1 ЛОГИЧЕСКАЯ СИМВОЛИКА. МНОЖЕСТВА И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ

1.1 Логическая символика и некоторые специальные обозначения

Математика оперирует предложениями, называемыми высказываниями. Высказывания, в свою очередь, изучаются разделом математики, который называется математическая логика. Приведем для начала некоторые обозначения, которыми она пользуется.
$\forall$ – квантор всеобщности. Читается, как «любой», «всякий», «каждый».
$\exists$ – квантор существования. Читается, как «существует», «найдется».
$\Rightarrow$ – знак импликации (следования).
$\Leftrightarrow$ – знак равносильности (тождества).
$\neg$ – знак отрицания.
$\wedge$ – логическое «и».
$\vee$ – логическое «или».
Кроме того, символы, приведенные далее, позволяют сокращать математические записи.
$\sphericalangle$ – читается, как «рассмотрим».
$\sqsupset$ – читается, как «пусть».
: – читается, как «такой, что», «так, что».
! – читается, как «единственный».

Приведем несколько примеров использования этих символов для записи высказываний.

Пример 1.1.1 *Запись $\forall b \quad \exists a : a + b = -3$ читается, как «для каждого b найдется a такое, что сумма a и b равна -3».*

Пример 1.1.2 *Запись $\forall a, b\ \exists!\ c = ab$ читается, как «для любых чисел a, b найдется единственное число c, равное их произведению».*

Доказательство любой теоремы в математике состоит из следующих известных шагов: задается некоторое свойство (высказывание) A, которое часто называется условием, и из него, путем логических рассуждений выводится некоторое свойство B (результат). Какие при этом логические операции используются? Приведем и обсудим некоторые из них.

1. Логическая операция импликации (следования).
Данная логическая операция часто обозначается символом $\Rightarrow$. Если A и B – два высказывания, то запись $A \Rightarrow B$ читается, как «из A следует B», «A влечет B», «B необходимо для A», «A достаточно для B».

Пример 1.1.3 *Рассмотрим высказывания* $A: \ x < 0$ *и* $B: \ x < 1$. *Тогда, очевидно,* $A \Rightarrow B$.

Этот же пример показывает, что обратное утверждение, то есть утверждение $B \Rightarrow A$, вообще говоря, не выводится из утверждения $A \Rightarrow B$.

2. Логическая операция равносильности (тождества).
Данная логическая операция часто обозначается символом $\Leftrightarrow$. Если A и B – два высказывания, то запись $A \Leftrightarrow B$ читается, как «A равносильно B», «B необходимо и достаточно для A», «A выполнено тогда и только тогда, когда выполнено B».

Пример 1.1.4 *Рассмотрим высказывания* $A:$ *целое число делится на* 6 *и* $B:$ *целое число делится на* 2 *и на* 3. *Ясно, что* $A \Leftrightarrow B$.

Замечание 1.1.1 *Легко понять, что равносильность двух высказываний* A *и* B *– это то же самое, что одновременное выполнение двух импликаций:* $A \Rightarrow B$ *и* $B \Rightarrow A$. *Это наблюдение часто используется при доказательстве теорем, в условии которых фигурирует понятие равносильности (или, что то же самое, фигурирует фраза «тогда и только тогда»). Импликация* $A \Rightarrow B$ *часто называется необходимостью, а* $B \Rightarrow A$ *– достаточностью.*

Необходимое и достаточное условие (или равносильность) часто также называется **критерием**.

3. Логическая операция отрицания.
Данная логическая операция часто обозначается символом $\neg$. Если A – высказывание, то $\neg A$ читается, как «не A». Можно встретить и такое обозначение отрицания A:
$$\neg A = \overline{A}.$$

Пример 1.1.5 *Рассмотрим высказывание* $A: \ x < 0$. *Тогда* $\neg A: \ x \geq 0$.

Замечание 1.1.2 *Для любого высказывания* A *справедлив принцип исключенного третьего: выполнено либо* A, *либо* $\neg A$.

Замечание 1.1.3 *Всегда справедливо утверждение* $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$.

На свойствах операции отрицания часто основывается так называемое **доказательство от противного**. Как оно проводится? Пусть нужно доказать, что $A \Rightarrow B$. Предположим, что B не выполнено, то есть выполнено $\neg B$. Тогда, в силу принципа исключенного третьего, достаточно показать, что выполнено $\neg A$ (иначе, в силу того, что $A \Rightarrow B$, было бы справедливо B, а не $\neg B$). Последнее же противоречит тому, что выполнено A.

4. Логическая операция «или».
Данная логическая операция часто обозначается символом $\vee$. Если A и B – два высказывания, то $A \vee B$ читается, как «A или B». Отметим, что это высказывание вовсе не исключает **одновременного** выполнения как A, так и B.

Пример 1.1.6 *Рассмотрим высказывания* $A: \ 0 < x \leq 1$ *и* $B: \ 1 \leq x < 2$. *Тогда* $A \vee B: \ 0 < x < 2$.

5. Логическая операция «и».
Данная логическая операция часто обозначается символом $\wedge$. Если A и B – два высказывания, то $A \wedge B$ читается, как «A и B». Отметим, что это высказывание подразумевает **одновременное** выполнение как A, так и B.

Пример 1.1.7 *Рассмотрим высказывания* $A: \ 0 < x \leq 1$ *и* $B: \ 1 \leq x < 2$. *Тогда* $A \wedge B: \ x = 1$.

Полезным в дальнейшем будет и следующее наблюдение. Пусть $P(x)$ – некоторое высказывание, зависящее от $x \in X$ (детальнее об этом мы поговорим чуть ниже). Тогда отрицание к утверждению «для любого x из X справедливо свойство $P(x)$» равносильно тому, что «существует x из X, что свойство $P(x)$ неверно». Записать это можно так:

$$\neg(\forall x \in X \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in X : \neg P(x)).$$

Аналогично, отрицание утверждения «для некоторого $x \in X$ верно $P(x)$» равносильно тому, что «для всех x из X свойство $P(x)$ неверно», или, в символьном виде,

$$\neg(\exists x \in X : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X \Rightarrow \neg P(x)).$$

Пример 1.1.8 *Приведем конкретные примеры.*

$$\neg(\forall x \Rightarrow x \textit{ делится на 2}) \Leftrightarrow (\exists x : \ x \textit{ не делится на 2}).$$

и

$$\neg(\exists x : \ x \textit{ делится на 2}) \Leftrightarrow (\forall x \Rightarrow x \textit{ не делится на 2}).$$

1.2 Множества

Понятие множества в рассматриваемом курсе будет первичным, неопределяемым. Не определяя понятия множества, тем не менее, будут указаны его свойства и правила обращения с ним. Другой подход, аксиоматический, использует математическая логика: аксиомы описывают свойства множества и правила построения одних множеств из других.

Само понятие «множество» должно быть интуитивно понятно каждому. Вместо него, в зависимости от ситуации, часто используют такие синонимы, как «набор», «совокупность» и аналогичные слова. Например, множество цветов в вазе часто синонимично называют словом «букет», а множество студентов в аудитории – «группой».

Множества принято обозначать заглавными латинскими буквами, например: A, B, C, при этом для нумерации множеств часто оказывается удобным использовать индексы: A_1, A_2. Объекты, составляющие множество, называют элементами множества, их принято обозначать строчными латинскими буквами: a, b, c.

Замечание 1.2.1 *Запись $a \in A$ будет означать, что a является элементом множества A или, иначе, что a входит в A.*

Замечание 1.2.2 *Запись $a \notin A$ будет означать, что a не является элементом множества A или, иначе, что a не входит в A.*

Основные способы задания множества:

- множество может быть задано перечислением своих элементов, например $A = \{1, 5, 12, \text{стул}\}$;

- множество может быть задано указанием характеристического свойства, например $A = \{x : \sin x = 1/2\}$. Таким образом, A – это множество, составленное из элементов x таких, что $\sin x = 1/2$.

Замечание 1.2.3 *Вообще, все вышесказанное можно обобщить и такой конструкцией. Пусть x – объект произвольной природы, а $P(x)$ – обозначение того, что объект x обладает свойством P. Тогда*

$$\{x : P(x)\}$$

– это множество всех объектов, обладающих свойством P. Объекты в этом контексте – суть элементы построенного множества.

Замечание 1.2.4 *Элементами множества могут выступать и множества, например*

$$A = \{1, \{1\}, \{3, 7\}\}.$$

У множества A три элемента: число 1, множество $\{1\}$, состоящее из одного элемента 1, и двухэлементное множество $\{3, 7\}$.

Такая свобода в задании множества может навести на мысль, что множество – не такое уж простое понятие. И правда, например, понятия множества всех множеств просто не существует.

Пусть A – совокупность множеств, не содержащих себя в качестве элемента. Если A – множество, то либо A содержит себя в качестве элемента, либо нет. Однако эта альтернатива для A невозможна. Пусть A не содержит себя в качестве элемента, тогда, согласно определению A, должно выполняться $A \in A$. С другой стороны, если $A \in A$, то это противоречит определению совокупности A, как множеств, не содержащих себя в качестве элемента. Значит, A – не множество.

Замечание 1.2.5 *При образовании множеств нужно соблюдать некоторую осторожность. Как показано выше, понятия множества всех подмножеств противоречиво (такого множества нет). Во избежании противоречий достаточно потребовать, чтобы элементы множества были определены раньше, чем само множество. Потребовав это, получим, что никакое множество не может содержать себя в качестве элемента.*

Определение 1.2.1 *Обычно рассматривают объекты, принадлежащие некоторому основному множеству U. Оно либо ясно из контекста, либо явно указывается. Такое множество называется универсальным множеством.*

Определение 1.2.2 *Множество, не содержащее элементов, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$.*

Полезно заметить, что пустое множество является подмножеством абсолютно любого множества.

1.3 Операции над множествами

Рассмотрим классические операции над множествами, а также их свойства.

Определение 1.3.1 *Говорят, что множество A является подмножеством множества B и пишут $A \subset B$, если*

$$(\forall x \in A) \Rightarrow (x \in B)\,,$$

т.е. все элементы множества A являются и элементами множества B.

Определение 1.3.2 *Если для двух множеств A и B одновременно выполняется, что $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называются равными. Равенство множеств записывается следующим образом: $A = B$.*

Понятно, что множества A и B равны тогда и только тогда, когда состоят из одинаковых элементов.

Определение 1.3.3 *Объединением множеств A и B называется множество C, обозначаемое $A \cup B$, такое, что:*

$$C = A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

т.е. элементами объединения являются только те элементы, которые содержатся хотя бы в одном из множеств A, B.

Определение 1.3.4 *Пересечением множеств A и B называется множество C, обозначаемое $A \cap B$, такое, что:*

$$C = A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

т.е. элементами пересечения являются только те элементы, которые принадлежат одновременно множествам A и B.

Определение 1.3.5 *Разностью множеств A и B называется множество C, обозначаемое $A \setminus B$, такое, что:*

$$C = A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

т.е. элементами разности являются элементы, входящие в множество A, но не входящие в множество B.

Определение 1.3.6 *Пусть U – универсальное множество. Дополнением множества A до U называется множество $U \setminus A$, обозначаемое A^c.*

Пример 1.3.1 *Пусть заданы множества $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ и $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, где последнее множество – универсальное. Тогда,*

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \{3, 5\}, \quad A \setminus B = \{1\}, \quad A^c = \{2, 4, 6, 7\}.$$

Замечание 1.3.1 *Пусть элементы α множества A нумеруют множества X_α. Тогда под объединением системы множеств X_α понимается множество, содержащее те элементы x, которые принадлежат хотя бы одному множеству X_α. Обозначается это объединение*

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Аналогично, под пересечением системы множеств X_α понимается множество, содержащее те элементы x, которые принадлежат каждому множеству X_α. Обозначается это пересечение

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

Определение 1.3.7 *Декартовым произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар таких, что первый элемент пары принадлежит множеству A, а второй – множеству B:*

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A), (b \in B)\}.$$

Замечание 1.3.2 *Под упорядоченной парой понимается то, что пара (a, b), вообще говоря, не равна паре (b, a). Для обозначения упорядоченных пар, часто оказывается удобным добавлять индексы элементам пары, например (x_1, x_2).*

Замечание 1.3.3 *Декартово произведение естественным образом обобщается на любое конечное число множеств.*

Отметим некоторые стандартные свойства, присущие операциям над множествами.

Лемма 1.3.1 *Справедливы следующие свойства:*

1. $X \cup Y = Y \cup X$ – *коммутативность объединения;*
2. $X \cap Y = Y \cap X$ – *коммутативность пересечения;*
3. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ – *ассоциативность объединения;*
4. $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ – *ассоциативность пересечения;*
5. $X \cup X = X \cup \varnothing = X$;
6. $X \cap X = X$, $X \cap \varnothing = \varnothing$;
7. $X \cup X^c = U$, $X \cap X^c = \varnothing$, $(X^c)^c = X$.

Все написанные свойства моментально следуют из определения соответствующих операций. Приведем также несколько свойств, показывающих связь операций объединения, пересечения и разности. Начнем с разности.

Теорема 1.3.1 (Законы де Моргана) *Справедливы следующие соотношения:*

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha), \quad Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha).$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение.

$$x \in Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge \left(x \notin \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) \Leftrightarrow (x \in Y) \wedge (x \notin X_\alpha,\ \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in Y \setminus X_\alpha,\ \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha).$$

Аналогично доказывается второе соотношение. □

Теперь поговорим про связь объединения и пересечения.

Теорема 1.3.2 *Справедливы следующие соотношения:*

$$Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha), \quad Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha).$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение.

$$x \in Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \Leftrightarrow (x \in Y) \vee \left(x \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \right) \Leftrightarrow (x \in Y) \vee (x \in X_\alpha,\ \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in Y \cup X_\alpha,\ \forall \alpha \in A) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in A} (Y \cup X_\alpha).$$

□

1.4 Контрольные вопросы и задачи

1. Покажите, что пустое множество содержится в каждом множестве.

2. Проиллюстрируйте декартово произведение двух отрезков, двух прямых, прямой и окружности, прямой и круга.

3. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C выполнено $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

4. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C выполнено $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

5. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C выполнено $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

6. Пусть даны множества A, B, C. Выразить следующие множества через A, B, C, используя операции $\cap, \cup, \setminus$:

   - Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств A, B и C;

- Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B и C;
- Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B, но не принадлежащих C.

7. Докажите теоремы 1.3.1, 1.3.2.

2 ФУНКЦИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ

2.1 Понятия функции и отображения

Одним из ключевых понятий математики и ее приложений является понятие функции (отображения).

Определение 2.1.1 *Пусть заданы два множества X и Y. Говорят, что f – отображение из X в Y, если установлено правило, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется один элемент $y \in Y$. При этом пишут:*

$$f : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Это описание нельзя считать строгим определением понятия отображения, так как оно все еще включает в себя неопределенные понятия «правило» и «сопоставляется». И хотя можно дать строгое определение понятию отображения на основе понятия множества, нам будет удобно считать его первичным.

Замечание 2.1.1 *Если множество Y числовое, то отображение в него часто называют функцией.*

Определение 2.1.2 *Множество X называют областью определения отображения f и обозначают $D(f)$, а x – аргументом отображения f или независимой переменной.*

Определение 2.1.3 *Множество $E(f) \subset Y$, определяемое, как*

$$E(f) = \{y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\},$$

называется областью значений отображения f, а y – значением отображения f на элементе x, или зависимой переменной.

Замечание 2.1.2 *Как обычно, и как уже сделано выше, значение отображения f на элементе x мы будем записывать как $f(x)$.*