4 Несобственный интеграл

4.1 Понятие несобственного интеграла

Определение 4.1.1 *Говорят, что функция f локально интегрируема на промежутке E, и пишут $f \in R_{loc}(E)$, если $f \in R[a,b]$ для любого $[a,b] \subset E$.*

Иными словами, локально интегрируемая функция интегрируема на любом отрезке, содержащемся в E.

Определение 4.1.2 *Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$. Тогда символ*

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству $[a,b)$.

Определение 4.1.3 *Пусть $\omega \in [a,b)$. Тогда предел*

$$\lim_{\omega \to b-} \int\limits_a^\omega f(x)dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется значением несобственного интеграла.

Определение 4.1.4 *Пусть $\omega \in [a,b)$. Если предел*

$$\lim_{\omega \to b-} \int\limits_a^\omega f(x)dx$$

существует в $\mathbb{R}$, то несобственный интеграл называется сходящимся. Иначе – расходящимся.

Пример 4.1.1 *Легко понять, что интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, когда $\alpha > 1$, и расходится иначе. Более точно,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \le 1. \end{cases}$$

Аналогично,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, когда $\alpha < 1$, *и расходится иначе. Более точно,*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

4.2 Свойства несобственного интеграла

Свойства несобственного интеграла во многом аналогичны свойствам классического интеграла Римана.

Теорема 4.2.1 (О линейности несобственного интеграла) *Пусть* $f, g \in R_{loc}[a, b)$. *Если сходятся*

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b g(x)dx,$$

то

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в равенстве

$$\int_a^\omega (f+g)dx = \int_a^\omega f(x)dx + \int_a^\omega g(x)dx.$$

$\square$

Теорема 4.2.2 (Об аддитивности по промежутку) *Пусть* $f \in R_{loc}[a, b)$. *Тогда для любого* $c \in (a, b)$ *справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

причем интегралы

$$\int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^b f(x)dx$$

существуют или нет одновременно.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в равенстве

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^\omega f(x)dx.$$

$\square$

Лемма 4.2.1 (Формула интегрирования по частям) *Пусть u, v дифференцируемы на $[a, b)$ и $u', v' \in R_{loc}[a, b)$. Тогда*

$$\int\limits_a^b uv'dx = uv|_a^b - \int\limits_a^b vu'dx,$$

причем последнее равенство справедливо тогда и только тогда, когда существует хотя бы два предела из трех.

Доказательство. Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\omega \to b-$ в равенстве

$$\int\limits_a^w uv'dx = uv|_a^w - \int\limits_a^w vu'dx.$$

$\square$

Теорема 4.2.3 (Формула замены переменной) *Пусть $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta) \to [A, B)$ дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, причем $\varphi'(t) \in R_{loc}[\alpha, \beta)$, $f \in C[A, B)$ и существует $\varphi(\beta-) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)dx,$$

причем если существует один интеграл (в $\overline{\mathbb{R}}$), то существует и другой.

Доказательство. Пусть существует $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-)} f(x)dx = I$, причем $I \in \overline{\mathbb{R}}$. Так как на $[\varphi(a), \varphi(\omega)]$ существует первообразная функции f (в силу непрерывности последней), скажем, $F(x)$, то

$$\lim_{\omega\to\beta-}\int\limits_{\alpha}^{\omega} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \lim_{\omega\to\beta-}(F(\varphi(\omega)) - F(\varphi(a))) = \lim_{\omega\to\beta-}\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(\omega)} f(x)dx = I.$$

Пусть теперь существует $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = I$, $I \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажем существование правого интеграла.

Если $\varphi(\beta-) \in \mathbb{R}$, то интеграл существует, как собственный. Равенство же справедливо из доказанного первого пункта.

Иначе $\varphi(\beta-) = B$. Пусть $x_n \in [A, B)$, причем $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B$. Будем считать, что $x_n \in [\varphi(\alpha), B)$. Тогда, по теореме Больцано-Коши, найдутся точки $\gamma_n \in [\alpha, \beta)$ такие, что $\varphi(\gamma_n) = x_n$.

Покажем, что $\gamma_n \to \beta-$. Пусть $\gamma \in [\alpha, \beta)$. Так как $\max\limits_{[\alpha,\gamma]}\varphi < B$, а $\varphi(\gamma_n) \to B$, то, начиная с некоторого момента, $\gamma_n \in (\gamma, \beta)$. Значит, $\gamma_n \to \beta-$ и

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{C_n} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\gamma_n} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} I.$$

□

4.3 Признаки сходимости интегралов от функций, сохраняющих знак

В этом пункте будем считать, что рассматриваемые функции не меняют знак. Всюду мы будем пользоваться следующей теоремой.

Теорема 4.3.1 *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $f \geq 0$. Тогда функция*

$$F(\omega) = \int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx,\ \omega \in [a, b)$$

не убывает, а сходимость интеграла

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

равносильна ограниченности функции $F(\omega)$.

Доказательство. Ясно, что если $a \leq \omega_1 \leq \omega_2 < b$, то, так как

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \geq 0,$$

то

$$\int\limits_{a}^{\omega_2} f(x)dx = \int\limits_{a}^{\omega_1} f(x)dx + \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \geq \int\limits_{a}^{\omega_1} f(x)dx,$$

откуда $F(\omega_2) \geq F(\omega_1)$, а значит $F(\omega)$ не убывает. Тогда сходимость несобственного интеграла, то есть существование конечного предела, по теореме Вейерштрасса равносильна ограниченности $F(\omega)$. □

Теорема 4.3.2 (Признаки сравнения) *Пусть $f, g \in R_{loc}[a, b)$ и $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $x \in [a, b)$. Тогда*

1. *Если сходится $\int\limits_a^b g(x)dx$, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)dx$.*

2. *Если расходится $\int\limits_a^b f(x)dx$, то расходится и $\int\limits_a^b g(x)dx$.*

3. *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-$, то интегралы*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \text{ и } \int\limits_a^b g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Докажем первый пункт. Согласно предыдущей теореме,

$$F(\omega) = \int\limits_a^{\omega} f(x)dx$$

не убывает с ростом ω. По свойствам интеграла Римана, а также используя теорему Вейерштрасса, при каждом $\omega \in [a, b)$,

$$F(\omega) = \int\limits_a^{\omega} f(x)dx \leq \int\limits_a^{\omega} g(x)dx \leq \sup_{\omega \in [a,b)} \int\limits_a^{\omega} g(x)dx = \int\limits_a^{b} g(x)dx < +\infty,$$

где последнее неравенство справедливо, исходя из условия (несобственный интеграл сходится). Но тогда $F(\omega)$ ограничена, а значит, по предыдущей теореме, интеграл сходится.

2. Второй пункт легко доказываться от противного. Если предположить, что интеграл

$$\int\limits_a^b g(x)dx$$

сходится, то, по только что доказанному первому пункту, сходится и

$$\int\limits_a^b f(x)dx,$$

что противоречит условию.

3. Согласно определению, $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-$ означает, что существует $\alpha(x)$, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \quad \lim_{x\to b-} \alpha(x) = 1.$$

Тогда существует $\Delta > a$, что при $x \in [\Delta, b)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \leq \alpha(x) \leq \frac{3}{2},$$

откуда, при $x \in [\Delta, b)$

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

Кроме того, сходимость интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)dx, \ \int\limits_a^b g(x)dx$$

равносильна сходимости интегралов

$$\int\limits_\Delta^b f(x)dx, \ \int\limits_\Delta^b g(x)dx.$$

Для последних же рассуждения проводятся с использованием пунктов 1 и 2 данной теоремы, опираясь на неравенство

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

Скажем, если сходится интеграл от $g(x)$, то, используя правое неравенство, сходится и интеграл от $f(x)$. Если же расходится интеграл от f, то, опять же, по правому неравенству, расходится и интеграл от g. Аналогичные рассуждения относительно левого неравенства завершают доказательство. $\square$

Пример 4.3.1 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}}dx.$$

Ясно, что у этого интеграла особенность на верхнем пределе – это $+\infty$. *Для исследования интеграла на сходимость вовсе не обязательно его вычислять. Заметим, что функция под интегралом положительна и упростим подынтегральную функцию при* $x \to +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \frac{x}{x^{7/3}\sqrt[3]{1/x^7+1}} \sim \frac{x}{x^{7/3}} = \frac{1}{x^{4/3}}, \ x \to +\infty.$$

Так как интеграл

$$\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$$

сходится, то, по 3 пункту теоремы сравнения, сходится и исходный интеграл.

Пример 4.3.2 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

На первый взгляд может показаться, что у данного интеграла две особенности: в точках 0 *и* $+\infty$, *но это не так. В окрестности нуля функция ограничена и интеграл может рассматриваться, как собственный. Значит, осталось выяснить поведение интеграла на* $+\infty$. *Перепишем интеграл в виде*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

и исследуем на сходимость второй. Функция под интегралом неотрицательна, можно пользоваться сформулированными теоремами. Так как

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

а интеграл от последней функции по $[1,+\infty)$ *сходится, то сходится и исходный интеграл.*

Замечание 4.3.1 *Отметим важный момент: из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *не следует, что* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *даже в случае, когда* $f \geq 0$ *и* $f \in C[0,+\infty)$.

Пусть

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k + \frac{1}{k^2(k+1)}\right).$$

положим $f(x) = 0$ *при* $x \in [0,+\infty)$, $x \notin E$. *Кроме того, пусть*

$$f(k) = k,\ f\left(k \pm \frac{1}{k^2(k+1)}\right) = 0$$

и f *линейна на*

$$\left(k - \frac{1}{k^2(k+1)}, k\right) \text{ и } \left(k, k + \frac{1}{k^2(k+1)}\right).$$

Ясно, что такая функция непрерывна и неотрицательна на $x \in [0,+\infty)$. *Кроме того, если* $N \in \mathbb{N}$, *то*

$$\int\limits_0^{N+1/2} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{k-\frac{1}{k^2(k+1)}}^{k-\frac{1}{k^2(k+1)}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Из последнего следует (ввиду монотонности интеграла от неотрицательной функции), что сходится и $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$. *В то же время, очевидно,* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *не выполнено. Кроме того,* $f(x)$ *оказывается не ограниченной.*

4.4 Критерий Коши

Так как несобственный интеграл – это предел, то, как обычно, справедлив так называемый критерий Коши сходимости интеграла.

Теорема 4.4.1 (Критерий Коши) *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Для того чтобы интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

сходился необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta \in (a, b) : \ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим

$$F(\omega) = \int\limits_a^\omega f(x)dx.$$

Согласно определению, сходимость интеграла равносильна существованию предела функции $F(\omega)$ при $\omega \to b - 0$. Согласно критерию Коши существования предела функции это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta \in (a, b) : \ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow |F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon.$$

Последнее же неравенство, в силу свойств интеграла, переписывается, как

$$|F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует требуемое. □

4.5 Абсолютная и условная сходимости интеграла

Если функция не сохраняет знак вблизи особой точки, то выделяют дополнительный тип сходимости.

Определение 4.5.1 *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.*

Как связаны абсолютная сходимость и сходимость интеграла?

Теорема 4.5.1 *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как интеграл сходится асбсолютно, то, согласно критерию Коши,

$$\exists \Delta : \ \forall \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) \Rightarrow \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon.$$

Но согласно свойствам интеграла,

$$\left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon,$$

а значит, по критерию Коши, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. □

Замечание 4.5.1 *При исследовании интеграла на абсолютную сходимость можно пользоваться доказанными ранее признаками сходимости интегралов от знакопостоянных функций.*

Определение 4.5.2 *Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, но абсолютной сходимости нет (то есть он не сходится абсолютно), то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится условно (или неабсолютно).*

Пример 4.5.1 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Так как

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2},$$

а последний интеграл сходится, то исходный интеграл сходится абсолютно, а значит и просто сходится.

Пример 4.5.2 *Часто оказывается, что интеграл сходится лишь условно. Исследуем на сходимость интеграл*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Во-первых, он сходится. Интегрируя по частям ($dv = \sin x dx$), получим

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\cos 1 - \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Последний интеграл, как мы только что показали, сходится.

Покажем, что абсолютной сходимости нет. Воспользуемся критерием Коши (его отрицанием):

$$\exists\ \varepsilon > 0 :\ \forall \Delta \in (a, b)\ \exists \delta_1, \delta_2 \in (\Delta, b) : \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x) dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\delta_1 = \pi n$, $\delta_2 = 2\pi n$, $\delta_i \to +\infty$, тогда

$$\int_{\pi n}^{2\pi n} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi}.$$

Последнее равенство показывает, что абсолютной сходимости у интеграла нет. Значит, исходный интеграл сходится, но лишь условно.

Замечание 4.5.2 *Расходимость последнего интеграла можно установить и следующим образом. Ясно, что*

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x},$$

причем

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

где последний интеграл сходится (доказывается интегрированием по частям), а первый, очевидно, расходится. Значит и исходный интеграл расходится.

На практике часто бывает полезна ещё такая теорема.

Теорема 4.5.2 *Пусть* $f, g, h \in R_{loc}[a, b)$, *причем*

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

Если интеграл $\int\limits_a^b h(x)dx$ *сходится абсолютно, то интегралы* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *ведут себя одинаково (одновременно либо расходятся, либо сходятся абсолютно, либо условно).*

Доказательство. Пусть интеграл от g сходится абсолютно. Тогда, так как $|f| \le |g| + |h|$, абсолютно сходится и интеграл от f. Наоборот, если сходится абсолютно интеграл от f, то, так как $g = f - h$ и $|g| \le |f| + |h|$, абсолютно сходится и интеграл от g.

Пусть интеграл от g сходится условно. Тогда интеграл от f сходится. Если бы он сходился абсолютно, то по пред. пункту, абсолютно бы сходился и интеграл от g. Значит, он сходится условно. Аналогично разбираются и остальные случаи. $\square$

4.6 Признак Абеля–Дирихле

Рассмотрим признак, позволяющий устанавливать сходимость интеграла от произведения двух функций.

Теорема 4.6.1 (Признак Абеля-Дирихле) *Пусть* $f \in C[a, b)$, *а* $g \in C^1[a, b)$ *и монотонна. Тогда для сходимости интеграла*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$$

достаточно, чтобы выполнялась любая из двух пар условий:

1. *Функция* $F(\omega) = \int\limits_a^\omega f(x)dx$ *ограничена на* $[a, b)$.

2. $g(x)$ *стремится к нулю при* $x \to b-$,

или

1. *Интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится.*

2. $g(x)$ *ограничена на* $[a, b)$.

Формулировка теоремы с первой парой условий иногда называют признаком Дирихле, а со второй – признаком Абеля.

Доказательство. 1) Пусть $F(\omega) = \int\limits_a^\omega f(x)dx$ и выполнена первая пара условий. Воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} g(x)dF(x)\right| = \left|F(\delta_2)g(\delta_2)-F(\delta_1)g(\delta_1)-\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} F(x)g'(x)dx\right| \le$$

применим неравенство треугольника для модуля и воспользуемся ограниченностью $F(\omega)$: $|F(\omega)| \le C$:

$$\le \left|F(\delta_2)g(\delta_2)\right| + \left|F(\delta_1)g(\delta_1)\right| + \left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} F(x)g'(x)dx\right| \le$$

оценим модуль интеграла интегралом от модуля

$$\le C\Big(|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|\Big) + C\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)|dx\right|$$

заметим, что в силу монотонности $g(x)$ $g'(x)$ одного знака, а значит $\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |g'(x)|dx = \pm(g(\delta_2)-g(\delta_1))$. Воспользуемся неравенством треугольника еще раз и получим

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx\right| \le 2C\Big(|g(\delta_1)| + |g(\delta_2)|\Big).$$

Так как $g(x) \to 0$ при $x \to b-$, то по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что $\forall x \in \dot{U}_\delta^-(b)$ $|g(x)| < \varepsilon/4C$, и

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon,$$

что и означает сходимость интеграла.

2) Так как g монотонна и ограничена, то $\exists \lim\limits_{x\to b-} g(x) = A$. Введем функцию $h(x) = g(x) - A$, $h(x) \to 0$ при $x \to b-$ и $h(x)$ монотонна. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)h(x)dx + A\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Первый интеграл сходится по п.1), а второй по условию. Следовательно, исходный интеграл сходится. □

Пример 4.6.1 *Исследовать на абсолютную и условную сходимости*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что если $\alpha > 1$, то интеграл сходится абсолютно, ведь

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha},$$

а интеграл от последней функции по промежутку $[1, +\infty)$ при $\alpha > 1$ сходится.

Если $\alpha \leq 0$, то интеграл расходится, так как

$$\left| \int\limits_{2\pi n}^{\pi/4 + 2\pi n} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq (2\pi n)^{-\alpha} \int\limits_{2\pi n}^{\pi/4+2\pi n} \sin x dx = (1 - \sqrt{2}/2)(2\pi n)^{-\alpha},$$

где последняя величина не стремится к нулю с ростом n.

Если $\alpha \in (0, 1]$, то интеграл сходится по признаку Абеля–Дирихле, так как

$$|F(\omega)| = \left| \int\limits_1^\omega \sin x dx \right| = |\cos \omega - \cos 1| \leq 2$$

и $1/x^\alpha$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. С другой стороны,

$$\left| \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \right| \geq \frac{1}{(2\pi n)^\alpha} \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} |\sin x| dx = \frac{n}{(2\pi n)^\alpha} 2 = C \cdot n^{1-\alpha},$$

где последнее выражение к нулю не стремится. Значит, абсолютной сходимости нет и интеграл при $\alpha \in (0, 1]$ сходится условно.

Пример 4.6.2 *Исследовать на сходимость интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Найдем асимптотику подынтегральной функции вблизи особой точки.

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^3}{3!} + o\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^3.$$

Тогда

$$\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{x} - \frac{\frac{\sin^3 x}{x^2}}{3!} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\right).$$

Ясно, что интеграл от функции $\frac{\frac{\sin^3 x}{x^2}}{3!} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *сходится абсолютно. Значит, достаточно исследовать интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Как известно, он сходится условно. Значит, исходный интеграл сходится условно.

Пример 4.6.3 *Отказаться от условия монотонности в признаке Абеля-Дирихле нельзя.*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx.$$

Если (неверно) использовать признак, то

$$|F(\omega)| = \left|\int\limits_1^{\omega} \sin x dx\right| \leq 2,$$

а $(\sqrt{x} - \sin x)^{-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, *но не монотонно. Откуда можно сделать неверный вывод, что интеграл сходится (условно).*

В то же время,

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sin x}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \left(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Интеграл же от $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x}$ *расходится, так как интеграл от первой функции сходится, а от второй расходится (по доказанному ранее).*

4.7 Интегралы с несколькими особенностями

До сих пор особенность у нас была лишь на одном конце промежутка интегрирования. Обобщим.

Определение 4.7.1 *Пусть* $-\infty \le a < b \le +\infty$ *и* $f \in R_{loc}(a,b)$. *Тогда полагают*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\omega_1 \to a+0} \int\limits_{\omega_1}^c f(x)dx + \lim_{\omega_2 \to b-0} \int\limits_c^{\omega_2} f(x)dx,$$

если оба предела существуют в $\overline{\mathbb{R}}$ *и не равны бесконечностям разных знаков. При этом интеграл называется сходящимся, если, как и ранее, его значение принадлежит* $\mathbb{R}$ *(то есть оба интеграла справа сходятся).*

Замечание 4.7.1 *Ясно, что определение не зависит от выбора точки* c.

Пусть теперь $-\infty \le a < b \le +\infty$ и f задана на (a,b) за исключением не более чем конечного числа точек.

Определение 4.7.2 *Точка* $c \in (a,b)$ *называется особой точкой функции* f, *если*

$$\forall A, B: \ a < A < c < B < b \Rightarrow f \notin R[A,B].$$

Точка a *называется особой, если либо* $a = -\infty$, *либо* $f \notin R[a,B]$ *для любых* $a < B < b$. *Аналогично определяется особая точка* b.

Пусть число особых точек конечно и $c_1 < ... < c_{n-1}$ – особые точки внутри (a,b). Добавим $c_0 = a$ и $c_n = b$. Можно показать, что $f \in R_{loc}(c_{i-1}, c_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx.$$

4.8 Интеграл в смысле главного значения

Определение 4.8.1 (Особенность в конченой точке) *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$, $c \in (a,b)$ *– единственная особая точка. Предел*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right),$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется главным значением интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если значение предела принадлежит $\mathbb{R}$, то говорят, что интеграл сходится в смысле главного значения. Обозначают

$$v.p. \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Замечание 4.8.1 *Если интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения, но не наоборот.*

Пример 4.8.1 *Рассмотрим $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$. Ясно, что в классическом смысле он расходится, но*

$$v.p. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \varepsilon) = 0.$$

Определение 4.8.2 (Особенность в бесконечной точке) *Пусть $f \in R_{loc}(\mathbb{R})$. Интегралом в смысле главного значения по $\mathbb{R}$ называется предел*

$$\lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$. Если значение предела принадлежит $\mathbb{R}$, то говорят, что интеграл сходится в смысле главного значения. Обозначают

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Замечание 4.8.2 *Если интеграл сходится, то он сходится и в смысле главного значения, но не наоборот.*

Пример 4.8.2 *Рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$. Ясно, что в классическом смысле он расходится, но*

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} xdx = 0.$$

В случае нескольких особенностей можно поступать по-разному. Останавливаться на этом не будем.

4.9 Интеграл Эйлера-Пуассона

Вычислим так называемый интеграл Эйлера-Пуассона.

Теорема 4.9.1

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Легко проверить, что при $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$e^x \geq 1 + x.$$

Тогда

$$(1 - x^2) \leq e^{-x^2} = (e^{x^2})^{-1} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Будем рассматривать первое неравенство при $x \in [-1, 1]$, а последнее при $x \in \mathbb{R}$, тогда при $k \in \mathbb{N}$

$$(1 - x^2)^k \leq e^{-kx^2} \leq \frac{1}{(1 + x^2)^k},$$

а значит

$$\int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)^k dx \leq \int\limits_{-1}^{1} e^{-kx^2} dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^k}.$$

Сделаем в первом интеграле замену $x = \sin t$, а в последнем $x = \operatorname{tg} t$. Тогда придем к неравенству

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k+1} t dt \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k-2} t dt,$$

откуда, в силу четности косинуса,

$$2 \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^{2k+1} t dt \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx \leq 2 \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^{2k-2} t dt.$$

Так как, как было вычислено ранее (и в чем легко убедиться),

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^n x dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k - 1 \end{cases},$$

то приходим к цепочке неравенств

$$2\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}dx \leq 2\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$

Сделаем в интеграле замену $t = \sqrt{k}x$ и придем к неравенству

$$2\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt \leq \pi\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$$

или

$$2\sqrt{k}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt \leq \pi\sqrt{k}\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}.$$

По формуле Валлиса,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}.$$

Тогда

$$2\sqrt{k}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{2\sqrt{k}}{(2k+1)}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{\pi}$$

и

$$\pi\sqrt{k}\frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} = \pi\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}}\frac{2k}{2k-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{\pi}.$$

Теперь требуемое получается согласно теореме о сжатой переменной. $\square$