28 марта.

Дз № 5.

1. $$\int\limits_{\mathbb{R}} x e^{-\sqrt{x^2+1}} \, d\mu_F = \int\limits_{(-\infty;-1)} + \int\limits_{\{-1\}} + \int\limits_{\{1\}} +$$

$$+ \int\limits_{(1;+\infty)} + \int\limits_{(-1;1)} = 3\int_{-\infty}^{-1} x e^{-\sqrt{x^2+1}} dx - e^{-\sqrt{2}} +$$

$$+ e^{-\sqrt{2}} + 3\int_{1}^{\infty} x e^{-\sqrt{x^2+1}} = 6\int_{1}^{\infty} x e^{-\sqrt{x^2+1}} dx \ominus$$

$$u = \sqrt{x^2+1}$$

$$\ominus\ 6\int_{1}^{\infty} x \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} e^{-u} du = 6\int_{1} u e^{-u} du =$$

$$= -ue^{-u}\Big|_{\sqrt{2}}^{\infty} + \int_{\sqrt{2}}^{\infty} e^{-u} du = \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}} + (-e^{-u})\Big|_{\sqrt{2}}^{\infty} =$$

$$= \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} = (1+\sqrt{2}) e^{-\sqrt{2}}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\sqrt{x^2+1}} dx}_{=\,0,\ \text{т.к. нечёт}} + (-5e^{-\sqrt{2}}) + 4e^{-\sqrt{2}} =$$

$$= -e^{-\sqrt{2}}$$

2. $\int\limits_{[0;4]} (x^2 \cdot \chi_{[0;2]}(x) - x d(x))\, d\lambda =$

$= \int\limits_{[0;2]} x^2\, d\lambda - \int\limits_{[0;4]} x d(x)\, d\lambda = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 -$

$- \underbrace{\int\limits_{\substack{x \in Q \\ x\in[0;4]}} x\, d\lambda}_{=0} = \frac{8}{3} - \cancel{0} = \frac{8}{3} \sum_{\substack{x\in Q\\ x\in[0;4]}} \underbrace{\int\limits_{\{x\}} x\, d\lambda}_{=0} = \frac{8}{3}$

т. к. Q счётно

3. $I = \int\limits_{[0;1]} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[0;\frac{1}{n}]}(x)\, d\lambda$

~~$g = \sum_{n=1}^{N} \lambda \cdot \chi_{[0;\frac{1}{n}]}$ — простая~~

~~$g \in f$~~

$\forall \int\limits_{[0;1]} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[0;\frac{1}{n}]}(x)\, d\lambda = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{[0;1]} \chi_{[0;\frac{1}{n}]}(x)\, d\lambda =$

$= \sum_{n=1}^{N} \lambda([\cancel{\tfrac{1}{n}}\, 0; \tfrac{1}{n}]) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

При $N \to \infty$ ряд расх. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists\ I = +\infty$

$$I = \int\limits_{[0;1]} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \chi_{[0;\frac{1}{n^2}]}(x)\, d\lambda$$

Аналогично

$$\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{[0;1]} n^{-\frac{1}{2}} \chi_{[0;\frac{1}{n^2}]}(x)\, d\lambda =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{n^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} C, \text{ где } C < +\infty$$

4. $$\int\limits_{[0;2]\times[0;2]} [x+y]\, d\lambda_2 = 1 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 6$$