7 Тригонометрические ряды Фурье

7.1 Ортогональные системы функций

Определение 7.1.1 *Пусть функции* $\varphi_1, ..., \varphi_n, ... \in C[a,b]$. *Говорят, что система функций* $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *ортогональна на* $[a,b]$, *если*

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m.$$

Если, кроме того,

$$\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то система функций $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *называется ортонормированной.*

Пример 7.1.1 *Тригонометрическая система*

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ ...,\ \sin nx,\ \cos nx,\ ...$$

является ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$, *а система*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ ...,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ ...$$

ортонормирована на $[-\pi, \pi]$.

Пример 7.1.2 *Многочлены Лежандра*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n \in \mathbb{N}, \quad L_0(x) = 1,$$

образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$.

7.2 Ряд Фурье по ортогональной системе

Предположим, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Этот ряд называется тригонометрическим рядом Фурье.

Заметим, что

1. Если написанное равенство справедливо на $\mathbb{R}$, то f – периодическая функция с периодом 2π. В частности, она полностью определяется заданием ее на произвольном промежутке длины 2π.

2. Обратно, логично предположить, что имея 2π-периодическую функцию, ее можно разложить в ряд по тригонометрической системе функций. Это, конечно, не всегда так.

Следующую лемму сформулируем для любых ортогональных систем функций.

Лемма 7.2.1 *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) = f(x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$, *то справедливо равенство:*

$$a_n = \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Доказательство. Так как функции $\varphi_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то они ограничены. И тогда из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x)$ на $[a, b]$ и

$$f(x)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\varphi_n(x).$$

Воспользуемся теоремой об интегрировании равномерно сходящегося ряда и ортогональностью системы $\varphi_1, ..., \varphi_n, ...$ на $[a, b]$. Получим

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\right)\varphi_n(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)dx = a_n \int\limits_a^b \varphi_n^2(x).$$

Так как функции $\varphi_n(x)$ не равны тождественно нулю и непрерывны, то интеграл в знаменателе не равен нулю. И требуемое равенство доказано. $\square$

Определение 7.2.1 *Числа a_n, вычисленные по формулам (*), называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ – рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Записывать это будем так:*

$$f(x) \ \sim \ \sum_{n=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x), \quad x\in[a,b].$$

Для тригонометрической системы функций (Пример 1) тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \ \sim \ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

7.3 Лемма Римана

Будем говорить, что функция $f(x)\in R_{loc}(a,b)$ интегрируема с модулем или абсолютна интегрируема на (a,b), если несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится. В частности, f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, если сходится интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$.

Лемма 7.3.1 (Римана) *Пусть f абсолютно интегрируема на конечном ии бесконечном интервале (a,b). Тогда*

$$\lim_{w\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin wx dx = \lim_{w\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos wx dx = 0.$$

Доказательство. 1) $f(x)\in R[a,b]$. Тогда $\forall\varepsilon>0$ найдется разбиение $\tau=\{x_i\}$ отрезка $[a,b]$, что разность сумм Дарбу $S_\tau - s_\tau<\varepsilon/2$, то есть,

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.

Тогда на каждом отрезке разбиения выполняется неравенство

$$0\le f(x)-m_i\le M_i-m_i$$

и

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)\sin wxdx\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin wxdx\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-m_i)\sin wxdx + \sum_{i=1}^n m_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sin wxdx\Big| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-m_i|\cdot|\sin wx|dx + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|w|}|\cos wx_i - \cos wx_{i-1}| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i + \frac{2}{|w|}\sum_{i=1}^n |m_i| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2n}{|w|}\sup_{x\in[a,b]}|f(x)| < \varepsilon.$$

(последнее слагаемое $\to 0$ при $w \to \infty$, значит $< \varepsilon/2$).

2) Пусть теперь f абсолютно интегрируема на (a,b) (возможно неограниченном). Будем считать, что единственная особая точка интеграла – точка b. Тогда для $\forall ep > 0$ найдется $b' < b$ такое, что $f \in R[a,b']$, а $\int_{b'}^b |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$. По п.1) найдется w_0 такое, что при $|w| > w_0$ выполнено

$$\Big|\int\limits_a^{b'} f(x)\sin wxdx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, при $|w| > w_0$ имеем

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)\sin wxdx\Big| = \Big|\int\limits_a^{b'} f(x)\sin wxdx + \int\limits_{b'}^b f(x)\sin wxdx\Big| \le$$

$$\le \Big|\int\limits_a^{b'} f(x)\sin wxdx\Big| + \Big|\int\limits_{b'}^b |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Аналогично доказывается, что $\int\limits_a^b f(x)\cos wxdx \longrightarrow 0$ при $w \to \infty$. $\square$

Следствие 7.3.1 *Если f абсолютно интегрируема на $[-\pi,\pi]$, то ее коэффициенты тригонометрического ряда Фурье стремятся к 0 при $n \to \infty$, а также общий член ряда стремится к 0.*

7.4 Ядро Дирихле

Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье и немного ее преобразуем:

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum k = 1^n \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)\right) dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)dt$$

Здесь мы ввели обозначение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku \quad \text{(ядро Дирихле).}$$

Заметим, что

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \ldots + \cos nu = \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin(u/2)} \quad \text{при } u \neq 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Отметим простейшие свойства ядра Дирихле.

Лемма 7.4.1 *Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:*

1. $D_n(u)$ – 2π*-периодическая функция.*
2. $D_n(u)$ – *четная функция.*
3. *Выполнено условие нормировки:*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)dx = 1.$$

Итак, для частичной суммы ряда Фурье оказывается справедливым следующее представление.

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)dt.$$

Лемма 7.4.2 *Пусть функция f является 2π-периодической на $\mathbb{R}$. Тогда*

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(f(x-t) + f(x+t)\right) D_n(t)dt.$$

Доказательство. Сделаем замену переменной $u = x-t$ и учтем, что, согласно условию и свойствам ядра Дирихле, подынтегральная функция является 2π-периодической, тогда

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du.$$

Так как ядро Дирихле является четным, то

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(f(x-u) + f(x+u)\right) D_n(u)du,$$

что и доказывает лемму. □

7.5 Принцип локализации и условия Гёльдера

Используя представление частичной суммы ряда Фурье в виде интеграла, а также используя лемму Римана, можно сформулировать следующий основной принцип локализации.

Теорема 7.5.1 (Принцип локализации) *Пусть f, g – 2π-периодические на $\mathbb{R}$ и абсолютно интегрируемые на $(-\pi,\pi)$ функции. Если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности точки $x_0 \in (-\pi,\pi)$, то их тригонометрические ряды Фурье сходятся или расходятся в точке x_0 одновременно, причем если сходятся, то к одному и тому же значению.*

Доказательство. Воспользуемся представлением частичной суммы ряда Фурье в виде

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(f(x_0-t) + f(x_0+t)\right) D_n(t)dt.$$

Так как на $[\delta,\pi]$, $\delta > 0$ выполняется неравенство $\sin\frac{t}{2} > \sin\frac{\delta}{2}$, то на основании леммы Римана можно заключить, что

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} \left(f(x_0-t) + f(x_0+t)\right) D_n(t)dt + o(1).$$

В силу того, что при $t \in (-\delta, \delta)$ справедливо равенство $f(x_0+t) = g(x_0+t)$, то

$$\int\limits_0^\delta \left(f(x_0-t)+f(x_0+t)\right) D_n(t)dt = \int\limits_0^\delta \left(g(x_0-t)+g(x_0+t)\right) D_n(t)dt.$$

Из этого следует утверждение теоремы. □

Замечание 7.5.1 *Даже если оба ряда сходятся в точке x_0, их сумма вовсе не обязательно совпадает со значением в точке x_0 породивших их функций.*

Определение 7.5.1 (Условия Гёльдера) *Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и такие числа $\delta > 0$, $\alpha \in (0,1]$ и $C > 0$, что для всех $u \in (0,\delta)$ выполнены неравенства*

$$\Big|f(x_0+u) - f(x_0+0)\Big| \le Cu^\alpha, \quad \Big|f(x_0-u) - f(x_0-0)\Big| \le Cu^\alpha.$$

Расширим понятие односторонних производных:

$$f'_+(x_0) = \lim_{u\to 0+} \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u},$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{u\to 0+} \frac{f(x_0-u)-f(x_0+0)}{-u}.$$

Лемма 7.5.1 *Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то она удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера с показателем $\alpha = 1$.*

Доказательство. Из существования односторонних производных следует, что функции

$$\varphi(u) = \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}, \quad \psi(u) = \frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{-u}$$

имеют конечные пределы при $u \to 0+$ и, значит, ограничены на интервале $(0,\delta)$, то есть существует $C > 0$ такое, что

$$\Big|\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\Big| \le C, \quad \Big|\frac{f(x_0-u)-f(x_0-0)}{-u}\Big| \le C,$$

откуда и следуют условия Гёльдера при $\alpha = 1$. □

Следствие 7.5.2 *Дифференцируемая в точке функция удовлетворяет в этой точке условиям Гёльдера.*

Обратное утверждение неверно. Например, функция $f(x) = |x|^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ удовлетворяет условиям Гёльдера в точке $x_0 = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

7.6 Сходимость ряда Фурье в точке

Теорема 7.6.1 (Дирихле) *Пусть $f(x)$ – 2π-периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция, удовлетворяющая в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ условию Гёльдера. Тогда в точке x_0 тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $\frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$.*

Доказательство. Запишем частичную сумму ряда Фурье:

$$T_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(f(x_0-t)+f(x_0+t)\right) D_n(t)dt,$$

и

$$\int\limits_0^\pi D_n(t)dt = \frac{\pi}{2},$$

то

$$T_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(f(x_0-t)+f(x_0+t)\right) D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right) D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)+f(x_0+t)-f(x_0+0)}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt.$$

Теперь воспользуемся леммой Римана. Для этого докажем, что функция $\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)+f(x_0+t)-f(x_0+0)}{\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на $(0,\pi)$. Рассмотрим

$$\int\limits_0^\pi \left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)+f(x_0+t)-f(x_0+0)}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt \le$$

$$\le \int\limits_0^\pi \left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt + \int\limits_0^\pi \left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt.$$

Для первого интеграла имеем при $t \to 0+$ (для второго аналогично):

$$\left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}\right| \sim 2\left|\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right| \le 2Ct^\alpha,$$

откуда следует, что

$$\Big|f(x_0-t)-f(x_0-0)\Big| \le \frac{2C}{t^{1-\alpha}}, \quad 1-\alpha\in[0,1),$$

оба интеграла сходятся, выполнены условия леммы Римана и

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

$\square$

Замечание 7.6.1 *Если в условиях теоремы функция еще и непрерывна в точке x_0, то ее ряд Фурье сходится к $f(x_0)$.*

7.7 Некоторые примеры и приложения

7.7.1 Ряд из обратных квадратов

Пусть функция $f(x)=x^2$ задана на $[-\pi,\pi]$, а дальше периодически продолжена на $\mathbb{R}$. Ясно, что согласно доказанной теореме, ее ряд Фурье сходится к ней поточечно при $x\in\mathbb{R}$. Вычислим коэффициенты разложения.

$$a_0(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

Далее, пусть $k\ge 1$, тогда

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^2\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x^2\cos kxdx,$$

где последнее равенство верно в силу четности подынтегральной функции. Интегрируя два раза по частям и учитывая, что $\cos\pi k=(-1)^k$, получим

$$a_k(f)=(-1)^k\frac{4}{k^2}, \quad k\ge 1.$$

Далее,

$$b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^2\sin kxdx=0,$$

так как подынтегральная функция нечетна, а промежуток интегрирования симметричен. Итого, на $[-\pi,\pi]$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{k^2}\cos kx.$$

Пусть $x = \pi$, тогда

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

7.7.2 Бесконечное произведение для синуса

Рассмотрим функцию $\cos \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, заданную на $[-\pi, \pi]$ и периодически продолженную на $\mathbb{R}$. Ясно, что построенный по ней ряд Фурье сходится к значению данной функции во всех точках $x \in \mathbb{R}$.

Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \cos \alpha x \cos kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \left(\cos(\alpha - k)x + \cos(\alpha + k)x\right) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha - k)\pi}{\alpha - k} + \frac{\sin(\alpha + k)\pi}{\alpha + k} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi} \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\alpha - k} + \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha + k} \right) = \frac{(-1)^k}{\pi} 2\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

Далее,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \sin kx dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетна, а промежуток симметричен. Тогда, на $(-\pi, \pi)$

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx \right).$$

Пусть $x = \pi$, тогда

$$\cos \pi\alpha = \frac{2\alpha}{\pi} \sin \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \right)$$

и

$$\operatorname{ctg} \pi\alpha = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} \right)$$

или

$$\operatorname{ctg}\pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2}.$$

При $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1$ написанный ряд сходится равномерно, а значит его можно интегрировать почленно. Пусть $x \in (-1, 1)$, тогда

$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg}\pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha}\right) d\alpha = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} d\alpha,$$

откуда

$$\ln\left|\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\right|\Bigg|_0^x = \sum_{k=1}^{\infty}\ln|\alpha^2 - k^2|\Big|_0^x$$

или

$$\ln\left|\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|1 - \frac{x^2}{k^2}\right|.$$

Избавляясь от логарифмом, получаем, что

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \quad |x| < 1.$$

7.8 Ряды Фурье по произвольному промежутку длины $2l$

До сих пор мы рассматривали 2π-периодические функции, заданные на отрезке $[-\pi, \pi]$. Но что, если период у функции другой? Предположим, что функция f задана на промежутке $[-l, l]$ и периодически продолжена на $\mathbb{R}$. Легко понять, что если $x \in [-l, l]$, то

$$y = \frac{\pi}{l}x \in [-\pi, \pi].$$

Значит, функции f можно сопоставить ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{\pi k x}{l} + b_k\sin\frac{\pi k x}{l},$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Все сформулированные ранее результаты сохраняются с точностью до замены отрезка (или интервала) с концами $\pm\pi$ на отрезок (или интервал) с концами $\pm l$.