20 марта.

Дз № 4

1. $X = (0; +\infty)$ $f_n(x) = \chi_{[n; \sqrt{n^2+1}]}(x)$

а) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при $x \in X \setminus [n; \sqrt{n^2+1}]$

$\lambda_1 [n; \sqrt{n^2+1}] = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

т. е. $f_n(x) \xrightarrow{п.в.} 0$

б) $\lambda_1 \{x : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\} = \lambda_1 [n; \sqrt{n^2+1}]$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\lambda_1} 0$

в) $F(x) = x^2$

$\mu_F [n, \sqrt{n^2+1}] = n^2 + 1 - n^2 = 1 \not\to 0$

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{\mu_F}$ f_n не сход. по μ_F

2. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ $f_n \xrightarrow{\mu} g$

По т. Рисса

$\exists f_{n_{k_1}} \xrightarrow{п.в.} f$ и $\exists f_{n_{k_2}} \xrightarrow{п.в.} g$

$\exists n_k = \max(n_{k_1}, n_{k_2})$

Тогда $f_{n_k} \xrightarrow{п.в.} f$, $f_{n_k} \xrightarrow{п.в.} g$ (=)

$(k) = Seq^{<k}\{a\} \times Seq(\{b\} \times Seq^{<k}\{a\})$

$(=) \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f(x) \quad \forall x \in E \setminus E_1, \quad \mu(E_1)=0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = g(x) \quad \forall x \in E \setminus E_2, \quad \mu(E_2)=0$

$\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) = 0$

Очевидно, что $f(x) = g(x)$ на $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ в силу единственности предела ~~функций~~ f_n. $\Rightarrow f(x) = g(x)$ почти всюду.

3. $f_n \xrightarrow{\mu} f, \quad g_n \xrightarrow{\mu} g$

$f_n + g_n$ измеримы и конечны почти всюду, т.к. f_n и g_n измеримы и конечны п.в.

~~$A_1 = \{x : |f_n - g$~~

$A_1 = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \quad \forall \varepsilon$

$A_2 = \{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \quad \forall \varepsilon$

$\mu A_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \mu A_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

~~C~~ $B = \{x : |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \geq 2\varepsilon\}$

~~$C = \{x : |f_n(x) + g_n(x$~~

$C = \{x : |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \geq 2\varepsilon\}$

Т.к. верно нер-во треугольника

$B \subset C$

Т.к. $|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \geq 2\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n - f| \geq \varepsilon$ или $|g_n - g| \geq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow C \subset A_1 \cup A_2$

$\mu(A_1 \cup A_2) \to 0 \Rightarrow \mu C \to 0 \Rightarrow \mu B \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$