5 Числовые ряды

5.1 Понятие ряда и его суммы

Важным примером применения теории пределов числовой последовательности является понятие числового ряда.

Определение 5.1.1 *Пусть дана последовательность a_n. Символ*

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом, последовательность a_n – общим членом ряда.

Определение 5.1.2 *Последовательность S_k: сумма первых k членов ряда*

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

называется частичной суммой ряда, а её предел, если он существует в $\bar{\mathbb{R}}$, называется суммой ряда:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

Если последовательность S_k сходится, то ряд называется сходящимся, иначе – расходящимся. Разность $R_k = S - S_k$ называется остатком ряда.

Пример 5.1.1 *1. $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ сходится и его сумма равна 0.*

2. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ – геометрическая прогрессия. Сходится, если $|q| < 1$, и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,$$

следовательно, ряд сходится, и его сумма равна 1.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ расходится, т.к. последовательность частичных сумм состоит из чередующихся 0 и -1.

Замечание 5.1.1 *Изменение, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.*

Лемма. Ряд сходится тогда и только тогда, когда его остаток стремится к нулю.

▶ Запишем для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + R_k.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$ равносильно тому, что $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = 0$. ◀

Теорема 5.1.1 (Критерий Коши сходимости ряда) *Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε можно было найти номер k_0 такой, что для всех $k \geq k_0$ и для всех $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+p} a_n\right| < \varepsilon$.*

Доказательство. Доказательство следует из критерия Коши для частичных сумм. □

Пример 5.1.2 *Гармонический ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

Запишем

$$S_{2k} - S_{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что критерий Коши не выполняется и ряд расходится.

Теорема 5.1.2 (Необходимое условие сходимости ряда) *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.*

▶ Запишем $a_n = S_n - S_{n-1}$. Так как $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$, то $a_n \to S - S = 0$. ◀

Замечание 5.1.2 *Условие $a_n \to 0$ не является достаточным для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Но если $a_n \not\to 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Лемма 5.1.1 (Линейность суммирования) *Пусть сходятся ряды с общими членами a_k и b_k. Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится ряд с общим членом $\alpha a_k + \beta b_k$, причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha S_n^A + \beta S^B \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha S^A + \beta S^B,$$

что и доказывает утверждение. $\square$

Лемма 5.1.2 (Монотонность суммирования) *Пусть $a_k \le b_k$ и ряды с общими членами a_k и b_k сходятся в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Обозначим $S^A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда, согласно условию,

$$S_n^A \le S_n^B \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} S_n^A \le \lim_{n\to+\infty} S_n^B \;\Rightarrow\; S^A \le S^B.$$

$\square$

5.2 Признаки сходимости рядов с положительными членами

5.2.1 Признаки сравнения и ряд Дирихле

Доказательство признаков сравнения опирается на следующую лемму.

Лемма 5.2.1 *Пусть $a_k \ge 0$. Тогда последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ не убывает и*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

Тем самым, сходимость ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм

Доказательство. Так как $a_k \geq 0$, то

$$S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n.$$

Тем самым, вопрос о наличии предела S_n сводится к вопросу ограниченности S_n (теорема Вейерштрасса). □

Теорема 5.2.1 (Признаки сравнения) *Пусть $a_k, b_k \geq 0$. Тогда:*

1. *Если $0 \leq a_k \leq b_k$ и ряд с общим членом b_k сходится, то сходится и ряд с общим членом a_k.*

2. *Если $0 \leq a_k \leq b_k$ и ряд с общим членом a_k расходится, то расходится и ряд с общим членом b_k.*

3. *Если $a_k \sim b_k$ при $k \to +\infty$, то ряды с общими членами a_k и b_k сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Обозначим $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S^B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.
1. Ясно, что в условиях теоремы

$$S_n^A \leq S_n^B \leq S^B < +\infty.$$

В силу ограниченности последовательности S_n^A, согласно доказанной лемме заключаем, что S_n^A имеет конечный предел.

2. От противного, если сходится ряд с общим членом b_k, то, по только что доказанному, сходится и ряд с общим членом a_k. Это противоречит условию.

3. Так как $a_k \sim b_k$, то $a_k = \alpha_k b_k$, где $\alpha_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$. Тогда

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2} b_k.$$

Дальнейшие рассуждения стандартны и остаются в качестве упражнения. □

Пример 5.2.1 *Исследовать на сходимость ряд Дирихле при $\alpha < 1$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Как мы уже знаем, при $\alpha = 1$ ряд Дирихле – гармоническимй ряд, а значит он расходится. Так как при $\alpha < 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n},$$

то, согласно признакам сравнения, при $\alpha < 1$ ряд Дирихле расходится.

5.2.2 Радикальный признак Коши

Теорема 5.2.2 (Радикальный признак Коши) *Пусть* $a_k \geq 0$ *и*

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = l \in [0, +\infty].$$

Тогда

1. *Если* $l > 1$, *то ряд с общим членом* a_k *расходится.*

2. *Если* $l < 1$, *то ряд с общим членом* a_k *сходится.*

Доказательство. 1. Так как $l > 1$, то, начиная с некоторого k_0, выполняется

$$\sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow a_k > 1.$$

Отсюда следует, что a_k не стремится к нулю, а значит не выполнено необходимое условие сходимости, и ряд расходится.

2. Если $l < 1$, то выберем $\varepsilon = (1 - l)/2$. По свойству верхнего предела,

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \Rightarrow \sqrt[k]{a_k} < l + \frac{1 - l}{2} = \frac{l + 1}{2} < 1.$$

Из этого неравенства получаем, что при $k > k_0$ выполняется

$$a_k < \left(\frac{l + 1}{2}\right)^k.$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^k$ сходится, то, по признаку сравнения, сходится и ряд

$$R_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k,$$

а значит сходится и исходный ряд. □

Замечание 5.2.1 *В случае, когда* $l = 1$ *признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Для рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

признак Коши дает $l = 1$, *но первый ряд расходится, а второй – сходится.*

Замечание 5.2.2 *Как было показано в теореме, если признак Коши дает $l > 1$, это означает, что общий член не стремится к нулю. Если известно, что*

$$1 < l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

то $a_n \to +\infty$.

Замечание 5.2.3 *Признак остается верным, если вместо предела взять верхний предел.*

5.2.3 Признак Даламбера

Теорема 5.2.3 (Признак Даламбера) *Пусть $a_k > 0$ и*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty]$$

Тогда

1. *Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_k расходится.*
2. *Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_k сходится.*

Доказательство. 1. Так как $l > 1$, то, начиная с некоторого номера k_0, $a_{k+1} > a_k$, а значит $a_k \geq a_{k_0+1} > 0$, то есть a_k не стремится к нулю. Это противоречит необходимому условию.

2. Если $l < 1$, то выберем $\varepsilon = (1-l)/2$. Согласно свойству предела, найдется k_0, что при $k > k_0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{l+1}{2} = q,$$

откуда $a_{k+1} < qa_k$. По индукции, при $n > k_0$ имеем $a_n \leq q^{n-k_0-1}a_{k_0+1}$. Отсюда, согласно признаку сравнения,

$$R_{k_0} = \sum_{n=k_0+1}^{\infty} a_n$$

сходится (больший ряд – геометрическая прогрессия, причем $|q| < 1$). Значит, сходится и исходный ряд. □

Замечание 5.2.4 *В случае, когда $l = 1$, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Для рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

признак Даламбера дает $l = 1$, но первый ряд расходится, а второй – сходится.

Замечание 5.2.5 *Как было показано в теореме, если признак Даламбера дает $l > 1$, это означает, что общий член ряда стремится к бесконечности.*

Замечание 5.2.6 *Признаки Коши и Даламбера – завуалированные признаки сравнения с геометрической прогрессией.*

5.2.4 Признак Куммера

Для создания произвольного числа признаков разной тонкости полезна следующая теорема.

Теорема 5.2.4 (Признак Куммера) *Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \quad \textit{расходится.}$$

Пусть

$$l = \lim_{n\to+\infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right),$$

тогда

1. *Если $l > 0$, то ряд с общим членом a_n сходится.*

2. *Если $l < 0$, то ряд с общим членом a_n расходится.*

Доказательство. 1. Так как $l > 0$, то существует n_0, что при $n > n_0$

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > \frac{l}{2} > 0 \Rightarrow a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} > \frac{l}{2} a_{n+1} > 0.$$

В частности, $a_n b_n > a_{n+1} b_{n+1}$, а значит последовательность $a_n b_n$ убывает при $n > n_0$ и ограничена снизу, значит имеет предел. Но тогда

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=n_0+1}^{k} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} (a_{n_0+1} b_{n_0+1} - a_{k+1} b_{k+1}) < +\infty.$$

Значит, сходится и $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_{n+1}$, но тогда сходится и ряд с общим членом a_n.

2. Пусть $l < 0$. Тогда существует n_0, что при $n > n_0$

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} < 0 \Rightarrow b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1} < 0.$$

Отсюда получаем, что $b_{n+1}a_{n+1} > b_n a_n$ и последовательность $b_n a_n$ монотонно возрастает при $n > n_0$. Значит,

$$a_n b_n \geq a_{n_0+1} b_{n_0+1} \ \Rightarrow \ a_n \geq \frac{a_{n_0+1} b_{n_0+1}}{b_n}$$

и ряд $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ расходится. □

Замечание 5.2.7 *Можно заметить, что расходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$$

использовалась только при доказательстве достаточности.

Замечание 5.2.8 *Если положить $b_n = 1$, то получится признак Даламбера.*

5.2.5 Признак Раабе

Теорема 5.2.5 (Признак Раабе) *Пусть $a_n > 0$ и*

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l.$$

Тогда

1. *Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*

2. *Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*

Доказательство. Для доказательства в признаке Куммера достаточно положить $b_n = n$. Детали остаются в качестве упражнения. □

Теорема 5.2.6 (Признак Бертрана) *Пусть $a_n > 0$ и*

$$\lim_{n \to +\infty} \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = l.$$

Тогда

1. *Если $l > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*

2. *Если $l < 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*

Доказательство. Сначала покажем, что ряд с общим членом $\frac{1}{n \ln n}$ расходится. Это следует из того, что, согласно теореме Лагранжа,

$$\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1) = \frac{1}{\xi \ln \xi} \leq \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \quad \xi \in (n+1, n+2)$$

и того, что ряд с общим членом $\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1)$ расходится, так как

$$\sum_{n=1}^{k} (\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1)) = \ln\ln(k+2) - \ln\ln 2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty.$$

Положим в признаке Куммера $b_n = n \ln n$. Получим

$$n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) + (n+1)\ln n - (n+1)\ln(n+1) =$$

$$= \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Теперь признак Бертрана следует из того, что

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

□

5.2.6 Признак Гаусса

Теорема 5.2.7 (Признак Гаусса) *Пусть*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\gamma}} \right), \quad \gamma > 0.$$

Тогда:

1. *Если $\lambda > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*

2. *Если $\lambda < 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.*

3. *Если $\lambda = 1$ и $\mu > 1$, то ряд с общим членом a_n сходится.*

4. Если $\lambda = 1$ и $\mu \le 1$, то ряд с общим членом a_n расходится.

Доказательство. Доказательство опирается на ранее доказанные признаки. Первые два пункта – это признак Даламбера. Третий и четвертый пункты в случае, когда $\mu \ne 1$ – это признак Раабе. Случай $\lambda = 1$, $\mu = 1$ доказывается по признаку Бертрана. $\square$

5.2.7 Интегральный признак Коши и асимптотика сумм

Теорема 5.2.8 (Интегральный признак Коши) *Пусть $f(x)$ монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.*

Доказательство. Пусть, скажем, f не возрастает. Тогда если $f(x_0) < 0$, то, в силу монотонности, $f(x) \le f(x_0) < 0$ при $x > x_0$, а значит $f(k)$ не стремится к 0 при $k \to +\infty$, то есть ряд с общим членом $f(k)$ расходится.

Кроме того,

$$\int\limits_{x_0}^{A} f(x)dx \le f(x_0)(A - x_0) \xrightarrow[A\to+\infty]{} -\infty,$$

а значит расходится и интеграл. В итоге, $f(x) \ge 0$. В этом случае (вспоминая, что f не возрастает) очевидно следующее неравенство

$$f(k+1) \le \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \le f(k),$$

которое влечет неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Учитывая, что функция $F(\omega) = \int\limits_{1}^{\omega} f(x)dx$ не убывает, для существования предела $\lim\limits_{\omega\to+\infty} F(\omega)$ достаточно (и, конечно же, необходимо) существование предела $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n+1)$ (докажите это!). Тогда утверждение теоремы легко получить предельным переходом при $n \to +\infty$. $\square$

Пример 5.2.2 *Теперь исследование ряда с общим членом $\frac{1}{n \ln n}$, $n \geq 2$, не представляет труда. Согласно интегральному признаку, достаточно рассмотреть сходимость интеграла*

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

Так как интеграл, очевидно, расходится, то расходится и исследуемый ряд.

Идея, ипользованная при доказательстве интегрального признака Коши, часто помогает в исследовании асимптотики различных сумм. Докажем следующую лемму.

Лемма 5.2.2 *Пусть $f(x) \geq 0$ не возрастает на $[1, +\infty)$. Тогда последовательность*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx$$

имеет предел.

Доказательство. Докажем, что A_n не убывает. Действительно,

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int\limits_{n+1}^{n+2} f(x)dx \geq 0.$$

Покажем, что A_n ограничена сверху. Для этого сделаем следующее преобразование:

$$A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx.$$

Так как

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

то, по доказанному в доказательстве интегрального признака Коши,

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq 0,$$

откуда

$$A_n \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1).$$

Согласно теореме Вейерштрасса, A_n имеет предел. $\square$

Замечание 5.2.9 *Применительно к поиску асимптотик, последняя лемма может быть использована следующим образом. Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$, *тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx = A + \alpha_n \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx + A + \alpha_n,$$

где $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Особо интересны случаи, когда ряд, стоящий слева, расходится. Тогда (при* $n \to +\infty$*)*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx.$$

Пример 5.2.3 *Рассмотрим гармонический ряд и найдем его асимптотику. Ясно, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$

Тем самым,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n+1) \sim \ln n.$$

Определение 5.2.1 *Постоянная* A *в равенстве*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} + A + \alpha_n = \ln(n+1) + A + \alpha_n.$$

называется постоянной Эйлера и часто обозначается γ.

Замечание 5.2.10 *Полезно отметить, что написанное равенство дает способ вычисления постоянной Эйлера с любой точностью. Так как*

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

то

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Замечание 5.2.11 *Для сходящихся рядов похожие рассуждения позволяют оценить скорость стремления остатка ряда к нулю. Пусть $f \geq 0$ и не возрастает на $[1, +\infty)$. Тогда*

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

Например,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \sim \frac{1}{(a-1)k^{a-1}}, \quad a > 1.$$

5.3 Признаки сходимости рядов с членами произвольного знака

Аналогично рассмотренному в интегралах, рассмотрим ряды с произвольными членами и новые типы сходимости, которые в этом случае возникают.

Определение 5.3.1 *Говорят, что ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, если сходится ряд с общим членом $|a_k|$.*

Как и ранее, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3.1 *Если ряд с общим членом a_k сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем n_0 такой, что

$$\forall n > n_0,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Но тогда и

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

откуда, согласно критерию Коши делаем вывод, что ряд с общим членом a_k сходится. □

Замечание 5.3.1 *При исследовании ряда на абсолютную сходимость можно пользоваться изученными ранее признаками.*

Определение 5.3.2 *Если ряд с общим членом a_k сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят, что ряд с общим членом a_k сходится условно (или неабсолютно).*

Для исследования знакопеременных рядов на сходимость используют признаки Абеля–Дирихле, аналогичные соответствующим интегральным признакам. Для доказательства нам потребуется аналог формулы интегрирования по частям.

Лемма 5.3.1 (Преобразование Абеля) *Пусть $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}).$$

Доказательство. Пусть $A_0 = 0$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1} b_i =$$

$$= A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}).$$

□

Теорема 5.3.2 (Признак Абеля-Дирихле) *Пусть даны последовательности a_k, b_k, причем b_k монотонна.Тогда для сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

достаточно выполнения любой из двух пар условий: либо

1. *Частичные суммы $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничены в совокупности, то есть $|A_n| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Последовательность b_k стремится к нулю, то есть $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$,*

либо

1. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.*

2. Последовательность b_k ограничена, то есть $|b_k| \le C$.

Доказательство. 1. Воспользуемся преобразованием Абеля. В обозначениях теоремы,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Так как $|A_n| \le C$, в силу второго условия $A_n b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Тогда сходимость рассматриваемого ряда равносильна сходимости ряда с общим членом $A_k(b_k - b_{k+1})$. Покажем, что такой ряд сходится абсолютно. Это следует из теоремы сравнения и следующих выкладок:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(b_k - b_{k+1})| \le C \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = C \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| =$$

$$= C \lim_{n \to +\infty} |b_1 - b_{n+1}| = C|b_1|.$$

Итого, рассматриваемый ряд сходится.
2. Так как b_k монотонна и ограничена, то она имеет предел b. Рассмотрим последовательность $c_k = b_k - b$. Тогда для пары последовательностей a_k и c_k справедливы условия первого пункта, а значит сходится ряд с общим членом $a_k c_k$. Между тем,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k - b \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Итого, средний ряд сходится, так как сходятся два других ряда. □

Пример 5.3.1 *Неабсолютно сходящиеся ряды существуют. Рассмотрим*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Легко проверить, что абсолютной сходимости нет (ряд получается гармоническим). В то же время,

$$|A_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \right| \le 1, \quad \frac{1}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0, \text{ причем монотонно},$$

а значит выполнена первая пара условий признака Абеля-Дирихле, и ряд сходится (условно).

Давайте найдем сумму этого ряда.

Лемма 5.3.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Доказательство.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n =$$

$$= \ln(2n) + \gamma + \alpha_{2n} - \ln n - \gamma - \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$$

$\square$

Пример 5.3.2 *Исследовать на абсолютную и условную сходимости ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^a}.$$

Ясно, что при $a \leq 0$ ряд расходится так как его общий член не стремится к нулю.

Если $a > 1$, то

$$\left|\frac{\sin k}{k^a}\right| \leq \frac{1}{k^a}$$

и, согласно признакам сравнения, исследуемый ряд сходится абсолютно.

Пусть теперь $a \in (0, 1]$. Сначала установим, что ряд сходится. Действительно,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{1}{2} \frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}},$$

а значит $|A_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{1}{2}|}$ и, так как $\frac{1}{k^a}$ монотонно стремится к нулю, то ряд сходится. Абсолютной сходимости нет, так как

$$\left|\frac{\sin k}{k^a}\right| \geq \frac{\sin^2 k}{k^a} = \frac{1 - \cos 2k}{2k^a} = \frac{1}{2k^a} - \frac{\cos 2k}{2k^a},$$

и ряд с общим членом $\frac{1}{2k^a}$ расходится, а с общим членом $\frac{\cos 2k}{2k^a}$ сходится (что доказывается аналогично только что проделанному).

Часто бывает полезна следующая теорема.

Теорема 5.3.3 *Пусть $a_k = b_k + c_k$ и ряд с общим членом c_k сходится абсолютно. Тогда ряды с общими членами a_k и b_k ведут себя одинаково (либо одновременно сходятся условно, либо абсолютно, либо расходятся).*

Доказательство. Доказательство остается в качестве упражнения. □

Пример 5.3.3 *Условия монотонности в признаке Абеля-Дирихле важно. Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{\sin k + \sqrt{k}}.$$

Рассмотрим цепочку преобразований

$$\frac{\sin k}{\sin k + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin k \left(1 + \frac{\sin k}{\sqrt{k}}\right)^{-1} = \frac{\sin k}{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{\sin k}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin k}{\sqrt{k}} - \frac{\sin^2 k}{k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right).$$

Ясно, что ряд с общим членом $k^{-3/2}$ сходится, а значит ряд с общим членом $O(k^{-3/2})$ сходится абсолютно. Ряд с общим членом $\frac{\sin k}{\sqrt{k}}$ сходится (по доказанному ранее), а ряд с общим членом $\frac{\sin^2 k}{k}$ расходится. Значит, исходный ряд расходится.

Приведем еще один признак.

Теорема 5.3.4 (Признак Лейбница) *Пусть рассматривается ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \geq 0$ и a_k монотонно стремится к нулю. Тогда ряд сходится.

Доказательство.

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2},$$

так как все слагаемые положительны (в силу невозрастания a_n) и, тем самым, S_{2n} не убывает. Кроме того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

откуда S_{2n} ограничена сверху. Значит, $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$. Но тогда

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S,$$

так как общий член стремится к нулю. Тогда можно утверждать, что ряд сходится. $\square$

Определение 5.3.3 *Ряд, фигурирующий в условии теоремы, часто называют рядом лейбницевского типа.*

Замечание 5.3.2 *Как показано в доказательстве теоремы,*

$$0 \leq S_{2n} \leq a_1.$$

Это значит, что $0 \leq S \leq a_1$.

Лемма 5.3.3 (Об остатке ряда лейбницевского типа) *Пусть рассматривается ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k,$$

где $a_k \geq 0$ *и* a_k *монотонно стремится к нулю. Тогда*

$$|R_n| \leq a_{n+1}, \quad R_n(-1)^n a_{n+1} \geq 0.$$

Иными словами, модуль остатка ряда лейбницевского типа не превосходит модуля первого отброшенного члена. Кроме того, остаток совпадает по знаку со знаком первого отброшенного члена.

Доказательство. Для доказательства достаточно применить к остатку ряда сформулированное выше замечание. $\square$

5.4 Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов. Теорема Римана

Оказывается, над сходящимися рядами далеко не всегда можно проводить привычные нам операции.

Пример 5.4.1 *Рассмотрим ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + ...,$$

сумма которого вычислена выше и равна $\ln 2$. *Переставим его члены местами и рассмотрим следующий ряд*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + ...$$

Рассмотрим частичную сумму нового ряда с номером $3n$:

$$\widetilde{S}_{3n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n},$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$, то $\widetilde{S}_{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln 2}{2}$. Легко понять, что $\widetilde{S}_{3n+1}$ и $\widetilde{S}_{3n+2}$ тоже сходятся к $\frac{\ln 2}{2}$, а значит можно утверждать, что

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + ... = \frac{\ln 2}{2}.$$

Итого, перестановка членов исходного ряда поменяла сумму.

Итак, наша цель – ответить на вопросы: какие свойства суммирования (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и проч.) и в каких случаях переносятся на ряды. Начнем с ассоциативности.

Определение 5.4.1 *Пусть дан ряд с общим членом a_k и $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ – возрастающая последовательность номеров. Положим $n_0 = 0$ и*

$$A_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k.$$

Тогда ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$$

называется группировкой исходного ряда.

Отметим, что группировка ряда сохраняет исходный порядок членов ряда, но меняет общий член ряда.

Замечание 5.4.1 *Мы знаем на примере ряда с общим членом $a_k = (-1)^k$, что группировка ряда может сходиться даже в том случае, когда ряд расходится:*

$$(-1+1) + (-1+1) + ... + (-1+1) + ... = 0.$$

Ответим на вопрос, как связаны сходимость ряда и сходимость его группировок.

Теорема 5.4.1 (Об ассоциативности) *1. Пусть ряд с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда и любая его группировка имеет сумму S, то есть*

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = S.$$

2. Пусть группировка $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j$ ряда с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$, причем $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ и каждая группа содержит не более $L \in \mathbb{N}$ членов. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

3. Пусть группировка $\sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j$ ряда с общим членом a_k имеет сумму $S \in \overline{\mathbb{R}}$, а все члены внутри каждой группы имеют один и тот же знак. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Замечание 5.4.2 *В пункте 3 теоремы слова о знаке означают следующее:*

$$\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow a_{n_j+p} a_{n_j+k} \geq 0, \; p, k \in \mathbb{N}, \; n_{j+p} \leq n_{j+1}, \quad n_{j+k} \leq n_{j+1}.$$

Это означает, что внутри каждой группы все члены группы имеют один и тот же знак, причем если среди них встречается нулевой член – это не проблема.

Доказательство. 1. Ясно, что

$$\widetilde{S}_p = \sum_{j=0}^{p} A_j = \sum_{k=1}^{n_p} a_k = S_{n_p}.$$

Так как $n_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ и S_{n_p} – подпоследовательность последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, имеющей пределом S (в $\overline{\mathbb{R}}$), то

$$\lim_{p\to+\infty} \widetilde{S}_p = \lim_{p\to+\infty} S_{n_p} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S,$$

откуда и следует требуемое.
2. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, то существует k_0, что при $k > k_0$ выполняется

$$|a_k| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Так как перестановка имеет сумму S, то существует j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\widetilde{S}_j - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $n > \max(k_0, n_{j_0+1})$. Тогда существует t, что $n_t < n \leq n_{t+1}$, причем $n_t \geq n_{j_0+1}$. Но тогда

$$|S_n - S| \leq |S_n - \widetilde{S}_t| + |\widetilde{S}_t - S| = \left|\sum_{k=n_t+1}^{n} a_k\right| + |\widetilde{S}_t - S| < \frac{\varepsilon}{2L}L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Рассмотрим случай $S \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как перестановка имеет сумму S, то найдется j_0 такой, что при $j > j_0$ выполняется

$$|\widetilde{S}_j - S| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_{j_0+1}$. Тогда найдется t, что $n_t < n \leq n_{t+1}$, причем $n_t \geq n_{j_0+1}$. Если все члены группы A_t неотрицательны, то

$$\widetilde{S}_t \leq S_n \leq \widetilde{S}_{t+1},$$

а если неположительны, то

$$\widetilde{S}_{t+1} \leq S_n \leq \widetilde{S}_t.$$

В любом из двух описанных случаев,

$$|S_n - S| \leq \max(|\widetilde{S}_t - S|, |\widetilde{S}_{t+1} - S|) < \varepsilon.$$

$\square$

Теперь выясним основное отличие абсолютно сходящихся рядов от условно сходящихся.

Теорема 5.4.2 *Ряд с общим членом a_k сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды с общими членами*

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & a_k \geq 0 \\ 0, & a_k < 0 \end{cases}, \quad \text{и} \quad a_k^- = \begin{cases} 0, & a_k \geq 0 \\ -a_k, & a_k < 0 \end{cases},$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,

$$S_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{|\cdot|},$$

а также $S_n^{\pm} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\pm}$. Тогда

$$S_n^{\pm} \le S_n^{|\cdot|} \le S^{|\cdot|},$$

откуда (в силу критерия сходимости знакопостоянных рядов) $S_n^{\pm} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{\pm}$. Кроме того,

$$S_n = S_n^{+} - S_n^{-},$$

откуда, переходя к пределу при $n \to +\infty$,

$$S = S^{+} - S^{-} \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-}.$$

Докажем достаточность. Пусть $S_n^{\pm} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\pm} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{\pm}$. Тогда

$$S_n^{|\cdot|} = S_n^{+} + S_n^{-} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S^{+} + S^{-} < \infty,$$

а значит ряд с общим членом a_k сходится абсолютно. Тогда он сходится, причем

$$S_n = S_n^{+} - S_n^{-}$$

и, переходя к пределу, получаем требуемое равенство для сумм. □

Замечание 5.4.3 *Если ряд с общим членом a_k сходится условно, то $S^{\pm} = +\infty$. Докажите это.*

Теперь решим вопрос о перестановке абсолютно сходящегося ряда.

Определение 5.4.2 *Биекция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется перестановкой множества натуральных чисел.*

Определение 5.4.3 *Пусть дан ряд с общим членом a_k и перестановка натуральных чисел φ. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

называется перестановкой исходного ряда.

Теорема 5.4.3 (О перестановке абсолютно сходящегося ряда) *Пусть ряд с общим членом a_k сходится абсолютно. Тогда любая его перестановка сходится абсолютно, причем к той же сумме.*

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.
1. Пусть все $a_k \geq 0$. Тогда

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{p} a_k = S_p \leq S, \quad p = \max_{k\in\{1,2,\dots,n\}} \varphi(k).$$

Значит, перестановка сходится, причем $\widetilde{S} \leq S$. Наоборот, так как $\widetilde{S} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$, то ряд с общим членом a_k – его перестановка ($a_k = a_{\varphi^{-1}(\varphi(k))}$), а значит, по доказанному, $S \leq \widetilde{S}$, откуда $S = \widetilde{S}$.
2. Пусть теперь $a_k \in \mathbb{R}$. Пусть a_k^+ и a_k^- – подпоследовательности a_k, состоящие только из неотрицательных и отрицательных членов, соответсвенно. Ряды, с общими членами a_k^+ и a_k^- сходятся абсолютно, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})^+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

□

Оказывается, для условно сходящихся рядов такая теорема уже не имеет места, а имеет место теорема Римана.

Теорема 5.4.4 (Теорема Римана) *Пусть ряд с общим членом a_k сходится условно. Тогда какое бы не взять $S \in \overline{\mathbb{R}}$, существует перестановка натуральных чисел φ, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = S.$$

Кроме того, существует такая перестановка исходного ряда, которая не имеет суммы в $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Пусть a_k^+ и a_k^- – подпоследовательности a_k, состоящие только из неотрицательных и отрицательных членов, соответсвенно, причем оба ряда расходятся (к $+\infty$ и $-\infty$, соотвественно). Пусть $S \in \mathbb{R}$, $S \geq 0$, $a_0^+ = a_0^- = 0$. Пусть p_1 – наименьшее натуральное число, что

$$\sum_{k=0}^{p_1-1} a_k^+ \leq S < \sum_{k=0}^{p_1} a_k^+.$$

Пусть теперь q_1 – наименьшее натуральное число, что

$$\sum_{k=0}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_1} a_k^- < S \leq \sum_{k=0}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_1-1} a_k^-.$$

Пусть построены числа $p_1, ..., p_{l-1}$ и $q_1, ..., q_{l-1}$. Найдем наименьшее число p_l, что

$$\sum_{k=0}^{p_l-1} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_{l-1}} a_k^- \leq S < \sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_{l-1}} a_k^-.$$

Теперь найдем наименьшее число q_l, что

$$\sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_l} a_k^- < S \leq \sum_{k=0}^{p_l} a_k^+ + \sum_{k=0}^{q_l-1} a_k^-.$$

Все построения возможны в виду расходимости обоих рядов (из их членов можно набрать сколь угодно большую положительную и сколь угодно маленькую отрицательную суммы).

Рассмотрим ряд

$$A_1^+ + A_1^- + A_2^+ + A_2^- + ... + A_l^+ + A_l^- + ...,$$

где $(p_0 = q_0 = 0)$

$$A_i^+ = \sum_{k=p_{i-1}+1}^{p_i} a_k^+, \quad A_i^- = \sum_{k=q_{i-1}+1}^{q_i} a_k^+,$$

причем если $\widetilde{S}_n$ – его частичная сумма, то

$$a_{q_l}^- < \widetilde{S}_{2n} - S < 0,$$

а

$$0 < \widetilde{S}_{2n+1} - S < a_{p_{l+1}}^+.$$

Так как общий член ряда, в силу сходимости, стремится к нулю, то доказано, что

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{S}_n = S.$$

Так как все члены в каждой группе одного знака, то перестановка рассматриваемого ряда сходится к S. Остальные случаи остаются в качестве упражнения. $\square$

5.5 Произведение рядов

Понятно, что

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_k b_j,$$

и для конечных m, n последнее выражение не зависит ни от порядка суммирования, ни от способа перемножения. У рядов сразу возникают вопросы: будет ли сходиться полученный ряд? В каком порядке можно складывать?

Определение 5.5.1 *Пусть даны ряды с общими членами a_k и b_k, (φ, ψ) – биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^2$. Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$$

называется произведением рядов с общими членами a_k и b_k.

Итак, произведение рядов – это ряд с произвольным порядком слагаемых вида $a_i b_j$.

Теорема 5.5.1 (Теорема Коши) *Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B,$$

причем сходимость абсолютная. Тогда произведение рядов абсолютно сходится к AB.

Доказательство. Пусть (φ, ψ) – биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^2$. Тогда

$$\widetilde{S}_n^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{n} \left|a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}\right| \le \sum_{k=1}^{p} |a_k| \sum_{k=1}^{t} |b_k| \le A^{|\cdot|} B^{|\cdot|},$$

$$p = \max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \varphi(k), \ t = \max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \psi(k),$$

$$A^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad B^{|\cdot|} = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

В итоге, ряд с общим членом $a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$ сходится абсолютно. Значит, его сумма не зависит от перестановки. Тогда просуммируем «по квадратам».

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \xrightarrow[n \to +\infty]{} AB.$$

$\square$

Лемма 5.5.1 *Если ряды с общими членами a_k и b_k сходятся к суммам A и B, то их произведение «по квадратам» сходится к AB.*

Доказательство. Пусть $S_n^A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $S_n^B = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Ясно, что

$$S_{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} AB.$$

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ и $l_n = [\sqrt{n}]$. Тогда

$$S_n = S_{l_n^2} + \theta_n,$$

где $\theta_n = a_{l_n+1} S_k^B + b_{l_m+1}(S_t^A - S_p^A)$. Так как частичные суммы сходящихся рядов ограничены, а их общие члены стремятся к нулю, то и θ_n стремится к нулю. Тогда $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} AB$. □

Часто используется так называемое произведение по Коши (особенно – в степенных рядах).

Определение 5.5.2 *Ряд с общим членом c_k, где*

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k+1-j},$$

называется произведением по Коши рядов с общими членами a_k и b_j.

Лемма 5.5.2 *Если ряды с общими членами a_k и b_k сходятся абсолютно, то их произведение по Коши тоже сходится абсолютно к сумме AB.*

Доказательство. Данная лемма – прямое следствие теоремы Коши. □

Замечание 5.5.1 *Часто произведение нумеруют с нуля. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Пример 5.5.1 *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

сходится по признаку Лейбница. А что с его квадратом по Коши?

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}} \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k+1-j}} = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}}.$$

Тогда

$$|c_k| = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}} \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k}} = 1.$$

Итого, нарушено необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 5.5.2 (Теорема Мертенса) *Если два ряда сходятся, причем хотя бы один из них – абсолютно, то их произведение по Коши тоже сходится, причем к произведению сумм.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Введем привычные обозначения

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n^{|A|} = \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad S^{|A|} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

$$S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad S^B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Рассмотрим произведение по Коши – ряд с общим членом

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1}.$$

Ясно, что

$$S_n^C = \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} = a_1 S_n^B + a_2 S_{n-1}^B + ... + a_n S_1^B.$$

Так как $S^B = S_n^B + R_n^B$, то, подставляя $S_n^B = S^B - R_n^B$, получим

$$S_n^C = S_n^A S^B - \alpha_n,$$

где

$$\alpha_n = a_1 R_n^B + a_2 R_{n-1}^B + ... + a_n R_1^B.$$

Для доказательства утверждения достаточно показать, что $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ряд с общим членом b_k сходится, то

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow \ |R_n^B| < \varepsilon.$$

Пусть $n > n_0$, тогда

$$|\alpha_n| = \left|\sum_{j=1}^{n} R_j^B a_{n-j+1}\right| \le \left|\sum_{j=1}^{n_0} R_j^B a_{n-j+1}\right| + \left|\sum_{j=n_0+1}^{n} R_j^B a_{n-j+1}\right|.$$

Для второй суммы справедлива оценка:

$$\left|\sum_{j=n_0+1}^{n} R_j^B a_{n-j+1}\right| < \varepsilon \sum_{j=n_0+1}^{n} |a_{n-j+1}| \le \varepsilon S^{|A|}.$$

Рассмотрим первую сумму. Так как $R_n^B \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, то $|R_n^B| \le M$. Тогда

$$\left|\sum_{j=1}^{n_0} R_j^B a_{n-j+1}\right| \le M \sum_{j=1}^{n_0} |a_{n-j+1}| = M \sum_{j=n-n_0+1}^{n} |a_j| =$$

$$= M(R_{n-n_0}^{|A|} - R_n^{|A|}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

в силу абсолютной сходимости ряда с общим членом a_k. Итого,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^C = \lim_{n\to+\infty} \left(S_n^A S^B - \alpha_n\right) = S^A S^B.$$

□

Чуть позже мы установим вот какую лемму.

Лемма 5.5.3 *Если ряды с общими членами a_k и b_k сходятся к суммам A и B, соответственно, а их произведение по Коши сходится к C, то $C = AB$.*

В заключение данного пункта, приведем следующий полезный пример.

Пример 5.5.2 *Произведение по Коши двух расходящихся рядов может быть даже абсолютно сходящимся. Рассмотрим ряды с общими членами*

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 2^{k-2}, & k > 1 \end{cases}, \quad b_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ -1, & k > 1 \end{cases}$$

Рассмотрим произведение по Коши. Понятно, что $c_1 = 1$, а при $k > 1$

$$c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b^{k-j+1} = -1 - \sum_{j=2}^{k-1} 2^{j-2} + 2^{k-2} = -1 - \frac{1-2^{k-2}}{1-2} + 2^{k-2} = 0.$$

Итого, построенный ряд сходится абсолютно к сумме 1.