26 февраля.

Дз 3.

1. $\frac{1}{4} = 0,(02)_3 \Rightarrow \frac{1}{4} \in K$

$\frac{12}{13} = 0,2(202)_3 \Rightarrow \frac{12}{13} \in K$

Т.к. в троичной записи нет 1

2. $\mu_1 K = 0$

$\exists (a,b) \subset K, \mu_1 (a,b) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_1 K > 0$, т.к. $\mu_1 K > \mu_1 (a,b)$ по

монотонности меры μ_1

3. а) $K\left(\frac{1}{81}\right)$

$\frac{1}{81} = 0,0001_3 \qquad 0,0001_2 = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow K\left(\frac{1}{81}\right) = \frac{1}{16}$

б) $K(0,1)$

$0,1 = 0,(0022)_3$ Заменяем все 2 на

1, пока не встретим 1.

$0,(0011)_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(2^{-3-4n} + 2^{-4-4n}\right) =$

$$= 2^{-3} \cdot \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-4n} = \frac{3}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}} = \frac{3}{16} \cdot \frac{16}{15} = 0,2$$

$K(0,1) = 0,2)$

в) $K(0,01)$

$0,01 = 0,000021\ldots_3$

$0,000011_2 = \frac{3}{64}$

$K(0,01) = \frac{3}{64}$

4. $K(x)$ - "убывает" => μ мера, и объём (очевидно)
если K непр. слева (по примеру и справа)
3.1.2 с. 11 (у конспекта) => μ мера,
т.к. K непр. на $[0,1]$

∅, однопоточные мн-ва и мн-ва,
точицы которых принадлежат
одному и тому же горизонталь-
ному участку лестницы, имеют
меру 0.

5. $\int_0^1 x \, K(x) dx = \int_0^1 x (1 - K(1-x)) dx =$

$= \int_0^1 x \, dx - \int_0^1 x \, K(1-x) dx =$

$$= \frac{1}{2} - \int\limits_1^0 (1-x)\, k(x)\, d(1-x) =$$

$$= \frac{1}{2} - \int\limits_0^1 k(x)\, dx + \int\limits_{\frac{1}{3}}^1 k(x)\, dx$$

$$I = \int\limits_0^1 x\, k(x)\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} x\, k(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x\, k(x)\, dx + \int\limits_{\frac{2}{3}}^1 x\, k(x)\, dx$$

1)
$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} x\, k(x)\, dx = \int\limits_0^1 \frac{t}{3}\, k\!\left(\frac{t}{3}\right) \frac{dt}{3} =$$

$$= \frac{1}{18} \int\limits_0^1 t\, k(t)\, dt = \frac{I}{18}$$

$$k(3x) = 2\, k(x) \Rightarrow \frac{k(x)}{2} = k\!\left(\frac{x}{3}\right)$$

2)
$$\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x\, k(x)\, dx = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12}$$

3)
$$\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 x\, k(x)\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \left(t + \frac{2}{3}\right) k\!\left(t + \frac{2}{3}\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \left(t + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + k(t)\right) dt =$$

$$k\!\left(t + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} + k(t)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}t + t\, k(t) + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, k(t) \right) dt =$$

$$= \left. \frac{t^2}{4} \right|_0^{\frac{1}{3}} + \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{I}{18} + \left. \frac{1}{3}t \right|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{3}} k(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{I}{18} + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{36} + \frac{I}{18}$$

$$I = \frac{I}{18} + \frac{1}{12} + \frac{7}{36} + \frac{I}{18}$$

$$\frac{16}{18} I = \frac{10}{36} \implies I = \frac{5}{16}$$