2 Понятие интеграла Римана

2.1 Интегральные суммы и интеграл

Определение 2.1.1 *Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение τ, если введена система точек x_i, $i \in \{0, 1, ..., n\}$, удовлетворяющая условию*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Замечание 2.1.1 *Обычно вводят следующие обозначения:*

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Определение 2.1.2 *Величина $\lambda(\tau) = \max\limits_{i \in \{1,2,...,n\}} \Delta x_i$ называется мелкостью (рангом) разбиения (дробления).*

Определение 2.1.3 *Говорят, что на отрезке $[a, b]$ введено разбиение (или оснащенное разбиение) (τ, ξ), если на нем введено разбиение τ и выбрана система точек ξ_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ таким образом, что $\xi_i \in \Delta_i$.*

Определение 2.1.4 *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и введено разбиение (τ, ξ). Величина*

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению (τ, ξ).

Определение 2.1.5 *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta, \ \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$I = \int\limits_a^b f(x) dx.$$

Замечание 2.1.2 *Проще, но с некоторыми оговорками, последнее определение можно переписать в виде*

$$I = \lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma_\tau(f, \xi).$$

Замечание 2.1.3 *Понятие предела интегральных сумм, вообще говоря, не является частным случаем понятия предела функции, так как интегральная сумма является функцией разбиения, а не его мелкости. В дальнейшем мы часто будем писать $\lambda(\tau) \to 0$, оставляя детальную расшифровку читателю. Кроме того, предел такого типа можно свести к рассмотрению предела последовательности.*

Определение 2.1.6 *Функция $f(x)$, для которой существует интеграл Римана по отрезку $[a, b]$ называется интегрируемой по Риману на этом отрезке (или просто интегрируемой) и обозначается $f \in R[a, b]$.*

Пример 2.1.1 *Легко показать, что постоянная функция $y = C$ интегрируема по любому отрезку $[a, b]$, причем*

$$\int\limits_a^b dx = C(b - a).$$

Действительно, вводя произвольное разбиение (τ, ξ) отрезка $[a, b]$,

$$\sigma_\tau(y, \xi) = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b - a),$$

откуда и следует требуемое.

Пример 2.1.2 *Не всякая функция интегрируема. Оказывается, что функция Дирихле*

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не интегрируема ни на каком отрезке. Для примера будем рассматривать отрезок $[0, 1]$ и пусть τ – разбиение этого отрезка.
Выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

Теперь выберем в каждом отрезке Δ_i точку $\xi_i \in \mathbb{I}$. Тогда

$$\sigma_\tau(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} d(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i = 0.$$

Тем самым, при стремлении $\lambda(\tau) \to 0$, предел зависит от выбора средних точек ξ, что противоречит определению интеграла.

Для дальнейшего изложения удобно немного расширить определение интеграла Римана.

Определение 2.1.7 *По определению полагают*

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx,\ a < b.$$

2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Необходимое условие интегрируемости

Для изучения вопросов существования интеграла Римана, полезно рассмотреть две «крайние интегральные суммы», которые, на самом деле, интегральными являются не всегда.

Определение 2.2.1 *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и τ – некоторое разбиение этого отрезка. Величины*

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x),$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x)$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу для функции $f(x)$, отвечающими разбиению τ, соответственно.

Замечание 2.2.1 *Из определения верхней и нижней сумм Дарбу очевидно неравенство*

$$s_\tau(f) \le \sigma_\tau(f,\xi) \le S_\tau(f)$$

для любых оснащенных разбиений (τ,ξ) отрезка $[a,b]$.

Лемма 2.2.1 *Ограниченность f сверху (снизу) равносильна конечности верхней суммы $S_\tau(f)$ (нижней суммы $s_\tau(f)$).*

Доказательство. Очевидно. □

Замечание 2.2.2 *Если $f \in C[a,b]$, то, согласно теореме Вейерштрасса, $m_i = \min\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i = \max\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, а потому нижняя и верхняя суммы Дарбу для непрерывной функции являются ее наименьшей и наибольшими интегральными суммами, соответственно.*

В общем случае последне замечание, конечно, не выполняется, но справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2.2 *Справедливы равенства*

$$S_\tau(f) = \sup_\xi \sigma_\tau(f,\xi), \quad s_\tau(f) = \inf_\xi \sigma_\tau(f,\xi).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. То, что $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f,\xi)$ уже отмечено в замечании 2.2.1. Пусть f ограничена сверху на $[a,b]$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, по определению супремума,

$$\exists \xi_i \in \Delta_i : M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i), \quad i = 1...n.$$

Домножим каждое неравенство на Δx_i и сложим по i, получим

$$\sum_{i=1}^n \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i < \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

или

$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \varepsilon < \sigma_\tau(f,\xi),$$

что и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется набор точек ξ такой, что

$$S_\tau(f) - \varepsilon < \sigma_\tau(f,\xi),$$

и $S_\tau(f) \geq \sigma_\tau(f,\xi)$. Тем самым проверено, что

$$S_\tau(f) = \sup_\xi \sigma_\tau(f,\xi).$$

Если же f не ограничена сверху на $[a,b]$, то f не ограничена хотя бы на одном Δ_i. Пусть, для определенности, на Δ_1. Тогда существует последовательность ξ_1^n, что $f(\xi_1^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Пусть $\xi_i \in \Delta_i$, $i \geq 2$. Тогда

$$\sup_\xi \sigma_\tau(f,\xi) \geq \lim_{n\to+\infty}\left(f(\xi^n)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right) = +\infty = S_\tau(f)$$

$\square$

Определение 2.2.2 *Пусть на отрезке $[a, b]$ введены разбиения τ_1 и τ_2. Говорят, что разбиение τ_1 является измельчением разбиения τ_2, если $\tau_2 \subset \tau_1$.*

Лемма 2.2.3 *Пусть $\tau_2 \subset \tau_1$, тогда*

$$S_{\tau_2}(f) \geq S_{\tau_1}(f), \quad s_{\tau_1}(f) \geq s_{\tau_2}(f),$$

то есть при измельчении разбиения верхние суммы Дарбу не увеличиваются, а нижние – не уменьшаются.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая, когда измельчение τ_1 получается из τ_2 добавлением одной точки $\hat{x} \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда

$$S_{\tau_2}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1,\ i \neq k}^{n} M_i \Delta x_i + M_k \Delta x_k.$$

Пусть

$$M_k^{'} = \sup_{x \in [x_{k-1}, \hat{x}]} f(x), \quad M_k^{''} = \sup_{x \in [\hat{x}, x_k]} f(x),$$

тогда

$$M_k \geq M_k^{'}, \quad M_k \geq M_k^{''}$$

и

$$M_k \Delta x_k = M_k(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k(x_k - \hat{x}) \geq M_k^{'}(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k - \hat{x}),$$

откуда

$$S_{\tau_2}(f) \geq \sum_{i=1,\ i \neq k}^{n} M_i \Delta x_i + M_k^{'}(\hat{x} - x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k - \hat{x}) = S_{\tau_1}(f).$$

Второе неравенство доказывается аналогично. □

Лемма 2.2.4 *Пусть τ_1 и τ_2 – разбиения отрезка $[a, b]$, тогда*

$$s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f),$$

то есть любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу.

Доказательство. Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем $\tau_1 \subset \tau$, $\tau_2 \subset \tau$. По лемме 2.2.3 и замечанию 2.2.1,

$$s_{\tau_1}(f) \leq s_{\tau}(f) \leq S_{\tau}(f) \leq S_{\tau_2}(f),$$

что и доказывается утверждение. □

Определение 2.2.3 *Пусть функция задана и ограничена на $[a, b]$. Величины*

$$I^*(f) = \inf_\tau S_\tau(f), \quad I_*(f) = \sup_\tau s_\tau(f)$$

называются верхним и нижним интегралами Дарбу соответственно.

Замечание 2.2.3 *Для любых разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$ выполнено неравенство*

$$s_{\tau_1}(f) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S_{\tau_2}(f).$$

Замечание 2.2.4 *Как и для сумм Дарбу, выполнение соотношений $I^*(f) < +\infty$, $I_*(f) > -\infty$ равносильно ограниченности f на $[a, b]$ сверху (снизу).*

Теорема 2.2.1 (Необходимое условие интегрируемости) *Пусть $f \in R[a, b]$, тогда f ограничена на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f, например, не ограничена сверху. Тогда $S_\tau(f) = +\infty$ для любого разбиения τ. Поэтому для любого числа I и разбиения τ, найдется такое оснащенное разбиение (τ, ξ), что

$$\sigma_\tau(f, \xi) > I + 1.$$

Значит, никакое число I пределом интегральных сумм не является. □

2.3 Критерии Дарбу и Римана интегрируемости функции

Теорема 2.3.1 (Критерий Дарбу) *Пусть f задана на $[a, b]$. Тогда*

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow[\lambda(\tau)\to 0]{} 0$$

или

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\ \delta > 0 :\ \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя в правой части неравенства к супремуму по ξ, а в левой части к инфимуму, получается

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s_\tau(f), \quad S_\tau(f) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Складывая неравенства

$$-s_\tau(f) \leq \frac{\varepsilon}{3} - I, \quad S_\tau(f) \leq I + \frac{\varepsilon}{3},$$

выходит, что

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Достаточность. Заметим, что условие, что $S_\tau(f) - s_\tau(f) \xrightarrow[\lambda(\tau)\to 0]{} 0$ влечет ограниченность f. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \ \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Так как, согласно 2.2.3

$$I^*(f) \leq S_\tau(f), \quad I_*(f) \geq s_\tau(f),$$

то, складывая неравенства

$$I^*(f) \leq S_\tau(f), -I_*(f) \leq -s_\tau(f)$$

выходит, что

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Так как $I^*(f) - I_*(f)$ – число, то из неравенства выше следует, что $I^*(f) - I_*(f) = 0$. Пусть $I^*(f) = I_*(f) = I$. Покажем, что число I является интегралом от функции $f(x)$. Действительно, так как

$$s_\tau(f) \leq I \leq S_\tau(f),$$

то, складывая неравенства

$$s_\tau(f) \leq \sigma_\tau(f, \xi) \leq S_\tau(f)$$

и

$$-S_\tau(f) \leq -I \leq -s_\tau(f),$$

выходит, что

$$s_\tau(f) - S_\tau(f) \leq \sigma_\tau(f, \xi) - I \leq S_\tau(f) - s_\tau(f),$$

то есть

$$|\sigma_\tau(f, \xi) - I| \leq S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

□

Теорема 2.3.2 (Критерий Римана) *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Для ее интегрируемости на этом отрезке необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau : \ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость следует из теоремы Дарбу.
Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ и разбиение τ такое, что $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Как показано в теореме Дарбу,

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon,$$

а значит, так как $I^*(f) - I_*(f)$ – число, то $I^*(f) - I_*(f) = 0$. Далее аналогичным образом доказывается, что $I = I^*(f) = I_*(f)$ – это интеграл Римана от f по $[a, b]$ □

Следствие 2.3.3 *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Для ее интегрируемости на этом отрезке необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и $I_*(f) = I^*(f)$, причем*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I_*(f) = I^*(f).$$

Доказательство. Необходимость следует из теоремы Дарбу (и ее доказательства), применением сначала ее необходимого условия, а затем достаточного.

Докажем достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists \tau_1 :$

$$s_{\tau_1}(f) > I_*(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично, $\exists \tau_2 :$

$$S_{\tau_2}(f) < I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, тогда выполнены оба неравенства и, вычитая их, получим

$$0 \leq S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Значит, по теореме Римана, функция интегрируема, и $I = I_*(f) = I^*(f)$. □

Определение 2.3.1 *Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E. Колебанием функции на этом множестве называется величина*

$$\omega(f, E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

Из определений верхней и нижней граней легко получить, что

$$\omega(f,E)=\sup_{x\in E}f(x)-\inf_{x\in E}f(x).$$

Следствие 2.3.4 *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$. Для ее интегрируемости на этом отрезке необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall\tau:\ \lambda(\tau)<\delta\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i<\varepsilon$$

или чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\tau:\sum_{i=1}^{n}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i<\varepsilon$$

Доказательство. Достаточно сослаться на теорему Дарбу (или Римана) и заметить, что

$$S_\tau(f)-s_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i.$$

□

2.4 Свойства интегрируемых функций

Ниже приведены основные свойства интегрируемых функций, используемые в дальнейшем.

Теорема 2.4.1 (Свойства интегрируемых функций) *Пусть $f(x),g(x)\in R[a,b]$, тогда*

1. $\alpha f(x)+\beta g(x)\in R[a,b]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
2. $f(x)g(x)\in R[a,b]$.
3. $|f(x)|\in R[a,b]$.
4. *Если* $|f(x)|\geq C>0$ *на* $[a,b]$, *то* $\frac{1}{f(x)}\in R[a,b]$.
5. *Пусть* $[c,d]\subset[a,b]$, *тогда* $f(x)\in R[c,d]$.

Доказательство. 1. Так как

$$|\alpha f(x)+\beta g(x)-\alpha f(y)-\beta g(y)|\leq|\alpha||f(x)-f(y)|+|\beta||g(x)-g(y)|\leq$$

$$\leq|\alpha|\omega(f,E)+|\beta|\omega(g,E),$$

то, переходя к супремуму в левой части получается, что

$$\omega(\alpha f+\beta g, E)\le |\alpha|\omega(f,E)+|\beta|\omega(g,E).$$

Пусть $\varepsilon>0$. Так как $f\in R[a,b]$, то по следствию 2.3.4

$$\exists\delta_1:\ \forall\tau:\ \lambda(\tau)<\delta_1\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}.$$

Аналогично, так как $g\in R[a,b]$, то по следствию 2.3.4

$$\exists\delta_2:\ \forall\tau:\ \lambda(\tau)<\delta_2\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\omega(g,\Delta_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$$

Пусть $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, тогда для любого τ такого, что $\lambda(\tau)<\delta$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(\alpha f+\beta g,\Delta_i)\Delta x_i\le|\alpha|\sum_{i=1}^{n}\omega(f,\Delta_i)\Delta x_i+|\beta|\sum_{i=1}^{n}\omega(g,\Delta_i)\Delta x_i\le$$

$$\le\frac{|\alpha|\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}+\frac{|\beta|\varepsilon}{2(|\beta|+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Значит, по следствию 2.3.4, $\alpha f+\beta g\in R[a,b]$.
2. Так как $f,g\in R[a,b]$, то по необходимому условию они ограничены на $[a,b]$, то есть

$$\exists C:\ |f(x)|<C,\ |g(x)|<C,\ \forall x\in[a,b].$$

Кроме того, так как

$$|f(x)g(x)-f(y)g(y)|=|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|\le$$

$$\le|f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)|\le C(\omega(f,E)+\omega(g,E)),$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получим, что

$$\omega(fg,E)\le C(\omega(f,E)+\omega(g,E)).$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.
3. Так как

$$||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|\le\omega(f,E),$$

то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что

$$\omega(|f|,E)\le\omega(f,E).$$

Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.
4. Так как
$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \left|\frac{f(x)-f(y)}{f(x)f(y)}\right| \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{C^2} \leq \frac{\omega(f,E)}{C^2},$$
то, переходя к супремуму в левой части неравенства, получается, что
$$\omega\left(\frac{1}{f}, E\right) \leq \frac{\omega(f,E)}{C^2}.$$
Дальнейшие обоснования проводятся так же, как в пункте 1, и остаются в качестве упражнения.
5. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R[a,b]$, то, согласно теореме Дарбу,
$$\exists \delta: \ \forall \tau: \ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon.$$
Пусть τ' – произвольное разбиение отрезка $[c,d]$ такое, что $\lambda(\tau') < \delta$. Дополним его до разбиения τ отрезка $[a,b]$ так, чтобы $\lambda(\tau) < \delta$, введя разбиения отрезков $[a,c]$ и $[d,b]$, но не добавляя новых точек в отрезок $[c,d]$. Тогда
$$\sum_{[c,d]} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i \leq \sum_{[a,b]} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon,$$
так как все слагаемые, входящие в левую сумму, входят и в правую, и $\omega(f,E) \geq 0$. Тем самым показано, что $f \in R[c,d]$. □

Для дальнейшего изложения потребуется еще одно важное свойство интегрируемых функций, которое сформулировано ниже.

Теорема 2.4.2 *Пусть* $f(x) \in R[a,c]$, $f(x) \in R[c,b]$, *тогда* $f(x) \in R[a,b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как функция $f \in R[a,c]$, то по теореме 2.3.2
$$\exists \tau_1: \ \sum_{[a,c]} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Так как $f \in R[c,b]$, то по теореме 2.3.2
$$\exists \tau_2: \ \sum_{[c,b]} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением отрезка $[a,b]$, причем
$$\sum_{[a,b]} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i = \sum_{[c,b]} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Значит, по теореме 2.3.2, $f \in R[a,b]$. □

2.5 Классы интегрируемых функций

Теорема 2.5.1 (Интегрируемость непрерывной функции) *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем, т.е.*

$$(f \in C[a, b]) \Rightarrow (f \in R[a, b]).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем по теореме **??**, а значит

$$\exists\, \delta > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in [a, b] :\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$, причем $\lambda(\tau) < \delta$, тогда

$$\omega(f, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Значит, по теореме 2.3.2, $f \in R[a, b]$. □

Теорема 2.5.2 (Конечное число точек разрыва) *Пусть f задана и ограничена на $[a, b]$. Пусть, кроме того, множество точек разрыва функции f конечно. Тогда $f \in R[a, b]$.*

Доказательство. Так как функция ограничена, то $|f| \leq C$. Тогда $\omega(f, [a, b]) \leq 2C$. Пусть $\varepsilon > 0$. Построим вокруг каждой точки разрыва интервал радиуса $\delta_1 = \varepsilon/(16Ck)$, где k – количество точек разрыва.

Дополнение к этому набору интервалов – это набор отрезков, на каждом из которых функция f непрерывна, а значит и равномерно непрерывна. Значит, так как число отрезков конечно, то существует δ_2, что если x', x'' из какого-то отрезка, причем $|x' - x''| < \delta_2$, то

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и τ – разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что $\lambda(\tau) < \delta$.

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i = \sum{}' \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i + \sum{}'' \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i,$$

где первая сумма идет по отрезкам, не имеющим общих точек с построенными интервалами, а вторая – по всем остальным. Поэтому

$$\sum{}' \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сумма длин оставшихся частей меньше, чем

$$(\delta + 2\delta_1 + \delta)k \le \frac{\varepsilon}{4C},$$

а значит

$$\sum{}'' \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{4C} 2C = \frac{\varepsilon}{2}.$$

В итоге получаем требуемое. □

Теорема 2.5.3 *Заданная и монотонная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Интегрируемость постоянной функции уже известна. Пусть функция $f(x)$ не постоянна, не убывает и $\varepsilon > 0$. Тогда положив $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ и взяв разбиение τ отрезка $[a, b]$ такое, что $\lambda(\tau) < \delta$, выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \varepsilon.$$

Значит, согласно теореме 2.3.2, $f \in R[a, b]$. □

Замечание 2.5.1 *Монотонная функция может иметь счетное число точек разрыва. Например,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n}, & \frac{1}{2^n} \le x < \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}.$$

2.6 Свойства интеграла от интегрируемых функций. Первая теорема о среднем.

Справедливо свойство линейности интеграла.

Теорема 2.6.1 (Линейность определенного интеграла) *Пусть* $f, g \in R[a, b]$*, тогда*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. То, что $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ известно из теоремы 2.4.1. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)\right) \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Пусть $\lambda(\tau) \to 0$, тогда

$$\int\limits_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

$\square$

Теорема 2.6.2 (Аддитивность по промежутку интегрирования) *Пусть $f \in R[a,b]$, $c \in [a,b]$, тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Интегрируемость функции f на промежутках $[a,c]$ и $[c,b]$ известна из теоремы 2.4.1. Пусть τ – разбиение отрезка $[a,b]$, содержащее точку c. Тогда оно порождает разбиения τ_1 отрезка $[a,c]$ и τ_2 отрезка $[c,b]$, причем $\lambda(\tau_1) \le \lambda(\tau)$ и $\lambda(\tau_2) \le \lambda(\tau)$. Так как

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

и при $\lambda(\tau) \to 0$ одновременно $\lambda(\tau_1) \to 0$ и $\lambda(\tau_2) \to 0$, то получаем требуемое. $\square$

Следствие 2.6.3 *Пусть $f \in R(\min(a,b,c), \max(a,b,c))$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Доказательство моментально следует из предыдущей теоремы и соглашений о том, что

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \quad \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

$\square$

Следующее свойство интеграла часто называют его монотонностью.

Теорема 2.6.4 (Монотонность интеграла) *Пусть $a \le b$, $f, g \in R[a,b]$, причем $f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b]$, тогда*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для интегральных сумм справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda(\tau) \to 0$, получается требуемое. $\square$

Следствие 2.6.5 *Пусть $a \le b$, $f \in R[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, тогда*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Теорема 2.6.6 (Об отделимости от нуля) *Пусть $a < b$, $f \in R[a,b]$, $f \ge 0$ и существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) > 0$, причем f непрерывна в x_0. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Доказательство. Так как $f(x_0) > 0$ и f непрерывна в точке x_0, то существует окрестность $U(x_0)$, что при $x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) > f(x_0)/2$. Тогда, в силу монотонности интеграла,

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int\limits_{[a,b]\cap U(x_0)} f(x)dx > \frac{f(x_0)}{2} \int\limits_{[a,b]\cap U(x_0)} dx > 0.$$

$\square$

Теорема 2.6.7 *Пусть $f \in R[a,b]$, тогда*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $|f|$ известна из теоремы 2.4.1. Так как

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i\right|,$$

то при $\lambda(\tau) \to 0$ получается требуемое. □

Теорема 2.6.8 (Первая теорема о среднем) *Пусть $f, g \in R[a,b]$, $g(x)$ не меняет знак на $[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, тогда*

$$\exists \mu \in [m, M] : \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Кроме того, если $f(x) \in C[a,b]$, то

$$\exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $g(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, тогда

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),\ x \in [a,b]$$

и по теореме 2.6.4

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то в качестве μ можно взять любое число из отрезка $[m, M]$, так как из неравенства выше следует, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Если же $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$, то $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$ и, поделив на этот интеграл, получается неравенство

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Положив

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx},$$

получается требуемое.
Если предположить, что $f(x) \in C[a,b]$, то по теореме Больцано-Коши для каждого $\mu \in [m, M]$ существует $\xi \in [a,b]$, что $f(\xi) = \mu$, что доказывает вторую часть утверждения. □

Замечание 2.6.1 *Можно доказать, что в в условиях теоремы в предположении, что $f \in C[a,b]$, $\exists\ \xi \in (a,b)$:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Обязательно проделайте это!

2.7 Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства

Определение 2.7.1 *Пусть $f \in R[a,b]$ и $x \in [a,b]$. Функция*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

Ниже будут рассмотрены стандартные свойства функции $\Phi(x)$: ее непрерывность и дифференцируемость.

Теорема 2.7.1 (О непрерывности $\Phi(x)$)

$$\Phi(x) \in C[a,b].$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + \Delta x \in [a,b]$. Так как функция $f \in R[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть

$$|f(x)| \le C,\ x \in [a,b].$$

Тогда

$$|\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(x)|dx\right| \le$$

$$\le C\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx\right| = C|\Delta x|.$$

Значит, при $\Delta x \to 0$ выполняется $\Phi(x_0+\Delta x) \to \Phi(x_0)$, что и означает непрерывность функции $\Phi(x)$ в точке x_0. Так как x_0 – произвольная точка отрезка $[a,b]$, то утверждение доказано. □

Теорема 2.7.2 (О производной $\Phi(x)$) $\Phi(x)$ *дифференцируема в точках непрерывности функции* $f(x)$, *причем*

$$(\Phi(x))'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $x_0+\Delta x \in [a,b]$.

$$\left|\frac{\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx - f(x_0)\Delta x}{\Delta x}\right| =$$

$$= \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x)-f(x_0))dx}{\Delta x}\right|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда (в силу непрерывности функции $f(x)$)

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in [a,b] : \ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $\Delta x < \delta$, тогда

$$\left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x)-f(x_0))dx}{\Delta x}\right| \le \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(x)-f(x_0)|dx}{\Delta x}\right| < \varepsilon \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dx}{\Delta x}\right| = \varepsilon,$$

что и означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

$\square$

Следствие 2.7.3 *Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, причем любая ее первообразная имеет вид*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + C = \Phi(x) + C.$$

2.8 Формула Ньютона-Лейбница

Ниже приведена основная формула интегрального исчисления.

Теорема 2.8.1 (Формула Ньютона-Лейбница) *Пусть $f \in C[a, b]$ и $F(x)$ – ее первообразная. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Согласно следствию 2.7.3, любая первообразная непрерывной функции имеет вид

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + C.$$

Так как

$$F(a) = \int\limits_a^a f(x)dx + C = C,$$

то $C = F(a)$. Положив в равенстве

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx + F(a)$$

$x = b$, получается

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx + F(a) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$\square$

Формула Ньютона-Лейбница справедлива и при предположении наличия первообразной у интегрируемой функции, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8.2 (Усиленная формула Ньютона-Лейбница) *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $F(x)$ *– некоторая первообразная данной функции на* $[a,b]$*, тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Положим $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right).$$

Согласно теореме Лагранжа, существует $\xi_k^n \in (x_{k-1}, x_k)$, что

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k^n)(x_k - x_{k-1}),$$

а тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k$$

и мы получаем интегральную сумму для функции f по отрезку $[a,b]$ с оснащенным разбиением (τ, ξ). Так как $f \in R[a,b]$ и так как при $n \to +\infty$ выполняется $\lambda(\tau) \to 0$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

С другой стороны,

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\Delta x_k,$$

а значит

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

$\square$

Замечание 2.8.1 *Доказанная формула Ньютона-Лейбница справедлива для любой первообразной интегрируемой функции. Ясно, что значение интеграла не зависит от выбора этой первообразной, ведь если выбрана первообразная $F(x) + C$, то*

$$F(b) - F(a) = F(b) + C - F(a) - C.$$

Оказывается, формула Ньютона-Лейбница справедлива и для обобщенных первообразных.

Теорема 2.8.3 (Обобщение формулы Ньютона-Лейбница) *Пусть $f(x) \in R[a, b]$ и $F(x)$ – обобщенная первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ – точки внутри (a, b), в которых нарушено условие $F'(x) = f(x)$. Добавим к ним $\alpha_0 = a$, $\alpha_k = b$. Так как интеграл – непрерывная функция по обоим пределам, то

$$\int\limits_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\alpha_{p-1}+\varepsilon}^{\alpha_p-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(F(\alpha_p - \varepsilon) - F(\alpha_{p-1} + \varepsilon)\right) =$$

$$= F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1}),$$

где последнее равенство справедливо ввиду того, что F – непрерывная функция. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{p=1}^{k} \int\limits_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)dx = \sum_{p=1}^{k} \left(F(\alpha_p) - F(\alpha_{p-1})\right) =$$

$$= F(\alpha_k) - F(\alpha_0) = F(b) - F(a)$$

$\square$

Замечание 2.8.2 *Не каждая интегрируемая функция имеет первообразную, и не каждая функция, имеющая первообразную, интегрируема.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема, а значит имеет первообразную, но $f' \notin R[-1,1]$ (в силу неограниченности).

С другой стороны, функция $f(x) = \operatorname{sign} x \in R[-1,1]$, но не имеет первообразной на этом промежутке. Она имеет обобщенную первообразную.

Обязательно придумайте пример интегрируемой функции, не имеющей даже обобщенной первообразной.

Вывод: интегрируемость и наличие первообразной - вещи разные.

2.9 Формулы замены переменной и интегрирования по частям

Теорема 2.9.1 (Формула интегрирования по частям) *Пусть u, v дифференцируемы на $[a,b]$, причем $u', v' \in R[a,b]$, тогда*

$$\int\limits_a^b u dv = uv|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Доказательство. Согласно теоремам о действиях с интегрируемыми функциями, $uv' \in R[a,b]$ и $u'v \in R[a,b]$. Кроме того, $(uv)' = u'v + uv' \in R[a,b]$, а значит, по усиленной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int\limits_a^b u'v dx + \int\limits_a^b uv' dx = \int\limits_a^b (u'v + uv')\, dx = \int\limits_a^b (uv)' dx = uv|_a^b.$$

□

Пример 2.9.1 *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

Пусть

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

Ясно, что $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Пусть $n > 1$, тогда

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x) d(-\cos(x)) = (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Ясно, что тогда

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n = 2k \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

Теорема 2.9.2 (Простейшая формула замены переменной) *Пусть $f(x) \in C[a,b]$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta] \to [a,b]$, $\varphi(t)$ дифференцируема и $\varphi'(t) \in R[\alpha, \beta]$, тогда*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Ясно, что интеграл от правой функции определен, так как $f(\varphi(t)) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow f(\varphi(t)) \in R[\alpha, \beta]$. По свойствам интегрируемых функций, $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[\alpha, \beta]$, причем $F(\varphi(t))$ – первообразная этой функции, если $F(x)$ – первообразная $f(x)$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

$\square$

Пример 2.9.2 *Вычислить интеграл ($a > 0$)*

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Ясно (из геометрических соображений), что ответ таков: $\frac{\pi}{4}a^2$. Проверим это. Сделаем замену $x = a\sin t$. Тогда

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int\limits_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{\pi}{4} a^2.$$

Часто теорему о замене переменной дают и в более общей форме.

Теорема 2.9.3 (Общая формула замены переменной) *Пусть* $\varphi(t)$ *дифференцируема и строго монотонна на* $[\alpha, \beta]$, *а* $f \in R[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$. *Тогда*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Ясно, что здесь от функции φ больше требований, а от f – меньше. Мы не будем сейчас доказывать эту теорему.

2.10 Интегралы от четной, нечетной и периодической функций

Теорема 2.10.1 *Пусть* $f \in R[0, a]$ *и является четной. Тогда*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Доказательство. Ясно, что $f \in R[-a, a]$, так как $f(-x) = f(x)$.

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

В первом интеграле можно сделать замену $t = -x$, $dt = -dx$, откуда

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt,$$

значит

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

□

Теорема 2.10.2 *Пусть* $f \in R[0, a]$ *и является нечетной. Тогда*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.10.1 и предлагается в качестве упражнения. □

Теорема 2.10.3 *Пусть $f \in R[0,T]$ и является периодической с периодом T, тогда*

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx, \ a \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.10.1 и предлагается в качестве упражнения. □

2.11 Формулы Валлиса и Стирлинга

Теорема 2.11.1 (Формула Валлиса)

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Доказательство. Ясно, что при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется цепочка неравенств

$$\sin^{2n+1}(x) < \sin^{2n}(x) < \sin^{2n-1}(x).$$

Обозначив

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx,$$

получим

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1} \Leftrightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

или

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Пусть

$$x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2,$$

тогда

$$\pi < x_n < \frac{2n+1}{2n}\pi,$$

откуда и получается требуемое. □

Докажем формулу Стирлинга в простейшем варианте. В дальнейшем она будет получена куда быстрее, проще, и точнее.

Теорема 2.11.2 (Простейшая формула Стирлинга)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}.$$

Покажем, что она убывает и ограничена снизу. Так как

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2},$$

то

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Из геометрических соображений легко получить неравенство, что

$$\frac{1}{n+1/2} < \int\limits_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Умножив все неравенство на $(n + 1/2)$, получим

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{(n+1/2)^2}{n(n+1)}.$$

Вычтем единицу, тогда получим

$$0 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{(n+1/2)^2}{n(n+1)} - 1 = \frac{1}{4n(n+1)},$$

Откуда

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1,$$

а значит последовательность x_n убывает. Так как она ограничена снизу (например, нулем), то она, согласно теореме Вейерштрасса, имеет предел. Обозначим его A.

Подставим в неравенства $(n+1)$, $(n+2)$, ..., $(n+k)$ и сложим, тогда получим

$$0 < \ln \frac{x_n}{x_{n+k}} < \frac{1}{4n(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{4(n+k-1)(n+k)} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right),$$

откуда

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)}.$$

Пусть $k \to +\infty$, тогда

$$1 < \frac{x_n}{A} < e^{1/(4n)}$$

и значит $A \neq 0$. В итоге,

$$A < x_n < Ae^{1/(4n)},$$

а значит $x_n = A(1 + o(1))$. Осталось найти A. Согласно формуле Валлиса,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}.$$

С другой стороны,

$$\frac{x_n^2}{x_{2n}} = \sqrt{2}\frac{(n!!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2\pi}.$$

Левая же часть стремится к A. Тем самым,

$$x_n = \sqrt{2\pi}(1 + o(1)),$$

что и доказывает формулу. $\square$

Замечание 2.11.1 *Можно доказать, что*

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\theta/12n},\ 0 < \theta < 1.$$

3 Приложения определенного интеграла

В этом разделе мы обсудим некоторые приложения теории определенного интеграла Римана к различным геометрическим и физическим задачам.

3.1 Понятие площади и ее вычисление

Понятие площади некоторых геометрических фигур известно из школьного курса геометрии. Определение площади для более широкого класса множеств «совсем строго» даваться не будет.

Замечание 3.1.1 *Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Как обычно,*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Определение 3.1.1 *Отображение $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется движением, если*

$$|x - y| = |U(x) - U(y)|,$$

иными словами движение сохраняет расстояния.

Определение 3.1.2 *Функция множеств (функционал) $S : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве «квадрируемых фигур» подмножеств плоскости, называется площадью, если*

1. $S(A) \geq 0$, $A \in \mathfrak{U}$.

2. *Если* $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \cap B = \varnothing$, *то* $A \cup B \in \mathfrak{U}$ *и*
$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$

3. *Площадь прямоугольника со сторонами* a, b *равна* ab.

4. *Если* $A \in \mathfrak{U}$, U *– движение, то* $U(A) \in \mathfrak{U}$ *и*
$$S(U(A)) = S(A).$$

Замечание 3.1.2 *Множество квадрируемых фигур мы не определяем. То, что некоторая фигура имеет площадь здесь и далее принимается на веру до обсуждений теории меры.*

Лемма 3.1.1 (Свойства площади) *Пусть* $S : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ *– площадь. Тогда:*

1. *Площадь монотонна, то есть если* $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \subset B$, *то*
$$S(A) \leq S(B).$$

2. *Пусть* $A \in \mathfrak{U}$ *содержится в некотором отрезке. Тогда* $S(A) = 0$.

3. *Если множества* $A, B \in \mathfrak{U}$ *пересекаются по множеству нулевой площади, то*
$$S(A \cup B) = S(A) + S(B).$$

Доказательство. 1. $B = A \cup (B \setminus A)$, причем $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Тогда, предполагая квадрируемость $(B \setminus A)$,

$$S(A \cup (B \setminus A)) = S(A) + S(B \setminus A) \geq S(A).$$

2. A можно поместить в прямоугольник площади меньше, чем любое наперед заданное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq S(A) < \varepsilon \Rightarrow S(A) = 0.$$

3. Пусть $C = A \cap B$.

$$S(A) = S(A \setminus C) + S(C) = S(A \setminus B)$$

$$S(A \cup B) = S(A \setminus C) + S(B) = S(A) + S(B).$$

□

3.1.1 Площадь в декартовых координатах

Определение 3.1.3 *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Множество*

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

называется подграфиком функции f. Если функция f непрерывна, то подграфик еще называют криволинейной трапецией.

Предположим, что $f \in R[a,b]$ и подграфик данной функции имеет площадь. Пусть τ – разбиение отрезка $[a,b]$. Геометрически очевидно, что

$$s_\tau \leq S(G_f) \leq S_\tau.$$

Поскольку $S(G_f)$ – число, не зависящее от τ, а $f \in R[a,b]$, то при $\lambda(\tau) \to 0$ выполняется $S_\tau - s_\tau \to 0$, значит при всех τ неравенству

$$s_\tau \leq S(G_f) \leq S_\tau$$

удовлетворяет только одно число

$$S(G_f) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Данная формула допускает некоторое обобщение.

Теорема 3.1.1 *Пусть $f, g \in R[a,b]$, $f \leq g$, тогда площадь фигуры $S(G_{f,g})$*

$$G_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

вычисляется по формуле

$$S(G_{f,g}) = \int\limits_a^b (g-f)dx.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно перенести фигуру выше оси абсцисс, добавив к f и g такую постоянную c, чтобы $f + c \geq 0$. Тогда

$$S(G_{f,g}) = S(G_{f+c,g+c}) = S(G_{g+c}) - S(G_{f+c}) =$$

$$= \int\limits_a^b (g+c)dx - \int\limits_a^b (f+c)dx = \int\limits_a^b (g-f)dx.$$

$\square$

Пусть теперь функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Тогда площадь подграфика находится как

$$S(G_f) = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

В случае замкнутой кривой верна

Теорема 3.1.2 *Пусть фигура G ограничена замкнутой кривой, заданной параметрически $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Функции $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемы. Тогда*

$$S(G) = \pm \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt = \mp \int\limits_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt,$$

где знак перед интегралом определяется в зависимости от направления обхода кривой. Точнее, верхний знак соответствует обходу кривой по часовой стрелке.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим случай, когда G выпукла и граница обходится по часовой стрелке. Пусть $x \in [a, b]$ и $x(\alpha) = x(\beta) = a$, $x(\gamma) = b$. Тогда, пользуясь аддитивностью площади и предыдущей теоремой, получим

$$S(G) = \int\limits_\alpha^\gamma y(t)x'(t)dt - \int\limits_\beta^\gamma y(t)x'(t)dt = \int\limits_\alpha^\gamma y(t)x'(t)dt + \int\limits_\gamma^\beta y(t)x'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

Второй интеграл получим, меняя x и y ролями.

Если кривая имеет противоположную ориентацию, то изменятся знаки перед интегралами.

Если фигура G не выпуклая, то представим её как объединение выпуклых фигур и воспользуемся аддитивностью площади.

$\square$

3.1.2 Площадь в полярных координатах

Выведем формулу для вычисления площади фигуры в полярных координатах.

Определение 3.1.4 *Пусть* $0 < \beta - \alpha \le 2\pi,\ f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R},\ f \ge 0$*. Множество*

$$\widetilde{G_f} = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 :\ \varphi \in [\alpha, \beta],\ 0 \le r \le f(\varphi)\}$$

называется подграфиком функции f *в полярных координатах. Если функция* f *непрерывна, то подграфик еще называется криволинейным сектором.*

Предположим, что $f \in R[\alpha, \beta]$ и подграфик данной функции в полярных координатах имеет площадь. Пусть $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$ – разбиение $[\alpha, \beta]$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$,

$$m_i = \inf_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi),\ M_i = \sup_{\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]} f(\varphi).$$

Воспользовавшись тем, что площадь сектора радиусом r и углом φ равна $\frac{1}{2}r^2\varphi$, составим суммы

$$s_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta\varphi_i,\ S_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Геометрически очевидно, что

$$s_\tau \le S(\widetilde{G_f}) \le S_\tau.$$

Кроме того, s_τ и S_τ – суммы Дарбу функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$. Так как эта функция интегрируема, то при $\lambda(\tau) \to 0$ выполняется $S_\tau - s_\tau \to 0$, а значит

$$S(\widetilde{G_f}) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2 d\varphi.$$

3.2 Понятие объема и его вычисление

Под словом тело всюду понимается подмножество пространства $\mathbb{R}^3$.

Определение 3.2.1 *Функция множеств (функционал)* $V : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$*, заданная на некотором множестве «кубируемых фигур» подмножеств пространства* $\mathbb{R}^3$*, называется объемом, если*

1. $V(A) \ge 0,\ A \in \mathfrak{U}$.

2. *Если* $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \cap B = \varnothing$, *то* $A \cup B \in \mathfrak{U}$ *и*

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

3. *Объем параллелепипеда со сторонами* a, b, c *равна* abc.

4. *Если* $A \in \mathfrak{U}$, U *– движение, то* $U(A) \in \mathfrak{U}$ *и*

$$V(U(A)) = V(A).$$

Замечание 3.2.1 *Множество кубируемых фигур мы не определяем. То, что некоторое тело имеет объем здесь и далее принимается на веру до обсуждений теории меры.*

Лемма 3.2.1 (Свойства объема) *Пусть* $V : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ *– объем. Тогда:*

1. *Объем монотонен, то есть если* $A, B \in \mathfrak{U}$, $A \subset B$, *то*

$$V(A) \leq V(B).$$

2. *Пусть* $A \in \mathfrak{U}$ *содержится в некотором прямоугольнике. Тогда* $V(A) = 0$.

3. *Если множества* $A, B \in \mathfrak{U}$ *пересекаются по множеству нулевого объема, то*

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

Определение 3.2.2 (Сечение) *Пусть* T *– тело,* $x \in \mathbb{R}$. *Множество*

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in T\}$$

называется сечением тела T *первой координатой* x.

3.2.1 Вычисление объемов

Далее будем полагать, что тело T удовлетворяет следующим условиям:

1. $\exists\, [a, b] : \ T(x) = \varnothing, \ x \notin [a, b]$.

2. $\forall x \in [a, b]$ фигура $T(x)$ квадрируема с площадью $S(x)$, причем $S(x) \in C[a, b]$.

3. $\forall \Delta \subset [a, b] \ \exists\, \xi^*_\Delta, \xi^{**}_\Delta : T(\xi^*_\Delta) \subset T(x) \subset T(\xi^{**}_\Delta) \ \forall x \in \Delta$.

Пусть T имеет объем и τ – разбиение $[a,b]$. Пусть

$$m_k = \min_{\Delta_k} S(x), \;\; M_k = \max_{\Delta_k} S(x),$$

тогда

$$S(T(\xi_k^*)) = m_k, \quad S(T(\xi_k^{**})) = M_k.$$

Пусть

$$q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^*), \quad Q_k = \Delta_k \times T(\xi_k^{**}),$$

тогда

$$q_k \subset T_k \subset Q_k, \quad T_k = \{(x,y,z) \in T: \; x \in \Delta_k\}.$$

Но тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} q_k \subset T \subset \bigcup_{k=1}^{n} Q_k.$$

По усиленной монотонности объема,

$$V\left(\bigcup_{k=1}^{n} q_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(q_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = s_\tau,$$

$$V\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(Q_k) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S_\tau.$$

По монотонности объема,

$$s_\tau \le V(T) \le S_\tau.$$

Так как s_τ и S_τ – суммы Дарбу $S(x)$, а последняя интегрируема, то

$$V(T) = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

Определение 3.2.3 (Тело вращения) *Пусть $f \in C[a,b]$, причем $f \ge 0$. Множество*

$$T_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \; y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$$

называется телом вращения, полученным вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг Ox.

Ясно, что $S(x) = \pi f^2(x)$, все условия выполнены, а значит

$$V(T_f) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

3.3 Понятие длины и ее вычисление

Определение 3.3.1 *Путем в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *называется отображение* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, *все координатные функции которого непрерывны на* $[a, b]$.

Замечание 3.3.1 *Путь* γ *задается* n *непрерывными функциями* $x_i(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 1...n$,
$$\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)).$$

Определение 3.3.2 *Точка* $\gamma(a)$ *называется началом пути, а точка* $\gamma(b)$ *концом пути.*

Определение 3.3.3 *Если* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *то путь называется замкнутым.*

Определение 3.3.4 *Если равенство* $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ *возможно лишь при* $t_1 = t_2$ *или* $t_1, t_2 \in \{a, b\}$, *то путь называется простым (или несамопересекающимся).*

Определение 3.3.5 *Множество* $\gamma\left([a, b]\right)$, *то есть образ отрезка* $[a, b]$, *называется носителем пути.*

Замечание 3.3.2 *Разные пути могут иметь равные носители. Например, верхняя полуокружность* $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$ *является носителем как пути* $\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}),\ t \in [-1, 1]$, *так и пути* $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, \pi]$.

Определение 3.3.6 *Говорят, что* $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ – *путь гладкости* m, *если* $x_i(t) \in C^m[a, b]$, $i = 1...n$. *Если* $m = 1$, *то путь часто называют просто гладким.*

Определение 3.3.7 *Если отрезок* $[a, b]$ *можно разбить точками* $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ *так, что сужение пути* $\gamma(t)$ *на каждый отрезок* $[t_{i-1}, t_i]$ – *гладкий путь, то путь называется кусочно-гладким.*

Определение 3.3.8 *Два пути* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *и* $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ *называются эквивалентными, если существует строго возрастающая биекция* $u : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, *что*
$$\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(u(t)).$$

Замечание 3.3.3 *Можно показать, что в условиях определения функция* u *непрерывна.*

Лемма 3.3.1 *Введенное отношение – отношение эквивалентности.*

Доказательство. Очевидно. □

Определение 3.3.9 *Класс эквивалентных путей называют кривой и обозначают $\{\gamma\}$, а каждый представитель класса γ – параметризация кривой.*

Ясно, что носители эквивалентных кривых совпадают.

Определение 3.3.10 $\{\gamma^-\}$ *– кривая с противоположной ориентацией, если*

$$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t),\ t \in [a,b]$$

Определение 3.3.11 *Кривая называется гладкой (m-гладкой, кусочно-гладкой), если у нее существует гладкая (m-гладкая, кусочно-гладкая) параметризация.*

3.3.1 Вычисление длины пути

Дадим определение длины пути. Определение должно удовлетворять нескольким естественным требованиям. Во-первых, длина пути должна быть аддитивной. Во-вторых, длина пути, соединяющего точки A и B, должна быть не меньше длины отрезка AB.
Для простоты и геометрической наглядности, пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t)) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ – путь, τ – разбиение отрезка $[a,b]$ точками $t_0, t_1, ..., t_n$.

Определение 3.3.12 *Множество отрезков, соединяющих точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, называется ломаной, вписанной в путь γ, отвечающей разбиению τ. Эту ломаную будем обозначать s_τ.*

Длина отрезка, соединяющего точки $\gamma(t_k)$ и $\gamma(t_{k-1})$, вычисляется по теореме Пифагора и равна, очевидно,

$$\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}.$$

Тогда длина $|s_\tau|$ ломаной s_τ вычисляется по формуле

$$|s_\tau| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}.$$

Определение 3.3.13 *Длиной пути γ называется величина*

$$l_\gamma = \sup_\tau |s_\tau|.$$

Определение 3.3.14 *Если $l_\gamma < +\infty$, то путь γ называется спрямляемым.*

Лемма 3.3.2 *Длины эквивалентных путей равны*

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(u(t))$, $u(t) : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ – возрастающая биекция. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{k}$ – дробление $[a, b]$, тогда $\widetilde{t}_k = u(t_k)$ – дробление $[\alpha, \beta]$.

$$s_\gamma = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_k) - \widetilde{\gamma}(\widetilde{t}_{k-1})| = s_{\widetilde{\gamma}} < l_{\widetilde{\gamma}}.$$

Значит, $l_\gamma \le l_{\widetilde{\gamma}}$. Меняя их местами, придем к требуемому. □
Аналогично можно показать, что длины противоположных путей равны.

Определение 3.3.15 *Длиной кривой называют длину любой ее параметризации.*

Покажем, что путь аддитивен, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.1 *Пусть $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, $\gamma^1(t) : [a, c] \to \mathbb{R}$, $\gamma^2(t) : [c, b] \to \mathbb{R}$. Путь $\gamma(t)$ спрямляем тогда и только тогда, когда спрямляемы пути $\gamma^1(t)$ и $\gamma^2(t)$, причем*

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть τ – разбиение $[a, b]$, содержащее точку c. Ясно, что $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 – разбиение $[a, c]$ и τ_2 – разбиение $[c, b]$. Тогда ломаная s_τ – объединение ломаных s_{τ_1} и s_{τ_2}, причем

$$|s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| = |s_\tau| \le l_\gamma.$$

Отсюда сразу следует, что каждый из путей γ^1 и γ^2 спрямляемы. Переходя в предыдущем неравенстве сначала к супремуму по τ_1, а потом по τ_2, получим

$$l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2} \le l_\gamma.$$

Докажем достаточность и обратное неравенство. Пусть τ – разбиение отрезка $[a, b]$. Если оно не содержит точку c, то добавим ее, получив разбиение $\tau' = \tau_1 \cup \tau_2$, где τ_1 – разбиение $[a, c]$ и τ_2 – разбиение $[c, b]$. Пусть $c \in (t_{i-1}, t_i)$. Длина ломаной, отвечающей разбиению τ', могла только увеличиться, так как согласно неравенству треугольника,

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \le$$

$$\sqrt{(x(c) - x(t_{i-1}))^2 + (y(c) - y(t_{i-1}))^2} + \sqrt{(x(t_i) - x(c))^2 + (y(t_i) - y(c))^2}.$$

Значит,

$$|s_\tau| \le |s_{\tau'}| = |s_{\tau_1}| + |s_{\tau_2}| \le l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}$$

и, тем самым, кривая γ спрямляема. Переходя к супремуму в левой части неравенства по τ, получим

$$l_\gamma \le l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2}.$$

Объединяя это неравенство и последнее в пункте необходимости, заключаем

$$l_\gamma = l_{\gamma^1} + l_{\gamma^2},$$

и теорема полностью доказана. □

Замечание 3.3.4 *Пока что нигде не требовалась непрерывность отображения γ.*

Укажем важное достаточное условие спрямляемости кривой.

Теорема 3.3.2 *Пусть путь $\gamma \in C^1[a,b]$, тогда он спрямляем.*

Доказательство. Пусть τ – разбиение отрезка $[a,b]$,

$$|s_\tau| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

По теореме Лагранжа, найдутся точки $\xi_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ такие, что

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i,\ y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i,\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$

откуда

$$|s_\tau| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i.$$

Пусть

$$M_x = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|,\ M_y = \max_{t\in[a,b]} |y'(t)|, m_x = \min_{t\in[a,b]} |x'(t)|,\ m_y = \min_{t\in[a,b]} |y'(t)|,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot \Delta t_i \le |s_\tau| \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot \Delta t_i,$$

откуда

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot (b-a) \le |s_\tau| \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot (b-a).$$

Переходя к супремуму по τ, имеем

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot (b-a) \le l_\gamma \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot (b-a).$$

и правое неравенство дает возможность заключить, что путь спрямляем. □
Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ – спрямляемая кривая. Тогда, согласно теореме, для $t \in [a,b]$ определена функция $l_\gamma(t)$, показывающая длину участка пути γ от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(t)$.

Теорема 3.3.3 *Пусть путь* $\gamma \in C^1[a,b]$, *тогда функция* $l_\gamma(t) \in C^1[a,b]$.

Доказательство. Пусть $\Delta t > 0$ и $t_0,\ t_0 + \Delta t \in [a,b]$. Согласно последнему неравенству предыдущей теоремы, сохраняя те же обозначения, на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ выполнено

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \cdot \Delta t \le l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0) \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \cdot \Delta t.$$

Деля на $\Delta t > 0$, получим

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} \le \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \le \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Так как $M_x = \max\limits_{t \in [t_0, t_0 + \Delta t]} |x'(t)|$, и функция $x'(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{\Delta t \to 0+0} M_x = x'(t_0).$$

Аналогично,

$$\lim_{\Delta t \to 0+0} m_x = x'(t_0), \lim_{\Delta t \to 0+0} M_y = y'(t_0), \lim_{\Delta t \to 0+0} m_y = y'(t_0).$$

Значит,

$$\sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)} \le \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{l_\gamma(t_0 + \Delta t) - l_\gamma(t_0)}{\Delta t} \le \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

и $l'_{\gamma+}(t_0) = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}$. Аналогично рассматривается случай $\Delta t < 0$, а значит, в силу произвольности t_0,

$$l'_\gamma(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}.$$

Так как функции $x'(t)$ и $y'(t)$, согласно условию, непрерывны, то $l'_\gamma(t) \in C[a,b]$ и $l_\gamma(t) \in C^1[a,b]$. $\square$

Следствие 3.3.4 *Пусть путь* $\gamma \in C^1[a,b]$, *тогда*

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

Доказательство. Так как $l'_\gamma(t) \in C[a,b]$ и $l_\gamma(a) = 0$, то по формуле Ньютона-Лейбница

$$l_\gamma(t) = l_\gamma(t) - l_\gamma(a) = \int_a^t l'_\gamma(t)dt.$$

Так как $l_\gamma = l_\gamma(b)$, то

$$l_\gamma = l_\gamma(b) = \int\limits_a^b l'_\gamma(t)dt = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

$\square$

Все вышеизложенное относится не только к путям в $\mathbb{R}^2$, но и к путям в $\mathbb{R}^n$ для произвольных $n \in \mathbb{N}$, доказательства сохраняются.