Многомерное интегрирование

1 Мера Жордана в $\mathbb{R}^n$

Здесь мы приведем краткие определения и необходимые свойства меры Жордана. Подробно теория меры будет рассмотрена в четвертом семестре.

1.1 Клеточные множества

Клеткой (или n-мерным параллелепипедом, n-мерным прямоугольником) в $\mathbb{R}^n$ назовем множество

$$\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \le x_i < b_i, i = 1, \dots, n\} = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n),$$

$a_i \le b_i$, $i = 1, \dots, n$.

Пустое множество считается клеткой по определению.

В $\mathbb{R}$ клеткой является $[a, b)$.

В $\mathbb{R}^2$ клеткой является прямоугольник без правой и верхней границы.

В $\mathbb{R}^3$ клеткой является параллелепипед без соответствующих граней.

Будем говорить, что множества A_i, $i = 1, \dots, m$ образуют ***разбиение*** множества A, если

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \ne j.$$

Множество в $\mathbb{R}^n$, разбиение которого образуют клетки, будем называть ***клеточным множеством***.

Различных разбиений клеточного множества на клетки бесконечно много.

Замечание 1 *Иногда клетку в $\mathbb{R}$ определяют как интервал $\langle a, b\rangle$, границы которого могут ему принадлежать, а могут и не принадлежать. Тогда при объединении таких клеток вместо слов ‘непересекающиеся клетки‘ нужно говорить ‘клетки, не имеющие общих внутренних точек‘.*

Свойства клеточных множеств

1. Пересечение, объединение, разность двух клеточных множеств есть клеточное множество;

2. Объединение и пересечение конечного числа клеточных множеств есть клеточное множество;

3. Клеточное множество ограничено.

Мерой клетки Π назовем число

$$\mu(\Pi) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Мера пустого множества равна нулю по определению.

Мера клетки в пространствах $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ равна, соответственно, длине, площади и объему клетки.

Если клеточное множество A является объединением непересекающихся клеток Π_i, $i = 1, \ldots, m$, то его ***мера*** по определению есть

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(\Pi_i).$$

Корректность определения меры клеточного множества поясняет следующая лемма.

Лемма 1 *Мера клеточного множества не зависит от способа его разбиения на клетки.*

1.2 Мера Жордана

Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется ***измеримым по Жордану***, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдутся два клеточных множества A и B такие, что $A \subset \Omega \subset B$ и $\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$.

Мерой Жордана множества Ω (измеримого по Жордану) называется число $\mu(\Omega)$ такое, что для любых двух клеточных множеств A и B таких, что $A \subset \Omega \subset B$, выполняется $\mu(A) \leq \mu(\Omega) \leq \mu(B)$.

Корректность этого определения подтверждается следующим утверждением: Число $\mu(\Omega)$ существует и единственно, причем

$$\mu(\Omega) = \sup_{A \subset \Omega} \mu(A) = \inf_{B \supset \Omega} \mu(B).$$

Если $\mu(\Omega) = 0$, то множество Ω называется ***множеством меры нуль***.

Свойства множеств меры нуль

1. $\mu(E) = 0$ если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_\varepsilon$ такое, что $E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon) < \varepsilon$;

2. Объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль;

3. Подмножество меры нуль есть множество меры нуль.

Теорема 1 (Жордана) *Для того, чтобы множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно чтобы оно было ограниченным и его граница $\partial\Omega$ являлась множеством меры нуль.*

Примем теорему без доказательства.

Свойства меры Жордана. Все указанные множества измеримы по Жордану.

1. *Неотрицательность.*
$$\mu(A) \geq 0.$$

2. *Монотонность.*
$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B).$$
3. *Полуаддитивность.*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i).$$
4. *Конечная аддитивность.* Если множества A_i образуют разбиение множества A, то
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i).$$
5. Для любого измеримого множества A:
$$\mu(A) = \mu(\operatorname{int} A) = \mu(\bar{A}),$$
где $\operatorname{int} A$ – внутренность A, $\bar{A}$ – замыкание A.

Пример. Рассмотрим множества $X = [0,1]$ и $A = \{x : x \in X \cap Q\}$, где Q - множество рациональных чисел. Граница $\partial A = X$ и множество A не измеримо по Жордану.

Если рассмотреть множество $B = \{(x,y) : x \in A, y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, то это множество измеримо, т.к. его граница $\partial B = \{(x,y) : x \in [0,1], y = 0\}$ имеет мер нуль и $\mu B = 0$, т.к. $B \subset \partial B$.

2 Кратный интеграл Римана

2.1 Определения

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – измеримо по Жордану.

Введем основные обозначения.

$T = \{G_i\}$, $i = 1, \ldots, m$ – разбиение G:
$$G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i, \quad G_i \cap G_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$
где множества G_i – измеримы.

Диаметр множества G_i:
$$d(G_i) = \sup_{x,y \in G_i} \rho(x,y).$$

Диаметр разбиения T (***мелкость разбиения***):
$$\lambda(T) = \max_{i=1,\ldots,m} d(G_i).$$

Пусть на G определена функция f: $G \to \mathbb{R}$.

Возьмем точки $\xi_i \in G_i$ и составим ***интегральную сумму Римана***:
$$\sigma_m(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\mu(G_i).$$

Определение 1 *Число I называется **интегралом (Римана)** функции $f(x)$ по области G, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall T : \lambda(T) < \delta \Rightarrow |\sigma_m(f, T, \xi) - I| < \varepsilon.$$

*При этом функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на G.*

В общем случае обозначение интеграла такое:
$I = \int\limits_G f(x)dx$ или $I = \underbrace{\int \cdots \int\limits_G}_{\text{n раз}} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$.

В $\mathbb{R}^2$ интеграл называется двойным и обозначается: $I = \iint\limits_G f(x,y)dxdy$.

В $\mathbb{R}^3$ интеграл называется тройным и обозначается: $I = \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$.

Введем понятие сумм Дарбу.
Пусть

$$M_i = \sup_{x \in G_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in G_i} f(x).$$

Тогда

$$s_T = \sum_{i=1}^{m} m_i \mu(G_i) - \text{\textit{нижняя сумма Дарбу}},$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{m} M_i \mu(G_i) - \text{\textit{верхняя сумма Дарбу}}.$$

Теорема 2 (Необходимое и достаточное условие интегрируемости) *Для того, чтобы ограниченная на области G функция $f(x)$ была интегрируема на G, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall T : \lambda(t) < \delta \Rightarrow 0 \le S_t - s_t < \varepsilon.$$

Теорема 3 *Функция, непрерывная на измеримом компакте, интегрируема на этом компакте.*

Доказательства этих двух теорем аналогичны доказательствам аналогичных теорем для функции одной переменной. Уточним последнюю теорему.

Теорема 4 *Пусть функция $f(x)$ ограничена на измеримом компакте $G \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывна на множестве $G \setminus E$, где $\mu(E) = 0$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на G.*

$\square$ Пусть E – множество точек разрыва функции $f(x)$ и $\mu(E) = 0$.
Обозначим $M = \sup\limits_{x \in G} |f(x)|$.

Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ найдется открытое измеримое множество A такое, что $E \subset A$ и
$$\mu(A) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$
Т.к. A – открыто, то $G \setminus A$ – замкнуто, а, значит, компактно. $f(x)$ непрерывна на $G \setminus A$, следовательно, интегрируема.

Возьмем разбиение T_1 множества $G \setminus A$ такое, что
$$S_{T_1} - s_{T_1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Добавляя к T_1 множество A, получим разбиение T множества G. Тогда
$$S_T - s_T = (S_{T_1} - s_{T_1}) + (M_A - m_A)\,\mu(A),$$
где $M_A = \sup\limits_{x\in A} f(x)$, $m_A = \inf\limits_{x\in A} f(x)$. Тогда $M_A - m_A \leq 2M$ и
$$S_T - s_T < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M\varepsilon}{4M} = \varepsilon,$$
что и означает интегрируемость функции $f(x)$ на G. ■

Замечание 2 *В отличии от функции одной переменной, из интегрируемости функции не следует ее ограниченность. Например, функция может быть интегрируема на области G и иметь бесконечный разрыв на множестве меры нуль.*

Далее будем рассматривать только ограниченные функции.

2.2 Свойства кратного интеграла

Большинство свойств, приведенных в этом параграфе, были нами доказаны для интеграла функции одной переменной. В случае кратного интеграла доказательства аналогичны, так что, приводить здесь их не будем.

Везде $G \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Жордану множество.

1. $\int\limits_G 1dx = \mu(G).$

2. Если $f(x)$ – интегрируема на G и $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_G f(x)dx \geq 0.$

3. Если $f(x)$, $g(x)$ – интегрируемы на G, то для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на G и
$$\int\limits_G (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_G f(x)dx + \beta \int\limits_G g(x)dx.$$

4. Если $f(x)$, $g(x)$ – интегрируемы на G и
$$f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_G f(x)dx \geq \int\limits_G g(x)dx.$$

5. ***Теорема о среднем***. Если $f(x)$, $g(x)$ – интегрируемы на G, $m \leq f(x) \leq M$, $g(x) \geq 0$, то
$$\exists k \in [m, M] : \quad \int\limits_G f(x)g(x)dx = k \int\limits_G g(x)dx.$$
Как следствие, если $f(x)$ непрерывна на G, то $\exists \xi \in G$:
$$\int\limits_G f(x)dx = f(\xi)\mu(G).$$

6. ***Конечная аддитивность интеграла***. Если G_i, $i = 1, \ldots, m$ – разбиение G, то $f(x)$ интегрируема на G тогда и только тогда, когда она интегрируема на $\forall G_i$ и
$$\int\limits_G f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{G_i} f(x)dx.$$

7. Если $G_1 \subset G_2$ – измеримые по Жордану и $f(x) \geq 0$ - интегрируема на G_2, то $f(x)$ интегрируема на G_1 и
$$\int\limits_{G_1} f(x)dx \leq \int\limits_{G_2} f(x)dx.$$

8. Если $f(x)$ интегрируема на G, то $|f(x)|$ тоже интегрируема на G и
$$\left| \int\limits_G f(x)dx \right| \leq \int\limits_G |f(x)|dx.$$

2.3 Двойной интеграл

2.3.1 Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим интеграл
$$I = \iint\limits_G f(x, y)dxdy, \quad G \subset \mathbb{R}^2 \text{ - измеримое по Жордану.}$$

Пусть $f(x, y) > 0$ на G.

Назовем ***цилиндрическим телом*** тело, ограниченное снизу плоскостью XOY, сверху поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, а с боков - цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси OZ, а направляющая - граница области G (см. рис.).

Тогда объем цилиндрического тела равен двойному интегралу I.

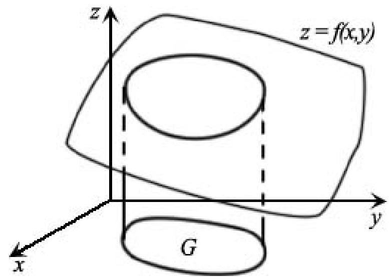


Рис. 1: Цилиндрическое тело

2.3.2 Вычисление двойного интеграла по прямоугольной области

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ прямоугольник

$$\Pi = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\} = [a, b] \times [c, d].$$

Получим способ вычисления двойного интеграла по этой области.

Теорема 5 *Пусть функция $f(x, y)$ ограничена и интегрируема в прямоугольнике Π и для $\forall x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_c^d f(x, y)dy$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy$ интегрируема на $[a, b]$ и*

$$\iint\limits_{\Pi} f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy.$$

Интеграл, стоящий справа, называется ***повторным интегралом***.

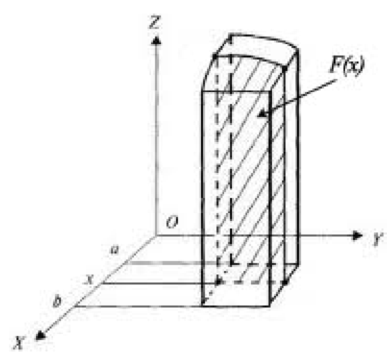


Рис. 2: Сечения цилиндрического тела

□ Возьмем разбиения отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$:

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b, \quad y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d.$$

При этом получим разбиение прямоугольника Π:

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \Pi_{ij}, \quad \Pi_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

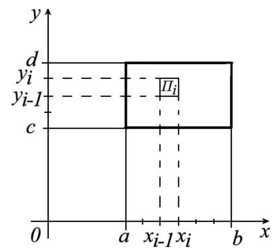


Рис. 3: Разбиение прямоугольника

Обозначим
$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in\Pi_{ij}} f(x,y), \quad m_{ij} = \inf_{(x,y)\in\Pi_{ij}} f(x,y),$$
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Для каждой ячейки Π_{ij} имеем
$$m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij} \quad \Rightarrow$$
$$m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy \le M_{ij}\Delta y_j.$$

Просуммируем по всем j:
$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_c^d f(x,y)dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j,$$
или
$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le F(x) \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j. \qquad (*)$$

Обозначим
$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} F(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} F(x).$$

Тогда из $(*)$ следует
$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le m_i \le M_i \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j.$$

Умножим каждую часть на Δx_i и сложим по всем $i = 1, \ldots, n$:
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j.$$

Каждая часть полученного неравенства является суммой Дарбу для функции $f(x,y)$ по области G или $F(x)$ по отрезку $[a,b]$. Т.е.
$$s(f(x,y)) \le s(F(x)) \le S(F(x)) \le S(f(x,y))$$

или
$$0 \leq S(F(x)) - s(F(x)) \leq S(f(x,y)) - s(f(x,y)) < \varepsilon.$$
Последнее неравенство выполняется, т.к. функция $f(x,y)$ интегрируема на G.

Следовательно, функция $F(x)$ интегрируема на $[a,b]$, т.е. существует $\int\limits_a^b F(x)dx$. Докажем, что он равен двойному интегралу.

Проинтегрируем неравенство $(*)$ по отрезку $[x_{i-1}, x_i]$:
$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \leq \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)dx \leq \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$$
и просуммируем по всем $i = 1, \ldots, n$:
$$s(f(x,y)) \leq \int\limits_a^b F(x)dx \leq S(f(x,y)).$$

Так как
$$s(f(x,y)) \leq \iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy \leq S(f(x,y))$$
и двойной интеграл существует, то
$$\int\limits_a^b F(x)dx = \iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy. \quad \blacksquare$$

Замечание 3 *Если еще потребовать, чтобы при* $\forall y \in [c,d]$ *существовал интеграл* $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, *то можно записать*
$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Следствие. Если $f(x,y) = g(x)h(y)$ и обе функции $g(x)$ и $h(y)$ интегрируемы, то
$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b g(x)dx \cdot \int\limits_c^d h(y)dy.$$

2.3.3 Вычисление двойного интеграла по элементарной области

Назовем область $G \subset \mathbb{R}^2$ ***элементарной относительно*** y, если она имеет вид
$$G = \{(x,y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$
где функции $y_1(x), y_2(x)$ - непрерывны на $[a,b]$.

Аналогично определяется область, ***элементарная по*** x:

$$G = \{(x,y) : c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\},$$

где функции $x_1(y), x_2(y)$ - непрерывны на $[c,d]$.

Элементарная область является компактом и измерима по Жордану.

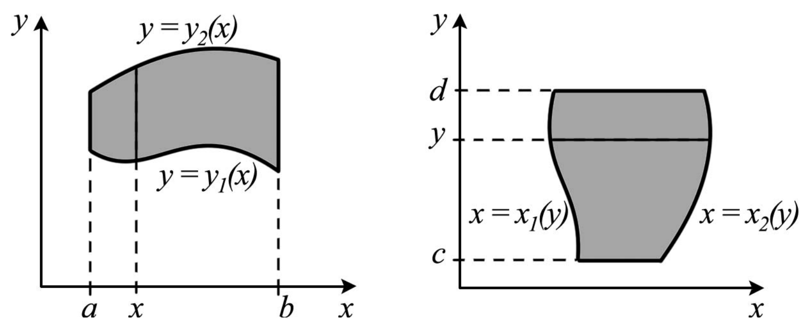


Рис. 4: Элементарные области. Слева – по y, справа – по x.

Теорема 6 (Фубини) *Пусть функция $f(x,y)$ ограничена и интегрируема на элементарной относительно y области G, и при $\forall x \in [a,b]$ существует интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$. Тогда*

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

☐ Обозначим

$$c = \min_{x\in[a,b]} y_1(x), \quad d = \max_{x\in[a,b]} y_2(x).$$

Тогда $G \subset \Pi = [a,b]\times[c,d]$.

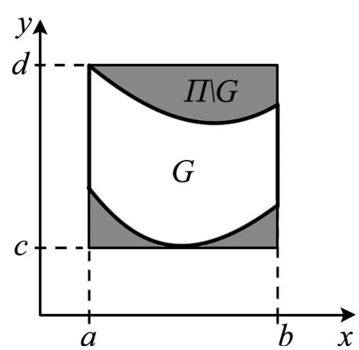


Рис. 5: К доказательству теоремы Фубини

Введем функцию $g(x,y) = f(x,y)$ при $(x,y) \in G$, $g(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \Pi\setminus G$. Так как $f(x,y)$ интегрируема на G, то $g(x,y)$ интегрируема на Π и

$$\iint\limits_\Pi g(x,y)dxdy = \iint\limits_G f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Pi\setminus G} 0dxdy = \iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

При $\forall x \in [a,b]$:

$$\int\limits_c^d g(x,y)dy = \int\limits_c^{y_1(x)} 0dy + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy + \int\limits_{y_2(x)}^{d} 0dy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Тогда по предыдущей теореме

$$\iint\limits_{\Pi} g(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d g(x,y)dy.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \quad \blacksquare$$

Теорема 7 (О непрерывности внутреннего интеграла) *Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и $\varphi(x) < \psi(x)$ на $[a,b]$, функция $f(x,y)$ непрерывна в области $G = \{(x,y) : a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$. Тогда функция*

$$\Phi(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

непрерывна на $[a,b]$.

$\square$ Разобьем доказательство на два пункта.

I. Докажем утверждение теоремы для случая $\varphi(x) \equiv c$, $\psi(x) \equiv d$.

Тогда $G = [a,b] \times [c,d]$ - прямоугольник, и $\Phi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$.

Так как функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на $[a,b]$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \forall y \in [c,d], \quad \forall x, x+\Delta x \in [a,b], |\Delta x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x+\Delta x, y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Тогда

$$|\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)| = \left| \int\limits_c^d (f(x+\Delta x, y) - f(x,y))\, dy \right| \le \int\limits_c^d |f(x+\Delta x, y) - f(x,y)|\, dy <$$

$$< \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon.$$

Следовательно, функция $\Phi(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

II. Пусть теперь функции $\varphi(x), \psi(x)$ произвольны.

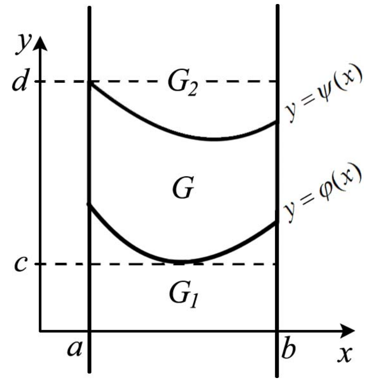


Рис. 6: К доказательству теоремы о непрерывности внутреннего интеграла

Обозначим области:

$$G_1 = \{(x,y) : a \le x \le b, y \le \varphi(x)\}, \quad G_2 = \{(x,y) : a \le x \le b, y \ge \psi(x)\}.$$

Введем функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in G; \\ f(x,\varphi(x)), & (x,y) \in G_1; \\ f(x,\psi(x)), & (x,y) \in G_2. \end{cases}$$

Функция $F(x,y)$ непрерывна в каждой области G, G_1, G_2. Так как эти области пересекаются по своим границам, то функция $F(x,y)$ будет непрерывна на их объединении, т.е. на полосе $a \le x \le b$. Значит, она непрерывна в прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$, где $c = \min \varphi(x)$, $d = \max \psi(x)$, $x \in [a,b]$. Следовательно, по доказанному в пункте I, функция $\int\limits_c^d F(x,y)dy$ непрерывна на $[a,b]$. Распишем

$$\Phi(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x,y)dy = \int\limits_c^d F(x,y)dy - \int\limits_c^{\varphi(x)} f(x,\varphi(x))dy - \int\limits_{\psi(x)}^d f(x,\psi(x))dy =$$

$$\int\limits_c^d F(x,y)dy - (\varphi(x) - c)f(x,\varphi(x)) - (d - \psi(x))f(x,\psi(x)).$$

Тогда функция $\Phi(x)$ непрерывна на $[a,b]$ как сумма непрерывных функций.
■

Замена переменных в двойном интеграле

Геометрический смысл Якобиана Рассуждения, приведённые в этом пункте не полностью строгие, но геометрически наглядные.

Пусть функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ непрерывно дифференцируемы и задают взаимно-однозначное отображение области $G' \subset \mathbb{R}^2$ на область $G \subset \mathbb{R}^2$.

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема на G. Зададимся вопросом, как свести двойной интеграл $\iint_G f(x, y)dxdy$ к двойному интегралу по области G'.

Зададимся вопросом, как изменится площадь элементарного прямоугольника при таком отображении.

Пусть при взаимно-однозначном отображении $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ прямоугольник Π переходит в криволинейный четырехугольник Π' и якобиан отображения $J(u, v) \neq 0$ ни в одной точке Π.

Пусть прямоугольник Π имеет вершины (u, v), $(u + du, v)$, $(u + du, v + dv)$, $(u, v+dv)$. Обозначим вершины его образа (вершины фигуры Π') так: $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$.

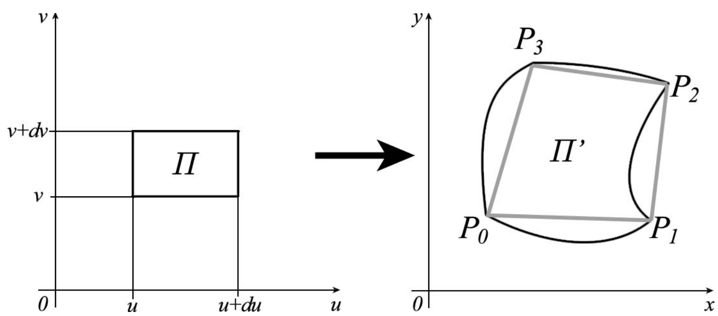


Рис. 7: Образ элементарного прямоугольника при замене переменных

$$x_0 = x(u, v), \quad y_0 = y(u, v).$$

Запишем для каждой координаты вершин P_1, P_2, P_3, как значения функций от u и v, формулу Тейлора до второго члена:

$$x_1 = x(u + du, v) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}du + \alpha_1, \quad y_1 = y(u + du, v) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}du + \beta_1,$$

$$x_2 = x(u + du, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \alpha_2,$$

$$y_2 = y(u + du, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \beta_2,$$

$$x_3 = x(u, v + dv) = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \alpha_3, \quad y_3 = y(u, v + dv) = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \beta_3,$$

где все $\alpha_1, \alpha_2, \alpha 3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ есть $o\left(\sqrt{du^2 + dv^2}\right)$ при $du \to 0$, $dv \to 0$.

Тогда отрезок P_0P_1:

$$x_1 - x_0 = \frac{\partial x}{\partial u}du + \alpha_1, \quad y_1 - y_0 = \frac{\partial y}{\partial u}du + \beta_1.$$

Отрезок P_2P_3:

$$x_3 - x_2 = -\frac{\partial x}{\partial u}du - \alpha_2, \quad y_3 - y_2 = -\frac{\partial y}{\partial u}du - \beta_2.$$

Получаем, что с точностью до $o\left(\sqrt{du^2 + dv^2}\right)$ отрезки P_0P_1 и P_2P_3 равны и параллельны. С такой же точностью можно считать фигуру Π' параллелограммом $P_0P_1P_2P_3$.

Площадь параллелограмма (здесь знак $\approx$ означает равенство с точностью до $o\left(\sqrt{du^2+dv^2}\right)$):

$$\mu(\Pi') \approx S_{P_0P_1P_2P_3} = \operatorname{abs}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_1 \\ y_1-y_0 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = \operatorname{abs}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \frac{\partial y}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{vmatrix} = \operatorname{abs}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} |dudv| =$$

$$= |J(u,v)dudv| = |J(u,v)|\mu(\Pi).$$

Итак, **геометрический смысл якобиана** таков: модуль якобиана равен коэффициенту изменения элементарной площади при данном отображении.

Можно доказать точное равенство:

$$\lim_{du,dv\to 0,0} \frac{\mu(\Pi')}{dudv} = |J(u,v)|.$$

Замена переменных в двойном интеграле

Тогда формула замены переменной в двойном интеграле будет иметь вид:

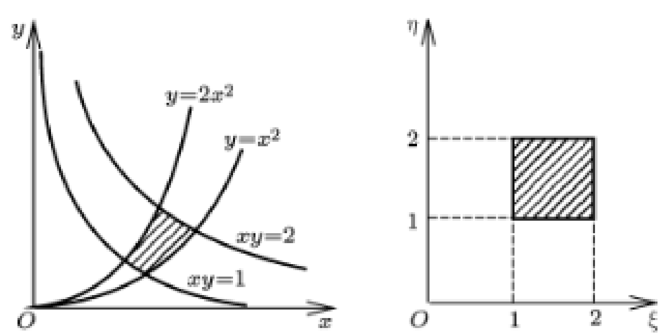
$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G'} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv.$$

Замечание 4 *Нарушение взаимной однозначности отображения или равенство якобиана нулю на множестве меры нуль (например, в отдельных точках или на линии) не влияют на справедливость формулы замены переменной, т.к. множество меры нуль всегда можно покрыть клеточным множеством сколь угодно малой меры, так что интегральная сумма для него будет стремиться к нулю и не повлияет на значение интеграла.*

Пример. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{G} y^3 dxdy,$$

G – ограничена двумя параболами $y=x^2$, $y=2x^2$ и двумя гиперболами $xy=1$, $xy=2$.



Введём новые переменные $u=y/x^2$, $v=xy$. Вычислим якобиан:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2}, \quad |J| = \frac{x^2}{3y}.$$

Тогда

$$\iint\limits_{G} y^3 dxdy = \iint\limits_{G'} \frac{1}{3} x^2 y^2 dudv = \frac{1}{3} \iint\limits_{G'} v^2 dudv = \frac{1}{3} \int\limits_1^2 du \int\limits_1^2 v^2 dv = \frac{7}{9}.$$

Полярные координаты

Переход в полярные координаты задаётся отображением

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Якобиан этого отображения

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Якобиан равен нулю только в полюсе (в начале координат) и там же нарушается взаимно-однозначность отображения, т.к. в точке $r = 0$ значение φ может быть любым. Но это не влияет на верность формулы замены переменной.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2). \quad \text{лемниската}$$

Перепишем уравнение кривой в полярных координатах:

$$r^4 = 2a^2 r^2 \cos 2\varphi \quad \text{или} \quad r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

Заметим, что кривая симметрична относительно координатных осей. Тогда будем искать площадь фигуры, лежащей в первой четверти, и умножим результат на 4.

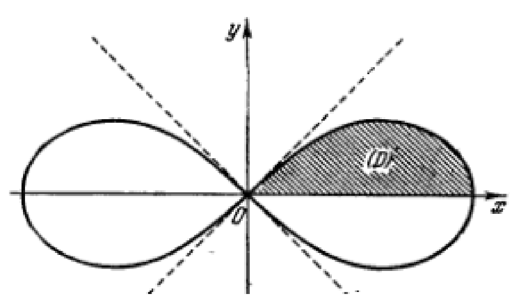


Рис. 8: Лемниската

$$\frac{1}{4}S = \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D'} r dr d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}.$$

Это интересно. Полярные координаты использовались в исследованиях еще до н.э. (Динострат, IV в. до н.э.) и потом применялись при решении конкретных задач. Формулы, позволяющие связать декартовы и полярные координаты появились впервые у Эйлера (1748). Вопреки привычному на сегодняшний день представлению, он разрешал полярному радиусу принимать отрицательные значения и откладывал соответствующие точки на противоположном луче. В некоторых учебниках и сегодня можно найти такой подход.

Тройной интеграл

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и интегрируема в измеримой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Требуется вычислить

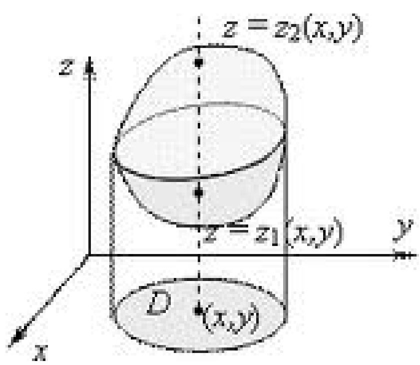
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz.$$

Укажем два способа сведения тройного интеграла к повторному применению двойного и однократного интергалов.

Назовем тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ***элементарным относительно оси*** z, если она задается

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

где область D – ограничена в $\mathbb{R}^2$ и функции $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ – непрерывны на D.



Тогда, если функция $f(x, y, z)$ интегрируема на Ω и для $\forall (x, y) \in D$ $\exists \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Если же тело Ω можно описать в виде

$$\Omega = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \ \ (y, z) \in D(x)\}$$

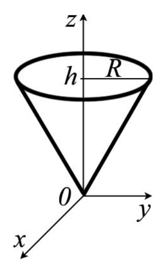
и при $\forall x \in [a,b] \quad \exists \iint_{D(x)} f(x,y,z)dydz$, то для интегрируемой функции $f(x,y,z)$ по телу Ω будет выполнено

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{D(x)} f(x,y,z)dydz.$$

Если область D в первом способе представления тройного интеграла или каждая из областей $D(x)$ во втором способе является элементарной, то тройной интеграл распадается на три повторных:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Пример. Вычислить двумя способами $I = \iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$, где тело Ω есть часть конуса $R^2z^2 = h^2(x^2+y^2)$, отсекаемая плоскостью $z = h$.



1-ый способ. Зададим тело таким образом:

$$(x,y) \in D: \quad x^2+y^2 \le R^2, \quad \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le h.$$

Тогда

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} zdz = \frac{h^2}{2}\iint\limits_D \left(1 - \frac{1}{R^2}\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy =$$

перейдем в полярные координаты

$$= \frac{h^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)dr = \frac{h^2}{2}2\pi\frac{R^2}{4} = \frac{\pi h^2R^2}{4}.$$

2-ой способ. Представим тело так:

$$0 \le z \le h, \, (x,y) \in D(z) : x^2+y^2 \le \frac{R^2z^2}{h^2}.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^h zdz \iint\limits_{D(z)} dxdy = \int\limits_0^h zdzS_{D(z)} = \int\limits_0^h \frac{R^2z^3}{h^2}dz = \frac{\pi h^2R^2}{4}.$$

Еще два способа вычисления этого интеграла приведены дальше.

Формула для замены переменной в тройном интеграле аналогична двумерному случаю. А именно, если взаимно однозначное отображение $(u,v,w) \to (x,y,z)$ переводит область $\Omega' \to \Omega$, функции $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ непрерывно дифференцируемы на Ω', функция $f(x,y,z)$ непрерывна на Ω и якобиан $J(u,v,w) \neq 0$ на Ω', то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw.$$

Эта формула обобщается на случай кратного интеграла произвольной (конечной) кратности.

Переход к цилиндрическим координатам

Цилиндрические координаты являются обобщением полярных координат. Точка задается полярными координатами (ρ, φ) проекции на плоскость XOY и координатой z по оси OZ.

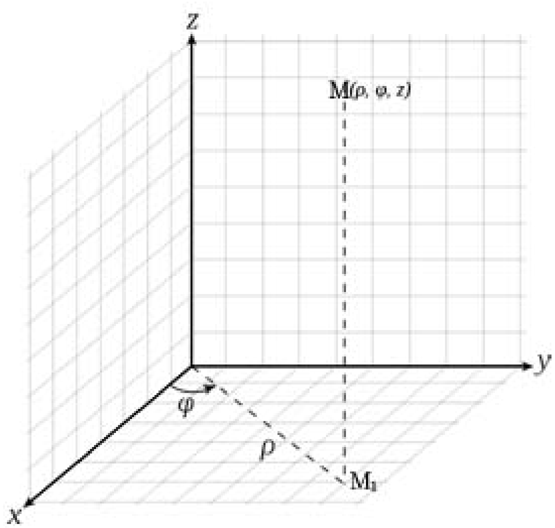


Рис. 9: Цилиндрические координаты.

Формулы для перехода:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан для цилиндрических координат такой же, как и для полярных:

$$J(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Пример. Решим предыдущий пример с помощью цилиндрических координат.

Тело Ω в цилиндрических координатах задается неравенствами:

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le h, \quad 0 \le \rho \le \frac{Rz}{h}.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h zdz \int\limits_0^{\frac{Rz}{h}} rdr = 2\pi \frac{1}{2} \int\limits_0^h \frac{R^2 z^3}{h^2} dz = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

Переход к сферическим координатам

В сферических координатах точка M задается тройкой (r, φ, θ) , где r - расстояние от точки M до начала координат, $\varphi \in [0, 2\pi)$ - полярный угол проекции точки на плоскость XOY (иначе говоря, угол XOM_1 , где M_1 - проекция точки M), $\theta \in [0, \pi]$ - угол между радиус-вектором OM и положительным направление оси OZ.

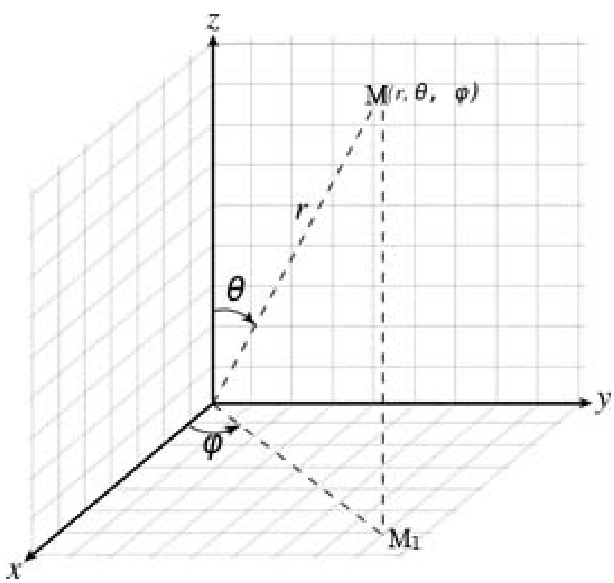


Рис. 10: Сферические координаты.

Формулы перехода имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Якобиан был вычислен ранее (когда вводили понятие якобиана):

$$J(r, \varphi, \theta) = \frac{\partial x, y, z}{\partial r, \varphi, \theta} = -r^2 \sin\theta.$$

Якобиан обращается в ноль на оси OZ, т.е. на множестве меры ноль в $\mathbb{R}^3$.

Замечание 5 *Иногда в качестве угла θ используют угол θ_1 между радиус-вектором точки и плоскостью XOY, т.е. $\theta_1 = \pi/2 - \theta$ в наших обозначениях. Тогда формулы для перехода будут иметь вид*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta_1, \\ y = r\sin\varphi\cos\theta_1, \\ z = r\sin\theta_1. \end{cases} \quad \text{и} \quad J(r,\varphi,\theta_1) = -r^2\cos\theta_1.$$

Пример. Решим предыдущий пример еще одним способом. Конус Ω в сферических координатах задается неравенствами

$$0 \le \varphi 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \operatorname{arctg}\frac{R}{h}, \quad 0 \le r \le \frac{h}{\cos\theta}.$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{R}{h}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{\frac{h}{\cos\theta}} r^3 dr = \dots = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

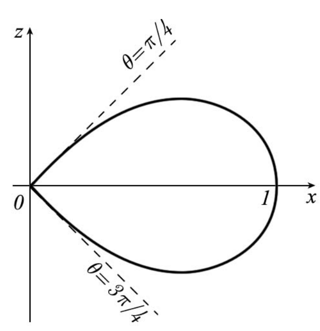
$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^2\left(x^2+y^2-z^2\right).$$

Желательно сделать рисунок тела, но глядя на данное уравнение это сделать затруднительно. Наличие выражения $x^2+y^2+z^2$ наводит на мысль о переходе в сферические координаты, в которых $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Подставим формулы перехода в сферические координаты в уравнение:

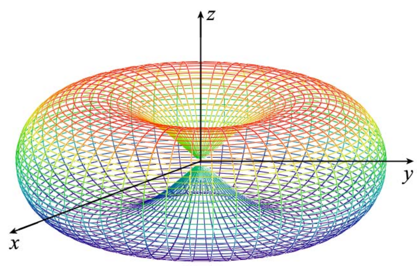
$$r^4 = a^2r^2\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \quad \text{или} \quad r^2 = -a^2\cos 2\theta.$$

Видим, что r не зависит от φ, значит, тело является телом вращения (ось вращения - OZ). Рассмотрим сечение тела плоскостью XOZ (или любой другой, проходящей через ось OZ). Нарисуем кривую в плоскости XOZ, задаваемую уравнением $r = a\sqrt{-\cos 2\theta}$, где r - полярный радиус точки, θ - угол с осью OZ.

Область допустимых значений θ находится из условия $\cos 2\theta \le 0$, что дает решения $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Нарисуем примерный график.



Тогда искомое тело получается вращением данной фигуры вокруг оси OZ.



Для нахождения объема воспользуемся формулой для объёма, записанной в сферических координатах:

$$V_T = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_\Omega r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta =$$

теперь перейдем к повторному интегралу (порядок интегрирования обычно удобно выбирать именно такой, т.к. зависимости от φ нет, а кривая задается зависимостью r от θ)

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r^2 dr =$$

самый внешний интеграл (по φ) можно вычислить сразу (т.к. зависимости от φ нет)

$$= 2\pi \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3} \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta \left(-\cos 2\theta\right)^{3/2} d\theta =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(1 - 2\cos^2\theta\right)^{3/2} d\left(\cos\theta\right) = \frac{4\pi a^3}{3} \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \left(1 - 2t^2\right)^{3/2} dt$$

Не будем углубляться в вычисления и напишем ответ: $V_T \cong 1,745\, a^3$.

3 Криволинейные интегралы

Напомним некоторые сведения, известные нам из второго семестра.

Путем в $\mathbb{R}^n$ называется непрерывное отображение γ: $[a, b] \to \mathbb{R}^n$. $\gamma([a, b])$ – носитель пути.

Два пути $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ и $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называются эквивалентными, если существует строго возрастающая непрерывная биекция $u : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, что $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(u(t))$.

Кривой называют класс эквивалентных путей, а каждого представителя класса – параметризацией кривой.

Длиной пути называют супремум длин ломаных, вписанных в путь (т.е. ломаных, вершины которых содержатся в носителе пути). Если этот супремум конечен, то путь называют спрямляемым. Было доказано, что длины эквивалентных путей равны. Длиной кривой называют длину любой её параметризации. Длина кривой не зависит от параметризации и аддитивна. Гладкая кривая, т.е. кривая, для которой существует параметризация $\gamma \in C^1[a,b]$ спрямляема.

Пусть путь $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma \in C^1[a,b]$ задается функциями непрерывно дифференцируемыми $x = x(t)$, $y = y(t)$. Введём функцию $l_\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$, равную длине γ от точки a до точки t. Было доказано, что $l'_\gamma(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ и длина всего пути

$$l_\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

Аналогично, для гладкого трёхмерного пути $\gamma = (x(t), y(t), z(t))$ длина равна

$$l_\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

3.1 Криволинейный интеграл первого рода (КИ-1)

Пусть L – кусочно гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, имеющая параметризацию $\gamma = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$.

Пусть во всех точках кривой определена непрерывная функция $f(x,y,z)$.

Построим разбиение T отрезка $[a,b]$ на n частей точками $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Соответствующие точки на кривой обозначим $M_i\,(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$.

Длину i-ой дуги обозначим $\Delta l_i = |\smile M_{i-1}M_i|$ и назовем мелкостью (или рангом) разбиения T число $\lambda(T) = \min\limits_i \Delta l_i$.

Оснастим разбиение T точками $A_i \in \smile M_{i-1}M_i$, $\xi = (A_1, ..., A_n)$ и составим интегральную сумму

$$\sigma(f,T,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i)\Delta l_i.$$

Определение 2 *Криволинейным интегралом 1-го рода функции f по кривой L называется число I такое, что*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall T : \lambda(T) < \delta \ \forall\xi \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f,T,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$I = \int\limits_L f(x,y,z)dl, \quad I = \oint\limits_L f(x,y,z)dl.$$

Второе применяют для интеграла по замкнутой кривой (контуру).

Методы вычисления КИ-1 связаны со способами задания кривой. Рассмотрим несколько случаев.

1. Кривая L задана натуральной параметризацией, т.е. γ: $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$, $s \in [0,\ell]$ – длина кривой от начала до точки s (ℓ – длина всей кривой).

Тогда

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_0^\ell f(x(s),y(s),z(s))ds,$$

так как приращение длины кривой в интегральной сумме $\Delta l_i = \Delta s_i$.

2. Произвольная параметризация кривой L: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $t \in [a,b]$, функции $x(t), y(t), z(t) \in C^1[a,b]$.

   Пусть возрастающая биекция $u : [a,b] \to [o,\ell]$ переводит в натуральную параметризацию $s = u(t)$, $x(t) = \tilde{x}(s)$, $y(t) = \tilde{y}(s)$, $z(t) = \tilde{z}(s)$. Тогда

$$I = \int\limits_0^\ell f(\tilde{x}(s),\tilde{y}(s),\tilde{z}(s))ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt.$$

   Заметим, что $ds = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt = \|\gamma'(t)\|dt$.

   Следствие. КИ-1 не зависит от способа параметризации кривой.

3. Кривая L в $\mathbb{R}^2$ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = y(x)$, $x \in [a,b]$. Тогда

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

Свойства КИ-1

1. КИ первого рода не зависит от ориентации кривой, т.е.

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_{L^-} f(x,y,z)dl;$$

2. Линейность

$$\int\limits_L (af(x,y,z)+bg(x,y,z))\,dl = a\int\limits_L f(x,y,z)dl + b\int\limits_L g(x,y,z)dl;$$

3. $\displaystyle\int\limits_L dl = \ell.$

4. Аддитивность

$$L = \bigcup_{i=1}^n L_i, \quad L_i \cap L_j = \emptyset \Rightarrow \int\limits_L f(x,y,z)dl = \sum_{i=1}^n \int\limits_{L_i} f(x,y,z)dl.$$

Физический смысл КИ-1. Если на кривой задана линейная плотность в каждой точке функцией $\rho = \rho(x,y,z)$, то масса кривой равна КИ-1 от плотности:

$$m = \int\limits_L \rho(x,y,z)dl.$$

3.2 Криволинейный интеграл второго рода (КИ-2)

Определим это понятие в пространстве $\mathbb{R}^2$. Пусть кривая L кусочно-гладкая, имеет параметризацию $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. На L задано непрерывное отображение $F : L \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Иногда говорят, что задано векторное поле $\vec{F}$.

Как и прежде, построим разбиение $[a,b]$ T: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, которому соответствуют дуги $M_{i-1}M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Мелкость разбиения $\lambda = \min\limits_i | \smile M_{i-1}M_i|$. На каждой дуге выберем точку A_i. Для каждой дуги определим

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) \quad \text{и} \quad \Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}).$$

Составим две интегральные суммы

$$\sigma_P(F,T,\xi) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\Delta x_i, \quad \sigma_Q(F,T,\xi) = \sum_{i=1}^{n} Q(A_i)\Delta y_i.$$

Определение 3 *Криволинейным интегралом 2-го рода отображения $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ по кривой L называется число I такое, что*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall T : \lambda(T) < \delta \ \forall \xi \quad \Rightarrow \quad |\sigma_P(F,T,\xi) + \sigma_Q(F,T,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$I = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad I = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Второе применяют для интеграла по замкнутой кривой (контуру).

Замечание 6 *Можно использовать векторную запись:*

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L \vec{F}d\vec{r},$$

где $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ и $d\vec{r} = (dx, dy)$.

Замечание 7 *КИ-2 отображения $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ можно представить как сумму КИ-2 двух отображений $(P(x,y), 0)$ и $(0, Q(x,y))$:*

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L P(x,y)dx + \int\limits_L Q(x,y)dy.$$

Замечание 8 *Если в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана кусочно гладкая кривая L и непрерывное векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, то КИ-2 определяется аналогично:*

$$\int\limits_L \vec{F}(x,y,z)d\vec{r} = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Вычисление КИ-2 зависит от способа задания кривой. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть кривая L задана натуральной параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, \ell]$. Тогда единичный вектор касательной можно задать направляющими косинусами:

$$\vec{\tau} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = (\cos\alpha, \cos\beta),$$

Следовательно,

$$dx = x' ds = \cos\alpha ds, \quad dy = y' ds = \cos\beta ds.$$

Тогда КИ-2 сводится к КИ-1:

$$\int\limits_L P dx + Q dy = \int\limits_L \left(P\left(x(s), y(s)\right)\cos\alpha + Q\left(x(s), y(s)\right)\cos\beta\right) ds =$$

$$= \int\limits_L \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta\right) ds.$$

2. Пусть кривая L задана параметрически $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Тогда переходя к натуральной параметризации через функцию $s = u(t) : [a, b] \to [0, \ell]$, получим единичный касательный вектор $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. Тогда

$$x'(t) = \cos\alpha s'(t), \quad y'(t) = \cos\beta s'(t),$$

и

$$\int\limits_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int\limits_0^\ell \left(P\left(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)\right)\cos\alpha + Q\left(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)\right)\cos\beta\right) ds =$$

$$= \int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right) dt.$$

3. Пусть кривая L в $\mathbb{R}^2$ является графиком функции $y = y(x)$, $x \in [a, b]$. Тогда

$$\int\limits_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int\limits_a^b \left(P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right) y'(x)\right) dx.$$

Замечание 9 *Полученные формулы масштабируются для пространства* $\mathbb{R}^3$ *(и аналогично,* $\mathbb{R}^n$*) следующим образом. Пусть* L*:* $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in C^1[a, b]$*,* $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \in C(L)$*. Тогда*

$$\int\limits_L \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_L P dx + Q dy + R dz = \int\limits_a^b \left(Px' + Qy' + Rz'\right) dt,$$

где аргументы функций P*,* Q*,* R *опущены для краткости записи.*

Свойства КИ-2

1. КИ второго рода при смене ориентации кривой меняет знак:
$$\int\limits_L \vec{F}d\vec{r} = -\int\limits_{L^-} \vec{F}d\vec{r};$$

2. Линейность
$$\int\limits_L \left(a\vec{F} + b\vec{G}\right) d\vec{r} = a\int\limits_L \vec{F}d\vec{r} + b\int\limits_L \vec{G}d\vec{r};$$

3. Аддитивность
$$L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i, \quad \bigcap L_i = \emptyset \Rightarrow \int\limits_L \vec{F}d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{L_i} \vec{F}d\vec{r}.$$

4. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ разбита на две области: $D = D_1 \cup D_2$, $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$. Векторное поле $\vec{F}(x,y)$ определено в $\bar{D}$. Тогда КИ-2 по границе ∂D равен сумме КИ-2 по границам ∂D_1 и ∂D_2:
$$\oint\limits_{\partial D} \vec{F}d\vec{r} = \oint\limits_{\partial D_1} \vec{F}d\vec{r} + \oint\limits_{\partial D_2} \vec{F}d\vec{r},$$
где направления обхода всех границ совпадают.

Физический смысл КИ-2. КИ-2 равен работе силового поля $\vec{F}(P,Q,R)$ по перемещению материальной точки (единичного заряда) вдоль кривой.

Пример. Вычислить
$$I = \int\limits_L (x - y^2)dx + 2xydy,$$
если кривая L соединяет точки $O(0,0)$ и $A(1,1)$ тремя способами: а) по отрезку OA; б) по дуге параболы $y = x^2$; в) по ломаной OBA, где $B(1,0)$.

а)$OA: \quad y = x, \quad dy = dx, \quad x \in [0,1]$.
$$I = \int\limits_0^1 \left(x - x^2 + 2x^2\right) dx = \int\limits_0^1 \left(x + x^2\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

б) $y = x^2, \quad dy = 2xdx$.
$$I = \int\limits_0^1 \left(x - x^4 + 2x^3 \cdot 2x\right) dx = \int\limits_0^1 \left(x + 3x^4\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10}.$$

в) $OB: y = 0, \quad dy = 0, x \in [0,1]$, $BA: x = 1, dx = 0, y \in [0,1]$.
$$I = \left\{\int\limits_{OB} + \int\limits_{BA}\right\} (x - y^2)dx + 2xydy = \int\limits_0^1 xdx + \int\limits_0^1 2ydy = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

3.3 Формула Грина

Будем рассматривать на плоскости $\mathbb{R}^2$ простую замкнутую ориентированную кривую (или контур) L, т.е. замкнутую кусочно-гладкую кривую без самопересечений. L делит плоскость $\mathbb{R}^2$ на два множества – ограниченное (внутреннее) и неограниченное (внешнее). Назовем множеством D – ограниченное множество с границей L.

Определим на L **положительное направление обхода** – это такое направление, при движении в котором область D расположена слева (в каждой точке контура).

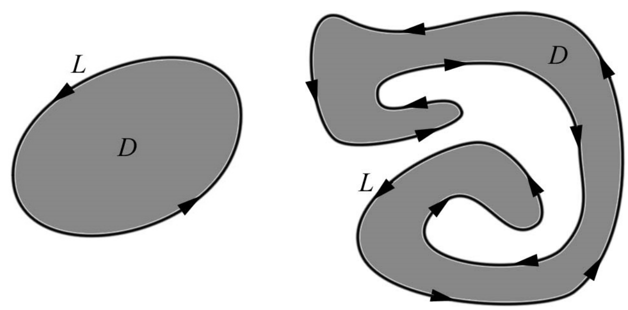


Рис. 11: Положительное направление обхода

Множество называется **односвязным**, если для любого простого контура, лежащего в нём, в нём также содержится множество, ограниченное этим контуром.

Простой контур является границей односвязного множества.

Лемма 2 (О приближении КИ-2 интегралами по ломаным) *Пусть $K \in \mathbb{R}^2$ – компакт, путь $\gamma \in C^1$, $\gamma \subset K$, $P(x,y), Q(x,y) \in C(K)$. $\Lambda \subset K$ – ломаная, вписанная в γ, ℓ – наибольшая длина звена Λ. Тогда*

$$\lim_{\ell \to 0} \int\limits_{\Lambda} Pdx + Qdy = \int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy.$$

$\triangleright$ Рассмотрим случай $Q(x,y) \equiv 0$. Возьмем некоторое разбиение T: $A_0, A_1, ..., A_n \in \gamma$. Для $\varepsilon > 0$ выполнено условие существования КИ-2:

$$\exists \delta_1 > 0 : \ \forall T \lambda(T) < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \Big| \int\limits_{\gamma} Pdx - \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \Delta x_i \Big| < \varepsilon.$$

Функция $P(x,y)$ непрерывна на K, а значит, равномерно непрерывна на K, то есть

$$\exists \delta_2 > 0 \ \forall A, B \in K : \ \rho(A,B) < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \Big| P(A) - P(B) \Big| < \varepsilon.$$

Возьмем $\ell < \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда

$$\int\limits_{\Lambda} Pdx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_{i-1}A_i} Pdx = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_{i-1}A_i} (P(x,y) - P(A_i))dx.$$

Рассмотрим разность

$$\Big|\int\limits_{\Lambda} Pdx - \int\limits_{\gamma} Pdx\Big| \le \Big|\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\Delta x_i - \int\limits_{\gamma} Pdx\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_{i-1}A_i} (P(x,y) - P(A_i))dx\Big| \le$$

$$\le \varepsilon + \Big|\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_{i-1}A_i} \big|P(x,y) - P(A_i)\big| dx\Big| \le \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_{i-1}A_i} |dx| \le \varepsilon(1 + \ell_\gamma).$$

Для интеграла $\int\limits_{\gamma} Qdy$ доказательство аналогично. ◀

Теорема 8 (Формула Грина) *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в односвязном замкнутом множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченным простым контуром L. Тогда верна формула Грина:*

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

где контур L обходится в положительном направлении.

▷ Вначале докажем теорему для случая множества D, элементарного относительно и x и y. Пусть

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\} = \{(x,y) : c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}.$$

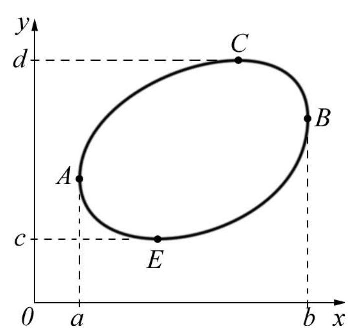


Рис. 12:

Рассмотрим

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_{a}^{b} \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right) dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} P(x, y_2(x))dx - \int\limits_{a}^{b} P(x, y_1(x))dx = \int\limits_{ACB} P(x,y)dx - \int\limits_{AEB} P(x,y)dx = -\oint\limits_{L} P(x,y)dx,$$

в последнем интеграле направление обхода положительно.

Аналогично,

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_c^d Q(x_2(y), y) dy - \int\limits_c^d Q(x_1(y), y) dy =$$

$$= \int\limits_{EBC} Q(x, y) dy - \int\limits_{EAC} Q(x, y) dy = \oint\limits_L Q(x, y) dy.$$

Вычитая полученные равенства, получим

$$\oint\limits_L P dx + Q dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Если D не является элементарным относительно каждой из переменных x и y, но его можно разбить на конечное число непересекающихся элементарных множеств, то есть:

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i, \quad \mu \left(\bigcap_{i=1}^n D_i \right) = 0.$$

Тогда

$$\oint\limits_L P dx + Q dy = \sum_{i=1}^n \oint\limits_{\partial D_i} P dx + Q dy,$$

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \oint\limits_{\partial D_i} P dx + Q dy = \iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^n \iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

то формула Грина верна и в этом случае.

В общем случае нужно приближать интеграл по кривой интегралами по вписанным ломаным. При этом двойные интегралы будут вычисляться по многоугольникам, которые представимы в виде объединения конечного числа элементарных множеств (например, треугольников). ◀

Докажем, что формула Грина верна и для случая многосвязного множества, т.е. множества, ограниченного конечным числом простых кусочно-гладких контуров, один из которых содержит внутри себя все остальные.

Теорема 9 (Формула Грина для многосвязного множества) *Формула Грина верна для многосвязного множества.*

▷ Пусть граница ∂D области D состоит из положительно ориентированных контуров L, L_1, L_2 (см. рис.).

Сделаем область односвязной, добавив разрезы AB и CE (см. рис.)

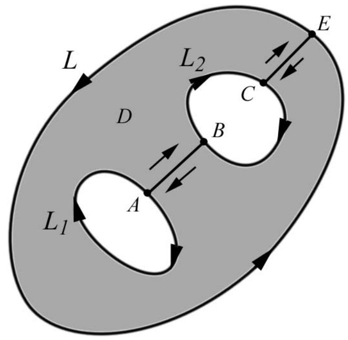


Рис. 13:

Двойной интеграл при этом не изменится (т.к. разрезы имеют меру нуль). Тогда, по доказанной теорем для односвязной области

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{EFECBAHABCE} Pdx + Qdy =$$

$$= \left\{ \int\limits_L + \int\limits_{EC} + \int\limits_{L_2} + \int\limits_{BA} + \int\limits_{L_1} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{CE} \right\} Pdx + Qdy =$$

$$= \left\{ \oint\limits_L + \oint\limits_{L_1} + \oint\limits_{L_2} \right\} Pdx + Qdy,$$

все контуры ориентированы положительно. ◀

Пример. Вычислить $\oint_L (2xy - y)\, dx + x^2 dy$, где L - эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Имеем

$$P(x, y) = 2xy - y, \quad Q(x, y) = x^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - (2x - 1) = 1.$$

Тогда по формуле Грина:

$$\oint_L (2xy - y)\, dx + x^2 dy = \iint_D dxdy = S_D = \pi ab,$$

где область D - внутренняя часть эллипса.

В общем случае, площадь плоской фигуры D можно вычислить с помощью криволинейного интеграла:

$$S_D = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx,$$

где L – граница фигуры D, проходимая в положительном направлении.

Второе доказательство формулы замены переменных в двойном интеграле

Пусть функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ непрерывно дифференцируемы, имеют непрерывные смешанные производные второго порядка и отображают $G' \to G$ взаимно однозначно.

Получим соотношение между площадями областей G и G', ограниченными контурами Γ и Γ'.

Имеем по формуле Грина

$$S_G = \iint\limits_G dxdy = \oint\limits_\Gamma xdy.$$

Пусть контур Γ' задается параметрически: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leq t \leq b$. Контур Γ имеет тогда параметрические уравнения $x = x(u(t), v(t))$, $y = y(u(t), v(t))$. Тогда для площади имеем (знак зависит от ориентации контура Γ'):

$$S_G = \oint\limits_\Gamma xdy = \int\limits_a^b x(u(t), v(t)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v' \right) dt =$$

$$= \pm \oint\limits_{\Gamma'} x(u, v) \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \pm \oint\limits_{\Gamma'} x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Еще раз применим формулу Грина, где $P = x\frac{\partial y}{\partial u}$, $Q = x\frac{\partial y}{\partial v}$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = J(u, v).$$

Тогда

$$S_G = \pm \iint\limits_{G'} J(u, v) dudv = \iint\limits_{G'} |J(u, v)| dudv.$$

Модуль якобиана можно писать исходя из положительности двойного интеграла, как площади. Мы получили $dxdy = |J(u, v)| dudv$.

Отсюда получаем один смысл знака якобиана. Если якобиан положительный, то ориентация контура при таком отображении сохраняется. При отрицательном якобиане направление контура при отображении меняется на противоположное.

4 Независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^n$ задана векторная функция $\vec{F}(x)$. Будем говорить, что КИ второго рода

$$\int\limits_L \vec{F} d\vec{r}$$

не зависит от пути интегрирования, если

$$\int\limits_{L_1} \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_{L_2} \vec{F} d\vec{r},$$

где L_1 и L_2 - две произвольные кусочно-гладкие кривые, лежащие в G и соединяющие точки $A \in G$ и $B \in G$.

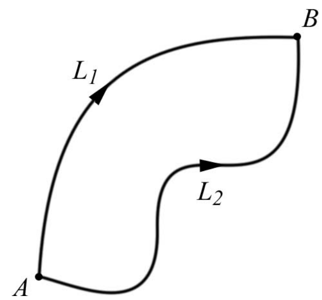


Рис. 14:

Значение такого интеграла зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования. Его часто обозначают

$$\int\limits_{AB} \vec{F} d\vec{r} \quad \text{или} \quad \int\limits_{A}^{B} \vec{F} d\vec{r}.$$

Выясним, при каких условиях КИ-2 не зависит от пути интегрирования. Будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^2$.

Теорема 10 *Пусть в односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$ задано непрерывное веторное поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:*

1. $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$ *для любого простого контура L, лежащего в G;*

2. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ *по дуге $AB \in G$ не зависит от пути интегрирования;*

3. $\exists u = u(x,y): \quad du = Pdx + Qdy.$

□ Доказательство проведем по круговой схеме: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Докажем, что $1 \Rightarrow 2$. Т.е. если для любого контура $L \in G$ $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$, то $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования.

Пусть точки $A \in G$ и $B \in G$. Соединим их двумя разными непрерывными кривыми L_1 и L_2, лежащими в G.

Если эти кривые не имеют точек пересечения (кроме A и B), то кривая $L = L_1 \cup L_2$ есть замкнутая кривая и для нее выполняется

$$0 = \oint\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_{L_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy.$$

Следовательно, $\int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy$, что и означает независимость от пути интегрирования.

Если кривые L_1 и L_2 пересекаются, например, в точке C, то для путей между точками A и C КИ не зависит от пути интегрирования и, аналогично, для путей от точки C до точки B.

Докажем следствие $2 \Rightarrow 3$.

Зафиксируем точку $A(x_0, y_0) \in G$, а точку $B(\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$ будем считать переменной. Рассмотрим функцию

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int\limits_{A(x_0, y_0)}^{B(\tilde{x}, \tilde{y})} Pdx + Qdy.$$

По условию 2) этот интеграл не зависит от пути интегрирования, а, значит, зависит только от точки $B(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Покажем, что u – искомая функция.

Зададим приращение по переменной x:

$$u(\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y}) = \int\limits_{A(x_0, y_0)}^{C(\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y})} Pdx + Qdy.$$

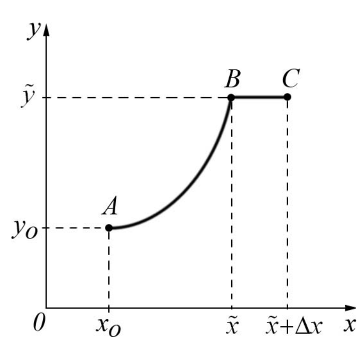


Рис. 15:

Тогда частное приращение функции по x:

$$\Delta_x u = u(\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y}) - u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy.$$

Так как этот интеграл также не зависит от пути интегрирования, то вычислим его по отрезку BC, для которого $y = \tilde{y}$, $dy = 0$, $x \in [\tilde{x}, \tilde{x} + \Delta x]$. Получим

$$\Delta_x u = \int\limits_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+\Delta x} P(x, \tilde{y})\, dx = P(\xi, \tilde{y})\, \Delta x,$$

где $\xi \in [\tilde{x}, \tilde{x} + \Delta x]$.

Тогда для частной производной функции $u(x, y)$ получим

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, \tilde{y}) = P(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Аналогично, получим

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

т.е.

$$du = P(\tilde{x}, \tilde{y})\, dx + Q(\tilde{x}, \tilde{y})\, dy.$$

И последнее. Докажем следствие $3 \Rightarrow 1$.

Пусть $Pdx + Qdy = du$. Это означает, что $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Зададим контур L параметрически:

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \le t \le b, \quad x(a) = x(b),\ y(a) = y(b).$$

Тогда

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dy}{dt} \right) dt = \int\limits_a^b \frac{du}{dt} dt = u(x(t), y(t))\big|_a^b =$$

$$= u(x(a), y(a)) - u(x(b), y(b)) = 0. \quad \blacksquare$$

Замечание 10 *Векторное поле $\vec{F} = (P, Q)$ такое, что $du = Pdx + Qdy$ или, что то же самое, $\vec{F} = \operatorname{grad} u$ называется* ***потенциальным полем****, а функция u – его* ***потенциалом****.*

Замечание 11 *Утверждение теоремы верно и в $\mathbb{R}^3$.*

Следствия

1. Для потенциального поля в односвязной области его потенциал выражается КИ-2 с переменным верхним пределом, который не зависит от пути интегрирования:

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int\limits_{A(x_0, y_0)}^{B(\tilde{x}, \tilde{y})} Pdx + Qdy.$$

2. Если $du = Pdx + Qdy$ в односвязной области G и $A, B \in G$, то

$$\int\limits_A^B Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

(Аналог формулы Ньютона-Лейбница.)

Теорема 11 (Необходимое и достаточное условие потенциального поля в $\mathbb{R}^2$) *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$. Функции $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(G)$. Условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является необходимым и, если G односвязно, достаточным для того, чтобы поле (P,Q) было потенциальным в G.*

$\triangleright$ Необходимость. Пусть $du = Pdx + Qdy$. Тогда

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Продифференцируем еще раз:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

но так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достаточность. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Рассмотрим интеграл по любому замкнутому контуру ∂D в G и применим формулу Грина:

$$\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Осталось воспользоваться теоремой о равносильности этого условия потенциальности поля (P,Q). ◀

Пример. Найти функцию $u(x,y)$, если $du = 2(xy^3+1)dx + 3x^2y^2dy$.

Проверим существование такой функции:

$$\frac{\partial\left(2(xy^3+1)\right)}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial\left(3x^2y^2\right)}{\partial x}.$$

Тогда искомая функция находится с помощью криволинейного интеграла (с точностью до константы C):

$$u\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) = C + \int\limits_{A(x_0,y_0)}^{B(\tilde{x},\tilde{y})} 2(xy^3+1)dx + 3x^2y^2dy.$$

В качестве точки (x_0, y_0) возьмем точку $(0,0)$. Так как данный интеграл не зависит от пути интегрирования, то в качестве пути выберем наиболее удобный, т.е. по отрезкам, параллельным осям координат:

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int\limits_{A(0,0)}^{C(\tilde{x},0)} 2(xy^3+1)dx + 3x^2y^2dy + \int\limits_{C(\tilde{x},0)}^{B(\tilde{x},\tilde{y})} 2(xy^3+1)dx + 3x^2y^2dy.$$

На отрезке AC: $y=0$, $dy=0$, $x \in [0, \tilde{x}]$.

На отрезке CB: $x=\tilde{x}$, $dx=0$, $y \in [0, \tilde{y}]$.

Тогда

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int\limits_0^{\tilde{x}} 2dx + \int\limits_0^{\tilde{y}} 3\tilde{x}^2y^2dy = 2\tilde{x} + \tilde{x}^2\tilde{y}^3.$$

Окончательно, запишем $u(x,y) = 2x + x^2y^3 + C$.

Замечание 12 *Для неодносвязной области криволинейный интеграл даже для потенциального поля зависит от пути интегрирования.*

Пример. Рассмотрим векторное поле с координатами

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Это поле непрерывно дифференцируемо и в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ выполнено $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Рассмотрим интеграл $\oint Pdx + Qdy$ по любому контуру, обходящему один раз начало координат в положительном направлении. Все такие интегралы равны. Вычислим этот интеграл по окружности $x^2+y^2=R^2$:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi}{R^2}d\varphi = 2\pi.$$

Тогда интеграл по любой кривой, соединяющей точки A и B и не проходящей через начало координат равен

$$\int\limits_A^B \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 2\pi n,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ – число обходов контура вокруг начала координат.

5 Поверхностный интеграл

5.1 Основные сведения о поверхностях в $\mathbb{R}^3$

Поверхностью будем называть отображение $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, где D – компакт.

Способы задания поверхности:

1. Явный: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$;

2. Неявный: $F(x, y, z) = 0$;

3. Параметрический: $\vec{r} = \vec{r}(x(u, v), y(u, v), x(u, v)) = \vec{r}(u, v)$.

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), & \quad (u, v) \in D. \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

Поверхность будем называть ***гладкой***, если (в зависимости от способа задания)

1. $z(x, y)$ непрерывно дифференцируема;

2. F – непрерывно дифференцируема и $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ одновременно не обращаются в ноль;

3. $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ – непрерывно дифференцируемы и ранг матрицы Якоби
$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = 2.$$

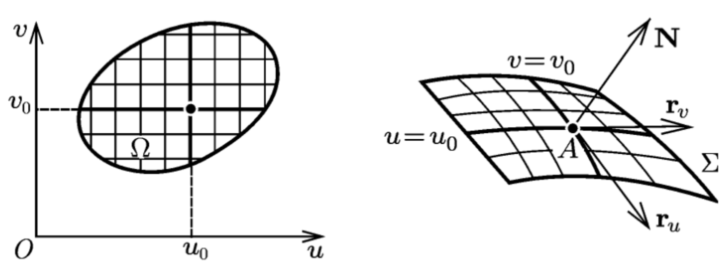
Поверхность будем называть ***простой***, если соответствующее отображение взаимно-однозначно.

Например, полусфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ является простой поверхностью, а вся сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ – не является простой.

Далее будем рассматривать только поверхности, которые можно разбить на конечное число простых гладких поверхностей. Такие поверхности будем называть *кусочно-гладкими.*

Криволинейные координаты на поверхности

Пусть при отображении $(u, v) \to \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ точка (u_0, v_0) переходит в точку A поверхности Σ. Рассмотрим координатные линии $u = u_0$, $v = v_0$. Их образы $\vec{r}(u_0, v)$, $\vec{r}(u, v_0)$ являются кривыми, лежащими на поверхности Σ и называются координатными кривыми (линиями) на поверхности Σ. Координаты (u_0, v_0) называются криволинейными координатами точки A.



Пример. Зададим сферу $x = \cos\varphi \sin\theta$, $y = \sin\varphi \sin\theta$, $z = \cos\theta$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Тогда координатными линиями на сфере будут известные из географии параллели ($\theta = const$) и меридианы ($\varphi = const$).

Ранее мы определяли вектор нормали к поверхности в данной точке как вектор, ортогональный в этой точке любой гладкой кривой на поверхности, проходящей через эту точку. Получим теперь формулу для нахождения вектора нормали.

Рассмотрим векторы $\vec{r}\,'_u$ и $\vec{r}\,'_v$ в точке $A(u_0, v_0)$. Они являются касательными векторами к координатным кривым в точке A. Заметим, что эти векторы не могут быть нулевыми, так как иначе ранг соответствующей матрицы Якоби не будет равен двум (она будет содержать нулевой столбец).

Лемма 3 *В любой точке простой гладкой поверхности Σ, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ вектор $\vec{N} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v$ отличен от нуля, и при смене параметризации направление вектора $\vec{N}$ либо не меняется, либо меняется на противоположное.*

$\triangleright$ Пусть $\vec{r} = (x, y, z)$. Распишем вектор $\vec{N}$:

$$\vec{N} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Определители второго порядка, стоящие справа, являются минорами 2-го порядка матрицы Якоби, а значит они не могут обращаться в ноль одновременно. Следовательно, $\vec{N} \neq 0$.

Пусть отображение $(u_1, v_1) \to (u, v)$ взаимно однозначно и регулярно. Рассмотрим две параметризации одной поверхности Σ: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ и $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u_1, v_1) = \vec{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1))$. Введем вектор $\vec{N_1}$:

$$\vec{N_1} = \vec{r}\,'_{u_1} \times \vec{r}\,'_{v_1} = \left(\vec{r}\,'_u \frac{\partial u}{\partial u_1} + \vec{r}\,'_v \frac{\partial v}{\partial u_1}\right) \times \left(\vec{r}\,'_u \frac{\partial u}{\partial v_1} + \vec{r}\,'_v \frac{\partial v}{\partial v_1}\right) =$$

по свойству дистрибутивности векторного произведения

$$= (\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v) \times \left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right) = \vec{N} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{vmatrix} = \vec{N} \cdot J(u_1, v_1).$$

Отсюда следует, что $\vec{N} \parallel \vec{N_1}$. ◀

Из доказательства леммы 1 мы видим, что знак якобиана определяет направление нормали. А именно, при положительном якобиане нормаль к поверхности не меняет своего направления, а при отрицательном – меняет на противоположное.

Лемма 4 *Вектор $\vec{N} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v$ в данной точке ортогонален ко всем гладким кривым, лежащим на поверхности и проходящим через эту точку.*

$\triangleright$ Зададим кривую: $u = u(t)$, $v = v(t)$. Тогда векторное уравнение кривой $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$.

Касательный вектор в точке A, соответствующей $t = t_0$

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{r}'_u u'(t_0) + \vec{r}'_v v'(t_0)$$

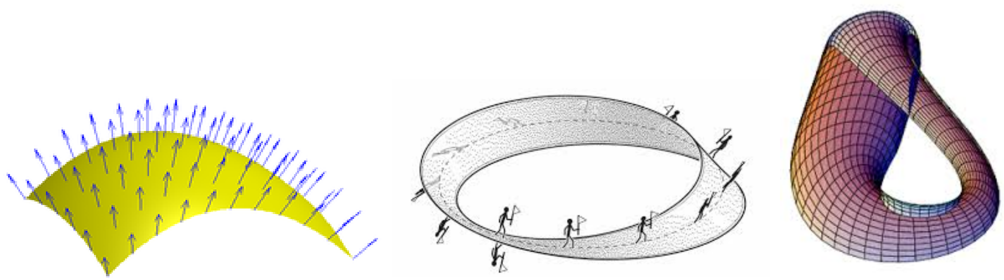
является линейной комбинацией векторов $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$, а значит ортогонален их векторному произведению и вектору $\vec{N}$. ◀

Векторы $\pm\vec{N} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$ являются векторами нормали к поверхности Σ в точке A.

Следствие. Все касательные к гладким кривым, лежащим на поверхности и проходящим через данную точку в данной точке лежат в одной плоскости, ортогональной вектору $\vec{N}$.

Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке.

Кусочно гладкая поверхность называется ***ориентируемой*** (или ***двусторонней***), если на ней существует непрерывное поле единичных нормалей.



Простая поверхность всегда ориентируема.

Примеры неориентируемых (односторонних) поверхностей: лист Мёбиуса, бутылка Клейна (на рисунке: в середине и справа).

Площадь поверхности

Пусть простая гладкая поверхность Σ задана параметрически $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, D – компакт. Рассмотрим дифференциал

$$d\vec{r} = \vec{r}'_u du + \vec{r}'_v dv$$

и его квадрат

$$(d\vec{r})^2 = (\vec{r}'_u)^2 du^2 + 2(\vec{r}'_u \vec{r}'_v) du dv + (\vec{r}'_v)^2 dv^2.$$

Последнее выражение называется *первой квадратичной формой* поверхности. Введем обозначения:

$$E(u,v) = (\vec{r}'_u)^2, \quad F(u,v) = (\vec{r}'_u \vec{r}'_v), \quad G(u,v) = (\vec{r}'_v)^2.$$

Рассмотрим линии $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$, $v = v_0 + dv$, образующие на поверхности элемент $d\Sigma$. Его площадь приближенно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}'_u du$, $\vec{r}'_v dv$:

$$dS = S_{d\Sigma} = |\vec{r}'_u du \times \vec{r}'_v dv| = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Отсюда получаем формулу для нахождения площади поверхности:

$$S_\Sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Заметим, что выражение для площади поверхности не зависит от способа параметризации поверхности. Это можно доказать (аналогично доказательству Леммы 3) взяв вторую параметризацию и получив двойной интеграл в новых координатах и якобиан перехода.

Если поверхность задана явно: $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, то формула для площади будет иметь вид:

$$S_\Sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy.$$

Пример. Вычислим площадь поверхности тора.

Пусть тор получен вращением вокруг оси OZ окружности $x = R + r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$. Тогда его можно задать уравнениями

$$\vec{r}(\varphi, \theta) : \begin{cases} x = (R + r \cdot \cos\varphi)\cos\theta, & 0 \le \varphi \le 2\pi; \\ y = (R + r \cdot \cos\varphi)\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi; \\ z = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Производные:

$$\vec{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'_\theta = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E = (\vec{r}'_\varphi)^2 = r, \quad G = (\vec{r}'_\theta)^2 = (R + r \cdot \cos\varphi)^2, \quad F = \vec{r}'_\varphi \cdot \vec{r}'_\theta = 0.$$

Площадь:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} (R + r\cos\varphi) r d\varphi = 4\pi^2 rR.$$

5.2 Поверхностный интеграл первого рода (ПИ-1)

Пусть задана гладкая поверхность $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, во всех точках которой определена непрерывная функция $f(x, y, z)$. Пусть $\Sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Sigma_i$ – разбиение поверхности. Мелкостью разбиения назовем наибольший диаметрэлементов разбиения. Точки $M_i \in \Sigma_i$ – оснащение разбиения. Построим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i) S_{\Sigma_i}.$$

Если при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, эта интегральная сумма имеет конечный предел (независимо от способа разбиения и оснащения), то он называется поверхностным интегралом первого рода и обозначается

$$\iint\limits_\Sigma f(x, y, z) d\sigma.$$

Сведение к двойному интегралу

Для параметрически заданной поверхности:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D} f\left(\vec{r}(u,v)\right)\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|dudv = \iint\limits_{D} f\left(\vec{r}(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

Для явно заданной поверхности $z = z(x,y)$:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy.$$

Аналогично для поверхностей, заданных уравнениями $y = y(x,z)$ и $x = x(y,z)$.

Свойства поверхностного интеграла первого рода:

1. Линейность;
2. Адитивность по поверхности;
3. Независимость от стороны поверхности;
4. Вычисление площади: $\iint\limits_{\Sigma} d\sigma = S_\Sigma$;
5. Физический смысл: вычисление массы поверхности $m = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x,y,z)d\sigma$, где $\rho(x,y,z)$ – поверхностная плотность.

Пример. Вычислить площадь сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Способ 1. Найдём площадь половины сферы, заданной функцией $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}S = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma = \iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

где D – круг радиуса R (проекция сферы на плоскость OXY). Переходя в полярные координаты, получим

$$\frac{1}{2}S = \iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy = R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}} = 2\pi R^2.$$

Тогда площадь всей сферы $S = 4\pi R^2$.

Способ 2. Зададим сферу параметрически

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta, \\ R\sin\varphi\sin\theta, \\ R\cos\theta, \end{pmatrix} \quad 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi.$$

Тогда

$$\vec{r}\,'_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta, \\ R\cos\varphi\sin\theta, \\ 0, \end{pmatrix} \quad \vec{r}\,'_\theta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta, \\ R\sin\varphi\sin\theta, \\ R\cos\theta, \end{pmatrix}$$

$$E = \vec{r}\,'^{\,2}_\varphi = R^2\sin^2\theta, \quad G = \vec{r}\,'^{\,2}_\theta = R^2, \quad F = \vec{r}\,'_\varphi\vec{r}\,'_\theta = 0, \quad \sqrt{EG - F^2} = R^2\sin\theta.$$

$$S = R^2 \iint\limits_D \sin\theta d\varphi d\theta =$$

где D – прямоугольник $0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$

$$= R^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi R^2.$$

Вместо вычисления величин E, F, G можно вычислять

$$d\sigma = |\vec{r}\,'_\varphi \times \vec{r}\,'_\theta| d\varphi d\theta = ... = R^2\sin\theta d\varphi d\theta.$$

5.3 Поверхностный интеграл второго рода (ПИ-2)

Пусть Σ – ориентированная поверхность, т.е. указана одна из ее сторон, соответствуюшая полю нормалей.

Пусть на поверхности Σ задано непрерывное векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Построим разбиение $\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$. Точки $M_i \in \Sigma_i$. $\vec{n}$ – вектор нормали в точке M_i.

Спроецируем Σ_i на координатные плоскости.

Пусть $\Delta\sigma_i$ – площадь проекции Σ_i на плоскость XOY, взятая с определенным знаком, а именно:

1. если угол между нормалью $\vec{n}$ и положительным направлением оси OZ острый, то плюс;
2. если угол между нормалью $\vec{n}$ и положительным направлением оси OZ тупой, то минус.

Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n R(M_i)\Delta\sigma_i.$$

Если при мелкости (т.е. наибольшем диаметре разбиения), стремящейся к нулю, эта интегральная сумма имеет конечный предел (независимо от способа разбиения и выборки), то он называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy.$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)dydz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{\Sigma} Q(x, y, z)dxdz.$$

Сумма этих трех интегралов также называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy$$

или короче

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Связь поверхностных интегралов I и II родов:

Пусть нормаль к поверхности $\vec{n}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Тогда для элементов $\Delta\sigma_i$ можно записать:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_i &= \cos\alpha d\sigma = dydz, \\ \Delta\sigma_i &= \cos\beta d\sigma = dxdz, \\ \Delta\sigma_i &= \cos\gamma d\sigma = dxdy. \end{aligned}$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} F_n d\sigma.$$

Свойства поверхностного интеграла второго рода:

1. Линейность;
2. Адитивность по поверхности;
3. При смене стороны поверхности меняет знак;
4. Аддитивность поверхностного интеграла по границе тела при разбиении тела;
5. Физический смысл: если $\vec{F}(P, Q, R)$ – поле скоростей течения жидкости, то $\iint\limits_{\Sigma} F_n d\sigma$ есть ***поток*** векторного поля $\vec{F}$ через поверхность Σ, т.е. объем жидкости, проходящий через поверхность Σ в единицу времени.

Для вычисления поверхностного интеграла второго рода его сводят к двойному интегралу по проекции поверхности на соответствующую координатную плоскость. Например, если D – взаимно-однозначная проекция поверхности Σ на плоскость XOY, и поверхность Σ задана уравнением $z = z(x,y), (x,y) \in D$, то

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D} R\left(x,y,z(x,y)\right)dxdy,$$

где знак совпадает со знаком $\cos(\vec{n}, OZ)$ угла между нормалью к поверхности и положительным направлением оси OZ. Обратите внимание, что в этой формуле слева стоит поверхностный интеграл, а справа – двойной.

Если поверхность задана параметрически $\Sigma : \vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, то поверхностный интеграл второго рода также можно свести к двойному по переменным u, v (здесь $\vec{N}$ – вектор нормали к поверхности):

$$I = \iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{N}_0 d\sigma =$$

учитываем $d\sigma = |\vec{N}|dudv = |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|dudv$

$$= \iint\limits_{D} \vec{F} \cdot \vec{N}dudv = \iint\limits_{D} \vec{F} \cdot (\vec{r}_u' \times \vec{r}_v')\,dudv = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} dudv.$$

5.4 Теорема Остроградского–Гаусса

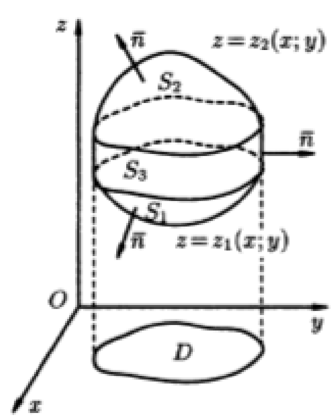
Теорема 12 (Остроградского–Гаусса) *Пусть тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (односвязное множество), его граница $\partial\Omega$ – кусочно гладкая замкнутая поверхность. Функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Omega}$. Тогда*

$$\iint\limits_{\partial\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности $\partial\Omega$.

☐ Пусть тело Ω является элементарным по переменой z:

$$\Omega = \{(x,y,z) | (x,y) \in D, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}.$$



Граница $\partial\Omega$ этого тела состоит из трех частей:

- S_1: поверхность $z = z_1(x, y)$, нормаль образует тупой угол с осью OZ (направлена вниз), при переходе к двойному интегралу ставим знак "$-$";
- S_2: поверхность $z = z_2(x, y)$, нормаль образует острый угол с осью OZ (направлена вверх), знак "$+$";
- S_3: цилиндрическая поверхность, направляющая которой параллельна оси OZ, нормаль ортогональна оси OZ, поверхностный интеграл равен нулю.

Рассмотрим

$$\iint\limits_{\partial\Omega} R dxdy = +\iint\limits_{D} R\left(x, y, z_2(x, y)\right) dxdy - \iint\limits_{D} R\left(x, y, z_1(x, y)\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Аналогично, для тела Ω, элементарного относительно переменных x и y:

$$\iint\limits_{\partial\Omega} P dydz = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz,$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega} Q dxdz = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz.$$

Складывая эти три равенства, получим требуемое.

Если тело Ω не является элементарным по всем трем переменным, но его можно разбить на конечное число таких тел, то пользуясь аддитивностью поверхностного и тройного интеграла, теорема также доказана. ■

5.5 Теорема Стокса

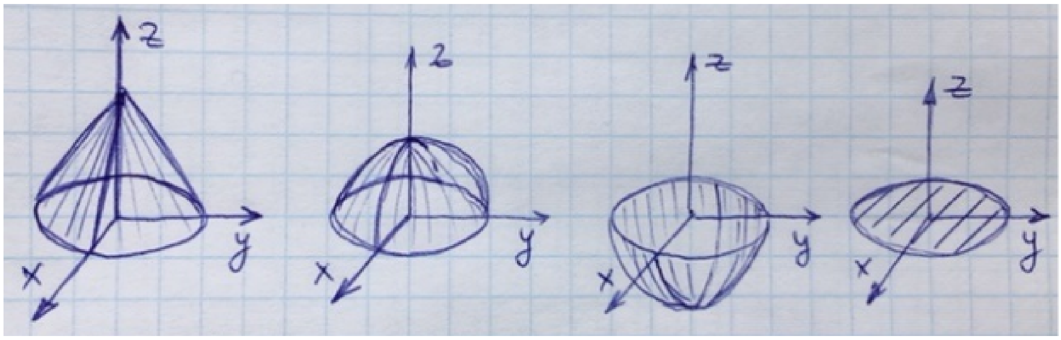
Пусть незамкнутая ориентированная поверхность Σ ограничена кусочно-гладким контуром $\partial\Sigma$, т.е. контур $\partial\Sigma$ является границей поверхности Σ. В этом случае также говорят, что поверхность Σ натянута на контур $\partial\Sigma$.

Будем говорить, что направление обхода контура $\partial\Sigma$ согласовано с выбранной стороной поверхности Σ, если двигаясь по контуру $\partial\Sigma$ так, что нормаль к поверхности расположена от ног к голове, выбранная сторона остается слева.

Пример. На окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ натянуты, например, (см. рисунок)

- конус $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$, $z \geq 0$;
- верхняя полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$;
- нижняя полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$;

- круг $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$.

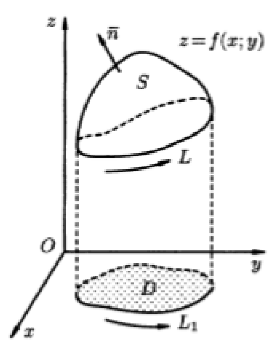


Теорема 13 (Стокса) *Пусть кусочно гладкая поверхность Σ ограничена контуром $\partial\Sigma$. Векторное поле $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ – непрерывно дифференцируемо на $\Sigma \cup \partial\Sigma$. Тогда циркуляция поля $\vec{F}$ по контуру $\partial\Sigma$ равна потоку его ротора через поверхность Σ, причём направление контура согласовано со стороной поверхности.*

$$C_{\partial\Sigma}\left(\vec{F}\right) = \Pi_{\Sigma}\left(\operatorname{rot}\vec{F}\right).$$

Другая формулировка теоремы Стокса:

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$



$\triangleright$ Пусть поверхность Σ задана функцией $z = z(x,y), (x,y) \in D$. Рассмотрим криволинейный интеграл (направление обхода контура согласовано с верхней стороной поверхности)

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} P(x,y,z)dx = \oint\limits_{\partial D} P\left(x, y, z(x,y)\right) dx =$$

Обозначим $\tilde{P}(y) = P\left(x, y, z(x,y)\right)$ и применим формулу Грина

$$= -\iint\limits_{D} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} dxdy = -\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy = -\iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy.$$

Выразим теперь $\frac{\partial z}{\partial y}$ через направляющие косинусы нормали. Вектор нормали имеет координаты $\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$ (для верхней стороны), которые пропорциональны направляющим косинусам $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. То есть $-\frac{\partial z}{\partial y} : 1 = \cos\beta : \cos\gamma$, откуда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Учтём ещё, что $dxdy = \cos\gamma d\sigma$ и $dxdz = \cos\beta d\sigma$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} Pdx = -\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)dxdy = \iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Аналогично, получаем формулы

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} Qdy = \iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz,$$

$$\oint\limits_{\partial\Sigma} Rdz = \iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dxdz.$$

Складывая, получаем требуемое. ◄

Следствие. Условие $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, равносильное трём равенствам

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы в односвязной области Ω выражение $Pdx + Qdy + Rz$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y, z)$. Это равносильно тому, что криволинейный интеграл $\int Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от пути интегрирования, $\oint Pdx + Qdy + Rdz = 0$ по любому замкнутому контуру в Ω и поле $\vec{F}(P, Q, R)$ является потенциальным в Ω.

5.6 Дифференциальные характеристики скалярного и векторного полей

Введём векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом "набла"(оператор Гамильтона):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Он приобретает определённый смысл в комбинации со скалярным или векторным полем. Символическое умножение вектора ∇ на скаляр или вектор производится по обычным правилам умножения векторов (умножение на число, скалярное и векторное произведения). При этом произведение $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию означает взятие частной производной по x этой функции.

Действие оператора набла для скалярного поля $U(x, y, z)$ и векторного поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$:

1. $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} U$ (градиент);

2. $\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}$ (дивергенция);

3. $\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{a}$ (ротор).

Свойства дивергенции и ротора:

1. $\operatorname{div} \vec{C} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{C} = 0$ (дивергенция и ротор постоянного поля равны нулю);

2. $\operatorname{div}(C\vec{a}) = C \operatorname{div} \vec{a}$, $\operatorname{rot}(C\vec{a}) = C \operatorname{rot} \vec{a}$;

3. $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$, $\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}$;

4. $\operatorname{div}(f\vec{a}) = f \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} f$;

5. $\operatorname{rot}(f\vec{a}) = f \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} f \times \vec{a}$.

Векторное поле $\vec{A}$ называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля U: $\vec{A} = \operatorname{grad} U$. При этом U называется потенциалом поля $\vec{A}$. Условием потенциальности поля $\vec{A}$ является $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$.

Векторное поле $\vec{A}$ называется соленоидальным (или трубчатым), если оно является ротором некоторого поля $\vec{B}$: $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$. При этом поле $\vec{B}$ называется векторным потенциалом поля $\vec{A}$.

Теорема 14 (Необходимое и достаточное условие соленоидальности поля) *В односвязной области необходимым и достаточным условием соленоидальности поля $\vec{A}$ является* $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

▷ Необходимость. Пусть $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{div} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0.$$

Достаточность. Пусть $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Найдем вектор $\vec{B}$: $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$. Положим $B_z \equiv 0$. Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Получаем систему уравнений

$$A_x = -\frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}.$$

Из первого уравнения находим

$$B_y = -\int\limits_{z_0}^{z} A_x(x,y,z)dz + \varphi(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$ – произвольная функция из второго:

$$B_x = \int\limits_{z_0}^{z} A_y(x,y,z)dz + \psi(x,y),$$

ψ – произвольная. Положим $\psi(x,y) \equiv 0$. Тогда

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial y}dz;$$

$$A_z(x,y,z) = -\int\limits_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\right) dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

учтём, что $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$

$$= \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_z}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_z(x,y,z) - A_z(x,y,z_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что функция $\varphi(x,y)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_z(x,y,z_0),$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка. Следовательно, такая функция $\varphi(x,y)$ существует, а значит, существует и векторный потенциал $\vec{B}$. ◀

Теорема 15 (Гельмгольца) *Произвольное непрерывное векторное поле $\vec{A}$ всегда представимо в виде суммы потенциального и соленоидального полей, т.е. $\exists\ \vec{B}$ – потенциальное, $\vec{C}$ – соленоидалное такие, что $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$.*

▷ Покажем, почему это верно. Пусть $\vec{B}$ – потенциально и $\vec{B} = \operatorname{grad} u$. Тогда вектор $\vec{C}$ должен удовлетворять равенству

$$\vec{C} = \vec{A} - \operatorname{grad} u.$$

Для соленоидальности $\vec{C}$ должно выполняться $\operatorname{div} \vec{C} = 0$, т.е.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \vec{A}.$$

Выражение

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$$

называется оператором Лапласа функции u.

Известно, что уравнение

$$\Delta u = a$$

всегда имеет решение (при любой правой части). Следовательно, существует решение уравнения $\Delta u = \operatorname{div} \vec{A}$. ◀

Обратная задача векторного анализа заключается в нахождении векторного поля $\vec{A}$ по известным его дивергенции $\operatorname{div} \vec{A} = u$ и ротору $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$. Необходимым условием разрешимости этой задачи является соленоидальность поля $\vec{B}$.

5.7 Интегральные характеристики векторного поля

Циркуляция поля $\vec{F}$ по кривой L:

$$C = \int\limits_L \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_L F_\tau dl = \int\limits_L P dx + Q dy + R dz,$$

где τ – касательный вектор. Физический смысл циркуляции – это работа по перемещению единичного заряда по кривой L.

Поток через поверхность Σ:

$$\Pi = \iint\limits_\Sigma F_n d\sigma = \iint\limits_\Sigma P dydz + Q dxdz + R dxdy,$$

где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности.

5.8 Механический смысл дивергенции и ротора

Ранее дивергенция и ротор поля были определены математически с применением набла-оператора:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что таким образом определенные, обе характеристики зависят от выбора системы координат. Используем доказанные теоремы Стокса и Гаусса–Остроградского, чтобы дать дивергенции и ротору содержательные определения, как характеристик поля, не зависящих от выбора координатной системы (инвариантные определения).

Пусть $\vec{A}$ – непрерывно-дифференцируемое векторное поле. Возьмём точку M_0 и шар B_R радиуса R с центром в этой точке. Тогда

$$\Pi_{\partial B_R}\left(\vec{A}\right) = \iiint\limits_{B_R} \operatorname{div} \vec{A} dxdydz =$$

по теореме о среднем $\exists M \in B_R$:

$$= \operatorname{div} \vec{A}(M)\mu(B_R).$$

Теперь устремим $R \to 0$. Получим

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{R\to 0} \frac{\Pi_{\partial B_R}\left(\vec{A}\right)}{\mu(B_R)}.$$

Поток $\Pi_{\partial B_R}\left(\vec{A}\right)$ есть мощность источников, находящихся внутри шара B_R. Получаем, что дивергенция векторного поля в каждой точке есть плотность источников (или стоков) поля.

Эта формула определяет дивергенцию независимо от выбора системы координат и при этом выявляет ее механический смысл: дивергенция равна потоку поля из точечного источника, то есть мощности источника.

Рассматривая стационарное течение несжимаемой жидкости, говорят, что поток через замкнутую поверхность равен суммарной мощности (производительности) источников, заключённых внутри поверхности.

Дадим инвариантное определение ротора по аналогии с определением дивергенции.

Возьмём точку M_0 и произвольный вектор $\vec{n}$. Пусть Σ_R – круг радиуса R с центром в точке M_0 лежащий в плоскости с нормалью $\vec{n}$. Тогда по теореме о среднем $\exists M \in \Sigma_R$:

$$C_{\partial\Sigma_R}\left(\vec{A}\right) = \operatorname{rot}_n \vec{A}(M)\mu\left(\Sigma_R\right).$$

Переходя к пределу при $R \to 0$ получим

$$\operatorname{rot}_n \vec{A} = \lim_{R\to 0} \frac{C_{\partial\Sigma_R}\left(\vec{A}\right)}{\mu\left(\Sigma_R\right)}.$$

Отсюда следует, что проекция ротора на любой вектор $\vec{n}$ не зависит от системы координат, а значит и сам ротор не зависит от системы координат.

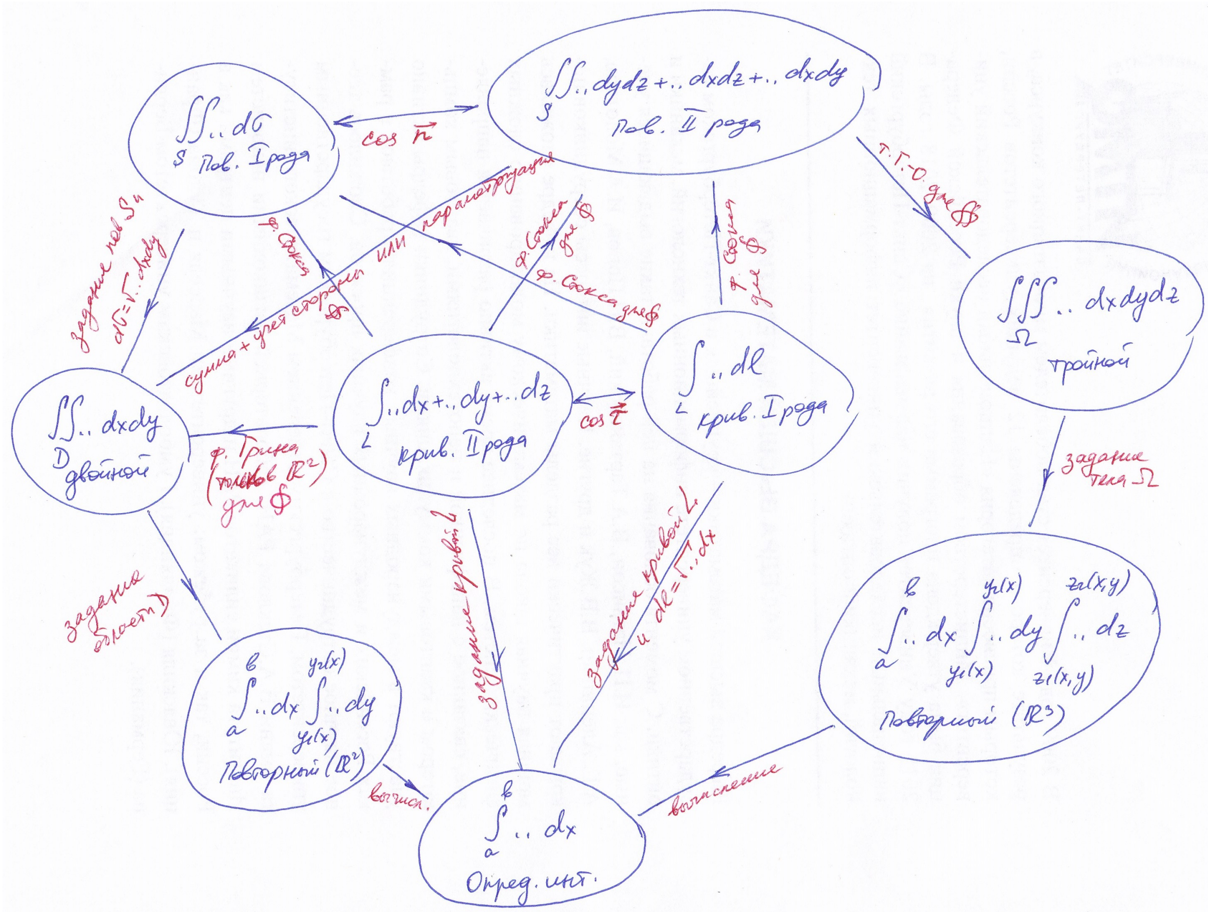
Полученную формулу часто принимают в качестве определения ротора.

Физический смысл ротора для поля скоростей – это удвоенная угловая скорость вращения частиц:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = 2\vec{\omega}.$$

5.9 Обзор почти всех интегралов курса

Следующая схема иллюстрирует связи между различными типами интегралов.


$\iint_S .. d\sigma$
пов. I рода
$\iint_S .. dydz + .. dxdz + .. dxdy$
пов. II рода
cos $\vec{n}$
т. Г-О. для $\oiint$
$\iiint_\Omega .. dxdydz$
тройной
задание тела Ω
$\int_L .. dl$
крив. I рода
$\int_L .. dx + .. dy + .. dz$
крив. II рода
cos $\vec{\tau}$
$\iint_D .. dxdy$
двойной
ф. Грина (только $\mathbb{R}^2$) для $\oint$
задание пов S и $d\sigma = \sqrt{..}\,dxdy$
ф. Стокса для $\oint$
ф. Стокса для $\oint$
ф. Стокса для $\oint$
ф. Стокса для $\oint$
сумма + учет сторон или параметризация
задание области D
задание кривой L
задание кривой L и $dl = \sqrt{..}\,dt$
$\int_a^b .. dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} .. dy$
Повторный ($\mathbb{R}^2$)
$\int_a^b .. dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} .. dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} .. dz$
Повторный ($\mathbb{R}^3$)
вычисл.
вычисление
$\int_a^b .. dx$
Опред. инт.