Пример 6.9.1 *Важную роль в математическом анализе играет последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Оказывается, что она не имеет конечного предела. Согласно отрицанию критерия Коши:*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n > n_0, p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $p = n$, тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} \cdot n\right| = \frac{1}{2}.$$

Это значит, что для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ выполнено отрицание критерия Коши. Значит, последовательность предела не имеет.
Можно заметить, что данная последовательность монотонна и имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, равный $+\infty$.

6.10 Контрольные вопросы и задачи

1. Приведите пример последовательности, имеющей ровно одну предельную точку, ровно две предельные точки, ровно пять предельных точек. Сколько частичных пределов имеет такая последовательность?

2. Может ли последовательность быть ограничена сверху, но не ограничена снизу?

3. Покажите, что теоремы о предельном переходе в неравенствах, о сжатой переменной, Вейерштрасса справедливы даже если все утверждения начинаются не с $n = 1$, а с $n = n_0$.

4. Докажите, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится и имеет тот же самый предел, что и исходная последовательность.

5. Проиллюстрируйте графически теоремы о сжатой переменной, о предельном переходе в неравенствах.

7 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

7.1 Понятие предела функции по Коши

Определение 7.1.1 ($\varepsilon - \delta$ определение предела функции) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 – предельная точка для E. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

При этом пишут, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ *или* $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$.

Легко заметить, что это же определение, используя понятия ε-окрестности и δ-окрестности можно переписать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Замечание 7.1.1 *Геометрически определение предела функции означает, что какую бы полосу шириной* 2ε *не взять, найдется* δ, *что при всех* x *из области определения, лежащих в проколотой окрестности* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, *значения функции* $f(x)$ *лежат в этой полосе. При уменьшении* ε *значение* δ, *вообще говоря, уменьшается. На рисунке 2 наглядно продемонстрировано, как с изменением* ε *меняется и* δ.

Определение 7.1.2 (Определение предела функции через окрестности) *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$ *и* x_0 *– предельная точка для* E. *Число* A *называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, *если*

$$\forall V(A)\ \exists\overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in E : x \in \overset{o}{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \in V(A).$$

Как и в случае последовательности, справедлива следующая лемма.

Лемма 7.1.1 *Определения* (7.1.1) *и* (7.1.2) *эквивалентны.*

Доказательство. Докажите самостоятельно аналогично доказательству леммы (6.1.1). □

Пример 7.1.1 *Доказать, что*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. *Нужно найти те* x, *при которых выполняется неравенство*

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon.$$

Так как $x \neq 2$, *то*

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| = |x + 2 - 4| = |x - 2| < \varepsilon.$$

Значит, если положить $\delta = \varepsilon$, *то при* $0 < |x - 2| < \delta$ *выполняется*

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon.$$

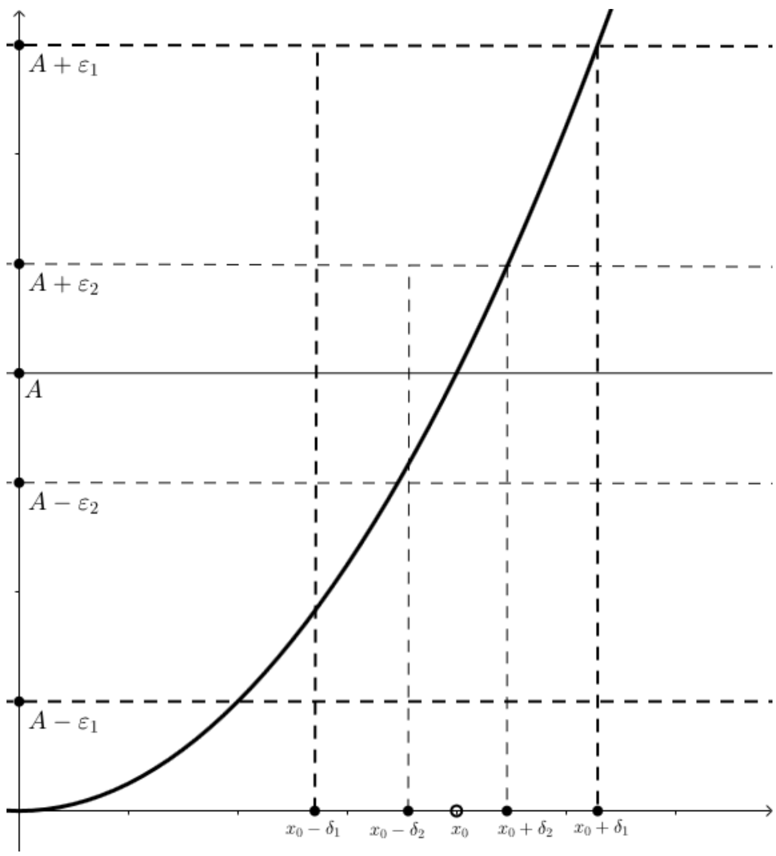

Рис. 2 Предел функции

Пример 7.1.2 *Доказать, что*

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - x) = 6.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. *Справедлива цепочка преобразований*

$$|f(x) - A| = |x^2 - x - 6| = |(x-3)(x+2)|.$$

Можно предполагать, что $x \in (2, 4)$, $x \neq 3$. *Тогда*

$$|(x-3)(x+2)| \leq 6|x-3|$$

и если потребовать, чтобы выполнялось неравенство $6|x-3| < \varepsilon$, *то при* $0 < |x-3| < \delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{6})$ *будет выполняться* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример 7.1.3 *Доказать, что функция (см. рисунок 3)*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

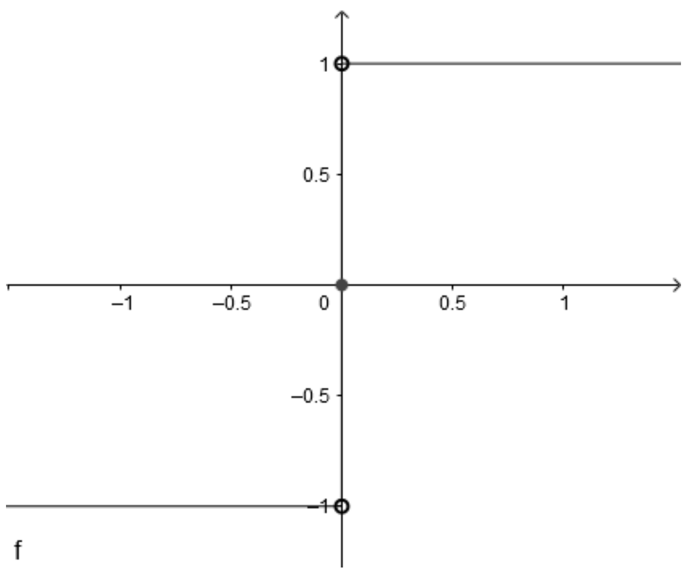

Рис. 3 График $y = \operatorname{sign} x$

не имеет предела в точке $x_0 = 0$. *Ниже записано отрицание определения того, что число* A *является пределом функции* $f(x) : E \to \mathbb{R}$ *в точке* x_0,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in E : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Пусть $\varepsilon_0 = 1$ *и* $\delta > 0$. *Достаточно положить* $x_\delta = -\frac{\delta}{2}$, *если* $A \geq 0$ *и* $x_\delta = \frac{\delta}{2}$, *если* $A < 0$, *тогда*

$$|\operatorname{sign} x_\delta - A| \geq 1.$$

Пример 7.1.4 *Доказать, что* $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1$. *Пусть* $\varepsilon > 0$, *тогда какое бы число* $\delta > 0$ *не взять, для всех* $x : 0 < |x| < \delta$ *выполняется* $|\operatorname{sign} x - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.

Замечание 7.1.2 *Последний пример еще раз иллюстрирует, что при изучении предела функции при* $x \to x_0$ *важно поведение функции около точки* x_0, *а не в самой точке. В определении предела это отмечается рассмотрением проколотой окрестности* x_0.

Определение предела легко обобщается как на случаи, когда $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$, $x_0 = \infty$, так и на случаи, когда $A = +\infty$, $A = -\infty$, $A = \infty$. Требование, что x_0 – предельная точка, сохраняется.

Определение 7.1.3 *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$. *Говорят, что* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 7.1.4 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ (x_0 – число), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 7.1.5 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ (A – число) , если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : |x| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Читателю предлагается самому сформулировать определения предела в остальных случаях.

Замечание 7.1.3 *Данные определения можно переписать через ε-окрестности и через окрестности, как сделано в определениях* (7.1.1) *и* (7.1.2) *. Лемма об эквивалентности сохраняется. Читателю предлагается самостоятельно заполнить данный пробел по аналогии со сделанным выше.*

Замечание 7.1.4 *Запись $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ будет всегда снабжена уточнением: либо $A \in \mathbb{R}$, либо $A \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Замечание 7.1.5 *В определении предела в дальнейшем для краткости часто опускается тот факт, что $\delta = \delta(\varepsilon)$.*

7.2 Понятие предела функции по Гейне

Определение 7.2.1 (Определение предела функции по Гейне) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и x_0 – предельная точка для E. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности x_n, сходящейся к x_0, такой, что $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, выполняется равенство*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Замечание 7.2.1 *Определение предела по Гейне легко обобщается как на случаи, когда либо $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$, $x_0 = \infty$, так и на случаи, когда $A = +\infty$, $A = -\infty$, $A = \infty$. Требование, что x_0 – предельная точка, сохраняется. Сделайте это самостоятельно.*

Оказывается, что определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

Теорема 7.2.1 (Об эквивалентности определений) *Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство будет приведено в предположении, что x_0 и A – числа, оставив другие случаи в качестве упражнения.
Сначала будет доказано, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Гейне.
Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно определению по Коши,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(A).$$

Пусть последовательность x_n сходится к x_0, причем $x_n \in E$ и $x_n \neq x_0$, тогда по ранее найденному числу $\delta > 0$

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0).$$

Значит, при $n > n_0$

$$f(x_n) \in V_\varepsilon(A),$$

что означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
Теперь будет доказано, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Гейне, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши.
От противного, пусть не выполнено определение по Коши, то есть

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in E, x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Так как δ может быть любой, то взяв $\delta_n = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n \in E, x \in \overset{o}{U}_{\delta_n}(x_0) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Последовательность x_n удовлетворяет условиям, что $x_n \in E$ и $x_n \neq x_0$ (по построению). Кроме того, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако так как $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, то есть не выполнено определение по Гейне. $\square$
Определение предела по Гейне часто помогает доказать, что какое-то число не является пределом данной функции, или что функция не имеет предела вовсе.

Пример 7.2.1 *Доказать, что не существует предела* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$.
Достаточно рассмотреть две последовательности

$$x_n^1 = 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad x_n^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Так как

$$f(x_n^1) = \sin(2\pi n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad f(x_n^2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

и пределы между собой не равны, то это означает, что предела не существует.

7.3 Свойства функций, имеющих предел

Для функций справедливы теоремы, аналогичные теоремам для последовательностей.

Теорема 7.3.1 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, тогда:*

1. *При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.*

2. *При $A \in \mathbb{R}$ существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ функция $f(x)$ ограничена.*

3. *Если $A \neq 0$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, то существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и A совпадают.*

Доказательство. 1. От противного, пусть существует два предела $A_1 \neq A_2$. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$. Согласно определению предела по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_2$. В силу единственности предела последовательности $A_1 = A_2$. Тем самым получено противоречие.
2. Пусть $\varepsilon = 1$. Согласно определению предела функции,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1 \Leftrightarrow$$

$$(A - 1) < f(x) < (A + 1),$$

что и означает ограниченность.
3. Пусть $A \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Тогда, согласно определению предела,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Leftrightarrow$$

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда и следует требуемое. Случай $A \in \overline{\mathbb{R}}$ остается в качестве упражнения.

$\square$

7.4 Арифметические свойства пределов

Теорема 7.4.1 (Арифметические свойства пределов) *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$, *тогда:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ *при* $B \neq 0$.

Доказательство. Используя определение предела по Гейне, доказательство этой теоремы сводится к применению соответствующей теоремы для последовательностей. Для примера будет доказано первое утверждение. Пусть $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$. Согласно определению предела по Гейне, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = B$. Тогда по теореме о пределе суммы для последовательностей, $\lim\limits_{n \to \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$. В силу произвольности x_n это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$. □

Аналогично тому, как сделано в последовательностях, можно сформулировать и более общую теорему.

Теорема 7.4.2 *Пусть* $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, *тогда, если определена соответствующая операция (сложение, умножение, деление) в* $\overline{\mathbb{R}}$, *то*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ *при* $B \neq 0$.

Доказательство. Доказательство предлагается в качестве упражнения. □

7.5 Теорема о сжатой переменной

Теорема 7.5.1 *Пусть* $f, g, h : E \to \mathbb{R}$, *причем на* E *выполнено условие* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$.

Доказательство. Пусть $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$. Согласно определнию по Гейне, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = A$. По теореме о сжатой переменной для последовательностей получим, что $\lim\limits_{n \to \infty} h(x_n) = A$. В силу произвольности последовательности x_n получается, что $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$. □

7.6 Предельный переход в неравенствах

Теорема 7.6.1 *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ и $A < B$, тогда*

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы для последовательностей и предоставляется читателю. □

Следствие 7.6.2 (Предельный переход в неравенствах) *Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда:*

1. *Если $f(x) > g(x)$ на E, то $A \geq B$.*

2. *Если $f(x) \geq g(x)$ на E, то $A \geq B$.*

Доказательство. Доказательство следствия аналогично доказательству следствия (7.3.1) и оставляется в качестве упражнения. □

Пример 7.6.1 *В первом пункте следствия нельзя утверждать, что $A > B$. Действительно, рассмотрев функции $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 0$ видно, что $f(x) > g(x)$ при $x > 0$, но $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.*

7.7 Односторонние пределы

Определение 7.7.1 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка для множества $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$. Говорят, что число A является пределом функции f в точке x_0 справа, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

при этом пишут $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

Определение 7.7.2 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка для множества $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$. Говорят, что число A является пределом функции f в точке x_0 слева, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

при этом пишут $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

Замечание 7.7.1 *Аналогично тому, как сделано в пределе функции, определения обобщаются на случай* $A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Замечание 7.7.2 *Полезно заметить, что при* $x_0 = +\infty$ *или* $x_0 = -\infty$ *определение предела и так является односторонним.*

Замечание 7.7.3 *Для краткости часто применяют обозначения* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$.

Пример 7.7.1 *Пусть*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$, *а* $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$.

Пример 7.7.2 *Пусть* $y = 5^{\frac{1}{x}}$. *Так как при* $x \to 0+0$ *имеет место равенство* $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, *то легко показать, что*

$$\lim_{x\to 0+0} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Аналогично, так как $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, *то легко показать, что*

$$\lim_{x\to 0-0} 5^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Теорема 7.7.1 (Критерий существования предела функции)
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ *и* x_0 – *предельная точка для множеств* $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$ *и* $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

в частности,

$$\forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$. Аналогично,

$$\forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$.
Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists\delta_1 > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\exists\delta_2 > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда

$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\square$

7.8 Критерий Коши существования предела функции

Теорема 7.8.1 (Критерий Коши) *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка для E. Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in E : 0 < |x' - x_0| < \delta,$$
$$0 < |x'' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $x', x'' \in E : 0 < |x_0 - x'| < \delta, 0 < |x_0 - x''| < \delta$, тогда

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \leq$$

$$\leq |(f(x') - A)| + |(f(x'') - A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in E : 0 < |x' - x_0| < \delta,$$

$$0 < |x'' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Пусть x_n – последовательность такая, что $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тогда

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - x_0| < \delta,$$

а значит при $n > n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ выполняется также и $0 < |x_{n+p} - x_0| < \delta$, а значит $|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon$, что означает, что последовательность $f(x_n)$

фундаментальна, а значит имеет предел (согласно критерию Коши для последовательностей). Тем самым доказано, что для любой последовательности, удовлетворяющей условиям $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность $f(x_n)$ сходится.
Теперь нужно показать, что все эти пределы одинаковы, для этого можно предположить (от противного), что $x_n^1 \in E$, $x_n^1 \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = x_0$, $x_n^2 \in E$, $x_n^2 \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = x_0$, но

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^1) = A_1 \neq A_2 = \lim_{n\to\infty} f(x_n^2).$$

Составив последовательность

$$x_n^3 = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \ldots, x_n^1, x_n^2, \ldots\}$$

видно, что $x_n^3 \in E$, $x_n^3 \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^3 = x_0$. С одной стороны, по только что доказанному выше, $f(x_n^3)$ сходится, а с другой стороны

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{2k-1}^3) = A_1 \neq A_2 = \lim_{k\to\infty} f(x_{2k}^3).$$

Противоречие. □

7.9 Предел монотонной функции

Определение 7.9.1 *Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ возрастает на E, если*

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Определение 7.9.2 *Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ не убывает на E, если*

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Определение 7.9.3 *Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ убывает на E, если*

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Определение 7.9.4 *Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ не возрастает на E, если*

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Определение 7.9.5 *Про возрастающую (убывающую, не убывающую, не возрастающую) функцию также говорят, что она монотонна.*

Теорема 7.9.1 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $s = \sup E$ ($i = \inf E$) – предельная для E. Для того чтобы неубывающая (невозрастающая) функция f имела предел при $x \to s$ ($x \to i$) необходимо и достаточно, чтобы функция f была ограничена сверху (снизу). Иначе предел равен $+\infty$ ($-\infty$).*

Доказательство. Пусть функция не убывает.. Необходимость следует из того, что функция, имеющая предел, ограничена, а поскольку f – неубывающая на E, то имеет место ограниченность сверху.
Достаточность. Пусть $A = \sup\limits_{x \in E} f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно определению супремума, $\exists x_0 \in E$, что $A - \varepsilon < f(x_0) \le A$. В силу неубывания f на E, при $x > x_0, x \in E$ имеем $A - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le A$. Тем самым, $\lim\limits_{x \to s} f(x) = A$. □

7.10 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 7.10.1 *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Определение 7.10.2 *Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty.$$

Лемма 7.10.1 (О связи бесконечно малой и бесконечно большой)
Пусть $\beta(x) : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно большая при $x \to x_0$. Тогда $\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.
Обратно, пусть $\alpha(x) : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ и $\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \alpha(x) \neq 0$. Тогда $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x \to x_0$.

Доказательство. Первое утверждение. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\beta(x)| > \frac{1}{\varepsilon},$$

откуда

$$|\alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение.
Второе утверждение. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 > 0, \delta_1 < \delta : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Так как на множестве $x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1$ выполнено, что $\alpha(x) \neq 0$, то определена функция $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ и

$$\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

то есть $\beta(x)$ – бесконечно большая при $x \to x_0$. $\square$

7.11 Свойства бесконечно малых функций

В следующей теореме отмечены свойства бесконечно малых.

Теорема 7.11.1 *Пусть $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, тогда:*

1. *Функция $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.*
2. *Функция $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.*
3. *Если функция $\theta(x) : E \to \mathbb{R}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$, тогда функция $\alpha(x) \cdot \theta(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.*

Доказательство. Первые два пункта немедленно следуют из теоремы об арифметических операциях над пределами.
3. Согласно условию,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in E, x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\theta(x)| \leq C.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists \delta_1 < \delta : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Тогда при $x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_1$ выполняется

$$|\theta(x) \cdot \alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство. $\square$

Пример 7.11.1 *Вычислить предел*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Предел $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$ не существует. В то же время, $|\sin x| < 1$ при $x \in \mathbb{R}$, а значит функция $\sin x$ является ограниченной. Кроме того, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, *значит функция $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$. Тогда, согласно теореме,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Теорема 7.11.2 (О связи функции, ее предела и бесконечно малой) *Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 – предельная для E, тогда*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, а значит

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначив $\alpha(x) = f(x) - A$ получается определение того, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ и представление $f(x) = A + \alpha(x)$.
Достаточность. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x\to x_0} A + \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

□

7.12 Контрольные вопросы и задачи

1. Докажите арифметические свойства пределов, не используя непосредственно соответствующие свойства для пределов последовательности.

2. Докажите теорему о сжатой переменной, не используя непосредственно соответствующую теорему для последовательности.

3. Проиллюстрируйте критерий Коши существования предела функции рисунком.

4. Сформулируйте все недостающие определения предела функции.

5. Сформулируйте определение предела функции по Гейне, используя кванторы.