4 февраля

Матан

ИДЗ-1

1. $\forall A, B \in R \Rightarrow A \cap B \in R,\ A \Delta B \in R$

Док-м, что $A \cup B \in R$ и $A \setminus B \in R$.

Тогда R — кольцо.

$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \Rightarrow A \cup B \in R$

$A \setminus B = (A \Delta B) \cap A \Rightarrow A \setminus B \in R$

2. ~~B' — Борелевская σ-алгебра — совпадает с σ-алгеброй, построенной на отрезках $\Rightarrow \forall A \in B' \Rightarrow A \in M$~~

M — мин. σ-алгебра, построенная на отрезках $[a, 2a]$, $a \in Q$.

$\forall \cancel{x}\ b, c \in Q \quad [b, c] = [b, 2b]$

$\exists a, b \in Q;\ a, b > 0$

$\triangleleft\ A = \bigcup\limits_{n=0}^{N_1} [a \cdot 2^n, a \cdot 2^{n+1}] = [a, a \cdot 2^{N_1+1}]$,

где $a \cdot 2^{N_1+1} \geq b \Rightarrow N_1 \geq \log_2 \frac{b}{a} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow N_1 = [\log_2 \frac{b}{a} - 1] + 1 = [\log_2 \frac{b}{a}]$, например.

~~Заметим, что $N_1 \in N$~~.

отрезками $[a, b]$; $a, b \in \mathbb{Q}$, ~~которая~~
~~в свою очередь совпадает с мн.~~
~~$\mathcal{B}^1$, т. е. $\mathcal{M} = \mathcal{B}^1$.~~

2. $\quad 2a$

$$[a, \overset{2a}{b}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \overset{2a}{b} + \frac{1}{n}\right); \ a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{M} \subset \mathcal{B}^1$.

] $G \in \mathcal{B}^1$

$\forall x \in G \ \exists M_i \ni x, \ M_i \in \mathcal{M}, \ \overset{M_i \subset G}{\vee}$ тогда

$G = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$, но т.к. мн-во $\mathcal{M}$ счётно,

то $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i \Rightarrow \mathcal{B}^1 \subset \mathcal{M}$

4. Обозначим мн-во всех таких точек K.

~~Заметим, что~~

~~$[0,1] \setminus K =$~~

$K = (0,3; 0,5) \sqcup [0,03; 0,05) \sqcup [0,13; 0,15] \sqcup [0,23; 0,25) \sqcup \ldots \sqcup (0,93; 0,95) \sqcup (0,003; 0,005) \sqcup [0,013; 0,015] \sqcup \ldots$

$\lambda_1 K = 0,2 + 0,02 \cdot 8 + 0,002 \cdot 8^2 + \ldots =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{10^{n+1}} \cdot 8^n = \frac{1}{5} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (0,8)^n =$

$= \frac{1}{5} \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1(0,8^n - 1)}{0,8 - 1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{0,2} = 1$

Ответ: 1

3. Нужно док-ть полуаддитивность объёма (стр. 8). μ - объём на P (полукольцо); $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in P$

Лемма 1 (Монотон объёма)

~~$P_1 \subset$~~ $A_1 \subset A \Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A)$

$\triangleright$ По опр. полукольца $A \setminus A_1 = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$

Тогда $A = A_1 \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ и по конеч. аддит. и получим $\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{j=1}^{m} \mu(Q_j) \Rightarrow \mu(A_1) \le \mu(A)$, т.к. $\mu(Q_j) \ge 0$ ∎

Лемма 2 (Усил. монотон. объёма)

$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \le \mu(A)$

▷ Аналогично, но берём $A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j$ ∎

Док-во

$\exists\, A_i' = A \cap A_i \in P$. Тогда по св-ву полукольца $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i' = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} Q_{ij}$,

$Q_{ij} \subset A_i' \subset A_i$, $Q_{ij} \in P$

По лемме 2 $\bigsqcup_{j=1}^{m_i} Q_{ij} \subset A_i$ и аддитивности μ:

$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(Q_{ij}) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ ∎

конеч. аддит μ получим $\mu(A) =$
$= \mu(A_1) + \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(Q_j) \Rightarrow \mu(A_1) \leq \mu(A)$, т.к.
$\mu(Q_j) \geq 0$ ■

Лемма 2 (Усил. монотон. объёма)
$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \mu(A)$$
▷ Аналогично, но берём $A \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ ■

Док-во

Пусть $A_i' = A \cap A_i \in P$. Тогда по св-ву полукольца $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i' = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_i} Q_{ij}$,

$Q_{ij} \subset A_i' \subset A_i$, $Q_{ij} \in P$

По лемме 2 $\bigsqcup\limits_{j=1}^{m_i} Q_{ij} \subset A_i$ и аддитивности μ:
$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \mu(Q_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \; ■$$

5.

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \quad A_n = \left(n - \frac{2^n}{3^n}, n + \frac{3^n}{4^n}\right]$$

$$\cancel{\forall A_n \measuredangle B_{ni} = \left[n - \frac{2^n}{3^n} \cdot \frac{i+1}{i},\right.}$$

$$\measuredangle B_{ni} = \left[n - \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{i}, n + \frac{3^n}{4^n}\right)$$

измеримы по опр. λ_1

$$C_{ni} = \left[n - \frac{2^n}{3^n}, n + \frac{3^n}{4^n} + \frac{1}{i}\right)$$

$$B_{ni} \subset A_n \subset C_{ni}$$

$$\overset{\lambda_1}{\cancel{\lambda}} (\underset{C_{ni} \setminus B_{ni}}{\cancel{B_{ni} \setminus C_{ni}}}) = \frac{2}{i} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists i:$$

$$\overset{\lambda_1}{\cancel{\lambda}} (\underset{C_{ni} \setminus B_{ni}}{\cancel{B_{ni} \setminus C_{ni}}}) < \varepsilon.$$

$\Rightarrow A_n$ измеримо $\forall n$ по критерию измеримости мн-ва.

~~Заметим, что $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, т.к.~~

$$\lambda_1 A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1 A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^n}{4^n} + \frac{2^n}{3^n}\right) =$$

очевидно из критерия измеримости

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{3^n}{4^n} + \frac{2^n}{3^n}\right) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left(\frac{\left(\left(\frac{3}{4}\right)^N - 1\right)}{\frac{3}{4} - 1} + \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^N - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1}\right) = 7$$

Ответ: 7.

6. $f(x,y) = \operatorname{sign}\cos(xy)$

задана на $\mathbb{R}^2 = X$

$$X(f>a) = \begin{cases} \varnothing, & a \geq 1 \ (f > 1) \\ X, & a < -1 \ (f \geq -1) \\ A, & -1 \leq a < 0 \ (-1 \leq f \leq 0) \\ B, & 0 \leq a < 1 \ (0 < f \leq 1) \end{cases}$$

изм.

изм.

$B = \{(x,y) : \cos(xy) > 0\} =$

$= \{(x,y) : xy \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)\}$

$A = \{(x,y) : xy \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]\}$

A, B – замкнутые (но неограниченные) мн-ва, ограниченные гиперболами

=> A, B – изм.