cap B \in \mathfrak{M}$;
Свойство σ: Если $A_n \in \mathfrak{M}$, то $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$;
Свойство δ: Если $A_n \in \mathfrak{M}$, то $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$.

Лемма 2 *Пусть $\mathfrak{M}$ – симметричная система множеств. Тогда свойства σ_0 и δ_0 равносильны, а также σ и δ равносильны.*

$\triangleright$ Доказательство следует из законов де Моргана. $\blacktriangleleft$

Определение 3 (Алгебра и сигма-алгебра) *Непустая симметричная система множеств, обладающая свойством σ_0 (σ) называется алгеброй (σ-алгеброй).*

Пример 1.1.1
1. *$\{\emptyset, X\}$ – алгебра и σ-алгебра (тривиальная σ-алгебра).*
2. *2^X (множество всех подмножеств X) – σ-алгебра.*
3. *$\mathfrak{A}$ – система всех ограниченных подмножеств $\mathbb{R}$ и их дополнений. Это алгебра, но не σ-алгебра.*
4. *Множество измеримых по Жордану множеств – алгебра, но не σ-алгебра.*

5. *Пусть $\mathfrak{A}$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств X. Возьмем некоторое множество $A \subset \mathfrak{A}$ и рассмотрим набор множеств*

$$\mathfrak{A} \cap A = \{U : \ U \cap A, \ U \in \mathfrak{A}\}$$

– алгебра (σ-алгебра). Её называют индуцированной алгеброй (σ-алгеброй).

Свойства алгебры и σ-алгебры:

1. $\emptyset$ и X содержатся в алгебре;
2. σ-алгебра является алгеброй;
3. алгебра замкнута относительно конечных объединений и пересечений, а также разности и симметрической разности. σ-алгебра замкнута относительно счетных объединений и пересечений.
4. пересечение (σ)-алгебр является (σ-)алгеброй (любого количества, в т.ч. бесконечного).

Определение 4 (Минимальная σ-алгебра) *Пусть $\mathfrak{M}$ – система подмножеств X. Минимальной σ-алгеброй, порожденной $\mathfrak{M}$ называется σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{M}$ и принадлежащая любой другой σ-алгебре, содержащей $\mathfrak{M}$.*

Лемма 3 (Существование и единственность минимальной σ-алгебры) *Пусть $\mathfrak{M}$ – система подмножеств X. Тогда существует и при том единственная минимальная σ-алгебра, порожденная $\mathfrak{M}$.*

$\triangleright$ Существование очевидно, так как 2^X – такая σ-алгебра. Рассмотрим пересечение всех σ-алгебр подмножеств X, содержащих $\mathfrak{M}$. Это и есть искомая минимальная σ-алгебра. $\blacktriangleleft$

Определение 5 (Борелевские множества) *Минимальная σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами в $\mathbb{R}^n$ называется борелевской σ-алгеброй и обозначается $\mathfrak{B}^n$, а её элементы называются борелевскими множествами.*

Какие множества являются борелевскими?

Пример 1.1.2 *Приведем примеры борелевских множеств (в $\mathbb{R}^n$):*

1. *открытые;*
2. *замкнутые (как дополнения открытых);*
3. *счетное пересечение открытых (множество типа G_δ) и счетное объединение замкнутых (множество типа F_σ);*
4. *счетные объединения и пересечения множеств типа G_δ и F_σ и т.д.*
5. *в $\mathbb{R}$ любые промежутки (отрезки, интервалы, полуинтервалы) и их счетные объединения.*

Неборелевские множества существуют, но описать какое-нибудь из них довольно сложно. Позже мы получим такой пример.

1.2 Кольцо множеств

Определение 6 (Кольцо) *Непустая система $\mathcal{R}$ подмножеств X называется кольцом, если вместе с любыми двумя множествами A и B она содержит $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.*

Если кольцо замкнуто относительно счетного объединения (пересечения), то оно называется σ-кольцом (δ-кольцом).

Свойства кольца $\mathcal{R}$:

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$ может не содержать X;
3. алгебра является кольцом;
4. симметричное кольцо является алгеброй;
5. если $X \in \mathcal{R}$, то $\mathcal{R}$ – алгебра.
6. пересечение колец есть кольцо.

Пример 1.2.1 *Приведем примеры колец:*

1. *Множество ограниченных множеств в $\mathbb{R}$.*
2. *Множество всех измеримых по Жордану множеств в $\mathbb{R}^2$.*
3. *Множество интервалов на прямой не является кольцом (почему?).*

1.3 Полукольцо множеств

Определение 7 (Полукольцо) *Система множеств $\mathcal{P}$ называется* ***полукольцом****, если выполнены условия:*

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$;
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$;
3. $\forall B \subset A \in \mathcal{P} \quad \exists A_k \in \mathcal{P},\ A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Пример 1.3.1 1. *Алгебра и кольцо являются полукольцом.*

2. *В $\mathbb{R}$ полукольцом является множество ячеек $[a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$. Такую систему будем обозначать $\mathcal{P}^1$. Если при этом $a, b \in \mathbb{Q}$, то получается тоже полукольцо, которое будем обозначать $\mathcal{P}^1_r$.*
3. *В $\mathbb{R}^n$ определим полукольца*

$$\mathcal{P}^n = \{[a_1, b_1) \times ...[a_n, b_n), a_i, b_i \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{P}^n_r = \{[a_1, b_1) \times ...[a_n, b_n), a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}.$$

Лемма 4 (О дизъюнктном разбиении) *Для любого семейства множеств $A_1, ..., A_n, ...$ верно*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \Big).$$

▷ Множества $E_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j$ попарно дизъюнктны.

Пусть $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и n_0 – наименьший номер, при котором $x \in A_{n_0}$. Тогда $x \in E_{n_0}$, а значит $x \in \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$.

Пусть теперь $x \in \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Тогда $x \in E_{n_0} \subset A_{n_0}$ и $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Равенство множеств доказано. ◀

Лемма 5 (Свойства полукольца) *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо, P, $P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}$. Тогда*

1. $\exists Q_1, ..., Q_m \in \mathcal{P}: \; P \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$;
2. $\exists Q_{ij} \subset P_i$, $Q_{ij} \in \mathcal{P}: \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_i} Q_{ij}$ *(верно и для счетного набора при $n = \infty$).*

▷ 1. Будем доказывать методом математической индукции. При $n = 1$ лемма верна в силу определения полукольца. Предположим, что утверждение леммы верно для $n = k$, и докажем ее верность для $n = k + 1$. Имеем

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} P_i = \Big(P \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P_i \Big) \setminus P_{k+1} =$$

(по индукционному предположению $\exists Q_j \in \mathcal{P}$)

$$= \bigsqcup_{j=1}^{s} Q_j \setminus P_{k+1} = \bigsqcup_{j=1}^{s} \Big(Q_j \setminus P_{k+1} \Big) =$$

(по определению полукольца $\exists Q_{lj} \in \mathcal{P}$)

$$= \bigsqcup_{j=1}^{s} \bigsqcup_{l=1}^{l_j} Q_{jl},$$

что и означает требуемое.

2. Применим лемму о дизъюнктном представлении и п.1. ◀

Замечание 1 *Второе свойство Леммы можно усилить. А именно, если P, $P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}$, то*

$$\bigcup_{i=1}^{n} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j,$$

причем для любых i, j верно одно из двух: либо $Q_j \subset P_i$, либо $Q_i \cap P_j = \emptyset$.

Пример 1.3.2 *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств множества X, $\mathcal{R}$ – набор всевозможных конечных объединений множеств из $\mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{R}$ – кольцо. Если $X \in \mathcal{R}$, то $\mathcal{R}$ – алгебра.*

1.4 Произведение полуколец

Определение 8 *Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – полукольца подмножеств X и Y соответственно. Произведением полуколец $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ называется система всевозможных декартовых произведений*

$$\mathcal{P} \odot \mathcal{Q} = \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Теорема 1 (О произведении полуколец) *Произведение полуколец есть полукольцо.*

$\triangleright$ Проверим все требования полукольца. Очевидно, $\emptyset \in \mathcal{P} \odot \mathcal{Q}$.

Если $A = P \times Q \in \mathcal{P} \odot \mathcal{Q}$, $B = P_0 \times Q_0 \in \mathcal{P} \odot \mathcal{Q}$, то

$$A \cap B = (P \cap P_0) \times (Q \cap Q_0) \in \mathcal{P} \odot \mathcal{Q}.$$

Осталось проверить третье условие полукольца. Заметим, что если B не содержится в A, то воспользуемся равенством $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ и вместо множества B будем рассматривать $A \cap B$. Будем считать, что $B \subset A$. Тогда $P_0 \subset P$, $Q_0 \subset Q$. Тогда согласно определениям полуколец $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ верны разложения:

$$P \setminus P_0 = \bigsqcup_{i=1}^{n} P_i, \quad Q \setminus Q_0 = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_i.$$

Тогда $P = \bigsqcup\limits_{i=0}^{n} P_i$, $Q = \bigsqcup\limits_{j=0}^{m} Q_j$ и $A = P \times Q = \bigsqcup\limits_{i=0}^{n} \bigsqcup\limits_{j=0}^{m} P_i \times Q_j$.

Удалив из этого разбиения множество $B = P_0 \times Q_0$, получим требуемое разбиение множества $A \setminus B$. $\blacktriangleleft$

Доказанная теорема позволяет строить полукольца в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 9 (Параллелепипеды и ячейки) *Пусть $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, причем $a_i < b_i$ при $i = 1, .., n$. Тогда*

1. *множество*

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$$

называется открытым параллелепипедом (брусом).

2. *множество*
$$[a, b] = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$$
называется замкнутым параллелепипедом (брусом).

3. *множество*
$$[a, b) = [a_1, b_1) \times ... \times [a_n, b_n)$$
называется ячейкой (клеткой). Множество ячеек в $\mathbb{R}^n$ *будем обозначать* $\mathcal{P}^n$*, а если координаты всех их концов рациональны (т.е.* $a, b \in \mathbb{Q}^n$*) –* $\mathcal{P}_r^n$*.*

Очевидно, что открытый и замкнутый параллелепипеды являются борелевскими множествами.

Если при некотором i выполнено $a_i \geqslant b_i$, то будем считать $(a, b) = [a, b) = \emptyset$.

Заметим, что любая непустая ячейка может быть представлена как пересечение убывающей последовательности открытых параллелепипедов (множество типа G_δ) и как объединение возрастающей последовательности замкнутых параллелепипедов (множество типа F_σ). Например,
$$[a, b) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Big(a - \frac{1}{n}, b\Big), \quad [a, b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big[a, b - \frac{1}{n}\Big].$$
Таким образом, ячейка является борелевским множеством.

Заметим, что системы ячеек $\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{P}_r^n$ – полукольца, как произведения конечного числа полуколец.

Отметим следующий топологический факт, который поможет нам лучше уловить связь борелевских множеств и борелевской сигма-алгебры ячеек в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2 (О представлении открытого множества объединением ячеек)
Всякое непустое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ *может быть представлено как счетное дизъюнктное объединение ячеек, лежащих в* G *вместе с замыканием. Можно считать, что все ячейки имеют рациональные вершины.*

$\triangleright$ Для каждой точки $x \in G$ найдется ячейка $P_i \ni x$, $P_i \in \mathcal{P}_r^n$ и $\bar{P}_i \subset G$. Тогда
$$G = \bigcup_{i \in I} P_i,$$
но так как множество $\mathcal{P}_r^n$ счетно, то
$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i.$$
Воспользуемся теперь Леммой о свойствах полукольца (п.2 для счетного объединения) и перейдем к дизъюнктным ячейкам. $\blacktriangleleft$

Следствие 3 *Борелевская сигма-алгебра в* $\mathbb{R}^n$ *совпадает с минимальной сигма-алгеброй, порожденной системой ячеек* $\mathcal{P}^n$ *или системой ячеек с рациональными концами* $\mathcal{P}_r^n$*.*

2 Аддитивная функция множества (объем)

Ранее мы рассматривали разные области определения функции множества. Теперь наделим функцию множества некоторыми полезными свойствами.

2.1 Определение и примеры объемов

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторая система подмножеств множества X. Функция $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что φ конечно-аддитивна на $\mathfrak{M}$, если для любого $A \in \mathfrak{M}$ и любого его конечного разбиения $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{M}$ верно

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i).$$

Определение 10 (Объем) *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств множества X. Функция $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ называется объемом, если она конечно-аддитивна на $\mathcal{P}$ и $\mu(\emptyset) = 0$.*

Определение 11 (Конечный и σ-конечный объем) *Объем μ называется конечным, если для любого $A \in \mathcal{P}$ $\mu(A) < +\infty$. Объем μ называется σ-конечным, если $X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A_i) < +\infty$, при этом $\mu(X)$ может равняться $+\infty$.*

Пример 2.1.1 *Приведем примеры объемов.*

1. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1$, $\lambda_1[a, b) = b - a$ *(Классический объем в $\mathbb{R}^1$).*
2. $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^n$,
$$\lambda_n[a, b) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$
(Классический объем в $\mathbb{R}^n$). Конечную аддитивность докажем позже (Теорема о произведении объемов).
3. $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– неубывающая функция. Объем μ_f, порожденный f:*
$$\mu_f[a, b) = f(b) - f(a).$$
4. *Пусть $f \geqslant 0$ – локально интегрируемая функция на $\mathbb{R}$ (плотность). Определим объем на $\mathcal{P}^1$ так:*
$$\mu[a, b) = \int_a^b f(x)dx.$$
5. $\mathfrak{A}$ *– алгебра подмножеств X, содержащая все одноточечные множества. $w_x \geqslant 0$, $x \in X$. Определим дискретную меру:*
$$\mu(A) = \sum_{x \in A} w_x.$$
Если все $w_x = 1$, то объем называют считающим объемом.

2.2 Свойства объема

Сформулируем важные

Свойства объема

Пусть μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$. $P, P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}$. Тогда выполнены

1. Монотонность объема:
$$\text{если } P_1 \subset P, \text{ то } \mu(P_1) \leqslant \mu(P);$$

2. Усиленная монотонность объема:
$$\text{если } \bigsqcup_{i=1}^{n} P_i \subset P, \text{ то } \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i) \leqslant \mu(P);$$

3. Полуаддитивность объема:
$$\text{если } P \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i, \text{ то } \mu(P) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i).$$

$\triangleright$ 1. По определению полукольца имеем $P \setminus P_1 = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j$. Тогда $P = P_1 \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j$ и пользуясь конечной аддитивностью объема, получим

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \sum_{j=1}^{m} \mu(Q_j),$$

откуда следует требуемое, так как $\mu(Q_j) \geqslant 0$.

2. Аналогично, но берем $P \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j$.

3. Обозначим $P_i' = P \cap P_i \in \mathcal{P}$. Тогда по свойству полукольца

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i' = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} Q_{ij}, \quad Q_{ij} \subset P_i' \subset P_i, \ Q_{ij} \in \mathcal{P}.$$

Теперь воспользуемся усиленной монотонностью для включения

$$\bigsqcup_{j=1}^{m_i} Q_{ij} \subset P_i$$

и аддитивностью объема:

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(Q_{ij}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i).$$

◀

Теорема 4 (О продолжении объема с полукольца на кольцо) *Пусть на полукольце $\mathcal{P}$ задан объем μ. Тогда существует и при том единственное его продолжение на кольцо $\mathcal{R}$, состоящее из конечных объединений множеств из $\mathcal{P}$.*

$\triangleright$ Для любого $A \in \mathcal{R}$ имеем

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j, \quad P_i, Q_j \in \mathcal{P}.$$

Положим

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu(Q_j).$$

Докажем, что так определенная функция является объемом.

Если существует другое разбиение $A = \bigsqcup_{j=1}^{n} Q'_j$, $Q'_j \in \mathcal{P}$, то обозначим $Q_{ij} = Q_i \cap Q'_j \in \mathcal{P}$ и

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(Q'_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mu(Q_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu(Q_{ij}).$$

Докажем конечную аддитивность. Пусть $A_1, ..., A_n \in \mathcal{R}$ – разбиение A. Тогда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} Q_{ij}, \quad Q_{ij} \in \mathcal{P}.$$

Пользуясь конечной аддитивностью объема на $\mathcal{P}$, получим

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(Q_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

◀

Определим теперь произведение объемов. Корректность определения устанавливает следующая теорема.

Теорема 5 (О произведении объемов) *Пусть X, Y – непустые множества, $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ – полукольца их подмножеств, на них заданы объемы μ_1 и μ_2, соответственно. Функция $\mu : \mathcal{P} \odot Q \to [0, +\infty]$, определяемая равенством*

$$\mu(P \times Q) = \mu_1(P) \cdot \mu_2(Q), \quad P \in \mathcal{P},\ Q \in \mathcal{Q},$$

является объемом на $\mathcal{P} \odot Q$. Здесь считаем, что $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.

$\triangleright$ Очевидно, что $\mu(\emptyset) = 0$. Докажем конечную аддитивность.

Если разбиение $P \times Q$ такое: $P = \bigsqcup_{i=1}^{n} P_i$, $Q = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j$ (так называемое сеточное разбиение), то $P \times Q = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} (P_i \times Q_j)$ и

$$\mu(P \times Q) = \mu_1(P)\mu_2(Q) = \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i) \sum_{j=1}^{m} \mu(Q_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(P_i \times Q_j).$$

Если же $P \times Q$ разбито произвольным образом элементами полукольца $\mathcal{P} \odot \mathcal{Q}$:

$$P \times Q = \bigsqcup_{i=1}^{n} (P_i \times Q_i), \quad P_i \in \mathcal{P},\ Q_i \in \mathcal{Q},$$

то получим из него сеточное следующим образом. Так как $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ и $Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$, то по свойствам полукольца:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} P'_j, \quad Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i = \bigsqcup_{k=1}^{s} Q'_k,$$

причем для всех i, j либо P'_j содержится в P_i, либо не пересекается с ним. (Аналогично с Q'_k). Тогда множества $P'_j \times Q'_k$ образуют разбиение $P \times Q$ и

$$\mu(P \times Q) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s} \mu(P'_j \times Q'_k).$$

Заметим, что для любого k наборы множеств $\{P'_i : P'_i \subset P_k\}$ образуют разбиение P_k (Аналогично для Q_k). И тогда семейство $\{P'_i \times Q'_j : P'_i \subset P_k, Q'_j \subset Q_k\}$ образует разбиение множества $P_k \times Q_k$. Тогда можно сгруппировать слагаемые в итоговой сумме нужным образом:

$$\mu(P \times Q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(P'_i \times Q'_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i \times Q_i).$$

◀

Определение 12 (Произведение объемов) *Объем $\mu(P \times Q) = \mu_1(P)\mu_2(Q)$ называется произведением объемов μ_1 и μ_2.*

Введенный ранее классический объем λ_n в $\mathbb{R}^n$ является произведением объемов $\lambda_{n-1} \times \lambda_1$ или $\lambda_1 \times ... \times \lambda_1$.

3 Мера

3.1 Определение и примеры меры

Определение 13 *Объем μ, заданный на полукольце $\mathcal{P}$, называют мерой, если он обладает свойством счетной аддитивности (σ-аддитивности). То есть, для любого множества $P \in \mathcal{P}$ и любого его счетного разбиения $P_1, P_2, ... \in \mathcal{P}$ верно*

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i).$$

Заметим, что $\mu(P_i) \geqslant 0$ и написанный ряд – положительный. Значит, ряд либо сходится, либо его сумма равна $+\infty$.

Рассмотрим ранее введенные объемы и выясним, являются ли они мерами.

Пример 3.1.1 *Классический объем λ_n является мерой на $\mathcal{P}^n$. (Докажем позже)*

Пример 3.1.2 *Объем μ_f на $\mathcal{P}^1$, порожденный неубывающей функцией f:*

$$\mu_f[a,b) = f(b) - f(a).$$

Рассмотрим счетное разбиение ячейки ($b_0 = a$)

$$[b_0, b) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} [b_n, b_{n+1}), \quad b_n < b_{n+1}, \ \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Если введенный объем счетно аддитивен, то

$$\mu_f[b,a) = f(b) - f(b_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_f[b_n, b_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(f(b_{n+1}) - f(b_n)\Big) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \Big(f(b_{n+1}) - f(b_n)\Big) = \lim_{N\to\infty} \Big(f(b_{N+1}) - f(b_0)\Big) = \lim_{N\to\infty} f(b_N) - f(a).$$

Это значит, что для того, чтобы введенный объем был счетно-аддитивным (или, что то же самое, мерой), необходимо, чтобы функция f была непрерывна слева. Позже мы докажем, что это условие является и достаточным.

В приведенном примере можно задать объем с помощью левосторонних пределов функции f:

$$\mu_f[a,b) = f(b-0) - f(a-0).$$

3.2 Когда объем является мерой? Непрерывность меры

Свойство счетной аддитивности довольно сложно устанавливать. Следующая теорема позволяет заменить его на более удобное свойство.

Будем говорить, что объем μ, заданный на полукольце $\mathcal{P}$ является счетно полуаддитивным, если для любых множеств $P, P_1, P_2, ... \in \mathcal{P}$ таких, что

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \quad \Rightarrow \quad \mu(P) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i).$$

То есть, объем множества не превосходит суммы объемов элементов его покрытия.

Теорема 6 (Счетная полуаддитивность меры.) *Счетная аддитивность объема равносильна его счетной полуаддитивности.*

$\triangleright$ 1. Пусть μ счетно-аддитивен и $P \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$. Обозначим $P_i' = P \cap P_i \in \mathcal{P}$. Тогда по свойству полукольца

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i' = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} Q_{ij}, \quad Q_{ij} \subset P_i', Q_{ij} \in \mathcal{P}.$$

По усиленной монотонности объема для включения $\bigcup\limits_{j=1}^{m_i} Q_{ij} \subset P_i'$ получаем

$$\sum_{j=1}^{m_i} \mu(Q_{ij}) \leqslant \mu(P_i') \leqslant \mu(P_i).$$

Тогда

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(Q_{ij}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i).$$

2. Пусть теперь μ счетно полуаддитивен и $P = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$, $P, P_i \in \mathcal{P}$.

При любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} P_i \subset P \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i) \leqslant \mu(P).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(P_i) \leqslant \mu(P)$. Учитывая счетную полуаддитивность, получим требуемое. ◀

Следствие 7 *Если мера μ задана на сигма-алгебре, то счетное объединение множеств нулевой меры имеет нулевую меру.*

Теорема 8 (Непрерывность снизу) *Пусть объем μ задан на алгебре $\mathfrak{A}$. Для того, чтобы объем μ был мерой необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен снизу, т.е. для любых $P, P_n \in \mathfrak{A}$ таких, что*

$$P_n \subset P_{n+1},\ P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \quad \Rightarrow \quad \mu(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(P).$$

▷ Необходимость. Пусть μ – мера. Обозначим $A_1 = P_1$, $A_k = P_k \setminus P_{k-1} \in \mathfrak{A}$. Множества A_k образуют разбиение P: $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, и $P_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Следовательно,

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(P_n).$$

Достаточность. Пусть объем μ непрерывен снизу. Пусть $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{A}$ – разбиение P: $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Обозначим $P_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда $P_n \subset P_{n+1}$, $P_n \in \mathfrak{A}$, $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Пользуясь непрерывностью снизу и конечной аддитивностью объема, получаем

$$\mu(P) = \lim_{n\to\infty} \mu(P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

◀

Теорема 9 (Непрерывность сверху) *Пусть μ – конечный объем, заданный на алгебре $\mathfrak{A}$. Следующие утверждения равносильны:*

1. *μ – мера;*

2. *μ непрерывен сверху, т.е. для любых $P, P_n \in \mathfrak{A}$ таких, что*
$$P_{n+1} \subset P_n,\ P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \quad \Rightarrow \quad \mu(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(P).$$

3. *μ непрерывен сверху на $\emptyset$, т.е. для любых $P_n \in \mathfrak{A}$ таких, что*
$$P_{n+1} \subset P_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mu(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\triangleright$ Будем доказывать $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Пусть $P, P_n \in \mathfrak{A}$, $P_{n+1} \subset P_n$, $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Положим $A = P_1 \setminus P$, $A_n = P_1 \setminus P_n$. Тогда
$$A_n \subset A_{n+1},\ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$
согласно непрерывности меры снизу, имеем
$$\mu(P_1) - \mu(P) = \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(P_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(P_n),$$
откуда $\mu(P_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(P)$.

$2 \Rightarrow 3$. Очевидно, если взять в качестве P пустое множество.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, $P_k \in \mathfrak{A}$. Введем множества $A_n = P \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k$.

Множества A_n удовлетворяют условиям непрерывности сверху на пустом множестве, значит $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Так как $P = A_n \sqcup \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, то
$$\mu(P) = \mu(A_n) + \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

$\blacktriangleleft$

Определение 14 (Пространство с мерой) *Пусть $\mathfrak{A}$ – сигма-алгебра подмножеств множества X, μ – мера на $\mathfrak{A}$. Тройку $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ называют пространством с мерой.*

4 Внешняя мера. Продолжение меры по Каратеодори

4.1 Определение и свойства внешней меры

Напомним, 2^X – сигма-алгебра всех подмножеств множества X.

Определение 15 (Внешняя мера) *Функция $\nu : 2^X \to [0, +\infty]$ называется внешней мерой на X, если $\nu(\emptyset) = 0$ и она счетно полуаддитивна, то есть если*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Rightarrow \quad \nu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Свойства внешней меры

1. Внешняя мера конечно полуаддитивна, то есть

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{N} A_n \quad \Rightarrow \quad \nu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n).$$

2. Внешняя мера монотонна, то есть

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \nu(A) \leqslant \nu(B).$$

3. Любая мера, заданная на 2^X является внешней мерой. Но не любая внешняя мера является мерой.

Теперь нас будет интересовать ситуация, когда внешняя мера является мерой. Если внешняя мера ν аддитивна, то для двух множеств A и E из области ее определения будет выполнено

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A).$$

При этом говорят, что множество A аддитивно разбивает множество E.

Определение 16 (ν-измеримое множество) *Пусть ν – внешняя мера на X. Множество A называется ν-измеримым, если для любого $E \subset X$ выполнено*

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A),$$

то есть множество A аддитивно разбивает каждое множество из 2^X.

Заметим, что неравенство

$$\nu(E) \leqslant \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A)$$

очевидно выполнено в силу конечной полуаддитивности внешней меры. Следовательно, для проверки равенства достаточно проверять верность неравенства

$$\nu(E) \geqslant \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A).$$

Замечание 2 *Если $\nu(A) = 0$, то для любого E имеем $\nu(E \cap A) = 0$ и $\nu(E) \geqslant \nu(E \setminus A)$ в силу монотонности внешней меры. Следовательно, все множества, имеющие нулевую внешнюю меру ν-измеримы.*

Пример 4.1.1 *Приведем неформальный пример внешней меры из жизни. Рассмотрим пригородную железную дорогу, разделенную на тарифные зоны. Пусть X – множество всевозможных маршрутов (конечные объединения участков, соединяющих станции на одной ветке). Стоимость проезда по связному участку пропорциональна числу задеваемых зон, а по несвязному – сумме по связным частям. Стоимость проезда – внешняя мера на множестве маршрутов. Измеримыми будут только маршруты, состоящие из целых зон.*

Теорема 10 (О структуре системы ν-измеримых множеств) *Пусть ν – внешняя мера на X. Тогда система $\mathfrak{A}_\nu$ – система ν-измеримых множеств – является σ-алгеброй, а сужение ν на $\mathfrak{A}_\nu$ является мерой.*

$\triangleright$ Очевидно, что $\emptyset \in \mathfrak{A}_\nu$. Далее, $\mathfrak{A}_\nu$ – симметрична, т.к. если $A \in \mathfrak{A}_\nu$, то учитывая равенства

$$E \setminus A = E \cap A^C, \quad E \setminus A^C = E \cap A,$$

получаем

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A) = \nu(E \setminus A^C) + \nu(E \cap A^C),$$

то есть, $A^C \in \mathfrak{A}_\nu$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{A}_\nu$ – алгебра. Пусть $A, B \in \mathfrak{A}_\nu$. Тогда для любого $E \in 2^X$:

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A) = \nu(E \cap A) + \nu((E \setminus A) \cap B) + \nu((E \setminus A) \setminus B) = \\ = \nu(E \cap A) + \nu((E \setminus A) \cap B) + \nu(E \setminus (A \cup B))$$

Для суммы первых двух слагаемых воспользуемся полуаддитивностью внешней меры

$$\nu(E \cap A) + \nu((E \setminus A) \cap B) \geqslant \nu\Big((E \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap B)\Big) = \nu\Big(E \cap (A \cup B)\Big).$$

Получаем, что верно неравенство, из которого следует, что $A \cup B \in \mathfrak{A}_\nu$:

$$\nu(E) \geqslant \nu(E \cap (A \cup B)) + \nu(E \setminus (A \cup B)).$$

Следовательно, $\mathfrak{A}_\nu$ – алгебра.

Докажем аддитивность ν на алгебре $\mathfrak{A}_\nu$. Пусть $A \cap B = \emptyset$. Тогда для любого $E \subset X$ пользуясь измеримостью сначала A, а потом B, получим

$$\nu(E \cap (A \sqcup B)) = \nu(E \cap (A \sqcup B) \cap A) + \nu(E \cap (A \sqcup B) \setminus A) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B).$$

При $E = X$ получаем $\nu(A \sqcup B) = \nu(A) + \nu(B)$. Конечная аддитивность получается по индукции.

Докажем, что $\mathfrak{A}_\nu$ – σ-алгебра. Рассмотрим счетное разбиение $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathfrak{A}_\nu$. Для $n \in \mathbb{N}$ пользуясь равенством $\nu(E \cap (A \sqcup B)) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B)$ и монотонностью внешней меры, имеем

$$\nu(E) = \nu\Big(E \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + \nu\Big(E \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \nu(E \cap A_i) + \nu(E \setminus A).$$

Устремим $n \to \infty$ и используем счетную полуаддитивность:

$$\nu(E) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E \cap A_i) + \nu(E \setminus A) \geqslant \nu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}(E \cap A_i)\Big) + \nu(E \setminus A) =$$
$$= \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A) \quad \Rightarrow \quad A \in \mathfrak{A}_\nu.$$

Осталось доказать, что ν является мерой на $\mathfrak{A}_\nu$. Из конечной аддитивности ν на $\mathfrak{A}_\nu$ следует, что ν – объем на $\mathfrak{A}_\nu$. По определению внешней меры, он счетно полуаддитивен, а это равносильно счетной аддитивности, т.е. ν – мера на $\mathfrak{A}_\nu$. ◀

Определение 17 (Полная мера) *Мера μ, заданная на полукольце $\mathcal{P}$, называется полной, если любое подмножество множества меры ноль измеримо (и очевидно, тоже имеет меру ноль).*

Замечание 3 *Сужение внешней меры ν на $\mathfrak{A}_\nu$ является полной мерой. Докажем это. Пусть $A \in \mathfrak{A}_\nu$, $\nu A = 0$ и $B \subset A$. Тогда по монотонности внешней меры $0 \leqslant \nu B \leqslant \nu A = 0$, откуда $\nu B = 0$ и по замечанию к определению ν-измеримого множества, B – измеримо.*

4.2 Продолжение меры по Каратеодори

Теперь опишем схему продолжения меры, заданной на полукольце, до внешней меры. Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств множества X, μ_0 – мера на $\mathcal{P}$.

Для каждого множества $A \subset X$ рассмотрим всевозможные его счетные покрытия множествами $P_n \subset \mathcal{P}$. Определим внешнюю меру μ^* множества A следующим образом:

$$\mu^* A = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(P_n), \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n,\ P_n \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N} \tag{*}$$

Понятно, что покрытия могут быть и конечными (до счетных их можно дополнить пустыми множествами). Если A нельзя накрыть счетным набором множеств, то считаем $\mu^* A = +\infty$ (как инфимум пустого множества).

Построенная таким образом функция μ^* является продолжением меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$ на большую систему μ^*-измеримых множеств $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Это означает, что для любого $P \in \mathcal{P}$: $\mu^*(P) = \mu_0(P)$ и $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Докажем это в следующей теореме.

Теорема 11 (Лебега – Каратеодори о продолжении меры) *Для функции μ^*, задаваемой формулой (*), выполнено следующее:*

1) μ^* является внешней мерой на X;

2) μ^* является продолжением меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$ на сигма-алгебру измеримых множеств $\mathfrak{A}_{\mu^*}$.

▷ Заметим, что условие 2) равносильно двум условиям:

2а) $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$;

2б) $\forall P \in \mathcal{P}$: $\mu^* P = \mu_0 P$.

Докажем сначала 2б). Неравенство $\mu^* P \leqslant \mu_0 P$ следует из того, что само множество P является своим покрытием. Докажем обратное неравенство. Пусть $P_n \in \mathcal{P}$ – образуют покрытие P. Так как μ_0 – счетно полуаддитивна, то

$$\mu_0 P \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(P_n) \quad \Rightarrow \quad \mu_0 P \leqslant \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(P_n) = \mu^* P.$$

Докажем теперь 1).Так как $\emptyset \in \mathcal{P}$, то $\mu^*\emptyset = \mu_0\emptyset = 0$.

Докажем счетную полуаддитивность. Пусть $A_n \subset X$ – образуют покрытие A. Докажем, что тогда $\mu^* A \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$. Будем считать, что все $\mu^* A_n < +\infty$ (иначе неравенство очевидно). Пусть для $\varepsilon > 0$ множества $P_{nk} \in \mathcal{P}$ – образуют покрытие A_n такое, что

$$\mu^* A_n + \frac{\varepsilon}{2^n} > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_{nk} \quad A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}, \quad P_{nk} \in \mathcal{P}.$$

Тогда, суммируя по всем n, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_{nk} \geqslant \mu^* A.$$

(последнее неравенство верно, так как множества P_{nk} Образуют счетное покрытие множества A) Ввиду произвольности ε вытекает требуемое неравенство.

Осталось доказать 2а) Нужно доказать, что любое множество $P \in \mathcal{P}$ является μ^*-измеримым. Для этого достаточно доказать, что для любого $E \in X$ выполнено

$$\mu^* E \geqslant \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

Пусть сначала $E \in \mathcal{P}$. Тогда $E \cap P \in \mathcal{P}$ и $E \setminus P = \bigsqcup\limits_{n=1}^{k} P_n$, $P_n \in \mathcal{P}$ и

$$E = (E \cap P) \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{k} P_n.$$

Пользуясь доказанным 2б), аддитивностью μ_0 и полуаддитивностью μ^*, получаем

$$\mu^* E = \mu_0 E = \mu_0(E \cap P) + \sum_{n=1}^{k} \mu_0 P_n \geqslant \mu^*(E \cap P) + \sum_{n=1}^{k} \mu^* P_n = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

Пусть теперь $E \in X$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем набор множеств $P_n \in \mathcal{P}$, покрывающий E так, чтобы

$$\mu^* E + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* P_n \geqslant$$

так как $P_n \in \mathcal{P}$, то по доказанному выше, они аддитивно разбиваются множеством $P \in \mathcal{P}$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mu^*(P_n \cap P) + \mu^*(P_n \setminus P) \Big) \geqslant$$

в силу счетной полуаддитивности и монотонности μ^*

$$\geqslant \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right)\cap P\right)+\mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right)\setminus P\right)\geqslant \mu^*(E\cap P)+\mu^*(E\setminus P).$$

Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и неравенство доказано. ◀

Определение 18 (Продолжение меры по Каратеодори) *Продолжение меры μ_0, построенное по формуле (*), будем называть продолжением по Каратеодори или стандартным продолжением.*

Меру μ^*, заданную на сигма-алгебре $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ измеримых множеств будем обозначать μ. Для множества $A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ она вычисляется по формуле

$$\mu^* A = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(P_n), \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n,\ P_n \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что повторное стандартное продолжение не порождает новую меру, а приводит к тому же результату.

Учитывая возможность продолжения на сигма-алгебру, далее можно считать, что мера определена на некоторой сигма-алгебре (или на минимальной сигма-алгебре, порожденной исходным полукольцом множеств).

Но при этом возникает вопрос, существуют ли другие продолжения меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$ на некоторую сигма-алгебру, содержащую $\mathcal{P}$? Ответ дает теорема единственности.

Теорема 12 (Единственность продолжения меры) *Пусть $\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X, μ_0 – σ-конечная мера на $\mathcal{P}$, μ – ее стандартное продолжение на σ-алгебру $\mathfrak{A}_{\mu^*}$, μ' – продолжение меры μ_0 на некоторую сигма-алгебру $\mathfrak{A}' \supset \mathcal{P}$. Тогда меры μ и μ' совпадают на $\mathfrak{A}_{\mu^*} \cap \mathfrak{A}'$.*

▷ Обозначим для удобства $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\mu^*} \cap \mathfrak{A}'$. Доказательство разобьем на три пункта.

1) Докажем, что $\mu' \leqslant \mu$ на $\mathfrak{A}$. Пусть $A \in \mathfrak{A}$, $P_n \in \mathcal{P}$ – образуют покрытие A. Тогда по счетной полуаддитивности меры μ' имеем

$$\mu' A \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu' P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0 P_n.$$

Переходя к инфимуму, получим $\mu' A \leqslant \mu A$.

2) Докажем, что если $P \in \mathcal{P}$, $\mu_0 P < +\infty$, то для любого $A \in \mathfrak{A}$

$$\mu(P\cap A) = \mu'(P\cap A).$$

По п. 1) имеем $\mu'(P\cap A) \leqslant \mu(P\cap A)$ и $\mu'(P\setminus A) \leqslant \mu(P\setminus A)$. Складывая эти неравенства, получим

$$\mu_0 P = \mu' P = \mu'(P\cap A) + \mu'(P\setminus A) \leqslant \mu(P\cap A) + \mu(P\setminus A) = \mu P = \mu_0 P.$$

Следовательно, в обоих неравенствах должны быть равенства, и $\mu'(P\cap A) = \mu(P\cap A)$.

3) Докажем теперь $\mu' = \mu$ на $\mathfrak{A}$. Так как μ_0 сигма-конечна на X, то $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P_n \in \mathcal{P}$, $\mu_0 P_n < +\infty$. То есть все пространство X аддитивно разбивается на счетный набор элементов полукольца конечной меры. Тогда для любого $A \in \mathfrak{A}$ по п.2) меры μ и μ' его пересечений с P_n совпадают и

$$\mu' A = \mu' \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (P_n \cap A) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(P_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(P_n \cap A) = \mu \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (P_n \cap A) \right) = \mu A.$$

◀

Замечание 4 *Условие сигма-конечности меры важно. Например, пусть $X = \{a, b\}$, $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}$, $\mu_0 \equiv 0$. Можно предложить два продолжения: $\mu_1 \equiv 0$ и μ_2: $\mu_2(\{b\}) = \mu_2 X = +\infty$. Здесь мера μ_0 не сигма-конечна.*

4.3 Описание измеримых множеств

Для данной системы множеств $\mathcal{P}$ определим множество типа $\mathcal{P}_\sigma$ – счетное объединение множеств из $\mathcal{P}$ и множество типа $\mathcal{P}_\delta$ – счетное пересечение множеств из $\mathcal{P}$. Множество типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$ – это счетное пересечение множеств типа $\mathcal{P}_\sigma$, то есть $(\mathcal{P}_\sigma)_\delta$. Очевидно, эти типы множеств содержатся в минимальной сигма-алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$, порожденной $\mathcal{P}$.

Теорема 13 (1-я теорема об аппроксимации) *Пусть μ – стандартное продолжение μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$, E – некоторое множество,$\mu^*(E) < +\infty$. Тогда существует множество C типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$ такое, что $E \subset C$ и $\mu(C) = \mu^*(E)$.*

▷ По определению внешней меры μ^* для $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ найдем такие множества $P_i^n \in \mathcal{P}$:

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i^n, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i^n) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Обозначим $C_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i^n$ – множество типа $\mathcal{P}_\sigma$. При этом $E \subset C_n$ и

$$\mu^*(E) \leqslant \mu(C_n) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(P_i^n) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Тогда множество $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_n$ – искомое. ◀

Теорема 14 (2-я теорема об аппроксимации) *Для измеримого множества A ($\mu(A) < +\infty$) найдутся множества $B, C \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$, что*

$$B \subset A \subset C, \quad \mu(A) = \mu(B) = \mu(C).$$

$\triangleright$ Множество C возьмем из 1-ой теоремы об аппроксимации. Пусть $E = C \setminus A$. Тогда $\mu E = 0$ и по Теореме найдется множество $\tilde{E} \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$, $E \subset \tilde{E}$, $\mu\tilde{E} = 0$. Тогда возьмем $B = C \setminus \tilde{E}$. $\blacktriangleleft$

Убедимся теперь в минимальности стандартного продолжения. То есть в том, что оно продолжает меру на минимальную сигма-алгебру, порожденную исходным полукольцом.

Теорема 15 (О минимальности стандартного продолжения) *Пусть μ – стандартное продолжение сигма-конечной меры μ_0 на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$ измеримых множеств. μ' – некоторое полное продолжение μ_0 на $\mathfrak{A}'$. Тогда $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.*

Таким образом, стандартное продолжение имеет самую узкую область определения среди всех полных продолжений.

$\triangleright$ Заметим, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ содержат $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$. Возьмем произвольное $A \in \mathfrak{A}$ и докажем, что $A \in \mathfrak{A}'$. По следствию из теоремы об аппроксимации,

$$A = C \setminus E, \quad \text{где } C \in \mathfrak{B},\ \mu E = 0.$$

Достаточно доказать, что $E \in \mathfrak{A}'$.

Применяя следствие еще раз, найдем $\tilde{E} \in \mathfrak{B}$: $E \subset \tilde{E}$, $\mu\tilde{E} = 0$. Так как $\tilde{E} \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$, то $\mu'\tilde{E} = \mu\tilde{E} = 0$. Из полноты μ' следует $E \in \mathfrak{A}'$. Следовательно, $A \in \mathfrak{A}'$. $\blacktriangleleft$

Приведём в заключение удобный критерий измеримости множества, справедливый не только для стандартного продолжения, но и для любой полной меры.

Теорема 16 (Критерий измеримости множества) *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – измеримое пространство с полной мерой, $A \subset X$. Если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $B_\varepsilon, C_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ такие, что*

$$B_\varepsilon \subset A \subset C_\varepsilon, \quad \mu(B_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon,$$

то $A \in \mathfrak{A}$.

$\triangleright$ Возьмем $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ и найдем по условию $B_{1/n} \subset A \subset C_{1/n}$. Тогда множества $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$ и $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_{1/n}$ измеримы и $B \subset A \subset C$.

Кроме того, $\mu(C \setminus B) = 0$, так как $\mu(C \setminus B) \leqslant \mu(C_{1/n} \setminus B_{1/n}) \leqslant \dfrac{1}{n}$. Таким образом, $A \setminus B \subset C \setminus B$, $\mu(C \setminus B) = 0$, значит, в силу полноты меры, $A \setminus B$ измеримо. Вместе с ним измеримо и A, так как $A = B \cup (A \setminus B)$. $\blacktriangleleft$

Для множества нулевой меры критерий можно переформулировать так: Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C_\varepsilon \supset A$ и $\mu(C_\varepsilon) < \varepsilon$, то A измеримо и $\mu(A) = 0$.

5 Мера Лебега

Напомним, что классический объем λ в $\mathbb{R}$ мы определили на полукольце ячеек $\mathcal{P}^1 = \{[a, b) \subset \mathbb{R}\}$: $\lambda[a, b) = b - a$. В $\mathbb{R}^n$ объем λ_n на полукольце $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^1 \times \ldots \times \mathcal{P}^1$ можно определить как произведение объемом: $\lambda_n[a, b) = \lambda_1[a_1, b_2) \times \ldots \times \lambda_1[a_n, b_n)$.

Возникает вопрос, является ли классический объем мерой?

5.1 Определение и простые свойства меры Лебега

Теорема 17 (О классическом объеме) *Классический объем λ_n на полукольце $\mathcal{P}^n$ является сигма-аддитивным (т.е. мерой).*

$\triangleright$ Для краткости будем обозначать $\lambda_n = \lambda$. Достаточно доказать счетную полуаддитивность, то есть если $P, P_k \in \mathcal{P}^n$, $P \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$, то $\lambda P \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda P_i$.

Пусть $P = [a, b)$, $P_k = [a_k, b_k)$. Сузим ячейку $P = [a, b)$ до замкнутого бруса $[a, b']$, и расширим ячейки, стоящие справа, до открытых брусьев (a_k', b_k) так, что

$$\lambda(a_k', b_k) < \lambda[a_k, b_k) + \frac{\varepsilon}{2^k},$$

получим

$$[a, b'] \subset [a, b) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k', b_k).$$

Брус $[a, b']$ – компакт. Тогда из его покрытия открытыми брусьями (a_k', b_k) можно выделить конечное покрытие (пусть оно соответствует $k = 1, ..., N$). Тогда

$$[a, b'] \subset \bigcup_{k=1}^{N}(a_k', b_k)$$

и пользуясь полуаддитивностью, получим

$$\lambda[a, b'] \leqslant \sum_{k=1}^{N} \lambda(a_k', b_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(a_k', b_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda[a_k, b_k) + \varepsilon.$$

Так как $\lambda(x) = \lambda[a, x]$ – непрерывная функция, то переходя к пределу при $b' \to b$, получим требуемое, т.к. $\lambda[a, b'] \to \lambda[a, b] = \lambda[a, b)$. $\blacktriangleleft$

Определение 19 *Мерой Лебега в $\mathbb{R}^n$ называется стандартное продолжение классического объема.*

Напомним, что по Теореме Лебега–Каратеодори, система измеримых множеств образует сигма-алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{M}^n$ или $\mathfrak{M}$.

Процесс продолжения по Каратеодори позволяет написать явное выражение для меры Лебега, вычисляемой для измеримого множества A ($A \in \mathfrak{M}$):

$$\lambda_n A = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(P_k), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k,\ P_k \in \mathcal{P}^n, k \in \mathbb{N}.$$

Отметим простейшие **свойства меры Лебега**:

1. Открытые множества измеримы. Мера непустого открытого множества положительна.

2. Замкнутые множества измеримы. Мера одноточечного множества равна нулю.

3. Мера Лебега сигма-конечна. Мера ограниченного измеримого множества конечна. Любое измеримое множество есть счетное объединение множеств конечной меры.

4. Счетное объединение множеств меры нуль есть множество меры нуль.

5. Множество нулевой меры не имеет внутренних точек.

6. **Критерий измеримости множества по Лебегу**: $E \subset \mathbb{R}^n$ – измеримо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримые множества A_ε и B_ε, что

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon, \quad \lambda(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

7. Мера Лебега инвариантна относительно движений.

Докажем свойства.

$\triangleright$ 1. Заметим, что сигма-алгебра измеримых множеств содержит борелевскую сигма-алгебру $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, а значит, содержит все открытые и замкнутые множества. Мера открытого множества положительна, так как оно содержит ячейку ненулевой меры.

2. Замкнутые множества измеримы как борелевские. Одноточечное множество можно покрыть ячейкой сколь угодно малой меры.

3. Сигма-конечность меры Лебега следует из того, что всё $\mathbb{R}^n$ представимо как счетное объединение ячеек конечной меры. Ограниченное измеримое множество содержится в некоторой ячейке конечной меры, значит, его мера тоже конечна. Третье утверждение следует из сигма-конечности меры.

4. Это свойство сигма-аддитивности.

5. Предполагая обратное, получим, что множество содержит некоторую ячейку положительной меры, значит его мера тоже ненулевая, что противоречит условию.

6. Это общий критерий измеримости множества.

7. Свойство инвариантности меры относительно движений оставим пока без доказательства. ◀

Пришло время привести пример неизмеримого по Лебегу множества.

Пример 5.1.1 (Множество Витали) *Рассмотрим отрезок* $[0, 1]$. *Будем называть точки* $x, y \in [0, 1]$ *эквивалентными, если* $x - y \in \mathbb{Q}$. *Тогда весь отрезок* $[0, 1]$ *представим в виде дизъюнктного объединения классов эквивалентности, а каждый класс счетен. Составим множество* A, *поместив в него по одному представителю из каждого класса. Покажем, что* A *неизмеримо по Лебегу.*

Рассcмотрим сдвиги множества A *на число* $r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$:

$$A + r = \{x + r, x \in A\}.$$

Такие множества попарно не пересекаются, а их объединение

$$[0, 1] \subset V = \bigsqcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (A + r) \subset [-1, 2].$$

Если A *измеримо, то его сдвиги имеют такую же меру* $\lambda_1(A + r) = \lambda_1 A$ *и тогда множество* V *измеримо его мера равна счетной сумме мер* $\lambda_1 A$. *Далее возможно два варианта: либо* $\lambda_1 A = 0$, *тогда и* $\lambda_1 V = 0$, *либо* $\lambda_1 A > 0$ *и тогда* $\lambda_1 V = +\infty$, *что в обоих случаях даёт противоречие. Следовательно, множество* A *неизмеримо по Лебегу.*

Аналогично рассмотренному примеру, можно строить неизмеримое по Лебегу множество внутри любого измеримого множества ненулевой меры в $\mathbb{R}^n$. Такое множество называют множеством Витали.

Лемма 6 (Существование неизмеримого множества) *Всякое множество положительной меры Лебега содержит неизмеримое по Лебегу подмножество.*

Пример 5.1.2 (Канторово множество) *Возьмём отрезок $C_0 = [0,1]$. Удалим среднюю треть, т.е. интервал $(1/3; 2/3)$, и обозначим $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3;1]$. Новое множество состоит из двух отрезков. Из каждого удалим его среднюю треть, обозначим оставшееся объединение четырёх отрезков за C_2 и т.д. Получим последовательность замкнутых множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$. Их пересечение*

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

называется канторовым множеством. Мера Лебега (и Жордана) канторова множества равна нулю. Её можно посчитать, вычислив меру дополнения, которая равна сумме мер выкинутых интервалов:

$$\lambda_1\big([0,1] \setminus C\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}} = 1.$$

5.2 Регулярность меры Лебега, структура измеримых множеств

Ранее мы описали структуру измеримых множеств для произвольной меры. Для измеримых по Лебегу множеств этой структуре можно придать более естественный вид, связав ее с открытыми и замкнутыми множествами.

Теорема 18 (Об аппроксимации открытыми и замкнутыми множествами) *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Лебегу множество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое в $\mathbb{R}^n$ множество G и замкнутое в $\mathbb{R}^n$ множество F такие, что*

$$F \subset A \subset G, \quad \lambda_n(G \setminus A) < \varepsilon,\ \lambda_n(A \setminus F) < \varepsilon.$$

$\triangleright$ Меру λ_n будем обозначать λ. Докажем сначала существования открытого множества G.

1. Пусть $\lambda A < +\infty$. Найдем такие ячейки, что

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) < \lambda A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $P_k = [a_k, b_k)$. Увеличим эти ячейки немного до интервалов так, чтобы

$$[a_k, b_k) \subset (a_k', b_k), \quad \lambda(a_k', b_k) < \lambda[a_k, b_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Положим $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k', b_k)$. Очевидно, что G – открыто, и $A \subset G$. Кроме того,

$$\lambda G \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(a_k', b_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda[a_k, b_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda A + \varepsilon,$$

откуда $\lambda(G \setminus A) < \lambda A + \varepsilon$.

2. Пусть теперь $\lambda A = +\infty$. Пользуясь сигма-аддитивностью меры Лебега, представим A в виде

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \lambda(A_k) < +\infty.$$

По доказанному, для каждого A_k найдем открытое множество G_k:

$$A_k \subset G_k, \quad \lambda(G_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Положим $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$. G – открыто, $A \subset G$ и

$$G \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A_k).$$

Тогда

$$\lambda(G \setminus A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k \setminus A_k) < \varepsilon.$$

Нужное множество G построено. Для нахождения замкнутого множества F, построим по доказанному открытое множество G' такое, что $A^C \subset G'$ и $\lambda(G' \setminus A^C) < \varepsilon$. Положим $F = G'^C$. Очевидно, F – замкнуто, $F \subset A$ и $\lambda(A \setminus F) = \lambda(G' \setminus A^C) < \varepsilon$. ◀

Свойство, описанное в теореме, называют регулярностью меры Лебега. Смысл его в том, что любое измеримое множество можно приблизить с любой точностью (по мере) снаружи открытым множеством и изнутри замкнутым. Заметим, что поменять местами открытое и замкнутое множества нельзя. Например, множество $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ имеет меру 1. При этом единственное его открытое подмножество пустое.

Заметим, также, что в случае $\lambda A < +\infty$ множество F можно выбрать компактным.

Следствие 19 *Меру Лебега измеримого множества A можно вычислять так:*

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda G : \ G \text{ открыто},\ A \subset G\},$$
$$\lambda(A) = \sup\{\lambda F : \ F \text{ замкнуто},\ F \subset A\},$$
$$\lambda(A) = \sup\{\lambda F : \ F \text{ компактно},\ F \subset A\},$$

Замечание 5 *Первое равенство можно переписать, используя внешнюю меру*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda G : \ G \text{ открыто},\ A \subset G\}.$$

Величину

$$\lambda_*(A) = \sup\{\lambda F : \ F \text{ замкнуто},\ F \subset A\}$$

называют внутренней мерой множества A. Для измеримости множества A необходимо $\lambda^* A = \lambda_* A$. При $\lambda_* A < +\infty$ это условие будет и достаточным. Оно было положено Лебегом как определение измеримости ограниченного множества.

Лемма 7 (о представлении измеримого множества) *Любое измеримое по Лебегу множество A представимо в виде*

1. $A = E \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} K_k$, $\lambda(E) = 0$, K_k *– возрастающая последовательность компактов.*
2. $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E$, $\lambda(E) = 0$, G_k *– открытые.*

$\triangleright$ 1. Пусть A ограничено (иначе воспользуемся сигма-конечностью). Найдем последовательность компактов K_k:

$$K_k \subset A \quad \text{и} \quad \lambda(A \setminus K_k) \to 0.$$

Будем считать, что последовательность K_k возрастает (иначе построим по ней возрастающую последовательность). Пусть

$$E = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k,$$

тогда $A = E \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} K_k$ и $\lambda(E) \leqslant \lambda(A \setminus K_k) \to 0$.

2. Разложим A^C по п.1 и возьмем $G_k = K_k^C$. $\blacktriangleleft$

Теорема 20 (О сохранении измеримости при гладком отображении) *Пусть отображение $\Phi : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$, $\Phi \in C^1(D)$, D – открыто. Тогда для любого измеримого $A \subset D$ его образ $\Phi(A)$ измерим. При этом, если $\lambda_n(A) = 0$, то $\lambda_n(\Phi(A)) = 0$.*

$\triangleright$ 1. По предыдущей Лемме, представим множество A в виде

$$A = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k, \quad K_k \text{ – компакты}, \ \lambda_n(E) = 0.$$

Тогда для образа множества A получим

$$\Phi(A) = \Phi(E) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(K_k), \quad \Phi(K_k) \text{ – компакты}.$$

Для доказательства утверждения достаточно доказать, что $\lambda_n(\Phi(E)) = 0$. Докажем тогда второе утверждение Теоремы.

2. Пусть A – ограничено, $\lambda_n(A) = 0$ и A содержится в некотором компакте $K \subset D$. Тогда $|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \leqslant C\|h\|$ для всех $x, x+h \in K$.

Для $\varepsilon > 0$ покроем A замкнутыми кубами P_k с длиной ребра h_k:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(P_k) < \varepsilon.$$

Так как $\Phi \in C^1$, то все $\Phi(P_k)$ – компакты, и

$$\Phi(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(P_k).$$

При этом $\lambda_n(\Phi(P_k)) \leqslant (C \cdot h_k\sqrt{n})^n$, и

$$\lambda_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(P_k)\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\Phi(P_k)) \leqslant (C\sqrt{n})^n \sum_{k=1}^{\infty} h_k^n = (C\sqrt{n})^n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(P_k) < (C\sqrt{n})^n \cdot \varepsilon.$$

Следовательно, $\Phi(A)$ есть подмножества множества меры нуль, и в силу полноты меры Лебега, $\lambda_n(\Phi(A)) = 0$.

3. Для произвольного A нулевой меры представим D как счетное объединение ячеек P_k, лежащих в D вместе с замыканиями: $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$. Тогда

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap P_k), \quad \Phi(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi(A \cap P_k).$$

По доказанному, $\lambda_n(\Phi(A \cap \bar{P}_k)) = 0$, а значит и $\lambda_n(\Phi(A \cap P_k)) = 0$. Следовательно, $\lambda_n(\Phi(A)) = 0$. ◀

Замечание 6 *Только непрерывности отображения недостаточно. Например, при отображении функцией Кантора (непрерывной) образ канторова множества (меры нуль) есть отрезок* $[0, 1]$.

6 Измеримые функции

Для определения интеграла по мере нам понадобится понятие измеримой функции. Ранее, для определения интеграла Римана, мы рассматривали разбиения отрезка интегрирования и строили интегральные суммы вида

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

и переходили к пределу при мелкости разбиения $\max \Delta x_i \to 0$. Для непрерывных и "не сильно разрывных"функций такой предел существует. Это объясняется тем, что для непрерывной функции значения на малом отрезке различаются не сильно. Для "сильно разрывных"функций такой подход уже не применим.

Лебег предложил разбивать не область определения, а множество значений функции. Опишем эту схему вкратце. Пусть $y_0 < y_1 < ... < y_n$ – разбиение, такое что $[\inf f, \sup f] \subset [y_0, y_n]$. $E_k = f^{-1}\left([y_{k-1}, y_k)\right)$ – прообразы соответствующих промежутков. Составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\lambda(E_i).$$

Эта сумма будет определена, если все множества E_i окажутся измеримыми. Каким свойством должна тогда обладать функция f? Этим мы и займемся в ближайшее время.

6.1 Определение и простые свойства измеримых функций

Пусть X – некоторое множество, $\mathfrak{A}$ – сигма-алгебра измеримых подмножеств. Будем называть пару $(X, \mathfrak{A})$ измеримым пространством (мера нам сейчас не важна).

Определение 20 (Лебеговы множества) *Пусть $E \subset X$, функция $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$. Множества*

$$E(f > a) := \{x \in E : \ f(x) > a\}, \quad E(f < a) := \{x \in E : \ f(x) < a\},$$
$$E(f \geqslant a) := \{x \in E : \ f(x) \geqslant a\}, \quad E(f \leqslant a) := \{x \in E : \ f(x) \leqslant a\}$$

будем называть лебеговыми множествами функции f.

Другими словами, лебеговы множества – это прообразы полуосей:

$$E(f > a) = f^{-1}\left((a, +\infty]\right), \quad E(f < a) = f^{-1}\left([a, +\infty]\right),$$
$$E(f \geqslant a) = f^{-1}\left([-\infty, a)\right), \quad E(f \leqslant a) = f^{-1}\left([-\infty, a]\right).$$

Лемма 8 (Об измеримости лебеговых множеств) *Пусть E – измеримое множество, $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *$E(f > a)$ измеримо при $\forall a \in \mathbb{R}$;*
2. *$E(f \geqslant a)$ измеримо при $\forall a \in \mathbb{R}$;*
3. *$E(f < a)$ измеримо при $\forall a \in \mathbb{R}$;*

4. $E(f \leqslant a)$ измеримо при $\forall a \in \mathbb{R}$;

$\triangleright$ Доказательство основано на свойствах сигма-алгебры измеримых множеств. докажем, например, $1 \Rightarrow 2$. Так как

$$E(f \geqslant a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right)$$

и каждое множество из правой части измеримо, то их пересечение тоже измеримо, а значит измеримо и $E(f \geqslant a)$. Остальные пункты доказываются аналогично (проделайте это самостоятельно). $\blacktriangleleft$

Определение 21 (Измеримая функция) *Пусть $(X, \mathfrak{A})$ – измеримое пространство, $E \subset X$ – измеримое множество, $f:\ E \to \bar{\mathbb{R}}$. Функция f называется измеримой (или $\mathfrak{A}$-измеримой), если все ее лебеговы множества измеримы при любом $a \in \mathbb{R}$.*

Если задана мера Лебега, то есть $\mathfrak{A}$ – сигма-алгебра измеримых по Лебегу множеств, то $\mathfrak{A}$-измеримую функцию будем называть *измеримой по Лебегу.*

Пример 6.1.1

1. *Постоянная функция, заданная на измеримом множестве, измерима.*
2. *Характеристическая функция множества A измерима тогда и только тогда, когда A измеримо.*
3. *Непрерывная функция измерима по Лебегу, т.к. прообраз открытого множества $[-\infty, a)$ открыт (в X), а значит, измерим.*
4. *Функция, заданная на множестве меры нуль, измерима.*

Лемма 9 (Свойства измеримых функций, связанные с множествами) *Пусть f – измеримая функция на E. Тогда*

1. *Прообраз одноточечного множества (в том числе $\pm\infty$) измерим.*
2. *Прообраз промежутка измерим.*
3. *Прообраз открытого (замкнутого и даже борелевского) множества измерим.*
4. *Сужение f на измеримое множество измеримо.*
5. *Если f измерима на каждом E_n, то f измерима на $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.*
6. *f есть сужение на E некоторой измеримой на X функции.*

$\triangleright$ Для доказательства будем пользоваться свойствами сигма-алгебры и соотношениями:

1. $f^{-1}(\{a\}) = E(f \leqslant a) \cap E(f \geqslant a)$, $f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(f > n)$.

2. Например, для интервала:

$$f^{-1}((a,b)) = E(f < b) \cap E(f > a).$$

3. Открытое множество G представимо в виде

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n), \quad \text{и} \quad f^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([a_n, b_n)).$$

4. Пусть $A \subset E$ – измеримо. Тогда $A(f < a) = A \cap E(f < a)$.

5. $E(f < a) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n(f < a)$.

6. Дополним функцию f нулем на $X \setminus E$.

◀

Благодаря свойству 7 далее можно считать, что f задана на всем X.

Теорема 21 (Об измеримости сложной функции) *Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C(D)$. Отображение $f = (f_1, ..., f_n) : \mathbb{R}^n \supset X \to D$, f_i – измеримы. Тогда $F(x) = \varphi(f_1, f_2, ..., f_n)$ измерима.*

▷ Пусть $f = (f_1, ..., f_n)$. Так как φ непрерывна, то лебегово множество $\varphi^{-1}(-\infty, a)$ – измеримо и открыто (в D), как прообраз открытого множества. Тогда его можно представить объединением ячеек

$$\varphi^{-1}(-\infty, a) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} P_i, \quad P_i \in \mathcal{P}^n.$$

Рассмотрим лебегово множество композиции $\varphi(f(x))$:

$$(\varphi(f))^{-1}(-\infty, a) = f^{-1}(\varphi^{-1}(-\infty, a)) = f^{-1}\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} f^{-1} P_i.$$

Осталось показать, что прообраз ячейки $f^{-1}P_i$ измерим. Пусть $P = P_i = [a_1, b_1) \times ... \times [a_n, b_n)$. Тогда его измеримость следует из

$$f^{-1}P = \{x \in X : a_j \leqslant f_j(x) < b_j\} = \bigcap_{j=1}^{n} X(a_j \leqslant f_j < b_j).$$

◀

Лемма 10 (Арифметические свойства измеримых функций) *Пусть f и g – измеримые функции. Тогда*

1. *$\alpha f + \beta g$ измерима.*

2. *fg измерима.*

3. *f/g измерима там, где $g \neq 0$.*

4. *$|f|$ измерима.*

5. *$\max(f, g)$ и $\min(f, g)$ измеримы.*

$\triangleright$ Свойства 1–4 следуют из Теоремы об измеримости сложной функции.
Доказательство 5го свойства для $\varphi = \max(f, g)$ следует из равенства

$$E(\varphi < a) = E(f < a) \cap E(g < a).$$

$\blacktriangleleft$

Замечание 7 *Свойства, указанные в этой и предыдущей Леммах выполнены и для измеримых функций, принимающих также значения $\pm\infty$. При этом используют договоренности:*

- $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \operatorname{sign}(\pm x)\infty$, $x \in \bar{\mathbb{R}}$;
- $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, $x \in \bar{\mathbb{R}}$;
- $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0$, $x \in \bar{\mathbb{R}}$;
- $x + (+\infty) = (+\infty) + x = x - (-\infty) = +\infty$, $x \in \mathbb{R}$;

Теорема 22 (Об измеримости предела, супремума и инфимума) *Пусть f_n – последовательность измеримых функций. Тогда*

1. *Функции $\sup f_n$, $\inf f_n$ измеримы.*

2. *Функции $\overline{\lim} f_n$ и $\underline{\lim} f_n$ измеримы.*

3. *Если существует поточечный предел $\lim f_n$, то он измерим.*

$\triangleright$

1. Доказательство следует из равенств

$$\{x : \sup f_n > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n > a\}, \quad \{x : \inf f_n < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n < a\}.$$

2. Доказательство следует из равенств и п.1:

$$\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geqslant n} f_k, \quad \underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geqslant n} f_k.$$

3. Если $\lim f_n$ существует, то он совпадает с $\overline{\lim} f_n$.

$\blacktriangleleft$

Теорема 23 (C-свойство Лузина) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, E – λ_n-измеримо. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество A такое, что*

$$\lambda_n(A) < \varepsilon \quad \text{и} \quad f \in C(E \setminus A),$$

то f измерима по Лебегу (относительно λ_n).

Теорема утверждает, что если на измеримом множестве функция непрерывна везде, за исключением множества сколь угодно малой меры, то она измерима. Оказывается, это условие не только достаточно для измеримости, но и необходимо (в случае почти везде конечной функции).

$\triangleright$ Если f непрерывна на E, то прообраз $(f < a)$ открыт, а значит измерим. Пусть f произвольна. Рассмотрим множества A_k:

$$\lambda_n(A_k) \leqslant \frac{1}{k}, \quad f \in C(E \setminus A_k).$$

Пусть $A_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. $\lambda_n(A_0) = 0$ и значит f измерима на A_0. Тогда представим E в виде

$$E = A_0 \cup \left(E \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \setminus A_k).$$

Тогда f измерима на E, так как она измерима на A_0 и на каждом $E \setminus A_k$. $\blacktriangleleft$

Замечание 8 *Заметим, что условие f – непрерывна на $E \setminus A$, $\lambda(A) = 0$ не означает, что множество точек разрыва функции имеет меру нуль. Например, функция Дирихле $d(x)$ разрывна в каждой точке, но непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (так как тождественно равна нулю). $d(x)$ – измерима.*

6.2 Простые функции

Определение 22 (Простая функция) *Измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется простой (или ступенчатой), если множество ее значений конечно.*

Для простой функции можно указать разбиение X измеримыми множествами, на каждом элементе которого функция постоянна. Такое разбиение будем называть допустимым. Допустимое разбиение не единственно.

Приведем простые свойства ступенчатых функций:

1. Простую функцию f можно представить как $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \chi_{A_k}(x)$, где A_k образуют допустимое разбиение, $\chi_A(x)$ – характеристическая функция множества A.

2. Любые две простые функции имеют общее допустимое разбиение.

3. Сумма, произведение, линейная комбинация конечного числа простых функций – простая функция.

4. Максимум и минимум конечного набора простых функций – простые функции.

Примеры простых функций: 1) $f(x) = \text{const}$; 2) Функция Дирихле; 3) $f(x) = \operatorname{sign} x$.

Теорема 24 (Об аппроксимации измеримой функции простыми) *Пусть $f : X \to [0, +\infty]$ – измеримая функция. Тогда существует последовательность простых функций $f_n(x)$ такая, что*

1. *$f_n(x)$ возрастает при $\forall x \in X$;*
2. *$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ при $\forall x \in X$;*
3. *если f ограничена, то $f_n \rightrightarrows f$ на X.*

$\triangleright$ Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим промежутки

$$\Delta_i = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right), \quad i = 0, 1, ..., n^2 - 1, \quad \Delta_{n^2} = [n, +\infty],$$

и введем множества $A_i = f^{-1}(\Delta_i)$ – измеримы и образуют конечное разбиение множества X. Положим $g_n(x) = \dfrac{i}{n}$, $x \in A_i$. Тогда

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant g_n(x) + \frac{1}{n}$$

последнее неравенство верно при $x \notin A_{n^2}$. Отсюда следует поточечная сходимость $g_n \to f$. Кроме того, если $f < C$, то при $n > C$ неравенство выполнено независимо от x, что гарантирует равномерную сходимость.

Но последовательность g_n не является возрастающей. Исправим это, введя $f_n = \max\{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Так как f_n – простые, возрастают и

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x),$$

то нужные условия достигнуты. ◀

Замечание 9 *Произвольную измеримую f можно поточечно аппроксимировать последовательностью простых f_n так, чтобы $|f_n| \leqslant |f|$. Если f ограничена, то сходимость равномерная.*

6.3 Сходимости почти везде и по мере

Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – измеримое пространство. Теперь нам будет важна заданная мера μ.

Будем говорить, что некоторое утверждение $P(x)$ выполнено почти везде (или почти всюду) на множестве E, если оно верно при $x \in E \setminus E'$, где $\mu E' = 0$.

Таким образом, понятие сходимости почти всюду становится понятным. Но всё же сформулируем определение.

Определение 23 (Сходимость почти всюду) *Говорят, что последовательность измеримых функций $f_n(x): \ E \to \bar{\mathbb{R}}$ сходится почти всюду на E к функции $f(x)$, если существует множество $E' \subset E$, $\mu E' = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ при $x \in E \setminus E'$. Обозначать это будем так:*

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f.$$

Заметим, что меняя функцию f на множестве меры нуль, сходимость почти всюду сохранится. Таким образом, предельная функция не единственна.

Исходя из свойств измеримых функций, получаем, что f измерима на $E \setminus E'$. В случае полной меры f измерима на E. Если же мера не полная, то можно переопределить f на E' так (например, константой), чтобы f была измеримой на E.

Определение 24 (Сходимость по мере) *Пусть функции f_n, f конечны почти всюду на E. Говорят, что последовательность f_n сходится по мере к f, если для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mu\Big\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Обозначать будем так:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f.$$

Заметим, что разность $f_n - f$ может оказаться не определена, если f_n и f примут бесконечные значения одного знака. В условиях конечности почти везде на E это произойдет только на множестве нулевой меры.

Заметим, что меняя функции f_n и f на множествах меры нуль, факт сходимости по мере не изменится. И опять, предельная функция не единственна.

Теорема 25 (Лебега о связи сходимостей по мере и почти всюду) *Пусть $f_n : E \to \bar{\mathbb{R}}$ – измеримы, $\mu E < +\infty$ и $f_n \to f$ почти всюду на E. Тогда $f_n \to f$ по мере.*

$\triangleright$ Можно считать, что сходимость есть во всех точках E (иначе переопределим функции на множестве нулевой меры).

1. Рассмотрим сначала простую ситуацию, когда f_n монотонно (по n) и $f_n \to 0$. Тогда для $\varepsilon > 0$ множества

$$A_n = \{x \in E : \ |f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

измеримы и образуют убывающую последовательность $A_{n+1} \subset A_n$. Причем $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Пользуясь непрерывностью меры сверху, получаем

$$\mu A_n \to \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu(\emptyset) = 0.$$

2. В общем случае рассмотрим функции

$$\varphi_n(x) = \sup_{k\geqslant n} |f_k(x) - f(x)|.$$

Имеем: $\varphi_n(x) \to 0$ монотонно. Значит по п.1

$$\mu\{x \in E : \ |\varphi_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Но $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varphi_n(x)$, следовательно,

$$\mu\{x \in E : \ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mu\{x \in E : \ |\varphi_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

◀

Замечание 10 *Если $\mu(E) = +\infty$, утверждение неверно. Например, $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}$. Имеем $f_n \to 0$, но сходимости по мере Лебега к нулю нет.*

Пример 6.3.1 (Пример Рисса) *Приведем пример последовательности функций на $[0,1]$, сходящуюся по мере, но не сходящуюся ни в одной точке:*

$$f_n^k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\dfrac{k}{2^n}; \dfrac{k+1}{2^n}\right], \quad k = 0, 1, ..., 2^n - 1; \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Построим последовательность $f_1^0, f_1^1, f_2^0, f_2^1, f_2^2, f_2^3, f_3^0, f_3^1, f_3^2, f_3^3, f_3^4, f_3^5, f_3^6, f_3^7, \ldots$. Эта последовательность сходится к 0 по мере, т.к.

$$\mu\{x : \ |f_m(x)| > 0\} = \frac{1}{2^n} \to 0.$$

В то же время в любой точке отрезка $[0,1]$ бесконечно много членов последовательности равно 1 и бесконечно много членов равно 0. Значит, сходимости нет ни в одной точке.

Лемма 11 (Лемма Бореля–Кантелли) *Пусть E_n – последовательность измеримых множеств,*

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty.$$

Тогда $\mu(E) = 0$.

Заметим, что условие $x \in E$ равносильно тому, что $x \in E_n$ для бесконечного множества значений n.

▷ Так как $E \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$, то

$$\mu(E) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

◀

Следствие 26 *Пусть* $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, g_n *– почти везде конечны,* $X_n = X(|g_n| > \varepsilon_n)$. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(X_n) < +\infty$, *то* $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.в.} 0$.
Кроме того, для $\forall \varepsilon > 0$ *найдется такое множество* E_ε, *что*

$$\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon, \quad g_n \rightrightarrows 0 \text{ на } X \setminus E_\varepsilon.$$

$\triangleright$ Пусть $\varepsilon > 0$. В лемме Бореля–Кантелли положим $E_n = X(|g_n| > \varepsilon)$. Так как при достаточно больших n имеем $E_n \subset X_n$, то $\mu(E) = 0$. Тогда условие $x \notin E$ означает, что $\exists n_0$: $\forall n \geqslant n_0$ выполнено $|g_n(x)| < \varepsilon$, что и означает $g_n \to 0$.

Для доказательства второго утверждения выберем N настолько большим, что $\sum\limits_{k=N}^{\infty} \mu(X_n) < \varepsilon$, и положим $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} X_n$. Тогда $|g_n(x)| < \varepsilon_n$ при $x \in X \setminus E_\varepsilon$ и $n \geqslant N$. $\blacktriangleleft$

Теорема 27 (Рисса) *Пусть* f_n, f *– конечны почти везде на* X, f_n *– измеримы и* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$, *то существует подпоследовательность* f_{n_k}, *сходящаяся к* f *почти всюду.*

$\triangleright$ Запишем определение сходимости по мере для $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mu\Big(X\big(|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\big)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

По определению предела для каждого k существует номер n_k (причем последовательность n_k можно выбрать строго возрастающей), что при всех $n \geqslant n_k$ было выполнено

$$\mu\Big(X\big(|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\big)\Big) < \frac{1}{2^k}.$$

Подпоследовательность f_{n_k} – искомая, так как по следствию из леммы Бореля–Кантелли функции $g_k = |f_{n_k} - f| \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.в.}} 0$, следовательно, $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.в.}} f$. $\blacktriangleleft$

Замечание 11 *Построенная при доказательстве теоремы Рисса подпоследовательность обладает и более сильным свойством. А именно, для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое множество* E_ε, *что*

$$\mu(X_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{и} \quad f_{n_k} \rightrightarrows f \text{ на } X \setminus E_\varepsilon.$$

Теорема Рисса позволяет сводить некоторые вопросы сходимости по мере к вопросам сходимости почти всюду. Примерами таких ситуаций могут служить вопросы о единственности предела и о предельном переходе в неравенстве. Выполнены следующие утверждения.

1. Если последовательность f_n сходится по мере к функциям f и g, то $f(x) = g(x)$ при почти всех x.

2. Если последовательность f_n сходится по мере к функции f и при каждом n: $f_n \leqslant g$ почти везде, то $f \leqslant g$ почти везде.

Теорема 28 (Егорова) *Пусть $\mu X < +\infty$. Последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на X. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset X$ такое, что*

$$\mu(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{и} \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E_\varepsilon.$$

▷ Положим

$$g_n(x) = \sup_{k \geqslant n} |f_k(x) - f(x)|.$$

Ясно, что $g_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$. По теореме Лебега $g_n \xrightarrow{\mu} 0$. Тогда можно выделить такую подпоследовательность g_{n_k}, что

$$\mu\Big(X\big(g_{n_k} < \frac{1}{k}\big)\Big) < \frac{1}{2^k}.$$

Согласно следствию из леммы Бореля–Кантелли для $\varepsilon > 0$ существует множество E_ε: $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ и $g_{n_k} \rightrightarrows 0$ на $X \setminus E_\varepsilon$. Так как $|f_n - f| \leqslant g_{n_k}$ при $n \geqslant n_k$, то и $f_n - f \rightrightarrows 0$ на $X \setminus E_\varepsilon$. ◀

Замечание 12 *Конечность меры μX важна. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$. Тогда $f_n(x) \to 0$ на $\mathbb{R}$, но не сходится равномерно ни на каком множестве конечной меры.*

Установим ещё одно полезное свойство сходимости почти везде.

Теорема 29 (О диагональной последовательности) *Пусть μ – сигма-конечна, $f_k^{(n)}$ – почти везде конечны. Если $f_k^{(n)} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.в.}} g_n$ при каждом n, и $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} h$, то существует строго возрастающая последовательность номеров k_n, что $f_{k_n}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} h$.*

▷ Если мера μ конечна, то по теореме Лебега $f_k^{(n)} \xrightarrow{\mu} g_n$. Тогда существует возрастающая последовательность номеров k_n, что

$$\mu\Big(X\big(|f_{k_n}^{(n)} - g_n| > \frac{1}{k}\big)\Big) < \frac{1}{2^n}.$$

По следствию из теоремы Бореля–Кантелли $f_{k_n}^{(n)} - g_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$, и

$$f_{k_n}^{(n)} = \Big(f_{k_n}^{(n)} - g_n\Big) + g_n \xrightarrow{\text{п.в.}} h.$$

Если мера μ бесконечна, то построим конечную меру ν такую, что $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$, то есть утверждения "почти везде" для мер μ и ν справедливы одновременно. Пусть $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, $0 < \mu(X_n) < +\infty$. Положим для любого измеримого E:

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mu(E \cap X_n)}{\mu(X_n)}.$$

◀

6.4 Аппроксимация измеримых функций непрерывными. Теорема Лузина

Обсудим подробнее измеримые по Лебегу функции в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 30 (Теорема Фреше о приближении измеримой функции непрерывными) *Любая измеримая в $\mathbb{R}^n$ по Лебегу функция представима как предел сходящейся почти всюду последовательности непрерывных функций.*

Для доказательства будет удобна вспомогательная лемма.

Лемма 12 *Для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^n$ его характеристическая функция χ_F есть поточечный предел последовательности непрерывных функций.*

$\triangleright$ Доказательство Леммы. Имеем

$$\mathbb{R}^n \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k, \quad \text{где } H_k = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{dist}(x, F) \geqslant \frac{1}{n}\}.$$

Здесь $\mathrm{dist}(x, F) = \inf\{\|x-y\|, y \in F\}$ – расстояние от x до F – непрерывная (по x) функция. Тогда искомая последовательность:

$$f_k(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, H_k)}{\mathrm{dist}(x, H_k) + \mathrm{dist}(x, F)} \xrightarrow{k\to\infty} \chi_F(x).$$

◀

$\triangleright$ Доказательство теоремы Фреше. Будем доказывать в несколько шагов, постепенно усложняя функцию.

1) Пусть f – характеристическая функция измеримого множества E. В силу регулярности меры Лебега, представим

$$E = E_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k, \quad \text{где } \ \lambda E = 0,\ K_k \text{ – компакты},\ K_k \subset K_{k+1}.$$

Тогда

$$\chi_{K_k} \xrightarrow[\text{п.в.}]{k\to\infty} \chi_E.$$

Вместе с тем, по Лемме, каждая χ_{K_k} есть предел последовательности непрерывных функций.

2) Если f – простая функция, то есть представима в виде $f = \sum_{k=1}^{N} C_k \chi_{E_k}$, где E_k измеримы, то для аппроксимации f непрерывными функциями достаточно аппроксимировать функции χ_{E_k}.

3) В общем случае представим f как поточечный предел последовательности простых функций f_n, затем каждую f_n аппроксимируем непрерывными и воспользуемся теремой о диагональной последовательности. ◀

Теперь мы можем доказать, что C-свойство Лузина является необходимым для измеримости функции.

Теорема 31 (Лузина) *Пусть f – почти везде конечна на $\mathbb{R}^n$ и измерима по Лебегу. Тогда она обладает C-свойством, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое множество E_ε такое, что*

$$\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon, \quad f \in C(\mathbb{R}^n \setminus E_\varepsilon).$$

$\triangleright$ По теореме Фреше существует последовательность непрерывных функций $f_k \xrightarrow{\text{п.в.}} f$. Рассмотрим шаровые слои

$$L_k = \{x \in \mathbb{R}^k : k - 1 \leqslant \|x\| < k\}.$$

В каждом таком слое по теореме Егорова найдется множество E_k такое, что

$$\lambda(E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad f_k \rightrightarrows f \text{ на } L_k \setminus E_k.$$

Тогда f непрерывна на каждом $L_k \setminus E_k$ как равномерный предел непрерывных функций. Положим $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E_k \cap S_k)$, где S_k – сфера с центром в начале координат радиуса k. Тогда $\lambda(E) < \varepsilon$ и f непрерывна на $\mathbb{R}^n \setminus E$. ◀

7 Интеграл по мере

7.1 Определения

Рассматриваем измеримое пространство $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Сначала определим интеграл от неотрицательной простой функции, потом от неотрицательной измеримой и, наконец, от произвольной измеримой функции.

Определение 25 (Интеграл от простой неотрицательной функции) *Пусть $f : X \to [0, +\infty)$ – простая функция, X_i – допустимое разбиение X ($i = 1..N$), C_i – значения на множествах X_i. Интегралом от функции f по множеству X называется величина*

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{i=1}^{N} C_i \mu(X_i).$$

Заметим, что указанная сумма не зависит от выбора допустимого разбиения.

Если нужно проинтегрировать по измеримому множеству $E \subset X$, имея при этом разбиение $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} X_i$, то можем использовать равенство

$$\int\limits_E f d\mu = \sum_{i=1}^{N} C_i \mu(X_i \cap E).$$

Лемма 13 (Свойства интеграла от простой функции) *1. Если $C \geqslant 0$, то $\int\limits_X C d\mu = C\mu(X)$.*

2. *Если f, g – простые функции и $0 \leqslant f \leqslant g$ на X, то* $\int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.

Определение 26 (интеграл от измеримой неотрицательной функции) *Пусть $f : X \to [0, +\infty]$ – измерима. Интегралом от f по X называется величина*

$$\int\limits_X f d\mu = \sup\Big\{ \int\limits_X g d\mu,\ 0 \leqslant g \leqslant f,\ g \text{ – простая функция}\Big\}.$$

Заметим, что это определение совпадает с предыдущим, если функция f простая.

Для определения интеграла от произвольной измеримой функции введем две вспомогательные неотрицательные измеримые функции:

$$f_+ = \max(f, 0), \quad f_- = \max(-f, 0).$$

Тогда верны равенства

$$f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Определение 27 (Интеграл от произвольной измеримой функции) *Пусть f измерима на X. Тогда*

$$\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu,$$

если хотя бы один из интегралов справа конечен. При этом f называют интегрируемой на X. Если же оба интеграла конечны, то f называют суммируемой на X.

Заметим, что это определение совпадает с предыдущим для неотрицательной функции f, так как в этом случае $f_+ = f$, $f_- = 0$.

Будем наряду с обозначением $\int\limits_X f d\mu$ использовать обозначение $\int\limits_X f(x) d\mu(x)$, если нужно подчеркнуть название аргумента функции (в отличие от параметров).

7.2 Свойства интеграла от неотрицательных функций

Всюду в этом пункте рассматриваем измеримое пространство $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Все множества предполагаются измеримыми, функции – измеримыми, определены на всем X и принимают значения в $[0, +\infty]$.

Отметим очевидные свойства интеграла от неотрицательных функций:

1. Если $f \leqslant g$ на E, то $\int\limits_E f d\mu \leqslant \int\limits_E g d\mu$ (монотонность интеграла).

2. Если $\mu(E) = 0$, то $\int\limits_E f d\mu = 0$.

3. $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X f \cdot \chi_E d\mu$.

4. Если $A \subset B$, то $\int\limits_A f d\mu \leqslant \int\limits_B f d\mu$.

Теорема 32 (Теорема Леви) *Пусть f_n – неотрицательная* ***возрастающая*** *последовательность измеримых функций, $f_n \to f$ на X. Тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

$\triangleright$ Функция f измерима (как предел измеримых функций), значит $\int\limits_X f d\mu$ существует. Так как f_n возрастает и $f_n \leqslant f$, то последовательность интегралов тоже возрастает и ограничена сверху, следовательно предел $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu$ существует и $L \leqslant \int\limits_X f d\mu$.

Докажем теперь противоположное неравенство: $L \geqslant \int\limits_X f d\mu$.

Пусть g – простая функция такая, что $0 \leqslant g \leqslant f$, и пусть $g = \sum\limits_{i=1}^{N} C_i \chi_{A_i}$, где A_i – допустимое разбиение.

Зафиксируем число $\theta \in (0,1)$ и положим $X_n = X(f_n \geqslant \theta g)$. Тогда выполнено

$$X_n \subset X_{n+1} \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Последнее равенство верно, так как если $g(x) = 0$, то $f_n(x) \geqslant 0 = \theta g(x)$ и $x \in X_n$ при всех n. Если $g(x) > 0$, то при достаточно больших n окажется, что $f_n(x) > \theta g(x)$, так как $f_n \to f \geqslant g > \theta g$.

Теперь для любого $A \subset X$ имеем

$$(A \cap X_n) \subset (A \cap X_{n+1}), \quad \text{и} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap X_n),$$

и в силу непрерывности меры снизу,

$$\mu(A \cap X_n) \to \mu(A).$$

Оценим теперь интеграл, используя монотонность интеграла:

$$\int\limits_X f_n d\mu \geqslant \int\limits_{X_n} f_n d\mu \geqslant \int\limits_{X_n} \theta g d\mu = \sum_{k=1}^{N} \theta C_k \mu(A_k \cap X_n).$$

Переходя к пределу, получим

$$L \geqslant \sum_{k=1}^{N} \theta C_k \mu(A_k) = \theta \int\limits_x dg\mu.$$

Переходя к пределу при $\theta \to 1-0$ и к супремуму по g, получаем $L \geqslant \int\limits_X f d\mu$, что и требовалось доказать. ◀

Теперь можно сформулировать другие привычные нам свойства интеграла. Все функции измеримы и неотрицательны.

1. Линейность. Для $\alpha, \beta \geqslant 0$

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu.$$

2. Аддитивность. Если $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$, то

$$\int\limits_{A \sqcup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu.$$

3. Строгая положительность. Если $\mu A > 0$ и $f > 0$ на A, то $\int\limits_A f d\mu > 0$.

▷ 1. Пусть f и g – простые функции, принимающие значения $f_1, ..., f_n$, $g_1, ..., g_n$ на общем допустимом разбиении $A_1, ..., A_n$. Тогда по определению интеграла получаем

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \sum_{i=1}^n (\alpha f_i + \beta g_i) \mu(A_i) = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu.$$

В общем случае построим возрастающие последовательности $f_n \to f$ и $g_n \to g$ простых функций и воспользуемся теоремой Леви.

2. Аддитивность интеграла следует из линейности и равенства $\chi_{A \sqcup B} = \chi_A + \chi_B$.

3. Пусть $A_n = A(f \geqslant 1/n)$. Так как

$$A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n, \quad \mu A > 0,$$

то найдется n_0: $\mu(A_{n_0}) > 0$. Значит

$$\int\limits_A f d\mu \geqslant \int\limits_{A_{n_0}} f d\mu \geqslant \frac{1}{n_0} \mu(A_{n_0}) > 0.$$

◀

Заметим, что если $f \geqslant 0$, то функция множества $A \to \int\limits_A f d\mu$ является неотрицательной аддитивной функцией, равной 0 на пустом множестве, то есть, является объемом.

Сформулируем еще несколько свойств интеграла, связанных с понятием "почти всюду". Везде функции измеримы и неотрицательны.

1. Если $\int\limits_X f d\mu < +\infty$, то f почти всюду конечна на X.

2. Если $\int\limits_X f d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду на X.

3. Если $A \subset B$, $\mu(B \setminus A) = 0$, то $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_B f d\mu$.

4. Если $f = g$ почти всюду на X, то $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X g d\mu$.

Доказательство этих свойств предоставляем читателю в качестве упражнения.

7.3 Свойства интеграла от суммируемых функций

Заметим сначала, что часто мы имеем дело с функциями, определенными почти везде на множестве X (например, предел почти везде сходящейся последовательности). Если функция f определена и измерима на множестве $X_0 \subset X$ и $\mu(X \setminus X_0) = 0$, то будем называть такую функцию измеримой на X в широком смысле. Тогда можно для нее определить интеграл по X. Если при этом $\int\limits_X f_\pm d\mu$ конечны, то f называется суммируемой. Множество измеримых в широком смысле и суммируемых на X функций будем обозначать $L(X, \mu)$ или $L(X)$.

Отметим свойства суммируемых функций:

1. Суммируемая функция почти всюду конечна.

2. Суммируемость функции равносильна суммируемости ее модуля и
$$\Big|\int\limits_X f d\mu\Big| \leqslant \int\limits_X |f| d\mu.$$

3. Сумируемая на X функция суммируема на любом измеримом $A \subset X$.

4. Ограниченная на множестве конечной меры функция суммируема на нем.

5. Если $f, g \in L(X, \mu)$ и $f \leqslant g$ почти всюду на X, то $\int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.

6. Если $f, g \in L(X, \mu)$, то $\alpha f + \beta g \in L(X, \mu)$ и
$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu.$$

7. Если $A \cap B = \emptyset$, то $f \in L(A \sqcup B)$ тогда и только тогда, когда $f \in L(A, \mu)$ и $f \in L(B, \mu)$, причем
$$\int\limits_{A \sqcup B} f d\mu = \int\limits_{A} f d\mu + \int\limits_{B} f d\mu.$$

$\triangleright$

$\blacktriangleleft$

Теорема 33 (Неравенство Чебышёва) *Пусть $p, t > 0$. Тогда*
$$\mu\Big(X(|f| \geqslant t)\Big) \leqslant \frac{1}{t^p} \int\limits_X |f|^p d\mu.$$

$\triangleright$ Пусть $X_t = X(|f| \geqslant t)$. Тогда
$$\int\limits_X |f|^p d\mu \geqslant \int\limits_{X_t} |f|^p d\mu \geqslant \int\limits_{X_t} t^p d\mu = t^p \mu(X_t),$$
откуда и следует требуемое. $\blacktriangleleft$

7.4 Интеграл как функция множества

Рассмотрим свойства интеграла по мере как функции множества. Везде фиксировано измеримое пространство $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Все рассматриваемые множества считаются измеримыми, а все функции определенными почти всюду на X и измеримыми в широком смысле.

Теорема 34 (Счетная аддитивность интеграла) *Пусть $f \in L(X)$, $A \subset X$, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $f \geqslant 0$. Тогда*
$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu.$$

$\triangleright$ Заметим, что $f\chi_A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f\chi_{A_k}$. Рассмотрим частичную сумму
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{A_k}$$
и заметим, что S_n возрастает и $S_n \to f\chi_A$ на X. Тогда по теореме Леви
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X S_n d\mu = \int\limits_X f\chi_A d\mu = \int\limits_A f d\mu.$$

$\blacktriangleleft$

Замечание 13 *Теорема верна и для суммируемых функций произвольного знака. Для доказательства достаточно ее применить к функциям $f_{\pm}$.*

Следствие 35 *Для $f \geqslant 0$ функция множества $\nu(A) = \int\limits_A f d\mu$ является мерой на $\mathfrak{A}$. При этом f называется плотностью меры ν.*

Следствие 36 *Интеграл от суммируемой функции обладает свойствами меры: непрерывен снизу и сверху. А именно, если*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty}, \quad A_k \subset A_{k+1},$$

или

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty}, \quad A_{k+1} \subset A_k,$$

то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f d\mu = \int\limits_A f d\mu.$$

$\triangleright$ Для доказательства введем две конечные меры

$$\nu_{\pm}(A) = \int\limits_A f_{\pm} d\mu, \quad f = f_+ - f_-,$$

для которых свойства непрерывности выполнены. ◀

Отметим еще одно интересное свойство: если функция суммируема на множестве бесконечной меры, то "в основном"значения интеграла сосредоточены на множестве конечной меры.

Следствие 37 *Пусть f суммируема на X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество A конечной меры, что $\int\limits_{X\setminus A} |f| d\mu < \varepsilon$.*

$\triangleright$ Рассмотрим множества

$$A_n = X(|f| < \frac{1}{n}): \quad A_{k+1} \subset A_k \text{ и } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X(f = 0).$$

По непрерывности интеграла сверху,

$$\int\limits_{A_k} |f| d\mu \to \int\limits_A \to 0,$$

следовательно, для $\varepsilon > 0$ найдется номер N: $\int\limits_{A_N} |f| d\mu < \varepsilon$. Возьмем тогда $A = X \setminus A_N$.

Осталось доказать, что $\mu A < +\infty$. Это следует из

$$\int\limits_X |f| d\mu \geqslant \int\limits_A |f| d\mu \geqslant \frac{1}{N}\mu(A).$$

◀

Пример 7.4.1 (Интеграл по считающей мере) *Пусть μ – считающая мера на сигма-алгебре всех подмножеств $\mathbb{N}$. Тогда любая последовательность $f = f_n$ есть измеримая функция. Для интеграла пользуясь счетной аддитивностью, получим*

$$\int\limits_{\mathbb{N}} |f| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{n\}} |f| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|,$$

то есть суммируемость f означает абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Установим еще одно важное свойство интеграла.

Теорема 38 (Абсолютная непрерывность интеграла) *Пусть f суммируема на X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что*

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int\limits_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

▷ По определению интеграла

$$\int\limits_X |f| d\mu = \sup\Big\{ \int\limits_X g d\mu, \quad 0 \leqslant g \leqslant |f|,\ g \text{ – простая} \Big\}.$$

Для $\varepsilon > 0$ найдется простая функция g_ε, что

$$0 \leqslant g_\varepsilon \leqslant |f|, \quad \int\limits_X |f| d\mu < \int\limits_X g_\varepsilon d\mu + \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $g_\varepsilon < C_\varepsilon$ (g_ε ограничена как простая функция)и $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2C_\varepsilon}$. Тогда если $\mu(A) < \delta$, то

$$\int\limits_A |f| d\mu = \int\limits_A (|f| - g_\varepsilon) d\mu + \int\limits_A g_\varepsilon d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + C_\varepsilon \mu(A) < \varepsilon.$$

◀

7.5 Интеграл Лебега, связь с интегралом Римана

В этом разделе рассмотрим интеграл по мере Лебега λ, который будем называть интегралом Лебега. Ограничимся простейшими измеримыми множествами – промежутками $< a, b >\subset \bar{\mathbb{R}}$. Заметим, что включение или исключение граничных точек не влияет на интеграл Лебега, так как одноточечное множество имеет меру нуль.

Отметим, что любая измеримая ограниченная на конечном промежутке функция, суммируема на нем.

Для интеграла Лебега можно по аналогии с интегралом Римана строить интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int\limits_{<a,x>} f d\lambda$, доказывать его возрастание (для $f \geqslant 0$), непрерывность и дифференцируемость (для непрерывной f). И далее получить формулу Ньютона–Лейбница. Это наводит на мысли о равенстве интегралов Римана и Лебега.

Теорема 39 (О равенстве интегралов Римана и Лебега по конечному промежутку) *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Если существует интеграл Римана*

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

то $f(x)$ суммируема на $[a, b]$ по Лебегу и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda.$$

$\triangleright$ Пусть $f \geqslant 0$ на $[a, b]$. Построим разбиение отрезка $[a, b]$ на 2^n частей точками

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b - a), \quad k = 0, 1, ..., 2^n,$$

и обозначим $M_{nk} = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $m_{nk} = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$. Эти величины конечны, так как f ограничена.

Заметим, что суммы Дарбу S_n и s_n совпадают с интегралами Лебега от простых функций $\overline{f_n}$ и $\underline{f_n}$:

$$S_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk} = \int\limits_{[a,b]} \overline{f_n}d\lambda, \quad s_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk} = \int\limits_{[a,b]} \underline{f_n}d\lambda.$$

Так как $\overline{f_n}$ убывает и $\overline{f_n} \geqslant f$, а $\underline{f_n}$ возрастает и $0 \leqslant \underline{f_n} \leqslant f$, то эти последовательности сходятся:

$$\overline{f_n} \to \overline{f}, \quad \underline{f_n} \to \underline{f}.$$

Тогда по теореме Леви

$$S_n = \int\limits_{[a,b]} \overline{f_n}d\lambda \to \int\limits_{[a,b]} \overline{f}d\lambda, \quad s_n = \int\limits_{[a,b]} \underline{f_n}d\lambda \to \int\limits_{[a,b]} \underline{f}d\lambda.$$

Но S_n и s_n имеют общий предел, равный I, значит

$$\int\limits_{[a,b]} |\overline{f}(x) - \underline{f}(x)| d\lambda = 0,$$

откуда следует равенство $\overline{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$ почти всюду. Значит $\int\limits_{[a,b]} f d\lambda = I$.

Для функции f произвольного знака воспользуемся разложением $f = f_+ - f_-$. ◀

Замечание 14 *1. Интегрируемая по Риману на отрезке функция ограничена. Неограниченная функция не интегрируема по Риману, но может быть интегрируема по Лебегу.*

2. Существуют ограниченные функции на отрезке, не интегрируемые по Риману, но интегрируемые по Лебегу.

Теорема 40 (О равенстве интегралов Римана и Лебега по бесконечному промежутку) *Пусть $f \geqslant 0$ и локально интегрируема на $[a, +\infty)$. Тогда*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \int\limits_{[a,+\infty)} f(x)d\lambda,$$

при этом несобственный интеграл (слева) либо сходится, либо равен $+\infty$.

▷ Утверждение следует из предыдущей теоремы и непрерывности снизу интеграла Лебега. ◀

Замечание 15 *Для функции произвольного знака абсолютно сходящийся несобственный интеграл (Римана) равен интегралу Лебега. Но для условно сходящегося интеграла (Римана) соответствующий интеграл Лебега не существует.*

7.6 Предельный переход под знаком интеграла для последовательностей

В этом пункте обсудим вопрос предельного перехода под знаком интеграла.

Теорема 41 (О равномерном пределе интегралов) *Пусть $\mu X < +\infty$, f_n суммируемы на X, $f_n \rightrightarrows f$ на X. Тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

▷ При достаточно больших n разность $f_n - f$ суммируема (как ограниченная функция на множестве конечной меры). Тогда

$$\Big| \int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X f d\mu \Big| = \Big| \int\limits_X (f_n - f) d\mu \Big| \leqslant \int\limits_X |f_n - f| d\mu \leqslant \sup_X |f_n - f| \cdot \mu X \to 0.$$

◀

Далее, обобщим теорему Леви:

Теорема 42 (Леви) *Пусть f_n измеримы, $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ на X и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ почти всюду на X. Тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

$\triangleright$ Условие старой теоремы Леви выполнены на всем X кроме множества меры нуль (счетное объединение множеств. где нарушается сходимость или монотонность), что не влияет на значение интеграла. $\blacktriangleleft$

Следствие 43 *Если f_n измеримы и $f_n \geqslant 0$ почти всюду на X, то*

$$\int\limits_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n d\mu,$$

при этом сходимость ряда не требуется.

Теорема Леви позволяет переходить к пределу в интеграле от монотонной последовательности. Как быть в общем случае? Здесь нам помогут две теоремы Лебега, но сначала рассмотрим пример.

Пример 7.6.1

$$f_n(x) = n^2 \chi_{[0,1/n]}, \quad \mu = \lambda.$$

Имеем $f_n \xrightarrow{п.в.} 0$, но $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = n \to +\infty$.

Теорема 44 (Лебега о предельном переходе в интеграле – 1) *Пусть f_n измеримы, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на X и выполнено условие:*

$$\exists \text{ суммируемая функция } g\text{: } |f_n(x)| \leqslant g(x)\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ почти всюду на } X. \tag{L}$$

Тогда

1. *f_n и f суммируемы на X;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$

$\triangleright$ Суммируемость f_n следует из неравенств $|f_n| \leqslant g$. Переходя в этом неравенстве к пределу, получим $|f| \leqslant g$ почти везде на X, откуда следует измеримость f.

Так как

$$\Big|\int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X f d\mu\Big| \leqslant \int\limits_X |f_n - f| d\mu,$$

то достаточно доказать сходимость к нулю интеграла из правой части.

Предположим сначала, что $\mu X < +\infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и $X_n(\varepsilon) = X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)$. Тогда

$$\int\limits_X |f_n - f| d\mu = \int\limits_{X_n(\varepsilon)} + \int\limits_{X\setminus X_n(\varepsilon)} \leqslant \int\limits_{X_n(\varepsilon)} 2g d\mu + \int\limits_{X\setminus X_n(\varepsilon)} \varepsilon d\mu < \varepsilon(1 + \mu X).$$

Первый интеграл стремится к нулю так как $\mu X_n(\varepsilon) \to 0$ (абсолютная непрерывность интеграла), а значит станет меньше ε, а второй меньше $\varepsilon \mu X$.

Пусть теперь $\mu X = +\infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем множество A_ε конечной меры такое, что $\int\limits_{X\setminus A_ep} g d\mu < \varepsilon$ (по следствию из Теоремы о счетной аддитивности интеграла). Тогда

$$\int\limits_X |f_n - f| d\mu \leqslant \int\limits_{A_\varepsilon} |f_n - f| d\mu + \int\limits_{X\setminus A_\varepsilon} 2g d\mu < \int\limits_{A_\varepsilon} |f_n - f| d\mu + 2\varepsilon < 3\varepsilon,$$

последнее неравенство верно, т.к. по доказанному при $\mu A_\varepsilon < +\infty$ оставшийся интеграл стремится к нулю, а значит $< \varepsilon$ при достаточно больших n. ◀

Заметим, что на множестве конечной меры из сходимости почти всюду следует сходимость по мере (теорема Лебега о связи сходимостей по мере и почти всюду). Это означает, что для сходимости почти всюду на множестве конечной меры Теорема остается справедливой. Докажем более общий случай.

Теорема 45 (Лебега о предельном переходе в интеграле – 2) *Пусть f_n измеримы, $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ на X и выполнено условие (L). Тогда*

1. *f_n и f суммируемы на X;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$

▷ Суммируемость f_n и f доказывается также, как в предыдущей теореме. Положим

$$h_n = \sup\big\{|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, ...\big\}.$$

Функции $h_n(x)$ удовлетворяют условиям: $h_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$, $0 \leqslant h_{n+1} \leqslant h_n \leqslant 2g$. Тогда по теореме Леви, имеем

$$\int\limits_X |f_n - f| d\mu \leqslant \int\limits_X h_n d\mu \to 0.$$

◀

Условие (L) теорем Лебега не является необходимым. Это показывает следующий пример.

Пример 7.6.2

$$f_n(x) = n \cdot \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}(x), \quad \mu = \lambda.$$

Понятно, что $f_n \to 0$. Кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = n \cdot \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Но при этом f_n не имеет суммируемую мажоранту, т.к. она должна быть не меньше, чем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, но интеграл от этой суммы равен $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Теорема 46 (Фату́ о предельном переходе в неравенстве с интегралом) *Пусть f_n измеримы, $f_n \geqslant 0$ и $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ на X. Если для некоторого $C > 0$ при $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$\int\limits_X f_n d\mu \leqslant C, \quad \text{то} \quad \int\limits_X f d\mu \leqslant C.$$

▷ Пусть

$$g_n(x) = \inf_{x\in X} \Big\{ f_n(x), f_{n+1}(x), ... \Big\}.$$

Ясно, что $0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1}$ и $g_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ и

$$\int\limits_X g_n d\mu \leqslant \int\limits_X f_n d\mu \leqslant C.$$

Следовательно, по теореме Леви

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n d\mu \leqslant C.$$

◀

Замечание 16 *Свойство, устанавливаемое в теореме Фату для интеграла от неотрицательных функций, называется полунепрерывностью снизу относительно сходимости почти везде. Оно часто используется для установления измеримости предельной функции.*

Замечание 17 *Даже если все интегралы $\int\limits_X f_n d\mu$ равны между собой, интеграл $\int\limits_X f d\mu$ может быть строго меньше их общего значения. Приведем пример. Пусть $X = (0,1)$, $\mu = \lambda$,*

$$f_n(x) = n \cdot \chi_{[0,1/n]}.$$

Следствие 47 *Теорема Фату остается справедливой, если сходимость почти всюду заменить на сходимость по мере. Для доказательства надо по теореме Рисса найти сходящуюся почти всюду подпоследовательность и применить к ней теорему Фату.*

Следствие 48 *Можно отказаться от существования предельной функции и получить более сильный результат:*
для любой последовательности измеримых $f_n \geqslant 0$ верно

$$\int\limits_X \underline{\lim} f_n d\mu \leqslant \underline{\lim} \int\limits_X f_n d\mu$$

Теорему Лебега можно усилить, ослабив требования на мажоранту.

Теорема 49 (Витали) *Пусть $\mu X < +\infty$, f_n суммируемы, $f_n \xrightarrow{\mu} f$. И выполнено условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \mu E < \delta \quad \Rightarrow \quad \int\limits_E |f_n| d\mu < \varepsilon, \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{AC}$$

Тогда f суммируема и $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0.$

▷ Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть δ – число, при котором выполнено условие (AC). Положим

$$E_n = X(|f_n - f| > \varepsilon).$$

Так как $\mu(E_n) \to 0$, то начиная с некоторого номера $\mu(E_n) < \delta$, а значит

$$\int\limits_{E_n} |f_k| d\mu < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

По теореме Фату, это неравенство справедливо и для интеграла от $|f|$. Тогда

$$\int\limits_X |f_n - f| d\mu = \int\limits_{X \setminus E_n} + \int\limits_{E_n} \leqslant \int\limits_{X \setminus E_n} \varepsilon d\mu + \int\limits_{E_n} |f_n| d\mu + \int\limits_{E_n} |f| d\mu \leqslant \varepsilon(\mu X + 2),$$

откуда следует требуемое.

Кроме того, f суммируема, так как $f = f_n + (f - f_n)$ и оба слагаемых суммируемы. ◀

Замечание 18 *Если выполнено условие (AC), то говорят, что функции f_n имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Следствие 50 *Теорема Витали остается справедливой, если условие (AC) заменить на следующее:*

$$\exists p > 1, \; C > 0 : \quad \int\limits_X |f_n|^p d\mu \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

▷ Суммируемость f_n и условие (AC) следует из неравенства Гёльдера:

$$\int\limits_X |fg| d\mu \leqslant \Big(\int\limits_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int\limits_E |g|^q d\mu \Big)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Запишем это неравенство для функций f_n и 1 по множеству E:

$$\int\limits_E |f_n| d\mu \leqslant \Big(\int\limits_E |f_n|^p d\mu \Big)^{1/p} \Big(\mu E \Big)^{1/q} \leqslant C^{1/p} \Big(\mu E \Big)^{1/q},$$

откуда следует условия (AC). ◀

7.7 Произведение мер. Интеграл по произведению мер. Теорема Фубини

Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ И $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ – два пространства с σ-конечными мерами. Наша цель – построить пространство $X \times Y$ и меру на нем, которую назовем произведением мер $\mu \times \nu$.

Рассмотрим систему множеств

$$\mathcal{P} = \Big\{ A \times B : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}, \mu(A) < +\infty,\ \nu(B) < +\infty \Big\}.$$

Множества $A \times B \in \mathcal{P}$ будем называть измеримыми прямоугольниками.

Напомним, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – сигма-алгебры измеримых множеств. Заметим, что $\mathcal{P}$, вообще говоря, не является сигма-алгеброй, но является полукольцом. Определим на $\mathcal{P}$ функцию m_0:

$$m_0(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Теорема 51 (О произведении мер) *Система $\mathcal{P}$ есть полукольцо. Функция m_0 есть σ-конечная мера на $\mathcal{P}$.*

$\triangleright$ Так как $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ есть полукольца, то $\mathcal{P}$ – полукольцо по Теореме о произведении полуколец.

Для доказательства второго утверждения, докажем сначала счетную аддитивность m_0.

Пусть измеримые прямоугольники $P_k = A_k \times B_k$ попарно дизъюнктны и образуют разбиение $\mathcal{P} \ni P = \bigsqcup\limits_{k \geqslant 1} P_k$. Тогда $P = A \times B$, где $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, и $\chi_P(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$. Запишем равенство

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{k \geqslant 1} \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y).$$

Воспользуемся теоремой Леви и проинтегрируем этот ряд почленно по мере ν:

$$\chi_A(x)\nu(B) = \sum_{k \geqslant 1} \chi_{A_k}(x)\nu(B_k),$$

а теперь проинтегрируем по мере μ:

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{k \geqslant 1} \mu(A_k)\nu(B_k), \quad \text{то есть,} \quad m_0(P) = \sum_{k \geqslant 1} m_0(P_k),$$

что и означает счетную аддитивность функции m_0.

Осталось доказать сигма-конечность. Ввиду сигма-конечности мер μ и ν, множества X и Y допускают представления

$$X = \bigcup_{k \geqslant 1} X_k, \quad Y = \bigcup_{n \geqslant 1} Y_n,$$

но тогда сигма-конечность меры m_0 следует из равенства

$$X \times Y = \bigcup_{k, n \geqslant 1} X_k \times Y_n.$$

◀

Доказанная теорема позволяет ввести следующее определение.

Определение 28 (Произведение пространств с мерой) *Мера, полученная стандартным продолжением меры m_0 с полукольца $\mathcal{P}$, называется произведением мер $\mu \times \nu$. Сигма-алгебра, на которой определена $\mu \times \nu$, обозначается $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Измеримое пространство $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ называется произведением измеримых пространств $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$.*

Определим понятие сечения. Пусть $C \subset X \times Y$. Определим

$$C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\}, \quad C_y = \{x \in X : (x, y) \in C\}.$$

Теорема 52 (Принцип Кавальери) *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ – пространства с сигма-конечными мерами, $m = \mu \times \nu$ и $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Тогда*

1. *$C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех $x \in X$;*
2. *функция $x \mapsto \nu(C_x)$ измерима в широком смысле на X;*
3. *$m(C) = \int\limits_X \nu(C_x) d\mu(x)$.*

Примем эту теорему без доказательства.

Далее, попытаемся свести интеграл по произведению мер к интегралам по мерам-сомножителям.

С каждой функцией $f : X \times Y \supset C \to \bar{\mathbb{R}}$ можно связать два семейства функций:

$$f_x(y) = f(x, y) : \ C_x \to \bar{\mathbb{R}}, \qquad f^y(x) = f(x, y) : \ C_y \to \bar{\mathbb{R}}.$$

Следующие две теоремы примем без доказательства.

Сначала рассмотрим случай неотрицательной функции f.

Теорема 53 (Тонелли) *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ – пространства с сигма-конечными полными мерами, $m = \mu \times \nu$, $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ – $f \geqslant 0$, измеримая относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Тогда*

1. *$f_x(y)$ измерима на Y при почти всех $x \in X$;*

1'. *$f^y(x)$ измерима на X при почти всех $y \in Y$;*

2. *функция*
$$\varphi(x) = \int\limits_Y f_x d\nu = \int\limits_Y f(x, y) d\nu(y)$$
измерима в широком смысле на X;

2'. *функция*
$$\psi(y) = \int\limits_X f^y d\mu = \int\limits_X f(x, y) d\mu(x)$$
измерима в широком смысле на Y;

3.

$$\int\limits_{X\times Y} f dm = \int\limits_X \varphi d\mu = \int\limits_Y \psi d\nu.$$

Последнее равенство можно записать так:

$$\int\limits_{X\times Y} f dm(x,y) = \int\limits_X d\mu(x) \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) = \int\limits_Y d\nu(y) \int\limits_X f(x,y) d\mu(x).$$

Теорема 54 (Фубини) *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ – пространства с сигма-конечными полными мерами, $m = \mu \times \nu$, f суммируема на $X \times Y$ по мере m. Тогда справедливо заключение теоремы Тонелли.*

Пример 7.7.1 (Интеграл Эйлера–Пуассона) *Докажем равенство*

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Заметим, что

$$I^2 = \Big(2\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx\Big)\Big(2\int\limits_0^\infty e^{-y^2} dy\Big) = 4\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx \int\limits_0^\infty e^{-y^2} dy.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену $y = xu$:

$$I^2 = 4\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx \int\limits_0^\infty x e^{-x^2u^2} du.$$

Учитывая измеримость и положительность подынтегральной функции, изменим порядок интегрирования (пользуясь теоремой Тонелли):

$$I^2 = 4\int\limits_0^\infty du \int\limits_0^\infty x e^{-(1+u^2)x^2} dx = 4\int\limits_0^\infty \frac{1}{2(1+u^2)} du = \pi.$$

7.8 Предельный переход под знаком интеграла для функций двух переменных

Здесь обобщим и дополним результаты, касающиеся предельного перехода под знаком интеграла от последовательности функций для случая функции f двух переменных.

Пусть $f(x,y) : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f^y(x)$ суммируема для почти всех $y \in Y$. y_0 – предельная точка Y.

Теорема 55 (о равномерном пределе) *Если $\mu(X) < +\infty$ и $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$ на X, то функция $\varphi(x)$ суммируема на X и выполнено*

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_X f(x,y) d\mu(x) = \int\limits_X \varphi(x) d\mu(x).$$

$\triangleright$ Возьмем произвольную последовательность $y_n \in Y \setminus \{y_0\}$, сходящуюся к y_0, и применим теорему о равномерном пределе для последовательности функций $f_n(x) = f(x, y_n)$. $\blacktriangleleft$

Теорема 56 (Лебега (модификация)) *Пусть* $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{п.в.} \varphi(x)$ *и выполнено условие*

$$\exists g\text{– суммир. на } X \text{ и } U(y_0):$$
$$|f(x,y)| \leqslant g(x) \text{ при почти всех } x \in X \text{ и любом } y \in (Y\cap U)\setminus\{y_0\}. \quad (\mathrm{L}_{loc})$$

Тогда $\varphi(x)$ *суммируема на* X *и выполнено*

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_X f(x,y)d\mu(x) = \int\limits_X \varphi(x)d\mu(x).$$

$\triangleright$ Применим теорему Лебега к последовательности $f_n(x) = f(x,y_n)$, где $y_n \to y_0$, $y_n \in (Y\cap U)\setminus\{y_0\}$. $\blacktriangleleft$

Заметим, что если μ – считающая мера, $X = \mathbb{N}$, то интеграл превращается в сумму абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(y)$, а условие L_{loc} соответствует условия признака Вейерштрасса, гарантирующего равномерную сходимость.

Следствие 57 *Если* f *удовлетворяет условию* L_{loc} *и непрерывна по* y *в точке* y_0 *при почти всех* $x\in X$, *то функция* $J(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x)$ *непрерывна в точке* y_0.

Замечание 19 *Если* X *– компакт в* $\mathbb{R}^n$, $Y\subset\mathbb{R}$ *– промежуток, то из непрерывности* f *на* $X\times Y$ *следует непрерывность интеграла* $J(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x)$ *на* Y.

Теорема 58 (о дифференцировании интеграла) *Пусть* $Y\subset\mathbb{R}$ *– промежуток и выполнено*

1. *существует* f'_y *при почти всех* $x\in X$ *и всех* $y\in Y$*;*
2. f'_y *удовлетворяет условию* L_{loc}.

Тогда $J(y)$ *дифференцируема в точке* y_0 *и*

$$J'(y_0) = \int\limits_X f'_y(x,y)d\mu(x).$$

$\triangleright$ Пусть $y_0 + h \in Y$ и

$$F(x,h) = \frac{f(x,y_0+h) - f(x,y_0)}{h}.$$

Но тогда верно

$$\frac{J(y_0+h) - J(y_0)}{h} = \int\limits_X F(x,h)d\mu(x).$$

Далее переходя к пределу при $h \to 0$ получаем требуемое. Осталось обосновать, что $F(x,h)$ удовлетворяет условию L_{loc} в точке $h=0$.

По условию 2 найдутся число δ и суммируемая на X функция g, что при почти всех $x \in X$ и при $y \in (Y \cap U_\delta(y_0)) \setminus \{y_0\}$:

$$|f'(x,y)| \leqslant g(x).$$

Применим теорему лагранжа о среднем к функции $f(x,y)$ на промежутке y_0, y_0+h:

$$F(x,h) = f'_y(x, y_0+\theta h), \quad \theta \in (0,1).$$

Тогда неравенство $|F(x,h)| \leqslant g(x)$ выполнено при почти всех $x \in X$ и $0<|h|<\delta$, то есть для F выполнено L_{loc}. ◀

Вопрос об интегрировании интеграла с параметром исчерпывается теоремами Тонелли и Фубини.

Пример 7.8.1 *Вычислить при всех $a>0$*

$$I(a) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\big(\sin^2 x + a^2\cos^2 x\big)dx.$$

При $a=1$ имеем

$$I(1) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\big(\sin^2 x + \cos^2 x\big)dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln 1 dx = 0.$$

Так как функции $f(x,a) = \ln\big(\sin^2 x + a^2\cos^2 x\big)$ и $f'_a(x,a) = \dfrac{2a\cos^2 x}{\sin^2 x + a^2\cos^2 x}$ непрерывны, то существует

$$I'(a) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2a\cos^2 x dx}{\sin^2 x + a^2\cos^2 x} = \Big[t = \operatorname{tg} x\Big] =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(a^2+t^2)} = \frac{2a}{a^2-1}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a+1}.$$

Отсюда

$$I(a) = \int \frac{\pi}{a+1}da = \pi\ln(a+1) + C.$$

Так как $I(1)=0$, то $C=-\pi\ln 2$. Окончательно, $I(a) = \pi\ln\dfrac{a+1}{2}$.

8 Интегралы с параметрами

В этом разделе будем говорить об интеграле Римана собственном и несобственном.

8.1 Сходимость семейства функций

Рассмотрим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$. Вспомним определения обычной (поточечной) и равномерной сходимостей на множестве X:

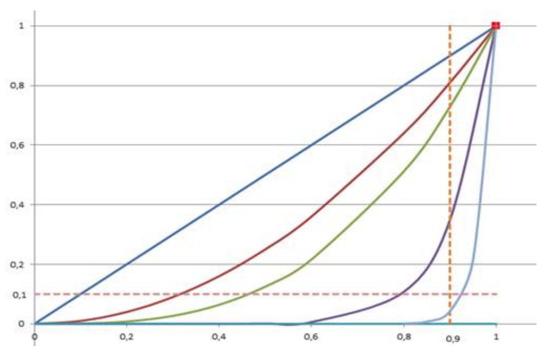
$$f_n(x) \to \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon, x): \ \forall n \geqslant n_0 \ \ |f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

$$f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon): \ \forall n \geqslant n_0 \ \forall x \in X \ \ |f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

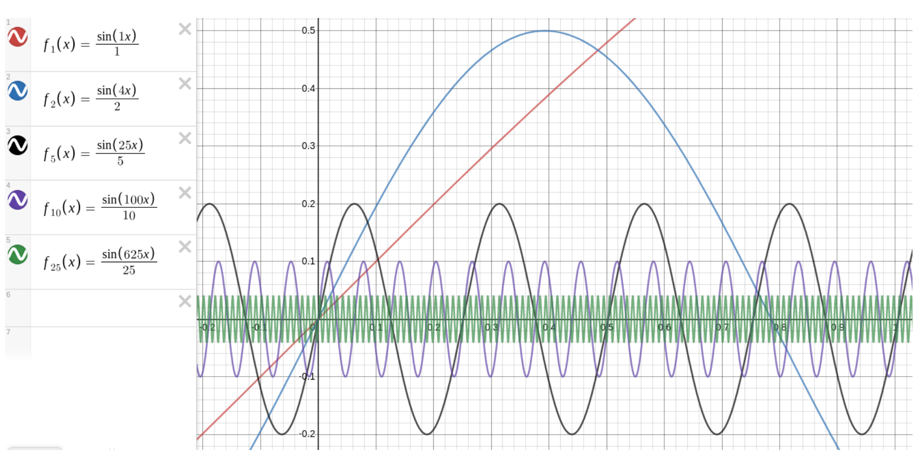
Пример 1. Последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится поточечно к 0 при $x \in (-1, 1)$, но не равномерно. Равномерная сходимость есть на любом отрезке $[-a, a] \subset (-1, 1)$. Если рассматривать $f_n(x)$ на отрезке $[0, 1]$, то предельная функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1); \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

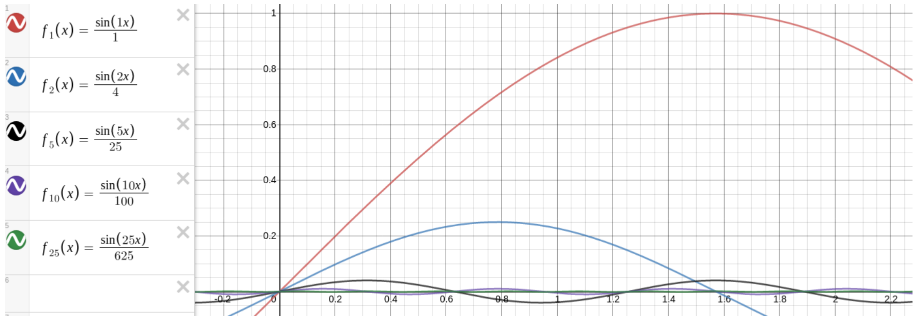
разрывна, хотя все $f_n(x)$ непрерывны на $[0, 1]$.



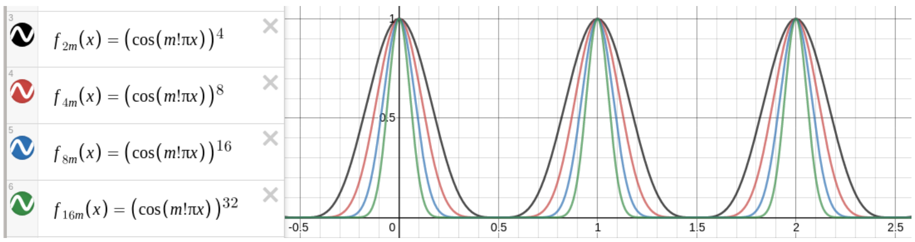
Пример 2. $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n} \to 0$ на $\mathbb{R}$. Производные $f_n'(x) = n \cos n^2 x$ не имеют предела при $n \to \infty$.

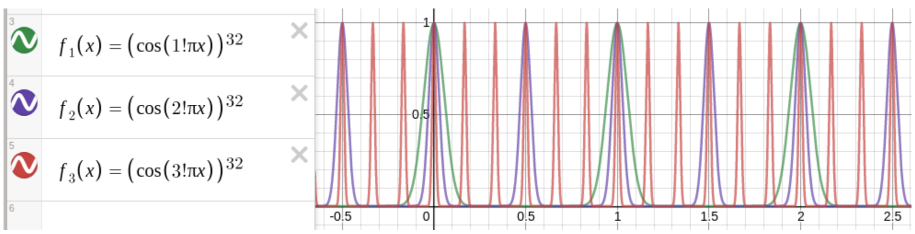


Пример 3. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2} \to 0$ на $\mathbb{R}$.



Пример 4. $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n} \to D(x)$, где $D(x)$ – функция Дирихле.





Теперь вместо натурального аргумента n возьмём вещественную переменную y. Получим функцию двух переменных $f(x,y)$, $(x,y)\in X\times Y$. Эту функцию можно рассматривать как семейство функций, зависящих от x с вещественным параметром y.

Пусть y_0 – предельная точка множества Y. Сформулируем определения обычной (поточечной) и равномерной сходимостей при $y\to y_0$ и $x\in X$.

Определение 29 (Поточечная сходимость)

$$f(x,y)\to\varphi(x) \ \textit{при}\ y\to y_0,\ x\in X \ \Leftrightarrow$$
$$\forall x\in X\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon,x):\ \forall y\in \dot U_\delta(y_0)\ \ |f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

Определение 30 (Равномерная сходимость)

$$f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x) \ \textit{при}\ y\to y_0,\ x\in X \ \Leftrightarrow$$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon):\ \forall y\in \dot U_\delta(y_0)\ \forall x\in X\ \ |f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

Теоремы о равномерной сходимости семейства функций аналогичны соответствующим теоремам для функциональных последовательностей.

Выделим основные свойства:

1. **Альтернативное определение равномерной сходимости:**

$$f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x) \text{ при } y \to y_0,\ x \in X \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{y\to y_0} \sup_{x\in X} |f(x,y) - \varphi(x)| = 0.$$

2. **Критерий Коши равномерной сходимости**:

$$f(x,y) \rightrightarrows \text{ при } y \to y_0,\ x \in X \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon):\ \forall y_1, y_2 \in \dot{U}_\delta(y_0)\ \forall x \in X\ \ |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon.$$

3. **Сохранение непрерывности**: Предельная функция равномерно сходящегося семейства непрерывных функций непрерывна.

4. **Перестановочность пределов**: Для равномерно сходящегося семейства непрерывных функций повторные пределы можно переставлять.

Пример 8.1.1 $f(x,y) = e^{-(x/y)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \setminus 0$. *При* $y \to 0$ *имеем*

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

8.2 Несобственные интегралы с параметрами: определение

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определённую на $[a,b) \times Y$, где $-\infty < a \leqslant b \leqslant +\infty$. Пусть при любом $y \in Y$ и при любом $\xi \in [a,b)$ существует интеграл $\int\limits_a^\xi f(x,y)dx$. То есть, при любом y функция интегрируема по любому промежутку, входящему в $[a,b)$.

Пусть при любом $y \in Y$ интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится как несобственный с особой точкой b (либо $b = +\infty$, либо в точке $x = b$ функция $f(x,y)$ неограниченна).

Тогда определим функцию

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx,$$

которую будем называть несобственным интегралом с параметром y (первого или второго рода).

В дальнейшем нам будет удобно иметь дело с несобственными интегралами первого рода:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx,$$

а интегралы второго рода всегда можно привести к ним соответствующей заменой переменной. Принципиально ничего нового не появится.

Сходимость интеграла при всех $y \in Y$ является поточечной сходимостью и может быть записана так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ сходится на } Y \;\Leftrightarrow \forall y \in Y\, \forall \varepsilon > 0\, \exists B(\varepsilon, y)\; \forall \xi > B: \; \left|\int\limits_\xi^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Так как несобственный интеграл определяется как предел:

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x,y)dx,$$

то если эта сходимость равномерная на Y, то говорят, что несобственный интеграл сходится равномерно на Y.

Определение 31 (Равномерная сходимость несобственного интеграла)

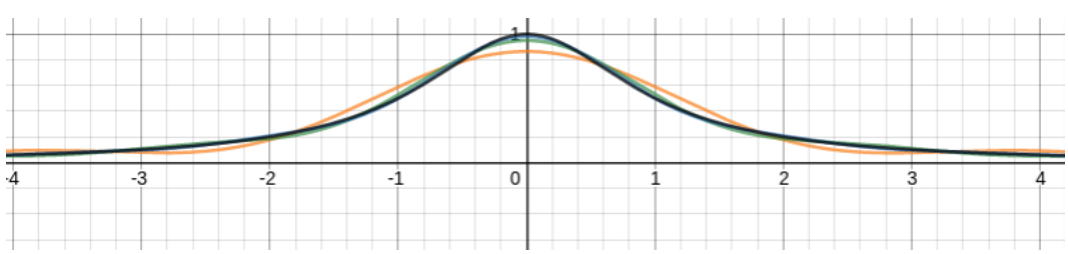
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \quad \textit{сходится равномерно на } Y \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists B(\varepsilon)\;\; \forall y \in Y\; \forall \xi > B: \quad \left|\int\limits_\xi^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Пример 8.2.1 $I(y) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\cos xy\; dx$. *Докажем равномерную сходимость. Оценим*

$$\left|\int\limits_\xi^\infty e^{-x}\cos xy\; dx\right| \leqslant \int\limits_\xi^\infty \left|e^{-x}\cos xy\right| dx \leqslant \int\limits_\xi^\infty e^{-x}dx = e^{-\xi}.$$

При $\xi > B$ эта величина становится меньше ε, если выбрать $B = -\ln\varepsilon$. Следовательно, есть равномерная сходимость на $\mathbb{R}$ (на графике предельная функция $I(y)$ нарисована чёрным).



Пример 8.2.2 $\int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx$ *сходится при $y \in [0, +\infty)$, так как*

$$\int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx = -e^{-xy}\Big|_0^\infty = \begin{cases} 1, & y \in (0, +\infty) \\ 0, & y = 0. \end{cases}.$$

Докажем, что эта сходимость не равномерная. Возьмём $\xi = B$, $y = 1/B$*:*

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} ye^{-xy}dx = \int\limits_{B}^{\infty} ye^{-xy}dx = -e^{-x/B}\Big|_{B}^{\infty} = e^{-1} = \varepsilon_0.$$

То есть $\exists\varepsilon_0 = e^{-1}\ \forall B > 0\ \exists\xi \geqslant B$ *и* $\exists y_0 \in Y$*, что* $\int\limits_{\xi}^{\infty} f(x, y_0)dx \geqslant \varepsilon_0$*. Заметим, что значение интеграла является разрывной функцией, хотя подынтегральная функция непрерывна.*

Отсутствие равномерной сходимости можно записать так:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx \quad \text{не сходится равномерно на } Y \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall B > a\ \ \exists y_0 \in Y\ \exists\xi_0 \geqslant B: \quad \left|\int\limits_{\xi_0}^{+\infty} f(x, y_0)dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Сформулируем важные утверждения о несобственном интеграле с параметром:

1. **Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром**:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx \quad \text{сходится равномерно на } Y \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists B(\varepsilon)\ \ \forall y \in Y\ \forall\xi_1, \xi_2 > B: \quad \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

(Доказательство аналогично соответствующей теореме для рядов)

Критерий Коши чаще всего используют для опровержения равномерной сходимости. Можно сформулировать так:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx \quad \text{не сходится равномерно на } Y \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall B > a\ \ \exists\xi_1, \xi_2 > B,\ \exists y_0 \in Y: \quad \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, y_0)dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

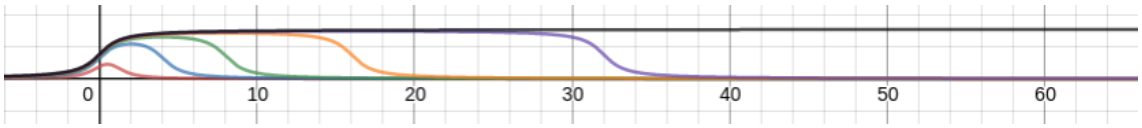
Пример 8.2.3 *Интеграл*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + (x-y)^2}$$

сходится неравномерно на $\mathbb{R}$.

Для доказательства возьмём $y = \xi_1 = \xi_2 - 1$. Тогда

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{1+(x-y)^2} = \operatorname{arctg}(\xi_2 - y) - \operatorname{arctg}(\xi_1 - y) = \operatorname{arctg} 1.$$



2. **Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла**
Пусть для $\forall y \in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема на любом промежутке (a,b), при $x \in (a,+\infty)$, $y \in Y$ выполнено $|f(x,y)| \leqslant g(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится. Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Пример 8.2.4 *Интеграл*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}dx$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$, так как

$$\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx \text{ сходится.}$$

Рассмотрим теперь признаки равномерной сходимости для интегралов от произведения двух функций вида

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx.$$

3. **Признак Дирихле** Пусть 1) для $\forall y \in Y$ функции $f(x,y)$, $g(x,y)$, $g'_x(x,y)$ непрерывны по x на $[a,+\infty)$;

2) Первообразная $F(x,y)$ для функции $f(x,y)$ по x равномерно ограничена, т.е. $|F(x,y)| \leqslant C$ при $\forall x \in [a,+\infty)$, $y \in Y$;

3) $\dfrac{\partial g}{\partial x} \leqslant 0$, $\forall y \in Y$, $x \in [a,+\infty)$;

4) $g(x,y) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ по y на Y.

Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Пример 8.2.5

$$I(y) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx, \quad y \in [0, +\infty).$$

Обозначим $f(x,y) = \sin x$ *– имеет ограниченную первообразную.*

$g(x,y) = \dfrac{1}{x}e^{-xy}$*:*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -e^{-xy}\frac{1+xy}{x^2} < 0,$$

$$\Big|g(x,y)\Big| = \frac{1}{x}e^{-xy} \leqslant \frac{1}{x} \to 0,\ y \in [0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad g(x,y) \rightrightarrows 0.$$

Следовательно, $I(y)$ *сходится равномерно на* $[0, +\infty)$.

4. **Признак Абеля** Пусть 1) для $\forall y \in Y$ функции $f(x,y)$, $g(x,y)$, $g'_x(x,y)$ непрерывны по x на $[a, +\infty)$;

   2) интеграл $\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y;

   3) $\dfrac{\partial g}{\partial x} \leqslant 0$, $\forall y \in Y$, $x \in [a, +\infty)$;

   4) $\Big|g(x,y)\Big| \leqslant C$ при $x \in [a, +\infty)$, $y \in Y$.

   Тогда интеграл $\displaystyle\int\limits_{a}^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Пример 8.2.6

$$I(y) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^y}dx, \quad y \in [0, +\infty).$$

Интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \sin x^2 dx$ *сходится (по признаку Дирихле), а значит можно считать, что он сходится равномерно по* y.

Функция $g(x,y) = \dfrac{1}{1+x^y}$ *ограничена и убывает по* x*. Следовательно, интеграл* $I(y)$ *сходится равномерно.*

Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость несобственного интеграла по параметру

Везде в этом разделе $y_0 \in Y$ – предельная точка множества Y.

8.3 Непрерывность

Теорема 59 (О предельном переходе в несобственном интеграле) *Пусть функция $f(x,y)$ определена на $[a,\infty)\times Y$, $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$ при $y\to y_0$ на $[a,\infty)$ и $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y. Тогда*

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^\infty f(x,y)dx=\int\limits_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx=\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx.$$

$\triangleright$ Запишем равномерную сходимость интеграла:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B:\ \forall\xi_1,\xi_2>B:\quad \left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдём к пределу в последнем неравенстве:

$$\left|\lim_{y\to y_0}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f(x,y)dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\Rightarrow\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\varphi(x)dx\right|<\varepsilon,$$

Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_a^\infty\varphi(x)dx$ сходится.

Рассмотрим разность

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x,y)dx-\int\limits_a^\infty\varphi(x)dx\right|=\left|\int\limits_a^B\left(f(x,y)-\varphi(x)\right)dx+\int\limits_B^\infty f(x,y)dx-\int\limits_B^\infty\varphi(x)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int\limits_a^B\left(f(x,y)-\varphi(x)\right)dx\right|+\left|\int\limits_B^\infty f(x,y)dx\right|+\left|\int\limits_B^\infty\varphi(x)dx\right|$$

и оценим каждое из трёх слагаемых по отдельности.

1) Так как $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\ \forall x\in[a,+\infty),\ \forall y\in U_\delta(y_0):\quad\left|f(x,y)-\varphi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3(B-a)}.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_a^B\left(f(x,y)-\varphi(x)\right)dx\right|\leqslant(B-a)\cdot\frac{\varepsilon}{3(B-a)}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

2) Т.к. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно, то $\left|\int\limits_B^\infty f(x,y)dx\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

3) Т.к. интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\left|\int\limits_B^\infty \varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Складывая эти три неравенства, получаем

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^\infty \varphi(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

◀

Пример 8.3.1 *Рассмотрим интеграл*

$$I(y) = \int\limits_1^\infty \frac{ydx}{x^{y+1}}, \quad y \in [0,1].$$

Интеграл сходится поточечно. Равномерной сходимости нет. Предел нельзя переставлять с интегралом:

$$\lim_{y\to 0+} \int\limits_1^\infty \frac{ydx}{x^{y+1}} = 1 \neq 0 = \int\limits_1^\infty \lim_{y\to 0+} \frac{ydx}{x^{y+1}}.$$

Теорема 60 (О непрерывности несобственного интеграла) *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty) \times Y$ и $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y. Тогда $\Phi(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ непрерывна на Y.*

▷ В силу равномерной сходимости имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \ \forall \xi > B \ \forall y \in Y: \quad \left|\int\limits_\xi^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Интеграл $\int\limits_a^B f(x,y)dx$ – непрерывная функция от y на Y, то есть непрерывна в любой точке $y_0 \in Y$. Тогда для этой точки y_0:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y: \ |y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\int\limits_a^B f(x,y)dx - \int\limits_a^B f(x,y_0)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Рассмотрим модуль разности

$$\left|\Phi(y)-\Phi(y_0)\right| = \left|\int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^\infty f(x,y_0)dx\right| =$$
$$= \left|\int\limits_a^B f(x,y)dx - \int\limits_a^B f(x,y_0)dx + \int\limits_B^\infty f(x,y)dx - \int\limits_B^\infty f(x,y_0)dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_a^B f(x,y)dx - \int\limits_a^B f(x,y_0)dx\right| + \left|\int\limits_B^\infty f(x,y)dx\right| + \left|\int\limits_B^\infty f(x,y_0)dx\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\Phi(y)$ непрерывна в точке $y_0 \in Y$, а так как y_0 – любая точка Y, то $\Phi(y)$ непрерывна на Y. ◀

Пример 8.3.2

$$\lim_{y\to 0+}\int\limits_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^\infty \lim_{y\to 0+} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

8.4 Интегрируемость. Интеграл Дирихле

Теорема 61 (Об изменении порядка интегрирования) *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,\infty)\times[c,d]$ и $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда*

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

▷ Из равномерной сходимости интеграла имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B\ \forall\xi>B, \forall y\in[c,d] \quad \Rightarrow \quad \left|\int\limits_\xi^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Поменяем порядок интегрирования:

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\xi f(x,y)dx = \int\limits_a^\xi dx\int\limits_c^d f(x,y)dy \to \int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^d f(x,y)dy \quad \text{при } \xi\to+\infty.$$

Покажем, что интеграл в левой части сходится к $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$:

$$\left|\int\limits_c^d dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_c^d dy\int\limits_a^\xi f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_c^d dy\int\limits_\xi^\infty f(x,y)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{d-c}\cdot(d-c) = \varepsilon.$$

◀

8.5 Дифференцирование несобственного интеграла по параметру

Теорема 62 (О дифференцировании несобственного интеграла по параметру)
Пусть функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны на $[a,\infty)\times[c,d]$, $\int\limits_a^\infty \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$ и $\int\limits_a^\infty f(x,c)dx$ сходится. Тогда $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится при $y\in[c,d]$, $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ – непрерывно дифференцируемая по y функция и

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^\infty f(x,y)dx=\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

▷ Пусть $y\in[c,d]$. Рассмотрим

$$\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx,\quad t\in[c,y]\quad \text{– сходится равномерно по } t \text{ на } [c,y]\quad\Rightarrow$$

$$\int\limits_c^y dt\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx=\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt=\int\limits_a^\infty \left(f(x,y)-f(x,c)\right)dx=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx-C_0.$$

Так как $\int\limits_a^\infty \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ сходится равномерно по t, то он является непрерывной функцией t $\Rightarrow$

$$\int\limits_c^y dt\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}dx\quad\text{– непрерывно дифференцируемая функция } y \text{ на } [c,d]\quad\Rightarrow$$

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx\quad\text{– непрерывно дифференцируемая функция } y\quad\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^\infty f(x,y)dx=\frac{d}{dy}\int\limits_c^y dt\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx=\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx=\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

◀

Пример 8.5.1 (Интеграл Дирихле)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

▷ Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J(y) = \int\limits_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx, \quad y \in (0, +\infty).$$

Этот интеграл удовлетворяет теореме о дифференцировании интеграла, так как интеграл от производной сходится равномерно по y на $[\delta, +\infty)$ $(\delta > 0)$. Тогда

$$J'(y) = -\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x dx = -\frac{1}{1+y^2},$$

откуда

$$J(y) = C - \operatorname{arctg} y.$$

Чтобы определить константу C, заметим, что

$$|J(y)| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-xy}dx = \frac{1}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0,$$

откуда следует $\lim\limits_{y\to+\infty} J(y) = 0$ и $C = \dfrac{\pi}{2}$.

Нас интересует значение $J(0) = \int\limits_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx$, но подставить в полученное равенство $y = 0$ нельзя. Докажем непрерывность функции $J(y)$ в точке 0 справа. Рассмотрим

$$J(y) - J(0) = \int\limits_0^\infty \left(e^{-xy} - 1\right)\frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^\varepsilon + \int\limits_\varepsilon^\infty$$

Первый интеграл оценим так:

$$\Big|\int\limits_0^\varepsilon \left(e^{-xy} - 1\right)\frac{\sin x}{x}dx\Big| \leqslant \int\limits_0^\varepsilon xy\frac{1}{x}dx = y\varepsilon.$$

Ко второму интегралу применим интегрирование по частям:

$$\int\limits_\varepsilon^\infty \left(e^{-xy} - 1\right)\frac{\sin x}{x}dx = -(1 - e^{-\varepsilon y})\frac{\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int\limits_\varepsilon^\infty \cos x\Big(\frac{1 - e^{-xy}}{x^2} - \frac{y}{x}e^{-xy}\Big)dx.$$

Оценим его модуль:

$$\Big|\int\limits_\varepsilon^\infty \left(e^{-xy} - 1\right)\frac{\sin x}{x}dx\Big| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} + \int\limits_\varepsilon^\infty \Big(\frac{1}{x^2} + \frac{y}{x}e^{-xy}\Big)dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\varepsilon^\infty ye^{-xy}dx < \frac{3}{\varepsilon}.$$

Итого,

$$|J(y) - J(0)| < \varepsilon y + \frac{3}{\varepsilon}.$$

Тогда можно сначала за счет выбора ε сделать сколь угодно малым второе слагаемое (для всех y одновременно), а потом зафиксировав ε, добиться малости первого слагаемого при достаточно малых y. Тем самым доказано, что $J(0) = \lim\limits_{y\to 0+} J(y) = \dfrac{\pi}{2}$.

◀

8.6 Интегралы Эйлера. Гамма функция

Гамма-функцией Эйлера называется интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad x > 0,$$

имеющий две особые точки: 0 и $+\infty$.

Докажем сходимость интеграла. Возьмём $x \in [a, b] \subset (0, +\infty)$.

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt. \qquad (*)$$

При $0 < t < 1$ имеем

$$0 \leqslant t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{x-1} \leqslant t^{a-1} \quad \text{и} \quad \int_0^1 t^{a-1}dt \text{ сходится.}$$

При $t > 1$ имеем

$$0 \leqslant t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{b-1}e^{-t} \leqslant e^{t/2}e^{-t} = e^{-t/2} \quad \text{и} \quad \int_1^\infty e^{-t/2}dt \text{ сходится.}$$

Следовательно, оба интеграла (*) сходятся равномерно по x на любом $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Следовательно, $\Gamma(x)$ существует и непрерывна на $(0, \infty)$.

Свойство 1. $\Gamma(x)$ непрерывна на $(0, +\infty)$. (доказано выше)

Свойство 2. $\Gamma(x)$ выпукла вниз на $(0, +\infty)$.

$\triangleright$ Рассмотрим производную

$$\frac{d}{dx}\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ln t dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt \underset{\text{оба интеграла сходятся равномерно по } x \text{ на } [a,b]}{=} \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln^2 t dt \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma(x) \text{ выпукла вниз.}$$

$\blacktriangleleft$

Свойство 3. Основное соотношение для гамма-функции:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \qquad (x > 0).$$

▷
$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty x t^{x-1} e^{-t} dt = x \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$
◀

Свойство 4. $\Gamma(1) = 1$.

▷ $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t} dt = 1.$ ◀

Свойство 5. $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ при $x \to +0$.

▷ $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \dfrac{\Gamma(1)}{x} = \dfrac{1}{x}$. ◀

Свойство 6. $\Gamma(n+1) = n!$ при $n \in \mathbb{N}$.

▷ ◀

Определим $\Gamma(x)$ при $x < 0$. С помощью соотношения

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

можно определить $\Gamma(x)$ при $x \in (-1, 0)$, т.к. тогда $x + 1 > 0$.

При $x \to -0$ имеем

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{\Gamma(1)}{x} = \frac{1}{x} \quad (\text{при } x \to -0).$$

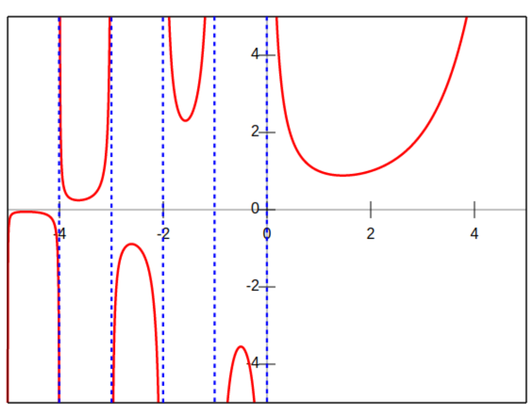
При $x \to -1 + 0$ имеем

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim -\Gamma(x+1) \sim -\frac{1}{x+1} \quad (\text{при } x \to -1+0).$$

При нецелых $x < 0$ гамма-функция определяется из соотношения

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

График гамма-функции $\Gamma(x)$:



8.7 Бета-функция Эйлера

Бета-функция определяется интегралом

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad x>0,\ y>0,$$

с особыми точками 0 и 1.

Докажем сходимость интеграла:

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int\limits_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int\limits_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Первый интеграл сходится при $x>0$, а второй сходится при $y>0$. Следовательно, интеграл для бета-функции сходится при $x>0$, $y>0$.

Свойство 1. $B(x,y) = B(y,x)$.

$\triangleright$ Замена $z = 1-t$:

$$B(x,y) = -\int\limits_1^0 (1-z)^{x-1}z^{y-1}dz = \int\limits_0^1 z^{y-1}(1-z)^{x-1}dz = B(y,x).$$

◀

Свойство 2.

$$B(x,y) = \int\limits_0^\infty \frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}} = \int\limits_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du.$$

$\triangleright$ Обозначим

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}}, \quad I_2 = \int\limits_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du.$$

1) В интеграле I_1 сделаем замену:

$$t = \frac{u}{1+u}, \quad t(0)=0, \quad t(+\infty)=1, \quad u = \frac{t}{1-t}, \quad du = \frac{dt}{(t-1)^2}, \quad 1+u = \frac{1}{1-t}.$$

Тогда

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{t^{x-1}(1-t)^{x+y}dt}{(1-t)^{x-1}(t-1)^2} = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = B(x,y).$$

2) Запишем

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}} + \int\limits_1^\infty \frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}} \qquad (**)$$

и во втором интеграле сделаем замену:

$$v = \frac{1}{u}, \quad u = \frac{1}{v}, \quad du = -\frac{dv}{v^2},$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}} = -\int\limits_1^0 \frac{v^{x+y}dv}{v^{x-1}(1+v)^{x+y}v^2} = \int\limits_0^1 \frac{u^{y-1}du}{(1+u)^{x+y}}$$

и, возвращаясь к (**), получаем

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}} + \int\limits_0^1 \frac{u^{y-1}du}{(1+u)^{x+y}} = \int\limits_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du = I_2.$$

◀

Замечание. Выведем полезную в дальнейшем формулу:

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right).$$

▷ Разложим функцию $f(x) = \cos ax$, $a \notin \mathbb{Z}$, $x \in [-\pi, \pi]$ в тригонометрический ряд Фурье. При периодическом продолжении этой функции на $\mathbb{R}$ получим 2π-периодическую непрерывную чётную функцию. Тогда её ряд Фурье будет содержать только косинусы и будет сходится во всех точках к периодическому продолжению функции $f(x)$.

Вычислим

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Big(\cos(a-n)x + \cos(a+n)x\Big)dx =$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}(-1)^n\Big(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\Big),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos ax dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin a\pi}{a},$$

откуда

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\Big(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\Big)\cos nx,$$

и при $x = 0$ получаем

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\Big(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\Big).$$

◀

Свойство 3.

$$B(x, 1-x) = \int\limits_0^\infty \frac{u^{x-1}du}{1+u} = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad x \in (0,1).$$

▷ По свойству 2 имеем $B(x, 1-x) = \int\limits_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}du$. Воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k u^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k u^k + \sum_{k=n+1}^\infty (-1)^k u^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k u^k + \frac{(-1)^{n+1}u^{n+1}}{1+u},$$

$$B(x,1-x)=\int\limits_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}du=$$
$$=\int\limits_0^1\left((u^{x-1}+u^{-x})\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^k+(u^{x-1}+u^{-x})\cdot\frac{(-1)^{n+1}u^{n+1}}{1+u}\right)du=$$
$$=\int\limits_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{k+x-1}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{k-x}+\frac{(-1)^{n+1}(u^{x-1}+u^{-x})u^{n+1}}{1+u}\right)du=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k u^{k+x}}{k+x}+\frac{(-1)^k u^{k-x+1}}{k-x+1}\right)\Bigg|_0^1+...=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{k+x}+\frac{1}{k-x+1}\right)+(-1)^{n+1}\int\limits_0^1\frac{(u^{x-1}+u^{-x})u^{n+1}}{1+u}du$$

Оценим последний интеграл:

$$0\leqslant\int\limits_0^1\frac{(u^{x-1}+u^{-x})u^{n+1}}{1+u}du\leqslant\int\limits_0^1\left(u^{x+n}+u^{n-x+1}\right)du=$$
$$=\frac{u^{x+n+1}}{x+n+1}\Bigg|_0^1+\frac{u^{n-x+2}}{n-x+2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{x+n+1}+\frac{1}{n-x+2}\to 0 \text{ при } n\to+\infty.$$

Тогда при $n\to+\infty$:

$$B(x,1-x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k+x}+\frac{1}{k-x+1}\right)=$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3-x}-...=$$
$$=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k-x}\right)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

◀

Свойство 4.

$$B(s,t)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

▷ Рассмотрим

$$\Gamma(s)\Gamma(t)=\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx\cdot\int\limits_0^\infty y^{t-1}e^{-y}dy=$$

во втором интеграле сделаем замену $y=u-x$, $dy=du$ и перейдем к повторному интегралу

$$=\int\limits_0^\infty dx\int\limits_x^\infty x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}du=$$

следуя теореме Тонелли, поменяем порядок интегрирования

$$= \int\limits_0^\infty e^{-u} du \int\limits_0^u x^{s-1}(u-x)^{t-1} dx =$$

во внутреннем интеграле сделаем замену $x = uv$, $dx = udv$:

$$= \int\limits_0^\infty e^{-u} du \int\limits_0^1 u^{s-1} v^{s-1} u^{t-1} (1-v)^{t-1} u dv = \int\limits_0^\infty e^{-u} u^{s+t-1} du \cdot \int\limits_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1} dv = \Gamma(s+t) B(s,t).$$

◀

Следствие 1.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad \text{при } x \notin \mathbb{Z}.$$

Следствие 2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Пример. Вычислить с помощью гамма-функции интеграл

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi \cos^{b-1}\varphi d\varphi, \qquad a > 0,\ b > 0.$$

Заменим $x = \sin^2\varphi$, $dx = 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$ и

$$\frac{1}{2}\sin^{a-2}\varphi\cos^{b-2}\varphi dx = \frac{1}{2}x^{(a-2)/2} \cdot (1-x)^{(b-2)/2} dx,$$

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^{a/2-1}(1-x)^{b/2-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

Интересный результат получается при $a = 1+c$, $b = 1-c$, $(|c| < 1)$:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^c \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\cos(\pi c/2)}.$$

8.8 Интегралы Лапласа

Пример 8.8.1 (Интегралы Лапласа)

$$I_1(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|y|},$$

$$I_2(y) = \int\limits_0^\infty \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y \cdot e^{-|y|}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

$\triangleright$ Интеграл $I_1(y)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, так как $\left|\dfrac{\cos xy}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$.

Интеграл $I_2(y)$ сходится равномерно на $[\delta, +\infty)$ $(\delta > 0)$ по признаку Дирихле, так как первообразная (по x) функции $\sin xy$ равна $-\dfrac{\cos xy}{y}$ – ограничена при $y \in [\delta, +\infty)$, а функция $\dfrac{x}{1+x^2}$ монотонно стремится к 0.

Рассмотрим производную

$$\frac{dI_1}{dy} = \int\limits_0^\infty \frac{-x\sin xy}{1+x^2}dx = -I_2(y),$$

так как полученный интеграл сходится равномерно.

Рассмотрим

$$I_2(y) = \int\limits_0^\infty \frac{x^2+1-1}{x(1+x^2)}\sin xy dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{xy}d(xy) - \int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{x(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{x(1+x^2)}dx.$$

Тогда

$$\frac{dI_2}{dy} = -\int\limits_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}dx = -I_1(y).$$

Получаем

$$\frac{d^2I_1}{dy^2} = -\frac{dI_2}{dy} = I_1$$

и получаем дифференциальное уравнение (Линейное однородное ДУ 2-го порядка):

$$I_1'' - I_1 = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$I_1(y) = C_1e^y + C_2e^{-y}.$$

Функция $I_1(y)$ ограничена, так как

$$|I_1(y)| \leqslant \int\limits_0^\infty \frac{|\cos xy|}{1+x^2}dx \leqslant \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

следовательно, $C_1 = 0$.

Получаем $I_1(y) = Ce^{-y}$ при $y \in [\delta, \infty)$. Но I_1 – чётная и непрерывна на $\mathbb{R}$, следовательно,

$$I_1(y) = Ce^{-|y|},$$

и так как $I_1(0) = \pi/2$, то $C = \pi/2$ и, окончательно,

$$I_1(y) = \frac{\pi}{2}e^{-|y|}.$$

Для $I_2(y)$ при $y \in [\delta, \infty)$ имеем

$$I_2(y) = -\frac{dI_1}{dy} = \frac{\pi}{2}e^{-y}.$$

Так как I_2 – нечётная и $I_2(0) = 0$, то окончательно получаем

$$I_2(y) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y \cdot e^{-|y|}.$$

◀

8.9 Интегралы Френеля и Фруллани

Пример 8.9.1 (Интегралы Френеля)

$$J_1 = \int\limits_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad J_2 = \int\limits_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

▷ *Выполним замену $y = x^2$ и добавим "множитель сходимости":*

$$J_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\lim_{k\to+0}\int\limits_0^\infty e^{-ky}\frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy.$$

Полученный интеграл сходится равномерно по k на $[0, +\infty)$ (по признаку Дирихле).

Теперь заменим $t = x\sqrt{y}$ в интеграле Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$:

$$\sqrt{y}\int\limits_0^\infty e^{-x^2 y} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-x^2 y} dx.$$

Подставим в J_1:

$$J_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim_{k\to+0}\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty e^{-ky}e^{-x^2 y}\sin y dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{k\to+0}\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\infty e^{-ky}e^{-x^2 y}\sin y dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{k\to+0}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+(x^2+k)^2} =$$

интеграл сходится равномерно по k

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Второй интеграл вычисляется аналогично. ◀

Теорема 63 (интегралы Фруллани) *Пусть*

$$I(a, b) = \int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad a, b > 0.$$

Тогда

1. *Если* $f \in C[0,+\infty)$ *и* $\exists\ f(+\infty)$, *то* $I(a,b) = (f(0) - f(+\infty))\ln\dfrac{b}{a}$;

2. *Если* $f \in C[0,+\infty)$ *и* $\displaystyle\int\limits_A^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ *сходится, то* $I(a,b) = f(0)\ln\dfrac{b}{a}$;

3. *Если* $f \in C(0,+\infty)$, $\displaystyle\int\limits_0^A \frac{f(x)}{x}dx$ *сходится и* $\exists\ f(+\infty)$, *то* $I(a,b) = -f(+\infty)\ln\dfrac{b}{a}$.

$\triangleright$ Для $0 < \delta_1 < \delta_2 < +\infty$ рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(ax)}{x}dx - \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(bx)}{x}dx =$$

замена $t = ax$ и $t = bx$

$$= \int\limits_{a\delta_1}^{a\delta_2} \frac{f(t)}{t}dt - \int\limits_{b\delta_1}^{b\delta_2} \frac{f(t)}{t}dt = \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(t)}{t}dt - \int\limits_{a\delta_2}^{b\delta_2} \frac{f(t)}{t}dt =$$

по теореме Лагранжа найдутся $\xi_1 \in (a\delta_1, a\delta_2)$ и $\xi_2 \in (b\delta_1, b\delta_2)$:

$$= f(\xi_1)\int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{dt}{t} - f(\xi_2)\int\limits_{a\delta_2}^{b\delta_2} \frac{dt}{t} = \Big(f(\xi_1) - f(\xi_2)\Big)\ln\frac{b}{a}.$$

Для доказательства п.1 перейдем в полученном равенстве к пределам при $\delta_1 \to 0+$ и $\delta_2 \to +\infty$.

Для п.2 запишем аналогичное равенство при $\delta_2 = +\infty$, а для п.3 – при $\delta_1 = 0$. $\blacktriangleleft$

9 Пространства L^p

9.1 Основные определения

Напомним, на пространстве функций (определенных на X) была введена равномерная норма:

$$\|f-g\| = \sup_X |f-g|.$$

Ясно, что $\|f_n - f\| \to 0$ тогда и только тогда, когда $f_n \rightrightarrows f$. Если функции определены на пространстве с мерой, то удобно рассматривать модификацию равномерной нормы, которая определяется с помощью понятия истинного супремума.

Существенным (истинным) супремумом функции $f \in L(X,\mu)$ будем называть

$$\operatorname*{ess\,sup}_X f = \inf\{C:\ f \leqslant C \text{ почти всюду на } X\}.$$

Таким образом, отклонение функций f и g на измеримом пространстве можно определить как $\operatorname{ess}\sup\limits_X |f-g|$.

Везде далее $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – пространство с мерой. $L^0(X,\mu)$ – множество измеримых почти везде конечных на X функций. Далее все функции будем брать из этого множества.

Зафиксируем число $1 \leqslant p < +\infty$ и положим

$$L^p(X,\mu) = \Big\{ f \in L^0(X,\mu) : \int\limits_X |f|^p d\mu < +\infty \Big\}$$

– семейство функций, суммируемых со степенью p. Отдельно определим

$$L^\infty(X,\mu) = \Big\{ f \in L^0(X,\mu) : \operatorname{ess}\sup\limits_X |f| < +\infty \Big\}.$$

Для единообразия будем считать $L(X,\mu) = L^1(X,\mu)$ – множество суммируемых на X функций.

Пример 9.1.1

$$\frac{1}{x+1} \notin L^1(\mathbb{R}_+, \lambda), \quad \frac{1}{x+1} \in L^2(\mathbb{R}_+, \lambda).$$

Свойства L^p:

1. L^p – линейное пространство.
2. Если $\mu X < +\infty$ и $1 \leqslant r < p \leqslant +\infty$, то $L^p(X,\mu) \subset L^r(X,\mu)$.

$\triangleright$ 1. Так как

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p \leqslant (2\max\{|f|,|g|\})^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

то множество $L^p(X,\mu)$ вместе с функциями f, g содержит и их сумму, а следовательно, и их линейную комбинацию.

2. При $p = +\infty$ утверждение очевидно. Пусть $1 \leqslant p < +\infty$. Положим

$$s = \frac{p}{r}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$$

и применим неравенство Гельдера с показателем s к функциям $|f|^r$ и 1, где $f \in L^p(X\mu)$:

$$\int\limits_X |f|^r d\mu \leqslant \Big(\int\limits_X |f|^{rs} d\mu\Big)^{r/p} (\mu(X))^{1/s'} = \Big(\int\limits_X |f|^p d\mu\Big)^{r/p} (\mu(X))^{1/s'} < +\infty,$$

откуда следует $f \in L^r(X,\mu)$. $\blacktriangleleft$

Таким образом, в случае конечной меры X множества $L^p(X,\mu)$ уменьшаются с ростом p. В частности, $L^1(X,\mu)$ – наибольшее из них, а $L^\infty(X,\mu)$ – наименьшее.

Далее в пространстве $L^p(X,\mu)$ введем норму, а точнее, полунорму. Она не является нормой в строгом смысле, так как может принимать нулевые значения на ненулевых элементах. Для преодоления этого неудобства, все функции разбивают на классы эквивалентности по отношению $f = g$ почти всюду на X.

Определение 32 (L^p-норма) *Для $f \in L^p(X,\mu)$ и $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ определим*

$$\|f\|_p = \begin{cases} \Big(\int\limits_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p}, & 1 \leqslant p < +\infty; \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_X |f|, & p = +\infty. \end{cases}$$

Если $\mu(X) = 1$, то L^p-норма растет с ростом p. Кроме того, можно доказать, что для $f \in L^\infty(X,\mu)$ при $p \to +\infty$ $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$, что дополнительно обосновывает обозначение $\|f\|_\infty$.

Приведем основные свойства L^p-нормы:

1. $\|f\|_p \geqslant 0$, причем $\|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$ почти всюду на X.
2. $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$;
3. $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$; (неравенство Минковского при $p < +\infty$)
4. $\Big|\|f\|_p - \|g\|_p\Big| \leqslant \|f-g\|_p$.

Определение 33 (Сходимость по L^p-норме и сходимость в среднем) *Пусть $f_n, f \in L^p$. Будем говорить, что последовательность f_n сходится по L^p-норме к функции f (или сходится в L^p), если $\|f_n - f\|_p \to 0$. При этом сходимость по L^1-норме называют сходимостью в среднем.*

Свойства сходимости по L^p-норме:

1. Если $f_n \xrightarrow{L^p} f$ и $f_n \xrightarrow{L^p} g$, то $f = g$ почти всюду.
2. Если $\|f_n - f\|_p \to 0$, то $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. (L^p-норма непрерывна относительно сходимости.)

Теорема 64 (Критерий сходимости по L^p-норме) *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$ и $f_n \in L^p(X,\mu)$.*

1. *Если $\|f_n - f\|_p \to 0$, то $f_n \xrightarrow{\mu} f$;*
2. *Если $f_n \xrightarrow{\mu \text{ или п.в.}} f$ и $|f_n| \leqslant g \in L^p(X,\mu)$ почти всюду на X, то $f \in L^p(X,\mu)$ и $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

$\triangleright$ 1. Для $\varepsilon > 0$ положим $X_n(\varepsilon) = X\Big(|f_n - f| \geqslant \varepsilon\Big)$. Тогда применим неравенство Чебышёва:

$$\mu(X_n(\varepsilon)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p}\Big(\|f_n - f\|_p\Big)^p \to 0,$$

что и означает сходимость по мере.

2. Из $|f_n| \leqslant g$ следует $|f| \leqslant g$ и $\Big(\|f_n - f\|_p\Big)^p \leqslant (2g)^p \in L^1(X,\mu)$. Поэтому по теореме Лебега

$$\Big(\|f_n - f\|_p\Big)^p = \int\limits_X |f_n - f|^p d\mu \to 0.$$

◀

Замечание 20 *Сходимость по L^∞-норме равносильна равномерной сходимости на множестве $X \setminus E$, где $\mu(E) = 0$.*

Определение 34 (Фундаментальная последовательность) *Последовательность $f_n \subset L^p(X,\mu)$ называется фундаментальной (или сходящейся в себе) в $L^p(X,\mu)$, если $\|f_{n+k} - f_n\|_p \to 0$ при $n \to \infty$, то есть*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geqslant n_0 \; \forall k \in \mathbb{N} : \quad \|f_{n+k} - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, так как если $\|f_n - f\|_p \to 0$, то

$$\|f_{n+k} - f_n\|_p \leqslant \|f_{n+k} - f\|_p + \|f_n - f\|_p \to 0.$$

Обратное утверждение тоже верно, то есть, всякая фундаментальная последовательность в $L^p(X\mu)$ сходится по L^p-норме. Это свойство называется полнотой пространства L^p.

Теорема 65 (Полнота L^p) *Пространство $L^p(X,\mu)$ полное.*

$\triangleright$ 1) Пусть $p = +\infty$ и f_n фундаментальна в L^∞:

$$\operatorname*{ess\,sup}_X |f_{n+k} - f_n| \to 0,$$

что означает (по критерию Коши) равномерную сходимость f_n на множестве $X \setminus E$, $\mu(E) = 0$, то есть сходимость по L^∞-норме.

2) Пусть $p < +\infty$. Покажем сначала, что фундаментальная последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся почти везде. Выделим подпоследовательность f_{n_j} следующим образом:

$$\forall j \in \mathbb{N} \; \exists n_j \in \mathbb{N} : \; \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \frac{1}{2^j}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leqslant 1.$$

Докажем, что f_{n_j} сходится почти везде. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|.$$

Пусть S и S_k – его сумма и частичная сумма. По неравенству треугольника

$$\|S_k\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leqslant 1$$

и поэтому при всех k

$$\int\limits_X S_k^p d\mu \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_X S^p d\mu \leqslant 1$$

(по теореме Фату), т.е. S^p суммируема и тогда $S(x)$ конечна почти везде, то есть рассматриваемый ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|$ сходится почти всюду на X.

Рассмотрим теперь ряд

$$f_{n_1}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{n_{j+1}}-f_{n_j}\right)$$

– он сходится почти везде, а его частичными суммами являются f_{n_k}. Следовательно, f_{n_k} сходятся почти везде к некоторой функции f.

Докажем теперь, что f есть предел f_n по L^p-норме. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению сходимости в себе найдем такое n_0, что при $n, n_k \geqslant n_0$

$$\int\limits_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ и воспользуемся теоремой Фату:

$$\int\limits_X |f_n - f|^p d\mu \leqslant \varepsilon^p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0.$$

◀

9.2 Ортогональность в L^2

В этом параграфе рассматриваем только пространство $L^2(X,\mu)$, вообще говоря комплексное. Для простоты норму будем обозначать без индекса: $\|\cdot\|$.

Норма в пространстве $L^2(X,\mu)$ обладает важной особенностью – как и норма в $\mathbb{R}^n$ она порождается скалярным произведением.

Скалярное произведение функций $f, g \in L^2(X,\mu)$ определяется равенством

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_X f\bar{g}d\mu,$$

где черта означает комплексное сопряжение (для вещественнозначных функций черту можно опустить).

Заметим, что произведение $f\bar{g}$ суммируемо, так как $2|f\bar{g}| \leqslant |f|^2 + |g|^2$.

Замечание 21 *Таким образом определенное скалярное произведение удовлетворяет трем аксиомам скалярного произведения, а именно:*

1. $\langle f, f\rangle = \|f\|^2 \geqslant 0$, $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
2. $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$;
3. $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$.

Отметим еще несколько свойств скалярного произведения:

1. $|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ (неравенство Шварца)

2. Если $f_n \to f$, $g_n \to g$, то $\langle f_n, g_n\rangle \to \langle f, g\rangle$ (непрерывность относительно сходимости по норме)

3. $\langle\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n, g\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle f_n, g\rangle$.

4. $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\Big(\|f\|^2 + \|g\|^2\Big)$. (тождество параллелограмма)

▷ 1. Следует из неравенства Коши–Буняковского, которое является частным случаем неравенства Гельдера:

$$\Big|\int\limits_X f\bar{g}d\mu\Big|^2 \leqslant \int\limits_X |f|^2 d\mu \cdot \int\limits_X |g|^2 d\mu.$$

2.

$$\Big|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle\Big| \leqslant \Big|\langle f_n - f, g_n\rangle\Big| + \Big|\langle f, g_n - g\rangle\Big| \leqslant \|f_n - f\| \cdot \|g_n\| + \|f\| \cdot \|g_n - g\| \to 0.$$

3. Перейдем к пределу в равенстве

$$\langle\sum_{n=1}^{k} f_n, g\rangle = \sum_{n=1}^{k}\langle f_n, g\rangle.$$

4.

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle + \langle f-g, f-g\rangle = \\ &= \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle + \langle f,f\rangle - \langle f,g\rangle - \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle = 2\Big(\|f\|^2 + \|g\|^2\Big).\end{aligned}$$

◀

Наличие скалярного произведения позволяет ввести понятие угла между элементами пространства. Выделим частный случай – ортогональность.

Определение 35 (Ортогональность) *Функции $f, g \in L^2(X, \mu)$ называются ортогональными, если $\langle f, g\rangle = 0$.*

Заметим, что если $\langle f, g\rangle = 0$, то и $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle} = 0$, так что отношение ортогональности симметрично. Будем обозначать его $f \perp g$.

Лемма 14 (теорема Пифагора)

$$f \perp g \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2,$$

$$f_i : f_i \perp f_j (i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|^2.$$

▷ Для двух функций очевидно. Далее предельным переходом от конечной суммы. ◀

Благодаря скалярному произведению любое n-мерное подпространство L, содержащееся в $L^2(X,\mu)$, изоморфно как евклидово пространство пространству $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Поэтому мы можем говорить об ортогональном проектировании функции f на подпространство L. В частности, проекция f на одномерное подпространство, порожденное ортом e, есть $\langle f, e\rangle e$.

Определение 36 (Ортогональная система) *Семейство функций $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется ортогональной системой, если $\|e_\alpha\| \neq 0$ и $e_\alpha \perp e_\beta$ ($\alpha \neq \beta$). Ортогональная система $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется ортонормированной, если $\|e_\alpha\| = 1$.*

Из теоремы Пифагора следует линейная независимость функций, входящих в ортогональную систему. Любую ортогональную систему можно сделать ортонормированной, разделив входящие в нее функции на их нормы.

9.3 Ряды Фурье в L^2

Пусть функции $e_1, ..., e_n$ образуют ортогональную систему и $L = \mathrm{Span}(e_1, ..., e_n)$ – ее линейная оболочка, т.е. множество всевозможных линейных комбинаций. Зададимся вопросом: как наилучшим образом приблизить данную функцию f элементами множества L?

Теорема 66 (Экстремальное свойство коэффициентов Фурье) *Минимум нормы $\left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|$ достигается тогда и только тогда, когда $a_k = c_k(f)$, где*

$$c_k(f) = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\|e_k\|^2}, \quad k = 1, ..., n.$$

При этом функция $f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k$ ортогональна любому элементу множества L.

▷ Докажем сначала второе утверждение. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k$ и $L \ni g = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$. Докажем, что $f - S_n \perp g$. Для этого достаточно доказать, что $f - S_n \perp e_m$ для любого $m = 1, ..., n$. Это действительно так, поскольку

$$\langle f - S_n, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle - \langle S_n, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\langle e_k, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle - c_m(f)\|e_m\|^2 = 0.$$

Теперь экстремальное свойство суммы S_n следует из теоремы Пифагора. А именно, $S_n - g \in L$ и тогда $(f - S_n) \perp (S_n - g)$, поэтому

$$\|f-g\|^2 = \|(f-S_n)+(S_n-g)\|^2 = \|f-S_n\|^2 + \|S_n-g\|^2 = \|f-S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k(f)|^2\|e_k\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2 \geqslant \left\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)e_k\right\|^2,$$

и равенство возможно если и только если $a_k = c_k(f)$. ◀

Определение 37 (Коэффициенты Фурье и ряд Фурье) *Пусть* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– ортогональная система,* $f \in L^2(X,\mu)$*. Числа* $c_n(f)$*, вычисляемые по формуле*

$$c_n(f) = \frac{\langle f, e_n\rangle}{\|e_n\|^2}$$

называются коэффициентами Фурье, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(f)e_k$ *– рядом Фурье функции* f *относительно системы* $\{e_n\}$*.*

В случае ортонормированной системы формулы для коэффициентов Фурье упрощаются: $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$. Если исходная ортогональная система $\{e_n\}$ не нормирована, то можно перейти к нормированной: $\tilde{e}_n = \dfrac{e_n}{\|e_n\|}$. При этом коэффициенты Фурье могут измениться, но члены ряда Фурье не изменяются, так как

$$c_n(f)e_n = \left\langle f, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\rangle \frac{e_n}{\|e_n\|} = \langle f, \tilde{e}_n\rangle \tilde{e}_n.$$

Слагаемые ряда Фурье суть проекции f на прямые, порождаемые элементами ортогональной системы.

Следствие 67 (Неравенство Бесселя) *Справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2\|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

$\triangleright$ Для конечной ортогональной системы неравенство следует из равенства

$$\|f-g\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k(f)|^2\|e_k\|^2,$$

при $g = 0$. Для бесконечного – из предельного перехода. $\blacktriangleleft$

Заметим, что неравенство Бесселя превращается в равенство, если $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(f)e_k$, то есть если f является суммой своего ряда Фурье.

Возникают вопросы: при каких условиях ряд Фурье сходится и какова его сумма в случае сходимости? Следующая теорема отвечает на вопрос о сходимости ряда. Предварительно обозначим Лемму.

Лемма 15 (О сходимости ряда по ортогональной системе) *Пусть* $\{e_n\}$ *– ортогональная система. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \text{ – сходится} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\|e_n\|^2 \text{ – сходится.}$$

$\triangleright$ Обозначим частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|e_k\|^2$. При любых $n, p \in \mathbb{N}$

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \|e_k\|^2 = T_{n+p} - T_n.$$

Отсюда следует, что частичные суммы рассматриваемых рядов фундаментальны одновременно. Из полноты L^2 следует утверждение леммы. $\blacktriangleleft$

Замечание 22 *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ *сходится, то он является рядом Фурье своей суммы. Это следует из возможности скалярно умножать сходящийся ряд почленно. Пусть* S *– сумма ряда, тогда*

$$\langle S, e_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle e_n, e_m \rangle = a_m \|e_m\|^2,$$

то есть $a_m = c_m(S)$ *– коэффициенты Фурье.*

Теорема 68 (Рисса–Фишера) *Пусть* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– ортогональная система,* $f \in L^2(X, \mu)$. *Тогда ряд Фурье* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n$ *сходится и*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n + h, \quad \text{где } h \perp e_n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\triangleright$ По неравенству Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|f\|^2 < +\infty,$$

и по лемме ряд Фурье сходится. Пусть S – его сумма. Тогда по замечанию выше, $c_n(S) = c_n(f)$, откуда следует, что все коэффициенты Фурье разности $h = f - S$ равны нулю, то есть $h \perp e_n$. $\blacktriangleleft$

Очевидно, сумма ряда Фурье функции f может не совпадать с f.

Определение 38 (Базис) *Ортогональная система* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *называется базисом, если для* $\forall f \in L^2(X, \mu)$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n \text{ почти везде на } X.$$

Если $\{e_n\}$ – базис, то скалярное произведение двух функций можно вычислить с помощью их коэффициентов Фурье:

$$\langle f, g \rangle = \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n, g \Big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \langle e_n, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)} \|e_n\|^2.$$

Это равенство называют равенством Парсеваля.

Определение 39 (Полнота) *Семейство функций* $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A} \in L^2(X,\mu)$ *называется полным, если для любой* $f \in L^2(X,\mu)$ *выполнено условие*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists g = \sum_{k=1}^{n} a_n e_n :\ \|f - g\| < \varepsilon,$$

то есть множество всевозможных линейных комбинаций всюду плотно.

Пример 9.3.1 *Система* $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ *полна в* $C[a,b]$. *Это утверждается в теореме Вейерштрасса–Стоуна: любую непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить многочленами.*

Теорема 69 (Характеристика базиса) *Пусть* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – *ортогональная система. Следующие утверждения равносильны:*

1. *система* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – *базис;*
2. $\forall f \in L^2(X,\mu)$ *справедливо равенство Парсеваля:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|e_n\|^2 = \|f\|^2$;
3. *система* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *полна.*

▷ Будем доказывать $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$ выполнено по теореме Пифагора.

$2 \Rightarrow 3$ для $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_k(f) e_n$ из сходимости ряда следует

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall n \geqslant n_0\ \ \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f) e_k \right\| < \varepsilon.$$

$3 \Rightarrow 1$ Пусть $f \in L^2(X,\mu)$. Предположим, что f не раскладывается по системе $\{e_n\}$. По теореме Рисса–Фишера

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n + h, \quad h \perp e_n., \quad h \neq 0.$$

Для $\varepsilon < \|h\|$ из полноты системы следует существование n: $\left\| f - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k(f) e_k \right\| < \varepsilon$, но тогда

$$\varepsilon^2 > \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f) e_k \right\|^2 = \left\| h + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(f) e_k \right\| \geqslant \|h\|^2,$$

что противоречит выбору ε. ◀

Пример 9.3.2 (Тригонометрическая система)
Система $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *полна в* $L^2((-\pi,\pi),\lambda)$.

9.4 Преобразование Фурье

В этом разделе будем рассматривать функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, то есть суммируемые на $\mathbb{R}$ функции.

Определение 40 (Преобразование Фурье) *Преобразованием Фурье функции f называется*

$$F[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Заметим, что для функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ преобразование Фурье $F[f]$ существует, так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-i\xi x}| dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \|f\|_1 < +\infty.$$

Лемма 16 (О сходимости преобразований Фурье) *Пусть последовательность f_n сходится по L^1-норме. Тогда последовательность преобразований Фурье $F[f_n]$ сходится равномерно.*

▷ Утверждение Леммы следует из критерия Коши и неравенства

$$|F[f_n] - F[f_m]| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_n - f_m| dx.$$

◀

Сверткой функций $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ называется

$$(f * g)(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t) dt.$$

Свойства преобразования Фурье:

1. Линейность: $F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g]$;
2. Ограниченность: $\sup |F[f]| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$;
3. Непрерывность: $F[f] \in C(\mathbb{R})$;
4. $F[f](\xi) \longrightarrow 0$ при $\xi \to \pm\infty$;
5. Если $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, то $F[f'](\xi) = i\xi F[f]$;
6. Если $f, xf \in L^1(\mathbb{R})$, то $F'[f] = -iF[xf(x)]$;
7. $F[f * g] = \sqrt{2\pi} \cdot F[f] \cdot F[g]$.

$\triangleright$ 1,2) Линейность и ограниченность очевидны.

3,4) Докажем непрерывность и стремление к 0.

Если $f = \chi_{[a,b]}$, то

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi}, \ \xi \neq 0; \quad F(0) = b - a.$$

Эта функция непрерывна и $F \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$.

Далее, для любой простой функции в силу линейности, непрерывность и стремление к 0 выполнены. Наконец, простые функции всюду плотны в $L^2(\mathbb{R})$, то есть для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ существует последовательность простых функций $f_n \to f$. Тогда $F[f_n] \rightrightarrows F[f]$, и $F[f] \in C(\mathbb{R})$ и $\to 0$ при $\xi \to \pm\infty$.

5) $F[f'] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi F[f].$

6) $F'[f] = -\dfrac{i}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-i\xi x} dx = -iF[xf(x)].$

7) $F[f * g](\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) e^{-i\xi x} dx =$

во внутреннем интеграле сделаем замену $y = x - t$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-i\xi y} dy = \sqrt{2\pi} F[f] \cdot F[g].$ $\blacktriangleleft$

Зададимся вопросом, можно ли восстановить функцию по ее преобразованию Фурье? Оказывается, в некоторых случаях верна формула (формула обращения):

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[f](\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

интеграл в правой части называют интегралом Фурье функции f, а отображение $\xi \mapsto \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} g(x) e^{i\xi x} dx$ – обратным преобразованием Фурье функции g.

Заметим, что сходимость интеграла (в смысле главного значения) Фурье не очевидна, так как $F[f]$ может не принадлежать $L^1(\mathbb{R})$.

Напомним условия Гельдера, сформулированные ранее для изучения сходимости ряда Фурье.

Определение 41 (Условия Гёльдера) *Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и такие числа $\delta > 0$, $\alpha \in (0,1]$ и $C > 0$, что для всех $u \in (0, \delta)$ выполнены неравенства*

$$\Big| f(x_0 + u) - f(x_0 + 0) \Big| \leqslant Cu^\alpha, \quad \Big| f(x_0 - u) - f(x_0 - 0) \Big| \leqslant Cu^\alpha.$$

Теорема 70 (О сходимости интеграла Фурье) *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$ и в точке x_0 удовлетворяет условиям Гёльдера. Тогда интеграл Фурье сходится к* $\frac{1}{2}\Big(f(x_0-0)+f(x_0+0)\Big)$.

$\triangleright$ 1) Пусть $F(\xi)$ – преобразование Фурье функции f. Нас интересует предел при $A \to +\infty$ следующего интеграла:

$$S_A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} F(\xi) e^{ix_0\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{A} e^{ix_0\xi} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt =$$

воспользуемся теоремой Фубини и поменяем порядок интегрирования

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int\limits_{-A}^{A} e^{i(x_0-t)\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin(A(x_0-t))}{x_0-t} dt =$$

сделаем замену $u = t - x_0$, разобьем на сумму интегралов по $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$, и в первом заменим u на $-u$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x_0-u)+f(x_0+u)}{u} \sin(Au) du = \int\limits_{0}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty}.$$

Заметим, что так как при $u > \delta$: $\left|\dfrac{f(x_0 \pm u)}{u}\right| < \dfrac{1}{\delta}|f(x_0 \pm u)|$, то по лемме Римана $\int\limits_{\delta}^{+\infty} \dfrac{f(x_0-u)+f(x_0+u)}{u} \sin(Au) du \to 0$ при $A \to +\infty$. То есть $\lim\limits_{A\to\infty} S_A$ равен первому интегралу $\int\limits_{0}^{\delta}$.

2) Рассмотрим интеграл Дирихле и сведем его к интегралу по промежутку $(0, \delta)$:

$$\frac{\pi}{2} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin(Ax)}{x} dx = \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin(Ax)}{x} dx + \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\sin(Ax)}{x} dx = \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin(Ax)}{x} dx + \int\limits_{A\delta}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Последний интеграл $\to 0$ при $A \to +\infty$.

3) Теперь рассмотрим разность и воспользуемся п.2:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} \frac{f(x_0-u)+f(x_0+u)}{u} \sin(Au) du - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} \frac{f(x_0-u)+f(x_0+u)-f(x_0-0)-f(x_0+0)}{u} \sin(Au) du + o(1) \to 0, \quad A \to +\infty.$$

Последнее утверждение верно по лемме Римана, так как

$$\left|\frac{f(x_0-u)+f(x_0+u)-f(x_0-0)-f(x_0+0)}{u}\right| \leqslant \frac{2C}{u^{1-\alpha}} \in L^1(0, \delta).$$

Итого, мы доказали, что $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(S_A - \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\right) \to 0$, что и требовалось. ◀

Замечание 23 *Для вещественнозначной функции f интеграл Фурье можно переписать в виде*

$$f(x) \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(a(\xi)\cos(\xi x) + b(\xi)\sin(\xi x)\Big) d\xi,$$

где

$$a(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(t\xi)dt, \quad b(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(t\xi)dt.$$

9.5 Преобразование Лапласа

Автор этого раздела – Константин Тер-Матевосян.

Определение

Вспомним определение преобразования Фурье суммируемой на $\mathbb{R}$ функции f:

$$\mathcal{F}_0[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \mathcal{F}_0^{-1}[\hat{f}](x) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

Одно из условий существования преобразования Фурье: $f(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$. Хочется работать со всякими разными аналитическими функциями, не обязательно стремящимися к нулю на бесконечностях. Решение: домножить $f(\xi)$ на какую-то другую, сильно уменьшающуюся функцию. $e^{-\sigma\xi}$. Итого: $\varphi(t) = f(t) \cdot e^{-\sigma t}$.

Будем рассматривать для такого случая только $t > 0$. Для обеспечения свойства стремления к 0 в **обе** стороны можно домножить на гауссиан: $e^{-\sigma t^2}$. В рамках этого раздела (и вообще в рамках преобразования Лапласа) будем рассматривать положительные аргументы.

В итоге:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f(t) \cdot e^{-\sigma t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Установим следующее ограничение: $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$. То есть будем утверждать, что рассматриваемые функции не является произвольно плохо себя ведущими, и как минимум ограничены какой-то экспоненциальной функцией. Также, выберем $\sigma > \alpha$. Это просто математически будет гарантировать стремление к 0.

Итак, теперь возьмем преобразование Фурье от функции $\varphi(t)$ следующее:

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}_0[\varphi](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-i\xi t}dt = \int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\xi t}dt.$$

И теперь обратное:

$$\varphi(t) = f(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathcal{F}_0^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi](\xi) e^{it\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} \int\limits_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-\sigma\tau} e^{-i\xi\tau} d\tau d\xi.$$

Домножим на $e^{\sigma t}$:

$$f(t) = e^{\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} \int\limits_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-\sigma\tau} e^{-i\xi\tau} d\tau d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\xi)t} \int\limits_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-(\sigma+i\xi)\tau} d\tau d\xi.$$

Возьмём $s(\xi) = \sigma + i\xi$. Тогда $ds = id\xi$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \int\limits_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau ds.$$

Определение 42 *Преобразованием Лапласа функции $f(t) \in L^0(\mathbb{R})$ такой, что $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$, называется функция*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Определение 43 *Обратным преобразованием Лапласа функции $F(s)$ называется функция*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Свойства преобразования Лапласа

Поскольку преобразование Лапласа эквивалентно преобразованию Фурье от функции, домноженную на экспоненту, свойства преобразования Фурье сохраняются и в преобразовании Лапласа. Например, линейность:

Свойство 1. $\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha\mathcal{L}\{f\} + \beta\mathcal{L}\{g\}$.

Определение 44 *Обрезанной сверткой двух функций f и g, определенных на $[0, \infty)$, называется*

$$(f * g)(t) = \int\limits_{0}^{t} f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Если функции f и g доопределить нулём на отрицательной полуоси, тогда определение обрезанной свертки формально станет эквивалентна определению обычной.

Свойство 2. Преобразование Лапласа обрезанной свертки функций равно произведению преобразований Лапласа каждой функции.

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}.$$

▷

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt = \int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt = \int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)dtd\tau =$$

(замена: $\nu(t) = t - \tau$, $d\nu = dt$)

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(\nu+\tau)}f(\tau)g(\nu)d\nu d\tau = \left(\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)\left(\int_0^\infty g(\nu)e^{-s\nu}d\nu\right) = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}.$$

◀

Пример 9.5.1

$$1 \longmapsto \frac{1}{s}.$$

▷ $1 \longmapsto \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}.$ ◀

Пример 9.5.2

$$t^n f(t) \longmapsto (-1)^n F^{(n)}(s).$$

▷ Индукция по n.

1. $n = 0$: $t^0 f(t) = f(t) \longmapsto F^{(0)}(s) = F(s)$.
2. пусть для $n = k$ выполняется; проверим для $n = k + 1$:

$$t^{k+1}f(t) \longmapsto \int_0^\infty t^{k+1}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty t^k f(t)te^{-st}dt = -\int_0^\infty t^k f(t)\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}dt =$$

$$= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty t^k f(t)e^{-st}dt = -\frac{d}{ds}(-1)^k F^{(k)}(s) = (-1)^{k+1}F^{(k+1)}(s).$$

◀

Пример 9.5.3

$$t^n \longmapsto \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Пример 9.5.4

$$e^{at}f(t) \longmapsto F(s-a).$$

Пример 9.5.5

$$\sin(at) \longmapsto \frac{a}{s^2+a^2},$$
$$\cos(at) \longmapsto \frac{s}{s^2+a^2}.$$

Пример 9.5.6

$$\sinh(at) \longmapsto \frac{a}{s^2-a^2},$$
$$\cosh(at) \longmapsto \frac{s}{s^2-a^2}.$$

Пример 9.5.7

$$f^{(n)}(t) \longmapsto s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0).$$

$\triangleright$ Индукция по n.

1. $n=0$: $f^{(0)}(t) = f(t) \longmapsto s^0 F(s) = F(s)$.
2. пусть для $n=k$ выполняется; проверим для $n=k+1$:

$$f^{(k+1)}(t) \longmapsto \int\limits_0^{\infty} f^{(k+1)}(t)e^{-st}dt = f^{(k)}(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s\int\limits_0^{\infty} f^{(k)}(t)e^{-st}dt =$$

Пусть для k-той производной f всё ещё выполняется ограничение экспонентой

$$= -f^{(k)}(0) + s\left(s^k F(s) - \sum_{i=1}^{k} s^{k-i} f^{(i-1)}(0)\right) = s^{k+1}F(s) - \sum_{i=1}^{k} s^{k+1-i} f^{(i-1)}(0) - f^{(k)}(0) =$$
$$= s^{k+1}F(s) - \sum_{i=1}^{k+1} s^{k+1-i} f^{(i-1)}(0).$$

$\blacktriangleleft$

Это означает, что преобразование Лапласа переводит дифференциальные уравнения с задачей Коши в точке 0 в алгебраическое. Таким образом, преобразование Лапласа является удобным инструментом для решения, например, линейных дифференциальных уравнений: применив преобразование Лапласа с обоих сторон уравнения получается алгебраическое выражение, в котором можно изолировать (которое можно выразить через) $F(s)$, и далее, если удастся как элементарную функцию, найти $\mathcal{L}^{-1}\left\{F\right\}(t)$ – решение дифференциального уравнения с установленной задачей Коши в точке 0.

10 О теоремах Барроу и Ньютона–Лейбница

В этом разделе будем говорить о функциях на $\mathbb{R}$ с заданной мерой Лебега. Рассмотрим класс монотонных функций и зададимся вопросом их дифференцируемости. Следствием этого получается свойство дифференцируемости почти везде интеграла Лебега. Также зададимся вопросом о справедливости формулы Ньютона-Лейбница для интеграла Лебега.

Заметим, что если $f \geqslant 0$ и суммируема, то функция

$$\Phi(x) = \int\limits_{[a,x]} f d\lambda$$

возрастает (нестрого). Далее нас будут интересовать свойства этой функции. Опишем тогда свойства монотонных функций.

10.1 Монотонные функции

Напомним известные нам свойства монотонных функций:

1. Монотонная на $[a, b]$ функция измерима и ограничена, а значит, и суммируема на $[a, b]$.

2. Монотонная функция может иметь разрывы только первого рода (конечные), причем не более чем счетное количество.

Далее нас будет интересовать, что можно сказать о производной монотонной функции. Оказывается, монотонная функция почти всюду дифференцируема. Для доказательства соответствующей теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные определения.

Как известно, производной функции f в точке x_0 является предел при $\Delta x \to 0$ отношения

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Этот предел, вообще говоря, может и не существовать, но всегда имеют смысл (в $\bar{\mathbb{R}}$) следующие четыре величины (производные числа Дини):

$$D^- = \overline{\lim}_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \qquad D^+ = \overline{\lim}_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$D_- = \underline{\lim}_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \qquad D_+ = \underline{\lim}_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Здесь индекс $\pm$ соответствует пределу слева/справа, а положение индекса (верх/низ) соответствует верхнему/нижнему пределу.

Всегда выполнено

$$D_- \leqslant D^-, \qquad D_+ \leqslant D^+.$$

В случае равенства $D_- = D^-$ или $D_+ = D^+$ существует производная слева или справа, соответственно. Равенство $D_- = D^- = D_+ = D^+ \in \mathbb{R}$ равносильно существованию конечной производной.

Лемма 17 (Структура открытого множества на прямой) *Открытое множество в $\mathbb{R}$ представимо в виде не более чем счетного дизъюнктного объединения интервалов (в т.ч. открытых лучей).*

$\triangleright$ Пусть $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}$ – открыто. Зададим отношение эквивалентности для точек из G:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \beta): \ x, y \in (\alpha, \beta) \subset G.$$

Множество G распадается на непересекающиеся классы эквивалентности. Рассмотрим один класс эквивалентности I – это интервал (a, b), где $a = \inf I$, $b = \sup I$. Система таких интервалов не более чем счетна, так как каждый интервал содержит рациональную точку. $\blacktriangleleft$

Определение 45 (Невидимая точка) *Пусть $g \in C[a, b]$. Точка $x_0 \in [a, b]$ называется невидимой справа, если существует ξ: $x_0 < \xi \leqslant b$ такая, что $g(x_0) < g(\xi)$.*

Лемма 18 (Лемма Рисса) *Пусть $g \in C[a, b]$. Тогда множество ее точек, невидимых справа, открыто в $[a, b]$. Это множество представляется в виде не более чем счетного дизъюнктного объединения интервалов (a_k, b_k) (и, возможно, полуинтервала $[a, b_0)$). И для каждого интервала выполнено неравенство*

$$g(a_k) \leqslant g(b_k).$$

$\triangleright$ Пусть x_0 – невидимая справа. Тогда в силу непрерывности g невидимы справа будут точки некоторой окрестности $U(x_0)$, то есть множество невидимых справа точек открыто в $[a, b]$. Пусть (a_k, b_k) – один из составляющих его интервалов.

Предположим, что $g(a_k) > g(b_k)$. Тогда найдется $x_0 \in (a_k, b_k)$, что $g(x_0) > g(b_k)$. Пусть $x^* = \max\{x \in (a_k, b_k) : g(x) = g(x_0)\}$.

Так как $x^* \in (a_k, b_k)$, то существует $\xi > x^*$, что $g(\xi) > g(x^*)$. Из непрерывности g следует $\xi > b_k$, что означает, что b_k невидима справа, что противоречит определению интервала (a_k, b_k). $\blacktriangleleft$

Замечание 24 *Аналогично, можно определить точку $x_0 \in [a, b]$, невидимую слева:*

$$\exists \xi : \ a \leqslant \xi < x_0, \ g(\xi) < g(x_0).$$

Лемма Рисса утверждает, что множество точек, невидимых слева, открыто в $[a, b]$. Следовательно, представимо счетным дизъюнктным объединением интервалов (и, возможно, $(a_0, b]$), и $g(a_k) \geqslant g(b_k)$.

Замечание 25 *Если функция g имеет разрывы только первого рода на $[a, b]$, то точку x_0 будем называть невидимой справа, если*

$$\exists \ x_0 < \xi \leqslant b : \quad \max\{g(x_0 - 0), g(x_0), g(x_0 + 0)\} < g(\xi).$$

В этом случае лемма Рисса также выполнена.

Лемма 19 (Признак множества меры нуль) *Пусть измеримое множество $A \subset [a, b]$ и для любого интервала $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ выполнено $\lambda(A \cap (\alpha, \beta)) \leqslant c(\beta - \alpha)$, где $c \in (0, 1)$. Тогда $\lambda A = 0$.*

$\triangleright$ Для любого $\varepsilon > 0$ найдем открытое множество $G = \bigsqcup\limits_k (a_k, b_k)$, что $A \subset G$ и

$$\lambda G = \sum_k (b_k - a_k) < \lambda A + \varepsilon.$$

Положим $t_k = \lambda(A \cap (a_k, b_k))$. Тогда

$$\lambda A = \sum_k t_k \leqslant c \sum_k (b_k - a_k) < c(\lambda A + \varepsilon),$$

откуда получаем

$$(1 - c)\lambda A < c\varepsilon,$$

и отсюда следует, что $\lambda A = 0$. ◀

Теорема 71 (Дифференцируемость монотонной функции) *Монотонная на $[a, b]$ функция имеет почти всюду на $[a, b]$ конечную производную.*

$\triangleright$ I. Докажем теорему сначала для непрерывной возрастающей функции f на $[a, b]$.

1) Докажем, что почти всюду выполнено $D^+ < +\infty$.

Пусть $E = \{x : \ D^+ = +\infty\}$ и $x_0 \in E$. Тогда для любого $C > 0$ найдется ξ: $x_0 < \xi \leqslant b$:

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > C,$$

или

$$f(\xi) - C\xi > f(x_0) - Cx_0,$$

что означает, что точка x_0 невидима справа для функции $g(x) = f(x) - Cx$ на $[a, b]$. По лемме Рисса, $E = \bigsqcup\limits_k (a_k, b_k)$ и выполнено

$$f(a_k) - Ca_k \leqslant f(b_k) - Cb_k,$$

или

$$C(b_k - a_k) \leqslant f(b_k) - f(a_k).$$

Просуммируем эти неравенства по всем k и поделим на C:

$$\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \frac{1}{C} \sum_k \Big(f(b_k) - f(a_k) \Big) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{C}.$$

Выбирая C сколь угодно большое, покрываем множество E системой интервалов сколь угодно маленькой суммарной длины. Следовательно, $\lambda E = 0$.

2) Докажем, что почти всюду выполнено $D_- \geqslant D^+$.

Будем действовать аналогично п.1. Пусть числа $0 < c_1 < c_2 \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим множество

$$E_{c1,c2} = \{x \in [a, b] : D_- < c_1 < c_2 < D^+\}.$$

Тогда достаточно доказать, что $\lambda E_{c1,c2} = 0$, так как счетное объединение множеств вида $E_{c1,c2}$ дает множество E точек, в которых $D_- < D^+$.

Пусть произвольный интервал $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$. Пусть для $x_0 \in (\alpha, \beta)$ выполнено $D_- < c_1$. Тогда

$$\exists\, \xi < x_0 : \quad \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} < c_1,$$

или

$$f(\xi) - c_1\xi > f(x_0) - c_1 x_0.$$

Поэтому, x_0 невидима слева для функции $g(x) = f(x) - c_1 x$. По лемме Рисса, множество таких точек имеет вид $\bigsqcup\limits_k (a_k, b_k)$ и

$$f(a_k) - c_1 a_k \geqslant f(b_k) - c_1 b_k,$$

или

$$f(b_k) - f(a_k) \leqslant c_1(b_k - a_k).$$

Теперь на каждом интервале (a_k, b_k) рассмотрим множество $G_k : \{x \in (a_k, b_k) : D^+ > c_2\}$. Аналогично, по лемме Рисса, $G_k = \bigsqcup\limits_j (\alpha_{kj}, \beta_{kj})$ и

$$\beta_{kj} - \alpha_{kj} \leqslant \frac{f(\beta_{kj}) - f(\alpha_{kj})}{c_2}.$$

Просуммируем полученные неравенства:

$$\sum_{k,j} \Big(\beta_{kj} - \alpha_{kj}\Big) \leqslant \frac{1}{c_2} \sum_k \Big(f(b_k) - f(a_k)\Big) \leqslant \frac{c_1}{c_2}\Big(b - a\Big).$$

Таким образом,

$$\lambda\Big(E_{c1,c2} \cap (\alpha, \beta)\Big) \leqslant \frac{c_1}{c_2}(\beta - \alpha),$$

откуда по Лемме (признак множества меры нуль), следует $\lambda E_{c1,c2} = 0$.

Тогда $\lambda\{x : D_- < D^+\} = \lambda \bigcup\limits_{c1,c2 \in \mathbb{Q}} E_{c1,c2} = 0$, и неравенство $D_- \geqslant D^+$ выполнено почти всюду на $[a, b]$.

3) Покажем, что из п.1 и 2 следует утверждение теоремы. Введем функцию $\tilde{f} = -f(-x)$ и ее производные числа $\tilde{D}_\pm$ и $\tilde{D}^\pm$. В соответствующих точках верны равенства

$$\tilde{D}^+ = D^-, \quad \tilde{D}_- = D_+.$$

Применим неравенство п.2 к $\tilde{f}$:

$$D^- = \tilde{D}^+ \leqslant \tilde{D}_- = D_+.$$

Воспользуемся свойствами производных чисел и соединим полученные неравенства в цепочку

$$D^+ \leqslant D_- \leqslant D^- \leqslant D_+ \leqslant D^+ \qquad \text{почти всюду на } [a, b],$$

откуда получаем, что все четыре производных числа равны и конечны почти всюду на $[a, b]$. Дифференцируемость почти всюду доказана.

II. Если функция f имеет разрывы первого рода (не более счетного количества), то доказательство проводится аналогично, используя обобщение леммы Рисса для разрывной функции и тот факт, что множество точек разрыва имеет меры нуль. ◀

10.2 Теорема Барроу для интеграла Лебега

Теорема 72 (Теорема Барроу для интеграла Лебега) *Для любой $f \in L[a,b]$ почти всюду выполнено равенство*

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{[a,x]} f d\lambda = f(x).$$

$\triangleright$ Достаточно доказать утверждение теоремы для $f \geqslant 0$, иначе представим $f = f^+ - f^-$.

Пусть $f \geqslant 0$. Обозначим

$$\Phi(x) = \int\limits_{[a,x]} f d\lambda.$$

Функция Φ возрастает на $[a,b]$. Тогда почти всюду существует Φ'.

Докажем сначала, что почти всюду $\Phi' \leqslant f$.

Обозначим

$$E_{\alpha\beta} = \{x \in [a,b] : f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x)\}.$$

Для $\varepsilon > 0$ по свойству абсолютной непрерывности интеграла найдется $\delta > 0$, что если $\lambda E < \delta$, то

$$\Big|\int\limits_{E} f d\lambda\Big| < \varepsilon.$$

Выберем теперь открытое множество G так, что

$$E_{\alpha\beta} \subset G \subset [a,b], \quad \lambda G < \lambda E + \delta.$$

Для $x_0 \in E_{\alpha\beta}$ найдется $\xi > x_0$, что

$$\frac{\Phi(\xi) - \Phi(x_0)}{\xi - x_0} > \beta,$$

или

$$\Phi(\xi) - \beta\xi < \Phi(x_0) - \beta x_0.$$

Поэтому x_0 невидима справа для функции $\Phi(x) - \beta x$ на любом из составляющих интервалов множества G. Используя лемму Рисса, найдем открытое множество $S = \bigsqcup\limits_k (a_k, b_k)$, что $E_{\alpha\beta} \subset S \subset G$ и

$$\Phi(a_k) - \beta a_k \leqslant \Phi(b_k) - \beta b_k,$$

или

$$\Phi(b_k) - \Phi(a_k) \geqslant \beta(b_k - a_k).$$

Суммируя по всем k, получим

$$\int\limits_S f d\lambda = \sum_k \int\limits_{a_k}^{b_k} f d\lambda \geqslant \beta \cdot \lambda S.$$

В то же время,

$$\int\limits_S f d\lambda = \int\limits_{E_{\alpha\beta}} f d\lambda + \int\limits_{S\setminus E_{\alpha\beta}} f d\lambda < \alpha\lambda(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon \leqslant \alpha\lambda S + \varepsilon + |\alpha|\delta.$$

Сравнивая два полученных неравенства, получаем

$$\lambda S \leqslant \frac{\varepsilon + |\alpha|\delta}{\beta - \alpha}.$$

То есть, $E_{\alpha\beta}$ можно заключить в открытое множество S сколь угодно малой меры. Это означает, что $\lambda E_{\alpha\beta} = 0$ и $\Phi' \leqslant f$ почти всюду.

Теперь, заменив f на $-f$, получим $-\Phi' \leqslant -f$, откуда следует равенство $f = \Phi'$ почти всюду. ◀

10.3 Функции ограниченной вариации

Будем рассматривать функции $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}$. Пусть $T = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$. Для разбиения T введем вариационную сумму

$$V_T(f) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Определение 46 (Вариация) *Вариацией функции f по отрезку $[a, b]$ называется*

$$V_a^b(f) := \sup_T V_T(f).$$

Если $V_a^b(f) < +\infty$, то функция f называется функцией ограниченной вариации (или функцией с ограниченным изменением).

Множество функций, вариация которых на отрезке $[a, b]$ конечна, будем называть пространством функций ограниченной вариации и обозначать $V[a, b]$. Оказывается, это пространство линейное.

Заметим, что вариация функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ совпадает с определением длины пути в $\mathbb{R}$.

Лемма 20 (Линейность пространства $V[a, b]$) *Если $f_1, f_2 \in V[a, b]$, то $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in V[a, b]$.*

▷ Пусть $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ и $V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$.

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \alpha_1 |f_1(x_k) - f_1(x_{k-1})| + \alpha_2 |f_2(x_k) - f_2(x_{k-1})|,$$

откуда

$$V_T(f) \leqslant \alpha_1 V_T(f_1) + \alpha_2 V_T(f_2),$$

что и дает требуемое. ◀

Лемма 21 (Вариация монотонной функции) *Если f монотонна на $[a, b]$, то*

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$

$\triangleright$ Пусть f возрастает. Тогда $V_T(f) = \sum\limits_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a)$. $\blacktriangleleft$

Теорема 73 (Аддитивность вариации) *Пусть $f \in V[a,b]$ и $c \in (a,b)$. Тогда $f \in V[a,c] \cap V[c,b]$, причем*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

$\triangleright$ Вариация аддитивна как длина пути. $\blacktriangleleft$

Теорема 74 (О представлении разностью возрастающих функций) *$f \in V[a,b]$ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде разности двух возрастающих функций.*

$\triangleright$ Необходимость. Возьмем

$$f_1(x) = V_a^x(f), \quad f_2(x) = V_a^x(f) - f(x).$$

Возрастание f_1 следует из теоремы об аддитивности. Проверим монотонность f_2. Пусть $x \geqslant y$:

$$f_2(x) - f_2(y) = V_y^x(f) - (f(x) - f(y)) \geqslant 0,$$

так как $|f(x) - f(y)| \leqslant V_y^x(f)$ по определению вариации.

Достаточность следует из того, что монотонная функция имеет ограниченную вариацию и линейности $V[a,b]$. $\blacktriangleleft$

Свойства функций ограниченной вариации:

1. Монотонность вариации: $[c,d] \subset [a,b] \quad \Rightarrow \quad V_c^d(f) \leqslant V_a^b(f)$.
2. Ограниченность ФОВ: $f \in V[a,b] \quad \Rightarrow \quad f$ – ограничена на $[a,b]$.
3. Арифметические операции с ФОВ: Если $f, g \in V[a,b]$, то
$$fg, |f| \in V[a,b]; \qquad |g| \geqslant C > 0 \ \Rightarrow \ \frac{f}{g} \in V[a,b].$$
4. Интегрируемость по Риману ФОВ: $V[a,b] \subset R[a,b]$.
5. ФОВ может иметь не более чем счетное число точек разрыва, причем только конечные (т.е. устранимые или 1-го рода).
6. Если $f \in V[a,b]$, то существует f' почти везде на $[a,b]$.
7. Если $f \in C^1[a,b]$, то $V_a^b(f) = \int\limits_a^b |f'|dx$.
8. Можно определить пространство функций ограниченной вариации:
$\{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(a) = 0,\ \|f\| = V_a^b(f)\}$.

10.4 Абсолютно-непрерывные функции

Определение 47 (AC) *Функция $f : \bar{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной на $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой счетной системы непересекающихся интервалов $(a_i, b_i) \subset [a,b]$ таких, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$$

выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

При этом будем писать $f \in AC[a,b]$.

Замечание 26 *В определении можно брать только конечные системы интервалов.*

Пример 10.4.1 const $\in AC(\mathbb{R})$, $x \in AC(\mathbb{R})$.

Пример 10.4.2 $\operatorname{sign} x \notin AC[-1,1]$, *функция Кантора* $\notin AC[0,1]$, *а также*

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \notin AC[0,1].$$

Свойства абсолютно-непрерывных функций

1. Если $f \in AC[a,b]$, то f равномерно непрерывна на $[a,b]$;
2. $AC[a,b] \subset C[a,b]$;
3. $AC[a,b] \subset V[a,b]$;
4. $f \in AC[a,b] \;\Rightarrow\; |f| \in AC[a,b]$; (обратное неверно)
5. $f, g \in AC[a,b] \;\Rightarrow\; \alpha f + \beta g,\; fg,\; f/g \in AC[a,b]$ $(g \neq 0)$.

Пример 10.4.3 (Функция Кантора) *Пусть $\varphi(x)$ – канторова лестница на $[0,1]$. Тогда про нее известно следующее:*

1. $\varphi \in C[0,1] \cap V[0,1]$*;*

2. $\varphi \notin AC[0,1]$*;*

3. $\varphi' = 0$ *почти всюду на* $[0,1]$.

Функцию, обладающую свойствами 1–3 называют ***сингулярной***.

Теорема 75 (Абсолютная непрерывность интеграла с переменным верхним пределом) *Пусть $f \in L[a,b]$ и $F(x) = \int\limits_{[a,x]} f d\lambda$. Тогда $F \in AC[a,b]$.*

▷ Пусть $\bigsqcup\limits_k (a_k, b_k) \subset [a, b]$. Тогда

$$\sum_k |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_k \Big| \int\limits_{[a_k,b_k]} f \Big| \leqslant \sum_k \int\limits_{[a_k,b_k]} |f| = \int\limits_{\bigcup_k (a_k,b_k)} |f|$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла, последнее выражение стремится к нулю, когда суммарная длина интервалов стремится к нулю. ◀

10.5 Формула Ньютона–Лейбница для интеграла Лебега

Теорема 76 (Неравенство для теоремы Ньютона–Лейбница) *Пусть f монотонно возрастает. Тогда f' суммируема и*

$$\int\limits_{[a,b]} f' d\lambda \leqslant f(b) - f(a).$$

▷ По определению производной, $f'(x)$ есть предел при $h \to 0$ функций

$$\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Чтобы выражение $f(x+h)$ имело смысл при любом $x \in [a, b]$ и любом h, будем считать $f(x) = f(b)$ при $x > b$ и $f(x) = f(a)$ при $x < a$.

Из монотонности f следует ее суммируемость, а значит и суммируемость каждой φ_h. Проинтегрируем

$$\int\limits_{[a,b]} \varphi_h d\lambda = \frac{1}{h} \int\limits_{[a,b]} f(x+h) d\lambda - \frac{1}{h} \int\limits_{[a,b]} f(x) d\lambda = \frac{1}{h} \int\limits_{[b,b+h]} f(x) d\lambda - \frac{1}{h} \int\limits_{[a,a+h]} f(x) d\lambda \leqslant f(b) - f(a).$$

Так как $\lim\limits_{h\to 0} \varphi_h = f'$ почти везде, то по теореме Фату интеграл от f' существует и

$$\int\limits_{[a,b]} f' d\lambda \leqslant f(b) - f(a).$$

◀

Лемма 22 (Достаточное условие постоянства функции) *Пусть $f \in AC[a, b]$, f – монотонна и $f' = 0$ почти всюду. Тогда $f = \mathrm{const}$.*

▷ Так как f монотонна (возрастает) и непрерывна, то ее множество значений есть отрезок $[f(a), f(b)]$. Покажем, что длина этого отрезка равна нулю. Пусть

$$E = \{x \in [a, b] : f'(x) = 0\}, \quad Z = [a, b] \setminus E.$$

По определению абсолютно-непрерывной функции, по $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$, что

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Так как $\lambda Z = 0$, то Z можно покрыть такой системой интервалов (длиной $< \delta$). Тогда $\lambda(f(Z)) = 0$.

Пусть теперь $x_0 \in E$. Так как $f'(x_0) = 0$, то в окрестности $U(x_0)$ выполнено

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon.$$

При $x > x_0$ имеем

$$f(x) - \varepsilon x < f(x_0) - \varepsilon x_0,$$

то есть точка x_0 невидима слева для функции $f(x) - \varepsilon x$. Тогда по лемме Рисса, E можно покрыть не более чем счетной системой интервалов: $E \subset \bigsqcup\limits_k (a_k, b_k)$, и

$$f(b_k) - f(a_k) \leqslant \varepsilon(b_k - a_k) \quad \Rightarrow \quad \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Аналогично для $x < x_0$. Откуда $\lambda(f(E)) = 0$.

Получаем, $\lambda[f(a), f(b)] = \lambda(f(E)) + \lambda(f(Z)) = 0$, следовательно, $f = \text{const}$. ◀

Теорема 77 (Формула Ньютона–Лейбница) *Пусть $f \in AC[a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_{[a,b]} f' d\lambda = f(b) - f(a).$$

▷ Достаточно доказать теорему для случая возрастающей f. Пусть

$$\Phi(x) = f(x) - \int\limits_{[a,x]} f' d\lambda.$$

$\Phi(x)$ возрастает, так как при $x_1 < x_2$ имеем (по теореме о неравенстве в формуле Ньютона–Лейбница)

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = f(x_2) - f(x_1) - \int\limits_{[x_1,x_2]} f' d\lambda \geqslant 0.$$

Кроме того, $\Phi \in AC[a, b]$ и $\Phi' = 0$ почти всюду. В силу Леммы, $\Phi(x) = \text{const} = \Phi(a) = f(a)$. ◀

Следствие 78 *Функцию $f \in AC[a, b]$ можно восстановить, зная ее производную:*

$$f(x) = f(a) + \int\limits_{[a,x]} f' d\lambda.$$

Если значение в точке неизвестно, то с точностью до константы.