22 мая.

Мат Ан.

ИДЗ 2.

1.

$1^{\text{о к.с.к.}}$

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^{n+4}} tg \frac{5}{2^n}$

$\frac{(2n+1)!!}{n^{n+4}} tg \frac{5}{2^n} \sim \frac{(2n+1)!! \cdot 5}{n^{n+4}\, 2^n}$

По Даламберу:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)!!\, 5\; n^{n+4}\, 2^n}{(n+1)^{n+5}\, 2^{n+1}\, (2n+1)!! \cdot 5} =$

$= \frac{(2n+3)n^4}{2 \cdot (n+1)^5} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \sim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \frac{1}{e}$

$\frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ сх.

Ответ: сх.

~~2~~ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+e^{-2n}) - \ln(n^3+e^{-n})}{n} =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{n^2+e^{-2n}}{n^3+e^{-n}}}{n}$

$n^2 + e^{-2n} < n^3 + e^{-n} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln \frac{n^2+e^{-2n}}{n^3+e^{-n}} < 0 \Rightarrow$ ряд не знакопеременный непр.

$$\ln \frac{n^2+e^{-2n}}{n^3+e^{-n}} \sim \ln\frac{1}{n} = -\ln n$$

$$\int_1^{\infty} -\frac{\ln n}{n}\,dn = -\frac{\ln^2 n}{2}\Big|_1^{\infty} \to -\infty \text{ расх.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд. расх.

Ответ: расх.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n \arccos\frac{n}{n+5}$

$$\sum_{n=1}^{N}\sin n = \frac{\sin\frac{N+1}{2}\sin\frac{N}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$$ частич. суммы огр.

$\arccos \frac{n}{n+5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ монотон.

$\Rightarrow$ по t.-Д. ряд сх-ся.

Ответ: сх.

2. $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}$ $E_1=[1;+\infty)$ $E_2=[0;2]$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2$

E_1: $\exists\, x_n = n$ $f_n(x_n) = \frac{n^3}{2n} = \frac{n^2}{2} \to \infty > \varepsilon$

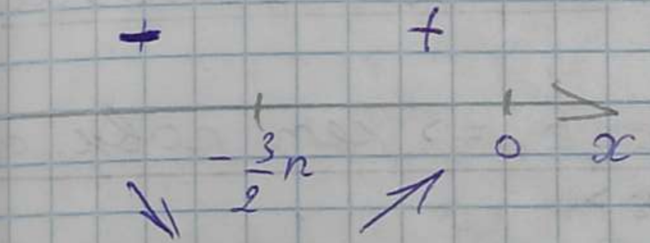
$\Rightarrow$ равн. сх-ти нет

E_2: $\|f_n(x) - f(x)\|_{[0;2]} = \sup\limits_{x \in [0;2]} \left| \frac{nx^2}{n+x} - x^2 \right| =$

$= \sup\limits_{x\in[0;2]} \left| \frac{x^3}{n+x} \right| = \sup\limits_{x \in [0;2]} \frac{x^3}{n+x} \ominus$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^3}{n+x} = \frac{3x^2(n+x) - x^3}{(n+x)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 n}{(n+x)^2} =$$

$$= \frac{x^2(2x+3n)}{(n+x)^2}$$



$\ominus \ \frac{8}{n+2} \longrightarrow 0 \ \Rightarrow$ сх. равн.

или $\quad \frac{x^3}{n+x} < \frac{8}{n} \quad \Rightarrow \sup \left| \frac{x^3}{n+x} \right| \leq \frac{8}{n} \to 0$

$\forall x \in [0;2]$

$\Rightarrow$ сх. равн.

3. б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2+x^3 n^{\frac{3}{2}}} \sin \sqrt[5]{\frac{x}{n}} \qquad E_1 = (0,1) \quad E_2 = (1, +\infty)$$

$\underline{E_1:}$ $x_n = n^{-\frac{1}{2}}$

$$a_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{2+1} \sin n^{-\frac{3}{10}} \sim \frac{1}{3}\sqrt{n} \cdot n^{-\frac{3}{10}} =$$

$$= \frac{1}{3} n^{\frac{1}{5}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$ <u>необх. условие не выполн. на E_1 => нет равн. сх.</u>

$$\frac{\sqrt{n}}{2+x^3 n^{\frac{3}{2}}} \sin \sqrt[5]{\frac{x}{n}} \overset{x>0}{\sim} \frac{1}{x^3 n} \frac{x^{\frac{1}{5}}}{n^{\frac{1}{5}}} \Rightarrow \text{ряд}$$

сх-ся $\forall x > 0$

$\underline{E_2:}$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{2+x^3 n^{\frac{3}{2}}}}_{>0} \overbrace{\sin \sqrt[5]{\frac{x}{n}}}^{>0} \leqslant \frac{n^{\frac{1}{2}} \cancel{n^{\frac{1}{5}}} x^{\frac{1}{5}}}{(2+x^3 n^{\frac{3}{2}})\, n^{\frac{1}{5}}} =$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{17}{5}}} \frac{x^{\frac{1}{5}}}{\left(\frac{2}{n^{\frac{15}{5}}} + x^3\right)} <$$

<1, т.к. $x > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^{\frac{1}{5}} < x^3$

$< \frac{1}{n^{2,9}}$ => <u>сх. равна на E_2</u>

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x\cos nx}{\sqrt[4]{n^4+x^4}}$, $E=[0, \frac{\pi}{2}]$

$\dfrac{x}{\sqrt[4]{n^4+x^4}} \rightrightarrows 0$ монотон.

$\Rightarrow$ сх-ся по т. Д.

$\cos nx$ част. суммы огр.

$\sum\limits_{n=1}^{N} x\cos nx = \left| x \dfrac{\cos\frac{N+1}{2}x \sin\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right| \xrightarrow[x\to 0]{}$

$\rightarrow \left| 2\cos\frac{N+1}{2}x \sin\frac{Nx}{2} \right| \leq 2$ н.с.н. x в окр. 0

$\Rightarrow$ част. суммы равн. огр. ~~числом~~

При отдалении от 0 част. суммы, очевидно, ограничены.

~~тоже (2 + ε, так в конечном числе точек)~~

$\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^4+x^4}} \leq \dfrac{1}{n} \rightrightarrows 0$

$\Rightarrow$ ряд сх-ся равн. на E по т. Д.