6 Функциональные последовательности и ряды

6.1 Поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов

До этого нами рассматривались числовые ряды – частный случай так называемых функциональных рядов.

Определение 6.1.1 *Последовательность $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ называется функциональной последовательностью.*

Определение 6.1.2 *Пусть дана функциональная последовательность $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Символ*

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_k(x) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

называется функциональным рядом. Последовательность $f_k(x)$ называется общим членом функционального ряда.

Естественно, интересно дать определение предела функциональной последовательности (сходящегося функционального ряда).

Определение 6.1.3 *Говорят, что функциональная последовательность $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ сходится поточечно на множестве $D \subset X$, если*

$$\forall x \in D \ \Rightarrow \ \exists \lim_{n \to +\infty} f_k(x).$$

Замечание 6.1.1 *Ясно, что на множестве поточечной сходимости D возникает функция*

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x), \quad x \in D.$$

Эта функция называется пределом функциональной последовательности (или поточечным пределом) $f_k(x)$ на множестве D

Пример 6.1.1 *Рассмотрим последовательность $f_n(x) = x^n$. Какой у нее поточечный предел? Ясно, что*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Определение 6.1.4 *Пусть рассматривается функциональный ряд с общим членом $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Функция*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

называется n-ой частичной суммой функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

Определение 6.1.5 *Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ сходится в точке $x_0 \in X$, если сходится соответствующий числовой ряд с общим членом $f_k(x_0)$, то есть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0).$$

Замечание 6.1.2 *В терминах частичных сумм сходимость функционального ряда в точке x_0 означает существование конечного предела*

$$S(x_0) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x_0).$$

Определение 6.1.6 *Пусть рассматривается ряд с общим членом $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Множество D, определяемое, как*

$$D = \{x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ сходится}\},$$

называется множеством сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. *На множестве D определена функция $S(x)$ – сумма функционального ряда.*

Определив предел функциональной последовательности (сумму функционального ряда), в анализе естественным образом возникают вопросы о свойстве предельной функции (суммы): будет ли она непрерывна, дифференцируема, интегрируема?

Пример 6.1.2 *Рассмотрим $f_n(x) = x^n$ – последовательность непрерывных функций. Данная последовательность сходится при $x \in [0, 1]$, но к разрывной функции*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Пример 6.1.3 *Рассмотрим* $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ *и* $x \in \mathbb{R}$. *Данная последовательность сходится к* $f(x) = 0$ *но*

$$f_n'(x) = \cos nx$$

не сходится к нулю.

Пример 6.1.4 *Рассмотрим*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+\frac{1}{n}}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Опять же, все функции интегрируемы на $[0,1]$, *однако, предельная функция*

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

не интегрируема на $[0,1]$.

6.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Введем новый тип сходимости.

Определение 6.2.1 *Говорят, что последовательнось* $f_n(x) : X \to \mathbb{R}$ *сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* $D \subset X$ *равномерно, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n > n_0 \; \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in D.$$

Обозначают это так:

$$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} f(x)$$

Полезно сравнить это определение с ранее введенным определением (поточечной) сходимости.

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{D} f(x) \; \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n > n_0 \; \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Видно, что определение отличается тем, что в случае поточечной сходимости найденный номер n_0, вообще говоря, зависит о x, чего нет в равномерной сходимости: там номер одинаков сразу для всех x.

Замечание 6.2.1 *Из сказанного ясно, что если $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на D, то она сходится на D и поточечно. Тем самым предельную функцию имеет смысл искать, как поточечный предел, а затем уже проводить исследование на равномерную сходимость.*

Пример 6.2.1 *Знакомая нам последовательность*

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n},\ D = \mathbb{R},$$

сходится на множестве D равномерно (к нулю). Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \ \Rightarrow\ n > \frac{1}{\varepsilon},\ n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Пример 6.2.2 *В то же время, последовательность $f_n(x) = x^n$ не сходится равномерно на $[0,1]$. Напишем отрицание того факта, что последовательность сходится равномерно.*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 :\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0\ \exists x_n \in D : \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0,$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Выберем $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, тогда $f(x_n) = 0$. В то же время,

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} = \varepsilon_0 \neq 0.$$

Итак, из поточечной сходимости равномерная, вообще говоря, не вытекает.

Определение 6.2.2 *Говорят, что функциональный ряд с общим членом $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на $D \subset X$, если последовательность $S_n(x)$ его частичных сумм равномерно сходится на D к сумме $S(x)$.*

Замечание 6.2.2 *На языке $\varepsilon - n$ последнее утверждение может быть записано так:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D.$$

Последнее неравенство может быть переписано, как

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Величина $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, *как и ранее, называется* n*-ым остатком функционального ряда. Итого, равномерная сходимость ряда на* D *равносильна тому, что*

$$R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} .$$

6.3 Равномерная норма

Определение 6.3.1 *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}$. *Величина*

$$\|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

называется равномерной нормой функции f *на множестве* X.

Отметим свойства введенного объекта.

Лемма 6.3.1 *Пусть* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Равномерная норма обладает следующими свойствами.*

1. *Положительная определенность нормы:* $\|f\|_X \geq 0$, *причем* $\|f\|_X = 0 \;\Leftrightarrow\; f \equiv 0$.
2. *Положительная однородность нормы:* $\|\lambda f\|_X = |\lambda| \|f\|_X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. *Неравенство треугольника:* $\|f+g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только третье свойство. Оно следует из того, что

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_X + \|g\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Осталось перейти в левой части к супремуму. □

Теперь отметим несколько технических утверждений.

Лемма 6.3.2 *Пусть* $f, g : X \to \mathbb{R}$. *Тогда* $\|fg\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_X$.

Доказательство. Ясно, что

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_X \|g\|_X \;\forall x \in X.$$

Осталось перейти в левой части к супремуму. □

Теорема 6.3.1 (Связь равномерной сходимости и сходимости по норме) *Пусть* $f_k(x), f(x) : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. *Тогда*

$$f_k(x) \underset{k\to+\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} f(x) \;\Leftrightarrow\; \|f_k - f\|_D \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Доказательство. Доказательство следует из того, что неравенства

$$|f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in D$$

и

$$\|f_k - f\|_D \le \varepsilon$$

равносильны. $\square$

Доказанная теорема, по сути, дает способ исследования функциональной последовательности $f_k(x)$ на равномерную сходимость: сначала можно найти поточечный предел $f(x)$, а затем исследовать разность $\|f_k - f\|$ на стремление к нулю.

Пример 6.3.1 *Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность*

$$f_k(x) = x\sqrt{k}e^{-kx^2}$$

на множествах $D_1 = [0, +\infty)$ и $D_2 = [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$.

Поточечный предел равен, очевидно, нулю, а потому

$$|f_k(x) - f(x)| = f_k(x) = x\sqrt{k}e^{-kx^2}.$$

Исследуем эту функцию на наибольшее значение. Воспользуемся производной:

$$f_k'(x) = \sqrt{k}e^{-kx^2}(1 - 2kx^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Понятно, что найденная точка – точка локального максимума, которая при всех k принадлежит множеству D_1. Тогда

$$\|f_k - f\|_{D_1} = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$$

и условие теоремы не выполняется, а значит равномерной сходимости нет.

Для второго множества ситуация другая. При достаточно больших k найденная точка не принадлежит множеству D_2, а значит

$$\|f_k - f\|_{D_2} = \delta\sqrt{k}e^{-k\delta^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Итого, на множестве D_2 равномерная сходимость есть.

Лемма 6.3.3 (Дополнительные свойства равномерной сходимости) *Справедливы следующие свойства равномерной сходимости (везде сходимость при $n \to +\infty$):*

1. *Пусть* $f_n(x), f(x) : X \to \mathbb{R}$ *и* $D_0 \subset D \subset X$. *Если* $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f$, *то* $f_n(x) \overset{D_0}{\rightrightarrows} f$.

2. *Пусть* $f_n(x), f(x) : X \to \mathbb{R}$ *и* $D_0 \subset D \subset X$. *Если* $f_n(x)$ *не сходится к* $f(x)$ *равномерно на* D_0, *то* $f_n(x)$ *не сходится к* $f(x)$ *равномерно на* D.

3. *Пусть* $f_n(x), f(x), g_n(x), g(x) : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. *Если* $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ *и* $g_n \overset{D}{\rightrightarrows} g(x)$, *то*
$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} \alpha f(x) + \beta g(x).$$

4. *Пусть* $f_n(x), f(x), g(x) : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. *Если* $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ *и* g *ограничена на* D, *то*
$$f_k(x)g(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)g(x).$$

Доказательство. Ясно, что какого-то пояснения требуют только 3 и 4 свойства. Докажем третье. Используя неравенство треугольника и положительную однородность нормы, получим

$$\|\alpha f_k + \beta g_k - \alpha f - \beta g\|_D \le |\alpha| \|f_k - f\|_D + |\beta| \|g_k - g\|_D \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Докажем четвертое свойство. Оно следует из свойства нормы:

$$\|f_k g - fg\|_D = \|(f_k - f)g\|_D \le \|f_k - f\|_D \|g\|_D \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

□

6.4 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 6.4.1 (Критерий Коши равномерной сходимости ф.п.) *Для того чтобы функциональная последовательность* $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ *сходилась равномерно на* $D \subset X$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in D.$$

Иначе,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f_{n+p} - f_n\|_D \le \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow \|f_n - f\|_D \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, тогда $n + p > n_0$ и

$$\|f_{n+p} - f_n\|_D \leq \|f_{n+p} - f\|_D + \|f - f_n\|_D \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. Написанное условие гарантирует, что при каждом $x \in D$ числовая последовательность фундаментальна, значит сходится. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при $x \in D$. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию, найдем n_0, что при $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in D.$$

Устремив $p \to +\infty$, получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in D,$$

откуда и следует требуемое. $\square$

Так как равномерная сходимость ряда – суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм, то справедлива следующая теорема.

Теорема 6.4.2 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда) *Пусть $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $D \subset X$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon \ \forall x \in D.$$

Иначе,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k\right\|_D \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы, так как равномерная сходимость ряда – суть равномерная сходимость последовательности его частичных сумм. $\square$

Следствие 6.4.3 (Необходимое условие равномерной сходимости ряда) *Пусть $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на $D \subset X$ то*

$$f_k(x) \underset{k\to+\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} 0.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно положить в критерии Коши $p = 1$. $\square$

Пример 6.4.1 *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ *сходится неравномерно на* $(0,1)$ *так как, как было показано ранее, нет равномерной сходимости общего члена* $f_k(x) = x^k$ *к нулю на* $(0,1)$.

6.5 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 6.5.1 (Признак Вейерштрасса) *Пусть* $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$, $D \subset X$. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D$$

сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно (и абсолютно) на* D.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D$ сходится, то

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_D < \varepsilon.$$

В то же время, при $x \in D$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_D < \varepsilon.$$

Используя критерий Коши заключаем, что ряд сходится равномерно и абсолютно. $\square$

Замечание 6.5.1 *Из доказательства видно, что равномерно сходящимся оказывается не только ряд с общим членом* $f_k(x)$, *но и ряд с общим членом* $|f_k(x)|$, *то есть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|.$$

Следствие 6.5.2 *Пусть $f_k(x) : X \to \mathbb{R}$ и $D \subset X$. Пусть, кроме того, на множестве D выполняется неравенство $|f_k(x)| \le a_k$ и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \textit{сходится.}$$

Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ сходятся абсолютно и равномерно.

Замечание 6.5.2 *Существуют ряды, которые сходятся абсолютно, но неравномерно и равномерно, но неабсолютно. Примером абсолютно, но неравномерно сходящегося ряда служит ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad x \in (0,1).$$

Примером равномерно, но неабсолютно сходящегося ряда, служит, например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Понятно, что числовой ряд, если он сходится, сходится равномерно на любом множестве $D \subset \mathbb{R}$. Более того, существуют абсолютно и равномерно сходящиеся ряды, для которых ряд из модулей не сходится равномерно (то есть те, для которых не применим признак Вейерштрасса). Позже мы приведем примеры таких рядов.

Теорема 6.5.3 (Признак Абеля-Дирихле) *Пусть $f_k(x), g_k(x) : X \to \mathbb{R}$, а последовательность $g_k(x)$ монотонна при любом $x \in D \subset X$. Тогда для равномерной сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$$

на D достаточно выполнения любой из двух пар условий: либо

1. *Частичные суммы $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ равномерно ограничены на D, то есть*

$$\exists C : \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \le C \ \forall x \in D \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. *$g_k(x)$ равномерно стремится к нулю на D.*

либо

1. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно на* D

2. *Последовательность* $g_k(x)$ *равномерно ограничена на* D*, то есть*

$$\exists C: \ |g_k(x)| \le C \ \forall x \in D \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши и преобразованием Абеля:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} f_k(x)g_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(x)\right| =$$

$$= \Bigg| A_{n+p}(x)g_{n+p}(x) + \sum_{k=1}^{n+p-1} A_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) -$$

$$- A_n(x)g_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x))\Bigg| =$$

$$= \left| A_{n+p}(x)g_{n+p}(x) - A_n(x)g_n(x) + \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x))\right| =$$

$$= \left| A_{n+p}(x)g_{n+p}(x) - A_n(x)g_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x))\right|.$$

В силу равномерной ограниченности $A_n(x)$ и монотонности $g_k(x)$, приходим к оценке

$$\le C\left(|g_{n+p}(x)| + |g_{n+1}(x)| + |g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)|\right) \le 4C \max(|g_{n+1}(x)|, |g_{n+p}(x)|).$$

1. В силу равномерной сходимости, найдем номер n_0, что при $n > n_0$ выполняется

$$|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Тогда рассматриваемый модуль не превосходит ε, что и завершает доказательство.

2. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на D, то

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x) \rightrightarrows 0.$$

Так как

$$A_k(x) = S(x) - R_k(x), \quad k \in \{n, n+1, ..., n+p\},$$

то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| =$$

$$= \left|-R_{n+p}(x)g_{n+p}(x) + R_n(x)g_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} R_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x))\right| \leq$$

$$\leq |R_{n+p}(x)||g_{n+p}(x)| + |R_n(x)||g_{n+1}(x)| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |R_k(x)||g_k(x) - g_{k+1}(x)|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу того, что $R_n(x) \rightrightarrows 0$,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \Rightarrow |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4C} \ \forall x \in D,$$

а значит

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4C}\left(|g_{n+p}(x)| + |g_{n+1}(x)| + |g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)|\right) \leq \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. □

Пример 6.5.1 *Исследуем на равномерную сходимость ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, \ x \in D \subset \mathbb{R}.$$

Воспользуемся признаком Абеля-Дирихле. Для этого вспомним, что

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \begin{cases} \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что написанная сумма не является равномерно ограниченной на любом множестве, содержащем хотя бы одну из точек множества $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $[a,b] \subset (2\pi k, 2\pi(k+1))$. Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{2}{2|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\min(|\sin\frac{a}{2}|, |\sin\frac{b}{2}|)}$$

и ряд сходится на произвольных множествах такого типа (признак Дирихле). В то же время, равномерной сходимости на $(2\pi t, 2\pi(t+1))$ нет, так как

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\cos\left(2\pi t + \frac{1}{2n}\right)k}{k}\right| \geq \frac{n\cos 1}{2n} = \cos 1,$$

что не стремится к нулю.

Замечание 6.5.3 *Аналогичные рассуждения могут быть применены к ряду*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \; x \in D \subset \mathbb{R}.$$

Результаты аналогичны.

На практике (для доказательства отсутствия равномерной сходимости) бывает полезна следующая лемма.

Лемма 6.5.1 *Пусть* $f_k(x) \in C[a,b]$. *Если* $f_k(x) \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} f(x)$, *то*

$$f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши,

$$\exists n_0 : \; \forall n > n_0, \; \forall p \in \mathbb{N} \; \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \; \forall x \in (a,b).$$

Пусть $x_n \in (a,b)$, $x_n \to b$. Перейдем к пределу в неравенстве и, пользуясь непрерывностью $f_k(x)$, получим

$$|f_{n+p}(b) - f_n(b)| \leq \varepsilon.$$

Аналогично с точкой a. Значит, при $x \in [a,b]$ выполняется

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

что, согласно критерию Коши, влечет равномерную сходимость последовательности $f_k(x)$. □

Аналогичная лемма справедлива и для рядов.

Лемма 6.5.2 *Пусть* $f_k(x) \in C[a,b]$. *Если на* (a,b) *ряд с общим членом* $f_k(x)$ *сходится равномерно, то он сходится равномерно и на* $[a,b]$.

Пример 6.5.2 *Для ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$$

условия непрерывности выполнены, но при $x = 2\pi t$ *получаем расходящийся ряд с общим членом* $\frac{1}{k}$. *Значит, на интервалах с концами* $2\pi t$ *равномерной сходимости, конечно, нет.*

6.6 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 6.6.1 (О перестановке пределов) *Пусть $f(x), f_k(x) : D \to \mathbb{R}$, причем*

1. $f_k(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$.

2. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел*

$$\lim_{x\to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 – предельная для D.

Тогда пределы $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существуют (в $\mathbb{R}$) и совпадают, то есть

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in D.$$

Перейдя к пределу при $x \to x_0$, получим

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon,$$

что влечет фундаментальность и, как следствие, сходимость последовательности a_n. Пусть ее предел равен A. Осталось показать, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу равномерной сходимости на D,

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in D.$$

В силу сходимости последовательности a_n,

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow |a_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $m = 1 + \max(k_0, n_0)$, тогда одновременно

$$|a_m - A| < \varepsilon \ \text{ и } \ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in D.$$

Согласно определению предела функции,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0):\ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D \ \Rightarrow |f_m(x) - a_m| < \varepsilon.$$

Значит, при $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D$, имеем

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| + |a_m - A| < \varepsilon.$$

□

Аналогичный результат справедлив и для рядов.

Теорема 6.6.2 (Почленный переход к пределу) *Пусть $f_k(x) : D \to \mathbb{R}$, причем*

1. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на D.*
2. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R},$$

где x_0 – предельная для D.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к сумме A, причем $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = A$, то есть

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда. □
Из этих теорем легко получить и выводы о непрерывности предельной функции (или суммы ряда).

Теорема 6.6.3 (О непрерывности предельной функции) *Пусть $f_k(x), f(x) : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, причем*

1. *$f_k(x) \rightrightarrows [k \to +\infty] Df$ на D.*
2. *$f_k(x)$ непрерывны в x_0.*

Тогда f непрерывна в x_0. В частности, если $f_k(x)$ непрерывны на D, то и $f(x)$ непрерывна на D.

Доказательство. Если x_0 – изолированная точка, то доказывать нечего (любая функция непрерывна в изолированной точке своей области определения). Если x_0 – предельная, то выполнены условия теоремы, где $a_k = f_k(x_0)$. Поэтому,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x_0) = f(x_0).$$

$\square$

Теорема 6.6.4 (О непрерывности суммы ряда) *Пусть* $f_k(x) : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, *причем*

1. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *равномерно сходится на* D.
2. $f_k(x)$ *непрерывны в* x_0.

Тогда сумма ряда непрерывна в x_0. *В частности, если* $f_k(x)$ *непрерывны на* D, *то и сумма ряда непрерывна на* D.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм. $\square$

Замечание 6.6.1 *Из равномерной непрерывности функций на* D *следует и равномерная непрерывность предельной функции (суммы).*

Пример 6.6.1 *Поточечной сходимости для непрерывности предельной функции недостаточно. Значит, недостаточно и для перестановки пределов.*

$$\lim_{x\to 1-0}\lim_{n\to+\infty} x^n = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1-0} x^n = 1.$$

Условие равномерной сходимости не является необходимым.

$$f_k(x) = x\sqrt{k}e^{-kx^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{[0,+\infty)} 0,$$

но сходимость, как было показано в примере ранее, неравномерна.

Иногда удается установить равномерную сходимость из непрерывности предельной функции.

Теорема 6.6.5 (Теорема Дини для последовательностей) *Пусть* $f_k(x), f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, *причем* $f_k(x), f(x) \in C[a,b]$. *Кроме того, пусть* $f_k(x)$ *не убывает (не возрастает) по* k *на* $[a,b]$ *и*

$$f_k(x) \overset{[a,b]}{\to} f(x).$$

Тогда

$$f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x).$$

Доказательство. Пусть, например, $f_k(x)$ не убывает. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдем номер n_x, что

$$0 \le f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

Это же неравенство остается в силе и в некоторой окрестности $U(x)$ точки x в силу непрерывности рассматриваемых функций. Из покрытия отрезка такими окрестностями выделим конечное покрытие $U(x_1), U(x_2), ..., U(x_k)$ и выберем $n_0 = \max(n_{x_1}, n_{x_2}, ..., n_{x_k})$. Тогда при $n > n_0$

$$0 \le f(x) - f_n(x) < \varepsilon \;\forall x \in [a,b],$$

что и означает равномерную сходимость. □

Теорема 6.6.6 (Теорема Дини для рядов) *Пусть* $f_k(x) \in C[a,b]$ *и* $f_k(x) \ge 0$. *Если сумма ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то ряд к своей сумме сходится на* $[a,b]$ *равномерно.*

Доказательство. Достаточно применить теорему Дини для последовательностей к последовательности частичных сумм. □

Теорема 6.6.7 (Интегрирование ф.п.) *Пусть* $f_k(x), f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) \in R[a,b]$ *и при* $k \to +\infty$

$$f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x).$$

Тогда $f \in R[a,b]$ *и*

$$\int\limits_a^x f_k(t)dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Доказательство. 1) Сначала докажем, что предельная функция $f(x)$ интегрируема. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 : \;\forall n > n_0 \;\Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \;\forall x \in [a,b].$$

Пусть $n > n_0$, тогда

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')| \le$$

$$\le 2\varepsilon + \omega(f_n, E) \;\Rightarrow \omega(f, E) \le 2\varepsilon + \omega(f_n, E),$$

что дает интегрируемость f.

2) Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу равномерной сходимости,

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \ \forall x \in [a,b].$$

Пусть $k > k_0$, тогда

$$\left| \int\limits_a^x f_k(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right| \leq \int\limits_a^x |f_k(t) - f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon,$$

причем последняя оценка справедлива при всех $x \in [a,b]$. Это и доказывает равномерную сходимость. $\square$

Аналогичная теорема справедлива и для рядов.

Теорема 6.6.8 (О почленном интегрировании ряда) *Пусть* $f_k(x)$*:* $[a,b] \to \mathbb{R}$*, причем* $f_k(x) \in R[a,b]$*. Если ряд с общим членом* $f_k(x)$ *сходится равномерно к функции* $S(x)$ *на* $[a,b]$*, то* $S(x) \in R[a,b]$*, причем*

$$\int\limits_a^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_k(t)dt, \quad \forall x \in [a,b].$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить предыдущую теорему к частичным суммам рассматриваемого ряда. $\square$

Осталось решить вопрос о дифференцируемости предельной функции. В простейшем случае он решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 6.6.9 (О дифференцируемости предельной функции) *Пусть* $f_k(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$*, причем* $f_k(x) \in C^1[a,b]$*. Если*

1. *Существует* $x_0 \in [a,b]$*, что последовательность* $f_k(x_0)$ *сходится.*

2. $f'_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$ *при* $k \to +\infty$*.*

то

1. $f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ *при* $k \to +\infty$*.*

2. $f'(x) = g(x)$ *на* $[a,b]$ *и, в частности,* $f(x) \in C^1[a,b]$*.*

Доказательство. По предыдущей теореме,

$$\lim_{k \to +\infty} \int\limits_{x_0}^x f'_k(t)dt = \int\limits_{x_0}^x g(t)dt,$$

причем последняя сходимость равномерна по $x \in [a,b]$. В то же время,

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f'_k(x)dx = \lim_{k\to+\infty} (f_k(x) - f_k(x_0)) = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx.$$

Так как существует предел $C = \lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x_0)$, то

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} f(x) = C + \int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx,$$

где последняя сходимость равномерна на $[a,b]$. Используя теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, получим

$$f'(x) = g(x),\ \forall x \in [a,b].$$

Тем самым теорема доказана. □

На самом деле справедлива и более общая теорема.

Теорема 6.6.10 (О дифференцируемости предельной функции*) *Пусть $f_k(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, причем $f_k(x)$ дифференцируемы на $[a,b]$. Если*

1. *Существует $x_0 \in [a,b]$, что $f_k(x_0)$ сходится.*

2. *$f'_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$.*

то

1. *$f_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.*

2. *$f'(x) = g(x)$ на $[a,b]$.*

Доказательство. Без доказательства. □

7 Степенные ряды

7.1 Общие свойства степенных рядов

Определение 7.1.1 *Степенным рядом называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ и a_k – числовая последовательность.

Замечание 7.1.1 *Ясно, что множество сходимости любого степенного ряда не пусто, так как при* $x = x_0$ *сумма равна* $a_0 \in \mathbb{R}$

Замечание 7.1.2 *Линейной заменой* $t = x - x_0$ *произвольный степенной ряд сводится к ряду вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Не нарушая общности, в дальнейшем мы будем рассматривать именно такие ряды (при $x_0 = 0$*).*

Естественно возникает следующий набор вопросов:

1. Каково множество сходимости степенного ряда?
2. Каковы свойства суммы степенного ряда?
3. Можно ли данную функцию представить степенным рядом?

Начнем с ответа на первый вопрос.

Теорема 7.1.1 (1 теорема Абеля) *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

1. *Если существует* x_1*, что ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{сходится,}$$

то исходный ряд сходится абсолютно при всех x *таких, что* $|x| < |x_1|$.

2. *Если существует* x_1*, что ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \quad \text{расходится,}$$

то исходный ряд расходится при всех x *таких, что* $|x| > |x_1|$.

Доказательство. 1. Ясно, что имеет смысл рассматривать случай $x_1 \neq 0$ (иначе множество x таких, что $|x| < |x_1|$ пусто). Пусть $|x| < |x_1|$, тогда

$$\left|a_k x^k\right| = \left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k.$$

Так как ряд с общим членом $a_k x_1^k$ сходится, то $|a_k x_1^k| \leq C$, а значит

$$\left|a_k x_1^k\right| \left|\frac{x}{x_1}\right|^k \leq C \left|\frac{x}{x_1}\right|^k.$$

Заметим, что $0 \leq \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, а значит ряд с общим членом $C\left|\frac{x}{x_1}\right|^k$ сходится как геометрическая прогрессия. Отсюда, согласно признаку сравнения, сходится, причем абсолютно, исходный ряд.
2. Второй пункт легко доказывается от противного. Если бы при x таком, что $|x| > |x_1|$ ряд сходился, то по только что доказанному он бы сходился и при $x = x_1$, что противоречит условию $\square$
Из этой теоремы сразу вытекает вид множества сходимости степенного ряда.

Следствие 7.1.2 *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$*. Тогда существует* $R \in [0, +\infty]$*, что при* $x \in (-R, R)$ *ряд сходится абсолютно, а при* $x \in (-\infty, -R); (R; +\infty)$ *ряд расходится. При этом при* $R = 0$ *множество сходимости состоит из одной точки* $\{0\}$*, а при* $R = +\infty$ *множество сходимости совпадает с* $\mathbb{R}$*.*

Определение 7.1.2 *Число* R *из предыдущего следствия называется радиусом сходимости, а множество* $(-R, R)$ *интервалом сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$*.*

Замечание 7.1.3 *При* $x = \pm R$ *ситуация может быть разной. Например, ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

имеет радиус сходимости $R = 1$ *и сходится лишь при* $x \in (-1, 1)$*.*

В то же время ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

тоже имеет радиус сходимости, равный 1*, но сходится при* $x \in [-1, 1]$*, причем абсолютно.*

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

опять же имеет радиус сходимости $R = 1$*, но сходится абсолютно при* $x \in (-1, 1)$*, при* $x = -1$ *сходится условно, а при* $x = 1$ *расходится. Может* *также возникнуть ситуация, когда в обеих точках $x = \pm R$ ряд сходится условно.*

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда удобно пользоваться признаками Даламбера, радикальным признаком Коши, признаком Раабе и проч. С теоретической же точки зрения оказывается важной следующая теорема.

Теорема 7.1.3 (Теорема Коши-Адамара) *Пусть дан степенной ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. Тогда*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Доказательство. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Найдем

$$l = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \overline{\lim_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Если $l < 1$, то ряд сходится, причем абсолютно. Если $l > 1$, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Это равносильно неравенствам

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} \text{ и } |x| > \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

соответсвенно. Это и доказывает теорему. □

Для того чтобы ответить на вопросы о свойствах суммы степенного ряда, решим вопрос о равномерной сходимости степенного ряда.

Теорема 7.1.4 (О равномерной сх-ти степенного ряда) *Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и пусть $R > 0$ – его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ рассматриваемый ряд сходится равномерно на $[-r, r]$.*

Доказательство. Для общего члена ряда при $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$\left|a_k x^k\right| \le |a_k r^k|.$$

Но, так как $r \in (0, R)$, то ряд с общим членом $a_k r^k$ сходится абсолютно. Значит, утверждение теоремы следует из признака Вейерштрасса. □

Замечание 7.1.4 *Последнюю теорему можно сформулировать и иначе: степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости. Доказательство остается практически без изменений.*

Отсюда сразу получается следующее следствие.

Теорема 7.1.5 (О непрерывности суммы степенного ряда) *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *и* $R > 0$ *– его радиус сходимости. Тогда сумма ряда непрерывна на интервале сходимости* $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ и $\delta = \min\left(\frac{R-x_0}{2}, \frac{x_0+R}{2}\right)$. Тогда $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (-R, R)$ и, по предыдущей теореме, на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ряд сходится равномерно. Так как члены ряда непрерывны на этом отрезке, то, по свойству равномерно сходящихся рядов, сумма ряда тоже непрерывна на этом отрезке. В частности, она непрерывна при $x = x_0$. В силу произвольности x_0 теорема доказана. □

Вопрос о непрерывности суммы ряда при $x = \pm R$ решает следующая теорема.

Теорема 7.1.6 (2 теорема Абеля) *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *и* R *– его радиус сходимости. Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k R^k$, *то исходный ряд сходится равномерно на* $[0, R]$.

Доказательство. Преобразуем общий член ряда следующим образом:

$$a_k x^k = a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k.$$

Так как ряд с общим членом $a_k R^k$ сходится, причем равномерно на $[0, R]$, а последовательность $\left(\frac{x}{R}\right)^k$ монотонна и равномерно ограничена, то по признаку Абеля-Дирихле данный ряд сходится равномерно на $[0, R]$. □

Следствие 7.1.7 *В рамках условий предыдущей теоремы, сумма степенного ряда непрерывна на* $(-R, R]$.

Замечание 7.1.5 *Ясно, что аналогичная теорема справедлива и для случая* $x = -R$.

Теперь обратимся к вопросу интегрирования степенных рядов.

Теорема 7.1.8 (Об интегрировании степенных рядов) *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *и* $R > 0$ *– его радиус сходимости. Пусть* $[a, b] \subset (-R, R)$, *тогда*

$$\int\limits_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int\limits_a^b x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Если ряд сходится при $x = R$ ($x = -R$), то b может равняться R (a может равняться $-R$).

Доказательство. Данная теорема – прямое следствие теоремы об интегрировании равномерно сходящегося ряда. □

Перед тем как решить вопрос о дифференцировании ряда, докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 7.1.1 *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

совпадают.

Доказательство. Докажем, например, что радиусы сходимости первого и второго рядов совпадают. Так как $1 \le \sqrt[k]{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$, то по $\varepsilon > 0$ найдется k_0, что $\forall k > k_0$ выполняется

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le \sqrt[k]{k|a_k|} < (1+\varepsilon)\sqrt[k]{|a_k|}.$$

Переходя к верхнему пределу, получим

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \le \varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} \le (1+\varepsilon) \varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

В силу произвольности ε,

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \varlimsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k|a_k|},$$

а значит, по теореме Коши-Адамара, радиусы сходимости одинаковы. Аналогично доказывается, что радиус сходимости третьего ряда такой же. □

Теорема 7.1.9 (О дифференцировании степенных рядов) *Пусть дан степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $R > 0$ – его радиус сходимости, а $S(x)$ – его сумма. Тогда $S(x) \in C^{\infty}(-R, R)$, причем*

$$S^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)...(k-m+1) a_k x^{k-m}, \quad m \ge 1.$$

Доказательство. Как было доказано в предыдущей лемме, ряд, полученный формальным дифференцированием, то есть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный. Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Тогда, выбрав $\delta = \frac{1}{2}\min(R - x_0, x_0 + R)$ получим, что

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \in (-R, R),$$

а значит ряд из производных сходится на этом отрезке равномерно. Так как исходный ряд сходится (хотя бы в точке $x_0 \in (-R, R)$), то по теореме о дифференцировании функционального ряда заключаем, что

$$S'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^k.$$

Так как x_0 – произвольная точка из интервала сходимости, то доказано, что $S(x)$ дифференцируема на $(-R, R)$ и

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k.$$

Из теоремы о непрерывности суммы степенного ряда заключаем, что $S(x) \in C^1(-R, R)$. Дальнейшее доказательство проводится по индукции. □

Замечание 7.1.6 *Ясно, что при рассмотрении степенного ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

все полученные результаты остаются справедливы, но на интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, где R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Результаты про концы интервала сходимости (2 теорема Абеля и проч.) тоже остаются справедливыми.

В заключение, докажем теорему единственности.

Теорема 7.1.10 (О единственности разложения в степенной ряд) *Пусть при $x \in (-R, R)$ справедливо разложение*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Тогда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то есть написанный ряд является рядом Тейлора.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме,

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)...(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Подставив $x = x_0$, получаем, что

$$f^{(m)}(x_0) = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot 1 \cdot a_m,$$

откуда

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

□

7.2 Остаточные члены формулы Тейлора

Напомним определение многочлена Тейлора.

Определение 7.2.1 *Многочлен*

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора для функции f порядка n в точке x_0.

Естественно, важным является информация об остатке, то есть о величине

$$r_n(x, x_0) = f(x) - P_n(x, x_0),$$

которая характеризует точность приближения рассматриваемой функции построенным многочленом. Получим интегральную формул остаточного члена.

Теорема 7.2.1 (Интегральная форма остаточного члена ф. Тейлора) *Пусть $f(x)$ на отрезке с концами x_0 и x непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз. Тогда*

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница и проинтегрируем по частям. Тогда,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)(x-t)'dt =$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)\left((x-t)^2\right)' dt.$$

Продолжая этот процесс, приходим к тому, что

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

□

Получим некоторые важные следствия.

Следствие 7.2.2 (Остаточный член в форме Лагранжа) *В рамках условий предыдущей теоремы,*

$$r_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ расположена между x и x_0.

Доказательство. Так как $(x-t)^n$ сохраняет знак на отрезке с концами x_0 и x, то по теореме о среднем

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

□

Следствие 7.2.3 (Остаточный член в форме Коши) *В рамках условий предыдущей теоремы,*

$$r_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0),$$

где ξ расположена между x и x_0.

Доказательство. По теореме о среднем,

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

□

7.3 Ряды Тейлора и Маклорена

Определение 7.3.1 *Пусть функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0. Тогда ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называется рядом Тейлора в точке x_0, порожденным функцией f.

Определение 7.3.2 *Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора называется рядом Маклорена.*

Замечание 7.3.1 *Заметим, что ряд Тейлора всегда сходится к породившей его функции хотя бы в одной точке – в точке x_0.*

Пример 7.3.1 *Оказывается, что бывают функции, ряды Тейлора которых сходятся к их значениям лишь в одной точке. Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Легко проверить, что ряд Маклорена, построенный по функции f, состоит только из нулей, а значит сходится к значению функции только при $x = 0$ (хотя сам по себе сходится при всех возможных x).

Почему возникает ситуация как в последнем примере? Ясно, что так как

$$f(x) = P_n(x, x_0) + r_n(x, x_0),$$

то то, что при некотором $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} P_n(x, x_0)$$

равносильно тому, что $r_n(x, x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.3.1 *Для того чтобы ряд Тейлора, построенный по функции $f(x)$, сходился к этой функции в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы*

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

В последнем примере остаток стремится к нулю только при $x = 0$, поэтому и сходимость наблюдается лишь в одной точке. Глубинные причины такой ситуации становятся понятными лишь при рассмотрении функции комплексного переменного.

Теорема 7.3.2 (Достаточное условие сходимости ряда Тейлора) *Пусть функция f бесконечно дифференцируема на отрезке с концами x_0 и x. Если на этом отрезке производные функции равномерно ограничены, то есть*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup 0,$$

то

$$r_n(x, x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Доказательство. Воспользуемся остаточным членом в формле Лагранжа. Согласно условию,

$$|r_n(x, x_0)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \le M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

так как факториал растет быстрее показательной функции. По предыдущей теореме, ряд Тейлора сходится в точке x к породившей его функции. □

7.4 Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора

Применим полученные знания для разложения основных элементарных функций. Раскладывать будем при $x_0 = 0$ (то есть в ряд Маклорена).

7.4.1 Ряд Маклорена для e^x

Ясно, что если $f(x) = e^x$, то

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ и, в частности, } f^{(n)}(0) = 1.$$

Тогда ряд Маклорена, построенный по функции f, имеет вид

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Пусть $x \in (-r, r)$. Тогда справедлива оценка:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^r,$$

а значит, согласно достаточному условию сходимости ряда Тейлора, он сходится к породившей его функции на любом промежутке вида $(-r, r)$, а значит, и на всем $\mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.2 Ряд Маклорена для a^x

Используя результат предыдущего пункта, соотношение $a^x = e^{x \ln a}$, а также единственность разложения в степенной ряд, легко получить, что

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.3 Ряд Маклорена для $\sin x$

Ясно, что так как $f(x) = \sin x$, то

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{и, в частности,} \quad f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Тогда ряд Маклорена, построенный по функции f, имеет вид

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что на отрезке с концами 0 и x справедлива оценка:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \leq 1,$$

а значит, согласно достаточному условию сходимости ряда Тейлора,

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.4 Ряд Маклорена для $\cos x$

Аналогично полученному в предыдущем пункте,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.4.5 Ряд Маклорена для $\ln(1+x)$

Ясно, что так как $f(x) = \ln(1+x)$, то

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \text{ и, в частности, } f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!.$$

Тогда ряд Маклорена, построенный по функции f, имеет вид

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

Написанный ряд сходится лишь при $x \in (-1, 1]$, поэтому только при этих значениях ряд и имеет смысл исследовать на сходимость к породившей его функции. Используем остаток в интегральной форме. Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда

$$r_n(x) = (-1)^n \int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt = (-1)^n x^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{(1-z)^n}{(1+xz)^{n+1}}dz.$$

(сделали замену переменной $t = xz$, $dt = xdz$).

Заметим, что при $x \in (-1, 1)$ и $z \in [0, 1]$ выполнены неравенства

$$1 + xz > 1 - z \quad \text{и} \quad 1 + xz < 1 - |x|.$$

Тогда

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

а значит при $x \in (-1, 1)$ построенный ряд сходится к значению породившей его функции. В то же время, при $x = 1$ ряд сходится, а значит его сумма непрерывна на $[0, 1]$ (2 теорема Абеля). Тогда

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

и

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1].$$

7.4.6 Ряд Маклорена для $(1+x)^\alpha$

Ясно, что так как $f(x) = (1+x)^\alpha$, то

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $x = 0$,

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как $f(0) = 1$, то ряд Маклорена, построенный по функции f, имеет вид

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + ... =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(k-1))}{k!}x^k.$$

Без дополнительных пояснений отметим случаи, когда написанный ряд сходится:

1. Если $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то ряд сходится при $x \in \mathbb{R}$.
2. Если $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, то ряд сходится абсолютно при $x \in [1, 1]$ и расходится при $x \notin [-1, 1]$.
3. Если $\alpha \in (-1, 0)$, то ряд сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, условно при $x = 1$, иначе расходится.
4. Если $\alpha \leq -1$, то ряд сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, иначе расходится.

Теперь исследуем сходимость написанного ряда к породившей его функции. Для этого снова воспользуемся остаточным членом в интегральной форме:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!} \int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}} dt =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!} \cdot x^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{(1-z)^n}{(1+xz)^{n+1-\alpha}} dz.$$

Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда, по доказанному в предыдущем пункте,

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{1-\alpha}} \cdot \left|\alpha\left(\frac{\alpha}{1}-1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)...\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)\right|.$$

При достаточно больших n будет выполнено

$$\left|\frac{\alpha}{n}-1\right| \leq 1,$$

откуда
$$\left|\alpha\left(\frac{\alpha}{1}-1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)...\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)\right| \le C,$$
где C не зависит от n. Тогда $r_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Итак,

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(k-1))}{k!}x^k, \quad x\in(-1,1).$$

Вопрос о сходимости ряда к породившей его функции при $x=\pm1$ решается с использованием 2 теоремы Абеля и замечанием о сходимости написанного ряда, сделанным ранее.

7.4.7 Ряд Маклорена для $\operatorname{arctg} x$

Используя результат предыдущего пункта, а также единственность разложения в степенной ряд, получим

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}, \quad x\in(-1,1).$$

Пусть $x\in(-1,1)$, тогда написанный ряд можно интегрировать почленно по отрезку с концами 0 и x, а значит

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int\limits_0^x x^{2k}dx,$$

откуда
$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x\in(-1,1).$$

Так как получившийся справа ряд сходится (условно) при $x=\pm1$, то, согласно следствию из второй теоремы Абеля,

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x\in[-1,1].$$