Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лекции для студентов Университета ИТМО специальностей с повышенной подготовкой по математике

М. В. Бабушкин

5 октября 2021 г.

Ссылка на обновляемую версию:
https://mvbabushkin.xyz/uploads/diffeqs.pdf

Содержание

Обозначения

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, неотрицательных целых, целых, вещественных, комплексных чисел соответственно.
- $\mathbb{R}^n_r$ — n-мерное вещественное арифметическое пространство, общий элемент которого обозначается через $r = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- $|r| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ — норма вектора $r = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- $\langle a, b\rangle$ — промежуток вещественной прямой, то есть любое из множеств $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$ или $[a, b)$, при этом допускаются значения $a = -\infty$ и $b = +\infty$, если соответствующие скобки круглые.
- $[a : b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$.
- $a \cdot b$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$.
- $C(X)$ — пространство непрерывных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$.
- $C^k(X)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций $f\colon X \to \mathbb{R}$.
- $C(X \to \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных вектор-функций $f\colon X \to \mathbb{R}^n$.
- $C^k(X \to \mathbb{R}^n)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций $f\colon X \to \mathbb{R}^n$.
- $C\langle a, b\rangle$ — то же самое, что и $C(\langle a, b\rangle)$ (аналогично понимаются и другие подобные обозначения).
- $\operatorname{dom} f$ — область определения функции f.
- f' — матрица Якоби отображения f.
- $\operatorname{Lip}(D)$ — множество функций, определённых на D и удовлетворяющих условию Липшица.
- $\operatorname{Lip}_r(D)$ — множество функций, определённых на D и удовлетворяющих условию Липшица по переменной r (равномерно относительно других переменных).
- $\operatorname{Lip}_{loc}(G)$, $\operatorname{Lip}_{r,loc}(G)$ — множества функций, определённых на G и удовлетворяющих условию Липшица локально по всем переменным, либо по переменной r (равномерно относительно других переменных).
- $M_{n,m}(X)$ — множество матриц размера $n \times m$ с элементами из X.
- $M_n(X)$ — множество квадратных матриц размера n с элементами из X.
- $\operatorname{sgn} x = x/|x|$, если $x \neq 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$.
- $\operatorname{spec} A$ — спектр матрицы A.
- $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A.
- $\dot{x} = \frac{d}{dt}x$.
- $\Leftrightarrow$ — равносильно.

Нумерация формул имеет вид $(c.n)$, где c — номер темы, n — номер формулы в соответствующей теме. Нумерация утверждений (примеров, замечаний, ...) имеет вид $c.s.n$, где c — номер темы, s — номер параграфа, n — номер утверждения (примера, замечания, ...). Следствия из утверждений нумеруются в виде $c.s.n.m$, где $c.s.n$ — нумерация утверждения, из которого делается следствие, а m — номер следствия. Конец обсуждения примера отмечается символом $\triangle$. Конец доказательства отмечается символом $\square$.

Сокращения

- ЗК — задача Коши;
- ЛОС — линейная однородная система;
- ЛОУ — линейное однородное уравнение;
- ЛС — линейная система;
- ЛУ — линейное уравнение;
- УПД — уравнение в полных дифференциалах;
- УРП — уравнение с разделёнными переменными;
- ФСР — фундаментальная система решений.

Тема 1: Введение. Уравнения 1-го порядка

Содержание

§1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Предположим, что мы изучаем какое-либо явление окружающего нас мира. Пусть в этом явлении нас интересует некоторая величина, которую мы обозначим через y. Это может быть температура какого-то тела, атмосферное давление, количество особей в биологической популяции или напряжение на участке электрической цепи. Во всех этих примерах величина y зависит от некоторых параметров, например, от момента времени или положения в пространстве. Другими словами, это не просто число, а функция.

Определить эту функцию непосредственно удаётся не всегда. Но часто бывает возможно установить связь между этой функцией, её производными и независимой переменной. Уравнение, выражающее такую связь, называется *дифференциальным уравнением*.

Рассмотрим простую модель, описывающую изменение численности биологической популяции. Обозначим через $y(t)$ количество её особей в момент времени t. Предположим, проведённый эксперимент показал, что прирост числа особей пропорционален их количеству в данный момент, то есть при малом изменении времени Δt

$$y(t+\Delta t) - y(t) \approx ky(t)\Delta t.$$

Разделив обе части на Δt, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky.$$

Пусть экспериментальные данные указывают ещё на то, что данное равенство тем точнее, чем меньше шаг Δt. Тогда естественно предположить, что при устремлении Δt к нулю получится уравнение, наиболее точно описывающее искомый закон $y(t)$. Переходя к пределу, находим

$$y' = ky.$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение. Функция, описывающая численность популяции, которую мы ищем основываясь на исходных предположениях о приросте числа особей, должна удовлетворять этому уравнению.

Что означают слова «функция удовлетворяет уравнению»? Если взять, например, функцию $\varphi(t) = kt$ и подставить её в полученное уравнение вместо y, то придём к равенству $k = k^2 t$, которое верно при $t = 1/k$, и только при таком значении t. Однако, в рассматриваемом примере, конечно, нас интересует закон, справедливый при *любых* значениях t. Другими словами, искомая функция должна при подстановке обращать уравнение в *тождество*.

Легко убедиться, что при подстановке функции $\varphi(t) = e^{kt}$ вместо y получается тождество (верное при $t \in \mathbb{R}$), то есть φ является его решением. Но такая функция не единственная: всевозможные решения даются формулой

$$y = Ce^{kt},$$

где C — произвольная постоянная (рис. 1.1). Для того, чтобы её вычислить, нужно иметь некоторую дополнительную информацию.

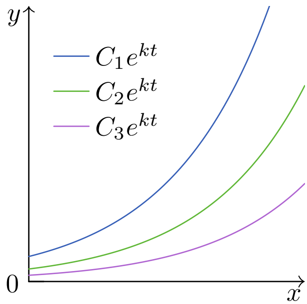

Рис. 1.1. Графики некоторых решений уравнения $y' = ky$

Рассмотрим более конкретный пример.

Пример 1.1.1. Пусть масса дрожжей, помещённых в раствор сахара, в начальный момент времени была 25 грамм. Через полчаса их масса стала 42 грамма. В какой момент времени масса дрожжей будет в два раза больше изначальной?

Решение. Для получения ответа на данный вопрос воспользуемся только что построенной моделью. А именно, будем предполагать, что масса дрожжей $m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m' = km,$$

а значит, $m = Ce^{kt}$. Поскольку $m(0) = 25$, то $C = m(0) = 25$, следовательно,

$$m(t) = 25e^{kt}.$$

Найдём ещё коэффициент k. Из условия $m(30) = 42$ получаем

$$k = \frac{\ln(42/25)}{30} \approx 0{,}0173.$$

Таким образом, масса дрожжей в момент времени t равна

$$m(t) = 25e^{0{,}0173t}.$$

Требуется найти такое значение t_2, что $m(t_2) = 2 \cdot 25 = 50$. Имеем $50 = 25\exp(0{,}0173t_2)$, отсюда

$$t_2 = \frac{\ln 2}{0{,}0173} \approx 40,$$

то есть примерно через 40 минут следует ожидать удвоение массы дрожжей. △

Конечно, полученная зависимость имеет ограниченную область применимости. В реальной жизни масса дрожжей не может неограниченно возрастать, но полученные значения $m(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Дифференциальное уравнение было решено верно, а причина неполного соответствия найденной зависимости и настоящей в том, что само исходное уравнение описывает действительность лишь приближённо. Многие факторы не были учтены при его выводе. Поэтому пользоваться найденной функцией можно лишь до тех пор, пока влияние этих факторов незначительно.

Многие законы физики формулируются в виде дифференциальных уравнений. Например, второй закон Ньютона

$$F = ma,$$

связывающий ускорение тела a, его массу m и приложенные силы F, есть ни что иное, как дифференциальное уравнение второго порядка, поскольку ускорение — это вторая производная от перемещения тела.

Пример 1.1.2. Рассмотрим пружину с коэффициентом упругости k, один конец которой закреплён, а к другому подвешен груз массой m (рис. 1.2). Пружину оттягивают на небольшое расстояние и отпускают. Найти закон движения груза.

Решение. Направим ось Ox вертикально вниз, а за начало отсчёта примем положение равновесия груза. В любой момент времени на груз действует сила тяжести mg, а также сила упругости пружины $-k\Delta x$, по закону Гука пропорциональная величине растяжения $\Delta x = x - x_0$, где x_0 — координата свободного конца пружины в нерастянутом положении.

Применяя второй закон Ньютона, находим уравнение движения груза

$$mx'' = -k(x - x_0) + mg.$$

Если груз покоится в положении равновесия, то

$$0 = -k(0 - x_0) + mg,$$

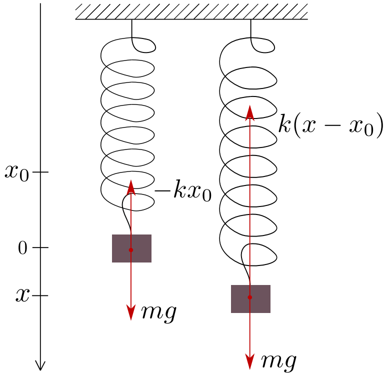

Рис. 1.2. Колебания пружины

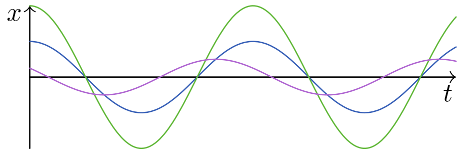

Рис. 1.3. Графики некоторых решений уравнения $mx'' = -kx$.

поэтому $kx_0 = -mg$. Исключая mg из уравнения движения, находим

$$mx'' = -kx.$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что функции вида

$$x(t) = C_1 \cos\left(t\sqrt{k/m} + C_2\right).$$

подходят в качестве решений. △

В отличие от предыдущего примера, здесь имеется две произвольных постоянных. Причина этого в том, что полученное уравнение движения содержит вторую производную. Постоянные C_1 и C_2 определятся однозначно, если известны *начальные условия*, то есть положение груза и скорость в момент, когда его отпустили.

Дифференциальные уравнения возникают во многих областях знания, где приходится изучать эволюцию какого-либо процесса. Данный курс посвящён изучению уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от одной вещественной переменной, то есть *обыкновенных дифференциальных уравнений.*

§1.2. Уравнение первого порядка и его решение

Определение. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка*** называют уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1}$$

Определение. Функция φ — ***решение уравнения*** (1.1), если

- $\varphi \in C^1(a, b)$;
- $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ на (a, b).

Другими словами, решением уравнения (1.1) называют гладкую функцию φ, определённую на интервале (a, b), подстановка которой вместо y обращает уравнение в тождество на (a, b).

Замечание. В указанном определении вместо чисел a и b могут участвовать символы $\pm\infty$.

Замечание. Знак тожества «$\equiv$» используют вместо знака равенства «$=$» когда хотят подчеркнуть, что равенство выполняется не в отдельных точках, а *во всех* точках некоторого множества.

Замечание. Решения также рассматривают на отрезках и полуинтервалах. В этом случае под производной в крайних точках, включённых в промежуток, необходимо понимать одностороннюю производную.

Замечание. В уравнении (1.1) символы x, y и y' — три различные *независимые* переменные. Буква y никак не связана с буквой x, а символ y' не обозначает производную до тех пор, пока не произведена подстановка конкретной функции. Подстановка функции φ в уравнение означает, что нужно заменить символ y на значение $\varphi(x)$, а символ y' на значение производной $\varphi'(x)$.

Сейчас мы использовали букву φ для обозначения функции. Однако, как правило, для решения уравнения мы не будем вводить отдельного обозначения, а будем использовать тот же символ, который участвует в уравнении. То есть буквой y будет обозначаться как независимая переменная (или координата), так и функция (конкретный смысл обычно ясен из контекста).

Определение. ***Интегральная кривая*** уравнения (1.1) — график его решения.

Определение. ***Общим решением*** уравнения (1.1) называют множество всех его решений.

Если желают подчеркнуть, что речь идёт о каком-то одном конкретном решении, то говорят о *частном решении* уравнения. Во многих случаях решение не выражается в явном виде, а задаётся неявно из некоторого соотношения, которое иногда называют *частным интегралом.*

Определение. ***Общим интегралом*** уравнения (1.1) будем называть соотношение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

которое неявно задаёт решения при некоторых значениях параметра C.

Замечание. Общий интеграл не всегда описывает *общее решение* уравнения[1]. Множество всех решений может быть шире, чем множество решений, определяемых общим интегралом.

[1] Существуют и другие определения понятий «общее решение» и «общий интеграл». В нашем курсе мы будем придерживаться определений, данных в этом параграфе.

Пример 1.2.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = x.$$

Ясно, что его решением будет любая первообразная правой части[1]:

$$y = \int x\,dx + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Таким образом, мы имеем целое семейство решений (рис. 1.4).

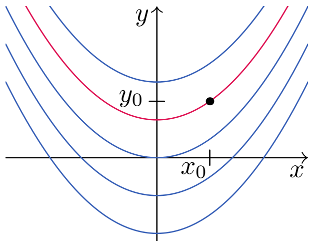

Рис. 1.4. Семейство решений уравнения $y' = x$ и частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$

Формально, *общее решение* — это множество

$$\left\{y\colon (a,b) \to \mathbb{R} \mid y(x) = x^2/2 + C,\ a < b,\ C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Но обычно мы будем записывать общее решение короче:

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функции

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2},\ \ y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2,\ \ y_3(x) = \frac{x^2}{2} - 5$$

представляют различные *частные решения*. Соотношение $x^2 - 2y + C = 0$ даёт пример *общего интеграла*. △

Пример 1.2.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

и функцию $\varphi(x) = 1/x$, заданную на множестве $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Несмотря на тождество $\varphi'(x) \equiv -1/x^2$ на D, функция φ не является решением данного дифференциального уравнения, так как решение по определению должно быть задано на промежутке. Решениями будут её сужения, например, $\varphi|_{(-\infty,0)}$, $\varphi|_{(0,+\infty)}$. △

[1] Под символом $\int f(x)\,dx$ или $\int f$ мы всегда будем понимать какую-нибудь одну первообразную, не важно какую, а постоянную интегрирования приписывать отдельно в качестве слагаемого.

§1.3. Уравнение в нормальной форме

Определение. Уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

разрешённое относительно производной, называют ***нормальным уравнением*** (уравнением в нормальной форме).

Интегральные кривые уравнения (1.2) могут проходить лишь в той части координатной плоскости, где определена его правая часть — функция f.

Определение. ***Областью задания*** *уравнения в нормальной форме* (1.2) будем называть область определения $\operatorname{dom} f$ его правой части.

Пример 1.3.1. Уравнение $y' = -1/x^2$ является уравнением типа (1.2). Его правая часть, функция $f(x, y) = -1/x^2$, определена на множестве

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x = 0\}. \qquad \triangle$$

Замечание. Область задания уравнения (1.2) — подмножество плоскости, даже если правая часть фактически не зависит от одной из переменных, как в рассмотренном примере.

Установим геометрический смысл уравнения (1.2) и его решения. Допустим, что функция $y = \varphi(x)$ является его решением, то есть при любом x из некоторого интервала (a, b) справедливо равенство

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Зафиксируем некоторую точку на интегральной кривой с координатами (x_0, y_0), где $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Таким образом, значение функции f в точке (x_0, y_0) определяет тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в этой точке (рис. 1.5).

Если каждой точке (x, y) области определения функции f поставить в соответствие вектор, направленный под углом $\operatorname{arctg} f(x, y)$, то получится так называемое ***поле направлений*** уравнения (1.2). Таким образом, задать уравнение (1.2) — всё равно, что задать поле направлений.

Задачу нахождения его решений тогда можно сформулировать так: найти все гладкие кривые, проходящие в области задания уравнения, которые в каждой своей точке касаются вектора поля направлений (рис. 1.6).

Векторное поле даёт представление о том, как примерно ведут себя интегральные кривые. Оно может быть использовано для предварительного качественного исследования дифференциального уравнения, построения эскизов интегральных кривых и для контроля найденных решений.

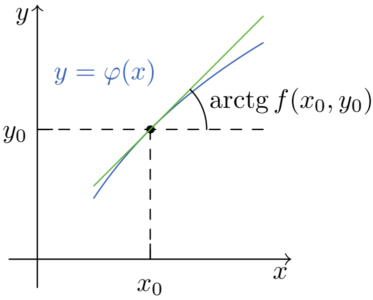

Рис. 1.5. Правая часть уравнения определяет угловой коэффициент касательной

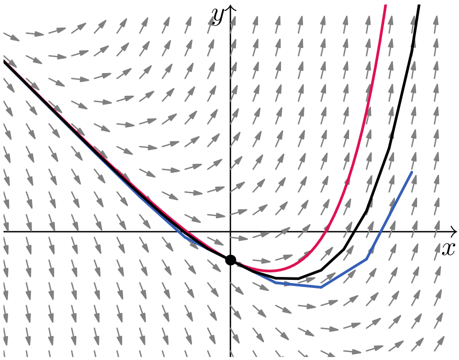

Рис. 1.6. Поле направлений уравнения $y' = y + x$; интегральная кривая, проходящая через точку $x_0 = 0$, $y_0 = -1/2$ (красным цветом); ломаные Эйлера с шагом $h = 0{,}8$ (синим цветом) и $h = 0{,}4$ (чёрным цветом), проходящие через эту же точку

Поясним подробнее, как построить приближение к интегральной кривой. Взяв некоторую точку (x_0, y_0) в качестве начальной, будем двигаться вправо от неё по направлению поля до точки с абсциссой $x_1 = x_0 + h$, ординату которой обозначим через y_1. От точки (x_1, y_1) продолжим движение вправо до точки (x_2, y_2), где $x_2 = x_1 + h$, но теперь по направлению поля в (x_1, y_1). Продолжая этот процесс дальше, получаем ***ломаную Эйлера***. Аналогично она строится и влево от точки (x_0, y_0).

Ломаная Эйлера даёт приближение интегральной кривой уравнения, проходящей через точку (x_0, y_0). Приближение тем точнее, чем меньше берётся шаг h (рис. 1.6). Исходя из условия

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y_k),$$

получаем формулы для координат вершин ломаной:

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h.$$

§1.4. Уравнение в дифференциалах

Если представить производную как отношение дифференциалов, то уравнение $y' = f(x,y)$ запишется в виде

$$f(x,y)dx - dy = 0.$$

Можно придать этой записи более общую форму.

Определение. Уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{1.3}$$

называют ***уравнением в дифференциалах***.

Определение. Функция φ — ***решение уравнения*** (1.3), если

- $\varphi \in C^1(a,b)$;
- $P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на (a,b).

Замечание. Выражение во втором пункте определения получается, если в уравнении (1.3) сделать подстановку $y = \varphi(x)$, а затем разделить полученное уравнение на dx.

Определение. ***Область задания*** *уравнения в дифференциалах* (1.3) — множество $\operatorname{dom} P \cap \operatorname{dom} Q$.

Переменные x и y входят в уравнение (1.3) равноправно, поэтому его решением называется не только функция вида $y = \varphi(x)$, но и функция вида $x = \psi(y)$. Соответствующее определение аналогично приведённому.

Пример 1.4.1. Рассмотрим уравнение

$$x\,dx + y\,dy = 0. \tag{1.4}$$

Область его задания — вся плоскость $\mathbb{R}^2$.

Убедимся, что функция $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ при любом $R > 0$ является *решением* на интервале $(-R,R)$. Действительно, $y \in C^1(-R,R)$. Её дифференциал

$$dy = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx.$$

При подстановке в исходное уравнение получаем равенство

$$x\,dx + \sqrt{R^2 - x^2}\,\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 0,$$

верное для всех $x \in (-R,R)$.

Аналогично устанавливается, что функция $y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, а также функции $x(y) = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$ — решения на интервале $(-R,R)$. △

Графики решений вида $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$ могут быть частями одной гладкой кривой. В рассмотренном примере графики всех упомянутых функций при одинаковом значении R — это части окружности радиуса R с центром в начале координат (рис. 1.7). Такую кривую естественно считать интегральной кривой, а её параметризацию — решением.

Определение. Вектор-функция $r(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ называется ***параметрическим решением уравнения*** (1.3), если

- $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$ и $r'(t) \neq 0$ для всех $t \in (\alpha, \beta)$;
- $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$ на (α, β).

Например, вектор-функция $r(t) = (R\cos t, R\sin t)$ — параметрическое решение уравнения (1.4) на $\mathbb{R}$.

Определение. ***Интегральной кривой*** уравнения (1.3) называют годограф её параметрического решения.

Замечание. Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1.3), то $r(t) = (t, \varphi(t))$ — параметрическое решение того же уравнения, годограф которого совпадает с графиком функции φ. Следовательно, график решения (обычного, а не параметрического) уравнения (1.3) — это интегральная кривая.

Изучать уравнение (1.3) — всё равно что изучать пару уравнений

$$y'_x = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad \text{если } Q(x,y) \neq 0,$$
$$x'_y = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \quad \text{если } P(x,y) \neq 0.$$

Если же в какой-то точке одновременно и функция P, и функция Q обращаются в ноль, то в этой точке интегральные кривые ведут себя «по-особенному», в том числе могут и вовсе не проходить через неё.

Определение. Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется ***особой точкой*** уравнения (1.3), если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Уравнение (1.4) имеет единственную особую точку в начале координат, через неё не проходит ни одна интегральная кривая (рис. 1.7).

Поясним геометрический смысл уравнения (1.3). Пусть $r(t) = (x(t), y(t))$ — его параметрическое решение на (α, β). Тогда при любом $t \in (\alpha, \beta)$

$$P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0. \tag{1.5}$$

Рассмотрим векторное поле $F = (P, Q)$. Тогда равенство (1.5) равносильно

$$F(r(t)) \cdot r'(t) = 0.$$

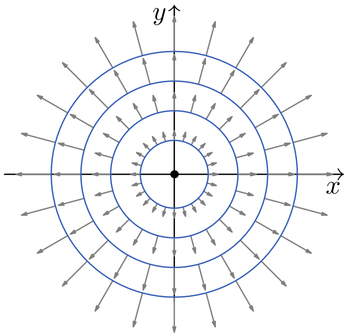

Рис. 1.7. Интегральные кривые и особая точка уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$.

Вектор $r'(t)$ касается интегральной кривой в точке $(x(t), y(t))$. Значит, любая интегральная кривая уравнения (1.3) в каждой своей точке (x, y) перпендикулярна вектору $F(x, y)$ (рис. 1.7).

Таким образом, задать уравнение (1.3) — всё равно, что задать поле перпендикуляров.

Определение. Два дифференциальных уравнения ***эквивалентны*** (или ***равносильны***), если они имеют одинаковую область задания и одинаковое множество интегральных кривых.

Утверждение 1.4.1. *Уравнение*

$$y' = f(x, y) \tag{1.6}$$

эквивалентно уравнению

$$dy = f(x, y)\,dx. \tag{1.7}$$

Доказательство. Данные уравнения имеют одинаковую область задания, которая совпадает с областью определения функции f.

Пусть γ — интегральная кривая уравнения (1.6). Тогда, по определению, γ — график некоторого решения $\varphi \in C^1(a, b)$ уравнения (1.6). Следовательно,

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Это же означает, что φ — решение уравнения (1.7). Поэтому γ — интегральная кривая уравнения (1.7).

Обратно, пусть γ — интегральная кривая уравнения (1.7). Тогда, по определению, кривая γ допускает параметризацию $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$. При этом на (α, β)

$$\psi'(t) \equiv f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t).$$

Заметим, что $\varphi'(t) \neq 0$ для любого $t \in (\alpha, \beta)$. Действительно, если $\varphi'(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in (\alpha, \beta)$, то из приведённого тождества следует, что $\psi'(t_0) = 0$.

Но по определению параметрического решения производные φ' и ψ' не обращаются в ноль одновременно.

Из непрерывности функции φ' следует её знакопостоянность. Поэтому функция φ строго монотонна, а значит, имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$. График функции $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ совпадает с кривой γ. По теореме о производной функции, заданной параметрически, имеем

$$\frac{d}{dx}\psi(\varphi^{-1}(x)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t), \psi(t)) = f(x, \psi(\varphi^{-1}(x))).$$

Следовательно, $\psi \circ \varphi^{-1}$ — решение уравнения (1.6), а γ — соответствующая интегральная кривая уравнения (1.6). $\square$

Тема 2: Задача Коши. Уравнение с разделяющимися переменными

Содержание

§2.1. Задача Коши

Как правило, дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Для получения какого-нибудь конкретного решения, кроме самого уравнения, необходимы дополнительные условия.

Определение. ***Задачей Коши*** или ***начальной задачей*** для нормального уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{2.1}$$

называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего ***начальному условию***

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.2}$$

Пара чисел (x_0, y_0) при этом называется ***начальными данными***.

С геометрической точки зрения это задача отыскания среди всех интегральных кривых той, которая проходит через точку с координатами (x_0, y_0).

Пример 2.1.1. Рассмотрим задачу Коши $y' = x$, $y(\sqrt{2}) = 2$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Положим здесь $y = 2$, $x = \sqrt{2}$. Тогда $C = 1$. Подставляя найденное значение C в общее решение, получаем частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$y = \frac{x^2}{2} + 1, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad \triangle$$

Относительно задачи Коши естественно возникают вопросы:

- Существует ли решение поставленной задачи?

- Насколько велико множество всех её решений?

Приведём простые достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Следующие теоремы являются частными случаями более общих утверждений (теорем Пеано 7.1.1 и Пикара 8.2.1), которые будут доказаны позднее.

Теорема 2.1.1 (существование решения ЗК для нормального уравнения). *Пусть G — область* [1] *из $\mathbb{R}^2$, $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 существует решение задачи (2.1), (2.2).*

Теорема 2.1.2 (единственность решения ЗК для нормального уравнения). *Пусть G — область из $\mathbb{R}^2_{x,y}$, $f, f'_y \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$, φ_1 и φ_2 — решения задачи (2.1), (2.2) на (a, b). Тогда $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (a, b).*

Таким образом, в условиях теоремы 2.1.2 совпадение двух решений в одной точке означает их совпадение на всём интервале, где они одновременно заданы, если их графики не покидают область G. Другими словами, вся область G покрыта не пересекающимися интегральными кривыми (рис. 2.1).

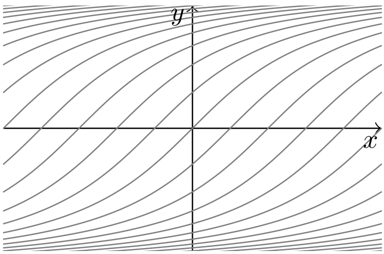

Рис. 2.1. Интегральные кривые уравнения $y' = \cos^2 y$ в области $G = \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$

Через точку области G, где условие теоремы 2.1.2 нарушено (например, производная f'_y не существует), могут проходить интегральные кривые, отличающиеся в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Определение. Решение φ на (a, b) уравнения (2.1) называется ***особым***, если для любой точки $x_0 \in (a, b)$ найдётся решение ψ того же уравнения, такое что

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0),$$

при этом $\varphi \not\equiv \psi$ в любой сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Более кратко это выражают словами: интегральная кривая уравнения (2.1) является особой, если в каждой её точке нарушается единственность решения задачи Коши.

[1] Напомним, что областью называют открытое связное множество.

Пример 2.1.2. Рассмотрим уравнение

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Его правая часть непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Тогда по теореме 2.1.1 решение существует для любых начальных данных $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Поскольку

$$(3\sqrt[3]{y^2})'_y = \frac{2}{\sqrt[3]{y}},$$

то теорема 2.1.2 гарантирует, что в полуплоскости, где $y > 0$, через каждую точку проходит лишь одна интегральная кривая. То же верно и для полуплоскости, где $y < 0$. Эти решения задаются формулой

$$y = (x - C)^3. \tag{2.3}$$

Для любого числа $x_0 \in \mathbb{R}$ в точке $(x_0, 0)$ единственность нарушается, поскольку помимо графика решения $y_1(x) = (x - x_0)^3$, через эту точку проходит график решения $y_2(x) = 0$, не совпадающий с графиком y_1 ни в какой окрестности точки x_0. Таким образом, y_2 — особое решение.

Общее решение данного уравнения имеет сложную структуру. Оно является не просто объединением семейства (2.3) и функции $y_2(x) = 0$. Общее решение содержит ещё составные решения, то есть функции, графики которых составлены из частей графиков функций (2.3) и особого решения (рис. 2.2). △

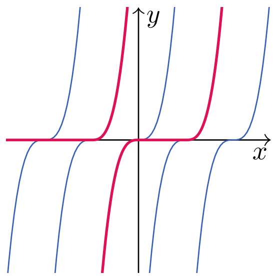

Рис. 2.2. Составные решения

§2.2. Уравнение с разделяющимися переменными

2.2.1. Уравнение с разделёнными переменными

Определение. Уравнение в дифференциалах вида

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0 \tag{2.4}$$

называют ***уравнением с разделёнными переменными***.

Такое название мотивировано тем, что каждое его слагаемое зависит только от одной переменной.

Теорема 2.2.1 (общее решение УРП). *Пусть* $P \in C(a,b)$, $Q \in C(c,d)$, $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$. *Тогда функция* $y = \varphi(x)$ *— решение уравнения (2.4) на* (α,β), *если и только если* $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ *и при некотором* $C \in \mathbb{R}$ *функция* φ *неявно задана уравнением*

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C. \tag{2.5}$$

Доказательство. *Необходимость.* Если φ — решение уравнения (2.4) на (α,β), то $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ по определению.

Покажем, что функция φ удовлетворяет уравнению (2.5) на (α,β) при некотором $C \in \mathbb{R}$. Возьмём произвольно $x_0 \in (\alpha,\beta)$ и положим $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда уравнение (2.5) запишется в виде

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt + C_1 + \int_{y_0}^{y} Q(t)\,dt + C_2 = C.$$

Таким образом, требуется установить, что при некотором $A \in \mathbb{R}$ и всех $x \in (\alpha,\beta)$

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt + \int_{y_0}^{\varphi(x)} Q(t)\,dt = A.$$

Производя замену $t = \varphi(\tau)$ во втором слагаемом, находим

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} Q(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\,d\tau = \int_{x_0}^{x} \left(P(\tau) + Q(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\right)\,d\tau.$$

Выражение под интегралом равно нулю по определению решения φ. Значит, $A = 0$.

Достаточность. Продифференцируем по переменной x тождество на (α,β)

$$\int P(x)\,dx + \left[\int Q(y)\,dy\right]_{y=\varphi(x)} \equiv C.$$

Имеем

$$P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Следовательно, φ — решение уравнения (2.4) на (α,β) по определению. □

Аналогичную теорему можно сформулировать и для функций вида $x = \psi(y)$. Таким образом, любое решение уравнения (2.4) задаётся уравнением вида (2.5). Чтобы сделать описание общего решения более завершённым, нужно указать, при каких значениях параметра C уравнение (2.5) определяет непрерывно дифференцируемые функции и какова область определения этих функций. Однако, эти действия могут потребовать существенных усилий, поэтому часто довольствуются лишь соотношением (2.5).

Пример 2.2.1. Найти общий интеграл уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$.

Решение. Интегрируя уравнение, находим

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C.$$

Отсюда

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

Ясно, что это уравнение определяет непрерывно дифференцируемые функции лишь при $C > 0$. Поэтому общее решение описывается соотношением

$$x^2 + y^2 = A, \quad A > 0. \qquad \triangle$$

2.2.2. Уравнение с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида

$$p_1(x)q_1(y)\,dx + p_2(x)q_2(y)\,dy = 0 \tag{2.6}$$

называют ***уравнением с разделяющимися переменными***.

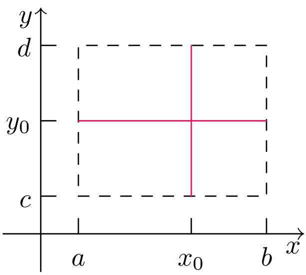

Рис. 2.3. Области поиска интегральных кривых, если $q_1(y_0) = 0$, $p_2(x_0) = 0$

При делении на $q_1(y)p_2(x)$ получается уравнение с разделёнными переменными. При этом необходимо убедиться, что не происходит деления на ноль.

Пусть $p_1, p_2 \in C(a,b)$, $q_1, q_2 \in C(c,d)$. Если $q_1(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$, $x \in (a,b)$ — решение исходного уравнения. Для поиска других интегральных кривых область $(a,b) \times (c,d)$ задания уравнения требуется разбить на две подобласти, общей границей которых является прямая $y = y_0$.

Аналогично, если $p_2(x_0) = 0$, то $x \equiv x_0$, $y \in (c,d)$ — решение исходного уравнения. Для поиска других интегральных кривых область задания разбивается на две подобласти с общей границей $x = x_0$.

Разбив всю область поиска интегральных кривых на необходимое количество частей (рис. 2.3), нужно рассмотреть исходное уравнение на каждой части отдельно. На каждой такой подобласти его можно разделить на $q_1(y)p_2(x)$, не опасаясь получить ноль в знаменателе.

Изучив поведение найденных интегральных кривых вблизи границ подобластей, делается вывод о наличии особых и составных решений уравнения на исходной области его задания.

Пример 2.2.2. Решить уравнение $x\,dy - 2y\,dx = 0$.

Решение. Область задания уравнения — вся плоскость. Переменные разделятся, если поделить уравнение на xy. Заметим, что прямые $y = 0$ и $x = 0$ являются интегральными кривыми. Они разбивают область задания на четыре подобласти, соответствующие четвертям плоскости.

Обозначим k-ю четверть через D_k (точки на координатных осях не включаются). На области D_1 исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}.$$

По теореме 2.2.1 его общее решение задаётся соотношением

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C$$

или

$$|y| = Ax^2, \quad A > 0.$$

В первой четверти $y > 0$, $x > 0$. Поэтому все решения в области D_1 имеют вид

$$y = Ax^2, \quad A > 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

Рассуждения в остальных четвертях аналогичны. Получаем следующие интегральные кривые:

$$\begin{aligned}
D_2: &\quad y = Ax^2, \quad A > 0, \quad x \in (-\infty, 0)\\
D_3: &\quad y = Ax^2, \quad A < 0, \quad x \in (-\infty, 0)\\
D_4: &\quad y = Ax^2, \quad A < 0, \quad x \in (0, +\infty).
\end{aligned}$$

Заметим, что для любого из полученных решений имеем

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} y'(x) = 0. \tag{2.7}$$

Вернёмся на область задания исходного уравнения. Из соотношений (2.7) следует, что интегральные кривые из различных областей D_k в начале координат можно гладко сшить друг с другом, а также с прямой $y = 0$. Тем самым, кроме найденных решений, имеется множество составных вида

$$y = \begin{cases} Ax^2, & \text{если } x < 0,\\ Bx^2, & \text{если } x \geqslant 0,\end{cases}$$

где коэффициенты A, B произвольны (рис. 2.4). Общее решение включает эти кусочно-заданные функции, а также функцию $x(y) = 0$ при $y \in \mathbb{R}$. △

Пример 2.2.3. Решить уравнение $x\,dy - y\,dx = 0$.

Решение. Рассуждая так же, как в предыдущем примере, в каждой из четвертей получаем решения вида

$$y = Ax.$$

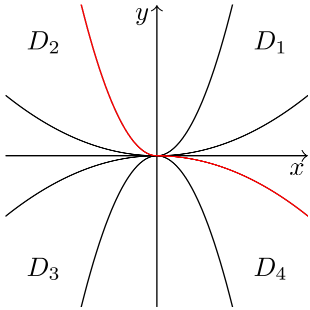

Рис. 2.4. Составное решение уравнения $x\,dy - 2y\,dx = 0$

Поскольку для любого из найденных решений имеем

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} y'(x) = A,$$

то в начале координат можно объединить лишь те интегральные кривые, которые являются частями одной и той же прямой. Таким образом, общее решение включает функции

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

и функцию $x(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$. Составных (кусочно-заданных) решений нет. $\triangle$

К уравнению с разделяющимися переменными приводится уравнение вида

$$y' = f(x)g(y).$$

В общем случае непрерывности правой части уравнения, разрешённого относительно производной, недостаточно для единственности решения задачи Коши. Однако, для данного уравнения непрерывность f и g гарантирует единственность, если только $g(y) \neq 0$. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.2.2 (теорема существования и единственности для УРП). *Пусть $P \in C(a,b)$, $Q \in C(c,d)$, (x_0, y_0) — не особая точка уравнения (2.4). Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует единственная интегральная кривая уравнения (2.4), проходящая через точку (x_0, y_0). Эта кривая имеет уравнение*

$$\int_{x_0}^{x} P(\tau)\,d\tau + \int_{y_0}^{y} Q(\tau)\,d\tau = 0.$$

Упражнение 2.2.1. Докажите теорему 2.2.2. *Указание:* воспользуйтесь теоремой о неявной функции.

§2.3. Однородное уравнение

Определение. Функция $F(x,y)$ называется ***однородной функцией*** степени α, если при всех допустимых t, x и y верно равенство

$$F(tx,ty) = t^\alpha F(x,y).$$

Примеры однородных функций: $x+y+z$ (первой степени), $x^2+3xy+y^2$ (второй степени), $(y/x)\cos(x/y)$ (нулевой степени), $\frac{\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$ (степени $-3/2$).

Определение. Пусть P и Q — однородные функции одинаковой степени. Тогда уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{2.8}$$

называется ***однородным уравнением***.

Заметим, что к нему приводится уравнение

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

и поэтому оно тоже называется однородным.

Введение новой искомой функции $z = y/x$ сводит уравнение (2.8) к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 2.3.1. Найдём решения уравнения

$$(x^2 - xy)\,dy + y^2\,dx = 0.$$

Данное уравнение — однородное, поскольку коэффициенты при dx и dy суть однородные функции второй степени однородности. Будем рассматривать уравнение в полуплоскости, где $x > 0$. Воспользуемся подстановкой

$$y = xz(x),$$

тогда $dy = x\,dz + z\,dx$. Уравнение преобразуется к виду

$$x^3(1-z)\,dz + x^2 z\,dx = 0.$$

Разделив обе части на $x^3 \neq 0$ и перенося слагаемое с dx в правую часть, находим

$$(1-z)\,dz = -\frac{z}{x}\,dx. \tag{2.9}$$

Прежде, чем делить на z, отметим, что $z \equiv 0$ является решением данного уравнения. При $z > 0$ имеем

$$\frac{1-z}{z}\,dz = -\frac{dx}{x}.$$

Вычисляя интегралы от правой и левой части, получаем

$$\ln|z| - z = -\ln|x| + C_1. \tag{2.10}$$

Отсюда после потенцирования и раскрытия модулей находим

$$ze^{-z} = \frac{C}{x},$$

где $C = e^{C_1} > 0$.

В области $z < 0$ модуль в левой части уравнения (2.10) раскроется с противоположным знаком. Таким образом, семейство интегральных кривых уравнения (2.9) задаётся формулой

$$ze^{-z} = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Возвращаясь к прежней переменной $y = xz$, находим

$$ye^{-y/x} = C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Рассуждения в области $x < 0$ остаются такими же, поменяется лишь знак при раскрытии модуля в правой части (2.10). При этом общий интеграл (2.11) не изменится.

До этого момента прямая $x = 0$ исключалась из рассмотрения. Она может оказаться интегральной кривой исходного уравнения, и в данном случае это действительно так, в чём убеждаемся непосредственной подстановкой.

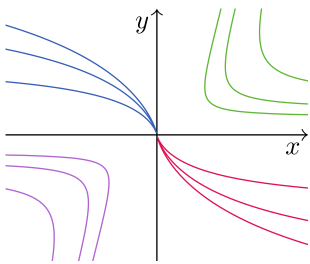

Рис. 2.5. Интегральные кривые уравнения $(x^2 - xy)\,dy + y^2\,dx = 0$.

Более детальный анализ формулы (2.11) показывает, что интегральные кривые из второй и четвёртой четвертей касаются оси Oy в начале координат. Поэтому уравнение имеет ещё и составные решения: любая кривая из второй четверти может объединяться с любой кривой из четвёртой четверти. $\triangle$

Отметим геометрическое свойство однородного уравнения. Допустим, что $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — параметрическое решение (2.8) на (α, β). При растяжении плоскости в λ раз соответствующая интегральная кривая перейдёт в кривую с параметризацией $x = \lambda\varphi(t)$, $y = \lambda\psi(t)$. Подставляя эти функции в уравнение (2.8), получаем

$$P(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\varphi' + Q(\lambda\varphi, \lambda\psi)\lambda\psi' = 0.$$

Пользуясь однородностью функций P и Q, приходим к равенству

$$P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' = 0,$$

которое выполняется тождественно на (α, β). Это означает, что гомотетия относительно начала координат любую интегральную кривую однородного уравнения переводит в другую его интегральную кривую.

Тема 3: Некоторые типы уравнений, интегрируемых в квадратурах

Содержание

Если все решения дифференциального уравнения явно или неявно выражаются через элементарные функции с помощью конечного числа арифметических действий, суперпозиций и операций нахождения первообразных, то говорят, что *уравнение интегрируется в квадратурах*[2]. Следует отметить, что это довольно узкий класс уравнений.

§3.1. Линейное уравнение первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{3.1}$$

называется ***линейным уравнением первого порядка***.

Название *линейное* мотивировано тем, что оно составлено из многочленов первой степени по отношению к символам y и y'.

Определение. Уравнение (3.1) называется ***однородным***, если $q \equiv 0$ на (a, b), иначе — ***неоднородным***.

Лемма 3.1.1 (общее решение ЛОУ 1-го порядка). *Пусть $p \in C(a, b)$. Тогда общее решение уравнения*

$$y' = p(x)y \tag{3.2}$$

имеет вид

$$y = Ce^{\int p}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b).$$

[2] «Квадратура» — в прежние времена синоним слова «интеграл».

Доказательство. По теореме существования 2.1.1 через каждую точку полосы $(a, b) \times \mathbb{R}$ проходит интегральная кривая. По теореме единственности 2.1.2 через каждую точку этой полосы проходит ровно одна интегральная кривая. В частности, уравнение не имеет особых решений.

Заметим, что функция, тождественно равная нулю на (a, b), является решением. В области, где $y > 0$, исходное уравнение равносильно

$$\frac{dy}{y} = p(x)\,dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln y = \int p(x)\,dx + C.$$

Отсюда

$$y = Ae^{\int p(x)\,dx}, \quad A > 0.$$

По теореме 2.2.1 полученное соотношение описывает все интегральные кривые в области, где $y > 0$.

Аналогичный результат получается при $y < 0$. Таким образом, все решения имеют требуемый вид. □

Теорема 3.1.1 (общее решение ЛУ 1-го порядка). *Пусть $p, q \in C(a, b)$. Тогда общее решение уравнения (3.1) имеет вид*

$$y = \left(C + \int qe^{-\int p}\right)e^{\int p}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b). \tag{3.3}$$

Доказательство. Подстановкой легко убеждаемся, что указанная функция при любом значении C является решением на (a, b).

Проверим, что нет других решений. Предположим противное: пусть имеется решение φ на $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, не определяемое формулой (3.3) ни при каком C. Пусть ещё $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $\varphi(x_0) = y_0$. При

$$C = \left[y_0 e^{-\int p(x)\,dx} - \int q(x)e^{-\int p(x)\,dx}\,dx\right]_{x=x_0}$$

функция (3.3) определена на (α, β) и является решением задачи Коши для уравнения (3.1) с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Тогда $y \equiv \varphi$ на (α, β) по теореме единственности 2.1.2, а это противоречит предположению о функции φ. □

Обычно формулу (3.3) не запоминают. На практике, чтобы её «вспомнить», можно воспользоваться ***методом Лагранжа***, который ещё называют ***методом вариации произвольной постоянной***. Он состоит в следующем. По лемме 3.1.1 решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = Ce^{\int p} \tag{3.4}$$

где C — произвольная постоянная. Это выражение подставляют в исходное уравнение (3.1), при этом считая C функцией от x («варьируют постоянную»). Получается уравнение относительно функции C:

$$C' = qe^{-\int p}.$$

Его решение совпадает с выражением в скобках в формуле (3.3). Поэтому общее решение исходного уравнения (3.1) получится, если найденную функцию C подставить вместо постоянной C в общем решении (3.4) однородного уравнения.

Пример 3.1.1. Решить уравнение $y' = y + x$.

Решение. Так как коэффициенты уравнения непрерывны на $\mathbb{R}$, то область задания уравнения — вся плоскость, а решения будут определены на $\mathbb{R}$. Воспользуемся методом Лагранжа.

Соответствующее однородное уравнение

$$y' = y$$

имеет решение $y = Ce^x$. Считая здесь C не числом, а функцией, подставим данное выражение в исходное уравнение. Имеем

$$(Ce^x)' = Ce^x + x.$$

Отсюда

$$C' = xe^{-x}.$$

Интегрируя, получаем $C = -(x+1)e^{-x} + A$. Тогда общее решение исходного уравнения

$$y = (-(x+1)e^{-x} + A)e^x = Ae^x - x - 1,$$

где $A \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$. △

§3.2. Уравнения Бернулли и Риккати

3.2.1. Уравнение Бернулли

Определение. ***Уравнением Бернулли*** называют уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha,$$

где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Разделив данное уравнение на y^α, находим

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x).$$

Отсюда видно, что замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит уравнение к линейному.

Упражнение 3.2.1. Пусть $p, q \in C(a, b)$. Докажите, что при $\alpha > 1$ уравнение Бернулли не имеет особых решений.

Упражнение 3.2.2. Пусть $p, q \in C(a, b)$, $q > 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Докажите, что тогда решение $y = 0$ уравнения Бернулли является особым.

Пример 3.2.1. Решить уравнение $y' = -y + (1+x)y^2$.

Решение. Область задания уравнения — вся плоскость. Это уравнение Бернулли при $\alpha = 2$, следовательно, особых решений оно не имеет.

Функция $y = 0$ — решение. Рассматривая уравнение при $y \neq 0$, сделаем замену $z = 1/y$. Получаем линейное уравнение

$$z' = z - 1 - x.$$

Его общее решение

$$z = Ce^x + x + 2.$$

Возвращаясь к прежней функции y, находим общий интеграл исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{Ce^x + x + 2}. \qquad \triangle$$

3.2.2. Уравнение Риккати

Определение. ***Уравнением Риккати*** называют уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

Другими словами, это уравнение, в котором правая часть является квадратичной функцией по отношению к y. Уравнение Риккати разрешимо в квадратурах лишь в исключительных случаях.

Утверждение 3.2.1 (Лиувилль). *Уравнение*

$$y' = y^2 + x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах, если и только если $\alpha/(2\alpha+4) \in \mathbb{Z}$ *или* $\alpha = -2$.

Однако, если известно какое-либо решение φ, то уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли подстановкой $y = z + \varphi$.

§3.3. Уравнение в полных дифференциалах

Определение. Уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{3.5}$$

называют ***уравнением в полных дифференциалах***, если существует такая функция u, что

$$du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

то есть $u'_x = P$, $u'_y = Q$.

Теорема 3.3.1 (общее решение УПД). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, $u \in C^1(G)$, $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (3.5) на (a, b), если и только если $\varphi \in C^1(a, b)$ и при некотором $C \in \mathbb{R}$ функция φ неявно задана уравнением*

$$u(x, y) = C.$$

Доказательство. *Необходимость.* По определению решения будет $\varphi \in C^1(a, b)$. Кроме того, на (a, b) верно тождество

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Левая часть этого равенства совпадает с полной производной функции u по переменной x. Поэтому

$$\frac{d}{dx} u(x, \varphi(x)) \equiv 0.$$

Следовательно, $u(x, \varphi(x)) \equiv C$.

Достаточность. Дифференцируя равенство $u(x, \varphi(x)) = C$ по переменной x, находим

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x))\varphi'_x \equiv 0.$$

Так как $u'_x = P$, $u'_y = Q$, то по определению функция φ является решением уравнения (3.5) на (a, b). □

Как определить, что коэффициенты уравнения (3.5) являются частным производными некоторой функции? Если такая функция u существует и при этом $u \in C^2(G)$, то необходимо $u''_{xy} = u''_{yx}$, то есть

$$P'_y = Q'_x. \tag{3.6}$$

Если $P, Q \in C^1(G)$ и область G односвязна[1], то условие (3.6) достаточно для существования функции u.

Признак (3.6) уравнения в полных дифференциалах означает, что определяемое уравнением $P\,dx + Q\,dy = 0$ векторное поле $F = (P, Q)$ потенциально. Значит, существует функция u (потенциал поля), для которой F является градиентом. В силу теоремы 3.3.1, интегральные кривые уравнения в полных дифференциалах (3.5) — линии уровня потенциала u.

Определение. Потенциал u векторного поля $F = (P, Q)$ будем называть ***потенциалом уравнения*** (3.5).

Теорема 3.3.2. [2] *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{R}^2$, $P, Q \in C^1(G)$, $P'_y = Q'_x$, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда поле (P, Q) потенциально в области G, а его потенциал*

[1] Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется односвязной, если все точки, лежащие внутри любой замкнутой кривой без самопересечений $\Gamma \subset G$, также принадлежат G. Попросту говоря, это область без дыр.

[2] См., например, §51, п.5 в учебнике: Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И., Курс математического анализа. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001

определяется формулой

$$u(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \int_{\gamma(\widetilde{x},\widetilde{y})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \tag{3.7}$$

где $\gamma(\widetilde{x},\widetilde{y})$ *— произвольный кусочно-гладкий путь в области* G*, соединяющий точки* (x_0,y_0) *(начало пути) и* $(\widetilde{x},\widetilde{y})$*.*

Продемонстрируем на примере другой способ нахождения потенциала.

Пример 3.3.1. Решим уравнение $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$.

Область задания уравнения — вся плоскость, а это односвязная область. Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие (3.6) выполнено. Тогда общий интеграл имеет вид

$$u(x,y) = C,$$

где функция u находится из системы

$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -(2y + xe^{-y}). \end{cases}$$

При фиксированном y из первого уравнения системы находим

$$u(x,y) = e^{-y}x + C(y),$$

где функция C зависит только от y и непрерывно дифференцируема, поскольку такова функция u. Подставляя найденное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$C'(y) = -2y,$$

откуда $C(y) = -y^2$. Таким образом, общее решение задаётся уравнением

$$xe^{-y} - y^2 = C. \qquad \triangle$$

Замечание. Применяя способ нахождения потенциала, указанный в примере 3.3.1, необходимо внимательно следить за областями определения получающихся функций. Например, рассмотрим в полуплоскости $x > 0$ уравнение

$$\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0.$$

Если упустить из виду, что первообразная

$$\int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx$$

находится по-разному при $y = 0$ и при $y \neq 0$, то можно прийти к функции $u(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. Эта функция не может служить потенциалом на всей указанной полуплоскости, поскольку она не определена в точках оси x, а потенциал должен быть определён и непрерывно дифференцируем во всей области.

В действительности потенциалом будет функция

$$u(x,y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{если } y > 0, \\ -\pi/2, & \text{если } y = 0, \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

К этой функции можно прийти, вычисляя криволинейный интеграл (3.7).

3.3.1. Интегрирующий множитель

Предположим, что условие (3.6) нарушается.

Определение. Непрерывная функция $\mu(x,y) \neq 0$ называется ***интегрирующим множителем*** уравнения (3.5), если уравнение

$$\mu(x,y)(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Пусть $P, Q \in C^1(G)$. Если интегрирующий множитель $\mu \in C^1(G)$, то

$$(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x,$$

то есть

$$\mu'_y P - \mu'_x Q = (Q'_x - P'_y)\mu \tag{3.8}$$

Решить это уравнение в частных производных в общем случае не проще, чем проинтегрировать исходное уравнение.

В некоторых специальных случаях уравнение (3.8) упрощается. В качестве примера найдём интегрирующий множитель линейного уравнения

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{3.9}$$

которое равносильно

$$(py + q)\,dx - dy = 0.$$

Условие (3.6) здесь не выполнено. Уравнение (3.8) принимает вид

$$\mu'_y(py + q) + \mu'_x = -p\mu.$$

Попробуем найти интегрирующий множитель, зависящий только от x. В этом случае получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\mu' = -p\mu.$$

Одно из его решений: $\mu = e^{-\int p}$. Умножая (3.9) на $e^{-\int p}$, получаем

$$y' e^{-\int p} - pye^{-\int p} = qe^{-\int p}.$$

Левая часть — производная произведения $e^{-\int p}$ и y. Тогда

$$\left(ye^{-\int p}\right)' = \int qe^{\int p}.$$

Следовательно,

$$ye^{-\int p} = C + \int qe^{\int p}.$$

При умножении данного равенства на $e^{\int p}$ приходим к формуле (3.3) общего решения линейного уравнения.

Пример 3.3.2. Решить уравнение $y' = y + x$.

Решение. Интегрирующий множитель

$$\mu = e^{-\int dx} = e^{-x}.$$

Умножая уравнение на μ, получаем

$$y'e^{-x} - ye^{-x} = xe^{-x},$$

значит,

$$(ye^{-x})' = xe^{-x}.$$

Отсюда

$$y = e^x \left(\int xe^{-x}\,dx + A\right) = Ae^x - x - 1,$$

где $A \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. △

Тема 4: Уравнение, не разрешённое относительно производной

Содержание

§4.1. Уравнение, разрешимое относительно производной

Один из способов решения уравнения вида

$$F(x, y, y') = 0 \tag{4.1}$$

состоит в разрешении его относительно y', если это возможно. При этом в общем случае возникает совокупность уравнений $\{y' = f_k(x, y)\}$. Например, если исходное уравнение имеет вид

$$(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y)) = 0,$$

то любое решение одного из уравнений

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y)$$

будет решением исходного. Однако, обратное неверно: исходное уравнение может иметь решение, не являющееся решением ни одного из указанной пары уравнений. Если $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$, то в точке (x_0, y_0) возможна стыковка интегральных кривых первого и второго уравнения в одну интегральную кривую исходного уравнения.

Пример 4.1.1. Рассмотрим уравнение $y'^2 - 4x^2 = 0$.

Раскладывая левую часть на множители, имеем $(y' - 2x)(y' + 2x) = 0$. Тогда каждое из уравнений

$$\begin{aligned} y' - 2x &= 0, \\ y' + 2x &= 0 \end{aligned}$$

определяет решение исходного. То есть $y = x^2 + C_1$ или $y = -x^2 + C_2$.

Стыковка интегральных кривых может происходить в точках, где $2x = -2x$, то есть на прямой $x = 0$. Действительно, при $C_1 = C_2$ найденные функции и их производные совпадают. Поэтому решениями также будут функции (рис. 4.1)

$$y = \begin{cases} -x^2 + C, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x^2 + C, & \text{если } x > 0. \end{cases} \qquad \triangle$$

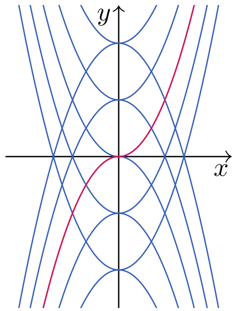

Рис. 4.1. В точках оси Oy решения уравнения $y'^2 = 4x^2$ разветвляются

§4.2. Метод введения параметра

Если не удаётся выразить y' из уравнения $F(x, y, y') = 0$ явно, можно попробовать искать решение в параметрической форме.

Определение. Пусть вектор-функция $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ имеет координатные функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то есть $\gamma = (\varphi, \psi)$. Если множество $\gamma(I)$ является графиком некоторой функции $y = f(x)$, то говорят, что соотношения

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I \tag{4.2}$$

задают функцию $f\colon \varphi(I) \to \mathbb{R}$ ***параметрически***.

В частности, если функция φ имеет обратную φ^{-1}, то соотношения (4.2) параметрически определяют функцию $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ при $x \in \varphi(I)$.

Пример 4.2.1. Соотношения $x = \cos t$, $y = 1$, $t \in \mathbb{R}$ параметрически определяют константу $y = 1$ как функцию переменной x при $x \in [-1, 1]$.

Соотношения $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$ не определяет функцию, поскольку окружность не является графиком функции. Но если брать параметр t из отрезка $[0, \pi]$, то получается параметрическое задание функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ при $x \in [-1, 1]$. $\triangle$

4.2.1. Неполные уравнения

Разберём сначала неполное уравнение

$$F(x, y') = 0. \tag{4.3}$$

Пусть y' — не функция, а название координаты. Тогда уравнение (4.3) определяет некоторое множество на плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y'}$. Предположим, что это множество — кривая γ, являющаяся графиком некоторой функции $y' = g(x)$. Тогда любая первообразная функции g будет решением уравнения (4.3).

Предположим нам удалось подобрать параметризацию кривой γ:

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t), \quad t \in I.$$

Это значит, что функция g параметрически задаётся парой (φ, ψ). Тогда первообразную функции g можно найти также в параметрической форме. Об этом говорит следующее утверждение.

Утверждение 4.2.1. *Пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, $\varphi'(t) \neq 0$ на (α, β), $\psi \in C(\alpha, \beta)$,*

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0 \quad \text{на } (\alpha, \beta). \tag{4.4}$$

Тогда при $C \in \mathbb{R}$ соотношения

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C, \quad t \in (\alpha, \beta) \tag{4.5}$$

параметрически определяют решение уравнения $F(x, y') = 0$ на $\varphi((\alpha, \beta))$.

Доказательство. Так как $\varphi'(t) \neq 0$ на (α, β), то функция φ строго монотонна, а значит, имеет обратную. Тогда соотношения (4.5) параметрически определяют функцию $y = g(x)$, заданную на интервале $(a, b) = \varphi((\alpha, \beta))$. По формуле для производной функции, заданной параметрически, имеем

$$g'(x) = \frac{\left(\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C\right)'}{\varphi'(t)} = \psi(t).$$

Следовательно, $g' = \psi \circ \varphi^{-1}$, и поэтому $g \in C^1(a, b)$. В силу тождества (4.4), при любом $x \in (a, b)$

$$F(x, g'(x)) = F(\varphi(t), \psi(t)) = 0.$$

Таким образом, функция g — решение уравнения (4.3) на (a, b). □

Формулы (4.5) обычно не запоминают, а выводят из следующей схемы рассуждений. Рассмотрим равенство

$$dy = y'_x\,dx, \tag{4.6}$$

которое назовём ***основным соотношением метода введения параметра***. Если в (4.6) сделать подстановки

$$dy = y'_t\,dt, \quad y'_x = \psi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt,$$

то получится дифференциальное уравнение относительно y как функции t:

$$y'_t = \psi(t)\varphi'(t).$$

Его решение

$$y(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C$$

и функция $x = \varphi(t)$ параметрически задают решение уравнения (4.3).

Замечание. Утверждение 4.2.1 не говорит о том, как найти вообще *все* решения уравнения (4.3).

Пример 4.2.2. Найти решения уравнения $e^{y'} + y' = x$.

В данном уравнении переменная x выражена явно, что позволяет легко ввести параметр:

$$y'_x = t, \quad x = e^t + t.$$

В основном соотношении (4.6) сделаем подстановки

$$dy = y'_t\,dt, \quad y'_x = t, \quad dx = (e^t + 1)\,dt.$$

Имеем

$$y'_t = t(e^t + 1).$$

Тогда

$$y = e^t(t-1) + \frac{t^2}{2} + C.$$

Ответ: $x = e^t + t$, $y = e^t(t-1) + t^2/2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Для уравнения $F(y, y') = 0$ можно доказать аналог утверждения 4.2.1. Та же схема рассуждений с использованием основного соотношения (4.6) приводит к нужным формулам. Подобрав параметризацию

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t)$$

множества $\left\{(y, y') \in \mathbb{R}^2_{y,y'} \mid F(y, y') = 0\right\}$, необходимо в основном соотношении (4.6) сделать подстановки

$$dy = \varphi'(t)\,dt, \quad y'_x = \psi(t), \quad dx = x'_t\,dt.$$

Решив полученное дифференциальное уравнение, найдём функцию $x(t)$. Добавляя к нему функцию $y = \varphi(t)$, получим параметрическое решение исходного уравнения $F(y, y') = 0$.

4.2.2. Полное уравнение

Аналогичная техника используется и в общем случае. Если переменные x, y и y' интерпретировать как координаты, то уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

задаёт некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^3_{x,y,y'}$. Предположим, что это множество — гладкая поверхность, параметризованная функциями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

Производя в основном соотношении (4.6) подстановки

$$\begin{aligned} &dy = \psi'_u\,du + \psi'_v\,dv, \\ &y'_x = \chi(u, v), \\ &dx = \varphi'_u\,du + \varphi'_v\,dv, \end{aligned}$$

приходим к уравнению

$$(\psi'_u - \chi\varphi'_u)\,du + (\psi'_v - \chi\varphi'_v)\,dv = 0.$$

Если удалось получить его решение в виде $v = g(u, C)$, то пара функций

$$x = \varphi(u, g(u, C)), \quad y = \psi(u, g(u, C))$$

определяет решение исходного уравнения $F(x, y, y') = 0$ через параметр u.

Пример 4.2.3. Рассмотрим уравнение

$$xy' - y = \frac{y'}{2}\ln\frac{y'}{2}.$$

Оно разрешимо относительно y:

$$y = xy' - \frac{y'}{2}\ln\frac{y'}{2}.$$

Параметризуем соответствующую поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ так:

$$x = u, \quad y' = v, \quad y = uv - \frac{v}{2}\ln\frac{v}{2}.$$

Запишем основное соотношение $dy = y'_x\,dx$, принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} &dy = y'_u\,du + y'_v\,dv = v\,du + \left(u - \frac{1}{2}\ln\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right)dv, \\ &y'_x = v, \\ &dx = du. \end{aligned}$$

Получаем
$$\left(u - \frac{1}{2}\ln\frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right)\,dv = 0.$$
Это уравнение распадается на два:
$$dv = 0,$$
$$u - \frac{1}{2}\ln\frac{v}{2} - \frac{1}{2} = 0. \tag{4.7}$$

Отсюда, во-первых, получаем решение $v = C$. Следовательно, решения исходного уравнения определяются парой функций
$$x = u,$$
$$y = uC - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}.$$
В данном случае легко выразить решение явно:
$$y = Cx - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}.$$

Во-вторых, из (4.7) следует, что $v = 2e^{2u-1}$. Тогда
$$y = u\cdot 2e^{2u-1} - \frac{2e^{2u-1}}{2}\ln\frac{2e^{2u-1}}{2} = e^{2u-1}.$$
Учитывая, что $x = u$, получаем ещё одно решение в явном виде $y = e^{2x-1}$.

Кроме найденных функций имеются составные решения. △

Только что рассмотренное уравнение — это ***уравнение Клеро***, общий вид которого
$$y = xy' + q(y').$$
Оно, в свою очередь, является частным случаем ***уравнения Лагранжа***
$$y = p(y')x + q(y').$$

4.2.3. Некоторые способы параметризации

Если уравнение $F(x, y) = 0$ разрешимо относительно одной из переменных, то другую можно взять в качестве параметра. Например, если $y = f(x)$, то $x = t$, $y = f(t)$ — параметризация.

Если уравнение кривой имеет вид $P(x, y) + Q(x, y) = 0$, где P и Q — однородные функции различной степени, то подстановка $y = xt$ позволит выразить x через t (а затем и y через t).

Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ разрешимо относительно одной из переменных, то две другие можно выбрать в качестве параметров. Например, если $y = F(x, z)$, то $x = u$, $z = v$, $y = F(u, v)$ — параметризация.

Возможно, окажется полезным переход в полярные, сферические или цилиндрические координаты или их обобщения. Например, полярные координаты можно обобщить так:
$$x = a\cos^{\alpha}\varphi, \quad y = b\sin^{\beta}\varphi.$$

§4.3. Задача Коши для уравнения, не разрешённого относительно производной

Уравнение (4.1) задаёт в общем случае не одно поле направлений, а некоторую их совокупность. Значит, через одну точку на плоскости могут проходить несколько интегральных кривых под разными углами. Поэтому постановка задачи Коши для уравнения, не разрешённого относительно y', содержит дополнительное условие.

Определение. ***Задачей Коши*** для уравнения (4.1) называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

Чтобы задача Коши могла иметь решение, начальные данные должны быть согласованы: $F(x_0, y_0, y_0') = 0$.

Теорема 4.3.1 (существование и единственность решения ЗК для уравнения, не разрешённого относительно производной). *Пусть* $F \in C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ *— область,* $(x_0, y_0, y_0') \in G$, $F(x_0, y_0, y_0') = 0$, $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$. *Тогда в некоторой окрестности точки* x_0 *существует единственное решение задачи*

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{4.8}$$

Доказательство. По теореме о неявной функции найдутся окрестности $U \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ и $V \subset \mathbb{R}_{y'}$ точек (x_0, y_0) и y_0' соответственно, такие что для каждой точки $(x, y) \in U$ существует единственное решение $y' \in V$ уравнения $F(x, y, y') = 0$. Причём таким образом заданная функция $y' = f(x, y)$ непрерывна на U.

Предположим, что φ — решение задачи (4.8) на интервале $(a, b) \ni x_0$. Тогда

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, \quad \varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0'.$$

В силу непрерывности φ и φ', из второго и третьего равенств следует, что $(x, \varphi(x)) \in U$ и $\varphi'(x) \in V$, если x мало отличается от x_0. Поэтому из первого равенства получаем $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ при всех x из некоторой окрестности точки x_0.

Таким образом, функция φ является решением задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{4.9}$$

Поскольку $F \in C^1(G)$, то производная f_y' непрерывна в некоторой окрестности (x_0, y_0). Из теоремы 2.1.2 следует, что в U проходит лишь одна интегральная кривая задачи (4.9). Поэтому, если существует решение (4.8), то оно единственно.

Теперь докажем существование решения задачи (4.8). По теореме 2.1.1 на некотором интервале существует решение φ задачи (4.9). Но тогда $\varphi'(x_0) =$

$f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0) = y_0'$. Для тех значений x, при которых $(x, \varphi(x)) \in U$, равенство $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ равносильно $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$. Следовательно, функция φ является решением задачи Коши (4.8). □

Определение. Решение φ на (a, b) уравнения $F(x, y, y') = 0$ называют ***особым***, если для любой точки $x_0 \in (a, b)$ найдётся решение ψ того же уравнения, такое что

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0), \quad \varphi'(x_0) = \psi'(x_0),$$

при этом $\varphi \not\equiv \psi$ в любой сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Решение $y = x^2$ уравнения $y'^2 = 4x^2$ (см. рис. 4.1) не является особым, несмотря на то, что через каждую точку его графика проходит другая интегральная кривая. Единственность нарушается лишь в начале координат. Дело здесь в том, что задача Коши для уравнения (4.1) содержит ещё начальное условие на производную. Поэтому параболы, пересекающиеся при $x \neq 0$ являются решениями *разных* задач Коши.

Для существования особого решения, проходящего через точку (x_0, y_0), необходимо нарушение условий теоремы существования и единственности 4.3.1 в этой точке. Множество всех таких точек образует дискриминантную кривую.

Определение. Пусть $F \in C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^3$ — область. ***Дискриминантной кривой*** называют множество точек

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y' \in \mathbb{R} \colon F(x, y, y') = 0, F'_{y'}(x, y, y') = 0\right\}.$$

Заметим, что решение, график которого содержится в дискриминантной кривой, не обязано быть особым.

Алгоритм нахождения особых решений уравнения $F(x, y, y') = 0$, где F непрерывно дифференцируема:

1. Найти общий интеграл.
2. Найти дискриминантную кривую, исключив переменную y' из системы уравнений $F(x, y, y') = 0$, $F'_{y'}(x, y, y') = 0$.
3. Выбрать те решения, графики которых содержатся в дискриминантной кривой.
4. Проверить выбранные решения на соответствие определению особого решения.

Пример 4.3.1. Вернёмся к уравнению из примера 4.2.3:

$$xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0$$

Исключая y' из системы

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0, \\ x - \frac{1}{2} \ln \frac{y'}{2} - \frac{1}{2} = 0, \end{cases}$$

получаем уравнение дискриминантной кривой: $y = e^{2x-1}$. Она совпадает с одной из найденных интегральных кривых.

Будет ли решение $\varphi(x) = e^{2x-1}$ особым? Возьмём $x_0 \in \operatorname{dom}\varphi = \mathbb{R}$. Проверим, нет ли среди семейства $\psi(x) = Cx - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2}$ решений, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases}\varphi(x_0) = \psi(x_0),\\ \varphi'(x_0) = \psi'(x_0),\end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases}Cx_0 - \frac{C}{2}\ln\frac{C}{2} = e^{2x_0-1},\\ C = 2e^{2x_0-1}.\end{cases}$$

При $C = 2e^{2x_0-1}$ функция $\psi(x)$ является решением той же задачи Коши, что и функция ψ, и при этом не совпадает с φ в любой окрестности точки x_0. Таким образом, φ — особое решение (рис. 4.2). △

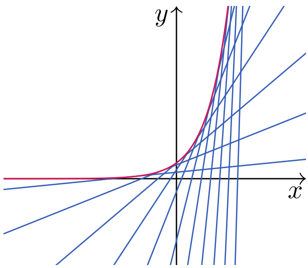

Рис. 4.2. Особое решение уравнения Клеро — огибающая семейства прямых, являющихся графиками его решений

Тема 5: Уравнения высшего порядка

Содержание

§5.1. Уравнения высшего порядка: основные понятия

Определение. ***Дифференциальным уравнением*** n***-го порядка*** называют уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{5.1}$$

Определение. Функция φ — ***решение уравнения*** (5.1) на (a, b), если

- $\varphi \in C^n(a, b)$;
- $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$ на (a, b).

Определение. ***Каноническим уравнением*** будем называть уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{5.2}$$

разрешённое относительно старшей производной.

Определение. ***Задачей Коши*** для канонического уравнения (5.2) называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего ***начальным условиям***

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{5.3}$$

Набор чисел $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ при этом называют ***начальными данными***.

Задача Коши имеет простую геометрическую и механическую трактовку, если порядок уравнения равен двум. Допустим, требуется решить задачу

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

С геометрической точки зрения требуется найти кривую, проходящую через точку с координатами (x_0, y_0), касательная к которой в этой точке имеет угловой коэффициент, равный y_0'.

Чтобы сделать механический смысл более ясным, сформулируем ту же задачу в других обозначениях:

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0.$$

Здесь искомая функция $x(t)$ — координата материальной точки в момент времени t. В механике производную обозначают точкой над функцией, то есть $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ суть первая и вторая производная функции x по времени t. Требуется найти закон движения, при котором движущаяся точка в начальный момент времени t_0 находится в положении x_0 и имеет при этом скорость v_0 (рис. 5.1).

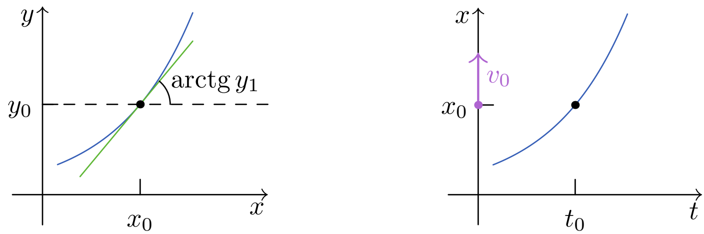

Рис. 5.1. Геометрический и механический смысл задачи Коши для уравнения второго порядка

Приведём простые достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения высшего порядка. Более общие утверждения будут доказаны позднее.

Теорема 5.1.1 (существование решения ЗК для канонического уравнения). *Пусть G — область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $f \in C(G)$, $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 существует решение задачи (5.2), (5.3).*

Теорема 5.1.2 (единственность решения ЗК для канонического уравнения). *Пусть G — область в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}}$, $f, f_y', f_{y'}', \ldots, f_{y^{(n-1)}}' \in C(G)$, $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$, φ_1 и φ_2 — решения задачи (5.2), (5.3) на (a, b). Тогда $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (a, b).*

Определение. Решение φ на (a, b) уравнения (5.2) называют ***особым***, если для любой точки $x_0 \in (a, b)$ найдётся решение ψ того же уравнения, такое что

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0), \quad \psi'(x_0) = \varphi'(x_0), \quad \ldots, \quad \psi^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0),$$

при этом $\varphi \not\equiv \psi$ в любой сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Другими словами, интегральная кривая уравнения (5.2) является особой, если в каждой её точке нарушается единственность решения задачи Коши.

§5.2. Методы понижения порядка

Как правило, чем ниже порядок уравнения, тем проще его решить. Рассмотрим некоторые случаи, допускающие понижение порядка уравнения.

5.2.1. Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Простейший случай — уравнение

$$y^{(n)} = f(x).$$

Поскольку $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, то

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Таким образом порядок уравнения уменьшается на единицу.

Пример 5.2.1. Найдём общее решение уравнения $y'' = \sin x$.

Имеем

$$y' = \int \sin x\,dx = -\cos x + C_1.$$

Интегрируя ещё раз, окончательно находим

$$y = \int (-\cos x + C_1)\,dx + C_2 = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Значит, общее решение имеет вид

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \triangle$$

В общем случае введение новой искомой функции $z = y^{(k)}$ на k единиц понижает порядок уравнения

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

5.2.2. Уравнение, не содержащее независимой переменной

Пусть y — решение на (a, b) уравнения

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{5.4}$$

не содержащего явно независимой переменной x. Предположим, что существует обратная функция y^{-1}. Тогда

$$y'(x) = y'(y^{-1}(y(x))).$$

Положим $z = y' \circ y^{-1}$. Далее будем опускать аргумент x для краткости. Тогда

$$y' = z(y).$$

Выясним, какому уравнению необходимо удовлетворяет функция z, если порядок уравнения $n = 3$. Имеем

$$y'' = z'(y)y' = z'(y)z(y),$$

$$y^{(3)} = (z'(y)z(y))' = z''(y)y'z(y) + z'(y)z'(y)y' = z''(y)z^2(y) + z'(y)^2z(y).$$

При $x \in (a, b)$ имеем

$$F(y, z(y), z'(y)z(y), z''(y)z^2(y) + z'(y)^2z(y)) = 0.$$

Пусть функция y отображает интервал (a, b) в интервал (A, B). Тогда z — решение на (A, B) уравнения

$$F(y, z, z'z, z''z^2 + z'^2z) = 0,$$

если считать y независимой переменной.

Можно показать, что и в общем случае подстановка $y' = z(y)$ приводит к уравнению, порядок которого на единицу меньше, чем у уравнения (5.4).

Пример 5.2.2. Рассмотрим уравнение $(1 + y^2)yy'' = (3y^2 - 1)y'^2$.

Полагаем $z(y) = y'$, тогда $y'' = z'_y z$. Подставляя в исходное уравнение, имеем

$$(1 + y^2)yzz' = (3y^2 - 1)z^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Функция $z = 0$ — решение. Чтобы исключить деление на ноль, рассмотрим уравнение при $y > 0$, $z > 0$.

Разделив обе части на $z^2(1 + y^2)y$, находим

$$\frac{1}{z}\,dz = \frac{3y^2 - 1}{(1 + y^2)y}\,dy.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln z = 2\ln(1 + y^2) - \ln y + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

отсюда

$$\frac{yz}{(1 + y^2)^2} = C_1.$$

При $C_1 < 0$ эта формула описывает также решения, для которых $z < 0$. При $C_1 = 0$ получаем упомянутое выше решение $z = 0$.

Рассуждая аналогично, приходим к той же формуле и для области $y < 0$.

Возвращаясь к функции y, получим

$$\frac{yy'}{(1 + y^2)^2} = C_1.$$

Интегрируя ещё раз, найдём общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{1}{1 + y^2} = C_1x + C_2.$$

При замене $z(y) = y'$ могли быть потеряны решения вида $y = \mathrm{const}$. В данном случае они получаются из общего интеграла при $C_1 = 0$. △

5.2.3. Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных

Пусть функция F в уравнении

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

обладает свойством: при любом допустимом значении t

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

Тогда порядок уравнения понижается при помощи замены $z = y'/y$.

Пример 5.2.3. Рассмотрим уравнение

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$$

Обозначим левую часть уравнения через $F(x, y, y', y'')$. Тогда

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^2 F(x, y, y', y''),$$

то есть рассматриваемое уравнение — однородное по отношению к y, y', y''. Тогда сделаем подстановку

$$z = \frac{y'}{y}.$$

Отсюда $y' = zy$ и $y'' = z'y + z^2y$. При сокращении на y^2 уравнение примет вид

$$xz' - z = 0.$$

Решение этого уравнения с разделяющимися переменными: $z = Cx$.

Вернёмся к функции y:

$$\frac{y'}{y} = Cx,$$

следовательно, $y = Ae^{Bx^2}$, $A, B \in \mathbb{R}$. △

5.2.4. Уравнение в точных производных

Допустим, что левая часть уравнения

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

представляет собой производную от некоторой функции Φ. То есть

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Отсюда

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C.$$

Это уравнение, порядок которого на единицу меньше прежнего.

Пример 5.2.4. Рассмотрим задачу Коши

$$y'' = xy' + y + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Заметим, что данное уравнение можно переписать так:

$$(y')' = (xy)' + x'.$$

Используя линейность производной, приходим к уравнению

$$(y' - xy - x)' = 0.$$

Отсюда

$$y' - xy - x = C.$$

Принимая во внимание начальные условия, находим значение постоянной

$$C = y'(0) - 0 \cdot y(0) - 0 = 0.$$

Итак, остаётся решить уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = x(y + 1).$$

Разделив обе части на $y + 1$ и проинтегрировав, приходим к семейству функций

$$y = Ce^{x^2/2} - 1.$$

Подставим начальные данные, чтобы найти C:

$$y(0) = Ce^0 - 1,$$

отсюда $C = 2$.

Таким образом, решением поставленной задачи Коши является функция

$$y = 2e^{x^2/2} - 1, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad \triangle$$

Тема 6: Системы уравнений

Содержание

§6.1. Нормальная система

В дальнейшем в качестве аргумента искомых функций будем использовать букву t. Это связано с тем, что в прикладных задачах аргументом часто является время. Производную по t обозначаем точкой над функцией: $\frac{d}{dt}x = \dot{x}$.

6.1.1. Модель «хищник–жертва»

Рассмотрим простейшую модель, описывающую борьбу двух биологических видов — хищника и жертвы. Пусть в некотором лесу обитают зайцы в количестве $x(t)$ и лисы в количестве $y(t)$.

Если бы лис не было, то зайцы размножались бы со скоростью, пропорциональной их количеству: $\dot{x} = kx$. Однако, при наличии лис следует учесть зайцев, съеденных лисами. Предположим, что число встреч зайцев с лисами пропорционально числу тех и других. Тогда

$$\dot{x} = kx - axy.$$

Лисы вымирают при отсутствии зайцев: $\dot{y} = -ly$. Если же зайцы водятся в лесу, то лисы размножаются со скоростью, пропорциональной числу пойманных зайцев:

$$\dot{y} = -ly + bxy.$$

Таким образом мы приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \tag{6.1}$$

Эти уравнения описывают простейшую модель биологической системы хищник–жертва — ***модель Лотки–Вольтерра***. Решением такой системы является пара функций $x(t)$ и $y(t)$, обращающие каждое уравнение системы в тождество.

Текущее состояние системы хищник–жертва можно изображать точкой на плоскости, имеющей координаты $(x(t), y(t))$. С течением времени численность особей изменяется, поэтому точка перемещается по плоскости вдоль некоторой траектории γ, которую параметрически определяют функции $x(t)$ и $y(t)$.

Вектор с компонентами $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ касается кривой γ, если его отложить от точки $(x(t), y(t))$. Поэтому правая часть системы (6.1) определяет вектор, касательный к искомой траектории. Следовательно, мы можем представить себе как примерно ведут себя решения, если изобразим соответствующее векторное поле (рис. 6.1).

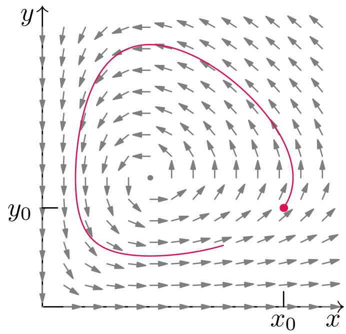

Рис. 6.1. Поле направлений движения, определяемое системой (6.1)

Если количество зайцев превышает количество лис (точка (x_0, y_0) на рис. 6.1), то обе популяции растут, пока лисы не начнут съедать больше зайцев, чем их прирост. Затем численность зайцев будет убывать, пока нехватка пищи не приведёт к вымиранию лис. Далее число лис уменьшится настолько, что зайцы снова начнут размножаться. Известно, что траектории системы (6.1) замкнуты, то есть в данной биологической системе происходят периодические колебания численности популяций.

Рассмотренная координатная плоскость Oxy называется *фазовым пространством* для системы (6.1), а построенная на ней траектория, соответствующая решениям $x(t)$, $y(t)$, — *фазовой траекторией*.

6.1.2. Нормальная система и её решение

Определение. ***Нормальной системой*** дифференциальных уравнений порядка n называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Если ввести в рассмотрение векторы

$$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t,r) = \begin{pmatrix} f_1(t,r) \\ \dots \\ f_n(t,r) \end{pmatrix},$$

то систему можно компактно записать в виде одного n-мерного уравнения

$$\dot{r} = f(t,r). \tag{6.2}$$

Определение. Вектор-функция φ — ***решение системы*** (6.2) на (a,b), если

- $\varphi \in C^1((a,b) \to \mathbb{R}^n)$;
- $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t,\varphi(t))$ на (a,b).

Определение. ***Задачей Коши*** для системы (6.2) называется задача нахождения её решения, удовлетворяющего начальному условию $r(t_0) = r_0$.

Интегральной кривой, как и прежде, называют график решения. Однако теперь это график вектор-функции, расположенный в $(n+1)$-мерном пространстве (рис. 6.2).

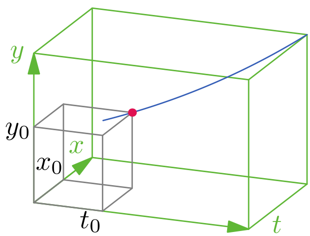

Рис. 6.2. Интегральная кривая двумерного уравнения

§6.2. Сведение уравнения к системе

Определение. Определим отображение Λ_n формулой

$$\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T.$$

Индекс n будем опускать, если его значение ясно из контекста.

Лемма 6.2.1 (о равносильной системе). *Если y — решение на (a,b) уравнения*

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), \tag{6.3}$$

то вектор-функция $\Lambda_n y$ *— решение на* (a,b) *системы*

$$\begin{pmatrix} \dot y_1 \\ \dots \\ \dot y_{n-1} \\ \dot y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \dots \\ y_n \\ f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

И наоборот, если $r = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ *— решение на* (a,b) *системы (6.4), то* y_1 *— решение на* (a,b) *уравнения (6.3), и при этом* $r = \Lambda_n y_1$*.*

Доказательство. Пусть y — решение уравнения (6.3). Определим n функций: $y_k = y^{(k-1)}$ при $k \in [1 : n]$. Продифференцируем введённые функции. При $k \in [1 : n-1]$ имеем

$$\dot y_k = y^{(k)} = y_{k+1}.$$

При $k = n$ будет

$$\dot y_n = y^{(n)} = f(t, y, \dot y, \dots, y^{(n-1)}) = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Отсюда ясно, что вектор $\Lambda_n y = (y, \dot y, \dots, y^{(n-1)})^T$ — решение системы (6.4).

Пусть дано, что $r = (y_1, \dots, y_n)^T$ — решение системы (6.4). Дифференцируя последовательно первое уравнение, находим

$$\begin{aligned}
&\ddot y_1 = \dot y_2 = y_3, \\
&y_1^{(3)} = \dot y_3 = y_4, \\
&\dots \\
&y_1^{(n-1)} = \dot y_{n-1} = y_n, \\
&y_1^{(n)} = \dot y_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = f(t, y_1, \dot y_1, \dots, y_1^{(n-1)}).
\end{aligned}$$

Следовательно, y_1 — решение (6.3) и $r = \Lambda_n y$. □

Определение. Систему (6.4) будем называть ***системой, равносильной уравнению*** (6.3).

Сведение к нормальной системе позволяет перенести теорию и методы решения систем на уравнения высших порядков.

§6.3. Автономная система

Определение. ***Автономной*** называется система вида

$$\dot r = f(r). \tag{6.5}$$

Другими словами, нормальная система уравнений автономна, если её правая часть не зависит от времени.

Замечание. Любая нормальная система $\dot{r} = f(t, r)$ может быть сведена к автономной при помощи введения дополнительной неизвестной $x_{n+1} = t$.

Всякое решение $r = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ системы (6.5) параметрически определяет траекторию в пространстве $\mathbb{R}^n$. Она является проекцией интегральной кривой в область $\operatorname{dom} f \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. ***Фазовым пространством*** системы (6.5) называется $\operatorname{dom} f$ — область определения её правой части.

Определение. ***Расширенным фазовым пространством*** системы (6.5) называется множество $\mathbb{R} \times \operatorname{dom} f$.

Другими словами, расширенное фазовое пространство — это та область, где расположены интегральные кривые системы.

Определение. ***Фазовая траектория*** — проекция интегральной кривой на фазовое пространство параллельно оси времени.

Определение. ***Фазовый портрет*** системы — совокупность её фазовых траекторий.

Определение. Вектор $f(r)$ называют ***фазовой скоростью*** в точке r.

Из формулы (6.5) следует, что фазовая траектория в каждой своей точке касается вектора поля фазовых скоростей.

Пример 6.3.1. Рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$\dot{x} = x.$$

Одно из его решений — функция $x = e^t$. Её график проходит в *расширенном фазовом пространстве* — плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Ось x — *фазовое пространство*. Функция $t \mapsto e^t$ параметрически определяет *фазовую траекторию* — положительную часть оси x. Направление движения отмечают стрелкой на фазовой траектории (рис. 6.3). △

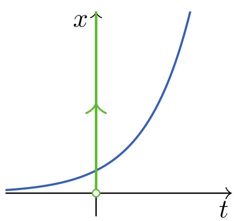

Рис. 6.3. Интегральная кривая и фазовая траектория скалярного уравнения $\dot{x} = x$

Пример 6.3.2. На рис. 6.4 изображена интегральная кривая и *фазовая траектория*, соответствующие решению $x = \cos t$, $y = \sin t$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Для данной системы *фазовое пространство* — плоскость $\mathbb{R}^2_{x,y}$, *расширенное фазовое пространство* — пространство $\mathbb{R}^3_{t,x,y}$. $\triangle$

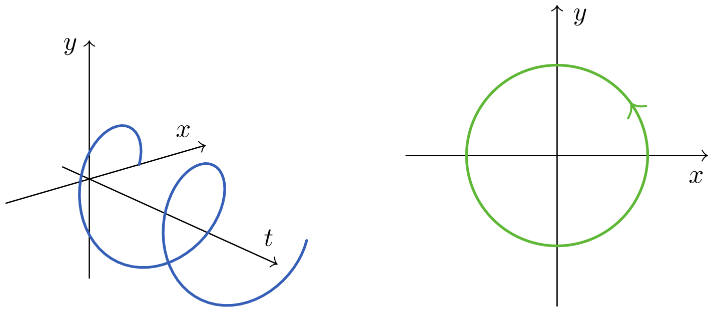

Рис. 6.4. Интегральная кривая и фазовая траектория двумерного уравнения

Определение. ***Точкой покоя***, или ***положением равновесия***, или ***стационарным состоянием*** системы (6.5) называют точку r_0, такую что $f(r_0) = 0$.

Упражнение 6.3.1. Докажите, что r_0 — точка покоя системы (6.5), если и только если $r \equiv r_0$ — её решение.

Теорема 6.3.1 (свойства автономной системы). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega)$.*

(i) Если r — решение системы (6.5) на (a, b), $\tau \in \mathbb{R}$, то $r(t - \tau)$ — решение на $(a + \tau, b + \tau)$ с той же траекторией.

(ii) Если фазовые траектории решений r_1 и r_2 имеют общую точку $r_1(t_1) = r_2(t_2)$, то $r_1(t_1 + t) \equiv r_2(t_2 + t)$ при всех t, для которых определены обе части тождества.

(iii) Пусть r_0 — точка покоя системы (6.5), $r \not\equiv r_0$ — решение (6.5) на (a, b). Тогда $r(t) \neq r_0$ при всех $t \in (a, b)$.

(iv) Пусть r — решение (6.5) на $\mathbb{R}$ и не положение равновесия, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \neq t_2$, $r(t_1) = r(t_2)$. Тогда r — периодическая функция, а соответствующая траектория — замкнутая кривая без самопересечений.

Доказательство. (i) Если r — решение, то $\dot{r} \equiv f(r)$ на (a, b). Значит, $\dot{r}(t-\tau) \equiv f(r(t - \tau))$ при $t \in (a + \tau, b + \tau)$. Решения $r(t)$ и $r(t - \tau)$ имеют одну и ту же

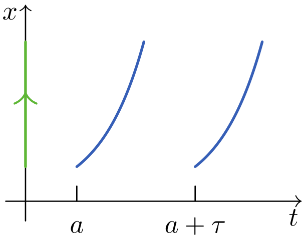

Рис. 6.5. Сдвиг по времени даёт другое решение, но сохраняет траекторию

траекторию, так как их графики отличаются параллельным переносом вдоль оси t (рис. 6.5).

(ii) Рассмотрим вектор-функции $s_1(t) = r_1(t_1 + t)$ и $s_2(t) = r_2(t_2 + t)$. По свойству (i) они является решением системы (6.5). Кроме того,

$$s_1(0) = r_1(t_1) = r_2(t_2) = s_2(0).$$

Тогда по теореме 8.2.1 будет $s_1 \equiv s_2$ при всех t, для которых определены обе части тождества.

(iii) По свойству (ii) если фазовая траектория имеет общую точку с положением равновесия, то она должна совпадать с ним при всех t.

(iv) Пусть $t_1 < t_2$. По свойству (i) функция $s(t) = r(t + t_2 - t_1)$ — тоже решение, при этом $s(t_1) = r(t_2) = r(t_1)$. Тогда по теореме 8.2.1 $r \equiv s$ на $\mathbb{R}$. Значит, $t_2 - t_1$ — период решения r.

Докажем, что найдётся наименьший положительный период. Для этого установим, что $T := \inf\{d > 0 \mid r(t + d) \equiv r(t)\} > 0$ и T — период.

Так как r — не положение равновесия, то найдётся число $t_3 \neq t_1$ такое, что $r(t_1) \neq r(t_3)$. Предположим противное: для любого $\delta > 0$ найдётся период, меньший δ. Тогда в любой δ-окрестности точки t_1 найдётся точка t', в которой $r(t') = r(t_3)$. Из таких точек составим последовательность $t'_n \to t_1$. При этом $|r(t'_n) - r(t_1)| = |r(t_3) - r(t_1)|$ для любого n, а значит, вектор-функция r не является непрерывной в t_1. Это противоречит определению решения.

Построим последовательность периодов $d_i \to T$. В каждой точке $t \in \mathbb{R}$ имеем $r(t+d_i) \equiv r(t)$. Принимая во внимание непрерывность r и осуществляя предельный переход при $i \to \infty$, получаем, что T также является периодом.

Теперь покажем, что у фазовой траектории решения r нет точек самопересечения. Допустим при некоторых t^* и t^{**} будет $r(t^*) = r(t^{**})$, но $|t^* - t^{**}| < T$. Рассуждая также, как в начале доказательства пункта (iv), получаем, что $|t^* - t^{**}|$ — период. Но это невозможно, поскольку T — наименьший период. ☐

Следствие 6.3.1.1 (виды траекторий). *Пусть $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Тогда всякая фазовая траектория автономной системы (6.5) принадлежит одному из следующих типов:*

(a) положение равновесия;

(б) *замкнутая траектория без самопересечений;*

(в) *незамкнутая траектория без самопересечений.*

Доказательство. Пусть r — решение (6.5) и не положение равновесия. Тогда либо $r(t_1) \neq r(t_2)$ при любых t_1 и t_2, $t_1 \neq t_2$. В этом случае траектория — незамкнутая кривая без самопересечений. Либо при некоторых t_1 и t_2, $t_1 \neq t_2$, будет $r(t_1) = r(t_2)$. Тогда при помощи сдвигов $r(t + k(t_2 - t_1))$, где $k \in \mathbb{Z}$, решение r продолжается на всю вещественную ось. Следовательно, по свойству (iv) теоремы 6.3.1 траектория — замкнутая кривая без самопересечений. □

Теорема 6.3.2 (о понижении размерности автономной системы). *Пусть* $f_1, f_2 \in C(G)$. *Тогда фазовые траектории системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \tag{6.6}$$

вне точек, где $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$, *совпадают с интегральными кривыми уравнения*

$$f_2(x, y)\, dx - f_1(x, y)\, dy = 0, \tag{6.7}$$

и наоборот.

Доказательство. См. [2, теорема 3.3.2]. □

Замечание. Уравнение (6.7) формально получается из системы (6.6), если записать производные в виде отношения дифференциалов и исключить dt.

Тема 7: Теорема существования

Содержание

§7.1. Теорема существования

Определение. ***Норма вектора*** $r = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$|r| := \max_{i \in [1:n]} |x_i|.$$

Определение. ***Норма матрицы*** $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$:

$$|A| := \max_{i \in [1:n],\ j \in [1:m]} |\alpha_{ij}|\,.$$

Лемма 7.1.1. *Пусть* $f \in C\left((a,b) \to \mathbb{R}^n\right)$. *Тогда*

$$\left| \int\limits_a^b f(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(\tau)|\, d\tau.$$

Доказательство. Принимая во внимание определение нормы, имеем

$$\left| \int\limits_a^b f(\tau)\, d\tau \right| = \max_i \left| \int\limits_a^b f_i(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \max_i \int\limits_a^b |f_i(\tau)|\, d\tau \leqslant \max_i \int\limits_a^b \max_j |f_j(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \max_i \int\limits_a^b |f(\tau)|\, d\tau = \int\limits_a^b |f(\tau)|\, d\tau.$$ □

Лемма 7.1.2. *Пусть* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$|AB| \leqslant n|A||B|.$$

Доказательство. Пусть $AB = (\gamma_{ij})$. Тогда

$$|\gamma_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}| \leqslant \sum_{k=1}^n |A||B| = n|A||B|.$$

Поэтому $|AB| \leqslant n|A||B|$. □

Определение. Множество функций $F = \{f\}$, определённых на D, называется ***равностепенно непрерывным*** на D, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любой функции $f \in F$ и для любых значений $x_1, x_2 \in D$ из неравенства $|x_2 - x_1| < \delta$ следует $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Замечание. Вместо «множество функций F равностепенно непрерывно» говорят также «функции множества F равностепенно непрерывны».

Лемма 7.1.3 (Арцела–Асколи). *Пусть функции последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничены*[1] *и равностепенно непрерывны на $[a, b]$. Тогда из неё можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[a, b]$.*

Доказательство. По условию

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}, x \in [a,b]} |f_n(x)| < +\infty.$$

Составим последовательность чисел

$$\varepsilon_k = \frac{M}{2^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В силу равностепенной непрерывности последовательности, по каждому ε_k можно подобрать δ_k, такое что если $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $|x_2 - x_1| < \delta_k$, то для любого n будет $|f_n(x_2) - f_n(x_1)| < \varepsilon_k$.

График каждой функции f_n расположен в прямоугольнике $[a, b] \times [-M, M]$. Разобьём этот прямоугольник на меньшие прямоугольники с вертикальной стороной ε_1 и горизонтальной стороной, не превосходящей δ_1 (рис. 7.1).

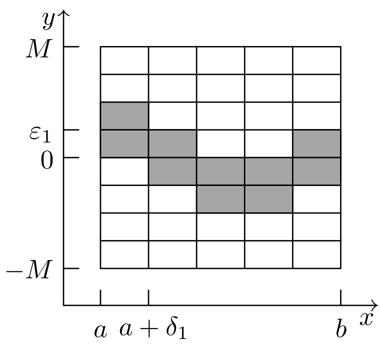

Рис. 7.1

График каждой функции f_n проходит не более, чем по двум соседним прямоугольникам каждой вертикальной полосы. Количество смежных пар прямоугольников в первой полосе конечно. Значит, найдётся пара, по которой проходит бесконечное множество графиков функций последовательности — закрасим

[1] то есть найдётся число M, такое что для всех n верно $|f_n| \leqslant M$

её. Будем рассматривать теперь только те функции, графики которых проходят по закрашенным прямоугольникам. Во второй полосе выберем пару соседних прямоугольников, через которые проходит бесконечное множество функции из выбранного семейства. Эту пару также закрасим и далее будем рассматривать только те функции, графики которых проходят по закрашенной области.

За конечное число шагов доберёмся до крайней правой полосы. Таким образом, получим множество (закрашено на рис. 7.1), внутри которого проходят графики функций некоторой подпоследовательности $F_1^* = \{f_{n_k}\}$. Для любых функций $f, g \in F_1^*$ верно: $|f(x) - g(x)| < 2\varepsilon_1$ при любом $x \in [a, b]$.

Выберем первую функцию из F_1^* и обозначим её f_1^*. Для оставшейся последовательности проведём те же рассуждения, что и выше, взяв вместо ε_1 число ε_2. Получится подпоследовательность F_2^*, первую функцию которой обозначим через f_2^*. Продолжая аналогично, получим последовательность $\{f_n^*\}$.

Докажем, что последовательность $\{f_n^*\}$ сходится равномерно на $[a, b]$, используя критерий Коши.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём такое N, что $2\varepsilon_N < \varepsilon$. При любом $k \in \mathbb{N}$ будет $f_N^*, f_{N+k}^* \in F_N^*$, поэтому при любом $x \in [a, b]$

$$|f_N^*(x) - f_{N+k}^*(x)| < 2\varepsilon_N < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{f_n^*\}$ сходится равномерно. □

Замечание. Лемму 7.1 нетрудно обобщить и на вектор-функции, применяя её последовательно к каждой из компонент.

Определение. Пусть $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Вектор-функция φ — ***решение на*** $[a, b]$ ***интегрального уравнения***

$$r(t) = r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))\, d\tau,$$

если

- $\varphi \in C([a, b] \to \mathbb{R}^n)$;
- $\varphi(t) \equiv r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$ на $[a, b]$.

Лемма 7.1.4 (о равносильном интегральном уравнении). *Пусть $t_0 \in [a, b]$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область, $(t_0, r_0) \in G$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$. Тогда φ — решение на $[a, b]$ задачи Коши*

$$\dot{r} = f(t, r), \quad r(t_0) = r_0, \tag{7.1}$$

если и только если φ — решение на $[a, b]$ уравнения

$$r(t) = r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))\, d\tau. \tag{7.2}$$

Доказательство. Пусть φ — решение (7.1) на $[a,b]$. Тогда $\varphi \in C[a,b]$. Интегрируя равенство $\dot\varphi(\tau) = f(\tau,\varphi(\tau))$ от t_0 до $t \in [a,b]$, имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau.$$

Поскольку $\varphi(t_0) = r_0$, то функция φ — решение уравнения (7.2) по определению.

Докажем обратное. Пусть φ — решение (7.2) на $[a,b]$. Тогда из равенства

$$\varphi(t) = r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau \tag{7.3}$$

следует, что $\varphi \in C^1[a,b]$. Дифференцируя (7.3) по t, получаем: $\dot\varphi \equiv f(t,\varphi(t))$ на $[a,b]$. Кроме того, из (7.3) вытекает $\varphi(t_0) = r_0$. Таким образом, φ — решение (7.1) по определению. $\square$

Замечание. Определение решения интегрального уравнения и лемма 7.1.4 аналогично формулируются для любого промежутка $\langle a,b\rangle$.

Лемма 7.1.5 (о гладкой стыковке решений). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ — область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0,r_0) \in G$, φ_- — решение на $(a,t_0]$, φ_+ — решение на $[t_0,b)$ задачи Коши*

$$\dot r = f(t,r), \quad r(t_0) = r_0. \tag{7.4}$$

Тогда φ — решение задачи (7.4) на промежутке (a,b), где

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & \text{если } t \in (a,t_0), \\ \varphi_+(t), & \text{если } t \in [t_0,b). \end{cases}$$

Доказательство. Так как $\varphi(t_0) = \varphi_+(t_0) = r_0 = \varphi_-(t_0)$, то $\varphi \equiv \varphi_-$ на $(a,t_0]$. Значит, φ — решение задачи (7.4) на $(a,t_0]$. Тогда по лемме 7.1.4 при $t \in (a,t_0]$

$$\varphi(t) = r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau.$$

Поскольку $\varphi \equiv \varphi_+$ на $[t_0,b)$, то по той же лемме последняя формула верна и для $t \in [t_0,b)$. Следовательно, она верна для всех $t \in (a,b)$. Значит, по лемме (7.2) функция φ — решение задачи (7.4) на (a,b). $\square$

Определение 7.1.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ — область, $(t_0,r_0) \in G$. Поскольку G — открытое множество, то найдутся числа $a,b > 0$, такие что параллелепипед

$$\Pi := \big\{(t,r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t-t_0| \leqslant a, |r-r_0| \leqslant b\big\}$$

целиком содержится в области G. Так как Π — компакт, то существует число $M := \max\limits_{(t,r)\in\Pi} |f(t,r)|$. Положим $h := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ (если $M = 0$, то $h := a$). Отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$ называется ***отрезком Пеано***, соответствующим точке (t_0, r_0) (рис. 7.2).

Отрезок Пеано, таким образом, определён неоднозначно. Зафиксируем один из них и разобьём его правую половину на $N \in \mathbb{N}$ равных частей точками

$$t_k := t_0 + \frac{kh}{N}, \quad k \in [1 : N].$$

Определим ломаную Эйлера $E_N \colon [t_0, t_0 + h] \to \mathbb{R}$ рекуррентно:

$$\begin{aligned} &E_N(t_0) = r_0, \\ &E_N(t) = E_N(t_k) + f(t_k, E_N(t_k))(t - t_k), \quad \text{если } t \in (t_k, t_{k+1}]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

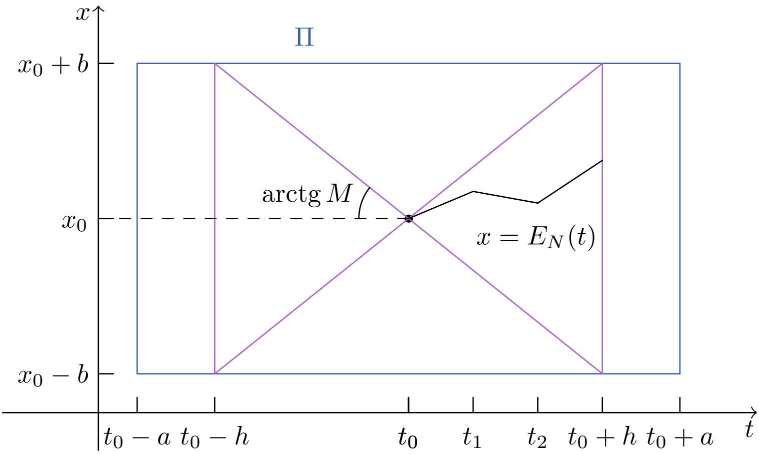

Рис. 7.2. Отрезок Пеано и ломаная Эйлера

Если $(t_k, E_N(t_k)) \notin G$ при некотором k, то функция E_N не может быть определена на всём промежутке $[t_0, t_0 + h]$. Следующая лемма показывает, что такая ситуация исключена.

Лемма 7.1.6 (свойства ломаной Эйлера). *Для любого* $t \in [t_0, t_0 + h]$

(i) функция E_N *определена в точке* t;

(ii) $|E_N(t) - r_0| \leqslant M(t - t_0)$;

Доказательство. Методом математической индукции установим, что утверждения (i), (ii) верны при $t \in [t_0, t_k]$ для любого $k \in [1 : N]$.

При $k = 1$ функция E_N определена на $[t_0, t_1]$. Имеем

$$|E_N(t) - r_0| = |r_0 + f(t_0, r_0)(t - t_0) - r_0| = |f(t_0, r_0)|(t - t_0) \leqslant M(t - t_0).$$

Допустим, что утверждения (i), (ii) установлены для $t \in [t_0, t_k]$ при некотором $k \in [1 : N - 1]$. Из пункта (ii) тогда следует

$$|E_N(t_k) - r_0| \leqslant M(t_k - t_0) \leqslant Mh \leqslant M\frac{b}{M} = b,$$

то есть $(t_k, E_N(t_k)) \in \Pi$, а значит E_N можно определить на $[t_k, t_{k+1}]$.

Проверим (ii) при $t \in (t_k, t_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}|E_N(t) - E_N(t_0)| &\leqslant |E_N(t) - E_N(t_k)| + |E_N(t_k) - E_N(t_0)| \leqslant \\ &\leqslant |f(t_k, E_N(t_k))|(t - t_k) + M(t_k - t_0) \leqslant M(t - t_k) + M(t_k - t_0) = M(t - t_0). \ \square\end{aligned}$$

Теорема 7.1.1 (Пеано, существование решения ЗК). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ — область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда задача*

$$\dot{r} = f(t, r), \quad r(t_0) = r_0$$

имеет решение, определённое на отрезке Пеано, соответствующему (t_0, r_0).

Доказательство. Не умаляя общности считаем, что $t_0 = 0$, $r_0 = 0$ (в противном случае перенесём начало координат в точку (t_0, r_0)).

Пусть $[-h, h]$ — отрезок Пеано, соответствующий начальной точке. Установим существование решения на $[0, h]$. Существование решения на $[-h, 0]$ тогда получится как следствие, если в исходном уравнении заменить t на $-t$. Объединяя решения на $[-h, 0]$ и $[0, h]$, по лемме 7.1.5 получим решение на $[-h, h]$.

Используя (7.5), построим последовательность ломаных Эйлера $\{E_N\}_{N=1}^{\infty}$. По лемме 7.1.6 будет $|E_N(t)| \leqslant Mh \leqslant b$. Значит, последовательность $\{E_N\}$ равномерно ограничена.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta := \varepsilon/M$ (при $M = 0$ теорема тривиальна). При $t_1, t_2 \in [0, h]$, $t_1 < t_2$, $|t_2 - t_1| < \delta$ по формуле Ньютона–Лейбница[1] находим

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \dot{E}_N(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} |\dot{E}_N(\tau)|\, d\tau.$$

Из (7.5) следует, что $|\dot{E}_N(t)| \leqslant M$ в точках, где производная определена. Тогда

$$|E_N(t_2) - E_N(t_1)| \leqslant M(t_2 - t_1) < M\delta = \varepsilon,$$

значит, последовательность $\{E_N\}$ равностепенно непрерывна.

[1] Имеется в виду обобщение формулы Ньютона–Лейбница, см., например, с. 142 (п. 310) в книге: Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II, 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

По лемме Арцела–Асколи 7.1.3 найдётся подпоследовательность $\{E_{N_m}\}$, равномерно сходящаяся к некоторой функции $\varphi \in C([0,h] \to \mathbb{R}^n)$. Покажем, что φ — это и есть решение поставленной задачи Коши.

В силу леммы 7.1.4 достаточно установить, что для φ верно

$$\varphi(t) \equiv \int\limits_0^t f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \quad \text{на } [0,h].$$

Не умаляя общности вместо N_m пишем N. По формуле Ньютона–Лейбница

$$E_N(t) = \int\limits_0^t \dot{E}_N(\tau)\, d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$\varphi(t) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^t \dot{E}_N(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом, нужно установить, что

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^t \dot{E}_N(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau.$$

Для этого покажем, что при всех достаточно больших N величину

$$\Delta_N = \left| \int\limits_0^t f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau - \int\limits_0^t \dot{E}_N(\tau)\, d\tau \right|$$

можно сделать меньше любого наперёд заданного числа $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\Delta_N \leqslant \int\limits_0^t |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau \leqslant \int\limits_0^h |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{E}_N(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau.$$

Функция f непрерывна, а значит и равномерно непрерывна на параллелепипеде Π, по которому строится отрезок Пеано. Поэтому найдётся число $\delta > 0$, такое что $|f(P_2) - f(P_1)| < \varepsilon/h$, если $|P_2 - P_1| < \delta$ и $P_1, P_2 \in \Pi$.

Если при всех достаточно больших N при всех $k \in [0 : N-1]$ и $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$ будет

$$|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| < \delta, \tag{7.6}$$

то

$$|f(t_k, E_N(t_k)) - f(\tau, \varphi(\tau))| < \frac{\varepsilon}{h},$$

а значит, получится требуемое неравенство

$$\Delta_N \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon}{h} d\tau = \varepsilon.$$

Итак, остаётся доказать неравенство (7.6). Пользуясь неравенством треугольника, оценим расстояние между точками $A = (t_k, E_N(t_k))$ и $D = (\tau, \varphi(\tau))$ суммой расстояний $AB + BC + CD$ (рис. 7.3). Имеем

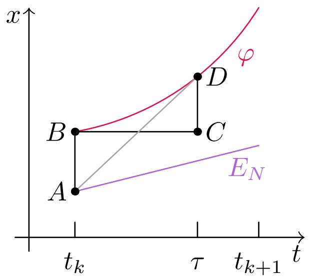

Рис. 7.3

$$\begin{aligned}
&|(t_k, E_N(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| \\
&\leqslant |(t_k, E_N(t_k)) - (t_k, \varphi(t_k))| + |(t_k, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(t_k))| + |(\tau, \varphi(t_k)) - (\tau, \varphi(\tau))| \\
&= |E_N(t_k) - \varphi(t_k)| + |t_k - \tau| + |\varphi(t_k) - \varphi(\tau)|.
\end{aligned}$$

Каждое из трёх слагаемых можно сделать меньше $\delta/3$ при всех достаточно больших N: первое слагаемое — в силу равномерной сходимости E_N к φ, второе слагаемое — в силу того, что оно не превосходит h/N, и третье слагаемое — в силу равномерной непрерывности φ на $[0, h]$. Отсюда следует (7.6), что завершает доказательство теоремы. $\square$

Тема 8: Теорема единственности

Содержание

§8.1. Класс Липшица

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет ***условию Липшица*** на множестве D, если найдётся такое число L (***константа Липшица***), что для любых точек $r_1, r_2 \in D$ выполнено

$$|f(r_2) - f(r_1)| \leqslant L|r_2 - r_1|.$$

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^{n+1}_{t,r} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет ***условию Липшица по*** r ***(равномерно по*** t***)*** на множестве D, если найдётся такое число L, что для любых точек $(t, r_1), (t, r_2) \in D$ справедливо неравенство

$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leqslant L|r_2 - r_1|.$$

Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_r(D)$.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^{n+1}_{t,r} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет ***условию Липшица*** по r ***локально*** в области G, если для любой точки $(t_0, r_0) \in G$ можно указать её окрестность $U = U(t_0, r_0)$, такую что $f \in \mathrm{Lip}_r(U)$. Обозначение: $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$.

Пример 8.1.1. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда $f \in \mathrm{Lip}[1/2, 1]$, $f \notin \mathrm{Lip}(0, 1]$, $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(0, 1]$. △

Пример 8.1.2. Если $f \in C^1[a, b]$, то $f \in \mathrm{Lip}[a, b]$. Обратное неверно: например, при $f(x) = |x|$ будет $f \in \mathrm{Lip}[-1, 1]$. △

Пример 8.1.3. Пусть $f(t, x) = 1/t + 1/x$. Тогда $f \in \mathrm{Lip}_x((0, +\infty) \times [1/2, 1])$, $f \notin \mathrm{Lip}_x((0, +\infty) \times (0, 1])$, $f \in \mathrm{Lip}_{x,loc}((0, +\infty) \times (0, 1])$. △

Из определения нормы следует, что f удовлетворяет условию Липшица (глобальному или локальному) тогда и только тогда, когда этому условию удовлетворяет каждая из её n компонент.

Установим простое достаточное условие того, что $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$.

Лемма 8.1.1. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ *— область,* $f \in C(G \to \mathbb{R}^m)$, $f'_r \in M_{m,n}(C(G))$. *Тогда* $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$.

Кроме того, если $K \subset G$ *— выпуклый компакт,*

$$M_1 = \max_{(t,r)\in K} |f'_r(t, r)|,$$

то для любых $(t, r_1), (t, r_2) \in K$

$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leqslant nM_1 |r_2 - r_1|.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $(t, r_1), (t, r_2) \in K$. В силу выпуклости K будет $(t, r_1 + s(r_2 - r_1)) \in K$ при $s \in [0, 1]$. Положим

$$g(s) := f(t, r_1 + s(r_2 - r_1)).$$

Тогда

$$f(t, r_2) - f(t, r_1) = g(1) - g(0) = \int\limits_0^1 g'(s)\, ds = \int\limits_0^1 f'_r \cdot r'_s\, ds =$$

$$= \int\limits_0^1 f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1)) \cdot (r_2 - r_1)\, ds.$$

Принимая во внимание леммы 7.1.1 и 7.1.2, получаем

$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leqslant \int\limits_0^1 n\, |f'_r(t, r_1 + s(r_2 - r_1))|\, |r_2 - r_1|\, ds \leqslant nM_1 |r_2 - r_1|.$$

Правая часть неравенства не зависит от t, поэтому $f \in \mathrm{Lip}_r(K)$.

Возьмём произвольную точку $(t_0, r_0) \in G$ и построим замкнутый параллелепипед $B \subset G$ с центром в этой точке. По доказанному $f \in \mathrm{Lip}_r(B)$. Значит, для любой точки из G можно указать окрестность (например, внутренность B), в которой f удовлетворяет условию Липшица по r. Поэтому $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$. $\square$

Ясно, что $\mathrm{Lip}_r(G) \subset \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$ для произвольной области G. Обратного включения нет. Однако ситуация меняется, если рассматривать функцию на компактных подмножествах области G.

Лемма 8.1.2. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ *— область,* $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$, $K \subset G$ *— компакт. Тогда* $f \in \mathrm{Lip}_r(K)$.

Доказательство. Докажем методом от противного. Пусть $f \notin \mathrm{Lip}_r(K)$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ найдётся пара точек (t_N, r_N), $(t_N, \widetilde{r}_N) \in K$, для которых верно неравенство

$$|f(t_N, r_N) - f(t_N, \widetilde{r}_N)| > N|r_N - \widetilde{r}_N|. \tag{8.1}$$

Поскольку K — компакт, то из последовательности $\{(t_N, r_N)\}$ можно выбрать подпоследовательность с номерами $\{N_m\}$, сходящуюся к некоторой точке $(t, r) \in K$. Затем из последовательности $\{(t_{N_m}, \widetilde{r}_{N_m})\}$ выберем подпоследовательность с номерами $\{N_{m_k}\}$, сходящуюся к $(t, \widetilde{r})$. Далее считаем, что исходная последовательность совпадает с выбранной подпоследовательностью.

Возможны два случая: $r = \widetilde{r}$ и $r \neq \widetilde{r}$. Рассмотрим сначала первый из них.

По условию $f \in \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$, значит, найдётся окрестность U точки (t, r), в которой $f \in \mathrm{Lip}_r(U)$, то есть существует постоянная L, для которой

$$|f(t', r') - f(t', r'')| \leqslant L|r' - r''|$$

при любых $(t', r'), (t', r'') \in U$. Выберем номер N так, чтобы $N > L$ и (t_N, r_N), $(t_N, \widetilde{r}_N) \in U$, и положим $t' = t_N$, $r' = r_N$, $r'' = \widetilde{r}_N$. Тогда из неравенства (8.1) следует

$$|f(t', r') - f(t', r'')| > N|r' - r''| \geqslant L|r' - r''|,$$

что противоречит предыдущему неравенству.

Пусть теперь $r \neq \widetilde{r}$. В области G выберем непересекающиеся параллелепипеды $R = [a, b] \times X$ и $\widetilde{R} = [a, b] \times \widetilde{X}$, для которых точки (t, r) и $(t, \widetilde{r})$ соответственно являются внутренними. Рассмотрим функцию

$$g(t, x, y) := \frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|},$$

определённую на компакте $[a, b] \times X \times \widetilde{X}$, где она непрерывна, а значит, ограничена некоторым числом L. Выбирая номер $N > L$, такой что $(t_N, r_N) \in R$ и $(t_N, \widetilde{r}_N) \in \widetilde{R}$, из (8.1) получаем

$$g(t_N, r_N, \widetilde{r}_N) > N > L.$$

Это противоречие завершает доказательство леммы. □

§8.2. Теорема единственности

Как было показано в примере 2.1.2, одной лишь непрерывности правой части уравнения недостаточно для единственности решения. В этом параграфе будет доказан вариант теоремы единственности, когда в качестве достаточных условий применяется условие Липшица.

Лемма 8.2.1 (Гронуолл). *Пусть $\varphi \in C[a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, $\lambda, \mu \geqslant 0$, при любом $t \in [a, b]$ верно неравенство*

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau \right|.$$

Тогда для любого $t \in [a, b]$

$$\varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu|t - t_0|}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $t \geqslant t_0$ (при $t < t_0$ доказательство аналогично). Предположим, что $\lambda > 0$, и введём функцию

$$v(t) := \lambda + \mu \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Имеем $v(t) > 0$, $v'(t) = \mu\varphi(t) \leqslant \mu v(t)$. Отсюда

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \leqslant \mu.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[t_0, t]$, получаем

$$v(t) \leqslant v(t_0) e^{\mu(t-t_0)}.$$

Следовательно,

$$\varphi(t) \leqslant v(t) \leqslant v(t_0) e^{\mu(t-t_0)} = \lambda e^{\mu(t-t_0)}.$$

Если же $\lambda = 0$, то при любом $\lambda_1 > 0$ верно

$$\varphi(t) \leqslant \mu \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau \leqslant \lambda_1 + \mu \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau.$$

По уже доказанному имеем

$$\varphi(t) \leqslant \lambda_1 e^{\mu(t-t_0)}.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda_1 \to 0$, получаем $\varphi(t) \leqslant 0$. Значит, лемма верна и при $\lambda = 0$. □

Замечание. Лемма 8.2.1 аналогично формулируется и доказывается для любого промежутка $\langle a, b \rangle$.

Теорема 8.2.1 (Пикар, существование и единственность решения ЗК). *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ *— область,* $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$, $(t_0, r_0) \in G$. *Тогда*

(i) на отрезке Пеано существует решение задачи

$$\dot{r} = f(t, r), \quad r(t_0) = r_0; \tag{8.2}$$

(ii) если ψ_1 *и* ψ_2 *— решения (8.2) на* (a, b), *то* $\psi_1 \equiv \psi_2$ *на* (a, b).

Доказательство. Будем считать, что $t_0 = 0$, $r_0 = 0$ (в противном случае перенесём начало координат в точку (t_0, r_0)). Достаточно установить существование решения на отрезке $[0, h]$ — правой половине отрезка Пеано (см. рассуждения в начале доказательства теоремы 7.1.1).

Пусть

$$\Pi := \bigl\{(t,r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t| \leqslant A, |r| \leqslant B\bigr\} \subset G,$$
$$M := \max_{(t,r)\in\Pi} |f(t,r)|.$$

Тогда в качестве h можно взять число $\min\{A, B/M\}$ (см. определение 7.1.1).

На отрезке $[0,h]$ зададим последовательность функций

$$\varphi_0(t) = 0,$$
$$\varphi_{k+1}(t) = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau.$$

Дальнейшее изложение доказательства состоит из следующих этапов:

1. Докажем корректность определения последовательности $\{\varphi_k\}$: чтобы построить функцию φ_{k+1} должно быть $(t, \varphi_k(t)) \in G$ при всех $t \in [0,h]$.
2. Покажем, что последовательность $\{\varphi_k\}$ равномерно на $[0,h]$ сходится к некоторой функции φ.
3. Установим, что φ — решение интегрального уравнения, равносильного задаче (8.2) (см. лемму 7.1.4).
4. Применив лемму Гронуолла докажем единственность решения (пункт (ii)).

1. При $k=0$, очевидно, $(t, \varphi_k(t)) \in G$. Допустим справедливость этого утверждения при некотором k. Тогда функция φ_{k+1} определена на $[0,h]$ и

$$|\varphi_{k+1}(t)| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau, \varphi_k(\tau))|\, d\tau \leqslant Mt \leqslant Mh \leqslant M\frac{B}{M} = B,$$

что влечёт включение $(t, \varphi_{k+1}(t)) \in \Pi \subset G$ при всех $t \in [0,h]$.

2. Воспользуемся критерием Коши. А именно, установим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$, такое что при всех $m \geqslant N$, всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $t \in [0,h]$

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leqslant \varepsilon.$$

По лемме 8.1.2 будет $f \in \mathrm{Lip}_r(\Pi)$ с некоторой константой Липшица L. Индукцией по m докажем неравенство

$$|\varphi_{m+k}(t) - \varphi_m(t)| \leqslant \frac{ML^m t^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{8.3}$$

При $m = 0$ утверждение верно, так как

$$|\varphi_k(t) - \varphi_0(t)| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))|\, d\tau \leqslant Mt.$$

Допуская его справедливость при некотором m, имеем

$$|\varphi_{m+1+k}(t)-\varphi_{m+1}(t)| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau,\varphi_{m+k}(\tau))-f(\tau,\varphi_m(\tau))|\,d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_0^t L|\varphi_{m+k}(\tau)-\varphi_m(\tau)|\,d\tau \leqslant \int\limits_0^t L\frac{ML^m\tau^{m+1}}{(m+1)!}\,d\tau = \frac{ML^{m+1}t^{m+2}}{(m+2)!},$$

что и требовалось. Из (8.3) вытекает, что при любом $t \in [0,h]$

$$|\varphi_{m+k}(t)-\varphi_m(t)| \leqslant \frac{ML^m h^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{8.4}$$

Выражение в правой части не зависит от t и k и стремится к нулю при $m\to\infty$, поскольку оно является общим членом ряда Тейлора для экспоненты. Значит, последовательность $\{\varphi_m\}$ удовлетворяет критерию Коши. Обозначим через φ её предел на $[0,h]$.

3. Переходя к пределу при $m\to\infty$ в равенстве

$$\varphi_{m+1}(t) = \int\limits_0^t f(\tau,\varphi_m(\tau))\,d\tau,$$

получаем

$$\varphi(t) = \lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^t f(\tau,\varphi_m(\tau))\,d\tau. \tag{8.5}$$

В пункте 1 было установлено, что $(t,\varphi_m(t))\in\Pi$ при всех $t\in[0,h]$. Тогда при $m\to+\infty$ будет $(t,\varphi(t))\in\Pi$ при всех таких t. Следовательно,

$$|f(\tau,\varphi_m(\tau))-f(\tau,\varphi(\tau))| \leqslant L\,|\varphi_m(\tau)-\varphi(\tau)|\,.$$

Учитывая равномерную сходимость φ_m, из данного неравенства следует, что $f(t,\varphi_m(t))\to f(t,\varphi(t))$ при $m\to+\infty$ равномерно на $[0,h]$. Это позволяет внести знак предела под интеграл в (8.5). После этого по лемме 7.1.4 заключаем, что φ — решение задачи (8.2) на $[0,h]$.

4. Пусть ψ_1 и ψ_2 — решения (8.2) на (a,b). По лемме 7.1.4

$$\psi_1(t) = \int\limits_0^t f(\tau,\psi_1(\tau))\,d\tau, \quad \psi_2(t) = \int\limits_0^t f(\tau,\psi_2(\tau))\,d\tau,$$

поэтому

$$|\psi_1(t)-\psi_2(t)| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau,\psi_1(\tau))-f(\tau,\psi_2(\tau))|\,d\tau.$$

Рассмотрим произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, содержащий ноль. Графики функций ψ_1 и ψ_2 на $[\alpha, \beta]$ — компактные множества. По лемме 8.1.2 найдётся постоянная $\widetilde{L}$, такая что

$$|f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))| \leqslant \widetilde{L}|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|$$

при всех $\tau \in [\alpha, \beta]$. Следовательно,

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leqslant \widetilde{L} \int\limits_0^t |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|\, d\tau.$$

По лемме Гронуолла 8.2.1 будет $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| = 0$ на $[\alpha, \beta]$, то есть ψ_1 и ψ_2 совпадают на $[\alpha, \beta]$. Поскольку отрезок $[\alpha, \beta]$ выбирался произвольно из (a, b), то функции ψ_1 и ψ_2 совпадают и на всём интервале (a, b). □

Замечание. Первый пункт теоремы 8.2.1 следует из теоремы Пеано 7.1.1. Ещё одно доказательство приведено для того, чтобы указать другой метод, при помощи которого можно построить решение. При доказательстве использовались ***последовательные приближения Пикара***

$$\varphi_0(t) = r_0, \quad \varphi_{k+1}(t) = r_0 + \int\limits_{t_0}^t f(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau.$$

Сформулируем как следствие теорему существования и единственности с условиями, которые проверяются проще, чем условия теоремы Пикара. Кроме того, укажем погрешность m-го приближения Пикара.

Следствие 8.2.1.1 (теорема Пикара с простыми условиями). *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ *— область,* $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $f'_r \in M_n(C(G))$, $(t_0, r_0) \in G$. *Тогда*

(i) на отрезке Пеано $[t_0 - h, t_0 + h]$ *существует решение* φ *задачи Коши (8.2);*

(ii) если ψ_1 *и* ψ_2 *— решения этой задачи на* (a, b), *то* $\psi_1 \equiv \psi_2$ *на* (a, b);

(iii) пусть Π *— параллелепипед, по которому строится отрезок Пеано,*

$$M = \max_{(t,r)\in\Pi} |f(t, r)|, \quad M_1 = \max_{(t,r)\in\Pi} |f'_r(t, r)|,$$

φ_m *— m-е приближение Пикара, тогда для любого* $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$

$$|\varphi(t) - \varphi_m(t)| \leqslant \frac{M(nM_1)^m h^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Доказательство. Пункты (i) и (ii) следуют из леммы 8.1.1 и теоремы 8.2.1. Для доказательства пункта (iii) сделаем предельный переход в неравенстве (8.4) при $k \to +\infty$. Тогда

$$|\varphi(t) - \varphi_m(t)| \leqslant \frac{ML^m h^{m+1}}{(m+1)!}.$$

По лемме 8.1.1 в качестве L можно взять nM_1. □

Теорема 8.2.2 (существование и единственность решения ЗК для уравнения высшего порядка). *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,y,y',\dots,y^{(n-1)}}$ *— область,* $f \in C(G) \cap \mathrm{Lip}_{(y,y',\dots,y^{(n-1)}),loc}(G)$*,* $(t_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$*. Тогда*

(i) в некоторой окрестности точки t_0 *существует решение задачи*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0,\ \dot{y}(t_0) = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}; \end{cases} \tag{8.6}$$

(ii) если ψ_1 *и* ψ_2 *— решения (8.6) на* (a, b)*, то* $\psi_1 \equiv \psi_2$ *на* (a, b)*.*

Доказательство. Пусть y — решение (8.6) на (a, b). По лемме 6.2.1 вектор-функция $\Lambda_n y$ — решение задачи Коши для равносильной системы (6.4) с начальными условиями

$$y_1(t_0) = y_0,\ y_2(t_0) = y_0',\ \dots,\ y_n(t_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{8.7}$$

Правая часть каждого уравнения системы (6.4) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица локально по переменным $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$ в области G. Тогда по теореме Пикара 8.2.1 соответствующая задача Коши не может иметь более одного решения на (a, b), а значит, не может быть более одного решения и у задачи (8.6). Тем самым доказан пункт (ii).

Установим справедливость пункта (i). Из теоремы Пикара 8.2.1 следует существование в некоторой окрестности точки t_0 решения $r = (y_1, \dots, y_n)$ системы (6.4) с начальными условиями (8.7). По лемме 6.2.1 функция y_1 — решение задачи (8.6) в той же окрестности. $\square$

Следствие 8.2.2.1. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,y,y',\dots,y^{(n-1)}}$ *— область,* f*,* f'_y*,* $f'_{y'}$*, …,* $f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$*,* $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$*. Тогда*

(i) в некоторой окрестности точки t_0 *существует решение задачи (8.6);*

(ii) если ψ_1 *и* ψ_2 *— решения задачи (8.6) на* (a, b)*, то* $\psi_1 \equiv \psi_2$ *на* (a, b)*.*

Доказательство. Из леммы 8.1.1 следует, что $f \in \mathrm{Lip}_{(y,y',\dots,y^{(n-1)}),loc}(G)$. Остаётся применить теорему 8.2.2. $\square$

Тема 9: Продолжение решений. Линейные системы

Содержание

§9.1. Продолжение решений

Теорема Пеано гарантирует существование решения задачи Коши на отрезке Пеано. Существует ли решение за пределами этого отрезка? Насколько далеко можно продолжить решение за его пределы? Этот параграф даёт ответы на поставленные вопросы в некоторых специальных случаях.

Определение. Решение φ уравнения $\dot{r} = f(t,r)$ на промежутке $\langle a,b\rangle$ называется ***продолжимым***, если существует решение ψ того же уравнения на промежутке $\langle A,B\rangle$, причём $\langle a,b\rangle \subsetneq \langle A,B\rangle$ и $\varphi \equiv \psi$ на $\langle a,b\rangle$. Решение ψ называют ***продолжением*** решения φ.

Определение. Если для решения φ уравнения $\dot{r} = f(t,r)$ не существует продолжения, то будем называть функцию φ ***максимальным решением***.

Пример 9.1.1. Уравнение $\dot{x} = 1 + x^2$ имеет решение $x = \operatorname{tg} t$, $t \in [-\pi/4, \pi/4]$. Для этого решения можно построить продолжение на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$, заданное той же формулой. Функция $x = \operatorname{tg} t$, рассмотренная на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, является максимальным решением. $\triangle$

Теорема 9.1.1 (критерий продолжимости). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ — область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$. Тогда решение φ уравнения $\dot{r} = f(t,r)$ на промежутке $[a,b)$ продолжимо вправо за b (то есть на некоторый промежуток $[a,c)$, где $c > b$), если и только если существует предел $\varphi(b-0) = \widetilde{r}$ и $(b,\widetilde{r}) \in G$.*

Доказательство. Предположим, что ψ — продолжение на $[a,c)$ решения φ. Тогда в силу непрерывности ψ

$$\varphi(b-0) = \psi(b-0) = \psi(b).$$

Поскольку $b \in [a,c)$, то из определения решения следует $(b,\psi(b)) \in G$.

Докажем обратное утверждение. Доопределим функцию φ по непрерывности на промежуток $[a,b]$. При $t, t_1 \in [a,b)$

$$\varphi(t) - \varphi(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} \varphi'(\tau)\,d\tau = \int\limits_{t_1}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau.$$

Переходя к пределу при $t_1 \to b$, получаем

$$\varphi(t) = \widetilde{r} + \int\limits_{b}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau.$$

Тогда по лемме 7.1.4 функция φ — решение задачи

$$\dot{r} = f(t,r), \quad r(b) = \widetilde{r}. \tag{9.1}$$

По теореме Пеано 7.1.1 существует её решение χ на некотором отрезке $[b-h, b+h]$. Положим

$$\psi(t) := \begin{cases} \varphi(t), t \in [a,b), \\ \chi(t), t \in [b, b+h]. \end{cases}$$

По лемме 7.1.5 функция ψ — решение задачи (9.1) на $[a, b+h]$, следовательно, ψ — продолжение решения φ вправо за точку b (рис. 9.1). $\square$

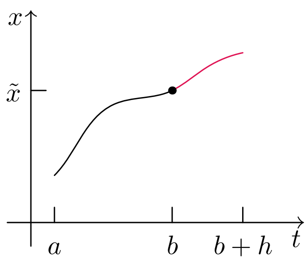

Рис. 9.1. Продолжение решения вправо

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что максимальное решение определяется на *интервале*, а не на произвольном промежутке (если система рассматривается в области).

Теорема 9.1.2 (существование и единственность максимального решения). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ — область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда максимальное решение задачи Коши $\dot{r} = f(t,r)$, $r(t_0) = r_0$ существует и единственно.*

Доказательство. Рассмотрим множество S всевозможных решений указанной задачи Коши, определённых на интервалах. По теореме Пеано 7.1.1 это множество не пусто. Обозначим через (a_φ, b_φ) область определения решения $\varphi \in S$. Положим

$$(A, B) := \bigcup_{\varphi \in S} (a_\varphi, b_\varphi).$$

Определим на (A, B) функцию ψ следующим образом. Если $t \in (A, B)$, то найдётся функция $\varphi \in S$, такая что $t \in (a_\varphi, b_\varphi)$. Тогда положим $\psi(t) := \varphi(t)$. Определение корректно, поскольку значение в точке t любой другой функции из S, определённой в t, совпадает с $\varphi(t)$ по тереме Пикара 8.2.1.

Отсюда следует, что $\psi \equiv \varphi$ на (a_φ, b_φ). А раз φ — решение, то ψ непрерывно дифференцируема в t и $\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t, \psi(t))$. В силу произвольности выбора точки t получаем

- $\psi \in C^1(A, B)$;
- $\dot{\psi}(t) = f(t, \psi(t))$ при всех $t \in (A, B)$.

Кроме того, $\psi(t_0) = \varphi(t_0) = r_0$. Тогда ψ — решение исходной задачи Коши по определению.

Поскольку интервал (A, B) включает в себя все возможные интервалы, на которых могут быть заданы решения, то ψ является максимальным решением.

Другого максимального решения быть не может. Действительно, пусть имеется ещё одно максимальное решение $\widetilde{\psi}\colon (\widetilde{A}, \widetilde{B}) \to \mathbb{R}^n$. Тогда $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \subset (A, B)$ и $\widetilde{\psi} \equiv \psi$ на $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$. Если, например, $\widetilde{B} < B$, то ψ — продолжение $\widetilde{\psi}$ вправо, что противоречит непродолжимости решения $\widetilde{\psi}$. $\square$

График максимального решения покидает любой компакт, лежащий в области задания уравнения. Строго это утверждение формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 9.1.3 (о выходе интегральной кривой за пределы компакта). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ — область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$, φ — максимальное решение на (a, b) уравнения $\dot{r} = f(t, r)$, $K \subset G$ — компакт. Тогда найдётся $\Delta > 0$, такое что $(t, \varphi(t)) \notin K$ при всех $t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b)$.*

Доказательство. Заметим, что расстояние $\rho = \rho(K, \partial G)$ от компакта K до границы ∂G области G положительно (иначе можно было бы построить последовательность точек из K, сходящейся к точке на границе, но $\partial G \cap K = \varnothing$). Если $\rho < +\infty$, положим $c := \rho/2$, иначе пусть $c := 1$.

Вокруг каждой точки $(t', r') \in K$ построим содержащийся внутри G параллелепипед

$$\Pi(t', r') = \big\{(t, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t'| \leqslant c, |r - r'| \leqslant c\big\}$$

и рассмотрим множество

$$K_c := \bigcup_{(t',r')\in K} \Pi(t',r').$$

Поскольку K — компакт, то норма каждого элемента из K ограничена некоторым числом d. Если (t,r) — произвольная точка из K_c, то для некоторой точки $(t',r')\in K$ будет $(t,r)\in\Pi(t',r')$, поэтому

$$|(t,r)| \leqslant |(t,r)-(t',r')| + |(t',r')| \leqslant c+d.$$

Значит, множество K_c ограничено.

Докажем его замкнутость. Рассмотрим последовательность $\{(t_m,r_m)\}$ точек из K_c, сходящуюся к $(t,r)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Для каждой такой точки найдётся параллелепипед $\Pi(t'_m,r'_m)$, которому она принадлежит. Раз K — компакт, то существует подпоследовательность $\bigl\{(t'_{m_k},r'_{m_k})\bigr\}$, сходящаяся к некоторой точке $(t',r')\in K$. Переходя к пределу в неравенствах

$$|t_{m_k}-t'_{m_k}| \leqslant c, \quad |r_{m_k}-r'_{m_k}| \leqslant c,$$

находим $|t-t'|\leqslant c$ и $|r-r'|\leqslant c$. Следовательно, $(t,r)\in K_c$.

Таким образом, K_c — компакт, и функция $|f|$ достигает на нём максимального значения

$$M := \max_{(t,r)\in K_c} |f(t,r)|.$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть $\Delta = h/2$, где $h=\min\{c, c/M\}$. Тогда при некотором $t_0\in(b-h/2,b)$ будет $(t_0,\varphi(t_0))\in K$.

Рассмотрим задачу Коши $\dot r = f(t,r)$ с начальными данными $r(t_0)=\varphi(t_0)$. По теореме Пеано 7.1.1 она имеет решение ψ на отрезке $[t_0-h,t_0+h]$. Пусть

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t\in(a,t_0),\\ \psi(t), & \text{если } t\in[t_0,t_0+h]. \end{cases}$$

По лемме 7.1.5 $\widetilde{\varphi}$ — решение уравнения $\dot r = f(t,r)$ на (a,t_0+h). Функция $\widetilde{\varphi}$ совпадает с φ на $(a,b)\cap(a,t_0+h)$ по теореме Пикара 8.2.1. Но

$$t_0+h > b-\frac{h}{2}+h = b+\frac{h}{2} > b,$$

то есть $\widetilde{\varphi}$ — продолжение φ вправо за точку b. Так как φ по условию является максимальным решением, приходим к противоречию. □

Установим важный с точки зрения приложений признак продолжимости.

Теорема 9.1.4 (о системе, сравнимой с линейной). *Пусть* $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n_r$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Lip}_{r,loc}(G)$, *функции* $u, v \in C(a, b)$ *таковы, что для любых* $(t, r) \in G$

$$|f(t, r)| \leqslant u(t)|r| + v(t).$$

Тогда каждое максимальное решение уравнения $\dot{r} = f(t, r)$ *определено на* (a, b).

Доказательство. По теореме 9.1.2 любая задача Коши с начальными данными $(t_0, r_0) \in G$ имеет единственное максимальное решение φ, заданное на некотором интервале (α, β). Пусть, например, $\beta < b$. Принимая во внимание лемму 7.1.4, при $t \in [t_0, \beta)$ находим

$$|\varphi(t)| = \left| r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \right| \leqslant |r_0| + \int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |r_0| + \int\limits_{t_0}^{t} |u(\tau)||\varphi(\tau)|\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} |v(\tau)|\, d\tau.$$

Из непрерывности функций u и v вытекает их ограниченность на отрезке $[t_0, \beta]$. Следовательно, найдутся такие числа $\lambda, \mu \geqslant 0$, что при $t \in [t_0, \beta)$

$$|\varphi(t)| \leqslant \lambda + \mu \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(s)|\, ds.$$

Тогда по лемме Гронуолла 8.2.1

$$|\varphi(t)| \leqslant \lambda e^{\mu(t - t_0)} \leqslant L,$$

где $L = \lambda e^{\mu(\beta - t_0)}$. Отсюда следует, что график решения φ не покидает компакт

$$K = \{(t, r) \in G \mid t \in [t_0, \beta], |r| \leqslant L\} \subset G$$

при $t \in [t_0, \beta)$, что противоречит теореме 9.1.3. □

§9.2. Максимальное решение линейной системы

Определение. ***Линейной системой дифференциальных уравнений*** называют систему вида

$$\dot{r} = P(t)r + q(t), \tag{9.2}$$

где $P \in M_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \to \mathbb{R}^n)$.

Теорема 9.2.1 (существование и единственность максимального решения ЛС). *Пусть* $P \in M_n(C(a,b))$, $q \in C((a,b) \to \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in (a,b)$, $r_0 \in \mathbb{R}^n$. *Тогда максимальное решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dot{r} = P(t)r + q(t), \\ r(t_0) = r_0 \end{cases} \tag{9.3}$$

существует, единственно и определено на интервале (a,b).

Доказательство. Заметим, что правая часть системы $f(t,r) = P(t)r + q(t)$ и её производная $f'_r = P(t)$ непрерывны в области $(a,b) \times \mathbb{R}^n$. Тогда по теореме 9.1.2 существует единственное максимальное решение задачи (9.3).

Имеем

$$|f(t,r)| \leqslant |P(t)r| + |q(t)| \leqslant n|P(t)| \cdot |r| + |q(t)|.$$

Так как функции $u(t) = n|P(t)|$ и $v(t) = |q(t)|$ непрерывны на (a,b), то по теореме 9.1.4 решение задачи (9.3) продолжимо на интервал (a,b). □

Замечание. В дальнейшем под решением линейной системы подразумевается максимальное решение.

§9.3. Линейные однородные системы

Определение. Если $q \equiv 0$ на (a,b), то система (9.2), то есть

$$\dot{r} = P(t)r, \tag{9.4}$$

называется ***однородной***, в противном случае — ***неоднородной***.

Упражнение 9.3.1. Докажите, что множество всех решений линейной однородной системы образует линейное пространство.

Определение. ***Определителем Вронского*** (***вронскианом***) вектор-функций $\{r_k\}_{k=1}^n$, где $r_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})^T$, называют определитель

$$W(t) := \det(r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{n2}(t) \\ \ldots & & & \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 9.3.1 (свойства вронскиана решений ЛОС). *Пусть* $\{r_k\}_{k=1}^n$ — *решения системы (9.4). Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) $W(t_0) = 0$ *в некоторой точке* $t_0 \in (a,b)$;

(ii) $W \equiv 0$ *на* (a,b);

(iii) $\{r_k\}_{k=1}^n$ *линейно зависимы на* (a,b).

Доказательство. Проведём доказательство по схеме: (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Это следствие очевидно.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Пункт (i) означает, что векторы $\{r_k(t_0)\}_{k=1}^n$ линейно зависимы. Значит, найдётся набор чисел $\{c_k\}_{k=1}^n$, такой что

$$\sum_{k=1}^{n} c_k r_k(t_0) = 0.$$

Положим $\varphi := c_1 r_1 + c_2 r_2 + \ldots + c_n r_n$. Тогда φ — решение системы (9.4), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = 0$. Но решением этой же задачи Коши является функция, тождественно равная нулю на (a,b). Следовательно, по теореме 9.2.1 будет $\varphi \equiv 0$ на (a,b). Значит, вектор-функции $\{r_k\}_{k=1}^n$ линейно зависимы.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Линейная зависимость вектор-функций $\{r_k\}_{k=1}^n$ означает линейную зависимость столбцов матрицы $(r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t))$ при любом $t \in (a,b)$. Тогда её определитель, то есть вронскиан $W(t)$, тождественно равен нулю. $\square$

Следствие 9.3.1.1 (критерий линейной независимости решений ЛОС). *Пусть* $\{r_k\}_{k=1}^n$ *— решения системы (9.4),* W *— вронскиан данного набора. Тогда*

- *набор* $\{r_k\}_{k=1}^n$ *линейно зависим, если и только если* $W(t_0) = 0$ *для некоторого* $t_0 \in (a,b)$*;*
- *набор* $\{r_k\}_{k=1}^n$ *линейно независим, если и только если* $W(t_0) \neq 0$ *для некоторого* $t_0 \in (a,b)$.

Теорема 9.3.2 (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОС). *Пусть* $t, t_0 \in (a,b)$, $P \in M_n(C(a,b))$, r_1, r_2, $\ldots$, r_n *— решения системы (9.4). Тогда их вронскиан*

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} P(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. Пусть X — матрица со столбцами r_1, r_2, $\ldots$, r_n, а R_k — её k-ая строка. Используя формулу полного разложения определителя, нетрудно убедиться, что

$$\dot{W} = \det \begin{pmatrix} \dot{R}_1 \\ R_2 \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \dot{R}_2 \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} + \ldots + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \ldots \\ \dot{R}_n \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\dot{X} = (\dot{r}_1, \dot{r}_2, \ldots, \dot{r}_n) = (P r_1, P r_2, \ldots, P r_n) = P X,$$

то k-ая строка матрицы $\dot{X}$ совпадает с k-ой строкой матрицы PX, то есть

$$\dot{R}_k = \sum_{j=1}^{n} p_{kj} R_j,$$

где p_{kj} — элемент матрицы P в k-ой строке и j-ом столбце.

Подставляя выражение для $\dot{R}_k$ в формулу для $\dot{W}$ и используя свойства определителя, находим

$$\dot{W} = p_{11} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + p_{22} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} + \ldots + p_{nn} \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = W \operatorname{tr} P.$$

Интегрируя полученное уравнение, приходим к требуемой формуле. □

Замечание. Если r_1, r_2, $\ldots r_n$ — не решения линейной однородной системы, а произвольные линейно зависимые вектор-функции, то их вронскиан $W \equiv 0$, однако, обратное утверждение неверно. Например, вронскиан вектор-функций

$$r_1(t) = \begin{pmatrix} |t|t \\ |t| \end{pmatrix}, \quad r_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

равен нулю на всём отрезке $[-1, 1]$. Но r_1 и r_2 линейно независимы на $[-1, 1]$, поскольку $r_1(t) = \operatorname{sgn} t \cdot r_2(t)$.

Теорема 9.3.3 (общее решение ЛОС). *Пусть $P \in M_n(C(a, b))$. Тогда множество решений системы $\dot{r} = P(t)r$ образует n-мерное линейное пространство.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in (a, b)$, $\{a_k\}_{k=1}^n$ — базис в $\mathbb{R}^n$. По теореме 9.2.1 для любого $k \in [1 : n]$ существует r_k — решение задачи Коши $\dot{r} = P(t)r$, $r(t_0) = a_k$. Вронскиан этих решений $W(t_0) = \det(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. Тогда по следствию 9.3.1.1 функции $\{r_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы.

Рассмотрим произвольное решение r системы $\dot{r} = P(t)r$. Пусть $\{c_k\}_{k=1}^n$ — координаты вектора $r(t_0)$ в базисе $\{a_k\}_{k=1}^n$. Положим

$$\varphi = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \ldots + c_n r_n.$$

Ясно, что φ — решение системы $\dot{r} = P(t)r$, при этом $\varphi(t_0) = r(t_0)$. Тогда $r \equiv \varphi$ в силу теоремы 9.2.1.

Таким образом, функции $\{r_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы, и любое решение есть их линейная комбинация. Значит, $\{r_k\}_{k=1}^n$ — базис в пространстве решений. □

Определение. ***Фундаментальной системой решений*** системы уравнений (9.4) называется совокупность её n линейно независимых решений.

Определение. ***Фундаментальная матрица системы*** (9.4) — матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

Пример 9.3.1. Система уравнений

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y$$

имеет общее решение $x = C_1 e^t$, $y = C_2 e^{2t}$. Тогда в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать вектор-функции

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Соответствующая фундаментальная матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Лемма 9.3.1 (о множестве фундаментальных матриц). *Пусть Φ — фундаментальная матрица системы (9.4). Тогда $\{\Phi A \mid A \in M_n(\mathbb{R}), \det A \neq 0\}$ — множество всех фундаментальных матриц этой системы.*

Доказательство. Пусть Ψ — фундаментальная матрица системы (9.4). Тогда каждый её столбец, будучи решением этой системы, является линейной комбинацией столбцов матрицы Φ. Записывая коэффициенты разложения в столбцы матрицы A, имеем $\Psi = \Phi A$. А так как $\det \Psi \neq 0$ и $\det \Phi \neq 0$, то и $\det A \neq 0$.

Обратно, пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ — произвольная невырожденная матрица. Тогда матрица ΦA состоит из решений, а её определитель не обращается в ноль. Следовательно, по следствию 9.3.1.1 эти решения линейно независимы, поэтому ΦA — фундаментальная матрица. $\square$

Замечание. Можно показать, что все утверждения этого параграфа дословно переносятся на случай комплекснозначных матриц и решений.

Упражнение 9.3.2. Докажите теорему существования и единственности, аналогичную теореме 9.2.1, для комплекснозначных r, P и q (но $t \in \mathbb{R}$). *Указание:* воспользуйтесь теоремой 9.2.1 для вектор-функции $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, где $u + iv = r$.

Лемма 9.3.2 (об овеществлении). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\Phi = (r_1, r_2, r_3 \ldots, r_n)$ — фундаментальная матрица системы (9.4), при этом $r_1 = \overline{r}_2$. Тогда*

$$\Psi = (\operatorname{Re} r_1, \operatorname{Im} r_1, r_3, \ldots, r_n)$$

— фундаментальная матрица той же системы.

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} r_1 &= \frac{1}{2}(r_1 + \overline{r}_1) = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2,\\ \operatorname{Im} r_1 &= \frac{1}{2i}(r_1 - \overline{r}_1) = \frac{1}{2i}r_1 - \frac{1}{2i}r_2,\end{aligned}$$

то

$$\Psi = \Phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 \\ & 0 & E_{n-2} \end{pmatrix},$$

где E_{n-2} — единичная матрица порядка $n-2$. По лемме 9.3.1 матрица Ψ является фундаментальной. □

Пример 9.3.2. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

В качестве её фундаментальной матрицы можно взять

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы Φ комплексно-сопряжены. По лемме 9.3.2 матрица

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

столбцы которой суть вещественная и мнимая части первого столбца матрицы Φ, также является фундаментальной. △

§9.4. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Определение. ***Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*** называют линейную систему вида

$$\dot{r} = Ar + q(t), \tag{9.5}$$

где $A \in M_n(\mathbb{C})$, $q \in C((a,b) \to \mathbb{C}^n)$.

Лемма 9.4.1. *Вектор-функция $\varphi(t) = e^{\lambda t}h$ — нетривиальное решение однородной системы $\dot{r} = Ar$, если и только если $\lambda \in \operatorname{spec} A$, а h — соответствующий λ собственный вектор.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = e^{\lambda t}h$ является нетривиальным решением системы $\dot{r} = Ar$. При подстановке имеем тождество

$$\lambda e^{\lambda t}h = Ae^{\lambda t}h.$$

Разделив обе части равенства на $e^{\lambda t}$, получаем

$$Ah = \lambda h.$$

Обратно, если верно последнее равенство, то, умножая его на $e^{\lambda t}$, находим: вектор-функция $\varphi(t) = e^{\lambda t}h$ обращает систему $\dot{r} = Ar$ в тождество. □

Теорема 9.4.1 (случай собственного базиса). *Пусть собственные векторы* $\{h_k\}_{k=1}^n$ *матрицы* $A \in M_n(\mathbb{C})$, *соответствующие собственным числам* $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, *образуют базис пространства* $\mathbb{C}^n$. *Тогда вектор-функции* $\left\{e^{\lambda_k t}h_k\right\}_{k=1}^n$ *образуют фундаментальную систему решений системы* $\dot{r} = Ar$.

Доказательство. По лемме 9.4.1 каждая из вектор-функций $r_k(t) = e^{\lambda_k t}h_k$ является решением. Их вронскиан

$$W(0) = \det(h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq 0.$$

Тогда по следствию 9.3.1.1 вектор-функции $\{r_k\}_{k=1}^n$ линейно независимы. Таким образом, они образуют фундаментальную систему решений. □

Пример 9.4.1. Найдём общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases}$$

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа: -2 (кратности 1) и 1 (кратности 2). Соответствующие им собственные векторы: $(-1, 1, 1)^T$, $(1, 1, 0)^T$, $(1, 0, 1)^T$. Тогда общее решение

$$r(t) = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Лемма 9.4.2. *Пусть* $n, k \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, $h_1, h_2, \ldots, h_k$ — *жорданова цепочка, соответствующая* $\lambda \in \operatorname{spec} A$. *Тогда функции*

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}h_1,$$

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h_1 + h_2\right),$$

$$\ldots$$

$$\varphi_k(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}h_1 + \ldots + \frac{t}{1!}h_{k-1} + h_k\right)$$

являются решениями системы $\dot{r} = Ar$.

Доказательство. Принимая во внимание определение жордановой цепочки, при $j \in [1 : k]$ имеем

$$A\varphi_j = e^{\lambda t}\sum_{m=1}^{j}\frac{t^{j-m}}{(j-m)!}Ah_m = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\lambda h_1 + \sum_{m=2}^{j}\frac{t^{j-m}}{(j-m)!}(\lambda h_m + h_{m-1})\right) =$$
$$= e^{\lambda t}\left(\lambda\sum_{m=1}^{j}\frac{t^{j-m}}{(j-m)!}h_m + \sum_{m=2}^{j}\frac{t^{j-m}}{(j-m)!}h_{m-1}\right).$$

Это же выражение получается при дифференцировании вектор-функции φ_j. Значит, $\dot{\varphi}_j = A\varphi_j$, что и требовалось. □

Теорема 9.4.2 (случай жорданова базиса общего вида). *Пусть* $A \in M_n(\mathbb{C})$, *базис пространства* $\mathbb{C}^n$ *состоит из жордановых цепочек*

$$\lambda_1 \sim h_1, h_2, \ldots, h_k,$$
$$\ldots$$
$$\lambda_d \sim u_1, u_2, \ldots, u_m,$$

соответствующих $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \operatorname{spec} A$. *Тогда вектор-функции*

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}h_1, \quad \ldots, \quad \varphi_k(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}h_1 + \ldots + \frac{t}{1!}h_{k-1} + h_k\right),$$
$$\ldots$$
$$\psi_1(t) = e^{\lambda_d t}u_1, \quad \ldots, \quad \psi_m(t) = e^{\lambda_d t}\left(\frac{t^{m-1}}{(l-1)!}u_1 + \ldots + \frac{t}{1!}u_{m-1} + u_m\right)$$

образуют фундаментальную систему решений системы $\dot{r} = Ar$.

Доказательство. По лемме 9.4.2 каждая из вектор-функций

$$\varphi_1 \ldots, \varphi_k, \ \ldots, \ \psi_1 \ldots, \psi_m$$

является решением. Их вронскиан

$$W(0) = \det(h_1, \ldots, h_k, \ldots, u_1, \ldots, u_m) \neq 0.$$

Тогда по следствию 9.3.1.1 вектор-функции $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, \psi_1, \ldots, \psi_m\}$ линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений. □

Следствие 9.4.2.1. *Пусть $\lambda \in \operatorname{spec} A$ имеет алгебраическую кратность m и геометрическую кратность s. Тогда система $\dot{r} = Ar$ имеет m линейно независимых решений вида*

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} Q_{m-s}(t), \tag{9.6}$$

где Q_{m-s} — вектор-многочлен степени не выше $m - s$.

Доказательство. По теореме 9.4.2 числу λ соответствуют s групп решений размеров k_1, k_2, $\ldots$, k_s, причём $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = m$. Все эти решения линейно независимы и имеют вид экспоненты, умноженной на некоторый вектор-многочлен. При этом в j-ой группе степень многочленов, умножаемых на $e^{\lambda t}$, не превосходит $k_j - 1$.

Не умаляя общности, считаем $k_1 = \max\limits_{j \in [1:s]} k_j$. Тогда степень многочленов $\{Q_l\}$ не превосходит $k_1 - 1$. Так как

$$m = k_1 + \ldots + k_s \geqslant k_1 + (s-1),$$

то $k_1 - 1 \leqslant m - s$, что и требовалось. □

На этом следствии основан *метод Эйлера* построения общего решения линейного однородного уравнения. Каждому собственному числу сопоставляется вектор-функция (9.6) с неопределёнными коэффициентами. Они определяются подстановкой функции φ в систему уравнений. Среди коэффициентов всегда будет m независимых, где m — алгебраическая кратность собственного числа.

Если алгебраическая и геометрическая кратности совпадают, то метод Эйлера фактически сводится к поиску собственных векторов. Продемонстрируем данный метод на примере.

Пример 9.4.2. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z, \\ \dot{y} = -z - 2x, \\ \dot{z} = y + 2x + 2z. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$.

Так как алгебраическая и геометрическая кратности числа λ_1 совпадают и равны 1, то найдём собственный вектор, отвечающий λ_1: $h_1 = (1, -2, 2)^T$. Тогда соответствующие решения

$$\varphi_1(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Геометрическая кратность числа $\lambda_{2,3}$ равна

$$s = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_{2,3}E) = 3 - 2 = 1.$$

Алгебраическая кратность $m = 2$. Поэтому многочлены в формуле (9.6) имеют степень не выше $m - s = 2 - 1 = 1$. Следовательно, решения, отвечающие $\lambda_{2,3}$, ищем в виде

$$\varphi_{2,3}(t) = e^t(at + b),$$

где $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T$. Подставляя $\varphi_{2,3}$ в систему, находим

$$e^t(at + b) + e^t a = e^t(tAa + Ab) \iff at + (a + b) = tAa + Ab.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему

$$\begin{cases} Aa = a, \\ Ab = a + b. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $a_1 = 0$, $a_2 = -C_2$, $a_3 = C_2$.

Подставляя во второе уравнение системы, получаем $b_1 = C_2$, $b_2 = -C_2 - C_3$, $b_3 = C_3$. Здесь C_2 и C_3 — произвольные параметры.

Тогда числу $\lambda_{2,3}$ соответствуют решения вида

$$\varphi_{2,3}(t) = e^t\big(t\begin{pmatrix} 0 \\ -C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 \\ -C_2 - C_3 \\ C_3 \end{pmatrix}\big) = C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы — сумма φ_1 и $\varphi_{2,3}$:

$$r(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t. \qquad \triangle$$

Тема 10: Линейные неоднородные системы. Матричная экспонента

Содержание

§10.1. Линейные неоднородные системы

Установим, что общее решение линейной неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей однородной и некоторого частного решения исходной неоднородной системы.

Теорема 10.1.1 (общее решение ЛС). *Пусть* $P \in M_n(C(a,b))$, $q \in C((a,b) \to \mathbb{R}^n)$, φ *— решение системы*

$$\dot{r} = P(t)r + q(t), \tag{10.1}$$

Φ *— фундаментальная матрица системы*

$$\dot{r} = P(t)r.$$

Тогда общее решение неоднородной системы (10.1) имеет вид

$$r = \Phi C + \varphi, \quad C \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Пусть r — произвольное решение (10.1). Тогда

$$\dot{r} = Pr + q.$$

Функция φ удовлетворяет такому же соотношению:

$$\dot{\varphi} = P\varphi + q.$$

Вычитая эти равенства, находим

$$(r - \varphi)' = P(r - \varphi).$$

Значит, найдётся вектор-столбец $C \in \mathbb{R}^n$, такой что

$$r - \varphi = \Phi C.$$

Верно и обратное: любая функция вида $\Phi C + \varphi$ является решением (10.1), что проверяется непосредственной подстановкой. $\square$

Упражнение 10.1.1 (принцип суперпозиции). Докажите, что если φ_1 — решение системы $\dot{r} = P(t)r + q_1(t)$, φ_2 — решение системы $\dot{r} = P(t)r + q_2(t)$, то $\varphi_1 + \varphi_2$ — решение системы $\dot{r} = P(t)r + q_1(t) + q_2(t)$.

Если известна фундаментальная матрица однородной системы, то общее решение неоднородной системы может быть найдено методом вариации постоянных.

Теорема 10.1.2 (метод вариации постоянных для ЛС). *Пусть Φ — фундаментальная матрица системы $\dot{r} = P(t)r$, $P \in M_n(C(a, b))$, $q \in C((a, b) \to \mathbb{R}^n)$. Тогда если вектор-функция C пробегает все решения системы*

$$\Phi\dot{C} = q,$$

то $r = \Phi C$ пробегает все решения системы (10.1).

Доказательство. Опираясь на формулу для обратной матрицы, использующей алгебраические дополнения, заключаем, что $\Phi^{-1} \in M_n(C(a, b))$. Поэтому

$$C(t) = \int \Phi^{-1}q + A,$$

где A — вектор произвольных постоянных. Тогда требуется доказать, что общее решение системы (10.1) имеет вид

$$r = \Phi A + \Phi \int \Phi^{-1}q.$$

По теореме 10.1.1 достаточно показать, что второе слагаемое в правой части — частное решение системы (10.1). Убедимся в этом подстановкой:

$$\dot{\Phi} \int \Phi^{-1}q + \Phi\Phi^{-1}q = P(t)\Phi \int \Phi^{-1}q + q.$$

Это верное тождество, поскольку $P(t)\Phi = \dot{\Phi}$. □

Пример 10.1.1. Найдём общее решение системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \frac{1}{\sin t}.$$

Матрица

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

является фундаментальной для однородной системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

Общее решение ищем в виде $r = \Phi(t)C(t)$, где C удовлетворяет системе

$$\Phi\dot{C} = q.$$

Отсюда

$$\dot{C} = \Phi^{-1}q = \begin{pmatrix} -1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(t) = -t + A_1, \quad C_2(t) = \ln\sin t + A_2.$$

Поэтому общее решение исходной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t)C(t) = A_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \cdot \ln\sin t - t\cos t \\ \cos t \cdot \ln\sin t + t\sin t \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

§10.2. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

Для поиска частного решения неоднородной системы с постоянными коэффициентами примени́м метод вариации постоянных. В случае, когда вектор-функция q в системе (9.5) является вектор-квазимногочленом, частное решение можно искать методом неопределённых коэффициентов.

Теорема 10.2.1 (метод неопределённых коэффициентов для ЛС). *Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $a_j \in \mathbb{C}^n$ при $j \in [0:k]$, $\gamma \in \mathbb{C}$,*

$$p_k(t) = a_k t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0.$$

Тогда вектор-функция $e^{\gamma t}q_{k+s}(t)$ является решением системы

$$\dot{r} = Ar + e^{\gamma t}p_k(t),$$

где q_{k+s} — вектор-многочлен степени не выше $k+s$,

- *если $\gamma \notin \operatorname{spec} A$, то $s = 0$;*
- *если $\gamma \in \operatorname{spec} A$, то s — максимальный размер жордановых клеток, соответствующих γ.*

Доказательство. Пусть T — матрица перехода к жорданову базису матрицы A, J — жорданова форма матрицы A. То есть

$$A = TJT^{-1}.$$

Положим $y := T^{-1}r$. Умножая обе части исходного уравнения слева на T^{-1}, имеем

$$\dot{y} = Jy + e^{\gamma t}T^{-1}p_k(t).$$

Рассмотрим те уравнения получившейся системы, которые отвечают одной жордановой клетке размера l, соответствующей собственному числу λ:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 + u_1(t)e^{\gamma t}, \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3 + u_2(t)e^{\gamma t}, \\ \dots \\ \dot{y}_l = \lambda y_l + u_l(t)e^{\gamma t}. \end{cases}$$

Пусть $\gamma \neq \lambda$, тогда частным решением последнего уравнения этой системы будет функция $y_l = v_l(t)e^{\gamma t}$, где v_l — многочлен той же степени, что и u_l (в этом можно убедиться, решая уравнение методом вариации постоянной). Подставляя функцию y_l в предпоследнее уравнение, получаем аналогичное выражение для y_{l-1}. Таким же образом решаются и все оставшиеся уравнения системы.

Если $\gamma = \lambda$, то частным решением последнего уравнения будет функция $y_l = v_l(t)e^{\gamma t}$, где v — многочлен степени на единицу большей, чем u_l. Для каждого последующего уравнения степень соответствующего многочлена будет увеличиваться на единицу по сравнению с многочленом, оказавшимся в правой части. Тогда $y_1 = v_1(t)e^{\gamma t}$, где v_1 — многочлен степени не выше $k+l$ (многочлен u_l мог иметь степень меньше, чем k).

Отсюда получаем, что если $\gamma \notin \operatorname{spec} A$, то $y(t) = e^{\gamma t}v(t)$, где v — вектор-многочлен степени не выше k. Если же $\gamma \in \operatorname{spec} A$, то порядок вектор-многочлена v не превзойдёт $k + s$, где s — максимальный размер среди всех жордановых клеток, отвечающих собственному числу λ.

Остаётся выполнить обратную замену по формуле $r = Ty$. $\square$

§10.3. Матричная экспонента

Определение. ***Матричной экспонентой*** называется сумма ряда

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Теорема 10.3.1 (свойства матричной экспоненты). *Пусть* $A, B, J, T \in M_n(\mathbb{C})$, $\det T \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда*

(i) *ряд, определяющий* e^A, *сходится;*

(ii) *если* $AB = BA$, *то* $e^{A+B} = e^A e^B$;

(iii) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$;

(iv) *если* $A = TJT^{-1}$, *то* $e^A = Te^J T^{-1}$;

(v) *если* $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_d)$, *то* $e^A = \operatorname{diag}(e^{A_1}, e^{A_2}, \dots, e^{A_d})$;

(vi) если $J_s(\lambda)$ — жорданова клетка размера s:

$$J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

то

$$e^{J_s(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!} \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. (i) Сходимость ряда для экспоненты следует из сходимости ряда, составленного из норм его слагаемых, и полноты пространства $M_n(\mathbb{C})$.

(ii) Перестановочность матриц A и B позволяет записать частную сумму ряда e^{A+B} в виде

$$S_{2N} := \sum_{i=0}^{2N} \frac{(A+B)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{2N} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} C_i^j A^j B^{i-j} = \sum_{i=0}^{2N} \sum_{j=0}^{i} \frac{A^j}{j!} \frac{B^{i-j}}{(i-j)!}.$$

Перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$S_{2N} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \frac{B^m}{m!} + \sum_{(k,m)\in I} \frac{A^k}{k!} \frac{B^m}{m!} = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{N} \frac{B^m}{m!} \right) + R_N,$$

где I — множество пар, не попадающих в квадрат $[0:N]^2$ (рис. 10.1).

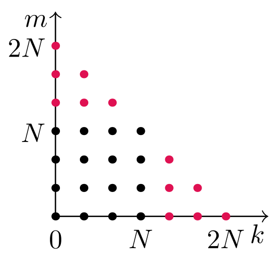

Рис. 10.1. Красные точки составляют множество I

Таким образом, остаётся доказать, что $R_N \to 0$ при $N \to \infty$. Учитывая лемму 7.1.2, при $(k,m) \in I$ имеем

$$\frac{|A^k B^m|}{k!m!} \leqslant n^{k-1+m-1} |A|^k |B|^m \frac{1}{k!m!} \leqslant n^{4N-2} (|A||B|)^{2N} \frac{1}{N!} = \frac{1}{n^2} \frac{M^N}{N!},$$

где $M = (n^2|A||B|)^2$. Тогда

$$|R_N| \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{(k,m)\in I} \frac{M^N}{N!} = \frac{1}{n^2}(N^2+N)\frac{M^N}{N!} \to 0$$

при $N \to \infty$, что и требовалось.

(iii) По определению производной

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{e^{A(\Delta t+t)} - e^{At}}{\Delta t}.$$

Рассмотрим числитель:

$$e^{A(\Delta t+t)} - e^{At} = e^{A\Delta t}e^{At} - e^{At} = (e^{A\Delta t} - E)e^{At} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A\Delta t)^k}{k!}\right) e^{At}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \lim_{\Delta t\to 0} \left(A + \Delta t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k(\Delta t)^{k-2}}{k!}\right) e^{At} = Ae^{At}.$$

(iv) Поскольку $A^k = TJ^kT^{-1}$, то

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = T\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{J^k}{k!}\right)T^{-1}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем требуемое.

(v) Так как $A^k = \operatorname{diag}(A_1^k, \ldots, A_d^k)$, то

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{A_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{N} \frac{A_d^k}{k!}\right).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем требуемое.

(vi) Матрица $J_s(\lambda)$ представима как $\lambda E + N$, где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы E и N коммутируют, то

$$e^{J_s(\lambda)t} = e^{\lambda t E}e^{Nt} = e^{\lambda t}e^{Nt}.$$

Заметим, что N^k — матрица, полученная из единичной сдвигом диагонали на k единиц вправо, $N^k = 0$ при $k \geqslant s$. Поэтому

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Nt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{t^k}{k!} N^k.$$

Отсюда непосредственно следует требуемая формула. □

Пример 10.3.1. Вычислим матричную экспоненту e^{At} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет двукратное собственное значение $\lambda = 3$. Вектор $h_1 = (2, 1)^T$ является собственным, а $h_2 = (-1, 0)^T$ — присоединённым. Матрица перехода к жорданову базису и её обратная:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = Te^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 - 2t & 4t \\ -t & 1 + 2t \end{pmatrix}.$$ △

Теорема 10.3.2. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$. Тогда матрица e^{At} является фундаментальной матрицей системы $\dot{r} = Ar$.*

Доказательство. По теореме 10.3.1 будет $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$. Следовательно, каждый столбец матрицы e^{At} — решение системы $\dot{r} = Ar$. Соответствующий вронскиан

$$W(0) = \det e^{A \cdot 0} = \det E_n = 1,$$

где E_n — единичная матрица порядка n. Отсюда следует, что e^{At} — фундаментальная матрица. □

Следствие 10.3.2.1. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 \in \mathbb{C}^n$. Тогда решением задачи*

$$\dot{r} = Ar, \quad r(t_0) = r_0$$

является вектор-функция $\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}r_0$.

Пример 10.3.2. Решим задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = -x + 5y, \end{cases}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

В примере 10.3.1 вычислена матричная экспонента

$$e^{At} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix},$$

где A — матрица данной системы уравнений. Используя следствие 10.3.2.1, получаем решение задачи Коши

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1+2t \\ 1+t \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Замечание. Матричную экспоненту целесообразно применять при решении задачи Коши. Однако, при поиске общего решения лучше использовать теорему 9.4.2 или метод Эйлера, поскольку это требует меньше вычислительных затрат. Действительно, при нахождении матричной экспоненты требуется вычислить обратную матрицу T^{-1} для матрицы перехода T к жорданову базису матрицы A:

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}.$$

По лемме 9.3.1 матрица Te^{Jt} тоже фундаментальная, её достаточно для описания общего решения. Но матрица Te^{Jt} — фундаментальная матрица, приведённая в теореме 9.4.2.

Тема 11: Линейные уравнения

Содержание

§11.1. Линейные уравнения

Определение. ***Линейным дифференциальным уравнением*** порядка n называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = q(t), \tag{11.1}$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, q \in C(a,b)$.

Определение. Если $q \equiv 0$ на (a,b), то уравнение (11.1), то есть

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)\dot{y} + p_0(t)y = 0, \tag{11.2}$$

называется ***однородным***, в противном случае — ***неоднородным***.

Лемма 11.1.1 (о равносильной ЛС). *Если функция y — решение уравнения (11.1) на (a,b), то вектор-функция $\Lambda_n y = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ — решение системы*

$$\dot{r} = P(t)r + Q(t), \tag{11.3}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

И наоборот, если $r = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — решение системы (11.3), то y_1 — решение (11.1) на (a,b) и $r = \Lambda_n y_1$.

Доказательство. Следует из леммы 6.2.1. □

Теорема 11.1.1 (существование и единственность максимального решения ЛУ). *Пусть* $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, q \in C(a,b)$, $t_0 \in (a,b)$, $y_0, \dot{y}_0, \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{C}$. *Тогда максимальное решение задачи Коши*

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(t)y = q(t), \\ y(t_0) = y_0,\, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0,\, \ldots,\, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{11.4}$$

существует, единственно и определено на интервале (a,b).

Доказательство. По теореме 9.2.1 задача Коши для системы (11.3) с начальными условиями $y_1(t_0) = y_0$, $y_2(t_0) = \dot{y}_0$, $\ldots$, $y_n(t_0) = y_0^{(n-1)}$ имеет единственное максимальное решение $r = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, определённое на (a,b). По лемме 11.1.1 функция y_1 — решение исходной задачи Коши (11.4) на (a,b).

Не существует другого решения задачи (11.4) (в том числе и определённого на большем интервале), так как иначе по той же лемме 11.1.1 нашлось бы ещё одно решение задачи Коши для системы (11.3), что противоречит теореме 9.2.1. □

Замечание. В дальнейшем под решением линейного уравнения понимается максимальное решение.

Теорема 11.1.2 (об изоморфизме). *Пусть* $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in C(a,b)$. *Тогда множество решений однородного уравнения (11.2) является линейным пространством, изоморфным пространству решений системы*

$$\dot{y} = P(t)y, \tag{11.5}$$

где матрица P та же, что и в (11.3). При этом изоморфизм устанавливается отображением Λ_n.

Доказательство. Любое решение уравнения (11.2) по теореме 11.1.1 является элементом линейного пространства $C^n(a,b)$. Кроме того, сумма двух решений, а также решение, умноженное на произвольное число, также являются решениями. Поэтому множество всех решений само образует линейное пространство.

Лемма 11.1.1 устанавливает биекцию между решениями уравнения и равносильной системы. Отображение Λ_n линейно. Таким образом, Λ_n — изоморфизм. □

Следствие 11.1.2.1. *Пусть* $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in C(a,b)$. *Тогда множество решений уравнения (11.2) образует n-мерное линейное пространство.*

Доказательство. По теореме 11.1.2 пространства решений уравнения (11.2) и системы (11.5) изоморфны, значит, они имеют одинаковую размерность. □

Определение. ***Фундаментальной системой решений*** однородного уравнения (11.2) называется совокупность из n его линейно независимых решений.

Определение. ***Определителем Вронского*** (или ***вронскианом***) функций $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C^{n-1}(a,b)$ называют

$$W(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 11.1.3 (свойства вронскиана решений ЛОУ). *Пусть y_1, y_2, $\ldots$, y_n — решения уравнения (11.2). Тогда следующие утверждения равносильны:*

(а) $W(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in (a,b)$;

(б) $W \equiv 0$ на (a,b);

(в) y_1, y_2, $\ldots$, y_n линейно зависимы на (a,b).

Доказательство. Так как вронскиан функций $\{y_k\}_{k=1}^n$ совпадает с вронскианом вектор-функций $\{\Lambda y_k\}_{k=1}^n$, то для доказательства достаточно принять во внимание теорему 9.3.1. $\square$

Следствие 11.1.3.1 (критерий линейной независимости решений ЛОУ). *Пусть $\{y_k\}_{k=1}^n$ — решения уравнения (11.2), W — вронскиан этого набора. Тогда*

- *набор $\{y_k\}_{k=1}^n$ линейно зависим, если и только если $W(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in (a,b)$;*
- *набор $\{y_k\}_{k=1}^n$ линейно независим, если и только если $W(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in (a,b)$.*

Теорема 11.1.4 (формула Остроградского–Лиувилля для решений ЛОУ). *Пусть $t, t_0 \in (a,b)$, $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in C(a,b)$, $\{y_k\}_{k=1}^n$ — решения линейного однородного уравнения (11.2). Тогда вронскиан этих решений*

$$W(t) = W(t_0) \exp \int\limits_{t_0}^{t} (-p_{n-1}(\tau))\, d\tau.$$

Доказательство. Принимая во внимание теорему 9.3.2 и лемму 11.1.1, находим

$$\begin{aligned} W(y_1, \ldots, y_n) &= W(\Lambda y_1, \ldots, \Lambda y_n) \\ &= W(t_0) \exp \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} P(\tau)\, d\tau = W(t_0) \exp \int\limits_{t_0}^{t} (-p_{n-1}(\tau))\, d\tau. \end{aligned}$$ $\square$

Теорема 11.1.5 (общее решение ЛУ). *Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, q \in C(a, b)$, φ — решение уравнения (11.1), $\{y_k\}_{k=1}^n$ — фундаментальная система решений уравнения (11.2). Тогда общее решение уравнения (11.1) имеет вид*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k + \varphi,$$

где $\{C_k\}_{k=1}^n$ — произвольные постоянные.

Доказательство. По теореме 11.1.2 вектор-функции $\{\Lambda y_k\}_{k=1}^n$ образуют базис в пространстве решений однородной системы (11.5). В силу леммы 11.1.1 вектор-функция $\Lambda\varphi$ — решение неоднородной системы (11.3). По теореме 10.1.1

$$r = \sum_{k=1}^{n} C_k \Lambda y_k + \Lambda\varphi$$

— общее решение системы (11.3). По лемме 11.1.1 первая компонента правой части даёт формулу общего решения уравнения (11.1). $\square$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения может быть использован метод вариации постоянных.

Теорема 11.1.6 (метод вариации постоянных для ЛУ). *Пусть $\{y_k\}_{k=1}^n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (11.2). Тогда если функции $\{C_k\}$ пробегают все решения системы*

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \ldots & \dot{y}_n \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \\ \ldots \\ \dot{C}_{n-1} \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

то $y = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k$ пробегает все решения уравнения (11.1).

Доказательство. По теореме 10.1.2 общее решение системы, равносильной уравнению (11.1), имеет вид

$$r = \sum_{k=1}^{n} C_k \Lambda y_k,$$

где функции $C_1, \ldots, C_n$ удовлетворяют системе

$$(\Lambda y_1, \ldots, \Lambda y_n) \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \ldots \\ \dot{C}_{n-1} \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

По лемме 11.1.1 первая строка вектора r — общее решение уравнения (11.1). $\square$

Упражнение 11.1.1. (*принцип суперпозиции*) Докажите, что если y_1 — решение уравнения (11.1) с правой частью $f = f_1$, а y_2 — решение того же уравнения с правой частью $f = f_2$, то $y_1 + y_2$ — решение того же уравнения с правой частью $f = f_1 + f_2$.

§11.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение. Линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами называют уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t), \tag{11.6}$$

где a_0, a_1, $\ldots$, $a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $f \in C(a,b)$.

В дальнейшем для краткости используется обозначение

$$Ly := \frac{d^n}{dt^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \ldots + a_1\frac{d}{dt}y + a_0 y = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k}\right) y,$$

где $a_n = 1$. При помощи оператора L уравнение (11.6) записывается в виде

$$Ly = f(t).$$

11.2.1. Однородное уравнение

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Ly = 0. \tag{11.7}$$

Применяя оператор L к функции $e^{\lambda t}$, находим

$$L(e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right) e^{\lambda t}.$$

Определение. Многочлен

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

называется ***характеристическим многочленом*** уравнения (11.6), а его корни — ***характеристическими числами*** уравнения (11.6).

Если λ — корень характеристического многочлена, то получаем $L(e^{\lambda t}) \equiv 0$. Верно и обратное: если $e^{\lambda t}$ — решение однородного уравнения (11.7), то λ — корень многочлена p. Докажем более общее утверждение.

Лемма 11.2.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — корень кратности $m \in \mathbb{N}$ характеристического многочлена уравнения (11.7). Тогда функции*

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ \ldots,\ t^{m-1}e^{\lambda t}$$

являются решениями (11.7).

Доказательство. Убедимся подстановкой в уравнение (11.7), что указанные функции являются решениями.

Пусть $k \in [0 : m-1]$. Считая λ переменной, в силу бесконечной дифференцируемости функции $e^{\lambda t}$ при любом $j \in \mathbb{Z}_+$ будет

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}e^{\lambda t} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\frac{\partial^j}{\partial t^j}e^{\lambda t}.$$

Тогда

$$L\left(t^k e^{\lambda t}\right) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}L\left(e^{\lambda t}\right).$$

Применяя формулу Лейбница, имеем

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}L\left(e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\left(p(\lambda)e^{\lambda t}\right) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j p^{(j)}(\lambda)\frac{\partial^{k-j}}{\partial \lambda^{k-j}}e^{\lambda t}.$$

Подставляя вместо λ корень кратности m многочлена p, получаем ноль, поскольку при $j \in [0 : k]$ обнуляются значения $p^{(j)}(\lambda)$. $\square$

Лемма 11.2.2 (линейная независимость квазиодночленов). *Пусть $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ при $j \in [1 : n]$, $\{(k_j, \lambda_j)\}_{j=1}^n$ — различные пары чисел. Тогда функции $\left\{t^{k_j}e^{\lambda_j t}\right\}_{j=1}^n$ линейно независимы на любом промежутке из $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Разобьём множество пар (k_1, λ_1), $\ldots$, (k_n, λ_n) на группы с одинаковым вторым элементом. Если такая группа одна, то линейная независимость указанных функций следует из линейной независимости одночленов.

Допустим, что линейная независимость доказана, если количество групп равно m. Предположим, что в случае $m+1$ группы некоторая нетривиальная линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю. Объединяя слагаемые с одинаковыми экспонентами и изменяя нумерацию чисел λ_i, имеем

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} \equiv 0,$$

где p_i — многочлены, а числа λ_i различны. Деля обе части на $e^{\lambda_{m+1} t}$, получаем

$$p_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_{m+1})t} + p_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_{m+1})t} + \ldots + p_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m+1})t} + p_{m+1}(t) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество $\deg p_{m+1} + 1$ раз, находим

$$q_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_{m+1})t} + q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_{m+1})t} + \ldots + q_m(t)e^{(\lambda_m-\lambda_{m+1})t} \equiv 0, \tag{11.8}$$

где при всех $i \in [1:m]$ многочлен q_i имеет ту же степень, что и p_i.

Значит, если для некоторого i будет $p_i \not\equiv 0$, то и $q_i \not\equiv 0$. Следовательно, в левой части тождества (11.8) находится нетривиальная линейная комбинация квазиодночленов. Это противоречит индукционному предположению. □

Теорема 11.2.1 (общее решение ЛОУ с постоянными коэффициентами). *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ — характеристические числа уравнения (11.7) кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_s \in \mathbb{N}$. Тогда функции*

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ &\ldots \\ &e^{\lambda_s t}, te^{\lambda_s t}, \ldots, t^{m_s-1}e^{\lambda_s t} \end{aligned} \tag{11.9}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (11.7).

Доказательство. По лемме 11.2.1 указанные функции являются решениями (11.7), а по лемме 11.2.2 они линейно независимы. Так как сумма всех кратностей равна порядку уравнения, то эти функции образуют фундаментальную систему решений. □

Замечание. Пусть $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ — фундаментальная система решений уравнения (11.7), и $y_1 = \overline{y}_2$. Тогда, опираясь на теорему 11.1.2 и лемму об овеществлении 9.3.2, получаем, что $\{\operatorname{Re} y_1, \operatorname{Im} y_1, y_3, \ldots, y_n\}$ — фундаментальная система того же уравнения.

Если коэффициенты уравнения (11.7) вещественны, то функции из набора (11.9), соответствующие комплексным корням, разбиваются на комплексно-сопряжённые пары. Заменяя каждую пару функций

$$t^k e^{(a+ib)t}, \quad t^k e^{(a-ib)t}$$

на пару

$$t^k e^{at} \cos bt, \quad t^k e^{at} \sin bt,$$

получаем вещественный базис в пространстве решений.

11.2.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Для поиска частного решения неоднородного уравнения (11.6) в случае, когда правая часть является квазимногочленом, можно воспользоваться методом неопределённых коэффициентов. Чтобы обосновать его, докажем предварительно формулу, которая позволяет упростить вычисление производной квазимногочлена. В дальнейшем $D := \frac{d}{dt}$.

Лемма 11.2.3 (формула сдвига). *Пусть p — многочлен степени n, функция f дифференцируема n раз, $\gamma \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$p(D)(f(t)e^{\gamma t}) = e^{\gamma t} p(D+\gamma) f(t).$$

Доказательство. Сначала докажем формулу для одночленов $p(\lambda) = \lambda^k$. При $k = 0$ формула очевидна. Допустим она доказана при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\begin{aligned} D^{k+1}(fe^{\gamma t}) &= D^k(Df \cdot e^{\gamma t} + f\gamma e^{\gamma t}) = D^k(e^{\gamma t}(D+\gamma)f) \\ &= e^{\gamma t}(D+\gamma)^k(D+\gamma)f = e^{\gamma t}(D+\gamma)^{k+1}f. \end{aligned}$$

Тогда для многочлена общего вида получаем

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k D^k\right)(fe^{\gamma t}) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{\gamma t}(D+\gamma)^k f = e^{\gamma t} p(D+\gamma) f. \qquad \square$$

Теорема 11.2.2 (метод неопределённых коэффициентов для ЛУ). *Пусть правая часть уравнения (11.6) — квазимногочлен*

$$f(t) = p_k(t)e^{\gamma t},$$

где $\gamma \in \mathbb{C}$, p_k — многочлен степени k. Тогда уравнение (11.6) имеет единственное частное решение вида

$$\varphi(t) = t^m q_k(t) e^{\gamma t},$$

где q_k — многочлен степени k, при этом

- *если γ не характеристическое число, то $m = 0$;*
- *если γ — характеристическое число, то m — его кратность.*

Доказательство. Пусть q — некоторый многочлен. Подставим $y = q(t)e^{\gamma t}$ в уравнение (11.6), для которого p — характеристический многочлен. По лемме 11.2.3 имеем

$$e^{\gamma t} p(D+\gamma) q = p_k e^{\gamma t} \iff p(D+\gamma)q = p_k. \tag{11.10}$$

Оператор $p(D+\gamma)$ отображает множество многочленов степени n в себя. Если $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ — корни многочлена p, то

$$p(D+\gamma) = \prod_{i=1}^{n}(D+\gamma-\lambda_i).$$

Отсюда видно, что если γ — не характеристическое число, то многочлен $p(D+\gamma)$ имеет ненулевой свободный член, поэтому $\deg p(D+\gamma)q = \deg q$. Следовательно, ядро оператора $p(D+\gamma)$ содержит лишь ноль. Поэтому $p(D+\gamma)$ — изоморфизм, а тогда существует и при том единственный многочлен q, для которого верно соотношение (11.10).

Если γ — характеристическое число кратности m, то

$$p(D+\gamma) = \widetilde{p}(D+\gamma)D^m,$$

при этом $\widetilde{p}(\gamma) \neq 0$. Тогда, рассуждая аналогично, заключаем, что $\widetilde{p}(D+\gamma)$ — изоморфизм пространства многочленов степени не выше $n-m$. Поэтому (11.10) равносильно

$$D^m q = (\widetilde{p}(D+\gamma))^{-1} p_k.$$

Интегрируя многочлен в правой части m раз, найдём q. Выбирая каждый раз при интегрировании константы равными нулю, получим единственный многочлен вида $t^m q_k(t)$, для которого верно (11.10). □

Упражнение 11.2.1. (*метод комплексных амплитуд*) Пусть коэффициенты оператора L вещественны. Докажите, что если z — решение уравнения $Lz = f(t)$, то $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ — решения уравнений $Ly = \operatorname{Re} f(t)$ и $Ly = \operatorname{Im} f(t)$ соответственно.

Тема 12: Теория устойчивости

Содержание

§12.1. Понятие устойчивости

Рассмотрим скалярное автономное уравнение

$$\dot{x} = \lambda x.$$

Его общее решение имеет вид $x = x_0 e^{\lambda t}$, где $x_0 = x(0)$. При любом значении параметра λ уравнение имеет решение $x \equiv 0$. Ему соответствует точка покоя в начале координат на фазовой прямой — оси Ox. Проследим, как ведут себя другие решения с близкими начальными условиями в зависимости от λ (рис. 12.1).

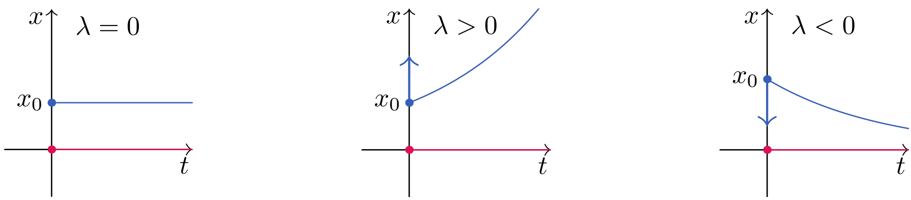

Рис. 12.1. Решения уравнения $\dot{x} = \lambda x$

Если $\lambda = 0$, то любое решение — это константа, равная начальному значению. Таким образом, вся фазовая прямая состоит из точек покоя. В этом случае говорят, что решение, тождественно равное нулю, устойчиво. Другими словами, если немного изменить начальное значение, то решение сильно не изменится.

Если $\lambda > 0$, то при $x_0 > 0$ решение неограниченно возрастает. Значит, точка на фазовой прямой удаляется от точки покоя, уходя в бесконечность. Аналогично поведение решения и при $x_0 < 0$. Говорят, что нулевое решение неустойчиво, поскольку даже очень незначительное отклонение от нуля в начальный момент времени влечёт за собой большое отклонение в будущем.

При $\lambda < 0$ решение монотонно стремится к нулю. Соответствующая фазовая точка стремится к положению равновесия. В этом случае решение не просто устойчиво, а асимптотически устойчиво: если отойти от нуля, то фазовая точка не просто останется вблизи точки покоя, а будет притягиваться к ней.

Начальные данные для уравнения или системы уравнений обычно являются результатами каких-то измерений. Следовательно, они известны не точно, а с некоторой погрешностью. Если сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то найденное решение не может считаться удовлетворительным в смысле описания явления. Поэтому важно знать условия, при которых малое изменение начальных данных влечёт малое изменение решения.

Перейдём к формальным определениям. В дальнейшем через $r(t, t_0, r_0)$ обозначается решение задачи Коши с начальным условием $r(t_0) = r_0$, а через $r(t, r_0)$ — решение задачи Коши с начальным условием $r(0) = r_0$.

Определение. Положение равновесия $r = 0$ автономной системы $\dot{r} = f(r)$ называется ***устойчивым (по Ляпунову)***, если для любой ε-окрестности нуля найдётся такая δ-окрестность нуля, что любое решение, выходящее из этой δ-окрестности, во все будущие моменты времени отличается от нуля менее, чем на ε (рис. 12.2). То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon |r_0| < \delta \Rightarrow \forall t \geqslant 0 \; |r(t, r_0)| < \varepsilon.$$

В противном случае положение равновесия называется ***неустойчивым***.

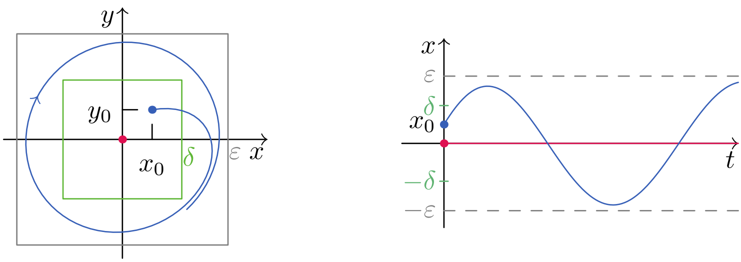

Рис. 12.2. Устойчивое положение равновесия

Определение. Положение равновесия $r = 0$ автономной системы $\dot{r} = f(r)$ называется ***асимптотически устойчивым*** (рис. 12.3), если

- $r = 0$ устойчиво;
- все решения, начинающиеся в некоторой окрестности нуля, в будущем стремятся к нулю, то есть

$$\exists \delta > 0 \colon |r_0| < \delta \Rightarrow r(t, r_0) \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Пример 12.1.1. Опираясь на приведённые определения, исследуем на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = -2x.$$

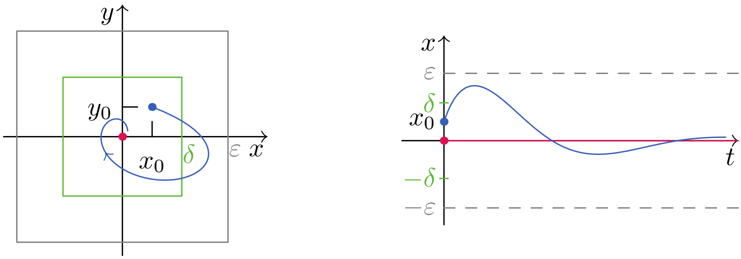

Рис. 12.3. Асимптотически устойчивое положение равновесия

Его общее решение $x = Ce^{-2t}$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon$, U_δ — δ-окрестность нуля. Тогда для любого начального значения $x_0 \in U_\delta$ имеем решение $x(t, x_0) = x_0 e^{-2t}$. Оно определено при всех $t \geqslant 0$, и при этом

$$|x(t, x_0)| = |x_0 e^{-2t}| \leqslant |x_0| < \varepsilon.$$

Значит, нулевое решение устойчиво.

Кроме того, оно асимптотически устойчиво. В качестве δ, участвующего в определении асимптотической устойчивости, можно выбрать любое число. △

Понятие устойчивости нулевого положения равновесия при помощи замены системы координат переносится на произвольное положение равновесия и произвольный начальный момент времени. Однако, значение начального момента времени несущественно для автономных систем, поскольку для любого решения автономной системы верно $r(t + t_0, t_0, r_0) = r(t, r_0)$. Можно, кроме того, определить устойчивость не только положения равновесия, но и других решений. Общее определение таково.

Определение. Решение φ на $[t_0, +\infty)$ системы $\dot r = f(t, r)$ называется ***устойчивым (по Ляпунову)***, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такая δ-окрестность значения $\varphi(t_0)$, что любое решение, выходящее из этой δ-окрестности при $t = t_0$, во все будущие моменты времени отличается от φ менее, чем на ε (рис. 12.4). То есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon |r_0 - \varphi(t_0)| < \delta \Rightarrow \forall t \in [t_0, +\infty)\ |r(t, t_0, r_0) - \varphi(t)| < \varepsilon. \qquad (12.1)$$

Таким образом, решение φ устойчиво, если близкие к нему по начальным условиям решения остаются близкими и в будущем.

Определение. Если решение φ устойчиво и $r(t, t_0, r_0) - \varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех r_0 из некоторой окрестности $\varphi(t_0)$, то решение φ ***асимптотически устойчиво***.

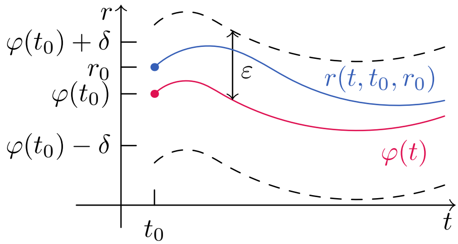

Рис. 12.4. Устойчивое решение

Замечание. Используя равномерную норму $\|\cdot\|_{C[t_0,+\infty)}$, выражение (12.1) можно заменить равносильным ему:

$$\lim_{r_0\to\varphi(t_0)} \|r(\cdot,t_0,r_0)-\varphi\|_{C[t_0,+\infty)} = 0.$$

Исследование устойчивости решения φ всегда можно свести к исследованию нулевого решения другой системы.

Лемма 12.1.1. *Пусть φ — решение системы $\dot r = f(t,r)$. Тогда φ устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение $s=0$ системы*

$$\dot s = f(t,s+\varphi) - f(t,\varphi).$$

Доказательство. Положим $s = r-\varphi$. Пусть $\dot r = f(t,r)$, тогда

$$\dot s = \dot r - \dot\varphi = f(t,r) - f(t,\varphi) = f(t,s+\varphi) - f(t,\varphi).$$

Получаем, что $s=0$ — решение системы $\dot s = f(t,s+\varphi)-f(t,\varphi)$. Остаётся сопоставить определение устойчивости (асимптотической устойчивости) для решения φ исходной и решения $s=0$ новой системы. □

В случае, когда известно общее решение в элементарных функциях, вопрос об устойчивости можно разрешить непосредственной проверкой определения. Однако, найти явные выражения для решений удаётся далеко не всегда. Поэтому возникает необходимость построения общей теории, которая позволяла бы судить об устойчивости решения только по аналитической структуре правой части системы.

§12.2. Устойчивость линейной системы

Из леммы 12.1.1 следует, что решение φ линейной системы

$$\dot r = P(t)r + q(t)$$

устойчиво (асимптотически устойчиво), если и только если устойчиво (асимптотически устойчиво) решение $r = 0$ соответствующей линейной однородной системы

$$\dot{r} = P(t)r.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что все решения линейной системы имеют одинаковый характер устойчивости, поэтому можно говорить об *устойчивости линейной системы.*

Теорема 12.2.1 (устойчивость ЛОС с постоянными коэффициентами). *Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тогда система*

$$\dot{r} = Ar \tag{12.2}$$

(i) асимптотически устойчива, если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ для всех $\lambda \in \operatorname{spec} A$;

(ii) устойчива, но не асимптотически, если имеются собственные числа с нулевой вещественной частью, и при этом их алгебраическая кратность совпадает с геометрической, а остальные собственные числа, если они есть, имеют отрицательную вещественную часть;

(iii) неустойчива, если найдётся $\lambda \in \operatorname{spec} A$, такое что либо $\operatorname{Re}\lambda > 0$, либо $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и алгебраическая кратность числа λ больше геометрической.

Доказательство. Через T обозначаем матрицу перехода к жорданову базису матрицы A, J — жорданова форма матрицы A.

В силу следствия 10.3.2.1 любое решение системы (12.2) имеет вид

$$r(t) = e^{At}r(0) = Te^{Jt}T^{-1}r(0).$$

Принимая во внимание лемму 7.1.2, получаем

$$|r(t)| \leqslant n^3\,|T|\,\left|e^{Jt}\right|\,\left|T^{-1}\right|\,|r(0)| = K\left|e^{Jt}\right|\,|r(0)|, \tag{12.3}$$

где $K > 0$ не зависит от t. Обозначим через $a_{ij}(t)$ элементы матрицы e^{Jt}.

(i) Каждая функция $a_{ij}(t)$ имеет вид $Ce^{\lambda t}t^k$, где λ — одно из собственных чисел. Поскольку $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то для всех i, j будет $a_{ij}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, следовательно,

$$|e^{Jt}| \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Тогда из оценки (12.3) следует устойчивость и асимптотическая устойчивость нулевого решения.

(ii) Каждая функция $a_{ij}(t)$ имеет вид $Ce^{\lambda t}t^k$, но теперь $k = 0$, если $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Следовательно, существует такое число M, что при всех $t \geqslant 0$

$$|e^{Jt}| < M.$$

Поэтому из оценки (12.3) следует устойчивость нулевого решения.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и соответствующая функция $e^{\lambda t}$ расположена в матрице e^{Jt} на пересечении j-й строки и j-го столбца. Обозначим через e_j столбец, в котором на j-м месте стоит 1, а остальные элементы нулевые. Тогда при любом $\delta > 0$ решение с начальным значением

$$r(0) = \delta T e_j$$

не стремится к нулю. Поэтому асимптотической устойчивости нет.

(iii) Пусть существует собственное число $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha > 0$. Обозначим через h соответствующий собственный вектор. Тогда вектор-функция

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} h$$

является комплексным решением (12.2).

Если же имеется собственное число $\lambda = i\beta$, $\beta \neq 0$, алгебраическая кратность которого больше геометрической, то система (12.2) имеет комплексное решение

$$\varphi(t) = e^{i\beta t}(th_1 + h_2),$$

где h_1, h_2 — собственный и присоединённый вектор, соответствующие числу λ.

Заметим, что в обоих случаях $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, хотя бы одна из вектор-функций, $\operatorname{Re}\varphi(t)$ или $\operatorname{Im}\varphi(t)$, является неограниченным вещественным решением (12.2). Пусть таковой является $\operatorname{Re}\varphi(t)$. Тогда выбирая в качестве начального условия

$$r(0) = \mu \operatorname{Re}\varphi(0)$$

при достаточно малом μ, получаем неограниченное решение с начальным значением в сколь угодно малой окрестности нуля. Отсюда следует, что нулевое решение неустойчиво. $\square$

Тема 13: Классификация точек покоя. Теоремы Ляпунова

Содержание

§13.1. Классификация точек покоя линейной однородной системы второго порядка

Исследуем подробно поведение траекторий в окрестности точки покоя линейной системы

$$\dot{r} = Ar, \tag{13.1}$$

если $A \in M_2(\mathbb{R})$. Пусть $\det A \neq 0$, тогда имеется единственное положение равновесия $r = 0$ и собственные числа λ_1, λ_2 матрицы A отличны от нуля.

I. Случай $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2}$

Перейдём в систему координат u, v, связанную с собственным базисом h_1, h_2. Подставляя в уравнение $r = Ts$, где $s = (u, v)^T$, $T = (h_1, h_2)$, получаем

$$T\dot{s} = ATs.$$

Умножая слева на T^{-1}, находим

$$\dot{s} = T^{-1}ATs.$$

Так как $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, то в новых координатах система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u, \\ \dot{v} = \lambda_2 v. \end{cases}$$

Её решение: $u = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $v = C_2 e^{\lambda_2 t}$.

Если одна, и только одна из констант C_1 и C_2 равна нулю, то получаем параметрическое задание одной из полуосей. Заметим ещё, что изменение знака одной из констант преобразует фазовую траекторию в симметричную ей относительно координатной оси. Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет только в первой четверти.

Пусть $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Выражая t через u и подставляя в выражение для v, находим

$$v = C_2 \left(\frac{u}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} = Cu^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

При $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ получается семейство парабол. Функции u и v возрастают, следовательно, фазовые траектории расходятся от начала координат. Отражая траектории относительно координатных осей, получаем фазовый портрет во всей плоскости (рис. 13.1). Такая точка покоя называется ***неустойчивый узел***.

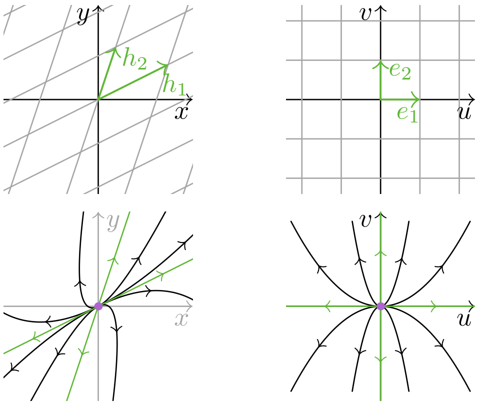

Рис. 13.1. Неустойчивый узел в старой и новой системе координат

При возвращении к прежней системе координат фазовый портрет исказится, но качественное поведение траекторий не изменится. Это замечание относится и ко всем последующим случаям.

Если $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, то уравнение фазовых траекторий не меняется, но изменяется направление движения. Теперь фазовые точки стремятся к началу координат. Соответствующее положение равновесия — ***устойчивый узел*** (рис. 13.2).

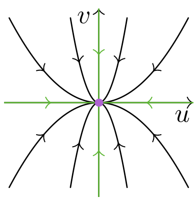

Рис. 13.2. Устойчивый узел

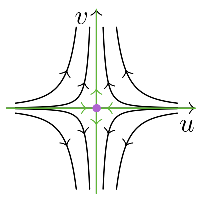

Рис. 13.3. Седло

Если $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, то $v = Cu^{\lambda_2/\lambda_1}$ — уравнение гиперболы. Соотношения $u = C_1 e^{\lambda_1 t} \to 0$, $v = C_2 e^{\lambda_2 t} \to \infty$ при $t \to +\infty$ дают представление о направлении движения вдоль фазовых траекторий. Точка покоя называется ***седло*** (рис. 13.3), она неустойчива. Асимптоты фазовых траекторий называют ***сепаратрисами седла***. В старой системе координат сепаратрисы проходят вдоль собственных векторов матрицы коэффициентов.

II. Случай $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2}$

Если геометрическая кратность собственного числа $\lambda = \lambda_{1,2}$ равна двум, то $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda)$. Тогда решения системы: $x = C_1 e^{\lambda t}$, $y = C_2 e^{\lambda t}$. Исключая отсюда параметр t получаем, что фазовые траектории — лучи, входящие в начало координат при $\lambda < 0$, и выходящие из него, если $\lambda > 0$. Соответствующая точка покоя — устойчивый или неустойчивый ***дикритический узел*** (рис. 13.4).

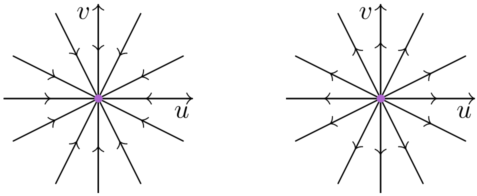

Рис. 13.4. Устойчивый и неустойчивый дикритический узел

Пусть собственное число λ имеет геометрическую кратность 1. Подставляя в систему $r = Ts$, где T — матрица перехода к жорданову базису, получаем

$$\dot{s} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} s.$$

Тогда

$$s = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} (t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Следовательно, $u = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$, $v = C_2 e^{\lambda t}$.

Заметим, что одновременная замена знака у постоянных C_1 и C_2 переводит фазовую траекторию в симметричную ей относительно начала координат. При $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ функции u и v определяют полуоси координатной оси u. Таким образом, достаточно изучить фазовый портрет при $v > 0$.

Выражая параметр t через v и подставляя его в выражение для u, находим уравнение траекторий

$$u = Cv + \frac{\ln v}{\lambda} v,$$

где $C = C_1/C_2$. Производная u'_v указывает на то, что все фазовые траектории касаются оси u при $v \to 0$ (рис. 13.5). Соответствующая точка покоя — ***вырожденный узел*** (*устойчивый* при $\lambda < 0$ и *неустойчивый* при $\lambda > 0$).

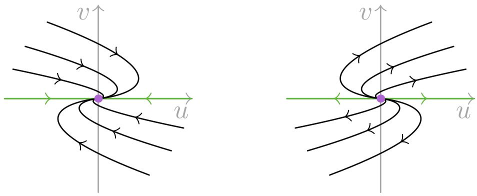

Рис. 13.5. Устойчивый и неустойчивый вырожденный узел

III. Случай $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}}$, $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{\lambda_{1,2} \neq 0}$

Поскольку матрица A вещественная, то $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$. Пусть $\lambda = \lambda_1$, h — соответствующий собственный вектор. Тогда $\operatorname{Re} h$, $\operatorname{Im} h$ — базис в $\mathbb{R}^2$. Поскольку

$$\operatorname{Re} h = \frac{h + \overline{h}}{2}, \quad \operatorname{Im} h = \frac{h - \overline{h}}{2i} = \frac{-ih + i\overline{h}}{2},$$

то матрица перехода T к базису $\operatorname{Re} h$, $\operatorname{Im} h$ представима в виде

$$T = (\operatorname{Re} h, \operatorname{Im} h) = \frac{1}{2}(h, \overline{h}) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Пусть $H = (h, \overline{h})$ — матрица перехода к собственному базису. Подставляя $r = Ts$ в уравнение $\dot{r} = Ar$, находим

$$\frac{1}{2} H \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = A \frac{1}{2} H \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} s.$$

Сокращая на множитель $1/2$ и умножая слева на H^{-1}, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \dot{s} = H^{-1} A H \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} s. \tag{13.2}$$

Поскольку $H^{-1} A H = \operatorname{diag}(\lambda, \overline{\lambda})$, то система (13.2) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \lambda(u - iv), \\ \dot{u} + i\dot{v} = \overline{\lambda}(u + iv). \end{cases}$$

Уравнения этой системы равносильны: одно получается из другого при комплексном сопряжении. Поэтому достаточно рассмотреть только одно из них. Положим $z = u + iv$. Тогда второе уравнение принимает вид

$$\dot{z} = \overline{\lambda} z.$$

Его решения: $z = Ce^{\overline{\lambda} t}$.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $C = ae^{i\varphi}$. Тогда

$$z = ae^{\alpha t} e^{i(\varphi - \beta t)}.$$

При $\alpha = 0$ получаем окружности радиуса a. Соответствующая устойчивая, но не асимптотически устойчивая точка покоя называется ***центр***. Направление обхода окружностей зависит от знака β.

При $\alpha > 0$ получаем логарифмическую спираль. Модуль z возрастает, значит, точка удаляется от начала координат, при этом совершая вокруг него обороты. Данное положение равновесия называется ***неустойчивый фокус***.

При $\alpha < 0$ спираль закручивается. Точка покоя — ***устойчивый фокус***. Направление закручивания или раскручивания траекторий в случае фокуса зависит от знака $\operatorname{Im}\lambda$ (рис. 13.6).

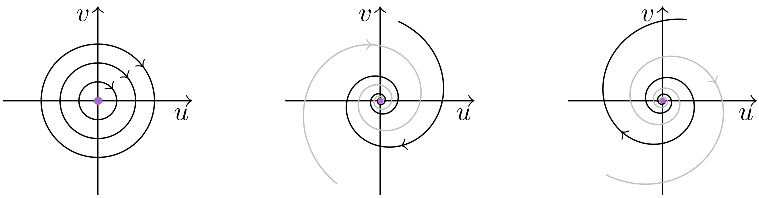

Рис. 13.6. Центр, устойчивый и неустойчивый фокус

§13.2. Теоремы Ляпунова

13.2.1. Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим нелинейную автономную систему $\dot{r} = f(r)$. Допустим, вектор-функция f дифференцируема в нуле, то есть

$$f(r) = f(0) + f'(0)r + o(r) \quad \text{при } r \to 0.$$

Определение. Пусть $f(0) = 0$. Тогда система

$$\dot{r} = f'(0)r$$

называется ***системой первого приближения*** или ***линеаризацией*** системы $\dot{r} = f(r)$.

Теорема 13.2.1 (Ляпунов, устойчивость по первому приближению). *Пусть $f \in C^2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля, $f(0) = 0$. Тогда нулевое решение системы $\dot{r} = f(r)$*

(а) асимптотически устойчиво, если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ для любого $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$;

(б) неустойчиво, если найдётся $\lambda \in \operatorname{spec} f'(0)$, для которого $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Доказательство. См. [9, гл. 7, §4]. □

Таким образом, при выполнении условий теоремы нулевое положение равновесия исходной системы и системы первого приближения ведут себя одинаково в смысле устойчивости.

Пример 13.2.1. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

Матрица Якоби правой части системы

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Её собственные числа $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, точка покоя данной системы асимптотически устойчива. △

Отметим, что в теореме 13.2.1 не указан случай, когда имеются собственные числа с нулевой вещественной частью, а остальные, если они есть, имеют отрицательную вещественную часть. В этом случае характер устойчивости положения равновесия исходной и линеаризованной системы может различаться.

Пример 13.2.2. Скалярное уравнение $\dot{x} = x^2$ имеет точку покоя $x = 0$. Соответствующая линеаризация $\dot{x} = 0$ — устойчивое уравнение. Решения исходного уравнения при $x > 0$ — семейство гипербол

$$x = \frac{1}{C - t}.$$

Для устойчивости все решения с достаточно близкими к нулю начальными значениями должны мало отличаться от нулевого решения во все будущие моменты времени. Однако, если хоть немного отступить от нуля в положительном направлении оси x, то соответствующее решение не только не будет близким к нулевому решению в будущем. Оно даже не будет определено, начиная с некоторого момента времени (рис. 13.7). Следовательно, нулевое решение неустойчиво по определению. △

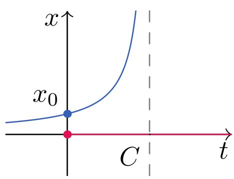

Рис. 13.7. Решение уравнения $\dot{x} = x^2$ при $x_0 > 0$

Таким образом, в указанном случае требуется привлекать иные методы исследования на устойчивость.

13.2.2. Метод функций Ляпунова

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля. Функция $V \in C^1(\Omega)$ называется ***функцией Ляпунова*** системы $\dot{r} = f(r)$, если

- $V(r) > 0$ при всех $x \in \Omega \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$;
- $V' \cdot f \leqslant 0$ при всех $r \in \Omega$.

Теорема 13.2.2 (Ляпунов, об устойчивости). *Пусть $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля, $f(0) = 0$. Если в области Ω существует функция Ляпунова системы $\dot{r} = f(r)$, то $r = 0$ — устойчивое решение.*

Первое свойство функции Ляпунова позволяет говорить о ней как о расстоянии до начала координат. Конечно, она не обладает всеми свойствами расстояния. Надо понимать её как некоторое обобщённое расстояние.

Второе свойство утверждает, что скалярное произведение градиента функции V и вектора фазовой скорости f неположительно. Другими словами, угол между V' и f не острый (рис. 13.8). То есть движение в данной точке направлено в сторону уменьшения или хотя бы не увеличения «расстояния» до начала координат. Это верно для любой точки в окрестности нуля, а значит, положение устойчиво — в этом смысл теоремы Ляпунова.

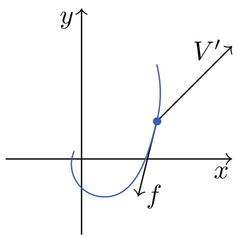

Рис. 13.8. Градиент функции Ляпунова и фазовая скорость

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть нулевое положение равновесия неустойчиво. Тогда найдётся такое $\varepsilon > 0$, что при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ можно выбрать такое начальное значение r_0 из δ-окрестности нуля, что будет ложным утверждение

$$\forall t \geqslant 0 \quad |r(t, r_0)| < \varepsilon. \tag{13.3}$$

Все числа, меньшие ε, обладают тем же свойством, что и ε. Поэтому можно считать, что ε-окрестность содержится вместе с границей в области Ω.

Ложность утверждения (13.3) означает одно из двух:

(i) решение $r(t, r_0)$ определено не при всех $t \geqslant 0$;

(ii) найдётся $t_\varepsilon > 0$, такое что $|r(t_\varepsilon, r_0)| \geqslant \varepsilon$.

Допустим, выполнено (i), то есть максимальное решение $r(t, r_0)$ (которое существует и единственно по теореме 9.1.2) определено на интервале $(a, b) \ni 0$, где $b < +\infty$. Построим цилиндр $[0, b] \times \overline{B}_\varepsilon(0)$, где $\overline{B}_\varepsilon(0)$ — замыкание ε-окрестности нуля. По теореме 9.1.3 интегральная кривая решения $r(t, r_0)$ выйдет на его границу при некотором $t_\varepsilon < b$. Значит, верно утверждение (ii).

Итак, достаточно получить противоречие, если верно (ii). Будем считать, что t_ε — это точка, в которой $r(t_\varepsilon, r_0) \in \partial B_\varepsilon(0)$, где $\partial B_\varepsilon(0)$ — граница ε-окрестности нуля.

Пусть $m_V = \min_{r \in \partial B_\varepsilon(0)} V(r)$. Поскольку $V(r) \to 0$ при $r \to 0$, то можно выбрать δ так, чтобы $V(r) < m_V/2$ при $|r| < \delta$. Положим

$$v(t) := V(r(t, r_0)),$$

где r_0 выбрано из δ-окрестности нуля так, чтобы выполнялось (ii).

Функция v дифференцируема,

$$\begin{aligned} v(0) &= V(r_0) < \frac{m_V}{2}, \\ v(t_\varepsilon) &= V(r(t_\varepsilon, r_0)) \geqslant m_V. \end{aligned}$$

Поэтому найдётся точка $t_1 \in (0, t_\varepsilon)$, в которой $\dot{v}(t_1) > 0$.

Однако, исходя из второго свойства функции Ляпунова, имеем

$$\dot{v}(t_1) = V'(r(t_1, r_0)) \cdot r'_t(t_1, r_0) = V'(r(t_1, r_0)) \cdot f(r(t_1, r_0)) \leqslant 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Определение. Скалярное произведение градиента функции V и правой части системы называют ещё ***производной функции V в силу данной системы***.

Приведём без доказательства условия для асимптотической устойчивости.

Теорема 13.2.3 (Ляпунов, об асимптотической устойчивости). *Если в условиях теоремы 13.2.2 выполнено $V' \cdot f < 0$ в области $\Omega \setminus \{0\}$, то нулевое решение системы $\dot{r} = f(r)$ асимптотически устойчиво.*

Применение указанных теорем носит название метода функций Ляпунова. Данный метод более универсален, чем метод исследования на устойчивость по первому приближению. Его недостаток в том, что не существует общего алгоритма построения функции Ляпунова. В простейших случаях её можно искать в виде линейной комбинации чётных степеней переменных:

$$V(x, y) = ax^{2p} + by^{2q}.$$

В более общем случае рекомендуется искать функцию Ляпунова в виде квадратичной формы:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j.$$

Пример 13.2.3. Исследуем на устойчивость точку покоя $x = y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^5, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

По соответствующей системе первого приближения об устойчивости точки покоя ничего сказать нельзя, поскольку собственные числа её матрицы коэффициентов чисто мнимые.

Попробуем подобрать функцию Ляпунова в виде $V(x, y) = ax^2 + by^2$. Производная V в силу данной системы:

$$V' \cdot f = (2ax, 2by) \cdot \begin{pmatrix} -y - x^5 \\ x - y^3 \end{pmatrix} = 2ax(-y - x^5) + 2by(x - y^3)$$
$$= -2ax^6 - 2axy + 2bxy - 2by^4.$$

Заметим, что второе и третье слагаемое сокращаются, если $a = b$. Оставшееся выражение при этом будет иметь определённый знак.

Пусть $a = b = 1$. Тогда, во-первых, $V(x, y) > 0$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ и $V(0, 0) = 0$. Во-вторых, производная в силу системы

$$V' \cdot f = -2(x^6 + y^4) < 0$$

всюду, за исключением начала координат. Тем самым, функция V обладает свойствами из теоремы 13.2.3. Следовательно, положение равновесия асимптотически устойчиво. △

Тема 14: Линейные уравнения второго порядка

Содержание

§14.1. Решение уравнений при помощи рядов

Определение. ***Уравнением Эйри*** называют уравнение

$$\ddot{y} - ty = 0. \tag{14.1}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде степенного ряда

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Предполагая, что t лежит внутри промежутка сходимости, имеем

$$\ddot{\varphi}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2}.$$

Подставляя ряды в уравнение и заменяя индексы суммирования, находим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}t^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}t^k = 0,$$

то есть

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}((k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1})t^k = 0.$$

Отсюда

$$c_2 = 0, \quad c_k = \frac{c_{k-3}}{k(k-1)}, \quad k \geqslant 3.$$

Тогда $c_k = 0$, если $k \equiv 2 \pmod 3$,

$$c_k = \frac{(k-2)!!!}{k!}c_0, \quad \text{если } k \equiv 0 \pmod 3,$$
$$c_k = \frac{(k-2)!!!}{k!}c_1, \quad \text{если } k \equiv 1 \pmod 3.$$

Тогда

$$\varphi(t) = c_0\left(1 + \sum_{k=3,k\equiv 0}^{\infty} \frac{(k-2)!!!}{k!}t^k\right) + c_1\left(t + \sum_{k=4,k\equiv 1}^{\infty} \frac{(k-2)!!!}{k!}t^k\right)$$
$$= c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t).$$

Таким образом, при любых c_0 и c_1 функция φ будет решением. По признаку Даламбера ряды φ_0 и φ_1 сходятся на $\mathbb{R}$. Вронскиан решений φ_0, φ_1

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

поэтому φ_0, φ_1 — фундаментальная система решений уравнения (14.1) на $\mathbb{R}$.

При $c_0 = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}$, $c_1 = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma(1/3)}$ будет $\varphi(t) = \mathrm{Ai}\,(t)$. При $c_0 = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma(2/3)}$, $c_1 = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(1/3)}$ будет $\varphi(t) = \mathrm{Bi}\,(t)$. Здесь Γ — гамма-функция Эйлера, Ai, Bi — функции Эйри. Их свойства хорошо известны[1].

Приведём частный случай теоремы Коши для уравнения 2-го порядка, которая указывает, когда можно искать решения в виде ряда.

Теорема 14.1.1 (Коши, аналитичность решения). *Если p_0, p_1, p_2 — аналитические функции в окрестности точки t_0 и $p_2(t_0) \neq 0$, то решения уравнения*

$$p_2(t)y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0 \tag{14.2}$$

являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки t_0.

14.1.1. Уравнение Бесселя

Определение. Уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{14.3}$$

называется ***уравнением Бесселя*** порядка ν.

Будем искать решение в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r}, \quad c_0 \neq 0,\ r \in \mathbb{R}.$$

Подставляя формально этот ряд в (14.3), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+r)x^{k+r} + (x^2-\nu^2)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} = 0.$$

[1] См., например, https://dlmf.nist.gov/9

После приведения подобных слагаемых приравняем к нулю коэффициенты при степенях x. Получаем

$$
\begin{aligned}
&(r^2-\nu^2)c_0 = 0,\\
&((r+1)^2-\nu^2)c_1 = 0,\\
&((r+2)^2-\nu^2)c_2 + c_0 = 0,\\
&\ldots\\
&((r+k)^2-\nu^2)c_k + c_{k-2} = 0,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Из первого уравнения находим $r=\pm\nu$, поскольку $c_0\neq 0$.

Рассмотрим случай $r=\nu\geqslant 0$. Из второго уравнения следует $c_1=0$, а значит и $c_{2m-1}=0$ при всех $m\in\mathbb{N}$, а

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m c_0}{2^{2m}(\nu+1)(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+m)m!}, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Коэффициент c_0 произвольный. Если положить $c_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, где Γ — гамма-функция Эйлера, то

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}.$$

При помощи признака Даламбера убеждаемся, что полученный ряд сходится на всей вещественной оси, а значит, даёт решение уравнения (14.3).

Это решение называется функцией Бесселя первого рода порядка ν и обозначается

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}, \quad \nu\geqslant 0.$$

Если $\nu=-\mu<0$ и не целое, то аналогично строится ещё одно решение

$$J_{-\mu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\mu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\mu}, \quad \mu>0.$$

Если $\nu>0$ и не целое, то решения J_ν и $J_{-\nu}$ линейно независимы, и потому образуют фундаментальную систему решений уравнения (14.3).

При целом значении ν второе линейно независимое с J_ν решение (14.3) называется функцией Бесселя второго рода. Её можно найти, например, с помощью формулы Остроградского–Лиувилля.

Теорема 14.1.2 (разложимость решения в обобщённый степенной ряд). *Пусть $s-2\in\mathbb{Z}_+$, p_0, p_1, p_2 — аналитические функции в окрестности точки x_0, являющейся нулём порядка s функции p_2, нулём порядка $s-1$ или выше* *функции p_1 и нулём порядка $s-2$ или выше функции p_0. Тогда существует по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения (14.2), представимое в виде*

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^{r+k},$$

где $r \in \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$.

§14.2. Корни решений

При исследовании расположения нулей решений уравнений второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

можно ограничиться изучением нулей решений уравнений вида

$$y'' + p(x)y = 0 \tag{14.4}$$

(см. упражнение 14.2.1).

Упражнение 14.2.1. Убедитесь, что подстановка

$$y = u \exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p_1(s)\,ds\Big)$$

приводит уравнение к виду $u'' + p(x)u = 0$.

Лемма 14.2.1. *Любое ненулевое решение уравнения (14.4), где $p \in C(a,b)$, может иметь лишь конечное число корней на любом конечном отрезке.*

Доказательство. Предположим, что на некотором отрезке $[a,b]$ существует бесконечное число корней ненулевого решения φ уравнения (14.4). По теореме Больцано–Вейерштрасса из этого множества можно выбрать последовательность $\{x_m\}$, сходящуюся к $x^* \in [a,b]$. В силу непрерывности φ будет $\varphi(x^*) = 0$.

По теореме Ролля в каждом интервале (x_m, x_{m+1}) найдётся точка θ_m, в которой $\varphi'(\theta_m) = 0$. Ясно, что $\theta_m \to x^*$ и, по непрерывности, $\varphi'(x^*) = 0$.

Таким образом, функция, тождественно равная нулю, и φ — два различных решения уравнения (14.4) с начальными условиями $y(x^*) = 0$, $y'(x^*) = 0$, что противоречит теореме единственности 8.2.1. $\square$

Другими словами, лемма 14.2.1 говорит о том, что корни любого решения уравнения (14.4) отделены друг от друга.

Теорема 14.2.1 (Штурм, о сравнении). *Пусть $p, P \in C(a,b)$, функции φ и ψ — нетривиальные решения, соответственно, уравнений*

$$y'' + p(x)y = 0, \tag{14.5}$$

$$y'' + P(x)y = 0. \tag{14.6}$$

Пусть, далее, x_1, x_2 *— соседние корни* φ*;* $p(x) \leqslant P(x)$ *при* $x \in [x_1, x_2]$*.*

Тогда функция ψ *имеет хотя бы один корень* $x^* \in [x_1, x_2]$*. При этом либо* $x^* \in (x_1, x_2)$*, либо*

$$\begin{cases} \psi(x) \neq 0 \text{ при } x \in (x_1, x_2), \\ \psi(x_1) = \psi(x_2) = 0, \\ p \equiv P \text{ на } [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $\varphi(x) > 0$ при $x \in (x_1, x_2)$. Тогда

$$\varphi'(x_1) = \lim_{x \to x_1 + 0} \frac{\varphi(x)}{x - x_1} > 0,$$

$$\varphi'(x_2) = \lim_{x \to x_2 - 0} \frac{\varphi(x)}{x - x_2} < 0.$$

Заметим, что неравенства строгие, поскольку равенства исключаются теоремой единственности.

Умножая (14.5) при $y = \varphi$ на ψ, (14.6) при $y = \psi$ на $-\varphi$ и складывая получившиеся равенства, находим

$$\varphi''\psi - \varphi\psi'' = (P - p)\varphi\psi.$$

Левая часть является производной от $\varphi'\psi - \varphi\psi'$. Поэтому, интегрируя по отрезку $[x_1, x_2]$, имеем

$$\varphi'(x_2)\psi(x_2) - \varphi'(x_1)\psi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (P(x) - p(x))\varphi(x)\psi(x)\, dx. \tag{14.7}$$

Если предположить, что $\psi(x) > 0$ на всём отрезке $[x_1, x_2]$, то получится противоречие: левая часть последнего равенства окажется строго меньшей нуля, а правая большей или равной нулю. Случай $\psi(x) < 0$ разбирается аналогично.

Поэтому на отрезке $[x_1, x_2]$ существует хотя бы один корень функции ψ.

Предположим, что $\psi(x) \neq 0$ (пусть $\psi(x) > 0$) на интервале (x_1, x_2). Тогда $\psi(x_1) = 0$, либо $\psi(x_2) = 0$. Допустим, верно первое равенство. Левая часть (14.7)

$$\varphi'(x_2)\psi(x_2) - \varphi'(x_1)\psi(x_1) = \varphi'(x_2)\psi(x_2) \leqslant 0,$$

а правая часть того же равенства

$$\int_{x_1}^{x_2} (P(x) - p(x))\varphi(x)\psi(x)\, dx \geqslant 0.$$

Это возможно лишь тогда, когда обе части равны нулю, а значит, $\psi(x_2) = 0$ и $P(x) \equiv p(x)$ на $[x_1, x_2]$. □

Список литературы

1. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : Учебное пособие. — 2-е изд. — СПб : Лань, 2011. — 304 с.
2. *Буфетов А. И.*, *Гончарук Н. Б.*, *Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения (электронная версия). — 2019.
3. *Демидович Б. П.* Математические основы квантовой механики. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2005.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 480 с.
5. *Краснов М. Л.*, *Киселёв А. И.*, *Макаренко Г. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. — 4-е изд. — М : Едиториал УРСС, 2002. — 256 с.
6. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — 5-е изд. — Минск, 1977.
7. *Матвеев Н. М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. — СПб : Специальная Литература, 1996.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — 7-е изд. — М : Изд-во МГУ, 1984.
9. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — 4-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 347 с.
10. *Романко В. К.*, *Агаханов Н. Х.*, *Власов В. В.*, *Коваленко Л. И.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / под ред. В. К. Романко. — 5-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 222 с.
11. *Сидоров Ю. В.*, *Федорюк М. В.*, *Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — 3-е изд. — Москва : Наука, 1989. — 480 с.
12. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
13. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — 2-е изд. — Москва : КомКнига, 2007.
14. *Халил Х. К.* Нелинейные системы. — 3-е изд. — М.-Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. — 832 с.
15. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1969.