Вставка в конспект после теоремы Коши перед правилом Лопиталя (раздел 9.6)

Теорема Дарбу

Будем говорить, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, если она дифференцируема на интервале (a, b), и в точке $x = a$ существует конечная правосторонняя производная $f'_+(a)$, а в точке $x = b$ существует конечная левосторонняя производная $f'_-(b)$.

Заметим, что из дифференцируемости функции на отрезке следует ее непрерывность на этом отрезке.

Теорема 9.6.7. (Теорема Дарбу) *Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого C, лежащего между $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$, найдется $\xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = C$.*

► Пусть, для определенности, $f'_+(a) > f'_-(b)$.

1) Докажем вначале, что если $f'_+(a) > 0 > f'_-(b)$, то $\exists\ \xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = 0$.

Функция f непрерывна на $[a, b]$. По т. Вейерштрасса, она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего значения. Пусть $\max\limits_{[a,b]} f = f(\xi)$. Покажем, что $\xi \in (a, b)$, то есть ξ не совпадает с точками a и b. Так как $f'_+(a) > 0$, то при достаточно маленьком $\Delta x > 0$, имеем

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \geq 0 \ \Rightarrow \ f(a + \Delta x) - f(a) \geq 0,$$

а значит в точке a не может достигаться наибольшее значение функции. Аналогично с точкой b. Получаем, $\xi \in (a, b)$. И по теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$.

2) Возьмем произвольное $C \in \big(f'_-(b), f'_+(a)\big)$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - Cx.$$

Функция $\varphi(x)$ дифференцируема на $[a, b]$,

$$\varphi'(x) = f'(x) - C, \quad \varphi'(a) > 0,\ \varphi'(b) < 0,$$

следовательно, по доказанному в п.1, существует $\xi \in (a, b)$: $\varphi'(\xi) = 0$, а значит, $f'(\xi) = C$. ◄

Теорема Дарбу утверждает, что производная дифференцируемой функции принимает все свои промежуточные значения. Это утверждение похоже на вторую теорему Больцано–Коши, в которой утверждается, что непрерывная на отрезке функция принимает все свои промежуточные значения. Но теорема Дарбу не является её следствием, так как про непрерывность производной ничего не известно.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, так как

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Найдем производную при $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

При $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

как произведение бесконечно малой на ограниченную.

Итого

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функция $f'(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$ не существует.

Теорема 9.6.8 (О пределе производной)
Пусть f непрерывна на $[x_0, x_0 + h]$ $(h > 0)$ и дифференцируема на $(x_0, x_0 + h)$. Если существует (в $\bar{\mathbb{R}}$) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = A$, то $f'_+(x_0) = A$.

▶ Пусть $0 < \Delta x < h$. Запишем теорему Лагранжа на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \xi \in (x_0, x_0 + \Delta x).$$

Устремим $\Delta x \to 0+$. Тогда $\xi \to x_0 + 0$ и получаем

$$\lim_{\xi \to x_0 + 0} f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0).$$

◀

Эта теорема позволяет найти производную в конкретной точке как предел производной в окрестности этой точки (сравните с Примером выше).

Из этой теоремы также следует, что если производная функции существует на некотором промежутке, то производная не может иметь разрывы первого рода, т.е. в каждой точке производная либо непрерывна, либо имеет бесконечный разрыв.

Пример. Функция

$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

При $x \neq \pm 1$ имеем

$$f'(x) = \arcsin x + \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x.$$

Тогда

$$\lim_{x \to 1 - 0} f'(x) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = f'_-(1).$$

Или пришлось бы находить $f'_-(1)$ по определению.