18 апреля.

Индивидуальное д. з. № 1.

Вариант 85.

1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\, dx$

$f(x)$

Т.к. $f(x)$ не меняет знак:

$x \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \cancel{x^{\frac{2}{3}}}\ \frac{\pi}{2} x^{-\frac{1}{3}}$ при $x \to \infty$

расх.

Значит, исходный интеграл расх.

<u>Ответ:</u> расходится.

2. $\int\limits_1^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x}\, dx = \int\limits_1^{\infty} e^{\sin x} \cdot \sin 2x \cdot \frac{1}{x}\, dx$

0

монотон.

$\int e^{\sin x} \sin 2x\, dx = \int e^{\sin x}\, 2 \sin x \cos x\, dx =$

$= 2 \int e^{\sin x} \sin x\, d \sin x = 2 \int \sin x\, d e^{\sin x} =$

$= 2 \sin x\, e^{\sin x} - 2 \int e^{\sin x}\, d \sin x =$

$= 2 \sin x\, e^{\sin x} - 2 e^{\sin x} + C$ огр.

По признаку Абеля-Дирихле исходный интеграл сх-ся.

$$\frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x} \geqslant \frac{e^{\sin x}\sin^2 2x}{x} =$$

$$= \frac{e^{\sin x}(1-\cos 4x)}{2x} \geqslant \frac{e^{-1}(1-\cos 4x)}{2x} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2ex}}_{\text{расх.}} - \underbrace{\frac{\cos 4x}{2ex}}_{\text{сх. по Абелю-Дирихле}}$$

$\Downarrow$

расх.

Абсолютной сх-ти нет.

Ответ: сх-ся условно.

3. $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{|\operatorname{tg} x|}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}}$$

$x \to 0+$: $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ сх. ~~расх.~~

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}} \quad]\, t = \cancel{x - \frac{\pi}{2}} \quad \sqrt{-\operatorname{tg} x}$$

$$\cancel{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt}$$

$$\int_{\infty}^{0} d\,\frac{arctg(-t^2)}{t} = 2\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{t^4+1}$$

$t \to \infty:\ \frac{1}{t^4+1} \sim \frac{1}{t^4}$ сх.

Заметим, что в исходном интеграле $x = \frac{\pi}{2}$ не явл. особой точкой, т.к. при $x \to \frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{|tg\,x|}} \to 0$.

Ответ: сходится.

4. $$\int_{0}^{1} \ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)\,\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^4}\,dx =$$

$$\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^4}\,dx \qquad]\ t = \frac{1}{x}$$

$$-\int \frac{t^4\cos t}{t^2}\,dt = -\int t^2\,d\sin t = -t^2\sin t +$$

$$+\int 2t\sin t\,dt = -t^2\sin t - 2t\cos t + 2\int\cos t\,dt$$

4. $\int_0^1 \frac{\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)}{x^4}\cos\frac{1}{x}\,dx =$

$= \int_0^1 \frac{\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$

$\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = -\int \cos\frac{1}{x}\,d\frac{1}{x} = \underbrace{-\sin\frac{1}{x}}_{\text{огр.}} + C$

монотон.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x^2))^{\frac{4}{3}}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2)^{\frac{4}{3}}}{x^2} = 0$

По Абелю-Дирихле интеграл сходится.

$\frac{\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)}{x^4}\left|\cos\frac{1}{x}\right| \geq \frac{\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)\cos^2\frac{1}{x}}{x^4} =$

$= \underbrace{\frac{\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)}{2x^4}}_{\text{расх}} + \underbrace{\frac{\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)\cos\frac{2}{x}}{2\cdot x^4}}_{\text{сх.}}$

(аналог. исходному)

$\frac{\ln^{\frac{4}{3}}(1+x^2)}{2x^4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(x^2)^{\frac{4}{3}}}{2x^4} = \frac{1}{2x^{\frac{4}{3}}}$ расх. ($\alpha > 1$)

Абс. сх-ти нет.

<u>Ответ:</u> сх-ся условно.