18 мая.

Матан.

Дз 7.

1. $f_n = \frac{x}{x+n}$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$E_1 = [0, a]\ ,\ a > 0$

$\sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{x+n}\right| =$

$= \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(1 - \frac{n}{x+n}\right) \leqslant 1 - \frac{n}{a+n} = \frac{a}{a+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ <u>сх. равн.</u>

$E_2 = [0, +\infty)$

$x_n = n$

$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$

$\Rightarrow$ <u>сх. неравн.</u>

2. $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+2n+x}$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$E_1 = [0, 1]$

$$\left|\frac{nx^2}{1+2n+x} - \frac{x^2}{2}\right| = \left|\frac{2x^2n - x^2 - 2nx^2 - x^3}{2(x+2n+1)}\right| =$$

$$= \frac{x^3+x^2}{2(x+2n+1)} \leq \frac{2x}{2(x+2n+1)} \leq \frac{2x}{x+2n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{1+2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{сх. равн.}$$

$E_2 = [1, +\infty)$

$x = n$

$$\frac{n^3+n^2}{2(3n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow \text{сх. неравн.}$$

3. $f_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}),$

$$f_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$E_1 = (0, 1)$

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{n}}{2}\right| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{сх. неравн.}$$

$E_2 = (1, +\infty)$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{1+nx}+\sqrt{nx})} <$$

$$< \frac{1}{2\cdot(2\sqrt{n})^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{сх. равн.}$$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{2^{n+1}(n+5)}$

$\sqrt[n]{\left|\frac{(2x+1)^n}{2^{n+1}(n+5)}\right|} = \frac{|2x+1|}{2\cdot 2^{\frac{1}{n}}(n+5)^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{}$

$\to \frac{|2x+1|}{2} < 1$

$|2x+1| < 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ — сх.

$x = \frac{1}{2}$: $\sum \frac{1}{2(n+5)}$ расх.

$x = -\frac{3}{2}$: $\sum \frac{(-1)^n}{2^n(n+5)}$ сх. (по Лейбн.)

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1 + \frac{1}{1-x^n}\right)$

$|x| > 1$: $\frac{x^n}{1-x^n} \sim -1 \Rightarrow$ не выполн. необх. условие равн. сх. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ расх

$|x| < 1$: $\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leq \frac{x^n}{1-x}$ сх., как геом. прогр. $\Rightarrow$ сх. равн. по Вейер.

Ответ: $(-1; 1)$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$

$E_1 = [1, +\infty)$

$\left|\frac{1}{1+n^2x}\right| \leq \frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ сх. =>

=> на E_1 функц. ряд. сх-ся равн.

$E_2 = (0, 1)$

$x_n = \frac{1}{n^2}$

$\ell_n(x_n) = \frac{1}{2} \not\to 0$ => ряд. ~~по~~ сх. неравн.

$\left(\frac{1}{1+n^2x} \sim \frac{1}{n^2x}\right.$ сх-ся$\left.\right)$ поэтому есть просто сх-ть

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x e^n \sin\frac{x}{3^n}$

$E_1 = (0, 1)$

$\left|x e^n \sin\frac{x}{3^n}\right| \leq \left|e^n \sin\frac{1}{3^n}\right| \sim$

$\sim \frac{e^n}{3^n} = \underbrace{\left(\frac{e}{3}\right)}_{<1}^n$ ~~по~~ сх. =>

=> сх. равн.

$E_2 = (1, +\infty)$

$x_n = 3^n$

$f_n(x_n') = 3^n e^n \sin 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \Rightarrow$ сх. неравн

(Есть просто сх-ть на E_2, т.к.

$\left| x e^n \sin \frac{x}{3^n} \right| \sim x^2 \frac{e^n}{3^n}$ сх.)