САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Дисциплина: Математический анализ

Отчет

по лабораторной работе №2

«Ряды Фурье»

Выполнил(а): Ступников Александр Сергеевич

студ. гр. M3135

Санкт-Петербург

2020

Лабораторная работа №2.
„Ряды Фурье"
Вариант 85.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos x, & x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

1) $\exists\ \tilde{f}(x)$ — периодическое продолжение $f(x)$. $T = 2\pi$, $l = \pi$.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\cos(k+1)x + \cos(k-1)x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(k+1)x}{k+1} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} + \frac{\sin(k-1)x}{k-1} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(k+1)\frac{\pi}{2}}{k+1} + \frac{\sin(k-1)\frac{\pi}{2}}{k-1} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{k+1} - \frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{k-1}\right) = \frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{\pi(k^2-1)}, \; k \neq 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\sin(k+1)x + \sin(k-1)x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos(k+1)x}{k+1}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{k+1} + \frac{1}{k-1} - \frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{k-1}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi k}{2} - k}{\pi(k^2-1)}, \; k \neq 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \cancel{\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos^3 x}{\sin x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} =$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2}\sin^2 x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx = -\frac{1}{\pi}$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2\cdot\pi} + \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2\pi}\sin x +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{\pi(k^2-1)}\cdot\cos kx + \frac{\sin\frac{\pi k}{2} - k}{\pi(k^2-1)}\cdot\sin kx =$$

$$= \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\} \\ \frac{1}{2}, & x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2) Пусть $\tilde{f}$ — нечётное продолжение $f(x)$ на $[-2\pi, 2\pi]$. $T = 4\pi$, $l = 2\pi$

$$a_0 = a_k = 0$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \tilde{f}(x) \sin\frac{\pi k x}{l} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin\frac{kx}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\cancel{0}\ \frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \sin\frac{kx}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\cancel{0}\ \frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{kx}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{kx}{2}-x\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\left(\frac{k}{2}+1\right)x}{\frac{k}{2}+1}\Bigg|^{\frac{\pi}{2}} \mp \frac{\cos\left(\frac{kx}{2}-1\right)}{\frac{k}{2}-1}\Bigg|^{\frac{\pi}{2}}\right)\Bigg|^{\mp}$$

$$\mp\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\pi k}{\frac{k}{2}+1}+\frac{\cos\pi k}{\frac{k}{2}-1}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(+\frac{\sin\frac{\pi k}{4}}{k+2} \mp \frac{\sin\frac{\pi k}{4}}{k-2}\right)+$$

$$\mp\frac{2k(-1)^k}{\pi(k^2-4)} = \frac{2\left(2\cdot\sin\frac{\pi k}{4} \mp k\cdot(-1)^k\right)}{\pi(k^2-4)},\ k\neq 2$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\cos x \sin x\, dx = -\frac{1}{2\pi}$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2\pi}\sin x + \sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{\infty}\frac{2\left(2\sin\frac{\pi k}{4} - k(-1)^k\right)}{\pi(k^2-4)}\sin\frac{kx}{2} =$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \neq 2\pi + 4\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 0, & x = 2\pi+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

3) $\exists\ \tilde{f}$ - чётное периодич. продолжение $f(x)$ на $[-2\pi; 2\pi]$. $T = 4\pi$, $l = 2\pi$.

$b_k = 0$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \cos \frac{\cancel{\pi} k x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(\cos\left(\frac{\cancel{\pi} k}{2} + 1\right) x + \cos\left(\frac{\cancel{\pi} k}{2} - 1\right) x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{k}{2} + 1\right) x}{\frac{k}{2} + 1} \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} + \frac{\sin\left(\frac{k}{2} - 1\right) x}{\frac{k}{2} - 1} \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos \frac{\pi k}{4}}{\frac{k}{2} + 1} - \frac{\cos \frac{\pi k}{4}}{\frac{k}{2} - 1} \right) =$$

$$= + \frac{4 \cancel{2} \cos \frac{\pi k}{4}}{\pi (k^2 - 4)}, \quad k \neq 2$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx = -\frac{1}{\pi}$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2x} \cos^2 x \, dx = \frac{3}{4}$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2\pi} + \frac{3}{4}\cos x + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{\infty} \frac{4\cos\frac{\pi k}{4}}{\pi(k^2-4)} \cos\frac{kx}{2} = \begin{cases} f(x), & x \neq 2\pi + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & x = 2\pi + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$= f(x),\ x \in \mathbb{R}$ сх. равн. на $\mathbb{R}$.

Далее на рисунках изображены графики частичных сумм для общего тригонометрического ряда Фурье, ряда Фурье по синусам и ряда Фурье по косинусам для различного числа слагаемых частичной суммы (3, 5 и 50 слагаемых). Графики частичных сумм выделены на рисунках красным цветом, график исходной функции – синим. Визуально видно, что частичные суммы рядов Фурье приближают исходную функцию.

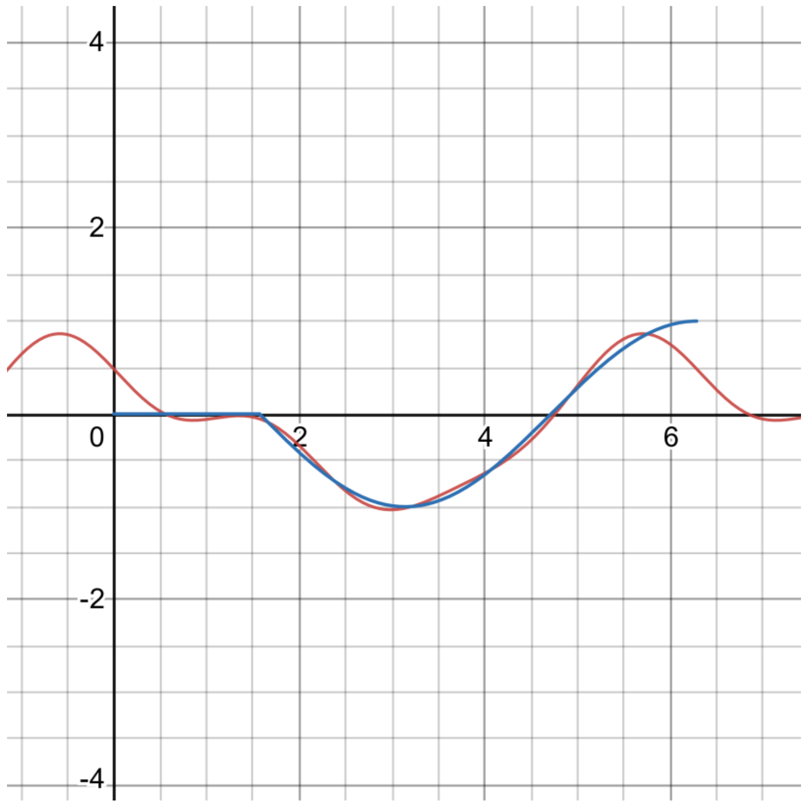

График частичных сумм S_3 для общего тригонометрического ряда Фурье

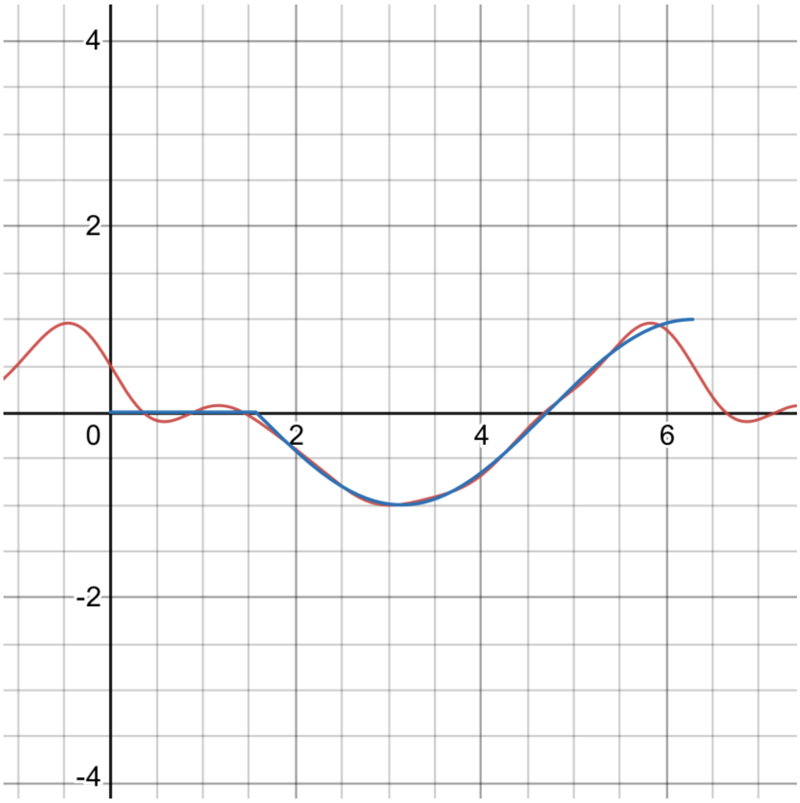

График частичных сумм S_5 для общего тригонометрического ряда Фурье

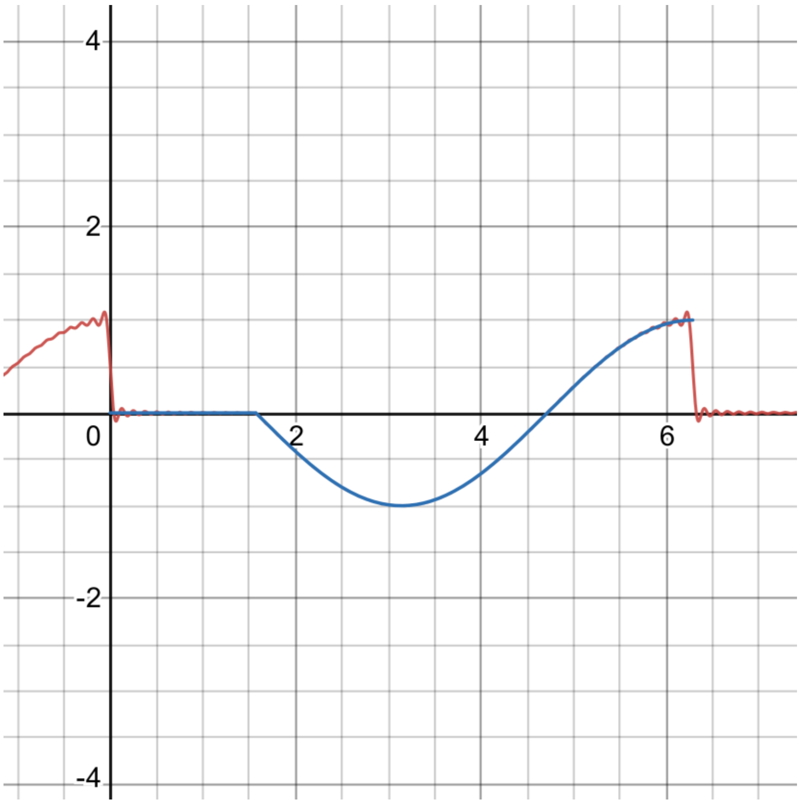

График частичных сумм S_{50} для общего тригонометрического ряда Фурье

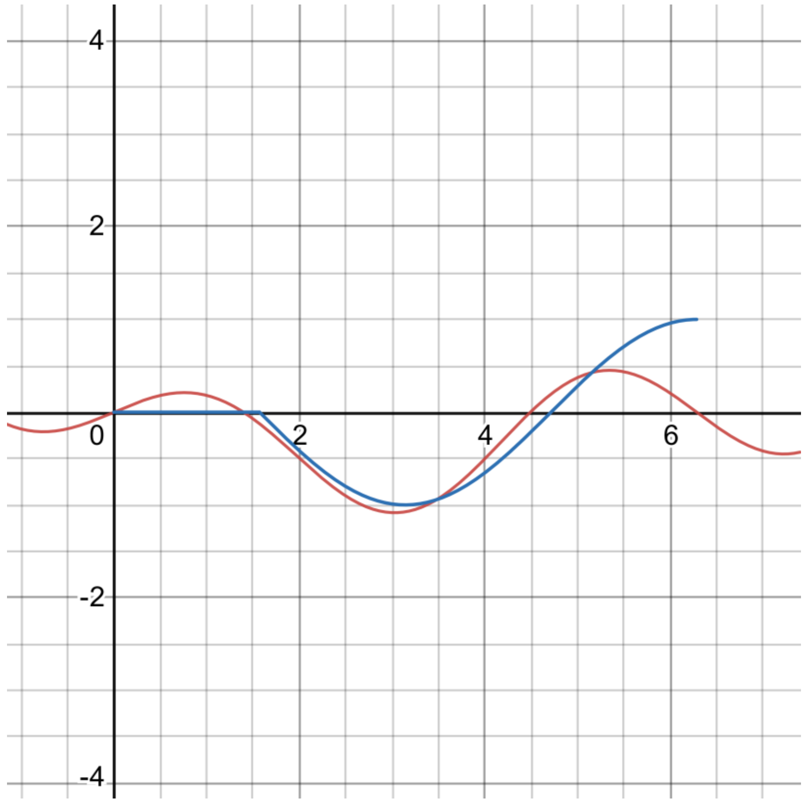

График частичных сумм S_3 для ряда Фурье по синусам

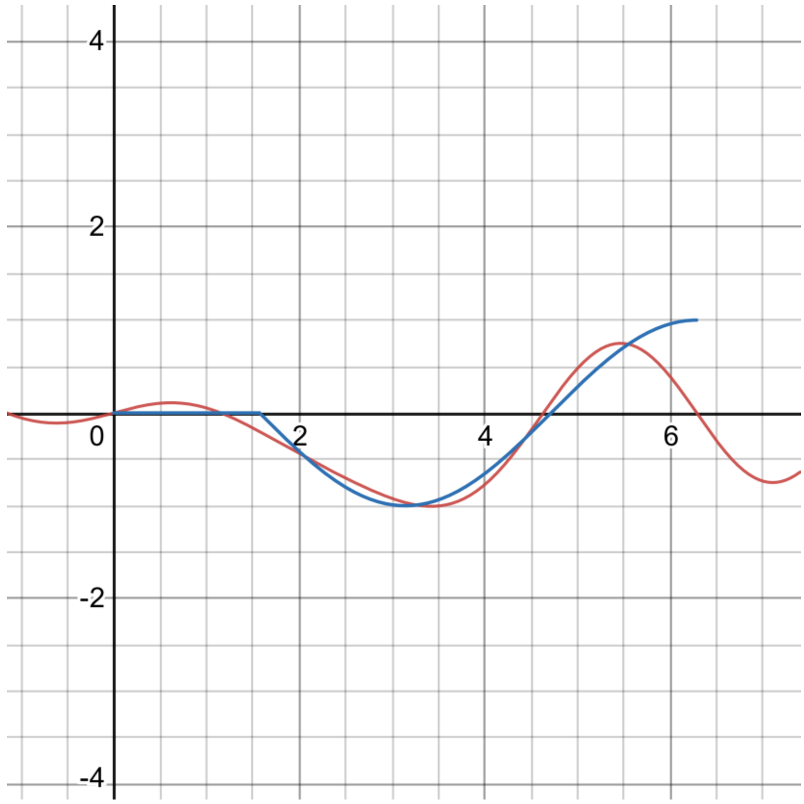

График частичных сумм S_5 для ряда Фурье по синусам

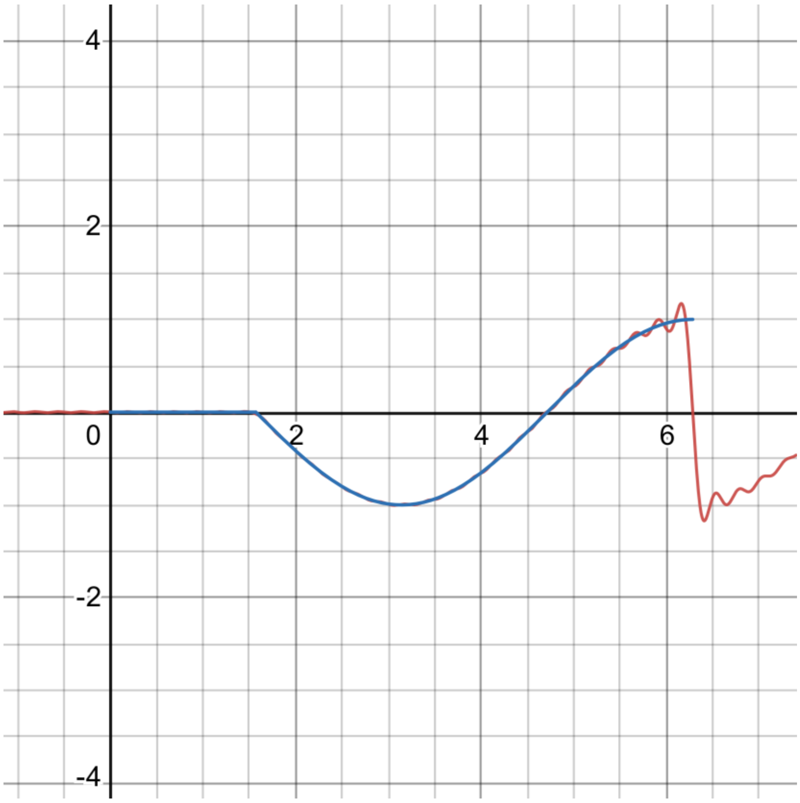

График частичных сумм S_{50} для ряда Фурье по синусам

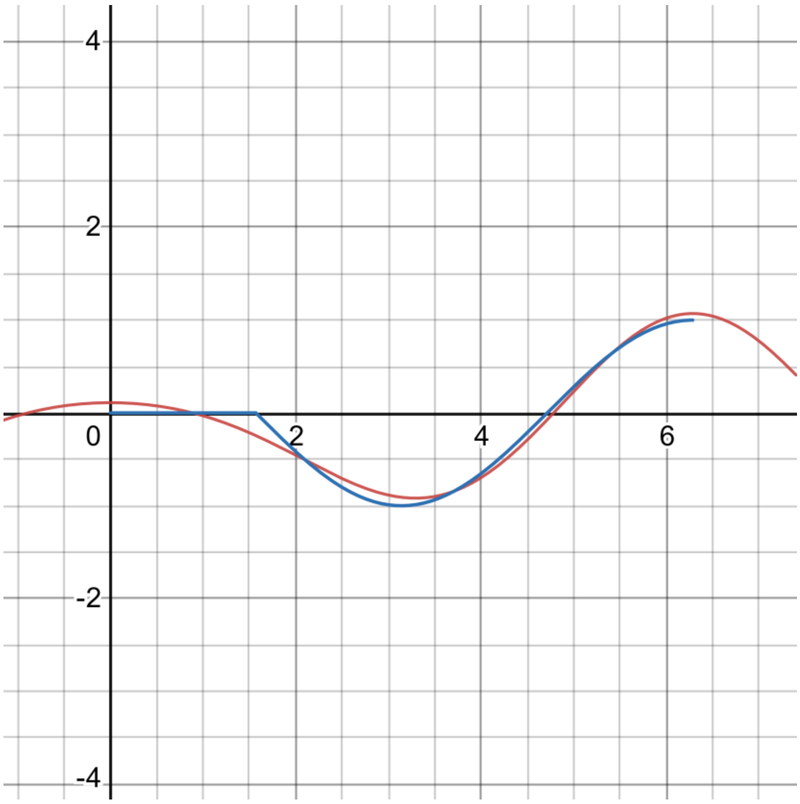

График частичных сумм S_3 для ряда Фурье по косинусам

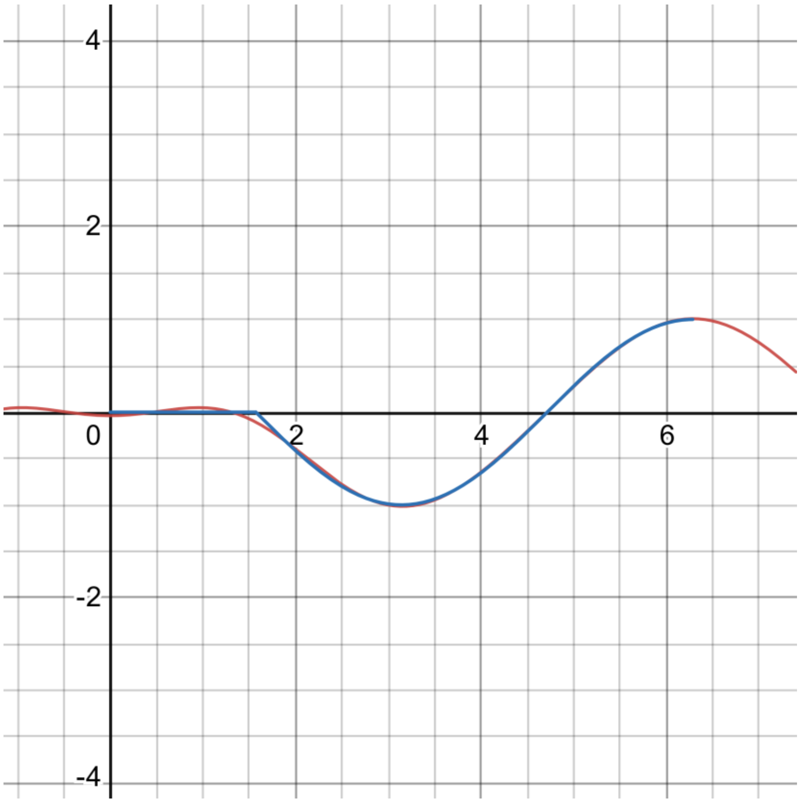

График частичных сумм S_5 для ряда Фурье по косинусам

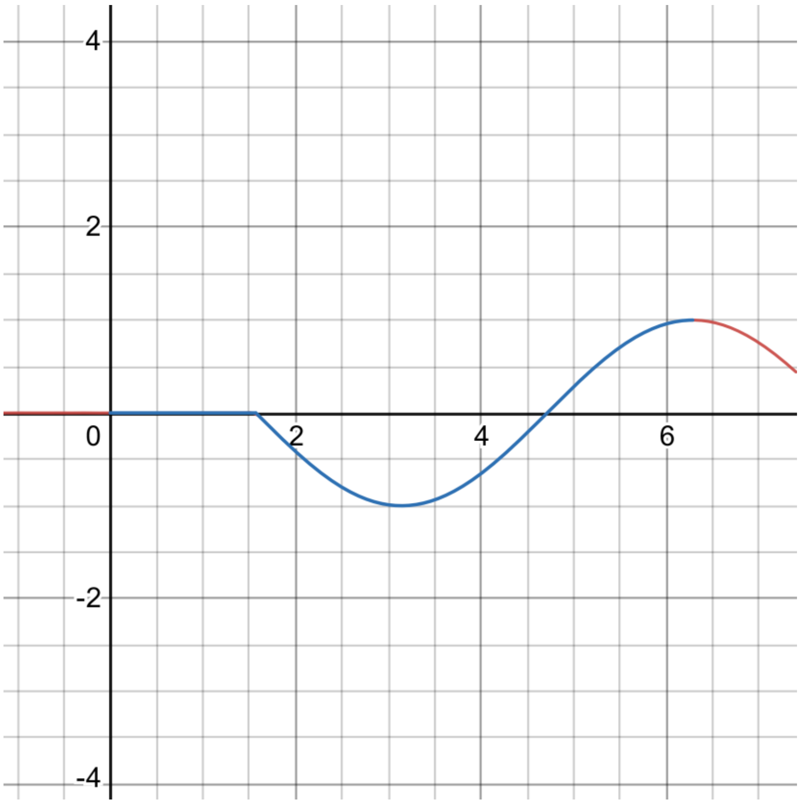

График частичных сумм S_{50} для ряда Фурье по косинусам