□

Долгое время была актуальна так называемая гипотеза континуума: любое бесконечное подмножество $\mathbb{R}$ либо континуально, либо счетно. Этот вопрос был окончательно решен в 1963 году О. Коэном. Было доказано, что гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках принятой аксиоматики теории множеств. Ситуация вполне аналогична независимости пятого постулата Евклида от остальных аксиом геометрии.

5.6 Контрольные вопросы и задачи

1. Покажите, что из системы отрезков, покрывающей отрезок, не всегда можно выделить конечную систему, покрывающую этот отрезок.

2. Покажите, что из системы отрезков, покрывающих интервал, не всегда можно выделить конечную систему, покрывающую этот интервал.

3. Покажите, что в множестве $\mathbb{Q}$ ни теорема Кантора, ни лемма о предельной точке, ни лемма Бореля-Лебега не верны.

4. Покажите, что любое вещественное число является предельной точкой множества рациональных чисел.

6 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

6.1 Понятие предела последовательности

Определение 6.1.1 *Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется последовательностью.*

Обычно последовательности обозначают маленькими латинскими буквами, например $x(n)$, $y(n)$, причем чаще всего аргумент n пишется снизу, то есть x_n, y_n.

Определение 6.1.2 ($\varepsilon - n$ определение предела последовательности) *Число A называется пределом последовательности x_n, если для любого положительного числа ε существует натуральное число n_0, зависящее от ε такое, что какое бы ни взять натуральное число n, большее n_0, будет выполняться неравенство*

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

При этом пишут, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ или $x_n \longrightarrow A$.

Ниже приведена короткая запись данного определения, которая обычно и будет использоваться в дальнейшем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon.$$

Замечание 6.1.1 *Геометрически определение предела последовательности означает (см. рисунок 1), что какую бы полосу шириной 2ε ни взять, найдется номер n_0, что все члены последовательности с номерами, большими n_0, лежат в этой полосе. Ясно, что при уменьшении ε, уменьшается ширина полосы и номер n_0, вообще говоря, увеличивается.*

Легко заметить, что это же определение, используя понятие ε-окрестности можно переписать в виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A).$$

Определение 6.1.3 (Определение предела последовательности через окрест
Число A называется пределом последовательности x_n, если

$$\forall U(A)\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(A).$$

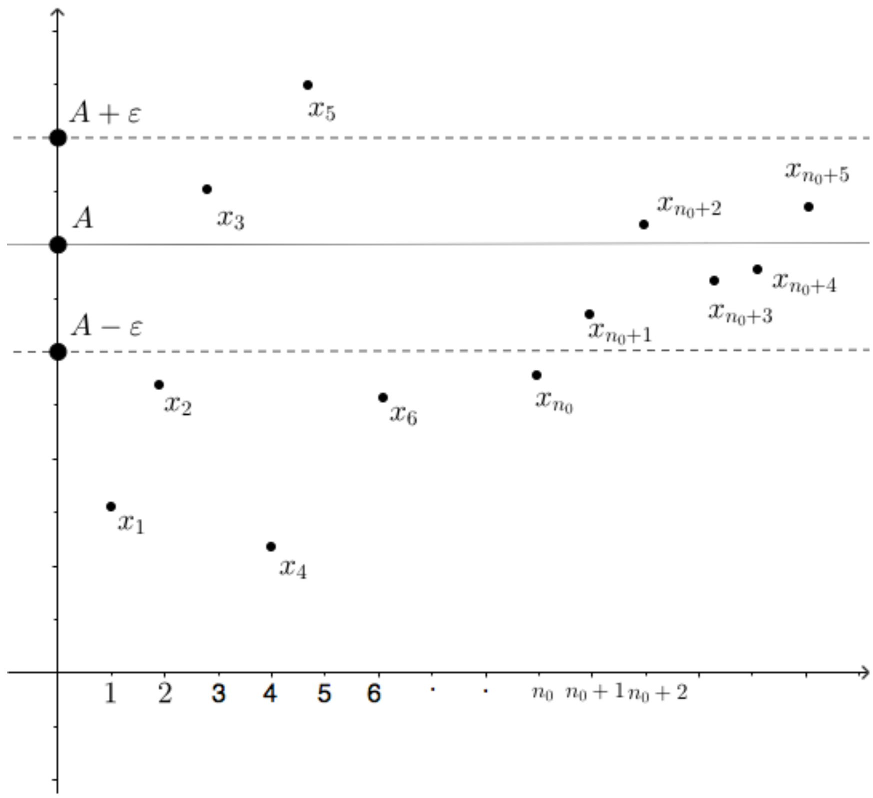

Рис. 1 Предел последовательности

Оказывается, что справедлива следующая лемма.

Лемма 6.1.1 *Определения 6.1.2 и 6.1.3 эквиваленты.*

Доказательство. Сначала будет доказано, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 6.1.2, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и в смысле определения 6.1.3. Пусть $U(A) = (\alpha, \beta)$ – произвольная окрестность точки A. Положив $\varepsilon = \min(A-\alpha, \beta - A)$ оказывается, что $U_\varepsilon(A) \subset U(A)$. Согласно определению 6.1.2, по выбранному ε

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A) \subset U(A),$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 6.1.3.

Доказательство, что из определения 6.1.3 следует определение 6.1.2, моментально следует из того, что ε-окрестность является частным случаем окрестности. $\square$

Пример 6.1.1 *Доказать по определению, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Нужно найти такое натуральное число n_0, что при всех натуральных $n > n_0$ будет выполняться

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

то есть $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Если положить $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то при $n > n_0$ выполняется $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$. В силу произвольности числа ε получено, что число 0 является пределом последовательности $x_n = \frac{1}{n}$.

Пример 6.1.2 *Доказать по определению, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n}{2n^2+4} = \frac{3}{2}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Справедлива цепочка преобразований

$$\left|\frac{3n^2+2n}{2n^2+4} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{4n-12}{2(2n^2+4)}\right|.$$

Можно считать, что $n > 3$, тогда

$$\left|\frac{4n-12}{2(2n^2+4)}\right| < \left|\frac{4n}{4n^2}\right| = \frac{1}{n}.$$

Положив $\frac{1}{n} < \varepsilon$ *получается, что при* $n > n_0 = \max\left(3, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$ *будет*

$$\left|\frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.

Пример 6.1.3 *Доказать, что последовательность* $x_n = (-1)^n$ *не имеет предела. Для этого достаточно выписать отрицание того факта, что число* A *является пределом последовательности:*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |x_n - A| > \varepsilon_0.$$

Пусть $\varepsilon_0 = 1$ *и* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Если* $A < 0$, *то достаточно положить* $n = 2n_0$, *если* $A \geq 0$, *то* $n = 2n_0 + 1$. *Тогда для любого* $n_0 \in \mathbb{N}$ *получается*

$$|x_n - A| = |(-1)^n - A| \geq 1,$$

то есть никакое число A *пределом последовательности не является.*

Определение 6.1.4 *Если последовательность имеет конечный предел, то говорят, что она сходится. Иначе говорят, что она расходится.*

Определение предела последовательности дополняется следующими важными случаями.

Определение 6.1.5 *Говорят, что последовательность* x_n *стремится к плюс бесконечности и пишут* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 6.1.6 *Говорят, что последовательность* x_n *стремится к минус бесконечности и пишут* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 6.1.7 *Говорят, что последовательность* x_n *стремится к бесконечности и пишут* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Замечание 6.1.2 *Данные определения можно переписать через ε-окрестности и через окрестности, как сделано в определениях 6.1.2 и 6.1.3. Лемма 6.1.1 сохраняется. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.*

Замечание 6.1.3 *Про последовательности, имеющие пределом $+\infty$, $-\infty$ или ∞ все равно говорят, что они расходятся.*

Пример 6.1.4 *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5}{2n+4} = +\infty.$$

Справедлива цепочка преобразований

$$\left|\frac{3n^2-5}{2n+4}\right| > \left|\frac{3n^2-5n}{2n+4n}\right| = \left|\frac{3n-5}{6}\right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

При $n > 1$ дробь положительна и

$$\frac{3n-5}{6} \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\frac{6}{\varepsilon}+5}{3}.$$

Положив

$$n_0 = \left[\frac{\frac{6}{\varepsilon}+5}{3}\right],$$

получается, что при $n > \max(n_0, 1)$ выполняется

$$\left|\frac{3n-5}{6}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

а значит и

$$\left|\frac{3n^2-5}{2n+4}\right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Замечание 6.1.4 *Запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ будет всегда снабжена уточнением: либо $A \in \mathbb{R}$, либо $A \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Замечание 6.1.5 *В определении предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что $n_0 = n_0(\varepsilon)$, а так же то, что $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Ниже сформулированы свойства последовательностей, имеющих предел.

Лемма 6.1.2 (Свойства сходящихся последовательностей) *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, тогда:*

1. *При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.*

2. *При $A \in \mathbb{R}$ последовательность x_n ограничена.*

3. *В любой окрестности $A \in \overline{\mathbb{R}}$ содержатся все элементы последовательности x_n, за исключением не более чем конечного числа.*

Доказательство. 1. От противного, пусть A_1 и A_2 – пределы последовательности x_n, причем $A_1 \neq A_2$. Пусть $U(A_1), U(A_2)$ – окрестности точек A_1 и A_2 такие, что

$$U(A_1) \cap U(A_2) = \varnothing.$$

По определению предела, для окрестности $U(A_1)$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(A_1),$$

а для окрестности $U(A_2)$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow x_n \in U(A_2).$$

Пусть $n_2 = \max(n_0, n_1)$, тогда

$$\forall n > n_2 \Rightarrow (x_n \in U(A_1)) \wedge (x_n \in U(A_2)) \Rightarrow x_n \in U(A_1) \cap U(A_2),$$

что невозможно, так как пересечение пусто.
2. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < 1 \Leftrightarrow (A - 1) < x_n < (A + 1)$$

и все элементы последовательности, начиная с $n_0 + 1$, ограничены по модулю числом

$$\max(|A + 1|, |A - 1|).$$

До $n_0 + 1$ имеется ровно n_0 членов последовательности, тогда положив

$$C = \max(|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n_0}|, |A + 1|, |A - 1|),$$

получается, что

$$|x_n| \leq C,$$

т. е. последовательность x_n ограничена.
3. Пусть $U(A)$ – произвольная окрестность точки A. Согласно определению предела,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in U(A),$$

а значит вне окрестности $U(A)$ содержится не более n_0 членов.

□

6.2 Арифметические свойства пределов

Ниже сформулирована и доказана теорема об арифметических операциях над сходящимися последовательностями.

Теорема 6.2.1 (Арифметические свойства пределов) *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$, *тогда*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = A + B$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$, $y_n \neq 0$.

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника, при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$

$$|x_n + y_n - (A + B)| = |(x_n - A) + (y_n - B))| \leq |x_n - A| + |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то по второму пункту леммы 6.1.2

$$\exists C > 0 : |y_n| \leq C.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)}.$$

Тогда, используя неравенство треугольника, при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$

$$|x_n y_n - AB| = |x_n y_n + Ay_n - Ay_n - AB| \leq |x_n y_n - Ay_n| + |Ay_n - AB| =$$

$$= |y_n| \cdot |x_n - A| + |A| \cdot |y_n - B| \le C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{|A|\varepsilon}{2(|A|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{B},$$

так как тогда, по доказанному в пункте 2,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $B \ne 0$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |y_n - B| < \frac{|B|}{2},$$

откуда

$$B - \frac{|B|}{2} < y_n < B + \frac{|B|}{2}.$$

Если положить $C = \min\left(\left|B - \frac{|B|}{2}\right|, \left|B + \frac{|B|}{2}\right|\right)$, то

$$|y_n| \ge C \Rightarrow 0 < \frac{1}{|y_n|} \le \frac{1}{C}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - B| < \varepsilon C B,$$

а значит при $n > \max(n_0, n_1)$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - y_n}{B y_n}\right| \le \frac{|B - y_n|}{CB} < \varepsilon.$$

□

Пример ниже иллюстрирует, как с помощью данной теоремы можно раскрывать некоторые неопределенности.

Пример 6.2.1 *Вычислить предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1}.$$

Вынося в числителе и знаменателе старшие степени за скобку, получается

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{2n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Пределы последовательностей

$$\frac{5}{n},\ \frac{4}{n^2},\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2}$$

равны нулю, что легко показать по определению предела, значит предел числителя равен 3*, а предел знаменателя равен* 2*. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{2n^2+n+1}=\frac{3}{2}.$$

На самом деле, справедлива более общая теорема, чем теорема 6.2.1.

Теорема 6.2.2 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$*,* $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$*, тогда если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в* $\overline{\mathbb{R}}$*, то:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$, $y_n \neq 0$.

Доказательство. Доказательство предлагается в качестве упражнения. □

6.3 Предельный переход в неравенствах

Теорема 6.3.1 *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$*,* $A < B$*,* $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$*. Тогда*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n.$$

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$ (другие случаи остаются в качестве упражнения). Пусть $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$, тогда так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{B-A}{2} \Rightarrow x_n < A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - B| < \frac{B-A}{2} \Rightarrow y_n > B - \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

Значит, при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ выполняется

$$x_n < \frac{A+B}{2} < y_n,$$

откуда и следует требуемое. □

Следствие 6.3.2 (Предельный переход в неравенствах) *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. *Если* $x_n > y_n$ *начиная с какого-либо номера* n_0, *то* $A \geq B$.

2. *Если* $x_n \geq y_n$ *начиная с какого-либо номера* n_0, *то* $A \geq B$.

Доказательство. 1. От противного, пусть $A < B$. Согласно теореме 6.3.1 $\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < y_n$. Это противоречит условию.
Второй пункт доказывается аналогично. $\square$

Замечание 6.3.1 *Важно отметить, что в 1 пункте следствия 6.3.2 нельзя написать строгое неравенство* $A > B$. *Например, для последовательностей* $x_n = \frac{1}{n}$ *и* $y_n = 0$ *выполняется неравенство* $x_n > y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *однако* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

6.4 Теорема о сжатой переменной

Теорема 6.4.1 (О сжатой переменной) *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}$ *выполняется* $x_n \leq z_n \leq y_n$. *Пусть, кроме того,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, *тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \ A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Тогда при $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ выполняется

$$A - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < A + \varepsilon \Leftrightarrow |z_n - A| < \varepsilon.$$

$\square$

6.5 Теорема Вейерштрасса

Определение 6.5.1 *Говорят, что последовательность* x_n *возрастает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} > x_{n_2}.$$

Определение 6.5.2 *Говорят, что последовательность* x_n *не убывает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} \geq x_{n_2}.$$

Определение 6.5.3 *Говорят, что последовательность x_n убывает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} < x_{n_2}.$$

Определение 6.5.4 *Говорят, что последовательность x_n не возрастает, если*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > n_2 \Rightarrow x_{n_1} \le x_{n_2}.$$

Определение 6.5.5 *Про возрастающую (не убывающую, убывающую, не возрастающую) последовательность также говорят, что она монотонна.*

Теорема 6.5.1 (Вейерштрасса) *Неубывающая (невозрастающая) последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху (снизу).*

Доказательство. Пусть последовательность не убывает.
Необходимость следует из того факта, что сходящаяся последовательность ограничена (лемма 6.1.2).
Достаточность. Так как x_n ограничена сверху, то существует $A = \sup x_n < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. По свойству супремума (лемма 4.1.3),

$$\exists n_0 : A - \varepsilon < x_{n_0} \le A.$$

Так как последовательность x_n не убывает, то

$$\forall n > n_0 \Rightarrow A - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le A < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. □
Теорема Вейерштрасса может быть дополнена следующим образом.

Лемма 6.5.1 *Если последовательность не убывает и не ограничена сверху, то ее предел равен $+\infty$. Если последовательность не возрастает и не ограничена снизу, то ее предел равен $-\infty$.*

Доказательство. Так как последовательность не ограничена сверху, то по $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такой, что

$$x_{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как последовательность не убывает, то при $n > n_0$ аналогично выполнено

$$x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тем самым установлено, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. □

6.6 Второй замечательный предел и число e

Теорема 6.6.1 (Второй замечательный предел) *Существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Доказательство. Достаточно показать, что последовательность

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

убывает. Действительно, используя неравенство Бернулли (лемма 3.5.1) при $n\geq 2$:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\geq\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Поскольку члены последовательности положительны и последовательность убывает при $n\geq 2$, то по теореме Вейерштрасса 6.5.1 существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Последний предел существует по доказанному выше, тем самым существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

□

Определение 6.6.1 *Рассмотренный выше предел называют вторым замечательным пределом, а его значение называют числом e, то есть*

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ниже предложено еще одно доказательство теоремы 6.6.1.
Доказательство. Используя формулу бинома Ньютона,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\ldots$$

$$+\frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n} = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

С увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n скобки вида $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$ и т.д. увеличиваются, а значит, $x_{n+1} > x_n$, т.е. последовательность, возрастает.

Осталось доказать, что последовательность ограничена сверху. Для этого достаточно заменить каждую скобку справа на 1, тем самым:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Усилив неравенство, заменив факториалы в знаменателе степенью числа 2, получается

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Выражение справа представляет из себя сумму геометрической прогрессии, тем самым

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2+1-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Значит, по теореме Вейерштрасса 6.5.1 последовательность имеет предел. □

Замечание 6.6.1 *Из последнего доказательства хорошо видно, что* $2 < e < 3$.

6.7 Сравнение скорости роста функций

При вычислении пределов часто бывают полезны следующие соотношения.

Теорема 6.7.1 *Справедливы равенства:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1, \quad k \in \mathbb{N}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$

Доказательство. 1. Последовательность x_n может быть переписана в виде

$$x_n = \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{a}{n} = x_{n-1} \cdot \frac{a}{n}. \tag{3}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, то

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{a}{n} < 1,$$

то есть при $n > n_0$ выполняется $x_n < x_{n-1}$, а значит последовательность убывает. Кроме того, $x_n \geq 0$. По теореме Вейерштрасса 6.5.1, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Переходя к пределу в равенстве (3), получается

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} x_{n-1},$$

откуда

$$A = 0 \cdot A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

2. Докажите самостоятельно аналогично п.1.
3. Пусть $\varepsilon > 0$. По доказанному в п.2 (при $k = 1$)

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow 1 < n < (1+\varepsilon)^n,$$

откуда

$$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.
4. Пуст сначала $a \geq 1$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow 1 \leq a \leq (1+\varepsilon)^n,$$

откуда

$$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.
Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

$\square$

Замечание 6.7.1 *Отметим пока без доказательства, что*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a^\alpha n}{n^s}=0,\ \alpha\in\mathbb{R},\ s>0.$$

6.8 Частичные пределы

Определение 6.8.1 *Пусть дана последовательность x_n и возрастающая последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ натуральных чисел. Последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.*

Определение 6.8.2 *Множеством частичных пределов последовательности x_n называется множество пределов всевозможных сходящихся подпоследовательностей (возможно к $\pm\infty$).*

Пример 6.8.1 *Пусть $x_n = (-1)^n$. Множество частичных пределов данной последовательности – двухэлементное множество $\{-1, 1\}$.*

Пример 6.8.2 *Пусть $x_n = n^{(-1)^n}$. Множество частичных пределов данной последовательности – двухэлементное множество $\{0, +\infty\}$.*

Теорема 6.8.1 (Больцано-Вейерштрасса) *Из любой ограниченной последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть множество значений последовательности x_n конечно. Тогда существует хотя бы одно значение x, которое повторяется бесконечное число раз, то есть существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, что $x_{n_k} = x$. Данная последовательность постоянна, а значит сходится.
Если множество значений бесконечно, то по лемме о предельной точке существует хотя бы одна предельная точка x. Так как x – предельная, то можно выбрать n_1 так, что $|x_{n_1} - x| < 1$. Далее по индукции, если уже выбрано $n_k > n_{k-1}$ так, что $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, то выбирается $n_{k+1} > n_k$ так, что $|x_{n_{k+1}} - x| < \frac{1}{k+1}$ (иначе бы $\frac{1}{k+1}$-окрестность точки x содержала бы лишь конечное число членов последовательности x_n). Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.
$\square$

Теорема Больцано-Вейерштрасса допускает следующее дополнение.

Лемма 6.8.1 *Если последовательность x_n не ограничена сверху (снизу), то из нее можно выделить сходящуюся к $+\infty$ $(-\infty)$ подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность не ограничена сверху. Найдется номер n_1 такой, что $x_{n_1} > 1$. Далее, найдется номер $n_2 > n_1$ такой, что $x_{n_2} > 2$ (иначе последовательность x_n была бы ограничена сверху числом $\max(x_1, ..., x_{n_1}, 2)$). Данный процесс продолжается, на шаге с номером k можно найти $n_k > n_{k-1}$, что $x_{n_k} > k$. Тем самым, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. $\square$

Из двух утверждений, доказанных выше, моментально вытекает следующее следствие.

Следствие 6.8.2 *Множество частичных пределов последовательности x_n в $\overline{\mathbb{R}}$ не пусто.*

Замечание 6.8.1 *Из доказательства теоремы Больцано-Вейерштрасса видно, что если точка x – предельная точка множества значений последовательности x_n, то можно выбрать подпоследовательность попарно различных элементов последовательности x_n, не равных x, сходящуюся к x.*

Имет место следующая важная теорема.

Теорема 6.8.3 *Множество частичных пределов последовательности x_n замкнуто.*

Доказательство. Пусть E – множество частичных пределов последовательности x_n и x – предельная точка множества E. Пусть $U(x) = (\alpha, \beta)$ – окрестность точки x и $\varepsilon = \min(x - \alpha, \beta - x)$, тогда $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$ и

$$\exists a \in E : |x - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $a \in E$, то, согласно замечанию 6.8.1 существует подпоследовательность попарно различных чисел, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Значит,

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда

$$|x - x_{n_k}| < |x - a| + |a - x_{n_k}| = \varepsilon,$$

то есть ε-окрестность точки a содержит все члены последовательности x_{n_k} с номерами, большими n_{k_0}, причем равенство нулю выражения $|x - x_{n_k}|$ возможно не более чем при одном k. Тем самым показано, что x – предельная точка последовательности x_n, а значит, согласно замечанию 6.8.1, $x \in E$. $\square$

Определение 6.8.3 *Пусть E – множество частичных пределов последовательности x_n. Тогда $\sup E$ называется верхним пределом последовательности x_n и обозначается $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. В свою очередь, $\inf E$ называется нижним пределом последовательности x_n и обозначается $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Пример 6.8.3 *Пусть* $x_n = (-1)^n$. *Тогда* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$.

Пример 6.8.4 *Пусть последовательность* x_n *задана следующим образом:* $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. *Множество частичных пределов такой последовательности совпадает с множеством натуральных чисел* $\mathbb{N}$.

Лемма 6.8.2 *Верхний (нижний) предел последовательности* x_n *является наибольшим (наименьшим) ее частичным пределом.*

Доказательство. Пусть x_n ограничена. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, множество частичных пределов E не пусто. Согласно лемме 5.4.1, существуют $\max E$ и $\min E$.
Если последовательность не ограничена сверху, то по лемме 6.8.1 существует подпоследовательность, сходящаяся к $+\infty$. Значит, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$. Аналогично рассматривается случай неограниченности снизу. $\square$

Следствие 6.8.4 *Последовательность имеет предел (может быть, равный* $\pm\infty$*) тогда и только тогда, когда* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Доказательство. Пусть последовательность имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательность имеет тот же самый предел (докажите это), а значит множество частичных пределов состоит из ровно одного элемента.
Обратно, пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = A$. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq A$, то есть

$$\exists \varepsilon_0 : \forall n_0 \, \exists n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| \geq \varepsilon_0,$$

откуда либо $x_n \geq A + \varepsilon_0$, либо $x_n \leq A - \varepsilon_0$. Построенная таким образом последовательность x_n является подпоследовательностью последовательности x_n, у которой либо верхний предел больше, чем A, либо меньший меньше, чем A, что противоречит условию. $\square$

6.9 Критерий Коши

Определение 6.9.1 *Последовательность* x_n *называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Теорема 6.9.1 (Критерий Коши) *Последовательность* x_n *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство.
Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $n + p > n_0$ и

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - A) + (A - x_n)| \leq |x_{n+p} - A| + |A - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

то есть x_n – фундаментальная последовательность.
Достаточность. Пусть x_n – фундаментальная последовательность, $\varepsilon = 1$, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < 1.$$

В частности, при $n = n_0 + 1$

$$-1 + x_{n_0+1} < x_{n_0+p+1} < 1 + x_{n_0+1},$$

откуда члены последовательности x_n при $n > n_0 + 1$ ограничены числом

$$\max(|-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|).$$

Тогда положив

$$C = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0+1}|, |-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|)$$

получается, что

$$|x_n| \leq C,$$

то есть последовательность ограничена.
По теореме Больцано – Вейерштрасса из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то есть $\exists x_{n_k} : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$. Докажем, что $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.
Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу фундаментальности x_n,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$, то

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $k_1 > k_0$ таково, что $n_{k_1} > n_0$, тогда при $n > n_0$ имеем

$$|x_n - A| = |(x_n - x_{n_{k_1}}) + (x_{n_{k_1}} - A)| \leq |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Пример 6.9.1 *Важную роль в математическом анализе играет последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Оказывается, что она не имеет конечного предела. Согласно отрицанию критерия Коши:*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n > n_0, p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $p = n$, тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} \cdot n\right| = \frac{1}{2}.$$

Это значит, что для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ выполнено отрицание критерия Коши. Значит, последовательность предела не имеет.
Можно заметить, что данная последовательность монотонна и имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, равный $+\infty$.

6.10 Контрольные вопросы и задачи

1. Приведите пример последовательности, имеющей ровно одну предельную точку, ровно две предельные точки, ровно пять предельных точек. Сколько частичных пределов имеет такая последовательность?

2. Может ли последовательность быть ограничена сверху, но не ограничена снизу?

3. Покажите, что теоремы о предельном переходе в неравенствах, о сжатой переменной, Вейерштрасса справедливы даже если все утверждения начинаются не с $n = 1$, а с $n = n_0$.

4. Докажите, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится и имеет тот же самый предел, что и исходная последовательность.

5. Проиллюстрируйте графически теоремы о сжатой переменной, о предельном переходе в неравенствах.

7 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

7.1 Понятие предела функции по Коши

Определение 7.1.1 ($\varepsilon - \delta$ определение предела функции) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 – предельная точка для E. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$