Ступников Александр 25.04.2022

Кр 1.

Вариант 53.

2. $\int\limits_1^{\infty} \frac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx \qquad A=\mathbb{R}$

$\left|\frac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, т.к. $\frac{d}{da}\frac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2} =$

$= -\frac{2a}{(a^2+x^2)^2}$ ( ~~на~~ $=0$ при $a=0$) ~~т.е.~~

Т.е. $>0$ при $a<0$ и

$<0$ при $a>0$

$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2} \rightsquigarrow$ сх-ся ~~и $f(a,x)$ но~~

$\Rightarrow \int\limits_1^{\infty} f(x,a)$ сх-ся равн.

1. 4

2. 1

3. x 4

3. $$I_1(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x(a^2+x^2)} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(a^2+x^2)}\, dx =$$

$$= \left[ x = at \quad dx = a\,dt \right] = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin at\, dt}{t(a^2+a^2t^2)}$$

$$= \frac{2}{a^2} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin at}{t(1+t^2)}\, dt}_{= I(a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} I(a) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos at}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$$

$$\left| \frac{\cos at}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos at}{1+t^2}\, dt \Rightarrow$$

можно дифф-ть.

(Или про $\frac{\partial}{\partial a} I(a)$ сх-сь равн.

как инт. Лапласа)

$$I(a) = -\frac{\pi}{2} e^{-|a|} + C$$

$$I(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1(a) = \frac{\pi - \pi e^{-|a|}}{a^2}$$

1. 4

$a > 0,\ b > 0$

4.

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 bx}{x^2 e^{ax}}\, dx$$

огр. непрерывн.

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial a} = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 bx}{x\, e^{ax}}\, dx \Rightarrow 0$$

огр. непрерывн.

$$I''_a = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 bx}{e^{ax}}\, dx \Rightarrow 0 =$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{e^{ax}}\, dx - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3bx}{e^{ax}}\, dx =$$

$$= \cancel{\frac{3}{4} \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{1}{4}} \quad \frac{3}{4} \frac{b}{a^2+b^2} - \frac{1}{4} \frac{3b}{9b^2+a^2}$$

$$I'(a) = \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{a}{3b} + C(b)$$

$$I'(0) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 bx}{x}\, dx =$$

$$= -\frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x}\, dx + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3bx}{x}\, dx =$$

$$= -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow C(b) = -\frac{\pi}{4}$$

1. 4

$p > -1$

5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x \, dx}{x^2} dx = \left[\begin{matrix} x = e^t \\ t = \ln x \\ dx = e^t dt \end{matrix}\right] =$

$= \int_0^{+\infty} \frac{t^p \cancel{dx} \, e^t}{x \cdot e^{2t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t} dt =$

$= \Gamma(p+1) = p!$