17 сентября.

Матан.

Дз №2.

1. $x^{(k)} = \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k};\ \frac{k}{k+1};\ \frac{\sin k}{\sqrt{k}};\ \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k}\right)$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{(k)} = 0 \qquad \lim\limits_{k\to\infty} x_2^{(k)} = 1$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_3^{(k)} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\overset{\text{огр.}}{\sin k}}{\sqrt{k}} = \cancel{\lim}\ 0$ ← беск. малая

$\lim\limits_{k\to\infty} x_4^{(k)} = e$

$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = (0, 1, 0, e)$

<u>Ответ:</u> $(0, 1, 0, e)$

3. $M \subset X \qquad x \in \partial M$

От противного. $\exists\, x : x \notin \partial M$ и x – предельная точка ∂M.

Т.к. x – предельная, то $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, U_\varepsilon(x) : \exists\, y \in \partial M \cap U_\varepsilon(x)$.

Т.к. $y \in \partial M$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U_\varepsilon(y)$:

$\exists\, z \notin M : z \in U_\varepsilon(y)$ и $\exists\, w \in M : w \in U_\varepsilon(y)$

т.е. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U_\varepsilon(x) : \exists\ \cancel{y \in U_\varepsilon(x)}$

$z \in U_{2\varepsilon}(x) \wedge z \notin M$ и $\exists\, w \in U_{2\varepsilon}(x) \wedge$ $w \in M \Rightarrow x \in \partial M$ — противоречие $\Rightarrow \partial M$ замкнуто, ч.т.д.

5. Рассмотрим предел по направлению $x = y$ $\left(f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$

$$\lim_{\substack{\cancel{(x,y)\to(0,0)} \\ x\to 0}} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

по напр. $y = x^2$ $\left(f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6 + (x - x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + (1-x)^2} =$$

$= 0$

$0 \neq 1 \Rightarrow$ двойной предел не сущ.

6. $$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x^8 + x^5 + x^4 + y^4 + y^5 - y^8}{x^4 + y^4} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y^4 + y^5 - y^8}{y^4} = 1 = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y)$$

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

7. $f(x,y) = \dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^4}$ в ∞

$\lim\limits_{n\to\infty} f(n, 0) = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(0, n) = 0$ $\Rightarrow$ двойной предел не сущ.

8. $f(x,y) = \dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^4}$ $x \to \infty$, $y \to \infty$

$f(n,n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ не равны => двойной предел не сущ.

$f(n^2, n) \to \infty$

2. От противного.

A - открытое $B = \bar{A}$

Пусть $\exists x \notin B$, где x - предельная точка B

$x \notin B \Rightarrow x \in A$

т.к. A - откр., то $\exists B_r(x) \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists U_\varepsilon(x)$: все её точки $\in A$, т.е.

$\nexists y \in U_\varepsilon(x)$: $y \in B \Rightarrow x$ не предельная. Противоречие.

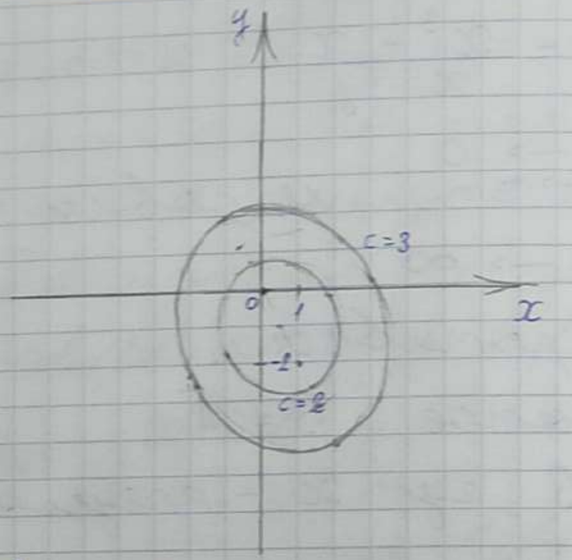
Обратно аналогично.

4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$

$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} = C$

Эллипс по определению. Фокусы в точках $(0,0)$ и $(1,-2)$.

Сумма расстояний d от фокусов равна C.



9. $f(x,y) = \dfrac{xy}{1-(1+xy)^{\frac{1}{3}}}$ $\quad (x,y)\to(0,0)$

$\exists\; g(t) = \dfrac{t}{1-(1+t)^{\frac{1}{3}}} \sim$ $\quad (1+t)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}t$

$\sim \dfrac{t}{-\frac{1}{3}t} \to -3$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -3$

6. $\dfrac{x^8 + x^5 + x^4 + y^4 + y^5 - y^8}{x^4 + y^4} = \dfrac{x^8 + x^5 + y^5 - y^8}{x^4 + y^4} + 1 \leqslant$

$|x^5| = |x^4 \cdot x| \leqslant |x| \cdot (x^4 + y^4)$

$\ldots$

$\leqslant 1 + |x^4| + |x| + |y| - |y^4| < \varepsilon$

$\underline{\lim f(x, y) = 1}$