1 Неопределенный интеграл

1.1 Понятие первообразной, неопределённого интеграла и вопросы их существования

Ранее была изучена операция дифференцирования, сопоставляющая функции ее производную. В этом разделе будет изучаться обратная задача, в которой производная известна, а функцию нужно найти.

Замечание 1.1.1 *Ниже под обозначением $\langle a, b\rangle$ будет пониматься произвольный промежуток: отрезок, интервал или полуинтервал.*

Определение 1.1.1 *Первообразной функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется функция $F(x)$ такая, что для всех $x \in \langle a, b\rangle$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.*

Пример 1.1.1 *Функция $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$ будет первообразной для функции $f(x) = x^2$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, но эта первообразная не единственна. Так, функции $F_2(x) = \frac{x^3}{3}+5$ или $F_3(x) = \frac{x^3}{3}-\pi^e$ также будут ее первообразными.*

Пример 1.1.2 *Функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.*

Пример 1.1.3 *Функция $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$ как при $x > 0$, так и при $x < 0$.*

Вопрос об описании всех первообразных данной функции решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.1.1 *Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Для того, чтобы $\Phi(x)$ также была первообразной для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Psi(x) = F(x) - \Phi(x)$, где $F(x)$ и $\Phi(x)$ – первообразные для $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда $\forall x \in \langle a, b\rangle$

$$\Psi'(x) = (F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно теореме Лагранжа, для любых $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ таких, что $x_1 < x_2$,

$$\Psi(x_2) - \Psi(x_1) = \Psi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0, \ \xi \in (x_1, x_2).$$

Значит, $\Psi(x) \equiv C$.
Достаточность. Пусть на $\langle a, b\rangle$ выполнено условие $F(x) - \Phi(x) = C$. Тогда на этом промежутке $\Phi(x) = F(x) + C$, а следовательно

$$\Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

То есть $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$. □

Определение 1.1.2 *Неопределённым интегралом функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется множество всех её первообразных на этом промежутке. Неопределенный интеграл обозначается следующим образом:*

$$\int f(x)dx,$$

где

- $\int$ *- знак неопределенного интеграла;*
- $f(x)$ *- подынтегральная функция;*
- $f(x)dx$ *- подынтегральное выражение;*
- x *- переменная интегрирования.*

Следствие 1.1.2 *Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, то неопределенный интеграл функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ равен*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для краткости информацию о том, что рассматривается промежуток $\langle a, b\rangle$, часто опускают. Например, вместо

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases}$$

пишут

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

подразумевая, что C – кусочно-постоянная.

Замечание 1.1.2 *Если dx трактовать, как дифференциал, то ниже приведенные формулы интегрирования по частям и замены переменной становятся совершенно «механическими».*

Замечание 1.1.3 *Полезно отметить, что не каждая функция имеет первообразную. Так как производная дифференцируемой функции не может иметь разрывов первого рода, то любая функция, имеющая на $\langle a, b\rangle$ разрыв первого рода, не имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразной.*

Позже, при изучении определенного интеграла Римана будет показано, что каждая непрерывная на $\langle a, b\rangle$ функция имеет на этом множестве первообразную.

Замечание 1.1.4 *Первообразные существуют не только у непрерывных функций. Производная дифференцируемой функции может иметь разрывы второго рода. Например,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

Детали остаются читателю.

Для практических целей часто полезно следующее определение.

Определение 1.1.3 *Функция $F(x)$ называется обобщенной первообразной функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, если $F(x) \in C\langle a, b\rangle$ и $F'(x) = f(x)$ всюду на $\langle a, b\rangle$, кроме не более чем конечного числа точек.*

Пример 1.1.4 *Легко проверить, что обобщенной первообразной функции $y = \operatorname{sign} x$ на $\mathbb{R}$ является функция $y = |x|$.*

1.2 Таблица неопределённых интегралов

Ниже приведена таблица интегралов, часто используемых на практике.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1 \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0 \text{ («длинный логарифм»)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \text{ («высокий логарифм»)}$$

Доказательство. В качестве примера приведено доказательство для формулы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0.$$

Для доказательства достаточно показать, что производная правой части равна подынтегральной функции.

$$\left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

□

Важно отметить, что каждая из формул, написанных выше, рассматривается на тех промежутках вещественной оси, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Если таких промежутков несколько, то произвольные постоянные в правой части, вообще говоря, различны.

1.3 Свойства неопределенного интеграла

Теорема 1.3.1 (Интеграл и производная) *Пусть существует $\int f(x)dx$ на $\langle a, b\rangle$, тогда на $\langle a, b\rangle$:*

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Доказательство. 1. Так как $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. Доказывается аналогично и предлагается в качестве упражнения. □

Прямо из определения легко получается и следующая важная лемма:

Лемма 1.3.1 *Если $F(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$, то $\int dF(x) = F(x) + C$.*

Следующая теорема широко применяется на практике.

Теорема 1.3.2 (Линейность неопределенного интеграла) *Пусть на $\langle a, b\rangle$ существуют неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Тогда*

$$\int (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx.$$

Доказательство. По предыдущему свойству,

$$\left(\alpha \int f dx + \beta \int g dx\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x),$$

то есть $\alpha \int f dx + \beta \int g dx$ – первообразная для $\alpha f + \beta g$ на $\langle a, b\rangle$, а значит равенство установлено. $\square$

Пример 1.3.1 *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 5}{x} dx.$$

По свойству линейности,

$$\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 5}{x} dx = \int x dx + \int x^{-1/3} dx + 5 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} x^{2/3} + 5 \ln |x| + C.$$

Пример 1.3.2 *Вычислить интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Так как $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, *то*

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Теорема 1.3.3 (Формула замены переменной) *Пусть на $\langle a, b\rangle$ существует неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, $\varphi(t) : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$, дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$, тогда*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, тогда, согласно теореме о производной сложной функции, $F(\varphi(t))$ – первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $\langle \alpha, \beta\rangle$, откуда и следует равенство. $\square$

Пример 1.3.3 *Вычислить интеграл*

$$\int xe^{x^2}dx.$$

Пусть $x^2 = t$*, тогда* $d(x^2) = dt$ *или* $2xdx = dt$*, а значит*

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Пример 1.3.4 *Вычисление предыдущего интеграла можно оформить и иначе, если* dx *трактовать, как дифференциал.*

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Данный способ оформления называется занесением под знак дифференциала.

Теорема 1.3.4 (Формула интегрирования по частям) *Пусть* u, v *дифференцируемы на* $\langle a, b\rangle$ *и на* $\langle a, b\rangle$ *существует неопределенный интеграл* $\int vdu$*, тогда на* $\langle a, b\rangle$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство. Действительно, если рассмотреть дифференциал от правой части равенства, то получим

$$d\left(uv - \int vdu\right) = d(uv) - d\left(\int vdu\right) = d(uv) - vdu = udv,$$

так как $d(uv) = udv + vdu$. Отсюда следует требуемое. □

Пример 1.3.5 *Вычислить интеграл*

$$\int x\sin xdx.$$

Пусть $u = x$*, тогда* $du = dx$*,* $dv = \sin xdx$ *и* $v = -\cos x$*. Значит,*

$$\int x\sin xdx = \left|\begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin xdx \\ v = -\cos x \end{array}\right| = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Пример 1.3.6 *Вычислить интеграл*

$$\int (x^2+2x)e^x dx.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$\int (x^2+2x)e^x dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2+2x \\ du = (2x+2)dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (x^2+2x)e^x - \int (2x+2)e^x dx.$$

В результате степень многочлена перед экспонентой уменьшилась. Проинтегрируем по частям снова,

$$\int (2x+2)e^x = \left| \begin{array}{c} u = 2x+2 \\ du = 2dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (2x+2)e^x - 2\int e^x dx = (2x+2)e^x - e^x + C.$$

Окончательно,

$$\int (x^2+2x)e^x dx = (x^2+2x)e^x - (2x+2)e^x + e^x + C.$$

Замечание 1.3.1 *Формулу интегрирования по частям удобно применять для интегралов вида*

$$\int P_n(x)a^{\alpha x}dx, \ \int P_n(x)\sin(\alpha x)dx, \ \int P_n(x)\cos(\alpha x)dx,$$

где $P_n(x)$ *– многочлен степени* n*.*

Пример 1.3.7 *Вычислить интеграл*

$$\int e^x \sin x dx.$$

Проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

еще раз проинтегрируем по частям, получим

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

В итоге,

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

откуда

$$\int e^x \sin x dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

Интегралы такого типа, как рассмотрен выше, называются самосводящимися.

1.4 Интегрирование рациональных дробей

1.5 Некоторые сведения из теории многочленов

В дальнейшем, под многочленом (полиномом) $P_n(x)$ степени $n \geq 1$ будет подразумеваться функция

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Под многочленом нулевой степени будет подразумеваться константа.

Определение 1.5.1 *Рациональной дробью называется дробь* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, *где* $P_n(x)$ *– многочлен степени* n, $Q_m(x)$ *– многочлен степени* m.

Определение 1.5.2 *Рациональная дробь называется правильной, если* $n < m$, *иначе она называется неправильной.*

Лемма 1.5.1 *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– неправильная дробь. Тогда существует единственное представление*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

где $R_{n-m}(x)$ *– многочлен степени* $(n - m)$, $T_k(x)$ *– многочлен степени* k, *причем* $k < m$.

В теории многочленов доказывается следующая теорема.

Теорема 1.5.1 *Пусть $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, у которого коэффициент при старшей степени равен единице. Тогда он может быть разложен на множители следующим образом*

$$P_n(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_p)^{k_p} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_mx+c_m)^{l_m},$$

где

$$k_p,\ l_m \in \mathbb{N},\ D = b_m^2 - 4c_m < 0,\ k_1 + k_2 + \ldots + k_p + 2 \cdot (l_1 + \ldots + l_m) = n.$$

Замечание 1.5.1 *Условия $b_i^2 - 4c_i < 0$ означают, что квадратные трехчлены $x^2 + b_ix + c_i$ не имеют вещественных корней. В этом случае они имеют два комплексно-сопряженных корня $\alpha \pm \beta i$.*

1.6 Разложение рациональной дроби на простейшие

Определение 1.6.1 *Простейшими дробями называют дроби вида*

$$\frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Оказывается, любая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму простейших. Этой теореме предпошлем две леммы.

Лемма 1.6.1 *Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь и $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, где $\widetilde{Q}(a) \neq 0$. Существует число $A \in \mathbb{R}$ и многочлен $\widetilde{P}(x)$, такие что*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)}$$

и выберем число A так, чтобы число a было корнем числителя.

$$P_n(a) - A \cdot \widetilde{Q}(a) = 0 \Rightarrow A = \frac{P_n(a)}{\widetilde{Q}(a)},$$

где последнее равенство корректно, так как по условию $\widetilde{Q}(a) \neq 0$. При данном A в числителе стоит многочлен $P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)$ с корнем a, значит его можно разложить на множители $(x-a) \cdot \widetilde{P}(x)$, а тогда

$$\frac{P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{(x-a) \cdot \widetilde{P}(x)}{(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$

Существование разложения доказано.
Докажем единственность такого разложения. От противного, пусть существует два разложения

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_2(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)}.$$

Домножив на $(x-a)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, имеем

$$A_1 \cdot \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_1(x) \cdot (x-a) = A_2 \cdot \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_2(x) \cdot (x-a),$$

причем это равенство верно при всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x = a$, тогда равенство превращается в

$$A_1 \cdot \widetilde{Q}(a) = A_2 \cdot \widetilde{Q}(a),$$

и так как $\widetilde{Q}(a) \neq 0$ то $A_1 = A_2$. Но тогда коэффициенты многочлена $\widetilde{P} = P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)$ тоже вычисляются однозначно. Противоречие. $\square$

Лемма 1.6.2 *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– правильная рациональная дробь и* $Q_m(x) = (x^2+px+q)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, $p^2 - 4q < 0$, $\alpha \pm \beta i$ *– комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена* $x^2 + px + q$, *причем* $\widetilde{Q}(\alpha \pm \beta i) \neq 0$. *Существуют единственные числа* $A, B \in \mathbb{R}$ *и многочлен* $\widetilde{P}(x)$ *такие, что*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} \cdot \widetilde{Q}(x)},$$

причем это представление единственно.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{P_n(x) - (Ax+B) \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x^2+px+q)^k \cdot \widetilde{Q}(x)}$$

Выберем числа A, B так, чтобы число $\alpha + \beta i$ было корнем числителя, то есть чтобы

$$P_n(\alpha+\beta i) - (A(\alpha+\beta i) + B) \cdot \widetilde{Q}(\alpha+\beta i) = 0.$$

Так как значение многочлена в комплексной точке дает комплексное число, то

$$P_n(\alpha+\beta i) = P_1 + iP_2,$$
$$\widetilde{Q}(\alpha+\beta i) = \widetilde{Q}_1 + i\widetilde{Q}_2,$$

где $P_1, P_2, \widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2 \in \mathbb{R}$ и $\widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_2^2 \neq 0$, так как по условию $\widetilde{Q}(\alpha+\beta i) \neq 0$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$P_1 + iP_2 - (A\alpha + iA\beta + B)\cdot(\widetilde{Q}_1 + i\widetilde{Q}_2) = 0.$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим

$$(P_1 - A(\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2) - B\widetilde{Q}_1) + i(P_2 - A(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) - B\widetilde{Q}_2) = 0 + 0\cdot i$$

Таким образом,

$$\begin{cases} P_1 - A(\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2) - B\widetilde{Q}_1 = 0 \\ P_2 - A(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) - B\widetilde{Q}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2) + B\widetilde{Q}_1 = P_1 \\ A(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) + B\widetilde{Q}_2 = P_2 \end{cases}$$

Вычислим определитель данной системы:

$$\Delta = (\alpha\widetilde{Q}_1 - \beta\widetilde{Q}_2)\widetilde{Q}_2 - \widetilde{Q}_1(\alpha\widetilde{Q}_2 + \beta\widetilde{Q}_1) = -\beta(\widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_2^2) \neq 0.$$

Значит из системы единственным образом могут быть найдены числа A и B такие, что $\alpha+\beta i$ - корень числителя. Если $\alpha+\beta i$ корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\alpha-\beta i$ – тоже его корень, значит при найденных A и B числитель $P_n(x) - (Ax+B)\cdot\widetilde{Q}(x)$ может быть разложен на множители

$$P_n(x) - (Ax+B)\cdot\widetilde{Q}(x) = (x^2+px+q)\cdot\widetilde{P}(x),$$

причем

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{(x^2+px+q)\cdot\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^k\cdot\widetilde{Q}(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\cdot\widetilde{Q}(x)}.$$

Тем самым, существование разложения доказано.
Единственность доказывается аналогично доказательству предыдущей леммы и остается в качестве упражнения. $\square$
Две данные леммы позволяют доказать теорему, которая и является основной целью данного параграфа.

Теорема 1.6.1 *Любая рациональная дробь может быть представлена единственным образом в виде*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} +$$

$$+\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+\frac{B_{t1}X + C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + \ldots + \frac{B_{tl_t}X + C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t},$$

где $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}, R_{n-m}(x)$ *– многочлен степени* $(n-m)$ *и знаменатель исходной дроби имеет разложение*

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}.$$

Доказательство. Пусть в рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ степень $n > m$, тогда по лемме 1.5.1 ее можно представить в виде суммы многочлена $R_{n-m}(x)$ и правильной дроби $\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$, где $k < m$. Таким образом достаточно рассмотреть случай правильной и несократимой дроби $\frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$. По лемме 1.6.1 дробь можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{\widetilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1} \cdot \widetilde{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\widetilde{Q}^{(1)}(x) = (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$. Далее по лемме 1.6.1 также можно найти число A_{12} и многочлен $\widetilde{P}^{(12)}(x)$ такие, что

$$\frac{\widetilde{P}^{(11)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-1} \cdot \widetilde{Q}^{(1)}(x)} = \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \frac{\widetilde{P}^{(12)}(x)}{(x-a_1)^{k_1-2} \cdot \widetilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Продолжая аналогичные рассуждения получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{\widetilde{P}^{(1k_1)}(x)}{\widetilde{Q}^{(1)}(x)}.$$

Аналогично, для всех вещественных корней знаменателя a_i кратности k_i, $i = 1...s$, получим

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_{2k_1}}{(x-a_2)} + \ldots +$$

$$\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{k_s}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{\widetilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\widetilde{Q}^{(s)}(x)},$$

где $\widetilde{Q}^{(s)}(x) = (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}$, при этом дробь $\frac{\widetilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\widetilde{Q}^{(s)}(x)}$ – правильная. Далее используем лемму 1.6.2, получим

$$\frac{\widetilde{P}^{(sk_s)}(x)}{\widetilde{Q}^{(s)}(x)} = \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \frac{\hat{P}^{(11)}(x)}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1 - 1} \cdot \hat{Q}^{(1)}(x)},$$

где $\hat{Q}^{(1)}(x) = (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}$. Продолжая рассуждения таким же образом получим, что каждой t паре комплексно-сопряженных корней знаменателя кратности l_t, будут соответствовать l_t простейших дробей третьего и четвертого типа, и окончательно:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{A_{2k_1}}{(x-a_2)} + \ldots +$$
$$\frac{A_{s1}}{(x-a_s)^{sk_s}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x-a_s)} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)} +$$
$$\frac{B_{21}x + C_{21}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2}} + \ldots + \frac{B_{2l_2}x + C_{2l_2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)} + \ldots + \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{(x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}} + \ldots + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{x^2 + p_t x + q_t}.$$

□

1.7 Интегрирование простейших дробей

В данном пункте в общем виде показывается, как можно вычислить интеграл от простейших рациональных дробей. Для начала рассмотрим интеграл

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx, \ k \geq 1.$$

1. При $k = 1$ имеем

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

2. При $k > 1$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$$

Теперь покажем, как вычисляются интегралы

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx, \ k \geq 1, \ p^2 - 4q < 0.$$

3. Пусть $k = 1$. Дополним знаменатель до полного квадрата,

$$x^2 + px + q = x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Так как выражение
$$\frac{4q-p^2}{4}>0,$$
то его можно обозначить, как a^2. Кроме того, положим $t=x+\frac{p}{2}$, тогда $dt=dx$ и
$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dt=\int\frac{At+(B-\frac{Ap}{2})}{t^2+a^2}dt=$$
$$A\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=$$
$$=\frac{A}{2}\ln|t^2+a^2|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$
$$=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}+C.$$
4. Пусть $k>1$. Используя обозначения, введенные в пункте 3, получим
$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=A\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$
Сначала рассмотрим первый интеграл:
$$\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k}+C.$$
Теперь рассмотрим второй интеграл, обозначив его I_k:
$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=$$
$$\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}I_{k-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt.$$
Последний интеграл вычислим по частям
$$\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\left|\begin{array}{c}u=t\\du=dt\\dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}\\v=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\end{array}\right|=$$
$$=\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{4(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

Тем самым,

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}\left(1+\frac{1}{4(1-k)}\right)-\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Таким образом, получена рекуррентная формула, выражающая I_k через I_{k-1}. Так как

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C,$$

то схема вычисления интеграла полностью изложена.

Следствие 1.7.1 *Интеграл от рациональной дроби может быть выражен через элементарные функции.*

1.8 Метод Остроградского

Вычисление интеграла от последнего типа дроби – задача трудоемкая. Полезно пользоваться следующей формулой (в случае, когда дробь под интегралом – правильная):

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx.$$

В этой формуле $Q_2(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но первой кратности. Многочлен $Q_1(x)$ – это частое от деления $Q(x)$ на $Q_2(x)$. Все написанные дроби являются правильными.

Доказательство. Остается в качестве упражнения □

1.9 Интегрирование иррациональностей

Пусть $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ – рациональная функция относительно каждой из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

1. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right)dx,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Q}$. Подстановка

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

m – общий знаменатель $p_1, p_2, ..., p_n$.

2. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \; a \neq 0.$$

Функция под интегралом с помощью алгебраических преобразований приводится к виду:

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) = \frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + R_2(x),$$

где $R_1(x), R_2(x)$ – рациональные дроби. С интегралом от рациональной дроби все ясно. Как вычислить интеграл от первой дроби?

Разложив дробь на простейшие, придем к дробям (и интегралам) трех типов. Первый тип:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

Этот интеграл может быть вычислен, как

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где коэффициенты ищутся после дифференцирования методом неопределенных коэффициентов.

Второй тип:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Этот интеграл сводится к интегралу предыдущего типа подстановкой $t = (x-a)^{-1}$.

Третий тип:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

Если $ax^2+bx+c = \alpha(x^2+px+q)$, то приходим к интегралу

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^{k+1/2}} dx = E \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{k+1/2}} dx + F \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k+1/2}}.$$

Второй интеграл вычисляется, используя подстановку Абеля:

$$t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'.$$

Иначе

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t+1}$$

и коэффициенты подбираются так, чтобы в квадратных трехчленах исчезли члены, содержащие t. Приходим к интегралу

$$\int \frac{P_{k-1}(x)}{(x^2+a)^k\sqrt{sx^2+r}} dx.$$

Раскладывая дробь на простейшие, имеем либо

$$\int \frac{x}{(x^2+a)^k\sqrt{sx^2+r}}dx,$$

либо

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^k\sqrt{sx^2+r}}.$$

Последний интеграл снова вычисляется подстановкой Абеля

$$t = \left(\sqrt{sx^2+r}\right)'.$$

3. Дифференциальный бином

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx,$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Если $p \in \mathbb{Z}$, то $x = t^N$, N – общий знаменатель m, n.

Если $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$, то $ax^n + b = t^s$, s – знаменатель p.

Если $(m+1)/n + p \in \mathbb{Z}$, то $a + bx^{-n} = t^s$, s – знаменатель p.

В других случаях интеграл в элементарных функциях не выражается.

1.10 Интегралы от тригонометрических функций

В этом разделе будут рассмотрены интегралы от некоторых классов тригонометрических функций.

Покажем, что интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

всегда сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Для этого обратимся к формулам выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла, а тем самым представим их через t:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

А также

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом исходный интеграл будет выражен через рациональные функции:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$