## 6.11. Понятие о числовом ряде

Важным примером применения теории пределов числовой последовательности является понятие числового ряда.

**Определение 1** *Пусть дана последовательность* $a_n$. *Символ*

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*называется числовым рядом, последовательность* $a_n$ *– общим членом ряда.*

**Определение 2** *Последовательность* $S_k$*: сумма первых* $k$ *членов ряда*

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

*называется частичной суммой ряда, а её предел, если он существует в* $\bar{\mathbb{R}}$*, называется суммой ряда:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

*Если последовательность* $S_k$ *сходится, то ряд называется сходящимся, иначе – расходящимся. Разность* $R_k = S - S_k$ *называется остатком ряда.*

**Примеры:**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ сходится и его сумма равна 0.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ – геометрическая прогрессия. Сходится, если $|q| < 1$, и его сумма равна $\dfrac{1}{1-q}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,$$

   следовательно, ряд сходится, и его сумма равна 1.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ расходится, т.к. последовательность частичных сумм состоит из чередующихся 0 и $-1$.

**Замечание 1** *Изменение, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

**Лемма.** Ряд сходится тогда и только тогда, когда его остаток стремится к нулю.

► Запишем для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + R_k.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$ равносильно тому, что $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = 0$. ◄

**Теорема 1** *Пусть ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся к конечным суммам* $A$ *и* $B$, *соответственно. Тогда*

*1) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *сходится, и его сумма равна* $A + B$;

*2) ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *сходится, и его сумма равна* $\lambda A$.

► Доказательство следует из аналогичного утверждения для пределов частичных сумм. ◄

**Теорема 2 (Критерий Коши сходимости ряда)** *Для того, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon$ *можно было найти номер* $k_0$ *такой, что для всех* $k \neq k_0$ *и для всех* $p \in \mathbb{N}$ *выполнялось неравенство* $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon$.

► Доказательство следует из критерия Коши для частичных сумм. ◄

**Пример: гармонический ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

Запишем

$$S_{2k} - S_{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что критерий Коши не выполняется и ряд расходится.

**Теорема 3 (Необходимое условие сходимости ряда)** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$.

► Запишем $a_n = S_n - S_{n-1}$. Так как $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$, то $a_n \to S - S = 0$. ◄

**Замечание 2** *Условие* $a_n \to 0$ *не является достаточным для сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Но если* $a_n \not\to 0$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

## Признаки сравнения для положительных рядов

Будем рассматривать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$.

**Лемма.** Пусть $a_n \geq 0$. Тогда последовательность $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ возрастает (нестрого) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup S_k,$$

т.е. сходимость положительного ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм.

► Так как $a_n \geq 0$, то $S_{k+1} = S_k + a_k \geq S_k$, т.е. $S_k$ возрастает. Тогда по теореме Вейерштрасса, сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности $S_k$. ◄

**Теорема 4 (1-ый признак сравнения)** *Пусть* $0 \leq a_n \leq b_n$. *Тогда*

*1) Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*;*

*2) Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то расходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

► 1) Обозначим $S_k^A = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$, $S_k^B = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$, $S^B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда

$$S_n^A \leq S_n^B \leq S^B < +\infty.$$

Тогда $S_n^A$ ограничена и ряд с общим членом $a_n$ сходится.

2) От противного, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то по 1) должен сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что противоречит условию. ◄

**Теорема 5 (2-ой признак сравнения)** *Пусть* $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$. *Тогда ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *оба сходятся или оба расходятся.*

► Из определения предела следует, что начиная с некоторого номера верно неравенство

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - C\right| < \frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}C < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}Cb_n < a_n < \frac{3}{2}Cb_n,$$

откуда, по 1-му признаку сравнения следует требуемое. ◄

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Заметим, что

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)},$$

а ряд с общим членом $\dfrac{1}{n(n+1)}$ сходится (было доказано выше). Следовательно, исходный ряд тоже сходится.

**Теорема 6 (3-ий признак сравнения)** *Пусть $a_n \geq 0$ и $a_n$ монотонно убывает. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ оба сходятся или оба расходятся.*

► Обозначим $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ и $S'_m = \sum\limits_{n=0}^{m} 2^n a_{2^n}$. При $2^m \leq k < 2^{m+1}$ получим

$$S_k = a_1+(a_2+a_3)+(a_4+...+a_7)+...+(a_{2^m}+...+a_k) \leq a_1+2a_2+4a_4+...+2^m a_{2^m} = S'_m,$$

откуда из сходимости второго ряда следует сходимость первого. С другой стороны,

$$S_k \geq a_1+a_2+(a_3+a_4)+...+(a_{2^{m-1}+1}+...+a_{2^m}) \geq \frac{a_1}{2}+a_2+2a_4+...+2^{m-1}a_{2^m} = \frac{1}{2}S'_m,$$

откуда из сходимости первого ряда следует сходимость второго. ◄

**Пример: обобщённый гармонический ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}},$$

который сходится при $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, т.е. при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

**Теорема 7 (Ряд для числа $e$)** *Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ сходится, и его сумма равна $e$.*

► Обозначим

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Запишем разложение по биному Ньютона, аналогично доказательству сходимости второго замечательного предела:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{n}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right) >$$
$$> 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

для произвольного фиксированного $k$, меньшего $n$. Устремим теперь $n \to \infty$ при фиксированном $k$. Тогда последнее выражение стремится к

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{k!} = y_k.$$

Так как $(1+\dfrac{1}{n})^n \to e$, то из полученного неравенства следует $y_k \leq e$. С другой стороны

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{n}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$
$$< 2+\frac{1}{2!}+...\frac{1}{n!} = y_n,$$

откуда следует $y_n \geq e$. Следовательно, $y_n \to e$. ◀

Напишем оценку на остаток $R_n$ полученного ряда:

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+... = \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...\right) <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+...\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!\cdot(n+1)} =$$
$$= \frac{n+2}{n!\cdot(n+1)^2} < \frac{1}{n!\cdot n}.$$

Последнее неравенство верно, т.к.

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n(n+2) < (n+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+2n < n^2+2n+1.$$

Окончательно, получаем

$$0 < R_n < \frac{1}{n!\cdot n}.$$

Можем записать равенство

$$R_n = \frac{\theta_n}{n! \cdot n}, \quad \text{где } \theta_n \in (0,1).$$

Подставляя это равенство в ряд для числа $e$, получим

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n! \cdot n}, \quad \text{где } \theta_n \in (0,1).$$

**Теорема 8 (Об иррациональности числа $e$)** *Число $e$ иррационально.*

► От противного. Предположим, что $e = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, $p, q \in \mathbb{N}$. Напишем ряд для числа $e$ с $q$ слагаемыми:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!} + \frac{\theta}{q! \cdot q}, \quad \text{где } \theta \in (0,1).$$

Умножим равенство на $q!$:

$$e \cdot q! = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + ... + \frac{q!}{q!} + \frac{\theta}{q}.$$

Левая часть этого равенства целая. В правой части все слагаемые целые, кроме последнего, которое не является целым, т.к. $\theta \in (0,1)$. Получаем противоречие и $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ◄