13 апреля

Дз №6

1. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ ~~$x\to+\infty$~~

Ис-ть на равн. сх-ть при $x\to+\infty$

на: $E_1=(-a,a)$ $E_2=(a,+\infty)$

E_1: $|f(x,y)|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{xy}{x^2+\cancel{y^2}}\right|=\left|\frac{y}{x}\right|\leq\left|\frac{a}{x}\right|\xrightarrow[x\to\infty]{}0$

$\Rightarrow f(x,y)\rightrightarrows$ на E_1 при $x\to+\infty$

E_2: $]\ x=n,\ y=n$

$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|=\frac{1}{2}\ \frac{n^2}{2n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}=\varepsilon\Rightarrow$ нет равн. сх-ти, но есть сх-ть на E_2

($f(x,y)\to0$ при $x\to+\infty$ на $\mathbb{R}$)

3. $\int\limits_0^\infty\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}$ $E_1=(-\infty;0]$

$E_2=[0;+\infty)$

E_1: $|f(x,\alpha)|=\left|\frac{1}{4+(x-\alpha)^6}\right|\leq\frac{1}{4+x^6}=g(x)$

$\int\limits_0^\infty g(x)dx\to0\Rightarrow$ на E_1 $\int\limits_0^\infty f(x,\alpha)dx\rightrightarrows$

по Вейерштрассу

E_2: Док-м, что нет равн. сх-ти по кр. Коши

$\forall B \ \exists n \geq B$] $\xi_1 = n$, $\xi_2 = n+1$, $\alpha = n+1$ ($\alpha \in E_2$)

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6} \geq \frac{1}{4+(n+1-\alpha)^6} = \frac{1}{4} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ нет. равн. сх-ти на E_2.

4. $I(\alpha)=\int\limits_1^{\infty} \frac{\alpha^2 \cos(\alpha x)}{x+\alpha^2}\, dx$ на $E = \mathbb{R}$

$f(x,\alpha) = \alpha \cos(\alpha x)$

$F(x,\alpha) = \sin(\alpha x) \leq 1$

$g(x,\alpha) = \frac{\alpha}{x+\alpha^2}$

$g(x,\alpha) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall \alpha \Rightarrow g(x,\alpha) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} 0$

$g'_x \leq 0$

Сл-но, $I(\alpha) \rightrightarrows$ на E.

Д-м, что $g(x,\alpha) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{1}{\varepsilon^2} : \forall x \geq \delta \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \left|\frac{\alpha}{x+\alpha^2}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{\alpha}{x+\alpha^2}\right| < \varepsilon \iff \frac{|\alpha|}{x+|\alpha|^2} < \varepsilon$ $\cancel{\frac{1}{\varepsilon^2}}$

$\frac{|\alpha|}{x+|\alpha|^2} \leq \frac{|\alpha|}{\frac{1}{\varepsilon^2}+|\alpha|^2} = \frac{\varepsilon^2|\alpha|}{1+\varepsilon^2|\alpha|^2} < \varepsilon$

$\varepsilon^2|\alpha| < \varepsilon + \varepsilon^3|\alpha|^2$

$\varepsilon^2|\alpha|^2 - \varepsilon|\alpha| + 1 > 0$

$\left(\varepsilon|\alpha| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

Верно $\forall \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x,\alpha) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} 0$

$g'_x \leq 0$

Сл-но, $I(\alpha) \rightrightarrows$ на E

5.

$$F(\alpha) = \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx \qquad E = (0; +\infty)$$

] $\alpha \geq a > 0$

$f(x,\alpha) = \cos x$ огр. первообр.

$g(x,\alpha) = \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^a} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g \rightrightarrows 0$ на $[a, +\infty)$, $a > 0$

$\Rightarrow F(\alpha)$ сх-ся равномерно на $[a, +\infty)$

Непр. $f(x, \overset{\alpha}{\cancel{y}}) = \frac{\cos x}{x^{\cancel{y}\alpha}}$ $\forall x \geq 1$, $\cancel{y}\ \alpha \geq a > 0$

$\Rightarrow f(x,\alpha)$ непр. при $\alpha = 0$

т. е. $F(\alpha)$ $\forall \alpha \in (0; +\infty)$

6.

a) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) =$

$= \cancel{B\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi} \quad B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) =$

$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{8}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{8}$ $\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}}$

б) $I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}(1+x)}\,dx = \cancel{I(y)}$ сх – ся

$\cancel{F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln \alpha x}{\sqrt[4]{x}(1+x)}} \qquad \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)} \cancel{y} x^{y-1}\,dx$

$\cancel{F' = \int_0^\infty \frac{1}{x^2\alpha\sqrt[4]{x}(1+x)}}\,dx$

$F(y) = \int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{1+x}\,dx \qquad F'(y) = \int_0^\infty \frac{\ln x \cdot x^{y-1}}{(1+x)}\,dx = I\left(\frac{3}{4}\right)$

$F(y) = B(y, 1-y) = \frac{\pi}{\sin y\pi}$

$F'(y) = -\frac{\pi^2 \cos y\pi}{\sin^2 y\pi}$

$F'\left(y\,\frac{3}{4}\right) = -\frac{\pi^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \pi^2\sqrt{2} = I$

$I(y) \Rightarrow$ было на практике от 28 марта.

2. $I(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \, dx$

$I'(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x + 1} \underset{t = \operatorname{tg} x}{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(\alpha^2 t^2 + 1)(1 + t^2)} =$

$= \frac{\alpha \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg}(x)) - x}{\alpha^2 - 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\alpha + 2}$

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln|\alpha + 1| + C = \frac{\pi}{2} \ln|\alpha + 1|$

$I(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\left| \frac{1}{(\alpha^2 t^2 + 1)(1 + t^2)} \right| \leq \frac{1}{1 + t^2}$

$\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1 + t^2} \, dt = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}$ сх-се $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x + 1}$ сх-се равн