САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Дисциплина: Математический анализ

Отчет

по лабораторной работе №1

«Нахождение точек локальных экстремумов функции»

Выполнил(а): Ступников Александр Сергеевич

студ. гр. М3135

Санкт-Петербург

2021

Аналитическая часть

Лаб работа № 1

$f(x,y) = x^2 y^2 \ln(x^2+y^2)$

Часть 1.

1.1 $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 x \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^3x^2}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} 2y^2 x \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2} = 0 \\ 2x^2 y \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^3x^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ~~$y \neq 0$~~ y ~~любая~~ любая

$y = 0$ ~~$x \neq 0$~~ x любая

$$\begin{cases} \ln(x^2+y^2) + \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ \ln(x^2+y^2) + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

$x = \pm y$ ~~$(x \neq 0, y \neq 0)$~~ $x = \pm \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$

~~$x = 0$~~

и 1.3

1.2 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2(3x^4 + 5x^2y^2 + (x^2+y^2)^2 \log(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2(5x^2y^2 + (x^2+y^2)^2 \log(x^2+y^2) + 3y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy\left(x^4 + x^2y^2 + (x^2+y^2)^2 \log(x^2+y^2) + y^4\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

$x = 0:$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y) = \frac{2y^2\left(y^4 \log y^2\right)}{y^4} = 2y^2 \log y^2$$

$$\begin{pmatrix} 2y^2 \log y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta = 0$$

$d^2 f(0,y) = 2y^2 \log y^2 \, dx^2$ $\cancel{<0}$, $\cancel{\Rightarrow}$ ~~всегда~~ ~~$y<1 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ min~~

$\cancel{>0}$, ~~$y \geq 1$~~ ~~$\Downarrow$ max~~

$y = 0:$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{2x^2\left(x^4 \log x^2\right)}{x^4} = 2x^2 \log x^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 \log x^2 \end{pmatrix} \qquad \Delta = 0$$

$d^2 f(x,0) = 2x^2 \log x^2 \, dy^2$ $\cancel{<0}$

$d^2 f(0,y) < 0$, если $|y| < 1 \Rightarrow$ ~~min~~ max

$d^2 f(0,y) > 0$, если $|y| > 1 \Rightarrow$ ~~max~~ min (строгие)

Если $y = \pm 1$, то не экстремум $(0; \pm 1)$

~~(т.к. в любой окр. этих точек ∃ точки, где~~

~~$f > 0$ и $f < 0$)~~

$d^2 f \cancel{(0,y)} (x,0) < 0$, если $|x| < 1 \Rightarrow \max$

$d^2 f (x,0) > 0$, если $|x| > 1 \Rightarrow \min$ (строгие)

$(\pm 1, 0)$ не явл. экстремумом

$x = \pm \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \quad y = x$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,x) = \frac{2x^2(3x^4 + 5x^4 + 4x^4 \log 2x^2)}{4x^4} =$$

$$= 2x^2(\cancel{8}^{\,2} + \cancel{4}\log 2x^2) = e^{-\frac{1}{2}}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,x) = \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,x) = \frac{4x^2(x^4 + x^4 + 4x^4 \ln 2x^2 + x^4)}{4x^4} =$$

$$= x^2(3 + 4\ln 2x^2) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}}\left(3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} & \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} \\ \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} & \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$\Delta_2 > 0 \quad \Delta_1 > 0 \Rightarrow$ пол. опр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ строгий максимум

$x = \pm \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \quad y = x:$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial x \partial y} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} & -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} \\ -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} & \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$\Delta_2 > 0 \quad \Delta_1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ пол. опр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ min строгий

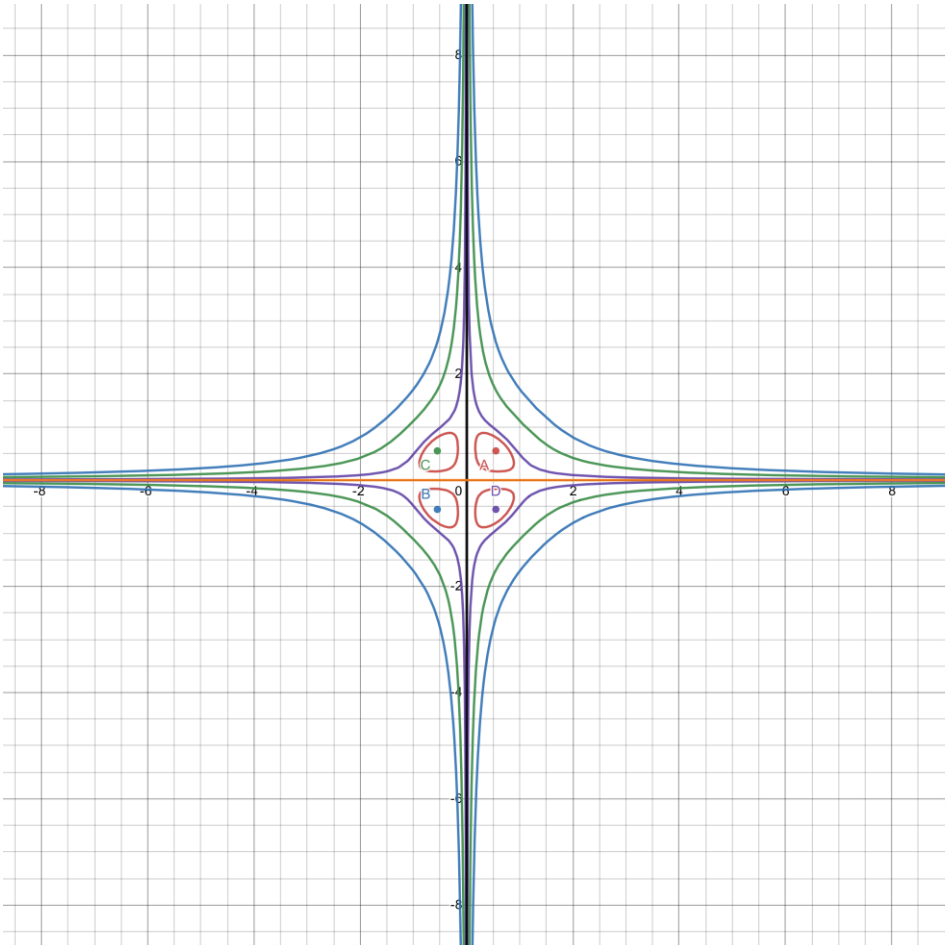

Рисунок №1 – Линии уровня и стационарные точки данной функции (чёрная и оранжевая прямые, точки A, B, C, D)

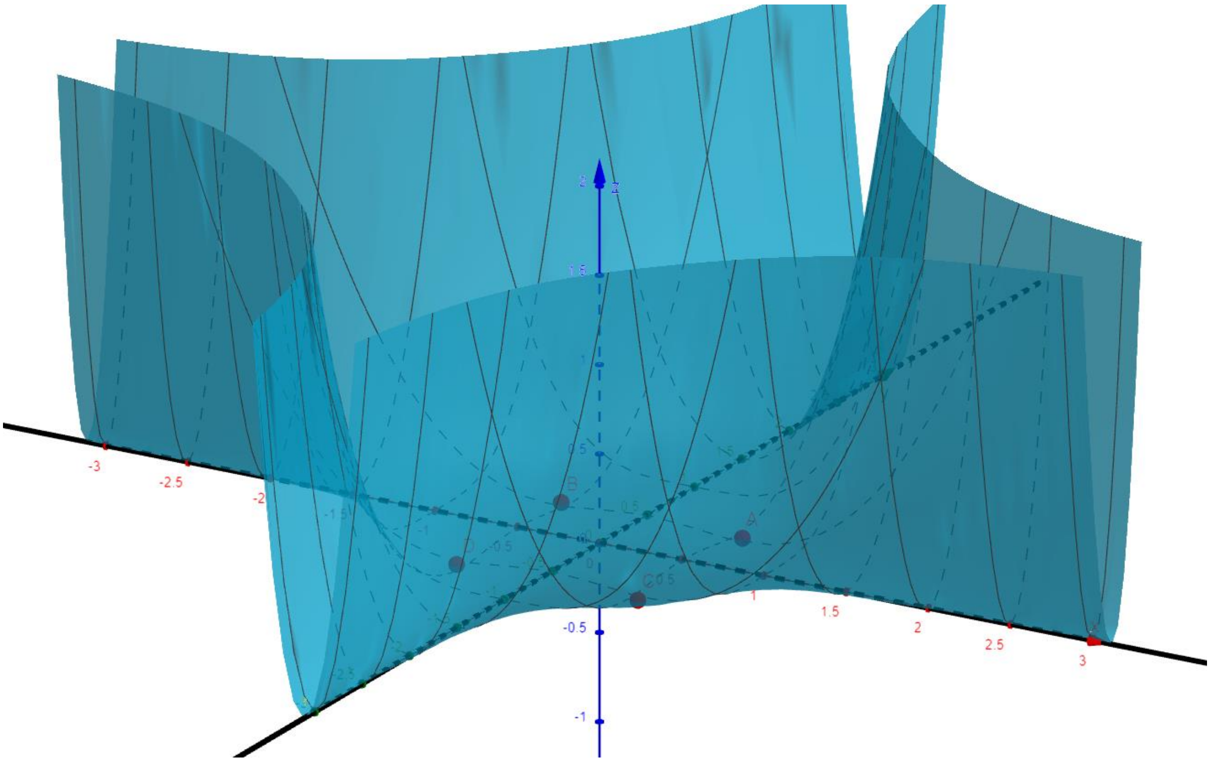

Рисунок №2 – График данной функции

Практическая часть

Критерий останова: $||(\Delta x_k, \Delta y_k)|| < 10^{-10}$.

Количество итераций: 4156.

Вычисленная точка локального экстремума:

$(0.5506953149735413, 0.5506953149735413)$,

$f(0.5506953149735413, 0.5506953149735413) = -0.04598493014643029$.

Время выполнения программы: 0.0937347412109375 сек.

Точная точка экстремума: $\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\right) = (0.5506953149031837, 0.5506953149031837)$.

Стартовая точка: (10, 10).

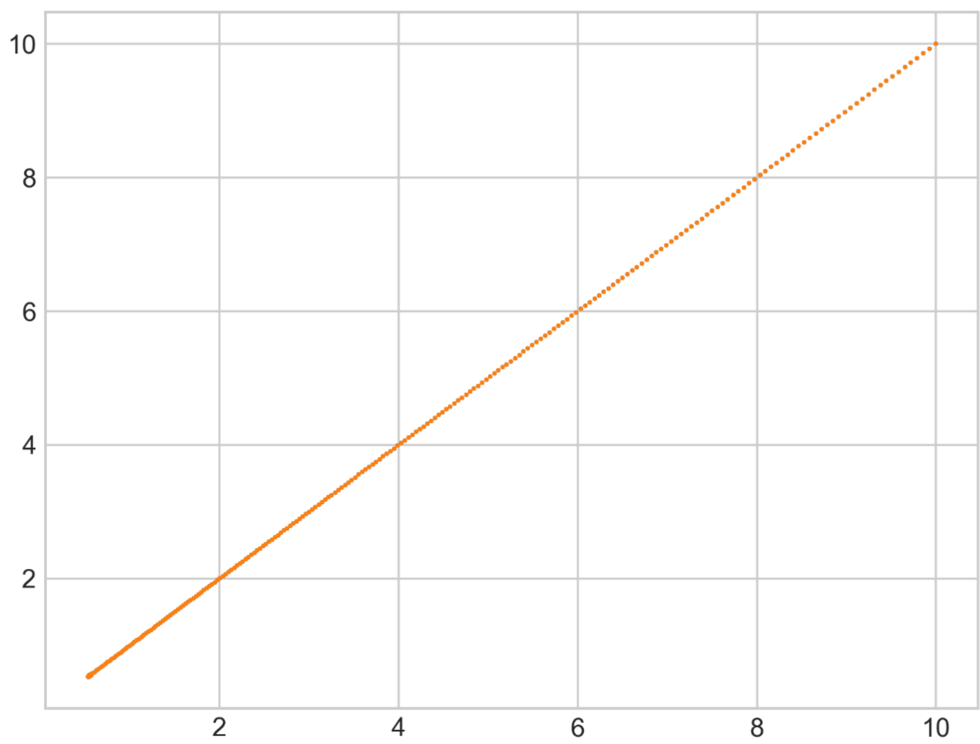

Рисунок №3 – Результат каждого шага для критерия останова $||(\Delta x_k, \Delta y_k)|| < 10^{-10}$

Критерий останова: $|\Delta f| < 10^{-10}$.
Количество итераций: 1798.
Вычисленная точка локального экстремума:
$(0.5507042838271102, 0.5507042838271102)$,
$f(0.5507042838271102, 0.5507042838271102) =$
-0.04598493004884706.
Время выполнения программы: 0.0468754768371582 сек.
Точная точка экстремума: $\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\right) =$
$(0.5506953149031837, 0.5506953149031837)$.
Стартовая точка: (10, 10).

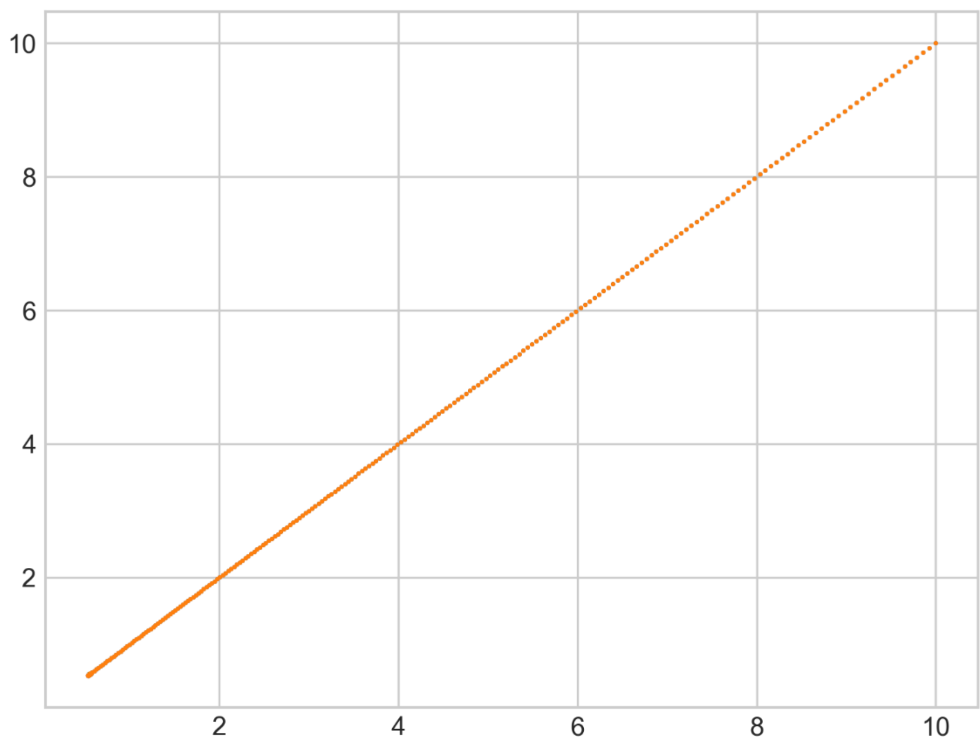

Рисунок №4 – Результат каждого шага для критерия останова $|\Delta f| <$ 10^{-10}

Результат работы программы близок к точному.

Листинг

Интерпретатор Python 3.9.2. Использованы библиотеки matplotlib 3.4.1 и numpy 1.20.1.

main.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time
plt.style.use('seaborn-whitegrid')


def f(x):
    return x[0] * x[0] * x[1] * x[1] * np.log(x[0] * x[0] + x[1] * x[1])


def dy(x, y):
    return 2 * x * x * y * np.log(y * y + x * x) + 2 * y ** 3 * x * x / (y
* y + x * x)


def dx(x, y):
    return 2 * y * y * x * np.log(x * x + y * y) + 2 * x ** 3 * y * y / (x
* x + y * y)


def stop_eps(prev, cur, eps):
    if np.linalg.norm(cur - prev) < eps:
        return True
    else:
        return False


def stop_delta(prev, cur, eps):
    if np.abs(f(cur) - f(prev)) < eps:
        return True
    else:
        return False


def k(a):
    return a * 1000/1005


def calc(start=np.array([10, 10], dtype=float), eps=0.001):
    start_time = time.time()
    cur = start
    res = [cur]
    a = 0.1
    i = 0
```

```python
    while True:
        i += 1
        prev = cur
        grad = np.array([dx(*cur), dy(*cur)], dtype=float)
        a = k(a)
        cur = cur - 1 / np.linalg.norm(grad) * a * grad
        res.append(cur)
        if stop_delta(prev, cur, eps):
            break
    return [res, i, time.time() - start_time]


start = np.array([10, 10], dtype=float)
eps = 0.0000000001
res, number_iterations, calc_time = calc(start, eps)
x = [e[0] for e in res]
y = [e[1] for e in res]
fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(x, y, s=0.5)
ax.scatter(x, y, s=0.5)
plt.savefig(f'./1.png', dpi=300)
print(f'Eps (||(Δx_k,Δy_k )|| < eps): {eps}')
print(f'Number of iterations: {number_iterations}')
print(f'Calculated extremum point: ({res[len(res) - 1][0]}, {res[len(res)
- 1][1]})')
print(f'f({res[len(res) - 1][0]}, {res[len(res) - 1][1]}): {f(res[len(res)
- 1])}')
print(f'Time: {calc_time} seconds')
if start[0] == 10 and start[1] == 10:
    print(f'Precise extremum point: ({np.e**(-1/4)/2**(1/2)}, {np.e**(-
1/4)/2**(1/2)})')
print(f'Starting point: ({start[0]}, {start[1]})')
```