*Так как*
$$\ln(1+3x) \sim 3x,$$
*то*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} + \operatorname{tg} 3x \cdot e^{5x} - 1}{\ln(1+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x + o(x)}{3x} = 1.$$

## 8.11 Контрольные вопросы и задачи

1. Сформулируйте геометрическую интерпретацию понятия непрерывной функции.

2. Покажите, что если $f \in C(E_i)$, $i = 1, 2$, то не всегда $f \in C(E_1 \cup E_2)$.

3. Пусть $f : [0,1] \to [0,1]$ и $f \in C[0,1]$. Покажите, что существует точка $x$ такая, что $f(x) = x$.

4. Докажите, что любой многочлен непрерывен на множестве вещественных чисел.

5. Докажите все пункты леммы 8.9.2.

6. Поясните геометрически замену на эквивалентную.

# 9 ПРОИЗВОДНАЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

## 9.1 Производная и дифференциал

**Определение 9.1.1** *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0$ – предельная точка для $E$. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x_0$, если*

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad x_0 + \Delta x \in E, \quad \Delta x \to 0.$$

**Определение 9.1.2** *Величины $\Delta x$ и $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют приращением аргумента и приращением функции, соответствующим приращению аргумента, соответственно.*

**Определение 9.1.3** *Выражение $A(x_0)\Delta x$ называется дифференциалом функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0$ и обозначается $df$, то есть $df(x_0, \Delta x) = A(x_0)\Delta x$.*

Как следует из определения, для функции $f(x) = x$ выполняется $x_0 + \Delta x - x_0 = 1 \cdot \Delta x$, тем самым $dx = \Delta x$ и можно переписать $df(x_0) = A(x_0)dx$.

**Определение 9.1.4** *Говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема на множестве $E$, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.*

**Замечание 9.1.1** *Если функция $f(x)$ дифференцируема на множестве $E$, то на этом множестве возникает функция $df(x, \Delta x) = A(x)\,\Delta x = A(x)dx$.*

**Определение 9.1.5** *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

*если он существует, называется производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0)$.*

**Пример 9.1.1** *Вычислить производную функции $f(x) = 5^{1-3x}$.*

$$\left(5^{1-3x}\right)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5^{1-3(x_0+\Delta x)} - 5^{1-3x_0}}{\Delta x} =$$

$$= 5^{1-3x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5^{-3\Delta x} - 1}{\Delta x} = 5^{1-3x_0}(-3 \ln 5).$$

**Замечание 9.1.2** *Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке множества $E$, то на множестве $E$ возникает функция $f'(x)$, равная значению производной функции $f$.*

Далее установлена связь между понятиями дифференциала и производной.

**Теорема 9.1.1** *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке производную, причем $A(x_0) = f'(x_0)$.*

**Доказательство.**
Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, значит

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad x_0 + \Delta x \in E, \quad \Delta x \to 0.$$

Поделив на $\Delta x$, получается

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0) + o(1).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получается, что правая часть стремится к $A(x_0)$, значит

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0),$$

то есть, согласно определению, $f'(x_0) = A(x_0)$.
Достаточность. Согласно теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$
откуда
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$
то есть функция дифференцируема в точке $x_0$. $\square$
Ниже установлена связь между дифференцируемостью и непрерывностью

**Лемма 9.1.1 (О связи дифференцируемости и непрерывности)** *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то она непрерывна в точке $x_0$.*

**Доказательство.** В представлении

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

достаточно перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

откуда
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

$\square$

**Замечание 9.1.3** *Обратное, вообще говоря, неверно. Пусть $y = |x|$ и $x_0 = 0$. Непрерывность очевидна, нужно проверить дифференцируемость. Пусть $\Delta x > 0$, тогда*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

*При $\Delta x < 0$ получается, что*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

*а значит функция не дифференцируема.*

**Определение 9.1.6** *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

*если он существует, называется правосторонней производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0+0)$.*
*Аналогично, предел*

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

*если он существует, называется левосторонней производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначается $f'(x_0-0)$.*

## 9.2 Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная

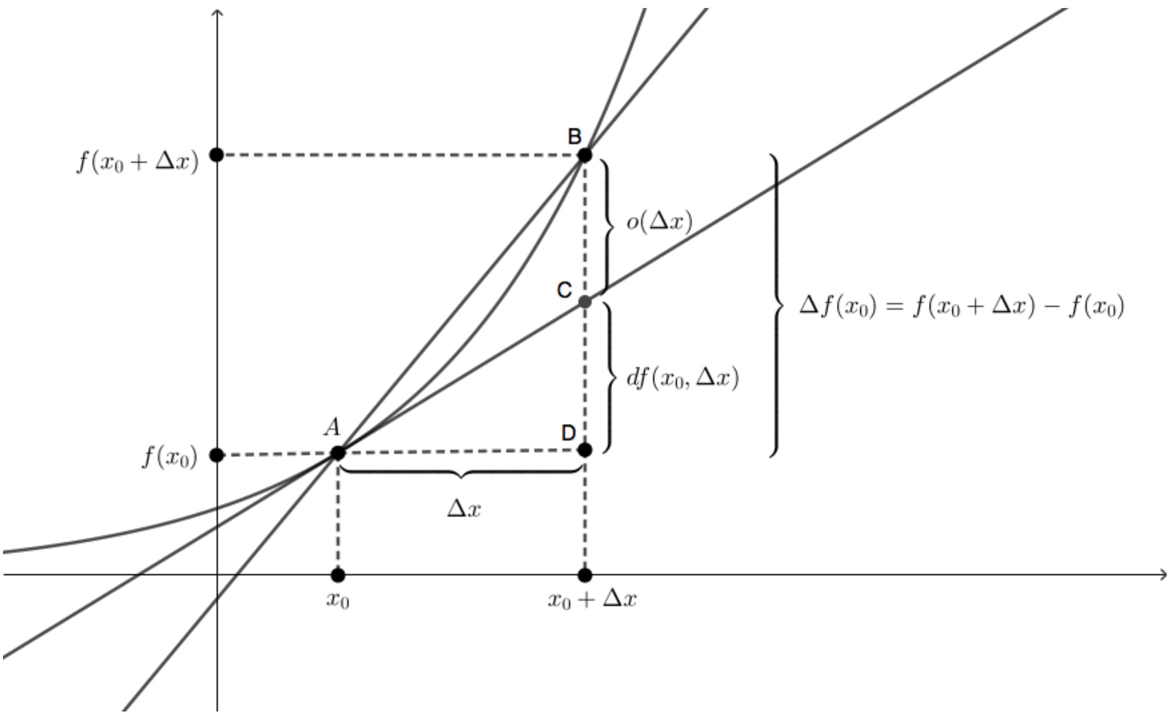


*Рис. 16 Касательная и дифференциал*

Обратимся к рисунку 16. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема, а значит и непрерывна в точке $x_0$. Секущая $AB$ проходит через точки графика функции $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ (при этом $\Delta x \geq 0$, но может быть и отрицательным). Устремляя $\Delta x\to 0$, точка $B$, лежащая на графике функции, будет двигаться к точке $A$, а секущая $AB$ будет стремится занять предельное положение $AC$. Угловой коэффициент секущей $AB$ равен

$$k_{AB}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\mathrm{tg}(BAD).$$

В силу непрерывности функции $\mathrm{tg}(x)$ и дифференцируемости функции $f(x)$ в точке $x_0$,

$$k_{AC}=\lim_{\Delta x\to 0}k_{AB}=f'(x_0)=\mathrm{tg}(CAD).$$

**Определение 9.2.1** *Предельное положение $AC$ секущей $AB$ графика функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$.*

**Лемма 9.2.1** *Уравнение касательной имеет вид*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Доказательство.** Угловой коэффициент, согласно сказанному выше, равен $k_{AC} = f'(x_0)$. Осталось воспользоваться уравнением прямой, использующим точку и коэффициент наклона. □

**Замечание 9.2.1** *Рисунок 16 показывает связь приращения функции, производной этой функции, дифференциала и $o(\Delta x)$. Можно сформулировать следующий геометрический смысл дифференциала: дифференциал есть приращение касательной, когда аргумент принимает приращение $\Delta x$.*

## 9.3 Основные правила дифференцирования

**Теорема 9.3.1** *Пусть $f(x), g(x) : E \to \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке $x_0$, тогда их сумма дифференцируема в точке $x_0$ и*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

*их произведение дифференцируемо в точке $x_0$ и*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

*их частное дифференцируемо в точке $x_0$ при условии, что $g(x_0) \neq 0$ и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**Доказательство.** Согласно определению,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = g'(x_0),$$

Первый пункт. Так как

$$\Delta(f + g)(x_0) = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + g(x_0 + \Delta x) - g(x_0),$$

то

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f+g)(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)+g'(x_0).$$

Второй пункт.

$$\Delta(fg)(x_0) = f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$

$$f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0),$$

Тогда

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(fg)(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}.$$

Первый предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} g(x_0+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = g(x_0)f'(x_0),$$

где $\lim\limits_{\Delta\to 0} g(x_0+\Delta x) = g(x_0)$ в силу непрерывности функции $g(x)$ в точке $x_0$, которая следует из ее дифференцируемости, согласно лемме 9.1.1. Второй предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)g'(x_0).$$

Тем самым,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Третий пункт предлагается доказать самостоятельно. □

Из связи производной и дифференциала сразу вытекает следующая теорема.

**Теорема 9.3.2** *В условиях предыдущей теоремы*

1. $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$;
2. $d(fg)(x_0) = f(x_0)dg(x_0) + g(x_0)df(x_0)$;

*3.* $d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$, *при* $g(x_0) \neq 0$.

**Доказательство.** Докажите эту теорему самостоятельно. $\square$

**Теорема 9.3.3 (О производной сложной функции)** *Пусть* $f(x) : E_1 \to E_2$, $g(y) : E_2 \to \mathbb{R}$, $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ *и пусть* $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x_0$, *а* $g(y)$ *дифференцируема в точке* $y_0$, *где* $y_0 = f(x_0)$. *Тогда функция* $g(f(x))$ *дифференцируема в точке* $x_0$ *и* $(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$

**Доказательство.** Так как $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad x_0 + \Delta x \in E_1, \quad \Delta x \to 0.$$

Так как $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0$, то

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + o(\Delta y), \quad y_0 + \Delta y \in E_2, \quad \Delta y \to 0,$$

где в представлении $o(\Delta y) = \Delta y \cdot \alpha(\Delta y)$ можно считать, что $\alpha(0) = 0$. Положив $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - y_0$ можно заметить, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, а значит и непрерывна. Тогда

$$g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)\cdot(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) + o(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) =$$

$$g'(y_0) \cdot (f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) =$$
$$g'(y_0) \cdot f'(x_0)\Delta x + g'(y_0) \cdot o(\Delta x) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)).$$

Легко убедиться (сделайте это), что

$$g'(y_0) \cdot o(\Delta x) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = o(\Delta x),$$

а значит $g(f(x))$ дифференцируема в точке $x_0$ и $(g(f))'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$. $\square$

**Теорема 9.3.4 (О производной обратной функции)** *Пусть функции* $f(x) : E_1 \to E_2$ *и* $f^{-1}(y) : E_2 \to E_1$ *– взаимно обратные, причем* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0$, *а* $f^{-1}(y)$ *непрерывна в точке* $y_0 = f(x_0)$. *Если* $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x_0$ *и* $f'(x_0) \neq 0$, *то и* $f^{-1}(y)$ *дифференцируема в точке* $y_0$, *причем*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Доказательство.** Необходимо вычислить

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Достаточно положить $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$ и обратной функции $f^{-1}(y)$ в точке $y_0$, выполнено $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0$. Кроме того, так как функции взаимно обратны, то $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$. Тогда

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

## 9.4 Таблица производных простейших функций

Ниже приведена таблица производных простейших функций

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(c)' = 0.$ | $\forall x \in \mathbb{R}.$ |
| 2. | $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$ | $\alpha \in \mathbb{R},\ x > 0, \alpha \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$ |
| 3. | $(\sin x)' = \cos x.$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ |
| 4. | $(\cos x)' = -\sin x.$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ |
| 5. | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$ | $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ |
| 6. | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$ | $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \pi k$ |
| 7. | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ | $\forall x \in (-1, 1)$ |
| 8. | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ | $\forall x \in (-1, 1)$ |
| 9. | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ |
| 10. | $(\operatorname{arcctg})' = -\frac{1}{1+x^2}.$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ |
| 11. | $(\log_a \lvert x\rvert)' = \frac{1}{x \ln a}.$ | $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$ |
| 12. | $(\ln \lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}.$ | $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$ |
| 13. | $(a^x)' = a^x \ln a.$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| 14. | $(e^x)' = e^x.$ | $x \in \mathbb{R}$ |

**Доказательство.**

1. Покажем, что производная функции $f(x) = c$, где $c$ – некоторая константа, равна нулю. Действительно, так как

$$\Delta f(x_0) = c - c = 0,$$

то

$$(c)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 0.$$

Так как $x_0$ – произвольное число, то

$$(c)' = 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Покажем, что $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \in \mathbb{R},\ x > 0$. Так как
$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha = x_0^\alpha \left( \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^\alpha - 1 \right),$$
то
$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^\alpha \left( \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^\alpha - 1 \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha x_0^{\alpha-1} \Delta x}{\Delta x} = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$
В силу произвольности $x_0$ получаем требуемое.

3. Покажем, что $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Так как
$$\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2},$$
то
$$(\sin x)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \cdot \frac{\frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x_0.$$

4. Аналогично п. 3.

5. Покажем, что $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. По формуле производной частного и только что доказанным формулам производной функции $\sin x$ и $\cos x$, имеем
$$(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \, (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6. Аналогично предыдущему доказывается, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi k$.

7. Покажем, что $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1, 1)$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции. Обратная функция $x = \sin y, y \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Все условия теоремы выполнены, а значит
$$(\arcsin x)'(x_0) = \frac{1}{(\sin y)'(y_0)} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

8. Аналогично п. 7.

9. Аналогично п. 7.

10. Аналогично п. 7.

11. Покажем, что $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$. Пусть $x_0 > 0$, тогда так как

$$\Delta f(x_0) = \log_a (x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \log_a \left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0}\right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right),$$

то

$$(\log_a |x|)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x_0 \ln a \Delta x} = \frac{1}{x_0 \ln a}.$$

Аналогично рассматривается случай $x_0 < 0$.

12. Покажем, что $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$. Из предыдущего пункта, при $a = e$, получим
$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

13. Покажем, что $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции. Обратная функция $x = \log_a y$, $y > 0$. Все условия теоремы выполнены, а значит
$$(a^x)'(x_0) = \frac{1}{(\log_a y)'(y_0)} = \frac{1}{\frac{1}{y_0 \ln a}} = y_0 \ln a = a^{x_0} \ln a.$$

14. Покажем, что $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Из предыдущего пункта при $a = e$, получим
$$(e^x)'(x_0) = e^{x_0} \ln e = e^{x_0}.$$

□

## 9.5 Дифференцирование функций, заданных параметрически

**Теорема 9.5.1** *Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в окрестности $U(t_0)$, причем функция $x = x(t)$ имеет в этой окрестности обратную функцию $t = t(x)$. Допустим, что $x'(t_0) \neq 0$. Тогда сложная функция $y = y(t(x))$ дифференцируема по переменной $x$ в точке $x_0 = x(t_0)$, причем*

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

**Доказательство.** По правилу дифференцирования сложной функции получим, что в точке $x_0$ выполняется равенство $(y(t(x)))'_x = y'_t \cdot t'_x$. По теореме о производной обратной функции $t'_x = \frac{1}{x'_t}$, а следовательно

$$(y(t(x)))' = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$\square$

## 9.6 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши

**Определение 9.6.1** *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции $f(x)$, если существует проколотая окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что $\forall x \in E : x \in \overset{o}{U}(x_0)$ выполняется $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.*

**Определение 9.6.2** *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции $f(x)$, если существует проколотая окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что $\forall x \in E : x \in \overset{o}{U}(x_0)$ выполняется $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.*

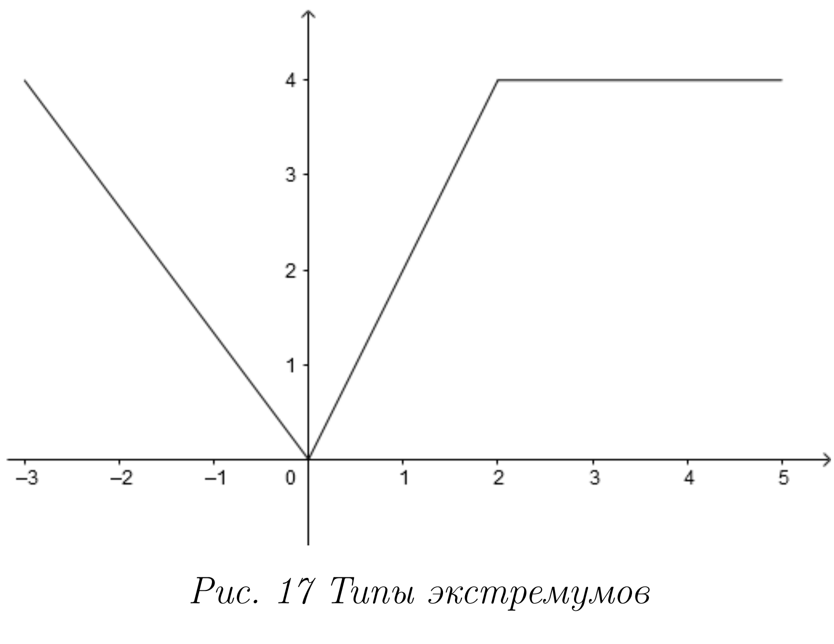


*Рис. 17 Типы экстремумов*

**Пример 9.6.1** *На рисунке 17 видно, что точка $x = 0$ – точка строгого локального минимума, а точка $x = -3$ – точка строгого локального максимума. Все точки из множества $(2, 5]$ можно считать как точками локального максимума, так и точками локального минимума. Точка $x = 2$ – точка локального максимума (не строгого!).*

**Определение 9.6.3** *Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локального минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).*

**Определение 9.6.4** *Точка $x_0$ называется точкой внутреннего экстремума для функции $f : E \to \mathbb{R}$, если $x_0$ – точка экстремума, являющаяся предельной как для множества $E_- = \{x \in E : x < x_0\}$, так и для $E_+ = \{x \in E : x > x_0\}$.*

**Пример 9.6.2** *На рисунке 17 точка $x = -3$ не является точкой внутреннего экстремума, так как множество $E_-$ пусто. Точка $x = 5$ тоже не является точкой внутреннего экстремума, так как множество $E_+$ пусто. Точка $x = 0$ и все точки множества $[2, 5)$ яваляются точками внутреннего экстремума.*

**Теорема 9.6.1 (Ферма)** *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке внутреннего экстремума $x_0$. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

**Доказательство.** Для определенности предполагается, что $x_0$ – точка локального максимума. При достаточно малом $\Delta x < 0$, из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0,$$

значит, по теореме 7.3.1 о предельном переходе в неравенствах,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

При достаточно малом $\Delta x > 0$, из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах 7.3.1,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Сравнивая два неравенства, получаем $f'(x_0) = 0$. □

**Замечание 9.6.1** *Геометрически теорема Ферма означает, что касательная в точке внутреннего экстремума дифференцируемой функции параллельна оси $Ox$. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 18, $x_0 = \xi$.*

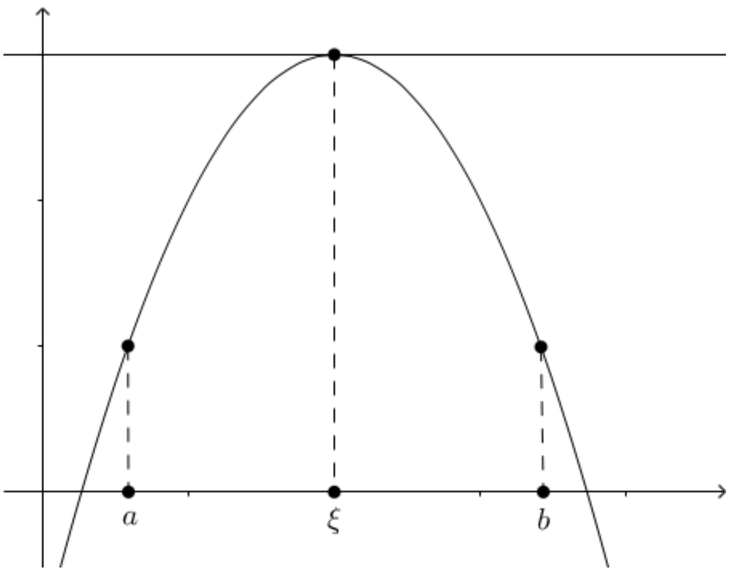


*Рис. 18 Теорема Ролля*

**Замечание 9.6.2** *То, что рассматривается внутренний экстремум, важно. На рисунке 17 видно, что в точке $x = -3$ производная нулю не равна.*

**Теорема 9.6.2 (Ролля)** *Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$, причем $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$.*

**Доказательство.** Если $f(x)$ постоянна на отрезке $[a,b]$, то утверждение, очевидно, верно. Если $f(x)$ не постоянна, то по теореме Вейерштрасса 8.4.3 на отрезке $[a,b]$ существуют точки, в которых функция принимает свои наибольшее $M$ и наименьшее $m$ значения, причем $M \neq m$, а значит, хотя бы одно из них принимается внутри интервала $(a,b)$ в некоторой точке $\xi$. Значит, по теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$. □

**Замечание 9.6.3** *Геометрически теорема Ролля означает, что если дифференцируемая функция на концах отрезка принимает равные значения, то на этом отрезке существует хотя бы один экстремум, см. рисунок 18.*

**Теорема 9.6.3 (Лагранжа)** *Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Тогда $\exists \xi \in (a,b)$, что выполняется*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

**Доказательство.** Пусть

$$y(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Прямым вычислением проверяется, что $y(a) = y(b)$, причем функция $y(x) \in C[a,b]$, как разность непрерывных функций, и дифференцируема на $(a,b)$, как разность дифференцируемых функций. Значит, согласно теореме Ролля 9.6.2, найдется $\xi \in (a,b) : y'(\xi) = 0$, то есть

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

□

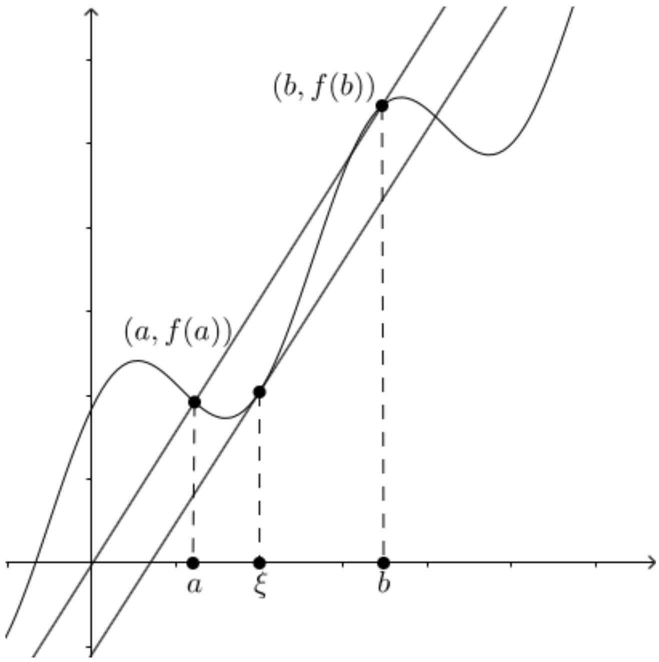


*Рис. 19 Теорема Лагранжа*

**Замечание 9.6.4** *Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале $(a,b)$ существует касательная к графику функции $y = f(x)$, параллельная секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, см. рисунок 19.*

**Следствие 9.6.4 (Критерий монотонности функции)** *Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Для того чтобы функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$. Для возрастания (убывания) функции на $[a,b]$ достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.*

**Доказательство.** Пусть функция $f(x)$ не убывает. Необходимость. Пусть $x \in (a,b)$, тогда при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

значит, по теореме 7.3.1 о предельном переходе в неравенстве,

$$f'(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа 9.6.3 найдется $\xi \in (a,b)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(x) \geq 0$ на $(a,b)$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$. Так как $x_1, x_2$ – произвольные, получаем определение неубывающей функции. Если же $f'(x) > 0$ на $(a,b)$, то $f(x_2) > f(x_1)$ и получается определение возрастающей функции. □

**Замечание 9.6.5** *Полезно заметить, что из того, что функция возрастает (убывает), вообще говоря не следует положительность (отрицательность) производной. Пусть $y = x^3$. Очевидно, что функция возрастает, но $y' = 3x^2$ обращается в ноль при $x = 0$.*

**Следствие 9.6.5 (Критерий постоянства функции)** *Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Для того чтобы $f(x)$ была постоянной на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на $(a,b)$.*

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Достаточность. Если $f'(x) = 0$ на $(a,b)$, то для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_1 < x_2$ по теореме Лагранжа 9.6.3

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

то есть $f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности точек $x_1, x_2$ функция постоянна. □

**Теорема 9.6.6 (Коши)** *Пусть $f, g \in C[a,b]$ и дифференцируемы на $(a,b)$. Тогда $\exists \xi \in (a,b)$, что выполняется*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

*Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на $(a,b)$, то*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Доказательство.** Пусть

$$\varphi(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a)).$$

Прямые вычисления показывают, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Кроме того, из условий теоремы следует, что функция $\varphi(x) \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Значит, по теореме Ролля 9.6.2 найдется $\xi \in (a,b)$, что $\varphi'(\xi) = 0$, то есть

$$g'(\xi)\left(f(b) - f(a)\right) = f'(\xi)\left(g(b) - g(a)\right).$$

Если $g'(x) \neq 0$ на $(a,b)$, то $g(b) \neq g(a)$ (иначе по теореме Ролля нашлась бы точка из интервала $(a,b)$, в которой производная бы обращалась в ноль), а значит

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

**Замечание 9.6.6** *Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, если взять* $g(x) = x$.

## 9.7 Правило Лопиталя

Ниже будет сформулирована и доказана теорема, позволяющая раскрывать неопределенности вида $[0/0]$ и $[?/\infty]$.

**Теорема 9.7.1 (Правило Лопиталя)** *Пусть функции* $f, g$ *дифференцируемы на интервале* $(a,b)$, $g'(x) \neq 0$ *на* $(a,b)$ *и существует*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

*где* $A$ *может равняться* $\pm\infty$. *Тогда в любом из двух случаев:*

1. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0.$

2. $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty.$

*выполняется*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

**Доказательство.**
1. Так как $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$, то функции $f, g$ можно доопределить по непрерывности, положив $f(a) = g(a) = 0$. Пусть $c \in (a,b)$. Тогда доопределенные функции $f, g \in C[a,c]$ и дифференцируемы на $(a,c)$. Так как $g'(x) \neq 0$, то по теореме Коши 9.6.6

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x < c.$$

При $x \to a+0$ выполняется, что $\xi \to a+0$, а значит

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A \Rightarrow \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

2.1. Пусть $A$ конечно. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдется $\delta_0 < b$ , что при $x \in (a, a+\delta_0)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

В частности, при $x \in (a, a+\delta_0)$ функция $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ограничена, то есть

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq M.$$

Пусть $x \in (a, a+\delta_0)$, рассмотрим преобразования

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a+\delta_0)}{g(x)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} =$$

$$= \frac{g(x) - g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(a+\delta_0)}{g(x) - g(a+\delta_0)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} =$$

$$= \left(1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right) \frac{f(x) - f(a+\delta_0)}{g(x) - g(a+\delta_0)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}. \qquad (5)$$

На отрезке $[x, x+\delta_0]$ функции $f, g$ непрерывны, а на интервале $(x, x+\delta_0)$ дифференцируемы, значит по теореме Коши 9.6.6

$$\frac{f(x) - f(a+\delta_0)}{g(x) - g(a+\delta_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < x < \xi < a+\delta_0.$$

Так как $|g(x)| \to +\infty$, то по ранее заданному $\varepsilon$ можно найти $\delta_1 < \delta_0$, что при $x \in (a, a+\delta_1)$ справедливы оценки

$$\left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \varepsilon \quad \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Тогда из (5) при $x \in (a, a+\delta_1)$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| \leq$$

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| + \left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| + \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| \leq$$

$$\varepsilon + \varepsilon \cdot M + \varepsilon = \varepsilon(2 + M).$$

В силу произвольности $\varepsilon$ отсюда следует требуемое, т. е.

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

2.2. Пусть $A = +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдется $\delta_0 < b$ , что при $x \in (a, a+\delta_0)$ справедливо неравенство

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty$, можно найти $\delta_1$ так, чтобы при $x \in (a, a+\delta_1)$ выполнялось

$$\left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2} \qquad \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}.$$

Используя аналогичные выкладки, что в пункте 2.1,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} > \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ получается, что

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

2.3 Случай $A = -\infty$ доказывается аналогично пункту 2.2. $\square$

**Замечание 9.7.1** *Теорема справедлива и для $a = -\infty$. Для доказательства достаточно сделать замену $t = \frac{1}{x}$ и применить доказанную теорему.*

**Пример 9.7.1** *Вычислить предел*

$$\lim_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

*Так как $(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln \sin x}$, то достаточно вычислить предел*

$$\lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{tg} x \ln \sin x) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = 0$$

*Значит, ответом будет $e^0 = 1$.*

## 9.8 Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $f(x)$ дифференцируема на некотором множестве $E$, то на этом множестве возникает функция $f' : E \to \mathbb{R}$, равная значению производной функции $f$ в точке $x \in E$. Эта функция, в свою очередь, сама может быть дифференцируемой.

**Определение 9.8.1** *По индукции, если определена производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$, то производная порядка $n$ определяется равенством*

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

*Аналогично, если определен дифференциал $d^{n-1}f(x)$ порядка $n-1$, то*

$$d^n f(x) = d(d^{n-1}f(x)).$$

**Определение 9.8.2** *Если функция $f(x)$ имеет на множестве $E$ непрерывные производные до порядка $n$ включительно, то пишут, что $f(x) \in C^n(E)$.*

**Замечание 9.8.1 (Инвариантность формы первого дифференциала)** *Известно, что $df = f(x)dx$ в случае, когда $x$ – независимая переменная. Пусть $x = x(t)$ – некоторая дифференцируемая функция от независимой переменной $t$. Тогда*

$$df(x(t)) = (f(x(t)))'\, dt = f'(x(t))x'(t)dt = f'(x(t))dx(t) = f'(x)dx.$$

*Это свойство называют инвариантностью первого дифференциала.*

**Замечание 9.8.2 (Неинвариантность формы дифференциалов высших пор** *Отметим, что у дифференциалов высших порядков инвариантность, вообще говоря, не сохраняется. Действительно,*

$$d^2f(x(t)) = d(f'(x(t))dx(t)) = f''(x(t))(d(x(t)))^2 + f'(x(t))d^2(x(t))$$

*и второе слагаемое равно нулю только в случае, когда $x(t)$ – линейная функция.*

## 9.9 Формула Лейбница

**Теорема 9.9.1** *Пусть функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ имеют $n$ производных в точке $x_0$, тогда*

$$(fg)^{(n)}(x_0) \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству формулы бинома Ньютона и остается в качестве упражнения. □

## 9.10 Формула Тейлора

Из вышесказанного могла возникнуть верная идея, что чем больше производных совпадает у двух функций в некоторой точке, тем лучше эти функции «приближают» друг друга в окрестности этой точки. В связи с этим возникает идея приблизить функцию в окрестности некоторой точки многочленом.

**Определение 9.10.1** *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ все производные до порядка $n$ включительно. Многочлен*

$$P_n(x,x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

*называется многочленом Тейлора порядка $n$ функции $f$ в точке $x_0$. В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.*

Многочлен Тейлора обладает описанным выше свойством, а именно справедлива следующая лемма.

**Лемма 9.10.1** *Пусть $P_n(x,x_0)$ – многочлен Тейлора порядка $n$ функции $f$ в точке $x_0$. Тогда*

$$(P_n(x,x_0))^{(k)} = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0 \ldots n.$$

**Доказательство.** Проверка осуществляется прямым дифференцированием и остается в качестве упражнения. □

**Замечание 9.10.1** *При $n = 0$ многочлен Тейлора превращается в $P_0(x,x_0) = f(x_0)$, а при $n = 1$ в $P_1(x,x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, что является уравнением касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$.*

**Пример 9.10.1** *Пусть $y(x) = x + \sin(2x)$ и многочлены $P_i(x,0)$ – многочлены Тейлора при $i = 0,1,3,5$, см. рисунок 20. Видно, что при увеличении $i$ график функции все лучше приближается многочленами $P_i(x,0)$.*

Важно получить информацию о величине

$$r_n(x,x_0) = f(x) - P_n(x,x_0),$$

которая характеризует отклонение многочлена Тейлора от заданной функции. Достаточную характеристику остаточного члена дает теорема.

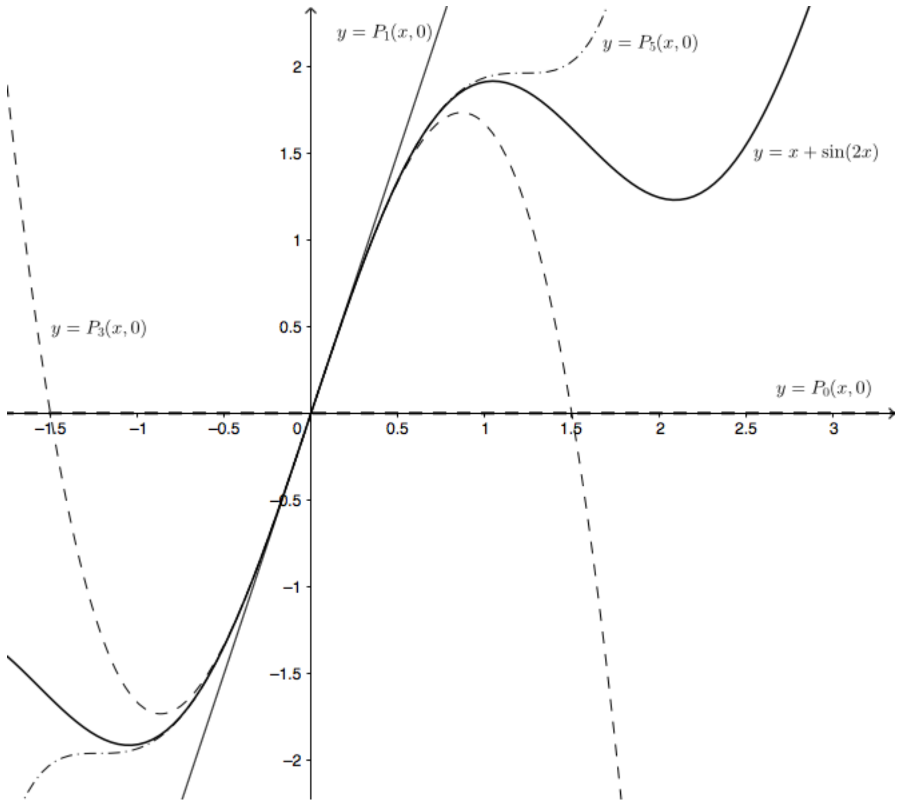


*Рис. 20 Многочлены Тейлора для* $y = x + \sin(2x)$

**Теорема 9.10.1** *Пусть функция $f$ непрерывна вместе со своими первыми $n$ производными на отрезке, с концами $x_0, x$, а во внутренних точках этого отрезка имеет производную порядка $(n+1)$. Тогда для любой функции $\varphi$, непрерывной на данном отрезке и имеющей отличную от нуля производную во внутренних точках данного отрезка, найдется точка $\xi$, лежащая между $x_0$ и $x$, такая, что*

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

**Доказательство.** Пусть на отрезке $I$ с концами $x_0$ и $x$ введена функция $F(t) = f(x) - P_n(x,t)$. $F$ непрерывна на данном отрезке и имеет производную в его внутренних точках. Функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = f(x) - \left( f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right).$$

Прямым вычислением проверяется, что

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Легко заметить, что $F(x) = 0$, а $F(x_0) = r_n(x, x_0)$. Применяя на отрезке $I$ к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ теорему Коши, получается

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

откуда

$$r_n(x,x_0)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

$\square$

**Следствие 9.10.2 (Остаточный член в форме Лагранжа)** *Пусть $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $\varphi'(\xi)=-(n+1)(x-\xi)^n$, $\varphi(x)=0$, а значит*

$$r_n(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

*Данный остаточный член называется остаточным членом в форме Лагранжа.*

**Следствие 9.10.3 (Остаточный член в форме Коши)** *Пусть $\varphi(t)=(x-t)$. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $\varphi'(\xi)=-1$, $\varphi(x)=0$, а значит*

$$r_n(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

*Данный остаточный член называется остаточным членом в форме Коши.*

Рассмотренные выше остаточные члены будут полезны в дальнейшем при рассмотрении рядов. Сейчас же зададимся целью локального приближения функции (в окрестности точки $x_0$). Именно, справедлива следующая теорема

**Теорема 9.10.4 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)** *Пусть функция $f:U(x_0)\to\mathbb{R}$ в точке $x_0$ имеет производные до порядка n включительно, тогда*

$$f(x)=P_n(x,x_0)+o((x-x_0)^n),\ x\to x_0,\ x\in U(x_0).$$

*Даная формула называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

**Доказательство.** Пусть $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, x_0)$. Согласно лемме 9.10.1, $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 0 \dots n$. Нужно показать, что $\varphi(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Так как функция $\varphi(x)$ имеет $n$ производных, то все производные до $(n-1)$ порядка включительно определены на некотором интервале $(\alpha, \beta)$, причем $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Используем теорему Коши несколько раз

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{n((\xi_1 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_1 - x_0)^{n-2}} = \dots$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \varphi^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

где $\xi_1$ лежит между $x$ и $x_0$, $\xi_2$ между $\xi_1$ и $x_0$, …, $\xi_{n-1}$ между $\xi_n$ и $x_0$, а значит $\xi_{n-1} \to x_0$, когда $x \to x_0$. □

Оказывается, верна теорема единственности.

**Теорема 9.10.5 (О единственности многочлена Тейлора)** *Если существует многочлен*

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

*удовлетворяющий условию*

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

*то он единственен.*

**Доказательство.** Последовательно можно найти

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n)) = a_0,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(a_1 + a_2(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})\right) = a_1,$$

$$\dots$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1})}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (a_n + o(1)) = a_n.$$

Единственность коэффициентов следует из единственности предела. □

**Следствие 9.10.6** *Если функция $f$ имеет производную до порядка $n$ включительно в точке $x_0$, то $Q_n(x, x_0) = P_n(x, x_0)$, то есть рассмотренный выше многочлен является многочленом Тейлора.*

## 9.11 Разложение элементарных функций по формуле Маклорена

Ниже приведены разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена.

1. $y = e^x,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = e^x,\ y^{(n)}(0) = 1$, тогда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. $y = a^x,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = a^x \ln^n a,\ y^{(n)}(0) = \ln^n a$, тогда

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + o(x^n).$$

3. $y = \sin x,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ \sin^{(2n)}(0) = 0,\ \sin^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$, тогда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}).$$

4. $y = \cos x,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2}),\ \cos^{(2n+1)}(0) = 0,\ \cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$, тогда

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

5. $y = \ln(1+x),\ x_0 = 0,\ y^{(0)}(0) = 0,\ y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n},\ y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, тогда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n).$$

6. $y = (1+x)^\alpha,\ x_0 = 0,\ y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n},\ y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))$, тогда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))x^n}{n!} + o(x^n).$$

7. $y = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 0$. В силу предыдущего примера легко заметить, что

$$\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + \ldots + (-1)^n(x^2)^n + o((x^2)^n)$$

и
$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{2n}x^{2n} + o(x^{2n}).$$
С другой стороны, так как
$$f(x) = \operatorname{arctg} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n),$$
то в силу следствия 9.10.6,
$$\varphi(0) = f'(0),\ \varphi'(0) = 2f''(0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(0) = nf^{(n)}(0).$$
получается разложение
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

**Пример 9.11.1** *Вычислить предел*
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x\cos x}{\ln^3(1-x)}.$$

*Используя разложения, полученные выше,*
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

*Тогда (по теореме единственности)*
$$e^{\sin x} = e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) +$$
$$\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6} + o\left(\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6}\right).$$

*Так как точность разложения равна $x^3$, то*
$$\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$
*и*
$$\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6} = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

*Кроме того,*

$$o\left(\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}{6}\right)=o(x^3),$$

*а значит*

$$e^{\sin x}=1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3).$$

*Далее,*

$$\sqrt{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{1/2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1/2(1/2-1)x^4}{2}+$$
$$o\left(\frac{1/2(1/2-1)x^4}{2}\right)=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

*и*

$$x\cdot\cos x=x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=x-\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

*Окончательно, воспользовавшись тем, что* $\ln^3(1-x)\sim -x^3$, *получается*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{-x^3}=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=-\frac{1}{2}.$$

**Пример 9.11.2** *Вернемся к задаче (пример 8.10.2) вычисления предела*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$

*Согласно выведенным соотношениям,*

$$\ln(1+3x+x^2)=3x+x^2-\frac{(3x+x^2)^2}{2}+o((3x+x^2)^2)=3x-\frac{7}{2}x^2+o(x^2),$$

$$\ln(1+3x+x^2)=-3x+x^2-\frac{(-3x+x^2)^2}{2}+o((-3x+x^2)^2)=-3x-\frac{7}{2}x^2+o(x^2).$$

*Значит,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-7x^2+o(x^2)}{x^2}=-7.$$

## 9.12 Исследование функций с помощью производных

Ниже приведена теорема (которая, в прочем, уже известна), связывающая возрастание/убывание функции со знаком производной.

**Теорема 9.12.1** *Пусть функция $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Тогда справедливы соотношения:*

1. $f'(x) > 0$ *на* $(a,b) \Rightarrow f(x)$ *возрастает на* $[a,b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ *на* $(a,b)$.
2. $f'(x) \geq 0$ *на* $(a,b) \Rightarrow f(x)$ *не убывает на* $[a,b] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ *на* $(a,b)$.
3. $f'(x) < 0$ *на* $(a,b) \Rightarrow f(x)$ *убывает на* $[a,b] \Rightarrow f'(x) \leq 0$ *на* $(a,b)$.
4. $f'(x) \leq 0$ *на* $(a,b) \Rightarrow f(x)$ *не возрастает на* $[a,b] \Rightarrow f'(x) \leq 0$ *на* $(a,b)$.

**Доказательство.** Данная теорема есть не что иное, как подробно записанное следствие 9.6.4 с учетом последующего замечания 9.6.5. □

**Теорема 9.12.2 (Необходимое условие внутреннего экстремума)** *Для того чтобы точка $x_0$ была точкой внутреннего экстремума функции $f(x)$ необходимо, чтобы выполнялось одно из двух условий: либо функция не дифференцируема в точке $x_0$, либо $f'(x_0) = 0$.*

**Доказательство.** Эта теорема – прямое следствие леммы Ферма 9.6.1. □

**Замечание 9.12.1** *Это условие не является достаточным, что показывает, например, функция $f(x) = x^3$, производная которой равна нулю в точке $x = 0$, но которая не имеет экстремума в этой точке.*

Ниже приведено удобное для практического применения достаточное условие экстремума.

**Теорема 9.12.3 (Первое достаточное условие экстремума)** *Пусть $f(x) : U(x_0) \to \mathbb{R}$, непрерывна в точке $x_0$ и дифференцируема на множествах $U_- = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ и $U_+ = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$. Тогда:*

1. *Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+$, то $x_0$ является точкой строгого локального максимума функции $f(x)$.*
2. *Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+$, то $x_0$ является точкой строгого локального минимума функции $f(x)$.*

3. *Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+$, то $x_0$ не является точкой экстремума функции $f(x)$.*

4. *Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+$, то $x_0$ не является точкой экстремума функции $f(x)$.*

**Доказательство.** Первое утверждение. Так как $f'(x) > 0$ при $x \in U_- = (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и функция непрерывна в точке $x_0$, то согласно теореме 9.12.1 функция $f(x)$ возрастает на $(x_0 - \varepsilon, x_0]$. Значит, $f(x_0) < f(x)$ при $x \in U_-$. Аналогично, так как $f'(x) < 0$ при $x \in U_+ = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и функция непрерывна в точке $x_0$, то функция $f(x)$ возрастает на $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Тем самым проверено, что точка $x_0$ – точка строгого локального максимума.
Доказательство остальных пунктов проводится аналогично и остается в качестве упражнения. $\square$

**Пример 9.12.1** *Функция $f(x) = |x|$ имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, так как она непрерывна в точке $x = 0$ и, кроме того, $f'(x) = -1$ при $x < 0$, и $f'(x) = 1$ при $x > 0$.*

**Пример 9.12.2** *Важно отметить, что отказаться от непрерывности функции в точке $x_0$ в вышеизложенной теореме нельзя. Например, для функции*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ -x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

*при $x < 0$ выполняется $f'(x) = 1$, а при $x > 0$ выполняется $f'(x) = -1$, но экстремума в точке $x = 0$, очевидно, нет.*

**Замечание 9.12.2** *Важно отметить, что вышеизложенное достаточное условие не является необходимым. Пусть*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

*Очевидно, что данная функция имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, однако ее производная*

$$f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}$$

*не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности нуля.*

**Определение 9.12.1** *Если в точке экстремума функция дифференцируема, то экстремум называется гладким.*

**Определение 9.12.2** *Если $x_0$ – точка экстремума функции, а $f'(x_0-0) = +\infty$, $f'(x_0+0) = -\infty$, или $f'(x_0-0) = -\infty$, $f'(x_0+0) = +\infty$, то экстремум называется острым.*

**Определение 9.12.3** *Если $x_0$ – точка экстремума функции, хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.*

**Пример 9.12.3** *На рисунке 17 в точке $x = 0$ функция имеет угловой экстремум.*

**Пример 9.12.4** *Исследовать на экстремумы функцию*

$$y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}.$$

*Легко заметить, что данная функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Ее производная равна*

$$y'(x) = \frac{(4-3x)}{3(1-x)^{2/3}(x-2)^{1/3}}.$$

*Методом интервалов легко определить, что производная отрицательна при $x > 2$ и $x < \frac{4}{3}$ и положительна при $\frac{4}{3} < x < 2$.*

*Так как функция дифференцируема в точке $\frac{4}{3}$ и слева от этой точки производная отрицательна, а справа положительна, то $x = \frac{4}{3}$ – точка строгого локального минимума, причем минимум гладкий.*

*Так как $f'(2-0) = +\infty$, $f'(2+0) = -\infty$ и слева от точки 2 производная положительна, а справа отрицательна, то точка $x = 2$ – точка строгого локального максимума, причем максимум острый.*

*Можно заметить, что в точке $x = 1$ знак производной не меняется, а сама производная обращается в бесконечность. Значит, в точке $x = 1$ касательная к графику функции вертикальна. График функции изображен на рисунке 21.*

**Теорема 9.12.4 (Второе достаточное условие экстремума)** *Пусть функция $f(x) : E \to \mathbb{R}$ имеет производные в точке $x_0$ до порядка $n$ включительно, причем $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда если $n$ нечетно, то в точке $x_0$ экстремума нет, а если четно, то в точке $x_0$ локальный минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

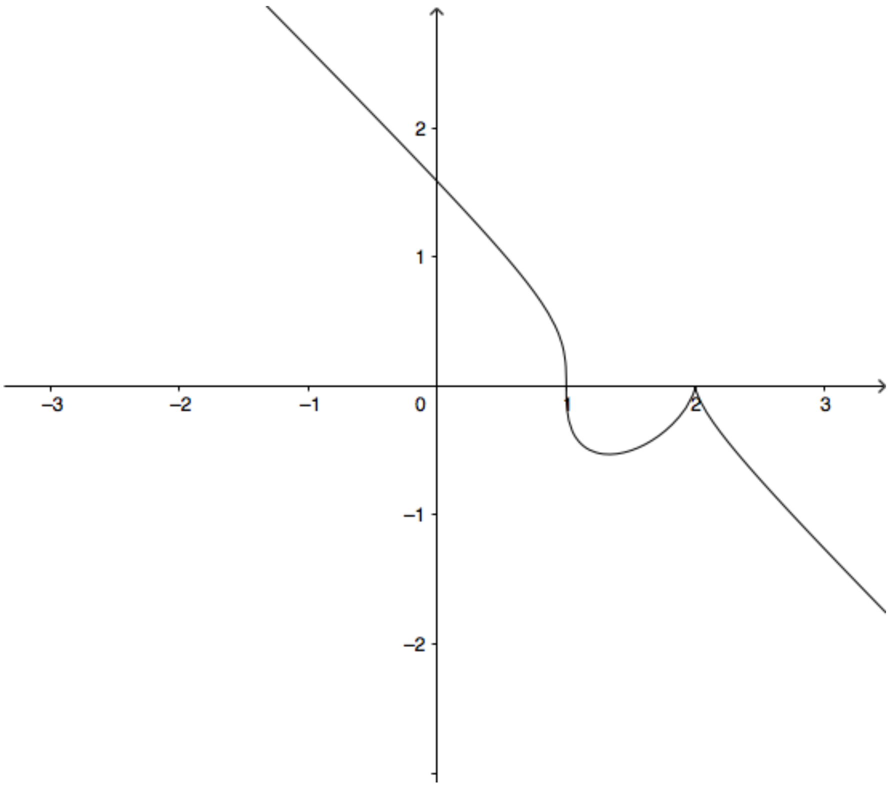


*Рис. 21 График функции* $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

**Доказательство.** Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получается

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

При достаточной близости $x$ к $x_0$ знак разности $f(x) - f(x_0)$ определяется лишь знаком $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Если $n$ нечетно, то при $x > x_0$ знак разности совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$, а при $x < x_0$ противоположен знаку $f^{(n)}(x_0)$, значит экстремума нет.

Если $n$ четно, то как при $x > x_0$, так и при $x < x_0$ знак разности совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Тогда, если разность положительна, то в точке $x_0$ локальный минимум, если отрицательна, то локальный максимум. $\square$

**Определение 9.12.4** *Функция* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *называется выпуклой вверх на* $(a,b)$*, если* $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ *и* $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$*, выполняется условие*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

*Если при тех же условиях выполнено*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

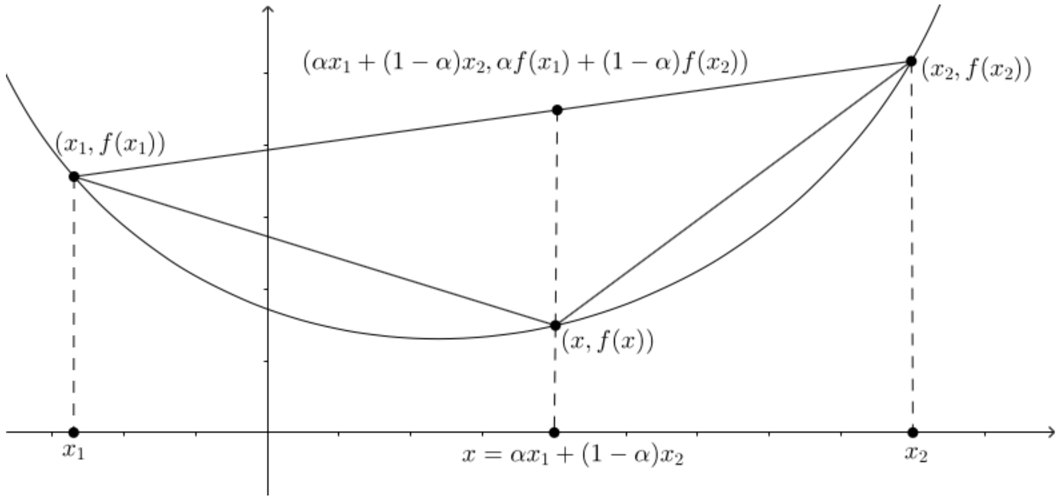


*Рис. 22 Выпуклая вниз функция*

*то функция называется выпуклой вниз на* $(a, b)$.
*Если при* $x_1 \neq x_2$ *и* $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ *неравенство строгое, то функция называется строго выпуклой вверх (вниз).*

**Замечание 9.12.3** *Геометрически выпуклость вниз функции на интервале* $(a, b)$ *означает, что какую бы хорду графика функции, проходящую через точки* $(x_1, f(x_1))$ *и* $(x_2, f(x_2))$ *не провести, все точки графика функции* $(x, f(x))$, *стягиваемые данной хордой, лежат не выше точек хорды, см. рисунок 22.*

Выведем эквивалентное условие выпуклости вниз. Из условий

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in (a, b),\ \alpha_2 = 1 - \alpha_1$$

получим

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},\ \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Определение выпуклой вниз функции переписывается в виде

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Пусть $x_2 > x_1$, тогда

$$(x_2 - x_1) f(x) \leq (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2),$$

$$(x_2 - x) f(x_1) - (x_2 - x_1) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geq 0,$$

$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geq 0.$$

Переписав $x_1 - x_2 = (x_1 - x) + (x - x_2)$, получается

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x)f(x) + (x - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0,$$

$$(x_2 - x)f(x_1) - (x - x_1)f(x) - (x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0,$$

$$(x_2 - x)(f(x_1) - f(x)) + (x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \geq 0,$$

$$(x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \geq (x_2 - x)(f(x) - f(x_1))$$

или

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

где $x_1 < x < x_2$. Тем самым получаем эквивалентное условие выпуклости вниз при $x_1 < x < x_2$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

**Замечание 9.12.4** *Полученное условие означает, что хорда, соединяющая точки* $(x_1, f(x_1))$ *и* $(x, f(x))$ *имеет коэффициент наклона не больше, чем хорда, соединяющая точки* $(x, f(x))$ *и* $(x_2, f(x_2))$ *(см. рисунок 22)* .

**Теорема 9.12.5** *Для того чтобы дифференцируемая на интервале* $(a, b)$ *функция* $f(x)$ *была выпуклой вниз (вверх) на* $(a, b)$ *необходимо и достаточно, чтобы ее производная* $f'(x)$ *не убывала (не возрастала) на* $(a, b)$. *При этом для строгой выпуклости вниз (вверх) необходимо и достаточно возрастание (убывание) производной.*

**Доказательство.** Необходимость. В неравенстве

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

переходя к пределу при $x \to x_1$, получается

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Теперь, переходя к пределу при $x \to x_2$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Тогда получается

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

откуда и следует неубывание производной. Используя это, для строго выпуклой вниз функции, используя теорему Лагранжа получим

$$f'(x_1) \leq f'(\varepsilon_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\varepsilon_2) \leq f'(x_2),$$

при $a < x_1 < \varepsilon_1 < x < \varepsilon_2 < x_2 < b$. Следовательно, строгая выпуклость вниз влечет возрастание производной.
Достаточность. Пусть производная $f'(x)$ не убывает на интервале $(a, b)$. Пусть $x_1 < x_2$, тогда по теореме Лагранжа

$$f'(\varepsilon_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \text{ где } \varepsilon_1 \in (x_1, x)$$

и

$$f'(\varepsilon_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ где } \varepsilon_2 \in (x, x_2).$$

Так как производная не убывает, то $f'(\varepsilon_1) \leq f'(\varepsilon_2)$, откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

и функция $f(x)$ выпукла вниз. Если же производная $f'(x)$ возрастает, то $f'(\varepsilon_1) < f'(\varepsilon_2)$, откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

и функция $f(x)$ строго выпукла вниз. $\square$
Комбинируя только что доказанную теорему и теорему 9.12.1 получается следующее следствие.

**Следствие 9.12.6** *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда, для того чтобы $f(x)$ была выпукла вниз (вверх) необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ на $(a, b)$ ($f''(x) \leq 0$ на $(a, b)$). Причем, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то этого достаточно для строгой выпуклости вниз (вверх).*

Ниже установлена связь между выпуклостью вверх (вниз) и касательной к графику функции.

**Теорема 9.12.7** *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$. Функция $f(x)$ выпукла вниз (вверх) на интервале $(a, b)$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции лежат не ниже (не выше) касательной, проведенной в произвольной точке интервала $(a, b)$. При этом для строгой выпуклости вниз (вверх) необходимо и достаточно, чтобы все точки графика, за исключением точки касания, лежали строго выше (ниже) касательной.*

**Доказательство.** Необходимость. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Уравнение касательной к графику функции в точке $x_0$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

Разность функции и касательной

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)(x - x_0) = (f^{'}(\varepsilon) - f^{'}(x_0))(x - x_0),$$

где $\varepsilon$ между $x$ и $x_0$. Так как $f(x)$ выпукла вниз, то $f'(x)$ не убывает на $(a, b)$ и знак выражения $f'(\varepsilon) - f'(x_0)$ совпадает со знаком $x - x_0$, а следовательно, $f(x) - y(x) \geq 0$ в любой точке интервала $(a, b)$. Если $f(x)$ строго выпукла, то $f'(x)$ возрастает на $(a, b)$ откуда $f(x) - y(x) > 0$.
Достаточность. Пусть

$$f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$

Тогда при $x < x_0$ выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0),$$

а при $x > x_0$ выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0).$$

Тем самым, для любого набора точек $x_1, x_2, x \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x < x_3$ получается

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

тем самым получаем определение выпуклой функции. Можно заметить, что строгое неравенство влечет строгую выпуклость. □

**Определение 9.12.5** *Пусть функция $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в точке $x_0$ производную. Если при переходе через точку $x_0$ функция меняет направление выпуклости, то точка $x_0$ называется точкой перегиба.*

**Замечание 9.12.5** *Точки перегиба дважды дифференцируемой функции нужно искать там, где существует первая производная, а вторая производная либо равна нулю, либо не существует.*

**Пример 9.12.5** *Исследовать на выпуклость функцию*

$$y = \frac{1}{1 - x^2}.$$

*Первая производная данной функции имеет вид*

$$y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2},$$

*а вторая*

$$y'' = -\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

*Методом интервалов легко установить, что вторая производная отрицательна на промежутках* $(-\infty, -1); (1, +\infty)$, *а значит на этих промежутках функция выпукла вверх, и положительна на промежутке* $(-1, 1)$, *а значит на этом промежутке функция выпукла вниз. Точек перегиба у данной функции нет.*

## 9.13 Асимптоты графика функции

**Определение 9.13.1** *Прямая $l$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $(x, f(x))$, лежащей на кривой, до прямой стремится к нулю, при удалении точки $(x, f(x))$ на бесконечность от начала координат.*

**Замечание 9.13.1** *Удаление точки $(x, f(x))$ на бесконечность может происходить тремя путями:*

1. *Величина $x$ ограничена, а $f(x) \to \infty$.*
2. *Величина $f(x)$ ограничена, а $x \to \infty$.*
3. *Одновременно $x \to \infty$ и $f(x) \to \infty$.*

**Определение 9.13.2** *Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если выполнено хотя бы одно из условий*

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \infty.$$

**Замечание 9.13.2** *Так как функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки, то вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва и на границах области определения.*

**Лемма 9.13.1** *Вертикальная асимптота является асимптотой в смысле определения 9.13.1.*

**Доказательство.** Пусть, например, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$. Тогда расстояние от точки, лежащей на графике функции, до точки $x = x_0$ равно $|x - x_0|$. При $x \to x_0 + 0$ точка $(x, f(x))$ уходит на бесконечность от начала координат, так как $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$, при этом $|x - x_0| \to 0$, то есть выполнено определение 9.13.1. $\square$

**Определение 9.13.3** *Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если*

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

**Лемма 9.13.2** *Наклонная асимптота является асимптотой в смысле определения 9.13.1.*

**Доказательство.** Пусть

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

По формуле расстояния от точки $(x, f(x))$, лежащей на графике функции, до прямой $y - kx - b = 0$, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1 + k^2}} = 0,$$

тем самым проверено определение 9.13.1. $\square$

Коэффициенты $k$ и $b$ наклонной асимптоты $y = kx + b$ определяются с помощью следующей теоремы.

**Теорема 9.13.1** *Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда выполняется условие $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ или соотношение

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0.$$

Обе части последнего равенства разделим на $x$, тогда

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получается

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k.$$

Далее соотношение $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ переписывается в виде $f(x) - kx = b + \alpha(x)$. Переходя к пределу при $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Тогда второй предел можно записать в виде:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) - b = 0,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0,$$

что соответствует определению наклонной асимптоты. Случай $x \to -\infty$ разбирается аналогично. □

**Определение 9.13.4** *В случае, если $k = 0$, асимптота называется горизонтальной и описывается уравнением $y = b$.*

Наличие горизонтальной асимптоты можно установить непосредственно, используя следующее следствие.

**Следствие 9.13.2** *Для того, чтобы прямая $y = b$ была горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b.$$

**Пример 9.13.1** *График функции $y = e^{-x}$ имеет только правую асимптоту $y = 0$, действительно*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty.$$

*Так как при $x \to -\infty$ $k_1 = -\infty$, то левой асимптоты не существует. Для правой асимптоты*

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right) = 0.$$

*Таким образом $k = 0$ и $b = 0$, а следовательно асимптота имеет уравнение $y = 0$.*

**Пример 9.13.2** *Найти асимптоты графика функции $y = x + \operatorname{arctg} x$. Данная функция непрерывна на всем множестве действительных чисел, поэтому у нее нет вертикальных асимптот.*

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

*так как функция $\operatorname{arctg} x$ ограничена, то последний предел при $x \to \pm\infty$ равен 0. Коэффициент $b$ вычисляется отдельно при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.*

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (x + \operatorname{arctg} x - 1 \cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

*Таким образом, график функции имеет две наклонные асимптоты*

$$y_1 = x + \frac{\pi}{2}, \; y_2 = x - \frac{\pi}{2}.$$

## 9.14 Исследование функции и построение графика

Для построения и изучения функции целесообразно придерживаться следующей последовательности действий:

1. Найти область определения функции и ее точки разрыва. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

2. Отметить такие свойства, как четность, нечетность, периодичность.

3. Найти первую производную и промежутки возрастания и убывания функции, а также экстремумы.

4. Найти вторую производную и промежутки выпуклости, а также точки перегиба.

5. Найти асимптоты графика функции.

6. Построить график.

Ясно, что при решении конкретной задачи некоторые пункты могут быть расширены, а некоторые могут быть излишними или вовсе невыполнимыми.

**Пример 9.14.1** *Построить график функции*

$$y = \frac{x^5}{x^4 - 1}.$$

*1. В область определения функции не входят те точки, которые удовлетворяют уравнению $x^4 - 1 = 0$, то есть $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Кроме того, если $y = 0$, то $x = 0$, и наоборот, так что $(0,0)$ – единственная точка пересечения графика функции с осями координат.*
*2. Функция является нечетной, так как*

$$y(-x) = \frac{(-x)^5}{(-x)^4 - 1} = -\frac{x^5}{x^4 - 1} = -y(x).$$

*3. Первая производная функции:*

$$y'(x) = \frac{x^4(x^4 - 5)}{(x^4 - 1)^2}.$$

*Методом интервалов легко получить, что функция возрастает при $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{5}]; [\sqrt[4]{5}, +\infty)$ и убывает при $x \in [-\sqrt[4]{5}, -1); (-1, 1); (1, \sqrt[4]{5}]$. В точке $x = -\sqrt[4]{5}$ функция имеет строгий локальный максимум, причем $y(-\sqrt[4]{5}) = -\frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$, а в точке $x = \sqrt[4]{5}$ строгий локальный минимум, причем $y(\sqrt[4]{5}) = \frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$.*
*4. Вторая производная функции:*

$$y'' = \frac{x^3(12x^4 + 20)}{(x^4 - 1)^3}.$$

*Методом интервалов легко получить, что функция выпукла вниз при $x \in (-1, 0]; [1, +\infty)$ и выпукла вверх при $x \in (-\infty, -1); [0, 1)$. Кроме того, точка $x = 0$ является точкой перегиба, причем $y(0) = 0$.*

*5. Функция непрерывна на множестве $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Так как*

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^5}{x^4 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{x^5}{x^4 - 1} = +\infty$$

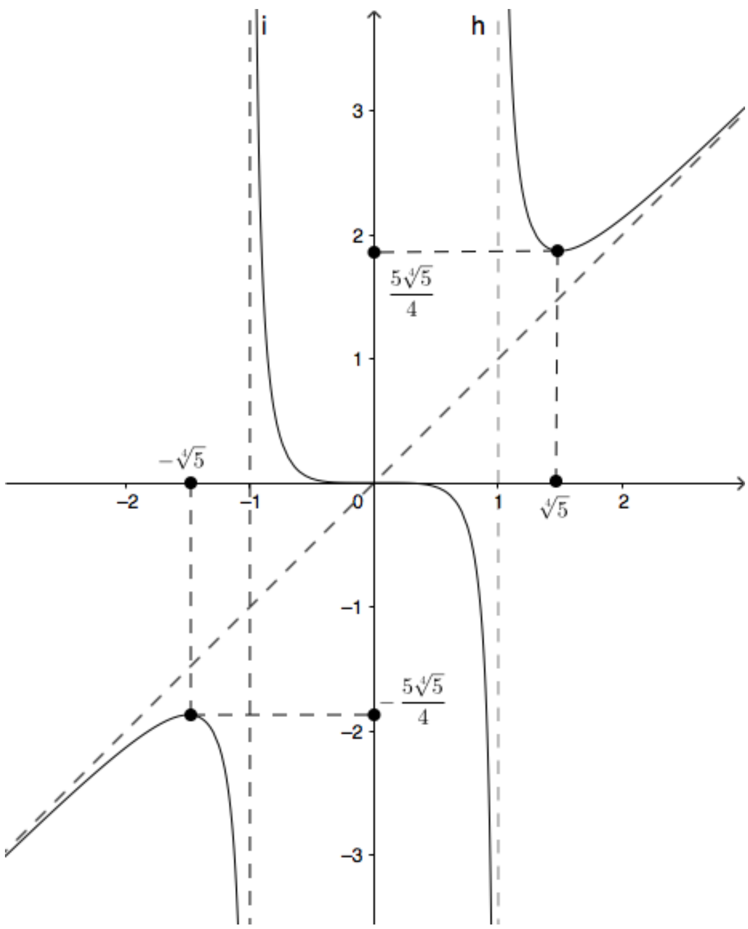


*Рис. 23 График функции* $y = \frac{x^5}{x^4-1}$.

*и*

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^5}{x^4-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{x^5}{x^4-1} = +\infty,$$

*то можно заключить, что* $x = 1$ *и* $x = -1$ *– вертикальные асимптоты. Кроме того, так как*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^4-1} = 1$$

*и*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^5}{x^4-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{x^4-1}\right) = 0,$$

*то прямая* $y = x$ *является асимптотой графика функции как на* $-\infty$*, так и на* $+\infty$*.*

*6. Вся полученная информация теперь используется для построения графика функции.*

## 9.15 Контрольные вопросы и задачи

1. Какова связь между наличием предела функции в точке и ее дифференцируемостью в этой точке?

2. Поясните, почему в теореме Ферма условие, что рассматривается внутренний экстремум, важно.

3. Выведите теорему Лагранжа из теоремы Коши. Как с помощью формулы Тейлора вычислить $\sin 2$ с наперед заданной точностью?

4. Может ли функция быть непрерывной, но недифференцируемой?