20 февраля.

1.

~~а) $\varnothing$, все одноточ. мн-ва из $\mathbb{N}$, все конеч. мн-ва~~

~~парн. одноточ. мн-в из $\mathbb{N}$~~

а) $\varnothing$, все конеч. мн-ва, явл. подмн-вами $\mathbb{N}$.

б) мн-ва из а) и $\mathbb{N}$ и все ~~н~~ счётные подмн-ва $\mathbb{N}$, дополнение которых конечно.

Например, нельзя получить $\{i \in \mathbb{N} : i \text{ чётно}\}$.

3. $|\mu A - \mu B| \leq \mu(A \triangle B)$

$\mu A = \mu(A \setminus B \sqcup A \cap B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$

$\mu B = \mu(B \setminus A \sqcup B \cap A) = \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A)$

$\Rightarrow |\mu A - \mu B| = |\mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A)|$

$\mu(A \triangle B) = \mu(A \setminus B \sqcup B \setminus A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$

~~$-\mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A) \leq \mu A - \mu B \leq \mu$~~

$-\mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A) \leq \mu(A \setminus B) - \mu(B \setminus A) \leq \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$

Очевидно, т. к. $\mu(A \setminus B) \geq 0$, $\mu(B \setminus A) \geq 0$

4. P^1, μ - мера

$$f(x) = \begin{cases} \mu[0, x), & x \geq 0 \\ -\mu[x, 0), & x < 0 \end{cases}$$

, $x \geq 0$

$f(x)$ - непр. слева на $\mathbb{R}^1$ $\Leftarrow$

$$\Leftarrow f(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f(x_n)}_{\substack{\text{Гейне} \\ x_n \to x_0 - 0}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \mu[0, x_n) = \mu[0, x_0) = f(x_0)$$

т.к. $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, x_n) = [0, x_0)$, мера μ непр. снизу

Для $x < 0$ аналогично.

2. Обозначим такую σ-алгебру $\mathcal{M}$. Очевидно, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Док-м, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$.

$\forall b, c$, $b < c$: $[b, c) = [b, +\infty) / [c, +\infty)$
$\Rightarrow [b, c) \in \mathcal{M}$ (b, c - двоично рац. числа)

Док-м, что $\forall x \in \mathbb{Q}$ $x = \lim_{n \to \infty} y_n$, где $y_n \in K$ (где K - двоично-рац. числа).

Тогда будет $\underset{(y>x)}{B(\mathbb{R}) \subset M}$.

<u>Лемма</u> $\forall x, y \in \mathbb{Q}\ \exists\, r \in K : r \in (x, y)$

<u>Док-во</u>

$\forall \ell = y - x\ \exists\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^n} < \ell$, т.к. $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ \frac{m}{2^n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} : \frac{m}{2^n} \in (x, y)$ ■

$\forall a \in \mathbb{Q}$ рассмотрим посл-ть интервалов ~~$\underset{k\in\mathbb{N},\, k\to\infty}{(a_k, a)}$, где $a_{k+1} = a_k$~~ $\left(a - \frac{1}{2^k}, a\right)$. По лемме $\forall k\ \exists\, r_k \in K$:

$r_k \in \left(a - \frac{1}{2^k}, a\right) \Rightarrow |a - r_k| < \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} r_k = a$.

Т.е. ~~$\forall a \in \mathbb{Q}$ можно вы~~ $\forall [b, a)$, где $b, a \in \mathbb{Q}$, можно выразить как пересечение счётного числа интервалов с двоично-рац. концами.