- Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B и C;
- Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B, но не принадлежащих C.

7. Докажите теоремы 1.3.1, 1.3.2.

2 ФУНКЦИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ

2.1 Понятия функции и отображения

Одним из ключевых понятий математики и ее приложений является понятие функции (отображения).

Определение 2.1.1 *Пусть заданы два множества X и Y. Говорят, что f – отображение из X в Y, если установлено правило, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется один элемент $y \in Y$. При этом пишут:*

$$f : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Это описание нельзя считать строгим определением понятия отображения, так как оно все еще включает в себя неопределенные понятия «правило» и «сопоставляется». И хотя можно дать строгое определение понятию отображения на основе понятия множества, нам будет удобно считать его первичным.

Замечание 2.1.1 *Если множество Y числовое, то отображение в него часто называют функцией.*

Определение 2.1.2 *Множество X называют областью определения отображения f и обозначают $D(f)$, а x – аргументом отображения f или независимой переменной.*

Определение 2.1.3 *Множество $E(f) \subset Y$, определяемое, как*

$$E(f) = \{y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\},$$

называется областью значений отображения f, а y – значением отображения f на элементе x, или зависимой переменной.

Замечание 2.1.2 *Как обычно, и как уже сделано выше, значение отображения f на элементе x мы будем записывать как $f(x)$.*

Замечание 2.1.3 *Область значений отображения $f : X \to Y$ вовсе не обязана совпадать с множеством Y, но всегда является его подмножеством. Пусть $X = \{0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$, $f : X \to Y$ и $f(x) = x$. Тогда $D(f) = E(f) = \{0, 1\}$, но $E(f) \neq Y$.*

Определение 2.1.4 *Пусть $f : X \to Y$. Образом множества $A \subset X$ называется множество $B \subset Y$, определяемое, как*

$$B = \{y \in Y : f(x) = y, \ x \in A\},$$

при этом пишут $B = f(A)$.

Пример 2.1.1 *Пусть $A \subset X$, $A = \{0, 1, 5, 8\}$, $f : X \to Y$ и $f(x) = 3x$, тогда $f(A) = \{0, 3, 15, 24\}$ – образ множества A.*

Определение 2.1.5 *Пусть $f : X \to Y$. Полным прообразом $B \subset Y$ называется множество $A \subset X$, определяемое, как*

$$A = \{x \in X : f(x) = y, \ y \in B\},$$

при этом пишут $A = f^{-1}(B)$.

Пример 2.1.2 *Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $f(x) = x^2$. Тогда*

$$f(A) = \{0, 1, 4\},$$
$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}, \ f^{-1}(\{1, 4\}) = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Относительно образов и прообразов множеств при отображении f справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1.1 *Пусть $f : X \to Y$, $A, B \subset X$, тогда:*

1. *$(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$;*
2. *$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;*
3. *$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.*

Если $A', B' \subset Y$, тогда:

1. *$(A' \subset B') \Rightarrow (f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B'))$;*
2. *$f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$;*
3. *$f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.*

Если $B' \subset A' \subset Y$, тогда:

1. $f^{-1}(A' \setminus B') = f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B')$;
2. $f^{-1}(Y \setminus A') = X \setminus f^{-1}(A')$.

Доказательство. Доказательство леммы остается в качестве упражнения. □

2.2 Сюръекция, инъекция и биекция

Определение 2.2.1 *Отображение $f : X \to Y$ называется инъекцией, или инъективным, если*

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)) \;\; \forall x_1, x_2 \in X.$$

Пример 2.2.1 *Функция $f(x) = x^2 : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ не является инъекцией, так как $f(-x) = f(x)$. Если же рассмотреть $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$, то данная функция бюдет инъекцией.*

Определение 2.2.2 *Отображение $f : X \to Y$ называется сюръекцией или сюръективным, если $E(f) = Y$.*

Пример 2.2.2 *Функция $f(x) = x^2 : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ не является сюръекцией, так как она не может принимать отрицательные значения. Если же рассмотреть $f(x) = x^2 : (-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$, то данная функция бюдет сюръекцией.*

Определение 2.2.3 *Отображение $f : X \to Y$ называется биекцией, или взаимно однозначным соответствием, если f одновременно как инъекция, так и сюръекция.*

Пример 2.2.3 *Функция $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ является биекцией.*

Определение 2.2.4 *Пусть $f : X \to Y$ – биекция. Тогда определим отображение $f^{-1}(y) : Y \to X$ по правилу:*

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Это отображение называется обратным к отображению $f(x)$.

Пример 2.2.4 *Как показано выше, функция $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ является биекцией. Обратное отображение определяется по правилу $x = \sqrt{y}$.*

Теорема 2.2.1 *Пусть $f : X \to Y$ – биекция и $f^{-1}(y)$ – обратное отображение к отображению $f(x)$. Тогда $f(f^{-1}(y)) = y$ и $f^{-1}(f(x)) = x$.*
Доказательство. *Данная теорема является прямым следствием определений.* □

Богатейший источник отображений дает следующее определение.

Определение 2.2.5 *Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Определим отображение $g \circ f : X \to Z$ согласно правилу*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

Это отображение называется композицией отображений g и f или сложным отображением.

Замечание 2.2.1 *Композицию отображений $g \circ f$ иногда обозначают так: $g(f)$. В прочем, это не самое удачное обозначение.*

На практике довольно часто используется композиция не двух, а большего числа функций. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2.1 *Композиция отображений обладает свойством ассоциативности, то есть если $f : W \to Q$, $g : V \to W$, $h : U \to V$, то*

$$((f \circ g) \circ h)(u) = (f \circ (g \circ h))(u), \quad u \in U.$$

Доказательство. *С одной стороны,*

$$\forall u \in U \Rightarrow ((f \circ g) \circ h)(u) = (f \circ g)(h(u)) = f(g(h(u))).$$

С другой стороны,

$$\forall u \in U \Rightarrow (f \circ (g \circ h))(u) = f((g \circ h)(u)) = f(g(h(u))),$$

что завершает доказательство. □

Говоря о функции, часто требуется рассматривать ее график. Ниже приводится формальное определение этого понятия.

Определение 2.2.6 *Графиком функции $f : X \to Y$ называется множество*

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Итак, график функции $f(x)$ – это множество упорядоченных пар (x, y), где x – элемент области определения, а $y = f(x)$ – значение функции (отображения) f на x.

2.3 Контрольные вопросы и задачи

1. Приведите пример биекции между $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и множеством $(-\infty, +\infty)$.
2. Приведите пример биекции между двумя отрезками множества вещественных чисел.
3. Докажите лемму 2.1.1.
4. Покажите, что отображение $f : X \to Y$ сюръективно тогда и только тогда, когда $\forall B' \subset Y$ справедливо $f(f^{-1}(B')) = B'$.
5. Покажите, что отображение $f : X \to Y$ биективно тогда и только тогда, когда $\forall A \subset X$ и $\forall B' \subset Y$ справедливо $f^{-1}(f(A)) = A$ и $f(f^{-1}(B')) = B'$.
6. Докажите эквивалентность следующих утверждений относительно отображения $f : X \to Y$:
   - f инъективно;
   - $\forall A \subset X$ справедливо $f^{-1}(f(A)) = A$;
   - $\forall A, B \subset X$ справедливо $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
   - $f(A) \cap f(B) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;
   - Если $B \subset A \subset X$, то $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

3 ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

3.1 Система аксиом множества вещественных чисел

В этом пункте дается аксиоматическое построение множества вещественных чисел.

Определение 3.1.1 *Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы действительными (вещественными) числами, если справедливы следующие условия, называемые аксиомами вещественных чисел:*

I Аксиомы сложения.

Определено отображение $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией сложения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y, обладающее свойствами:

(a) Операция $+$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + y = y + x.$$

(b) Операция $+$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(c) Существует нейтральный элемент $0 \in \mathbb{R}$ (называемый нулем), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = x.$$

(d) Для каждого элемента $x \in \mathbb{R}$ существует противоположный элемент $-x$ такой, что

$$x + (-x) = 0.$$

II Аксиомы умножения.

Определено отображение $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, называемое операцией умножения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением элементов x и y, обладающее свойствами:

(a) Операция $\cdot$ коммутативна, то есть для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(b) Операция $\cdot$ ассоциативна, то есть для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(c) Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (называемый единицей), такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 1 = x.$$

(d) Для каждого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

III Связь сложения и умножения.

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, то есть $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

IV Аксиомы порядка.

Между элементами $\mathbb{R}$ введено отношение $\leq$, то есть для элементов $x, y \in \mathbb{R}$ установлено: справедливо $x \leq y$, или нет. При этом выполняются следующие условия:

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq x$.

(b) Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

(c) Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$.

(d) Для любых двух элементов $x, y \in \mathbb{R}$ либо $x \leq y$, либо $y \leq x$.

V Связь сложения и порядка.

Если $x, y, z \in \mathbb{R}$, то из $x \leq y$ следует, что $x + z \leq y + z$.

VI Связь умножения и порядка.

Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $0 \leq x$, $0 \leq y$, то $0 \leq x \cdot y$.

VII Аксиома непрерывности (полноты).

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, причем $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Кроме того, пусть $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется $x \leq y$. Тогда найдется $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq c \leq y$.

3.2 Следствия из аксиом

Ниже установлены различные свойства вещественных чисел и операций над ними, хорошо известные из школы.

I Следствия аксиом сложения.

Лемма 3.2.1 *В множестве $\mathbb{R}$ ноль единственен.*

Доказательство. Пусть 0_1 и 0_2 – нули в $\mathbb{R}$. Тогда, используя аксиому I(a) и определение нуля, получается

$$0_1 \overset{\mathrm{I(c)}}{=} 0_1 + 0_2 \overset{\mathrm{I(a)}}{=} 0_2 + 0_1 \overset{\mathrm{I(c)}}{=} 0_2.$$

□

Лемма 3.2.2 *В множестве $\mathbb{R}$ каждый элемент имеет единственный противоположный.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 противоположные к $x \in \mathbb{R}$. Тогда,

$$x_1 \overset{\mathrm{I(c)}}{=} x_1 + 0 \overset{\mathrm{I(d)}}{=} x_1 + (x + x_2) \overset{\mathrm{I(b)}}{=} (x_1 + x) + x_2 \overset{\mathrm{I(d)}}{=} 0 + x_2 \overset{\mathrm{I(a)}}{=} x_2 + 0 \overset{\mathrm{I(c)}}{=} x_2$$

□

Лемма 3.2.3 *В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x + a = b$ имеет единственное решение $x = b + (-a)$.*

Доказательство. Прибавляя к обеим частям равенства $-a$ (проследите использование аксиом самостоятельно), получается

$$(x + a + (-a) = b + (-a)) \Leftrightarrow (x + 0 = b + (-a)) \Leftrightarrow x = b + (-a).$$

Единственность следует из единственности противоположного элемента. □

II Следствия аксиом умножения.

Лемма 3.2.4 *В множестве $\mathbb{R}$ единица единственна.*

Лемма 3.2.5 *В множестве $\mathbb{R} \setminus 0$ каждый элемент имеет единственный обратный.*

Лемма 3.2.6 *В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $a \cdot x = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.*

Доказательство. Все эти леммы доказываются аналогично леммам предыдущего пункта и их доказательство предлагается в качестве упражнения. □

III Следствия аксиом связи сложения и умножения.

Лемма 3.2.7 *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$x \cdot 0 = 0.$$

Доказательство.

$$(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)) \Leftrightarrow (x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0) \Leftrightarrow$$

$$(x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) \Leftrightarrow 0 = x \cdot 0$$

□

Следствие 3.2.1 $(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

Доказательство. Докажите самостоятельно. □

Лемма 3.2.8 *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$-x = (-1) \cdot x.$$

Доказательство.

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

а значит, в силу единственности противоположного элемента, $-x = (-1) \cdot x$. □

Следствие 3.2.2 *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$(-1) \cdot (-x) = x.$$

Доказательство. Докажите самостоятельно. □

Следствие 3.2.3 *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$(-x) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

Доказательство. $(-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-x) = x \cdot (-1) \cdot (-x) = x \cdot x$. □

IV Следствия аксиом порядка.

Отношение $x \leq y$ на практике часто записывают, как $y \geq x$. При этом условие, что $x \leq y$ и $x \neq y$ записывают, как $x < y$ или $y > x$. Неравенства $\geq$ и $\leq$ называют нестрогими, а неравенства $<$ и $>$ строгими. Отсюда сразу вытекает нижеуказанное следствие.

Следствие 3.2.4 *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ всегда имеет место ровно одно из соотношений:*

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Лемма 3.2.9 *Для любых чисел $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x < z),$$

$$(x \leq y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z).$$

Доказательство. Первое утверждение. Из аксиомы транзитивности IV(c) получаем, что

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z).$$

Покажем, что $x \neq z$. От противного, если $x = z$, то

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \Leftrightarrow (z < y) \wedge (y \leq z) \Leftrightarrow$$

$$(z \leq y) \wedge (y \leq z) \wedge (z \neq y) \Leftrightarrow (z = y) \wedge (z \neq y).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. □

V Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением.

Лемма 3.2.10 *Для любых чисел $x, y, z, k \in \mathbb{R}$ справедливо*

$$(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z),$$

$$(0 < x) \Rightarrow (-x < 0),$$
$$(x \leq y) \wedge (z \leq k) \Rightarrow (x + z) \leq (y + k),$$
$$(x < y) \wedge (z \leq k) \Rightarrow (x + z) < (y + k),$$
$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < xy),$$
$$(0 > x) \wedge (0 > y) \Rightarrow (0 < xy),$$
$$(0 > x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 > xy),$$
$$(x < y) \wedge (z > 0) \Rightarrow (xz < yz),$$
$$(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (xz > yz).$$

Доказательство. Эти свойства предлагается доказать самостоятельно. □

Лемма 3.2.11 $0 < 1$.

Доказательство. Согласно аксиомам, $0 \neq 1$. Предположим, что $1 < 0$, тогда

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (1 \cdot 1 > 0) \Rightarrow (1 > 0).$$

Так как одновременно не может выполняться $1 < 0$ и $1 > 0$, получается противоречие. □

Определение 3.2.1 *По традиции числа, которые больше нуля, называются положительными, а которые меньше нуля – отрицательными.*

Замечание 3.2.1 *Множество вещественных чисел удобно изображать в виде числовой прямой, а сами числа – точками на этой прямой. Поэтому числа часто еще называют точками.*

Замечание 3.2.2 *Следствия аксиомы непрерывности мы получим немного позже (принцип Архимеда, существование иррациональных чисел, теорема Кантора и другие).*

3.3 Расширение множества вещественных чисел

Часто бывает удобно добавить к множеству $\mathbb{R}$ два формальных элемента: символы $+\infty$ и $-\infty$. Чтобы дальнейшая работа с этим множеством была корректной, требуется установить правила для работы с добавленными элементами.

Определение 3.3.1 *Множество* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы* $-\infty, +\infty$ *– минус и плюс бесконечностями соответственно.*

С введенными элементами можно совершать некоторые операции, а именно

$$\begin{gathered}
x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty,\ x \in \mathbb{R},\\
x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,\ x \in \mathbb{R},\\
x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty,\ x > 0,\\
x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty,\ x < 0,\\
x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty,\ x > 0,\\
x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty,\ x < 0,\\
(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\\
(-\infty) + (-\infty) = -\infty,\\
(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,\\
(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,\\
(+\infty)^{-1} = 0,\\
(-\infty)^{-1} = 0.
\end{gathered}$$

Кроме того, устанавливается, что

$$-\infty < x < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Замечание 3.3.1 *Если не важен знак бесконечности, то часто пишут* ∞ *– бесконечность без знака.*

Выражениям $(+\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$ не приписывается никакого значения. Такие выражения называются неопределенностями. Кроме данных неопределенностей, в дальнейшем нам встретятся неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0. Мы поймем мотивировку как определенных операций, так и неопределенных при изучении теории пределов.

3.4 Натуральные числа

Всем известно, что числа вида $1, (1+1), ((1+1)+1)$ и так далее обозначают $1, 2, 3$ и так далее соответственно. Продолжение какого-то процесса далеко не всегда однозначно, поэтому слова «и так далее» нуждаются в пояснении.

Определение 3.4.1 *Множество* $X \subset \mathbb{R}$ *называется индуктивным, если*

$$\forall x \in X \Rightarrow (x+1) \in X.$$

Оказывается справедливой следующая лемма.

Лемма 3.4.1 *Пересечение* $\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ *любого семейства* X_α, $\alpha \in A$, *индуктивных множеств, если оно не пусто, является индуктивным множеством.*

Доказательство. Действительно,

$$\left(x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \Rightarrow (x \in X_\alpha,\ \forall \alpha \in A) \Rightarrow$$

$$((x+1) \in X_\alpha,\ \forall \alpha \in A) \Rightarrow \left((x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right),$$

где переход с первой на вторую строчку справедлив в силу индуктивности всех множеств семейства X_α. $\square$
Теперь можно дать определение множеству натуральных чисел.

Определение 3.4.2 *Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число* 1. *Обозначается множество натуральных чисел, как* $\mathbb{N}$.

Из этого определения, в частности, следует, что множество натуральных чисел – наименьшее индуктивное множество, содержащее единицу.

3.5 Принцип математической индукции

Из определения множества натуральных чисел сразу следует важный принцип, называемый принципом математической индукции. Именно он часто обосновывает слова «и так далее».

Теорема 3.5.1 (Принцип математической индукции) *Если множество $X \subset \mathbb{N}$ таково, что $1 \in X$ и $\forall x \in X \Rightarrow (x+1) \in X$, то $X = \mathbb{N}$.*

Доказательство. Действительно, X – индуктивное множество. Так как $X \subset \mathbb{N}$, а $\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество, то $X = \mathbb{N}$. □

С помощью принципа математической индукции можно доказать, например, что сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное, а также другие известные из школы свойства. Приведем пример.

Теорема 3.5.2 *Сумма натуральных чисел – натуральное число.*

Доказательство. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $m + n \in \mathbb{N}$. Пусть X – множество таких натуральных чисел k, что $m + k \in \mathbb{N}$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что $1 \in X$, так как если $m \in \mathbb{N}$, то $(m+1) \in \mathbb{N}$ в силу индуктивности множества натуральных чисел. Если теперь $k \in X$, то есть $m + k \in \mathbb{N}$, то и $(k+1) \in X$, так как $m + (k+1) = (m+k) + 1 \in \mathbb{N}$. Согласно принципу индукции заключаем, что $X = \mathbb{N}$. □

Следующий пример показывает, как на практике часто применяется (и оформляется) метод математической индукции.

Лемма 3.5.1 (Неравенство Бернулли)

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. База индукции. Пусть $n = 1$, тогда:

$$1 + x \geq 1 + x.$$

Пусть при $n = k$ выполнено

$$(1+x)^k \geq 1 + kx.$$

Покажем, что при $n = k+1$ выполняется

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

Действительно,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) =$$
$$= 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k+1)\cdot x + kx^2.$$

Так как $k \in \mathbb{N}$, то $kx^2 \geq 0$, а значит:

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x,$$

откуда и следует требуемое. □

3.6 Целые, рациональные и иррациональные числа

Определение 3.6.1 *Множеством целых чисел называется объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и нуля. Множество целых чисел обозначается, как $\mathbb{Z}$.*

Как было отмечено, сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное, поэтому сумма и произведение целых чисел есть число целое.

Определение 3.6.2 *Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$ называются рациональными. Рациональные числа обозначаются, как $\mathbb{Q}$.*

Как известно, число $m \cdot n^{-1}$ записывают в виде отношения $\frac{m}{n}$, которое называется рациональной дробью. Правила действий с рациональными дробями, подробно изученные в школе, сразу вытекают из соответствующих свойств и аксиом вещественных чисел.

Пример 3.6.1 *Доказать, что*

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Действительно,

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \left(m_1 \cdot n_1^{-1}\right) \cdot \left(m_2 \cdot n_2^{-1}\right) = (m_1 \cdot m_2) \cdot (n_1 \cdot n_2)^{-1} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}.$$

Замечание 3.6.1 *Множество рациональных чисел удовлетворяет первым шести аксиомам множества вещественных чисел. Однако именно седьмая аксиома, аксиома непрерывности, устанавливает, что кроме рациональных чисел существуют так называемые иррациональные.*

Определение 3.6.3 *Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными и обозначаются $\mathbb{I}$.*

Ниже показано, что существует положительное действительное число $s \in \mathbb{R}$, квадрат которого равен 2 и что $s \notin \mathbb{Q}$, что доказывает существование иррациональных чисел.

Лемма 3.6.1 $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

Доказательство. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0 : x^2 < 2\}$ и $Y = \{y \in \mathbb{R},\ y > 0 : y^2 > 2\}$. Тогда $1 \in X$, $2 \in Y$, и X, Y – непустые множества. Так как, для $x > 0$ и $y > 0$ справедливо

$$(x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2),$$

то $\forall x \in X,\ \forall y \in Y \Rightarrow (x < y)$. По аксиоме полноты $\exists s \in \mathbb{R}:\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ x \le s \le y$. Достаточно показать, что $s^2 = 2$. Если бы было $s^2 < 2$, то, например, квадрат числа $s + \frac{2-s^2}{3s}$, большего чем s, был бы меньше 2. Ведь $1 \in X \Rightarrow 1^2 \le s^2 < 2$ и $0 < \Delta = 2 - s^2 \le 1$, значит

$$\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right)^2 = s^2 + 2\cdot\frac{\Delta}{3} + \left(\frac{\Delta}{3s}\right)^2 < s^2 + 3\cdot\frac{\Delta}{3} = s^2 + \Delta = 2.$$

Следовательно, $\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right) \in X$, что несовместимо с неравенством $x \le s$, верного для любого $x \in X$.

Случай $2 < s^2$ аналогичен, достаточно рассмотреть квадрат числа $s - \frac{s^2-2}{3s}$.

Таким образом, остается единственная возможность $s^2 = 2$. Осталось показать, что $s \notin \mathbb{Q}$. Пусть $s \in \mathbb{Q}$ и $\frac{m}{n}$ – несократимое представление s. Тогда $m^2 = 2n^2$, а следовательно m^2, а значит и m делятся на $2 \Rightarrow m = 2k$, тогда $2k^2 = n^2$ и по той же причине n должно делиться на 2, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$. □

3.7 Бином Ньютона

Определение 3.7.1 *Факториалом числа $n \in \mathbb{N}$ называют число, равное*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

и обозначают $n!$.

Так, например, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$. Для удобства полагают, что $0! = 1$.

Замечание 3.7.1 *Полезно заметить, что $n! = n \cdot (n-1)!$ при $n \ge 1$.*

Определение 3.7.2 *Величины*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

называют биномиальными коэффициентами.

Ниже приведены некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

Лемма 3.7.1 *Справедливы следующие свойства:*

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

3. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Доказательство. Все свойства сразу следуют из определения C_n^k. Ниже доказано последнее.

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Остальные свойства предлагается доказать самостоятельно. □

Теорема 3.7.1 (Бином Ньютона) *Для $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n.$$

Доказательство. Доказательство проводится по индукции.
База индукции выполняется, так как

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b.$$

Пусть при $n = m$ выполнено равенство

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m.$$

Достаточно показать, что при $n = m+1$ справедливо равенство

$$(a+b)^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + \ldots + C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \ldots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.$$

Доказательство.

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m (a+b) =$$
$$= (C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m)(a+b) =$$
$$= C_m^0 a^{m+1} + C_m^1 a^m b + C_m^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^m a b^m +$$
$$+ C_m^0 a^m b + C_m^1 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^{m-1} a b^m + C_m^m b^{m+1} =$$
$$= C_m^0 a^{m+1} + (C_m^1 + C_m^0) a^m b + (C_m^2 + C_m^1) a^{m-1} b^2 + \ldots + (C_m^k + C_m^{m-k+1}) a^{m-k+1} b^k +$$
$$+ \ldots + (C_m^m + C_m^{m-1}) a b^m + C_m^m b^{m+1} =$$
$$= C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \ldots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.$$

□

3.8 Промежутки числовой прямой. Окрестности

Определение 3.8.1 *Множество*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$$

называется отрезком.

Определение 3.8.2 *Множество*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

называется интервалом.

Определение 3.8.3 *Множества*

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$$

называются полуинтервалами.

Определение 3.8.4 *Множества*

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

и

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

называются лучами.

Определение 3.8.5 *Окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется произвольный интервал, содержащий x_0.*

Окрестность точки x_0 обозначается заглавными латинскими буквами, например $U(x_0), V(x_0)$.

Определение 3.8.6 *Эпсилон-окрестностью (или ε-окрестностью) точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$.*

ε-окрестность точки x_0 обозначается заглавными латинскими буквами с индексом ε, например $U_\varepsilon(x_0), V_\varepsilon(x_0)$. Для элементов $\pm\infty, \infty$ понятия окрестности вводится отдельно.

Определение 3.8.7 *Окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется произвольное множество вида*

$$U(+\infty) = (a, +\infty].$$

Определение 3.8.8 *Окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется произвольное множество вида*

$$U(-\infty) = [-\infty, a).$$

Определение 3.8.9 *Окрестностью элемента ∞ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется произвольное множество вида*

$$U(\infty) = [-\infty, a); (b, +\infty], \ a < b.$$

Кроме того, вводится понятие ε-окрестности ($\varepsilon > 0$).

Определение 3.8.10 *ε-окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество*

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right].$$

Определение 3.8.11 *ε-окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида*

$$U(-\infty) = \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Определение 3.8.12 *ε-окрестностью элемента ∞ в $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество вида*

$$U(\infty) = \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right); \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right].$$

Полезно пояснить, почему для универсальности берется величина $\frac{1}{\varepsilon}$. Рассматривая $x_0 \in \mathbb{R}$, при уменьшении ε, окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ тоже уменьшается. Аналогично, при уменьшении ε величина $\frac{1}{\varepsilon}$ увеличивается, а значит окрестности $U_\varepsilon(+\infty), U_\varepsilon(-\infty), U_\varepsilon(\infty)$ уменьшаются.

Определение 3.8.13 *Проколотой окрестностью точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $U(x_0) \setminus \{x_0\}$, то есть произвольная окрестность точки x_0 без самой этой точки. Аналогично, проколотой ε-окрестностью точки x_0 называется $U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.*

Проколотая окрестность и ε-окрестность обозначается, как $\overset{o}{V}(x_0), \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)$.

3.9 Модуль вещественного числа

Определение 3.9.1 *Модулем вещественного числа x называется число, равное x, если оно положительно или равно нулю, и равное $-x$, если число x отрицательно, то есть*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Теорема 3.9.1 *Справедливы следующие основные свойства модуля:*

1. $|x| \geq 0$, *причем* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $-|x| \leq x \leq |x|$.
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$.
5. $|xy| = |x||y|$.
6. $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$.
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(неравенство треугольника).*
8. $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Доказательство. Свойства 1 - 6 сразу следуют из определения и остаются в качестве упражнения.
7. Для доказательства этого свойства достаточно сложить неравенства $\pm x \leq |x|$ и $\pm y \leq |y|$, получим

$$\pm(x + y) \leq |x| + |y|,$$

что и означает требуемое.
8. Для доказательства данного пункта удобно воспользоваться свойством 7.

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x - y| \geq |x| - |y|.$$

Поменяв числа x и y местами, получится

$$|x - y| \geq |y| - |x|.$$

Эти неравенства и означают, что

$$|a - b| \geq ||a| - |b||.$$

□

3.10 Контрольные вопросы и задачи

1. Докажите, что число $\sqrt{5}$ является иррациональным.
2. Проверьте, что $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ – индуктивные множества.
3. Докажите, что произведение натуральных чисел – натуральное число.
4. Докажите свойства модуля 1 – 6.
5. Проверьте, что рациональные числа $\mathbb{Q}$ удовлетворяют всем аксиомам действительных чисел, кроме аксиомы полноты.
6. Покажите, что $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.
7. Удовлетворяет ли множество $[0, 1]$ аксиомам множества вещественных чисел?

4 ОГРАНИЧЕННОСТЬ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ. СУПРЕМУМ И ИНФИМУМ. ПРИНЦИП АРХИМЕДА

4.1 Ограниченность числовых множеств

Определение 4.1.1 *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leq M.$$

Число M называется верхней границей для X.
Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \geq m.$$

Число m называется нижней границей для X.

Определение 4.1.2 *Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если*

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow m \leq x \leq M.$$

Пример 4.1.1 *Пусть $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$. Ясно, что это множество ограничено как сверху, например, числом* 1, *так и снизу, например, числом* 0.

Ниже приведена лемма, которая будет часто использоваться в дальнейшем.