



# Kerncurriculum gymnasiale Oberstufe



A large, semi-transparent watermark-style illustration of a person swimming in blue water, viewed from behind, with their arms extended forward and legs kicking. The background of the entire page transitions from light blue at the top to dark blue at the bottom.

**MATHEMATIK**  
Ausgabe 2024

**Impressum****Herausgeber:**

Hessisches Ministerium für Kultus, Bildung und Chancen (HMKB)  
Luisenplatz 10  
65185 Wiesbaden  
Telefon: 0611 368-0  
E-Mail: [poststelle.hmkb@kultus.hessen.de](mailto:poststelle.hmkb@kultus.hessen.de)  
Internet: <https://kultus.hessen.de>

**Stand:**

Ausgabe 2024

## Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung .....	4
<b>1 Die gymnasiale Oberstufe und das berufliche Gymnasium.....</b>	<b>5</b>
1.1 Ganzheitliches Lernen und Kompetenzorientierung in der gymnasialen Oberstufe und dem beruflichen Gymnasium.....	5
1.2 Strukturelemente des Kerncurriculums .....	7
1.3 Überfachliche Kompetenzen .....	9
<b>2 Bildungsbeitrag und didaktische Grundlagen des Faches .....</b>	<b>12</b>
2.1 Beitrag des Faches zur Bildung .....	12
2.2 Kompetenzmodell .....	12
2.3 Kompetenzbereiche (allgemeine mathematische Kompetenzen) .....	13
2.4 Strukturierung der Fachinhalte (Leitideen) .....	15
2.5 Digitale Mathematikwerkzeuge .....	18
<b>3 Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte .....</b>	<b>20</b>
3.1 Einführende Erläuterungen .....	20
3.2 Bildungsstandards (allgemeine mathematische Kompetenzen) .....	21
3.3 Kurshalbjahre und Themenfelder .....	25

**Hinweis:** Anregungen zur Umsetzung des Kerncurriculums im Unterricht sowie weitere Materialien abrufbar im Internet unter: [Kerncurricula | kultus.hessen.de](http://Kerncurricula | kultus.hessen.de)

## **Vorbemerkung**

Das Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe und das berufliche Gymnasium trat zum Schuljahr 2016/17 in Kraft und ist seither Grundlage eines kompetenzorientierten Oberstufenunterrichts zur Vorbereitung auf das hessische Landesabitur. Den Fächern Mathematik, Deutsch und den fortgeführten Fremdsprachen (Englisch, Französisch) liegen dabei die Bildungsstandards nach dem Beschluss der Kultusministerkonferenz (KMK) vom 18.10.2012 zugrunde. Den naturwissenschaftlichen Fächern Biologie, Chemie und Physik liegen die Bildungsstandards nach dem Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.06.2020 zugrunde. Die Politischen Vorhaben zur „Ländervereinbarung über die gemeinsame Grundstruktur des Schulwesens und die gesamtstaatliche Verantwortung der Länder in zentralen bildungspolitischen Fragen vom 15.10.2020 (Beschluss der KMK vom 15.10.2020) in Verbindung mit der Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe und der Abiturprüfung (Beschluss der KMK vom 07.07.1972 in der Fassung vom 06.06.2024) bedingen eine Ausweitung der für das schriftliche Abitur prüfungsrelevanten Themen und Inhalte auf das Kurshalbjahr Q4, das vor den Osterferien endet.

Dies macht eine Anpassung der Kerncurricula der gymnasialen Oberstufe in allen Abiturprüfungsfächern notwendig. Die Änderungen betreffen die inhaltliche Anschlussfähigkeit der Q4 sowie gegebenenfalls notwendige Anpassungen in den vorherigen Kurshalbjahren.

## 1 Die gymnasiale Oberstufe und das berufliche Gymnasium

### 1.1 Ganzheitliches Lernen und Kompetenzorientierung in der gymnasialen Oberstufe und dem beruflichen Gymnasium

Das Ziel der gymnasialen Oberstufe und des beruflichen Gymnasiums ist die Allgemeine Hochschulreife, die zum Studium an einer Hochschule berechtigt und auch den Weg in eine berufliche Ausbildung ermöglicht. Lernende, die die gymnasiale Oberstufe besuchen, wollen auf die damit verbundenen Anforderungen vorbereitet sein. Erwarten können sie daher einen Unterricht, der sie dazu befähigt, Fragen nach der Gestaltung des eigenen Lebens und der Zukunft zu stellen und orientierende Antworten zu finden. Sie benötigen Lernangebote, die in sinnstiftende Zusammenhänge eingebettet sind, in einem verbindlichen Rahmen eigene Schwerpunktsetzungen ermöglichen und Raum für selbstständiges Arbeiten schaffen. Mit diesem berechtigten Anspruch geht die Verpflichtung der Lernenden einher, die gebotenen Lerngelegenheiten in eigener Verantwortung zu nutzen und mitzugestalten. Lernen wird so zu einem stetigen, nie abgeschlossenen Prozess der Selbstbildung und Selbsterziehung, getragen vom Streben nach Autonomie, Bindung und Kompetenz. In diesem Verständnis wird die Bildung und Erziehung junger Menschen nicht auf zu erreichende Standards reduziert, vielmehr kann Bildung Lernende dazu befähigen, selbstbestimmt und in sozialer Verantwortung, selbstbewusst und resilient, kritisch-reflexiv und engagiert, neugierig und forschend, kreativ und genussfähig ihr Leben zu gestalten und wirtschaftlich zu sichern.

Für die Lernenden stellen die gymnasiale Oberstufe und das berufliche Gymnasium ein wichtiges Bindeglied zwischen einem zunehmend selbstständigen, dennoch geleiteten Lernen in der Sekundarstufe I auf der einen Seite und dem selbstständigen und eigenverantwortlichen Weiterlernen auf der anderen Seite dar, wie es mit der Aufnahme eines Studiums oder einer beruflichen Ausbildung verbunden ist. Auf der Grundlage bereits erworbener Kompetenzen zielt der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe und dem beruflichen Gymnasium auf eine vertiefte Allgemeinbildung, eine allgemeine Studierfähigkeit sowie eine fachlich fundierte wissenschaftspropädeutische Bildung. Dabei gilt es in besonderem Maße, flankiert durch Angebote zur beruflichen Orientierung, die Potenziale der Jugendlichen zu entdecken und zu stärken sowie die Bereitschaft zu beständigem Weiterlernen zu wecken, damit die jungen Erwachsenen selbstbewusste, ihre Neigungen und Stärken berücksichtigende Entscheidungen über ihre individuellen Bildungs-, Berufs- und Lebenswege treffen können. So bietet der Unterricht in der Auseinandersetzung mit ethischen Fragen die zur Bildung reflektierter Werthaltungen notwendigen Impulse – den Lernenden kann so die ihnen zukommende Verantwortung für Staat, Gesellschaft und das Leben zukünftiger Generationen bewusst werden. Auf diese Weise nehmen die gymnasiale Oberstufe und das berufliche Gymnasium den ihnen in den §§ 2 und 3 des Hessischen Schulgesetzes (HSchG) aufgegebenen Erziehungsauftrag wahr.

Das Lernen in der gymnasialen Oberstufe und dem beruflichen Gymnasium differenziert die Inhalte und die Lern- und Arbeitsweisen der Sekundarstufe I weiter aus. So zielt der Unterricht auf den Erwerb profunden Wissens sowie auf die Vertiefung beziehungsweise Erweiterung von Sprachkompetenz. Der Unterricht fördert Team- und Kommunikationsfähigkeit, lernstrategische und wissenschaftspropädeutische Fähigkeiten und Fertigkeiten, um zunehmend selbstständig lernen zu können, sowie die Fähigkeit, das eigene Denken und Handeln zu reflektieren. Ein breites, in sich gut organisiertes und vernetztes sowie in unterschiedlichen Anwendungssituationen erprobtes Orientierungswissen hilft dabei, unterschiedliche, auch interkulturelle Horizonte des Weltverständens zu erschließen. Aus dieser Handlungsorientierung leiten

sich die didaktischen Aufgaben der gymnasialen Oberstufe und des beruflichen Gymnasiums ab:

- sich aktiv und selbstständig mit bedeutsamen Gegenständen und Fragestellungen zentraler Wissensdomänen auseinanderzusetzen,
- wissenschaftlich geprägte Kenntnisse für die Bewältigung persönlicher und gesellschaftlicher Herausforderungen zu nutzen,
- Inhalte und Methoden kritisch zu reflektieren und daraus folgend Erkenntnisse und Erkenntnisweisen auszuwerten und zu bewerten,
- in kommunikativen Prozessen sowohl aus der Perspektive aufgeklärter Laien als auch aus der Expertenperspektive zu agieren.

Lernende begegnen der Welt auf unterschiedliche Art und Weise. Ganzheitliche schulische Bildung eröffnet den Lernenden daher unterschiedliche Dimensionen von Erkenntnis und Verstehen. Sie reflektieren im Bildungsprozess verschiedene „Modi der Weltbegegnung und -erschließung“<sup>1</sup>, die sich – in flexibler beziehungsweise mehrfacher Zuordnung – in den Unterrichtsfächern und deren Bezugswissenschaften wiederfinden:

- (1) eine kognitiv-instrumentelle Modellierung der Welt (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften oder Technik),
- (2) ästhetisch-expressive Begegnung und Gestaltung (Sprache/Literatur, Musik/bildende und theatrale Kunst/physische Expression)
- (3) normativ-evaluative Auseinandersetzung mit Wirtschaft und Gesellschaft (Geschichte, Politik, Ökonomie, Recht, Wirtschaft, Gesundheit und Soziales)
- (4) einen Modus, in dem „Probleme konstitutiver Rationalität“ behandelt werden und über „die Bedingungen menschlicher Erkenntnis und menschlichen In-der-Welt-Seins“ nachgedacht wird (Religion, Ethik und Philosophie).

Jeder dieser gleichrangigen Modi bietet also eine eigene Art und Weise, die Wirklichkeit zu konstituieren – aus einer jeweils besonderen Perspektive, mit den jeweils individuellen Erschließungsmustern und Erkenntnisräumen. Den Lernenden eröffnen sich dadurch Möglichkeiten für eine mehrperspektivische Betrachtung und Gestaltung von Wirklichkeit, die durch geeignete Lehr-Lern-Prozesse initiiert werden.

Die Grundstruktur der Allgemeinbildung besteht in der Verschränkung der oben genannten Sprachkompetenzen und lernstrategischen Fähigkeiten mit den vier „Modi der Weltbegegnung und -erschließung“ und gibt damit einen Orientierungsrahmen für kompetenzorientierten Unterricht auf Basis der KMK-Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife. Mit deren Erreichen dokumentieren die Lernenden, dass sie ihre Kompetenzen und fundierten Fachkenntnisse in innerfachlichen, fachübergreifenden und fächerverbindenden Zusammenhängen verständig nutzen können.

In der Umsetzung eines ganzheitlichen Bildungsanspruchs verbinden sich sowohl Erwartungen der Schule an die Lernenden als auch Erwartungen der Lernenden an die Schule.

---

<sup>1</sup> Hier und im Folgenden adaptiert aus Jürgen Baumert: Deutschland im internationalen Bildungsvergleich, in: Nelson Killius und andere (Herausgeber), Die Zukunft der Bildung, Frankfurt am Main: Suhrkamp 2002, Seite 113, und Bernhard Dressler: Bildung und Differenzkompetenz, in: Österreichisches Religionspädagogisches Forum 2/2021, Seite 216.

Den Lehrkräften kommt daher die Aufgabe zu,

- Lernende darin zu unterstützen, sich die Welt aktiv und selbstbestimmt fortwährend lernend zu erschließen, eine Fragehaltung zu entwickeln sowie sich reflexiv und zunehmend differenziert mit den unterschiedlichen „Modi der Weltbegegnung und Welterschließung“ zu beschäftigen,
- Lernende mit Respekt, Geduld und Offenheit sowie durch Anerkennung ihrer Leistungen und förderliche Kritik darin zu unterstützen, in einer komplexen Welt mit Herausforderungen wie fortschreitender Technisierung, beschleunigtem globalen Wandel, der Notwendigkeit erhöhter Flexibilität und Mobilität und diversifizierten Formen der Lebensgestaltung angemessen umgehen zu lernen sowie im Sinne des Allgemeinen Gleichbehandlungsgesetzes (AGG) kultureller Heterogenität und weltanschaulich-religiöser Pluralität mit Offenheit und Toleranz zu begegnen,
- Lernen in Gemeinschaft und das Schulleben mitzugestalten.

Aufgabe der Lernenden ist es,

- das eigene Lernen und die Lernumgebungen aktiv mitzugestalten sowie eigene Fragen und Interessen, Fähigkeiten und Fertigkeiten bewusst einzubringen und zu mobilisieren; schulische Lernangebote als Herausforderungen zu verstehen und zu nutzen; dabei Disziplin und Durchhaltevermögen zu beweisen; sich zu engagieren und sich anzustrengen,
- Lern- und Beurteilungssituationen zum Anlass zu nehmen, ein an Kriterien orientiertes Feedback einzuholen, konstruktiv mit Kritik umzugehen, sich neue Ziele zu setzen und diese konsequent zu verfolgen,
- im Sinne des Allgemeinen Gleichbehandlungsgesetzes (AGG) kultureller Heterogenität und weltanschaulich-religiöser Pluralität mit Offenheit und Toleranz zu begegnen,
- Lernen in Gemeinschaft und das Schulleben mitzugestalten.

Die Entwicklung von Kompetenzen wird möglich, wenn Lernende sich mit komplexen und herausfordernden Aufgabenstellungen, die Problemlösen erfordern, auseinandersetzen, wenn sie dazu angeleitet werden, ihre eigenen Lernprozesse zu steuern und an der Gestaltung des Unterrichts aktiv mitzuwirken. Solchermaßen gestalteter Unterricht bietet Lernenden Arbeitsformen und Strukturen, in denen sie wissenschaftspropädeutisches und berufsbezogenes Arbeiten in realitätsnahen Kontexten erproben und erlernen können. Es bedarf der Bereitstellung einer motivierenden Lernumgebung, die neugierig macht auf die Entdeckung bisher unbekannter Wissens, in welcher die Suche nach Verständnis bestärkt und Selbstreflexion gefördert wird. Und es bedarf Formen der Instruktion, der Interaktion und Kommunikation, die Diskurs und gemeinsame Wissensaneignung, und auch das Selbststudium und die Konzentration auf das eigene Lernen ermöglichen.

## 1.2 Strukturelemente des Kerncurriculums

Das Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe und das berufliche Gymnasium formuliert Bildungsziele für fachliches (Bildungsstandards) und überfachliches Lernen sowie inhaltliche Vorgaben als verbindliche Grundlage für die Prüfungen im Rahmen des Landesabiturs. Die Leistungserwartungen werden auf diese Weise für alle, Lehrende wie Lernende, transparent und nachvollziehbar. Das Kerncurriculum ist in mehrfacher Hinsicht anschlussfähig: Es nimmt zum einen die Vorgaben in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (EPA) und den Beschluss der Kultusministerkonferenz (KMK) vom 18.10.2012 zu den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife in den Fächern Deutsch und Mathematik

sowie in der fortgeführten Fremdsprache (Englisch, Französisch) und vom 18.06.2020 in den naturwissenschaftlichen Fächern (Biologie, Chemie und Physik) und die Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe und der Abiturprüfung (Beschluss der KMK vom 07.07.1972 in der Fassung vom 16.03.2023) auf. Zum anderen setzt sich in Anlage und Aufbau des Kerncurriculums die Kompetenzorientierung, wie bereits im Kerncurriculum für die Sekundarstufe I umgesetzt, konsequent fort – modifiziert in Darstellungsformat und Präzisionsgrad der verbindlichen inhaltlichen Vorgaben gemäß den Anforderungen der gymnasialen Oberstufe und des beruflichen Gymnasiums und mit Blick auf die Abiturprüfung.

Das pädagogisch-didaktische Konzept des ganzheitlichen Lernens und der Kompetenzorientierung in der gymnasialen Oberstufe und dem beruflichen Gymnasium spiegelt sich in den einzelnen Strukturelementen wider:

**Überfachliche Kompetenzen** (Abschnitt 1.3): Bildung, nicht nur als individueller, sondern auch sozialer Prozess fortwährender Selbstbildung und Selbsterziehung verstanden, zielt auf fachlichen und überfachlichen Kompetenzerwerb gleichermaßen. Daher sind im Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe und für das berufliche Gymnasium neben den fachlichen Leistungserwartungen zunächst die wesentlichen Dimensionen und Aspekte überfachlicher Kompetenzentwicklung beschrieben.

**Bildungsbeitrag und didaktische Grundlagen des Faches** (Abschnitt 2): Der „Beitrag des Faches zur Bildung“ (Abschnitt 2.1) beschreibt den Bildungsanspruch und die wesentlichen Bildungsziele des Faches. Dies spiegelt sich in den Kompetenzbereichen (Abschnitt 2.2 beziehungsweise Abschnitt 2.3 in den Naturwissenschaften, in Mathematik und Informatik) und der Strukturierung der Fachinhalte (Abschnitt 2.3 beziehungsweise Abschnitt 2.4 Naturwissenschaften, Mathematik, Informatik) wider. Die didaktischen Grundlagen, durch den Bildungsbeitrag fundiert, bilden ihrerseits die Bezugsfolie für die Konkretisierung in Bildungsstandards und Unterrichtsinhalten.

**Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte** (Abschnitt 3): Bildungsstandards weisen die Erwartungen an das fachbezogene Können der Lernenden am Ende der gymnasialen Oberstufe und des beruflichen Gymnasiums aus (Abschnitt 3.2). Sie konkretisieren die Kompetenzbereiche und zielen grundsätzlich auf kritische Reflexionsfähigkeit sowie den Transfer beziehungsweise das Nutzen von Wissen für die Bewältigung persönlicher und gesellschaftlicher Herausforderungen.<sup>2</sup>

Die Lernenden setzen sich mit geeigneten und repräsentativen Lerninhalten und Themen, deren Sachaspekten und darauf bezogenen Fragestellungen auseinander und entwickeln auf diese Weise die in den Bildungsstandards formulierten fachlichen Kompetenzen. Entsprechend gestaltete Lernarrangements zielen auf den Erwerb jeweils bestimmter Kompetenzen aus in der Regel unterschiedlichen Kompetenzbereichen. Auf diese Weise können alle Bildungsstandards mehrfach und in unterschiedlichen inhaltlichen Zusammenhängen erarbeitet werden. Hieraus erklärt sich, dass Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte nicht bereits im Kerncurriculum miteinander verknüpft werden, sondern dies erst sinnvoll auf der Unterrichtsebene erfolgen kann.

Die Lerninhalte sind in unmittelbarer Nähe zu den Bildungsstandards in Form verbindlicher Themen der Kurshalbjahre, gegliedert nach Themenfeldern, ausgewiesen, (Abschnitt 3.3).

<sup>2</sup> In den sieben Fächern, für die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der KMK vom 18.10.2012 für die Fächer Deutsch, Mathematik sowie die fortgeführten Fremdsprachen Englisch und Französisch und vom 18.06.2020 für die naturwissenschaftlichen Fächer Biologie, Chemie, Physik) vorliegen, werden diese in der Regel wörtlich übernommen.

Hinweise zur Verbindlichkeit der Themenfelder finden sich im einleitenden Text zu Abschnitt 3.3 sowie in jedem Kurshalbjahr. Die Thematik eines Kurshalbjahres wird jeweils in einem einführenden Text skizziert und begründet. Im Sinne eines Leitgedankens stellt er die einzelnen Themenfelder in einen inhaltlichen Zusammenhang und zeigt Schwerpunktsetzungen für die Kompetenzanbahnung auf.

### 1.3 Überfachliche Kompetenzen

Für Lernende, die nach dem erfolgreichen Abschluss der gymnasialen Oberstufe oder des beruflichen Gymnasiums ein Studium oder eine berufliche Ausbildung beginnen und die damit verbundenen Anforderungen erfolgreich meistern wollen, kommt dem Erwerb all jener Kompetenzen, die über das rein Fachliche hinausgehen, eine fundamentale Bedeutung zu. Nur in der Verknüpfung mit personalen und sozialen Kompetenzen können sich fachliche Expertise und nicht zuletzt auch die Bereitschaft und Fähigkeit, für Demokratie und Teilhabe sowie zivilgesellschaftliches Engagement und einen verantwortungsvollen Umgang mit den natürlichen Ressourcen einzustehen, adäquat entfalten.

Daher liegt es in der Verantwortung aller Fächer, dass Lernende im fachgebundenen wie auch im projektorientiert ausgerichteten fachübergreifenden und fächerverbindenden Unterricht ihre überfachlichen Kompetenzen weiterentwickeln können, auch im Hinblick auf eine kompetenz- und interessenorientierte sowie praxisbezogene Studien- und Berufsorientierung. Dabei kommt den Fächern Politik und Wirtschaft sowie Deutsch eine besondere Verantwortung zu, Lernangebote bereitzustellen, die den Lernenden die Möglichkeit eröffnen, ihre Interessen und Neigungen zu entdecken und die gewonnenen Informationen mit Blick auf ihre Ziele zu nutzen.

Überfachliche Kompetenzen umspannen ein weites Spektrum. Es handelt sich dabei um Fähigkeiten und Fertigkeiten genauso wie um Haltungen und Einstellungen. Mit ihnen stehen kulturelle Werkzeuge zur Verfügung, in denen sich auch normative Ansprüche widerspiegeln.

Im Folgenden werden die anzustrebenden überfachlichen Kompetenzen als sich ergänzende und ineinander greifende gleichrangige Dimensionen beschrieben, dem Prinzip „vom Individuum zur Gemeinschaft“ entsprechend:

**a) Personale Kompetenzen:** eigenständig und verantwortlich handeln und entscheiden; selbstbewusst mit Irritationen umgehen, Dissonanzen aushalten (Ambiguitätstoleranz); widerstandsfähig mit Enttäuschungen und Rückschlägen umgehen; sich zutrauen, die eigene Person und inneres Erleben kreativ auszudrücken; divergent denken; fähig sein zu naturbezogenem sowie ästhetisch ausgerichtetem Erleben; sensibel sein für eigene Körperlichkeit und psychische Gesundheit, diese äußern.

Dazu gehören

**emotionale Kompetenzen:** den eigenen emotionalen Zustand erkennen, adressaten- und situationsadäquat ausdrücken können und damit umgehen; aversive oder belastende Emotionen bewältigen (Emotionsregulation); emotionale Selbstwirksamkeit; empathisch auf Emotionen anderer eingehen, anderen vertrauen.

**Motivation/Lernbereitschaft:** sich (auf etwas) einlassen; für eine Sache fiebern; sich motiviert fühlen und andere motivieren; von epistemischer Neugier geleitete Fragen formulieren; sich vertiefen, etwas herausbekommen, einer Sache/Fragestellung auf den Grund gehen; (etwas) durchhalten, etwas vollenden; eine Arbeitshaltung kultivieren (sich Arbeitsschritte vornehmen, Arbeitserfolg kontrollieren).

**Lernkompetenz / wissenschaftspropädeutische Kompetenzen:** eigenes Lernen reflektieren („Lernen lernen“) und selbst regulieren; Lernstrategien sowohl der Zielsetzung und Zielbindung als auch der Selbstbeobachtung (*self-monitoring*) anwenden; Probleme im Lernprozess wahrnehmen, analysieren und Lösungsstrategien entwickeln; eine positive Fehler-Kultur aufbauen; sich im Spannungsverhältnis zwischen Fremd- und Selbstbestimmung orientieren; fachliches Wissen nutzen und bewerten und dabei seine Perspektivität reflektieren, dabei verschiedene Stufen von Erkenntnis und Wissen erkennen und zwischen diesen differenzieren, auf einem entwickelten/gesteigerten Niveau abstrahieren; in Modellen denken und modellhafte Vorstellungen als solche erkennen; Verfahren und Strategien der Argumentation anwenden; Zitierweisen beherrschen.

**Sprachkompetenzen (im Sinne eines erweiterten Sprachbegriffs):** unterschiedliche Zeichensysteme beherrschen (*literacy*): Verkehrssprache, Fachsprache, Mathematik, Fremdsprachen, Naturwissenschaften, musisch-künstlerische Fächer, symbolisch-analoges Sprechen (wie etwa in religiösen Kontexten), Ästhetik, Informations- und Kommunikationstechnologien; sich in den unterschiedlichen Symbol- und Zeichengefügen ausdrücken und verständigen; Übersetzungsleistungen erbringen: Verständigung zwischen unterschiedlichen Sprachniveaus und Zeichensystemen ermöglichen.

**b) Soziale Kompetenzen:** sich verständigen und kooperieren; Verantwortung übernehmen und Rücksichtnahme praktizieren; im Team agieren; Konflikte aushalten, austragen und konstruktiv lösen; andere Perspektiven einnehmen; von Empathie geleitet handeln; sich durchsetzen; Toleranz üben; Zivilcourage zeigen: sich einmischen und in zentralen Fragen das Miteinander betreffend Stellung beziehen.

Dazu gehören

**wertbewusste Haltungen:** um Kategorien wie Respekt, Gerechtigkeit, Fairness, Kostbarkeit, Eigentum und deren Stellenwert für das Miteinander wissen; ökologisch nachhaltig handeln; mit friedlicher Gesinnung im Geiste der Völkerverständigung handeln, ethische Normen sowie kulturelle und religiöse Werte kennen, reflektieren und auf dieser Grundlage eine Orientierung für das eigene Handeln gewinnen; demokratische Normen und Werthaltungen im Sinne einer historischen Weltsicht reflektieren und Rückschlüsse auf das eigene Leben in der Gemeinschaft und zum Umgang mit der Natur ziehen; selbstbestimmt urteilen und handeln.

**interkulturelle Kompetenz:** Menschen aus verschiedenen soziokulturellen Kontexten und Kulturen vorurteilsfrei sowie im Handeln reflektiert und offen begegnen; sich kulturell unterschiedlich geprägter Identitäten, einschließlich der eigenen, bewusst sein; die unverletzlichen und unveräußerlichen Menschenrechte achten und sich an den wesentlichen Traditionen der Aufklärung orientieren; wechselnde kulturelle Perspektiven einnehmen, empathisch und offen das Andere erleben.

Mit Blick auf gesellschaftliche Entwicklungen und die vielfältigen damit verbundenen Herausforderungen für junge Erwachsene zielt der Erwerb fachlicher und überfachlicher Kompetenzen insbesondere auf die folgenden **drei gesellschaftlichen Dimensionen**, die von übergreifender Bedeutung sind:

**Demokratie und Teilhabe/zivilgesellschaftliches Engagement:** sozial handeln, politische Verantwortung übernehmen; Rechte und Pflichten in der Gesellschaft wahrnehmen; sich ein-

mischen, mitentscheiden und mitgestalten; sich persönlich für Einzelne und/oder das Gemeinwohl engagieren (aktive Bürgerschaft); Fragen des Zusammenlebens der Geschlechter/Generationen/sozialen Gruppierungen/Kulturen reflektieren; Innovationspotenzial zur Lösung gesellschaftlicher Probleme des sozialen Miteinanders entfalten und einsetzen; entsprechende Kriterien des Wünschenswerten und Machbaren differenziert bedenken.

**Nachhaltigkeit/Lernen in globalen Zusammenhängen:** globale Zusammenhänge bezogen auf ökologische, soziale und ökonomische Fragestellungen wahrnehmen, analysieren und darüber urteilen; Rückschlüsse auf das eigene Handeln ziehen; sich mit den Fragen, die im Zusammenhang des wissenschaftlich-technischen Fortschritts aufgeworfen werden, auseinandersetzen; sich dem Diskurs zur nachhaltigen Entwicklung stellen, sich für nachhaltige Entwicklung engagieren.

**Selbstbestimmtes Leben in der digitalisierten Welt:**

**Lernkompetenz:** digitale Werkzeuge zur Organisation von Lernprozessen nutzen (zum Beispiel Dateiablage, zielgerechte Nutzung von Programmen, Recherche, Gestaltung, Zugriff auf Arbeitsmaterialien über das Internet beziehungsweise schulische Intranet); digitale Bearbeitungswerzeuge handhaben und zur Ergebnisdarstellung nutzen; beim Lernen digital kommunizieren und sich vernetzen (zum Beispiel über Messengerdienste, Videochats) sowie sich gegenseitig unterstützen und sich dabei gegenseitig Lern- und Lösungsstrategien erklären. Medienkompetenz ist heutzutage genauso wichtig wie Lesen, Schreiben und Rechnen. Die Digitalisierung spielt dabei eine zentrale Rolle bei der Vermittlung von digitalen Medien und bereitet die Schüler auf die sich ständig verändernde Lebenswelt vor. Die prozessbezogenen Kompetenzen umfassen Fähigkeiten wie das Strukturieren und Modellieren, Implementieren, Kommunizieren und Darstellen sowie Begründen und Bewerten. Diese Kompetenzen bilden eine Grundlage für lebenslanges Lernen und die Anpassung an den Wandel in der Digitalisierung.

Die Lernenden sollen die Funktionsweise und Struktur von Informatiksystemen verstehen, diese konstruieren können und sich mit den Wechselwirkungen zwischen Digitalisierung, Medienerziehung und Gesellschaft auseinandersetzen. Dabei stellt der Umgang mit Informatiksystemen und Digitalisierungs-Werkzeugen eine grundlegende Qualifikation für die Teilhabe an der Gesellschaft und insbesondere in der Berufswelt dar. Prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen, wie zum Beispiel Daten und ihre Spuren, Computerkompetenz, algorithmisches Problemlösen und automatisierte Prozesse sind Bestandteil des Unterrichts.

**Personal/Sozial:** den Einfluss von digitaler Kommunikation auf eigenes Erleben, soziale Interaktion und persönliche Erfahrungen wahrnehmen und reflektieren; damit verbundene Chancen und Risiken erkennen; Unterschiede zwischen unmittelbaren persönlichen Erfahrungen und solchen in „digitalen Welten“ identifizieren; in der mediatisierten Welt eigene Bedürfnisse wahrnehmen und Interessen vertreten; Möglichkeiten und Risiken digitaler Umgebungen in unterschiedlichen Lebensbereichen (Alltag, soziale Beziehungen, Kultur, Politik) kennen, reflektieren und berücksichtigen: zum Beispiel in sozialen Medien; Umgangsregeln bei digitaler Interaktion kennen und anwenden; Urheberrechte wahren; auch im „online-Modus“ ethisch verantwortungsvoll handeln, das heißt unter anderem einen selbstbestimmten Umgang mit sozialen Netzwerken im Spannungsfeld zwischen Wahrung der Privatsphäre und Teilhabe an einer globalisierten Öffentlichkeit praktizieren.

## 2 Bildungsbeitrag und didaktische Grundlagen des Faches

### 2.1 Beitrag des Faches zur Bildung<sup>3</sup>

Der spezifische Beitrag des Faches Mathematik zu den in Abschnitt 1 beschriebenen Bildungszielen der gymnasialen Oberstufe besteht darin, jedem Lernenden drei Grunderfahrungen<sup>4</sup> zu ermöglichen, nämlich

- Erscheinungen der Welt um uns, aus Natur, Technik, Gesellschaft und Kultur mithilfe der Mathematik wahrzunehmen, zu verstehen und zu beurteilen (Mathematik als Werkzeug),
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenzulernen und zu begreifen (Mathematik als Strukturwissenschaft),
- in der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen Problemlösefähigkeiten zu erwerben, die über die Mathematik hinausgehen, insbesondere heuristische Fähigkeiten (Mathematik als Schule des Denkens).

### 2.2 Kompetenzmodell

Das Kompetenzmodell für das Unterrichtsfach Mathematik unterscheidet zwischen

- den **allgemeinen mathematischen Kompetenzen**, die wesentliche Bereiche mathematischen Arbeitens erfassen,
- den mathematischen **Leitideen**, die wesentliche inhaltliche Kernbereiche abdecken, sowie
- den **Anforderungsbereichen**, die den kognitiven Anspruch kompetenzbezogener Tätigkeiten beschreiben.

Allgemeine mathematische Kompetenzen beschreiben kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die zwar fachspezifisch geprägt, aber nicht an spezielle mathematische Inhalte gebunden sind. Sie können von den Lernenden allerdings nur in der aktiven Auseinandersetzung mit konkreten Fachinhalten erworben werden. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen manifestieren sich in jedem einzelnen mathematischen Inhalt, das heißt allgemeine mathematische Kompetenzen und Inhalte sind untrennbar miteinander verknüpft (in der Abbildung durch ein zweidimensionales Raster angedeutet). Es lässt sich erst dann vom hinreichenden Erwerb einer allgemeinen mathematischen Kompetenz sprechen, wenn diese in der Auseinandersetzung mit ganz unterschiedlichen Leitideen in allen drei Anforderungsbereichen erfolgreich eingesetzt werden kann.

Das Kompetenzmodell unterstützt die Übersetzung abstrakter Bildungsziele in konkrete Aufgabenstellungen und Unterrichtsvorhaben. Es stellt somit ein Bindeglied zwischen den Kompetenzen und den Aufgaben im Unterricht und in Prüfungssituationen dar. Die Unterscheidung in drei Dimensionen ist sowohl bei der Konstruktion neuer als auch bei der Analyse gegebener Aufgaben hilfreich.

<sup>3</sup> Teile der nachfolgenden Abschnitte sind in wörtlicher oder modifizierter Form den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012) entnommen.

<sup>4</sup> Winter, H.: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. GDM-Mitteilungen, Heft 61, 1995

Die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen und Kenntnisse sind dabei unverzichtbare Grundlage für die Arbeit in der Sekundarstufe II. Sie werden hier beständig vertieft und erweitert und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein.

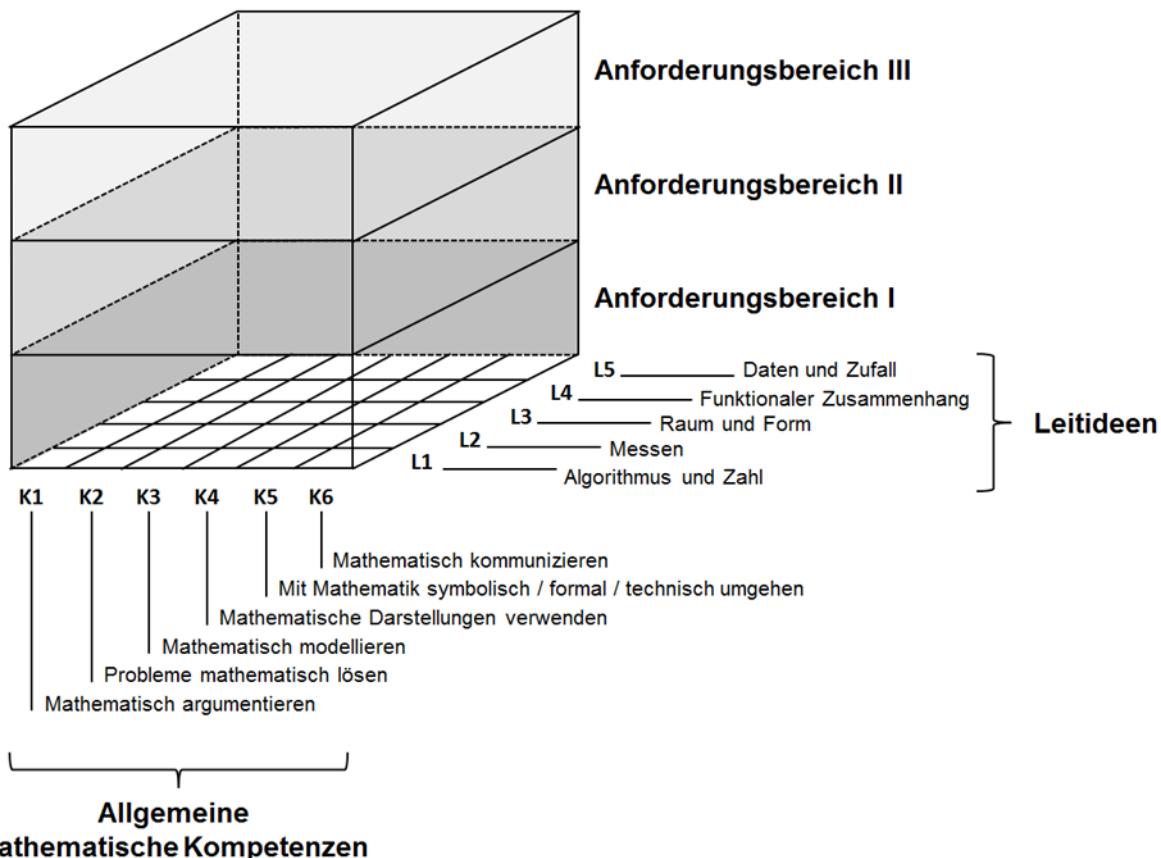


Abbildung: Kompetenzmodell (Hessische Lehrkräfteakademie 2024)

## 2.3 Kompetenzbereiche (allgemeine mathematische Kompetenzen)

Es werden sechs allgemeine mathematische Kompetenzen unterschieden, die das Spektrum mathematischen Arbeitens in der Sekundarstufe II in hinreichender Breite erfassen. Dabei ist es weder möglich noch beabsichtigt, diese Kompetenzen scharf voneinander abzugrenzen. Es ist vielmehr typisch für mathematisches Arbeiten, dass mehrere Kompetenzen im Verbund benötigt werden, wobei sich die verschiedenen Kompetenzen gegenseitig partiell durchdringen.

### Mathematisch argumentieren (K1)

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemesener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis hin zu formalen Beweisen. Typische Formulierungen, die auf die Kompetenz des Argumentierens hinweisen, sind beispielsweise „Begründen Sie!“, „Widerlegen Sie!“, „Gibt es?“ oder „Gilt das immer?“

**Probleme mathematisch lösen (K2)**

Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege. Das Spektrum reicht von der Anwendung bekannter bis hin zur Konstruktion komplexer und neuartiger Strategien. Heuristische Prinzipien, wie zum Beispiel „Skizze anfertigen“, „systematisch probieren“, „zerlegen und ergänzen“, „Symmetrien verwenden“, „Extremalprinzip“, „Invarianten finden“ sowie „vorwärts und rückwärts arbeiten“, werden gezielt ausgewählt und angewendet.

**Mathematisch modellieren (K3)**

Diese Kompetenz umfasst den Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation. Das Spektrum reicht von Standardmodellen (zum Beispiel bei linearen Zusammenhängen) bis hin zu komplexen Modellierungen.

**Mathematische Darstellungen verwenden (K4)**

Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln. Das Spektrum reicht von Standarddarstellungen – wie Wertetabellen – bis hin zu eigenen Darstellungen, die dem Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen dienen und die Argumentation und das Problemlösen unterstützen.

**Mit Mathematik symbolisch / formal / technisch umgehen (K5)**

Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten. Das Spektrum reicht hier von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis hin zu komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierenden Bewertung. Diese Kompetenz umfasst auch die Nutzung von Faktenwissen und grundlegendem Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen.

**Mathematisch kommunizieren (K6)**

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache. Das Spektrum reicht von der direkten Informationsentnahme aus Texten des Alltagsgebrauchs beziehungsweise vom Aufschreiben einfacher Lösungswege bis hin zum sinnentnehmenden Erfassen

fachsprachlicher Texte beziehungsweise zur strukturierten Darlegung oder Präsentation eigener Überlegungen. Das Erfüllen sprachlicher Anforderungen spielt bei dieser Kompetenz eine besondere Rolle.

### **Kompetenzerwerb in fachübergreifenden und fächerverbindenden Zusammenhängen**

Fachübergreifende und fächerverbindende Lernformen ergänzen fachliches Lernen in der gymnasialen Oberstufe und sind unverzichtbarer Bestandteil des Unterrichts (vergleiche § 7 Absatz 7 der Oberstufen- und Abiturverordnung (OAVO) in der jeweils geltenden Fassung). In diesem Zusammenhang gilt es insbesondere auch, die Kompetenzbereiche der Fächer zu verbinden und dabei zugleich die Dimensionen überfachlichen Lernens sowie die besonderen Bildungs- und Erziehungsaufgaben, erfasst in Aufgabengebieten (vergleiche § 6 Absatz 4 des Hessischen Schulgesetzes), zu berücksichtigen. So können Synergiemöglichkeiten ermittelt und genutzt werden. Für die Lernenden ist diese Vernetzung zugleich Voraussetzung und Bedingung dafür, Kompetenzen in vielfältigen und vielschichtigen inhaltlichen Zusammenhängen und Anforderungssituationen zu erwerben.

Damit sind zum einen Unterrichtsvorhaben gemeint, die mehrere Fächer gleichermaßen berühren und unterschiedliche Zugangsweisen der Fächer integrieren. So lassen sich zum Beispiel in Projekten – ausgehend von einer komplexen problemhaltigen Fragestellung – fachübergreifend und fächerverbindend und unter Bezugnahme auf die drei herausgehobenen überfachlichen Dimensionen komplexere inhaltliche Zusammenhänge und damit Bildungsstandards aus den unterschiedlichen Kompetenzbereichen der Fächer erarbeiten (vergleiche Abschnitt 1.3). Zum anderen können im Fachunterricht Themenstellungen bearbeitet werden, die – ausgehend vom Fach und einem bestimmten Themenfeld – auch andere, eher benachbarte Fächer berühren. Dies erweitert und ergänzt die jeweilige Fachperspektive und trägt damit zum vernetzten Lernen bei.

## **2.4 Strukturierung der Fachinhalte (Leitideen)**

Die Bewältigung mathematischer Problemsituationen erfordert das permanente Zusammenspiel von allgemeinen mathematischen Kompetenzen und mathematischen Inhalten. Insofern sind die in der Sekundarstufe II verbindlichen Inhalte immer im Kontext allgemeiner mathematischer Kompetenzen und deren Anforderungsbereichen zu sehen. Unter „Inhalten“ werden dabei insbesondere auch adäquate Vorstellungen verstanden, die ein Verständnis von mathematischen Inhalten erst konstituieren. Die mathematischen Inhalte werden jeweils übergreifenden Leitideen zugeordnet, die nicht auf bestimmte klassische mathematische Themenbereiche (Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Stochastik) begrenzt sind. Die Leitideen tragen damit zur Vernetzung dieser klassischen Sachgebiete bei.

Nachfolgend werden die einzelnen Leitideen näher erläutert. Sie bilden den strukturellen Hintergrund des Unterrichts, um ein tragfähiges Gerüst für Wissensnetze aufzubauen. Die genannten inhaltlichen Bezüge sind immer in Weiterführung der Inhalte im Unterricht der Sekundarstufe I zu sehen.

### Algorithmus und Zahl (L1)

Diese Leitidee verallgemeinert zum einen den Zahlbegriff, wie er in der Sekundarstufe I verwendet wird, zu Tupeln und Matrizen einschließlich zugehöriger Operationen. Die Leitidee erweitert zum anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden. Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden mathematischer Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Anfänge der Analysis und die Lineare Algebra.

### Messen (L2)

Diese Leitidee erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen, wie es aus dem Unterricht der Sekundarstufe I bekannt ist, um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden. Dies betrifft sowohl funktionale Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände als auch Größen im Koordinatensystem wie Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumina. Weiter umfasst die Leitidee stochastische Kenngrößen, die als Ergebnisse von Messprozessen im weiteren Sinne aufgefasst werden.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Analysis, die Analytische Geometrie und die Stochastik.

### Raum und Form (L3)

Diese Leitidee ist auf die Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens, wie es die Lernenden in der Sekundarstufe I ausgebildet haben, gerichtet. Sie beinhaltet den Umgang mit Objekten im Raum. Es geht hier sowohl um Eigenschaften und Beziehungen dieser Objekte als auch um Darstellungen mit geeigneten Hilfsmitteln einschließlich Geometriesoftware.

Das zugehörige mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die Analytische Geometrie.

### Funktionaler Zusammenhang (L4)

Diese Leitidee ist darauf gerichtet, die funktionalen Vorstellungen der Lernenden aus dem Unterricht der Sekundarstufe I mit Begriffen und Verfahren der elementaren Analysis zu vertiefen und den Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele zu erweitern, auch in stochastischen Kontexten. Es geht hier um funktionale Beziehungen zwischen Zahlen beziehungsweise Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften, auch unter Nutzung infinitesimaler Methoden und geeigneter Software.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind in erster Linie die Analysis und die Stochastik.

### Daten und Zufall (L5)

Diese Leitidee vernetzt Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von zufallsabhängigen Situationen. In Ausweitung und Vertiefung stochastischer Vorstellungen, wie sie in der Sekundarstufe I entwickelt wurden, umfasst diese Leitidee insbesondere den Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten, die Untersuchung und Nutzung von Verteilungen sowie einen Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik, auch mithilfe von Simulationen und unter Verwendung einschlägiger Software.

Das darauf bezogene mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die Stochastik.

### **Legitimation der Themen der Kurshalbjahre**

Die drei folgenden klassischen Sachgebiete stellen eine konsequente inhaltliche Fortführung der Mathematik der Sekundarstufe I dar. Ihnen kommt auch aus Sicht der übergeordneten Leitideen eine zentrale Bedeutung für die gymnasiale Schulbildung im Fach Mathematik zu, weil jedes dieser Gebiete gleich mehrere Leitideen berücksichtigt:

1. Die Analysis als Grundlage fundamentaler mathematischer Begriffe und Verfahren zur Beschreibung von funktionalen Zusammenhängen und Veränderungsprozessen: In ihr werden die Leitideen L1, L2 und L4 umgesetzt.
2. Die Lineare Algebra und Analytische Geometrie mit ihren Methoden zur Algebraisierung und zur analytischen Beschreibung von geometrischen Objekten des Raumes sowie der Verallgemeinerung des Zahlbegriffs durch Vektoren und Matrizen: Sie trägt als einziges Sachgebiet zur Umsetzung der Leitidee L3 bei, außerdem werden die Leitideen L1 und L2 angesprochen.
3. Die Stochastik mit der Möglichkeit zur quantitativen Beschreibung von Zufallsvorgängen und zur Beurteilung ihrer Ergebnisse: Sie trägt als einziges Sachgebiet zur Umsetzung der Leitidee L5 bei, darüber hinaus gibt es Bezüge zu den Leitideen L2 und L4.

Aufgrund dieser zentralen Bedeutung sind die drei Sachgebiete strukturgebend für die Themen der Kurshalbjahre von der Einführungsphase bis zum Kurshalbjahr Q4 der Qualifikationsphase, wobei dem Sachgebiet Analysis eine herausgehobene Rolle zukommt:

<b>Sachgebiet / Kurshalbjahr</b>	<b>E1</b>	<b>E2</b>	<b>Q1</b>	<b>Q2</b>	<b>Q3</b>	<b>Q4</b>
Analysis	X	X	X	X		X
Lineare Algebra und Analytische Geometrie				X		X
Stochastik					X	X

## 2.5 Digitale Mathematikwerkzeuge

Neben der Nutzung eines Formeldokuments und der Verwendung anschaulicher Modelle sind es vor allem digitale Mathematikwerkzeuge, die Lernprozesse unterstützen. Darunter fallen Taschenrechner mit erweiterten Funktionalitäten, dynamische Geometriesoftware, Tabellenkalkulationsprogramme, Funktionenplotter und ComputeralgebraSysteme beziehungsweise Geräte oder Apps, die mehrere der vorgenannten Funktionalitäten in einem Gerät beziehungsweise einer Anwendung vereinen, sogenannte modulare Mathematiksysteme (MMS).

Ihr Wert zeigt sich insbesondere

- bei Visualisierungen mathematischer Inhalte mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- beim Experimentieren und Entdecken mathematischer Zusammenhänge,
- beim Modellieren von Realsituationen im Umgang mit konkrem umfangreichem Datenmaterial,
- bei der Reduktion schematischer Abläufe,
- beim Bearbeiten einer Aufgabe durch die Möglichkeit verschiedener Zugänge unter Berücksichtigung individueller Präferenzen im Denken und Lernen und
- bei der reflektierten Nutzung als Kontrollmöglichkeit.

Der Einsatz digitaler Werkzeuge ergänzt händische Fertigkeiten der Lernenden; er ersetzt sie nicht. Die Lernenden müssen unabhängig von der Rechnertechnologie die erweiterten Funktionalitäten des Taschenrechners in der Abiturprüfung einsetzen können zur Bestimmung

- von Werten eines Funktionsterms mit einer Variablen (Wertetabelle),
- von einzelnen oder kumulierten Werten der Binomialverteilung,
- von Werten der Normalverteilung mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ .

Computeralgebra-fähige Geräte oder Apps beziehungsweise sogenannte modulare Mathematiksysteme (MMS) müssen über Funktionalitäten zur Durchführung von numerischen und algebraischen Berechnungen, zur Darstellung von Funktionsgraphen, zur Bestimmung von Werten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (mindestens Binomial- und Normalverteilung), zum interaktiven Erstellen geometrischer Konstruktionen (dynamische Geometrie) sowie zur Tabellenkalkulation verfügen.

Wird ein solches System im Unterricht der Qualifikationsphase eingeführt, müssen die Lernenden in der Abiturprüfung die erweiterten Funktionalitäten einsetzen können zur (algebraischen oder numerischen) Bestimmung

- der Lösungen von Polynomgleichungen,
- der Lösung linearer Gleichungssysteme,
- der Ableitung einer Funktion,
- einer Stammfunktion einer Funktion sowie des Werts bestimmter Integrale,
- von Matrizen (Produkt, Inverse),
- des Mittelwerts und der (empirischen) Standardabweichung gegebener statistischer Daten und
- von Werten der Umkehrfunktion der Normalverteilung.

Weitere Funktionalitäten, die die Lernenden in der Abiturprüfung einsetzen können müssen, werden in Abhängigkeit von der verwendeten Rechnertechnologie durch Erlass geregelt.

Beim Einsatz von Taschenrechnern sind besondere Anforderungen an die Dokumentation von Lösungswegen in Form schriftlicher Erläuterungen zu stellen, wenn Teillösungen durch den Rechner übernommen werden. Dabei ist auf eine korrekte mathematische Schreibweise zu achten; rechnerspezifische Schreibweisen (zum Beispiel  $\text{binomcdf}(100, 0.5, 60)$  anstelle von  $P(X \leq 60) = F(100; 0.5; 60)$ ) sind zu vermeiden.

### 3 Bildungsstandards und Unterrichtsinhalte

#### 3.1 Einführende Erläuterungen

Nachfolgend werden die am Ende der gymnasialen Oberstufe erwarteten fachlichen Kompetenzen in Form von Bildungsstandards, gegliedert nach Kompetenzbereichen (Abschnitt 3.2), sowie die verbindlichen Unterrichtsinhalte (Abschnitt 3.3), thematisch strukturiert in Kurshalbjahre und Themenfelder, aufgeführt. Diese sind durch verbindlich zu bearbeitende inhaltliche Aspekte konkretisiert und durch ergänzende Erläuterungen didaktisch fokussiert.

Im Unterricht werden Bildungsstandards und Themenfelder so zusammengeführt, dass die Lernenden in unterschiedlichen inhaltlichen Kontexten die Bildungsstandards – je nach Schwerpunktsetzung – erarbeiten können. Mit wachsenden Anforderungen an die Komplexität der Zusammenhänge und kognitiven Operationen entwickeln sie in entsprechend gestalteten Lernumgebungen ihre fachlichen Kompetenzen weiter.

Die Themenfelder bieten die Möglichkeit – im Rahmen der Unterrichtsplanung didaktisch-methodisch aufbereitet – jeweils in thematische Einheiten umgesetzt zu werden. Zugleich lassen sich, themenfeldübergreifend, inhaltliche Aspekte der Themenfelder, die innerhalb eines Kurshalbjahres vielfältig miteinander verschränkt sind und je nach Kontext auch aufeinander aufbauen können, in einen unterrichtlichen Zusammenhang stellen.

Themenfelder und inhaltliche Aspekte sind über die Kurshalbjahre hinweg so angeordnet, dass im Verlauf der Lernzeit – auch Kurshalbjahre übergreifend – immer wieder Bezüge zwischen den Themenfeldern hergestellt werden können. In diesem Zusammenhang bieten die Leitideen (vergleiche ausführliche Darstellung in Abschnitt 2.4) Orientierungshilfen, um fachliches Wissen zu strukturieren, anschlussfähig zu machen und zu vernetzen.

Die Bildungsstandards sind nach Anforderungsbereichen differenziert. In den Kurshalbjahren der Qualifikationsphase werden die Fachinhalte nach grundlegendem Niveau (Grundkurs und Leistungskurs) und erhöhtem Niveau (Leistungskurs) unterschieden. Die jeweils fachbezogenen Anforderungen, die an Lernende in Grund- und Leistungskurs gestellt werden, unterscheiden sich wie folgt: „Grundkurse vermitteln grundlegende wissenschaftspropädeutische Kenntnisse und Einsichten in Stoffgebiete und Methoden, Leistungskurse exemplarisch vertieftes wissenschaftspropädeutisches Verständnis und erweiterte Kenntnisse“ (§ 8 Absatz 2 OAVO). Hierzu gehört insbesondere auch ein erhöhter Komplexitäts-, Vertiefungs-, Präzisierungs- und Formalisierungsgrad.

### 3.2 Bildungsstandards (allgemeine mathematische Kompetenzen)<sup>5</sup>

Im Folgenden werden die sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzbereiche, die in Abschnitt 2.3 beschrieben werden, präzisiert, insbesondere auch durch ihre jeweiligen Ausprägungen in den drei Anforderungsbereichen.

#### Kompetenzbereich: Mathematisch argumentieren (K1)

##### Anforderungsbereich I

Die Lernenden können

- K1.1** ■ Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen und so weiter) wiedergeben und anwenden,
- K1.2** ■ einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen,
- K1.3** ■ auf der Basis von Alltagswissen argumentieren.

##### Anforderungsbereich II

Die Lernenden können

- K1.4** ■ überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln.

##### Anforderungsbereich III

Die Lernenden können

- K1.5** ■ Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln,
- K1.6** ■ verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten.

#### Kompetenzbereich: Probleme mathematisch lösen (K2)

##### Anforderungsbereich I

Die Lernenden können

- K2.1** ■ einen Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, zum Beispiel durch Analogiebetrachtung, finden.

<sup>5</sup> Die Formulierungen der Bildungsstandards sind – mit Ausnahme einer sprachlichen Anpassung von K1.3 – in wörtlicher Form den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012) entnommen.

**Anforderungsbereich II**

Die Lernenden können

- K2.2** ■ einen Lösungsweg zu einer Problemstellung, zum Beispiel durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen, finden.

**Anforderungsbereich III**

Die Lernenden können

- K2.3** ■ eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems, zum Beispiel zur Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heurismen oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege, entwickeln und anwenden.

**Kompetenzbereich: Mathematisch modellieren (K3)****Anforderungsbereich I**

Die Lernenden können

- K3.1** ■ vertraute und direkt erkennbare Modelle anwenden,  
**K3.2** ■ eine Realsituation direkt in ein mathematisches Modell überführen,  
**K3.3** ■ ein mathematisches Resultat auf eine gegebene Realsituation übertragen.

**Anforderungsbereich II**

Die Lernenden können

- K3.4** ■ mehrschrittige Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen vornehmen,  
**K3.5** ■ Ergebnisse einer solchen Modellierung interpretieren,  
**K3.6** ■ ein mathematisches Modell an veränderte Umstände anpassen.

**Anforderungsbereich III**

Die Lernenden können

- K3.7** ■ eine komplexe Realsituation modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen,  
**K3.8** ■ mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation überprüfen, vergleichen und bewerten.

**Kompetenzbereich: Mathematische Darstellungen verwenden (K4)****Anforderungsbereich I**

Die Lernenden können

- K4.1** ■ Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen.

**Anforderungsbereich II**

Die Lernenden können

- K4.2** ■ gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern,

- K4.3** ■ zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln.

**Anforderungsbereich III**

Die Lernenden können

- K4.4** ■ mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig umgehen,

- K4.5** ■ eigene Darstellungen problemadäquat entwickeln,

- K4.6** ■ verschiedene Darstellungen und Darstellungsformen zweckgerichtet beurteilen.

**Kompetenzbereich: Mit Mathematik symbolisch/formal/technisch umgehen (K5)****Anforderungsbereich I**

Die Lernenden können

- K5.1** ■ elementare Lösungsverfahren verwenden,

- K5.2** ■ Formeln und Symbole direkt anwenden,

- K5.3** ■ mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge direkt nutzen.

**Anforderungsbereich II**

Die Lernenden können

- K5.4** ■ formale mathematische Verfahren anwenden,

- K5.5** ■ mit mathematischen Objekten im Kontext umgehen,

- K5.6** ■ mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und effizient einsetzen.

**Anforderungsbereich III**

Die Lernenden können

- K5.7** ■ komplexe Verfahren durchführen,

- K5.8** ■ verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren bewerten,

- K5.9** ■ die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren.

## Kompetenzbereich: Mathematisch kommunizieren (K6)

### Anforderungsbereich I

Die Lernenden können

- K6.1** ■ einfache mathematische Sachverhalte darlegen,
- K6.2** ■ Informationen aus kurzen Texten mit mathematischem Gehalt identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen im Text die Schritte der mathematischen Bearbeitung nahelegt.

### Anforderungsbereich II

Die Lernenden können

- K6.3** ■ mehrschrittige Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse verständlich darlegen,
- K6.4** ■ Äußerungen (auch fehlerhafte) anderer Personen zu mathematischen Aussagen interpretieren,
- K6.5** ■ mathematische Informationen aus Texten identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung entsprechen muss.

### Anforderungsbereich III

Die Lernenden können

- K6.6** ■ eine komplexe mathematische Lösung oder Argumentation kohärent und vollständig darlegen oder präsentieren,
- K6.7** ■ mathematische Fachtexte sinnentnehmend erfassen,
- K6.8** ■ mündliche und schriftliche Äußerungen anderer Personen mit mathematischem Gehalt miteinander vergleichen, sie bewerten und ggf. korrigieren.

### 3.3 Kurshalbjahre und Themenfelder

Dem Unterricht in der **Einführungsphase** kommt mit Blick auf den Übergang in die Qualifikationsphase eine Brückenfunktion zu. Zum einen erhalten die Lernenden die Möglichkeit, das in der Sekundarstufe I erworbene Wissen und Können zu festigen und zu vertiefen beziehungsweise zu erweitern (Kompensation) sowie Neigungen und Stärken zu identifizieren, um auf die Wahl der Grundkurs- und Leistungskursfächer entsprechend vorbereitet zu sein. Zum anderen werden die Lernenden an das wissenschaftspropädeutische Arbeiten herangeführt. Damit wird eine solide Ausgangsbasis geschaffen, um in der Qualifikationsphase erfolgreich zu lernen. Die Themenfelder der Einführungsphase sind dementsprechend ausgewählt und bilden die Basis für die Qualifikationsphase.

In der **Qualifikationsphase** erwerben die Lernenden eine solide Wissensbasis sowohl im Fachunterricht als auch in fachübergreifenden und fächerverbindenden Zusammenhängen und wenden ihr Wissen bei der Lösung zunehmend anspruchsvoller und komplexer Frage- und Problemstellungen an. Dabei erschließen sie Zusammenhänge zwischen Wissensbereichen und erlernen Methoden und Strategien zur systematischen Beschaffung, Strukturierung und Nutzung von Informationen und Materialien. Der Unterricht in der Qualifikationsphase zielt auf selbstständiges und eigenverantwortliches Lernen und Arbeiten sowie auf die Weiterentwicklung der Kommunikationsfähigkeit; der Erwerb einer angemessenen Fachsprache ermöglicht die Teilhabe am fachbezogenen Diskurs. Durch die Wahl von Grund- und Leistungskursen ist die Möglichkeit gegeben, individuelle Schwerpunkte zu setzen und auf unterschiedlichen Anspruchsebenen zu lernen. Dementsprechend beschreiben die Bildungsstandards und die verbindlichen Themenfelder die Leistungserwartungen für das Erreichen der Allgemeinen Hochschulreife.

#### Verbindliche Regelungen zur Bearbeitung der Themenfelder

##### Einführungsphase

In der Einführungsphase sind die Themenfelder 1 bis 5 verbindliche Grundlage des Unterrichts, wobei Teile eines der Themenfelder E.4 oder E.5 in das Kurshalbjahr Q1 verschoben werden können. Die „zum Beispiel“-Nennungen in den Themenfeldern dienen der inhaltlichen Anregung und sind nicht verbindlich. Soweit sich eine bestimmte Reihenfolge der Themenfelder beziehungsweise ihrer Inhalte nicht aus fachlichen Erfordernissen ableitet, kann die Reihenfolge frei gewählt werden. Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder sind etwa zwei Drittel der gemäß OAVO zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit – in der Regel circa 24 Unterrichtswochen – vorgesehen. In der verbleibenden Unterrichtszeit ist es möglich, Aspekte der verbindlichen Themenfelder zu vertiefen oder zu erweitern oder eines der nicht verbindlichen Themenfelder zu bearbeiten.

##### Qualifikationsphase

In den Kurshalbjahren Q1 und Q2 sind die Themenfelder 1 bis 3, im Kurshalbjahr Q3 sind die Themenfelder 1 bis 3 im Leistungskurs beziehungsweise 1 bis 2 im Grundkurs und im Kurshalbjahr Q4 ist das Themenfeld 1 verbindliche Grundlage des Unterrichts. Im Hinblick auf die schriftlichen Abiturprüfungen können in allen vier Kurshalbjahren durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen innerhalb der verbindlichen Themenfelder ausgewiesen werden. Je nach Länge der Kurshalbjahre Q1 bis Q4 können Teile eines der Themenfelder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbjahren verschoben werden.

Die „zum Beispiel“-Nennungen in den Themenfeldern dienen der inhaltlichen Anregung und sind nicht verbindlich. Soweit sich eine bestimmte Reihenfolge der Themenfelder beziehungsweise ihrer Inhalte nicht aus fachlichen Erfordernissen ableitet, kann die Reihenfolge frei gewählt werden.

**Übersicht über die Themen der Kurshalbjahre und die Themenfelder****Einführungsphase (E)**

<b>E1/E2 Grundlagen der Analysis</b>	
Themenfelder	
E.1	<b>Funktionen und ihre Darstellung</b>
E.2	<b>Einführung des Ableitungs begriffs</b>
E.3	<b>Anwendungen des Ableitungs begriffs</b>
E.4	<b>Exponentialfunktionen</b>
E.5	<b>Trigonometrische Funktionen</b>
E.6	Weitere Verfahren zum Lösen von Gleichungen
E.7	Folgen und Reihen

**verbindlich:** Themenfelder 1 bis 5, Teile eines der Themenfelder E.4 oder E.5 können in das Kurshalbjahr Q1 verschoben werden

**Qualifikationsphase (Q)**

<b>Q1 Analysis</b>	
Themenfelder	
Q1.1	<b>Einführung in die Integralrechnung</b>
Q1.2	<b>Anwendungen der Integralrechnung</b>
Q1.3	<b>Vertiefung der Differenzial- und Integralrechnung</b>
Q1.4	Integrationsmethoden
Q1.5	Gewöhnliche Differenzialgleichungen

**verbindlich:** Themenfelder 1 bis 3; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden; je nach Länge der Kurshalbjahre Q1 bis Q4 können Teile eines der Themenfelder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbjahren verschoben werden.

<b>Q2 Analytische Geometrie, Lineare Algebra und Vertiefung der Analysis</b>	
Themenfelder	
Q2.1	<b>Vertiefung der Analysis</b>
Q2.2	<b>Orientieren und Bewegen im Raum</b>
Q2.3	<b>Geraden und Ebenen im Raum</b>
Q2.4	Matrizen zur Beschreibung von Übergangsprozessen
Q2.5	Matrizen zur Darstellung linearer geometrischer Abbildungen

**verbindlich:** Themenfelder 1 bis 3; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden; je nach Länge der Kurshalbjahre Q1 bis Q4 können Teile eines der Themenfelder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbjahren verschoben werden.

<b>Q3 Stochastik</b>	
Themenfelder	
Q3.1	<b>Grundlegende Begriffe und Methoden der Stochastik</b>
Q3.2	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>
Q3.3	<b>Hypothesentests</b>
Q3.4	Prognose- und Konfidenzintervalle
Q3.5	Statistik und weitere Wahrscheinlichkeitsverteilungen

**verbindlich:** Themenfelder 1 bis 3 im Leistungskurs, Themenfelder 1 bis 2 im Grundkurs; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden; je nach Länge der Kurshalbjahre Q1 bis Q4 können Teile eines der Themenfelder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbjahren verschoben werden.

<b>Q4 Funktionenscharen, Problemlösen und Argumentieren</b>	
Themenfelder	
Q4.1	<b>Funktionenscharen</b>
Q4.2	Problemlösen und Argumentieren
Q4.3	Komplexe Zahlen

**verbindlich:** Themenfeld 1; innerhalb dieses Themenfelds können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden; je nach Länge der Kurshalbjahre Q1 bis Q4 können Teile eines der Themenfelder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbjahren verschoben werden.

Im Zusammenhang der Bearbeitung der Themen der Kurshalbjahre und der Themenfelder des Faches lassen sich vielfältig Bezüge auch zu Themenfeldern anderer Fächer (innerhalb eines Kurshalbjahres) herstellen, um sich komplexeren Fragestellungen aus unterschiedlichen Fachperspektiven zu nähern. Auf diese Weise erfahren die Lernenden die Notwendigkeit und Wirksamkeit interdisziplinärer Kooperation und erhalten gleichzeitig Gelegenheit, ihre fachspezifischen Kenntnisse in anderen Kontexten zu erproben und zu nutzen. Dabei erwerben sie neues Wissen, welches die Fachdisziplinen verbindet. Dies bereitet sie auf den Umgang mit vielschichtigen und vielgestaltigen Problemlagen vor und fördert eine systemische Sichtweise. Durch fachübergreifende und fächerverbindende Themenstellungen können mit dem Anspruch einer stärkeren Lebensweltorientierung auch die Interessen und Fragestellungen, die junge Lernende bewegen, Berücksichtigung finden. In der Anlage der Themenfelder in den Kurshalbjahren sind – anknüpfend an bewährte Unterrichtspraxis – fachübergreifende und fächerverbindende Bezüge jeweils mitgedacht. Dies erleichtert die Kooperation zwischen den Fächern und ermöglicht interessante Themenstellungen.

---

## E1/E2 Grundlagen der Analysis

---

Zahlreiche Phänomene im Alltag und in den Wissenschaften erfordern die Beschreibung eines Bestands und dessen Änderung. Im Mathematikunterricht der Grundschule haben die Lernenden erste Erfahrungen mit absoluten Änderungen gesammelt und diese in der Bruch- und Prozentrechnung der Sekundarstufe I mithilfe von relativen Änderungen vertieft. Bei der Betrachtung linearer Funktionen sind ihnen konstante Änderungsraten begegnet. Mit den Begriffen der durchschnittlichen und lokalen Änderungsrate und schließlich dem Ableitungsbegriff stellt die Analysis nun Werkzeuge bereit, um Veränderungsprozesse mit nicht konstanten Änderungsraten genauer zu untersuchen. Typische Fragestellungen aus Natur, Gesellschaft, Technik, Wirtschaft und Finanzwelt eröffnen die Möglichkeit, den Anwendungsaspekt der Analysis zu verdeutlichen. Gleichzeitig können dadurch in besonderer Weise die Modellierungs- und Problemlösekompetenzen der Lernenden entwickelt werden.

Grundlage der Analysis bildet die Darstellung funktionaler Zusammenhänge mithilfe von Wertetabellen, Graphen und Funktionsgleichungen. Dabei wird der Funktionsbegriff, der in der Sekundarstufe I erarbeitet wurde, vertiefend wiederholt. Neben linearen und quadratischen Funktionen werden ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen untersucht. Die Lernenden arbeiten charakteristische Eigenschaften dieser Funktionsklassen heraus, so dass sie diese auch zur Modellierung von Sachzusammenhängen verwenden können. Um typische Anwendungssituationen aufzuzeigen, werden dabei Daten aus Realsituationen einbezogen. Für Modellierungen mit Exponentialfunktionen eignen sich beispielsweise Daten zum Wachstum von Populationen oder zum Abbau der Konzentration medizinischer Wirkstoffe im Körper, für Modellierungen mit trigonometrischen Funktionen eignen sich zum Beispiel Daten von Gezeitenständen oder von Schwingungen.

Die zentrale neue Idee der Analysis ist der Ableitungsbegriff. Die Einführung der Ableitung kann über ein Beispiel aus einem realen Kontext, bei dem der Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate aus der Sachsituation heraus motiviert ist, erfolgen; dabei ist insbesondere das Beispiel des Übergangs von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit von zentraler Bedeutung. Alternativ kann die Einführung der Ableitung zunächst stärker die geometrische Sichtweise betonen, indem zuerst nach der Steigung der Tangente an einen Funktionsgraphen gefragt wird und später Sachzusammenhänge, insbesondere am Beispiel von Bewegungen hergestellt werden. Unabhängig von der Wahl des Zugangs wird in jedem Fall der Zusammenhang zwischen Änderungsraten und Sekanten- beziehungsweise Tangentensteigungen hergestellt. Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten ist das Kernstück der infinitesimalen Sichtweise auf Veränderungsprozesse, die auf Isaac Newton (1642–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zurückgeht. Dafür benötigen die Lernenden einen propädeutischen Grenzwertbegriff, das heißt adäquate und ausbaufähige Vorstellungen zu Folgen und Grenzwerten, die sie durch die Untersuchung von Folgen mithilfe von Tabellen und Graphen entwickeln können.

Mit den Ableitungsregeln eignen sich die Lernenden grundlegende Techniken der Differenzialrechnung an und wenden diese zunächst auf die Untersuchung ganzrationaler Funktionen an. Dabei ist entscheidend, dass sie mit den Techniken zugleich qualitative Vorstellungen zu Veränderungsprozessen entwickeln, die über ein einseitiges Kalkül-Training hinausgehen. Dazu eignen sich insbesondere Aufgaben, bei denen die Lernenden Änderungsraten in Sachkontexten berechnen und deuten, oder solche, bei denen sie grafisch ableiten und die wechselseitigen Zusammenhänge zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen ihrer Ableitung begründen.

Im Rahmen der Anwendung des Ableitungsbegriffs bestimmen die Lernenden Funktionen, die Realsituationen beschreiben, und interpretieren Ergebnisse im Kontext. Anhand von Extremalproblemen wird ihnen deutlich, wie mithilfe der Analysis Lösungen gefunden werden können. Dabei sind sowohl innermathematische als auch lebensweltbezogene Problemstellungen wie zum Beispiel Verpackungsprobleme oder Fragen der Gewinnoptimierung einzubeziehen.

Darüber hinaus wenden die Lernenden den Ableitungsbegriff an, um die Ableitungen der Exponentialfunktion (e-Funktion) sowie der trigonometrischen Funktionen zu bestimmen. Mit der Produkt- und Kettenregel sind sie zudem in der Lage, in diesem Zusammenhang komplexere Funktionen abzuleiten.

Um Freiräume zur Förderung des Modellierens und Problemlösens zu schaffen und auch komplexe funktionale Zusammenhänge einzubeziehen, werden im Analysis-Unterricht die Möglichkeiten digitaler Werkzeuge genutzt.

Bezug zu den Leitideen: Maßgebliche Leitideen für dieses Kurshalbjahr sind **Algorithmus und Zahl (L1)**, **Messen (L2)** und **Funktionaler Zusammenhang (L4)**.

## Themenfelder

---

**verbindlich:** Themenfelder 1 bis 5, Teile eines der Themenfelder E.4 oder E.5 können in das Kurshalbjahr Q1 verschoben werden

---

Die Bearbeitung der einzelnen Themenfelder kann unterschiedlich viel Unterrichtszeit beanspruchen, da bei der Ausgestaltung inhaltliche Aspekte leitend waren (zum Beispiel 4 Wochen für Themenfeld 1, 6 Wochen für Themenfeld 2, 6 Wochen für Themenfeld 3, 5 Wochen für Themenfeld 4 und 3 Wochen für Themenfeld 5). Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder wird in der Regel ein zeitlicher Gesamtumfang von circa 24 Unterrichtswochen zugrunde gelegt.

### E.1 Funktionen und ihre Darstellung

- Erarbeiten grundlegender Begriffe und Eigenschaften anhand von ganzrationalen Funktionen:  
Definitionsmenge, Wertemenge, Wertetabelle, grafische Darstellung, Funktionsgleichung und Funktionsterm, Symmetrie von Funktionsgraphen, Verhalten für betragsgroße Argumente (mit Limes-Schreibweise), Erkennen der Verschiebung und Streckung von Funktionsgraphen (jeweils in x- und y-Richtung)
- Bestimmen besonderer Punkte:  
grafisches und rechnerisches Bestimmen von Achsenschnittpunkten und Schnittpunkten zweier Graphen, insbesondere bei linearen und quadratischen Funktionen
- Modellieren von Realsituationen durch geeignete Funktionsklassen, insbesondere mithilfe von linearen und quadratischen Funktionen

## E.2 Einführung des Ableitungs begriffs

- Bedeutung der Ableitung als lokale Änderungsrate und als Tangentensteigung:  
Berechnen und Bestimmen von Änderungsraten zu gegebenen Beständen und deren Deutung in unterschiedlichen Sachzusammenhängen, insbesondere zur Beschreibung von Bewegungen, Erarbeiten des Zusammenhangs zwischen Sekanten- und Tangentensteigung sowie zwischen durchschnittlicher und lokaler Änderungsrate, Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit als Änderungsrate des Ortes
- Ableitung einer Funktion an einer Stelle:  
Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten auf der Basis eines pädagogischen Grenzwertbegriffs (Aufbau adäquater Vorstellungen zum Beispiel durch Untersuchen von Folgen mithilfe von Tabellen und Graphen; Limes-Schreibweise; eine formale Beschreibung der Konvergenz mit Quantoren sowie ein formaler Nachweis der Konvergenz sind nicht erforderlich), Gleichung von Tangente und Normale
- Zusammenhang von Ableitungs- und Funktionsgraphen:  
Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion, grafisches Ableiten, wechselseitiges begründetes Zuordnen und Darstellen von Ableitungsgraphen und Funktionsgraphen, Begriff der Stammfunktion
- Ableitungsregeln:  
Ableitung von  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  (exemplarischer Beweis für betragsmäßig kleines n), Beweisen und Anwenden der Faktor- und Summenregel, Ableiten ganzrationaler Funktionen

## E.3 Anwendungen des Ableitungs begriffs

- Funktionsuntersuchung bei ganzrationalen Funktionen:  
Monotonie- und Krümmungsverhalten, Entwickeln notwendiger und hinreichender Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen mittels Ableitungskalkül, anschauliches Begründen der Kriterien anhand des Graphen der Ableitungsfunktion erster und zweiter Ordnung, Funktionsuntersuchung (Lösen von Polynomgleichungen durch Ausklammern; Polynomdivision nicht erforderlich; Lösen von biquadratischen Gleichungen durch Substitution)  
Auch Rückwärtsarbeiten zum Beispiel beim Bestimmen einzelner Parameterwerte in Funktionstermen mit vorgegebener Eigenschaft (zum Beispiel gegebener Wendestelle), einfache Funktionsuntersuchungen mit Parameter ( $g(x) = a \cdot f(x) + b$ )
- Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen anhand ihrer Eigenschaften:  
Modellieren von Sachzusammenhängen unter Verwendung von Begriffen wie unter anderem Extrem- und Wendestelle sowie Anschluss ohne Sprung und ohne Knick, Bestimmen geeigneter Funktionsgleichungen
- Extremalprobleme:  
Lösen innermathematischer Extremalprobleme (zum Beispiel Dreieck oder Rechteck unter Funktionsgraphen) und einfacher realitätsbezogener Extremalprobleme

#### E.4 Exponentialfunktionen

- Wachstums- und Zerfallsprozesse:  
Untersuchen charakteristischer Eigenschaften exponentieller Prozesse sowie der Bedeutung der Parameter in Funktionsgleichungen der Form  $f(x) = a \cdot b^x + c$ , Halbwerts- und Verdopplungszeit, Modellieren von Realsituationen anhand gegebenen Datenmaterials, Vergleichen mit linearen und quadratischen Funktionen
- die (natürliche) Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$ :  
anschauliches Herleiten der eulerschen Zahl  $e$  und der Ableitung von  $e^x$ , Transformation der Basis einer Exponentialfunktion auf die Standardbasis  $e$  und Bestimmung des Wachstumsfaktors ausgehend von der Basis einer gegebenen Funktionsgleichung mit Standardbasis  $e$
- Produkt- und Kettenregel:  
Multiplikation und Verkettung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen, Überprüfen der Produkt- und Kettenregel an konkreten Beispielen, Anwenden der Produkt- und Kettenregel, insbesondere anhand von Funktionsgleichungen vom Typ  $f(x) = a \cdot e^{kx+c} + b$  beziehungsweise  $f(x) = (ax + b) \cdot e^{kx}$
- Exponentialgleichungen:  
Algebraisches Lösen (Umkehrung des Potenzierens, Logarithmus zu einer beliebigen Basis, Logarithmengesetze nicht erforderlich)

#### E.5 Trigonometrische Funktionen

- periodische Prozesse:  
Bogenmaß, sin und cos als Funktionen, Untersuchen der Bedeutung der Parameter in Funktionsgleichungen der Form  $f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x - c)] + d$  beziehungsweise  $f(x) = a \cdot \cos[b \cdot (x - c)] + d$  (auch mithilfe digitaler Werkzeuge); Begriff der Periodenlänge und der Amplitude, Lage der Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte (ohne Differenzialrechnung, Symmetrieargumente nutzen); Lösen einfacher trigonometrischer Gleichungen durch Termumformungen, insbesondere zur Berechnung der Nullstellen; Modellieren von Realsituationen anhand gegebenen Datenmaterials, Vergleichen mit ganzrationalen Funktionen
- Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion:  
Begründen der Ableitungsfunktionen durch grafisches Differenzieren
- Ableitung von  $f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x - c)] + d$  beziehungsweise  $f(x) = a \cdot \cos[b \cdot (x - c)] + d$  mithilfe der Kettenregel, Bestimmen und Interpretieren der Ableitung an einer Stelle im Sachzusammenhang, Bestimmen von Tangenten und Normalen

**E.6 Weitere Verfahren zum Lösen von Gleichungen**

- Polynomdivision:  
Faktorisieren von Polynomtermen zur Nullstellenbestimmung
- numerische Lösungsverfahren:  
Bisektionsverfahren, Newton-Verfahren, Regula-falsi, Konvergenzgeschwindigkeit, Reflektieren der Grenzen der Verfahren

**E.7 Folgen und Reihen**

- Folgen:  
Untersuchen von arithmetischen und geometrischen Folgen sowie Nullfolgen, Begründen der Konvergenz beziehungsweise Divergenz und Ermittlung des Grenzwertes einer Folge mithilfe der Grenzwertsätze
- Reihen:  
Untersuchen von arithmetischen und geometrischen Reihen sowie deren Grenzwerten

---

## Q1 Analysis

---

Zahlreiche Phänomene im Alltag und in den Wissenschaften erfordern die Rekonstruktion eines Bestands anhand einer vorgegebenen Änderungsrate. Dieses Problem eignet sich besonders, um den Zugang zum Integralkalkül zu motivieren. Auf diesem Weg kann, beispielsweise beim Übergang von Produktsummen zum bestimmten Integral oder bei der Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, in besonderer Weise neben der Problemlöse- auch die Argumentationskompetenz der Lernenden ausgeschärft werden. Die Einführung des bestimmten Integrals stellt dabei eine schlüssige Weiterführung des Konzeptes der Ableitung aus der Einführungsphase dar, denn einerseits erwächst der neue Begriff aus der Umkehrung der typischen Problemstellung beim Differenzieren, andererseits ähnelt die Vorgehensweise seiner Herleitung mittels Approximation und Grenzwertbetrachtung der Einführung des Ableitungsbegriffs. Im Sinne eines Spiralcurriculums gewinnen die Lernenden auf Grundlage ihrer Kenntnisse über Grenzwerte ein tragfähiges Verfahren zur Rekonstruktion von Beständen wie Wasserständen oder zurückgelegten Streckenlängen aus gegebenen Änderungsraten. Durch den Einsatz geeigneter digitaler Werkzeuge können Bestände auch näherungsweise mit numerischen Verfahren rekonstruiert werden, was gleichzeitig den Umgang mit technischen Elementen der Mathematik fördert.

Alternativ kann bei der Gewinnung des Integralbegriffs zunächst auch die geometrische Fragestellung nach dem Inhalt einer Fläche, die von einem Graphen begrenzt ist, im Vordergrund stehen. Unabhängig von der Wahl des Zugangs werden in jedem Fall die Zusammenhänge zwischen dem Produkt zweier Größen und dem Rechtecksflächeninhalt, Produktsummen und Summen von Rechtecksflächenhalten sowie schließlich zwischen dem Integral und dem Inhalt der Fläche unter einem Graphen herausgearbeitet. Im Leistungskurs beschäftigen sich die Lernenden darüber hinaus auch mit Volumenintegralen. Anhand von Rotationskörpern lernen sie diese exemplarisch kennen und entwickeln durch Approximation realer Körper ihre Modellierungskompetenzen weiter. Durch die Auseinandersetzung mit den verschiedenartigen Problemstellungen in diesem Kurshalbjahr entwickeln die Lernenden ihre Problemlöse- und Argumentationskompetenz weiter, wobei insbesondere im Leistungskurs exemplarische Beweise nicht fehlen dürfen.

Bezug zu den Leitideen:

Maßgebliche Leitideen für dieses Kurshalbjahr sind **Algorithmus und Zahl (L1)**, **Messen (L2)** und **Funktionaler Zusammenhang (L4)**.

## Themenfelder

**verbindlich:** Themenfelder 1 bis 3; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden; je nach Länge der Kurshalbjahre Q1 bis Q4 können Teile eines der Themenfelder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbjahren verschoben werden.

Die Bearbeitung der einzelnen Themenfelder kann unterschiedlich viel Unterrichtszeit beanspruchen, da bei der Ausgestaltung inhaltliche Aspekte leitend waren (zum Beispiel 4 Wochen für Themenfeld 1, 4 Wochen für Themenfeld 2, 4 Wochen für Themenfeld 3). Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder wird in der Regel ein zeitlicher Gesamtumfang von circa 12 Unterrichtswochen zugrunde gelegt.

### Q1.1 Einführung in die Integralrechnung

#### grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Bedeutung des Integrals als Bestandsgröße und als orientierter Flächeninhalt:  
Rekonstruktion des Bestands anhand der Änderungsrate und des Anfangsbestands in Sachzusammenhängen, Veranschaulichen der Bestandsänderung als Inhalt der Fläche unter einem Funktionsgraphen, Entwickeln der Grundvorstellung des Integralbegriffs als verallgemeinerte Produktsumme
- Flächen unter einem Funktionsgraphen:  
Näherungsweises Bestimmen von Flächeninhalten, Approximieren von Flächeninhalten durch Rechtecksummen (Ober- und Untersummen), Darstellung von Summen von Funktionswerten beziehungsweise Rechtecksummen mit dem Summenzeichen, Übergang zum bestimmten Integral durch Grenzwertbildung auf Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs, Beurteilen der Genauigkeit von Approximationen
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:  
geometrisch-anschauliches Begründen des Hauptsatzes als Beziehung zwischen Differenzieren und Integrieren, Stammfunktionen, grafischer Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktion
- Entwickeln der Integrationsregeln mithilfe der Ableitungsregeln:  
Stammfunktion von  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ , Faktor- und Summenregel, Integrieren ganzrationaler Funktionen, Integrieren von  $e^x$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$
- Integrieren von  $e^{ax+b}$ ,  $\sin[b \cdot (x - c)]$ ,  $\cos[b \cdot (x - c)]$

#### erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Integrieren von  $(ax + b)^r$  mit  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ , Integrieren von  $g(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

## Q1.2 Anwendungen der Integralrechnung

### grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Flächeninhaltsberechnung:  
Berechnen der Inhalte von Flächen, die von einem oder mehreren Funktionsgraphen oder Parallelen zu den Koordinatenachsen begrenzt sind (auch in Sachzusammenhängen), auch Rückwärtsarbeiten beim Bestimmen einer Integrationsgrenze oder eines Parameterwertes des Funktionsterms bei vorgegebenem Integralwert (Flächeninhalt)
- Anwenden des Integrals für Berechnungen in Sachzusammenhängen  
rekonstruierter Bestand, mittlerer Bestand und mittlere Änderungsrate
- Argumentieren und Begründen anhand von Integral-Termen

### erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Rotationskörper:  
Begründen der Volumenformel mithilfe der Grundvorstellung des Integralbegriffs, Berechnen der Volumina von Körpern, die durch Rotation von Flächen um die Abszissenachse entstehen (auch Wurzelfunktionen als Randfunktionen), Modellieren realer Gegenstände zur Volumenbestimmung
- uneigentliche Integrale:  
Untersuchen unendlich ausgedehnter Flächen

## Q1.3 Vertiefung der Differenzial- und Integralrechnung

### grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- verständiges Umgehen mit den in der Einführungsphase erarbeiteten Inhalten:  
Funktionen und ihre Darstellung, Ableitungsbegriff und Anwendungen, ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen, Ableitungsregeln
- Untersuchen von Exponentialfunktionen, die mit ganzrationalen Funktionen verknüpft sind (Addition, Multiplikation und Verkettung), auch in Realsituationen, Nachweis der Stammfunktion durch Ableiten
- Wachstums- und Zerfallsprozesse:  
Modellieren exponentieller und begrenzter Wachstumsprozesse unter Einbeziehung experimenteller Daten (Herleitungen aus Differenzialgleichungen sind nicht erforderlich), Lösen von Exponentialgleichungen (Umkehren des Potenzierens, Logarithmus zu einer beliebigen Basis, Logarithmengesetze nicht erforderlich)

### erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- Untersuchung von Funktionen mit Parametern, bei denen Exponentialfunktionen mit ganzrationalen Funktionen verknüpft sind, sowie von Kettenlinien und Glockenkurven
- logistisches Wachstum (Herleitung aus der Differenzialgleichung ist nicht erforderlich)

#### **Q1.4 Integrationsmethoden**

##### **grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- Ermitteln einer Stammfunktion durch Formansatz mit Koeffizientenvergleich

##### **erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- partielle Integration
- Integration durch Substitution

#### **Q1.5 Gewöhnliche Differenzialgleichungen**

##### **grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- Beschreiben und Entwickeln von Modellen für Wachstums- und Zerfallsprozesse mithilfe von Differenzialgleichungen
- Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen erster Ordnung:  
Erarbeiten von Richtungsfeldern (zum Beispiel durch Einsatz digitaler Werkzeuge), Separation der Variablen und andere elementare Lösungsmethoden zur Gewinnung allgemeiner und spezieller Lösungen

##### **erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- Untersuchen von Differenzialgleichungen zweiter Ordnung (zum Beispiel bei periodischen Prozessen)

---

## **Q2 Analytische Geometrie, lineare Algebra und Vertiefung der Analysis**

---

Zur Vertiefung der Analysis werden weitere Funktionsklassen betrachtet. Dabei liegt der Fokus auf dem Verknüpfen und Vernetzen des bisher erworbenen Wissens und einem tiefen Verständnis des funktionalen Zusammenhangs. Der Zusammenhang zwischen Funktion und Umkehrfunktion bildet einen der Schwerpunkte. Ein anderer Aspekt ist das Strecken und Verschieben von Funktionsgraphen entlang der x- beziehungsweise y-Achse. Im Leistungskurs bieten sich hier wieder Anknüpfungspunkte zum Beispiel bei der Betrachtung der Dichtefunktion der Normalverteilung im Kurshalbjahr Q3.

Sowohl die Analytische Geometrie als auch die Lineare Algebra bewegen sich im Spannungsfeld von Strukturorientierung und Anwendungsorientierung. Den Lernenden kann dieses Spannungsfeld unmittelbar einsichtig werden, indem der Blick auf die zugrundeliegenden mathematischen Strukturen mit dem Blick auf die Anwendung dieser Strukturen in Sachzusammenhängen verknüpft wird.

Das Thema Analytische Geometrie bietet durch die Betrachtung geometrischer Objekte im dreidimensionalen Raum die Möglichkeit, in besonderer Weise das räumliche Anschauungsvermögen weiterzuentwickeln und den Umgang mit mathematischen Darstellungen zu fördern. Gleichzeitig eröffnen sich dabei vielfältige Anlässe zur Förderung des Argumentierens und Kommunizierens, indem die Lernenden Eigenschaften und Lagebeziehungen der geometrischen Objekte entdecken und beschreiben.

Zur Orientierung im Raum werden zunächst dreidimensionale Koordinatensysteme eingeführt, mit denen die Lernenden geometrische Objekte darstellen können. Das Konzept des Vektors stellt eine neue mathematische Struktur dar, die es ihnen unter anderem erlaubt, Verschiebungen dieser Objekte im Raum zu beschreiben. Darauf aufbauend ermöglichen die Definition des Skalarprodukts und die Einführung des Winkelbegriffs weitergehende Untersuchungen geometrischer Objekte im Raum.

Geraden und Ebenen im Raum stellen die zentralen Objekte der analytischen Geometrie dar. Die Lernenden begegnen verschiedenen Darstellungsformen dieser Objekte und können damit zielgerichtet unterschiedliche geometrische Problemstellungen – wie zum Beispiel Lagebeziehungen untersuchen, Winkel berechnen, Durchstoßpunkte ermitteln – lösen. Dies eröffnet ihnen den Zugang zu komplexeren geometrischen und anwendungsbezogenen Fragestellungen. In der Auseinandersetzung mit diesen entwickeln sie insbesondere ihre Problemlöse- und Argumentationskompetenzen.

Um Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen im Raum untersuchen zu können, benötigen die Lernenden ein tragfähiges Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Sie lernen ausgehend von den konkreten Problemstellungen der Analytischen Geometrie, Gleichungssysteme mit algorithmischen Verfahren zu lösen und die zugehörigen Lösungsmengen geometrisch zu deuten.

Matrizen haben inzwischen eine große Bedeutung in vielen Bereichen der Wissenschaft, etwa zur Beschreibung wirtschaftlicher und finanzmathematischer Zusammenhänge, zur Modellierung von Übergangsprozessen oder der Berechnung von Computergrafiken. Deshalb erweitert die Einführung von Matrizen und Matrizenkalkül nicht nur das Vektorkonzept als Beitrag zur Strukturorientierung, sondern eröffnet vielfältige Anwendungsmöglichkeiten in verschiedenen Bereichen. Innerhalb dieses Themas können insbesondere die Modellierungskompetenzen

der Lernenden gefördert werden, da zur Beschreibung von Realsituationen in der Regel vereinfachende Annahmen getroffen werden, die den Modellcharakter der Beschreibung hervorheben.

Bezug zu den Leitideen:

Maßgebliche Leitideen für dieses Kurshalbjahr sind **Algorithmus und Zahl (L1)**, **Messen (L2)**, **Raum und Form (L3)** und **Funktionaler Zusammenhang (L4)**.

---

## Themenfelder

**verbindlich:** Themenfelder 1 bis 3; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden; je nach Länge der Kurshalbjahre können Teile eines der Themenfelder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbjahren verschoben werden.

---

Die Bearbeitung der einzelnen Themenfelder kann unterschiedlich viel Unterrichtszeit beanspruchen, da bei der Ausgestaltung inhaltliche Aspekte leitend waren (zum Beispiel 3 Wochen für Themenfeld 1, 4 Wochen für Themenfeld 2 und 5 Wochen für Themenfeld 3). Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder wird in der Regel ein zeitlicher Gesamtumfang von circa 12 Unterrichtswochen zugrunde gelegt.

### Q2.1 Vertiefung der Analysis

#### grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- einfache gebrochen rationale und einfache Wurzelfunktionen  
grundlegende Eigenschaften (vergleiche Themenfeld E.1) von einfachen gebrochen rationalen Funktionen  $f(x) = \frac{1}{x^n}$  und von der einfachen Wurzelfunktion  $f(x) = \sqrt{x}$ , Ableiten dieser Funktionen
- Verschiebung und Streckung:  
Verschiebung und Streckung des Graphen der bekannten Funktionsklassen (ganzzrationale Funktionen, einfache gebrochen rationale Funktionen, einfache Wurzelfunktion, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen) in x- und y-Richtung, Spiegelung an x- und y-Achse durch Modifikation des Funktionsterms und umgekehrt, Interpretation von  $g(x) = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$ , auch allgemein ohne konkret gegebenem Funktionsterm, Begründen der Symmetrieeigenschaften von verschobenem Funktionsgraph oder Graph der Ableitungsfunktion
- Umkehrfunktion:  
Aufstellen der Funktionsgleichung, geometrische Deutung des Zusammenhangs zwischen Graph der Funktion und Graph der Umkehrfunktion, Definitions- und Wertemenge von Funktion und Umkehrfunktion

**erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- die natürliche Logarithmusfunktion  $f(x) = \ln(x)$ :  
Beschreiben und Darstellen der natürlichen Logarithmusfunktion (auch Strecken und Verschieben in x- und y-Richtung) und ihrer Eigenschaften als Beispiel einer Umkehrfunktion
- die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion von  $\frac{1}{x}$
- Verknüpfen und Verketten von Funktionen  
Skizzieren und begründen von Eigenschaften von verknüpften oder verketteten Funktionen, insbesondere  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  oder  $f(g(x))$  und deren Ableitungen anhand der Graphen von f und g

**Q2.2 Orientieren und Bewegen im Raum****grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- räumliche Koordinatensysteme:  
Darstellen räumlicher Objekte im dreidimensionalen Koordinatensystem (insbesondere Zeichnen von Schrägbildern und Beschreiben von Punkten mithilfe von Koordinaten), auch mithilfe von Geometriesoftware
- Vektoren:  
Beschreiben von Verschiebungen im Raum mithilfe von Vektoren, Ortsvektor eines Punktes, Rechnen mit Vektoren (Addition und Vervielfachung von Vektoren), Kollinearität zweier Vektoren, Betrag eines Vektors, Abstand zweier Punkte im Raum, Streckenlängen
- Winkel:  
Definition des Skalarprodukts, Untersuchen der Orthogonalität von Vektoren, Bestimmen des Winkels zwischen zwei Vektoren
- einfache geometrische Körper und Figuren im Raum:  
Beschreiben einfacher geometrischer Körper (Würfel, Quader, gerades und schiefes Prisma, gerade und schiefe Pyramide), Untersuchen dieser Körper unter Ausnutzung geometrischer Eigenschaften (Seitenlängen, Parallelität, Orthogonalität, Winkelgrößen, Symmetriearchsen und Symmetrieebenen); Begründen der Eigenschaften von Körpern und Ausnutzen dieser Eigenschaften zum Beispiel zur Berechnung von Volumina und Flächeninhalten (einschließlich Mantel- und Oberflächen)  
Beschreiben einfacher geometrischer Figuren (insbesondere gleichschenkliges, gleichseitiges und rechtwinkliges Dreieck, Quadrat, Rechteck, Raute, Parallelogramm, allgemeines und symmetrisches Trapez, Drachenviereck), Untersuchen dieser Figuren unter Ausnutzung geometrischer Eigenschaften zum Beispiel zur Berechnung von Flächeninhalten (auch Kongruenz und Ähnlichkeit von Figuren); Begründen der Eigenschaften von Figuren

**Q2.3 Geraden und Ebenen im Raum****grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- systematisches Lösen von linearen Gleichungssystemen (auch über- und unterbestimmte) ausgehend von konkreten Problemstellungen der Analytischen Geometrie, geometrische Deutung der zugehörigen Lösungsmengen, Auswählen geeigneter Lösungsstrategien
- Parameterdarstellungen:  
Darstellen von Geraden und Strecken im Raum mit Parametergleichungen, Punktprobe, Bestimmen von Schnittpunkten (Durchstoßpunkten) einer Gerade mit einer Koordinatenebene (Spurpunkte)
- Lagebeziehung von Geraden:  
Untersuchen der Lagebeziehung zweier Geraden, auch durch systematisches Lösen linearer Gleichungssysteme; Berechnen des Schnittpunktes und des Schnittwinkels zweier Geraden; Untersuchen der besonderen Lage von einer Gerade zu den Koordinatenachsen und Koordinatenebenen
- Anwendung auf geradlinige Bewegungen:  
Beschreiben und Untersuchen geradliniger Bewegungen (Zusammenhang  $s = v \cdot t$  zwischen (Betrag der) Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke wird vorausgesetzt; Interpretation des Richtungsvektors als Geschwindigkeitsvektor)
- Ebenen in verschiedenen Darstellungsformen: Parameterform und Koordinatenform einer Ebene, Normalenvektor (auch Bestimmen über Lösen des Gleichungssystems  $\vec{n} \circ \vec{u}_1 = 0 \wedge \vec{n} \circ \vec{u}_2 = 0$ )
- Darstellen von Ebenen und von begrenzten Flächen (insbesondere Dreieck, Parallelogramm) im Raum mit Parametergleichung, Punktprobe, Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen (Spurpunkte)
- Umwandeln der verschiedenen Darstellungsformen einer Ebene ineinander, Untersuchen der Lagebeziehung von Gerade und Ebene sowie Bestimmen von Durchstoßpunkten (insbesondere mithilfe der Koordinatengleichung)
- Berechnung des Winkels zwischen Gerade und Ebene sowie zwischen Ebene und Ebene
- Untersuchung von Winkeln (insbesondere auf Orthogonalität und Parallelität) sowie von den genannten Lagebeziehungen jeweils in Abhängigkeit von einem (zusätzlichen) Parameter
- Spiegelung und orthogonale Projektion:  
Spiegeln eines Punktes an einer Ebene, Erarbeiten und Anwenden von Lotfußpunktverfahren zur Abstandsbestimmung von Punkt und Ebene
- Anwendung in Sachzusammenhängen:  
Untersuchen von Schattenwürfen, Projektion auf die Koordinatenebenen, Berechnen von Flächeninhalten

**erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- Normalenform einer Ebene
- weitere Lagebeziehungen und Abstandsbestimmungen:  
Lagebeziehung zweier Ebenen (auch systematisches Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems und geometrische Interpretation der Lösungsmenge), Bestimmen von Schnittgeraden, Erarbeiten und Anwenden von Lotfußpunktverfahren zur Abstandsbestimmung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen; Spiegeln von Punkten, Geraden und Ebenen allgemein
- Vektorprodukt:  
Definition, Anwendung insbesondere zur Berechnung von Normalenvektoren und Flächeninhalten
- Geradenscharen
- Ebenenscharen, insbesondere in der Darstellung durch eine Koordinatengleichung
- Darstellung von Parabelbahnen mithilfe von Parametern (zum Beispiel Flugbahn eines Balls)

**Q2.4 Matrizen zur Beschreibung von Übergangsprozessen****grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- Beschreiben von Übergangsprozessen mithilfe von Zustands- beziehungsweise Übergangsgraphen, Zustandsvektoren und Übergangsmatrizen (zum Beispiel Populationsentwicklung, Wählerverhalten, Kundenströme)
- Rechnen mit Matrizen:  
skalare Multiplikation, Matrix-Vektor-Multiplikation, Addition und Multiplikation von Matrizen, Berechnen inverser Matrizen (in einfachen Fällen)
- Markov-Ketten:  
Modellieren von Übergangsprozessen mit (stochastischen) Matrizen, schrittweises Berechnen von Zuständen (auch Rückwärtsrechnen), Bestimmen stabiler Zustände mithilfe von Fixvektoren
- Bestimmen und Interpretieren von Matrixeinträgen bei Potenzen von Matrizen (zum Beispiel  $M^2$ )

**erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- langfristige Entwicklung von Übergangsprozessen:  
Nutzen von Potenzen von Matrizen, Grenzprozesse und Interpretieren von Grenzmatrizen

**Q2.5 Matrizen zur Darstellung linearer geometrischer Abbildungen****grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- Beschreiben von geometrischen Abbildungen mithilfe von Matrizen (zum Beispiel Schattenwürfe oder andere Projektionen)
- Rechnen mit Matrizen:
  - skalare Multiplikation, Matrix-Vektor-Multiplikation, Addition und Multiplikation von Matrizen, Bestimmen inverser Matrizen (in einfachen Fällen)
- Darstellen linearer geometrischer Abbildungen mit Matrizen:
  - Bestimmen von Bildpunkten bei beliebigen Abbildungsmatrizen, Untersuchen und Bestimmen von Abbildungsmatrizen bei folgenden Abbildungen: orthogonale Spiegelungen an den Koordinatenebenen, Parallelprojektionen auf die Koordinatenebenen, zentrische Streckungen am Koordinatenursprung, Verknüpfungen dieser Abbildungen

**erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- Darstellen linearer geometrischer Abbildungen im dreidimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  mit Matrizen:
  - Untersuchen und Bestimmen von Abbildungsmatrizen bei folgenden Abbildungen: Drehungen um die Koordinatenachsen, Parallelprojektionen auf beliebige Ursprungsebenen, Bestimmen von Fixpunkten

---

### Q3 Stochastik

---

Das Thema Stochastik eröffnet durch seinen unmittelbaren Lebensweltbezug vielfältige Möglichkeiten, Realsituationen im Mathematikunterricht zu thematisieren. Dies gilt für die Wahrscheinlichkeitstheorie und für die Statistik gleichermaßen, wie sich an Sachzusammenhängen wie Medikamentenwirksamkeit, Meinungsumfragen, Glücksspielen und anderem mehr zeigen lässt. Der statistische Aspekt des Themas bereitet die Lernenden auf statistische Verfahren vor, die heutzutage in vielen wissenschaftlichen Bereichen Anwendung finden.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung widmet sich der mathematischen Beschreibung von Vorgängen, deren Ausgang vom Zufall bestimmt ist. Aufbauend auf den Betrachtungen im Unterricht der Sekundarstufe I wird das grundlegende Verständnis von Zufallsprozessen, wie sie in typischen Alltagssituationen vorkommen, vertieft. Dabei können die Lernenden insbesondere im Umgang mit mathematischen Darstellungen, wie zum Beispiel Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln, sowie im mathematischen Kommunizieren, wie zum Beispiel bei bedingten Wahrscheinlichkeiten, gefördert werden.

Die Binomialverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, mit der sich vielfältige reale Zufallsvorgänge beschreiben lassen. Durch die Betrachtung von Bernoulli-Ketten und ihren Kenngrößen können insbesondere die Modellierungskompetenzen der Lernenden vertieft werden, wobei auch Modellierungsgrenzen zu thematisieren sind. Zum Verständnis der Berechnungen im Zusammenhang mit der Binomialverteilung werden anhand kombinatorischer Problemstellungen auch Zählverfahren erarbeitet, wodurch die Lernenden zugleich ihre Problemlösekompetenzen weiterentwickeln. Bei der konkreten Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit binomialverteilten Zufallsgrößen kann die Verwendung digitaler Werkzeuge die Arbeit unterstützen.

Im Leistungskurs begegnen den Lernenden mit der Normalverteilung die bedeutendste stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Normalverteilte Zufallsgrößen werden in verschiedenen Sachzusammenhängen untersucht und gegenüber diskret verteilten Zufallsgrößen abgegrenzt. Durch die Einführung der Verteilungsfunktion als Integral über die Dichtefunktion sowie die Betrachtung des Einflusses der die Verteilung bestimmenden Parameter, welche eine Verschiebung beziehungsweise Streckung oder Stauchung des Graphen der Dichtefunktion bewirken, wird ein unmittelbarer Bezug zur Analysis hergestellt. Der Zusammenhang zwischen Normal- und Binomialverteilung kann auf anschauliche Weise über Histogramme aufgezeigt werden. Die Auseinandersetzung mit Hypothesentests, Prognose- und Konfidenzintervallen aus dem Bereich der beurteilenden Statistik ermöglicht es, ein vertieftes Verständnis für Statistik in Realsituationen zu gewinnen. Die zentrale Idee, von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit zu schließen, wird dabei den Lernenden im Kontext der Konfidenzintervalle einsichtig. Hypothesentests lassen diesen Schluss nur eingeschränkt zu, sind aber nach wie vor von zentraler Bedeutung in der empirischen Forschung. Bei beiden Themen bietet es sich an, einen Fokus auf das mathematische Argumentieren zu legen.

Bezug zu den Leitideen:

Maßgebliche Leitideen für dieses Kurshalbjahr sind **Messen (L2)**, **Funktionaler Zusammenhang (L4)** sowie **Daten und Zufall (L5)**.

## Themenfelder

**Verbindlich:** Themenfelder 1 bis 3 im Leistungskurs, Themenfelder 1 bis 2 im Grundkurs; innerhalb dieser Themenfelder können durch Erlass Schwerpunkte sowie Konkretisierungen ausgewiesen werden; je nach Länge der Kurshalbjahre Q1 bis Q4 können Teile eines der Themenfelder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbjahren verschoben werden.

Die Bearbeitung der einzelnen Themenfelder kann unterschiedlich viel Unterrichtszeit beanspruchen, da bei der Ausgestaltung inhaltliche Aspekte leitend waren (zum Beispiel 6 Wochen im Grundkurs beziehungsweise 4 Wochen im Leistungskurs für Themenfeld 1, 6 Wochen für Themenfeld 2 und 2 Wochen im Leistungskurs für Themenfeld 3). Für die Bearbeitung der verbindlichen Themenfelder wird in der Regel ein zeitlicher Gesamtumfang von circa 12 Unterrichtswochen zugrunde gelegt.

### Q3.1 Grundlegende Begriffe und Methoden der Stochastik

#### grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:  
absolute und relative Häufigkeit, Empirisches Gesetz der großen Zahlen
- Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie:  
Beschreiben von Zufallsexperimenten unter Verwendung der Begriffe Ergebnis, Ergebnismenge, Ereignis, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Vergleich von Wahrscheinlichkeiten mit relativen Häufigkeiten aus einem Experiment (zum Beispiel Anzahl „Kopf“ beim vierfachen Münzwurf),
- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten:  
Baumdiagramm, Pfadregeln
- Verknüpfung von Ereignissen:  
Und-, Oder-, Gegenereignis (auch exklusives Oder), Mengendarstellung von Ereignissen und deren Verknüpfung (Vereinigungsmenge  $A \cup B$ , Schnittmenge  $A \cap B$ , Komplementärmenge  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ ), Umgang mit dem Mengenkalkül an einfachen Beispielen, zum Beispiel  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$  (Differenzmenge),  $\bar{A} \cup B = \bar{A} \cap \bar{B}$ , auch anhand der Vierfeldertafel
- bedingte Wahrscheinlichkeiten:  
Identifizieren und beschreiben bedingter Wahrscheinlichkeiten in Sachzusammenhängen, Darstellen und Berechnen bedingter Wahrscheinlichkeiten mittels Baumdiagrammen und Vier- beziehungsweise Mehrfeldertafeln (auch mit absoluten und relativen Häufigkeiten), Überprüfen von Ereignissen auf stochastische Unabhängigkeit
- Lösen kombinatorischer Zählprobleme:  
Produktregel der Kombinatorik, geordnete Stichproben mit und ohne Zurücklegen, ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen, Fakultät, Binomialkoeffizient
- Bestimmen von Laplace-Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Zählverfahren:  
Ziehen von Kugeln aus einer Urne ohne Zurücklegen (einfache Aufgaben zur hypergeometrischen Verteilung, unter anderem Lottoprobleme) und mit Zurücklegen (einfache Aufgaben zur Binomialverteilung), Vergleich der beiden Modelle bei Vergrößerung der Anzahl der Kugeln in der Urne

### Q3.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

#### grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Erarbeiten grundlegender Begriffe:  
Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihre Darstellung durch Histogramme, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Untersuchen einfacher Glücksspiele
- Bernoulli-Ketten:  
Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette, Angeben der Kenngrößen (Länge, Trefferwahrscheinlichkeit) von Bernoulli-Ketten, Entwickeln und Begründen der Formel

$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  anhand eines geeigneten Beispiels, Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Sachzusammenhängen, Modellierungsgrenzen

- binomialverteilte Zufallsgrößen:  
Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Analysieren von Histogrammen hinsichtlich ihrer Eigenschaften, kumulierte Binomialverteilung (Darstellung mit dem Summenzeichen, Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten auch mit digitalen Werkzeugen, systematisches Probieren zur Bestimmung von n, p oder k bei inversen Fragestellungen)

#### erhöhtes Niveau (Leistungskurs)

- normalverteilte Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung:

$$\text{Dichtefunktion } \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ Abgrenzen gegenüber diskreten Zufallsgrößen,}$$

Zuordnen der Glockenform als Eigenschaft der Graphen, Erwartungswert und Standardabweichung (auch aus dem Term oder dem Graphen der Dichtefunktion entnehmen), Lage des Hochpunkts und der Wendepunkte

- Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen:

$$\text{Verteilungsfunktion der Normalverteilung } \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu,\sigma}(t) dt, \text{ Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen in verschiedenen Sachzusammenhängen}$$

(zum Beispiel Körpergröße und -gewicht, Füllmengen) mittels digitaler Werkzeuge, Sigma-Regeln ( $1\sigma$ -,  $1,64\sigma$ -,  $1,96\sigma$ -,  $2\sigma$ -,  $2,58\sigma$ -,  $3\sigma$ -Umgebungen), Bestimmen von x oder des Parameters  $\mu$  oder  $\sigma$  durch systematisches Probieren bei inversen Fragestellungen; Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten durch näherungsweises Bestimmen von Flächeninhalten

### Q3.3 Hypothesentests

#### grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)

- Hypothesentests (rechtsseitige, linksseitige und zweiseitige Signifikanztests) für binomialverteilte Zufallsgrößen:  
Festlegen der Hypothesen, Ermitteln von Entscheidungsregeln (zum Beispiel zur Beurteilung von Umfrageergebnissen) zu vorgegebenen Signifikanzniveaus durch systematisches Probieren (Sigma-Regeln können als Hilfsmittel verwendet werden), Verwerfungsbereich, Fehler erster und zweiter Art (Bestimmen der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten)

mittels digitaler Werkzeuge), Variation der Aufgabenstellung (zum Beispiel Veränderung des Stichprobenumfangs n)

### **erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- Grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten für das Beibehalten beziehungsweise Verwerfen der Nullhypothese in Abhängigkeit vom wahren Wert der Trefferwahrscheinlichkeit p (Operationscharakteristik beziehungsweise Gütfunktion)

## **Q3.4 Prognose- und Konfidenzintervalle**

### **grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten (auf Grundlage der Sigma-Regeln): Schließen von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe, Bestimmen des Prognoseintervalls  $\left[ p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}; p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \right]$  in verschiedenen Sachzusammenhängen
- Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten (auf Grundlage der Sigma-Regeln): Schließen von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit, Konfidenzniveau, Bestimmen von Konfidenzintervallen in verschiedenen Sachzusammenhängen mithilfe des Lösens der Gleichung  $|h_n - p| = c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$  durch Quadrieren, Betrachtung der Vereinfachung  $|h_n - p| = c \cdot \sqrt{\frac{h_n \cdot (1-h_n)}{n}}$  (symmetrisches Intervall bezüglich  $h_n$ )

### **erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- Konfidenzdiagramme (Konfidenzellipse)
- Stichprobenumfänge:  
Berechnen von Stichprobenumfängen anhand vorgegebener Konfidenzniveaus (auf Grundlage der Sigma-Regeln)

## **Q3.5 Statistik und weitere Wahrscheinlichkeitsverteilungen**

### **grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:  
absolute und relative Häufigkeit für selbst durchgeführte Zufallsexperimente, grafische Darstellung, Simulationen von Zufallsexperimenten mit einer geeigneten Software (zum Beispiel Tabellenkalkulation)
- Umgang mit Daten:  
Beurteilen von selbst erhobenen Daten mithilfe von arithmetischem Mittelwert, empirischer Varianz und empirischer Standardabweichung
- Poisson-Verteilung:  
Näherung der Binomialverteilung für seltene Ereignisse, Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Sachzusammenhängen

**erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung:  
Idee der Approximation der Histogramme binomialverteilter Zufallsgrößen durch die Normalverteilung bei hinreichend großer Standardabweichung, Bezug zu den Sigma-Regeln
- Poisson-Verteilung als Näherung der Binomialverteilung bei konstantem Erwartungswert;  
Beweisen des Grenzübergangs für  $n \rightarrow \infty$
- weitere stetige Verteilungen (zum Beispiel Exponentialverteilung)

---

#### Q4 Funktionenscharen, Problemlösen und Argumentieren

---

Für die Lernenden bietet das Kurshalbjahr die Möglichkeit, sich sowohl mit neuen Inhalten auseinanderzusetzen als auch in wiederholenden und vernetzenden Bezügen Themenfelder aus den Sachgebieten Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie sowie Stochastik zu bearbeiten. Je nach Voraussetzungen der Lerngruppe können zudem bestimmte allgemeine mathematische Kompetenzen schwerpunktmäßig gefördert werden.

Die Untersuchung von Funktionenscharen dient der Vertiefung und Erweiterung der in den vorangegangenen Kurshalbjahren erworbenen inhaltsbezogenen Kompetenzen aus dem Sachgebiet Analysis. Das Themenfeld knüpft dabei an die bereits erworbenen Fähigkeiten und Kenntnisse im Umgang mit Parametern an und verknüpft diese unter Einbezug der bekannten Funktionsklassen, wobei Bezüge unter anderem zu zahlreichen Themenfeldern der Analysis, insbesondere zu den Themenfeldern E.3 und Q1.3 hergestellt werden.

Zusätzlich zu dem verbindlichen Themenfeld Q4.1 können als nicht verbindlich gekennzeichnete Themenfelder aus diesem Kurshalbjahr oder aus den Kurshalbjahren Q1 bis Q3 bearbeitet werden, sofern diese noch nicht bearbeitet wurden.

Die Lernenden entwickeln ihre allgemeinen mathematischen Kompetenzen ausgehend von dem am Ende der Sekundarstufe I erreichten Kompetenzniveau in allen Kurshalbjahren E1 bis Q4 kontinuierlich weiter, wobei die in Abschnitt 3.2 beschriebenen Bildungsstandards in unterschiedlichen inhaltlichen Kontexten erarbeitet werden (vergleiche Abschnitt 3.1). In diesen Zusammenhang sind die Strukturierung und der didaktische Fokus des Themenfelds Q4.2 einzzuordnen; die beiden prozessbezogenen Schwerpunkte sind ausgerichtet auf die Kompetenzbereiche „Mathematisch argumentieren“ und „Probleme mathematisch lösen“ (vergleiche Abschnitt 2.3). In der wiederholenden Auseinandersetzung mit den angegebenen Inhalten können Lernende die entsprechenden Kompetenzen weiterentwickeln sowie reflektieren. Die Lehrkraft wählt je nach unterrichtlichem Kontext Inhalte aus, kann Schwerpunkte setzen und weitere, passende Inhalte einbeziehen.

Bezug zu den Leitideen:

Wegen des prozessbezogenen Themenfelds können **alle Leitideen L1 bis L5** umgesetzt werden.

**Themenfelder**

---

**verbindlich:** Themenfeld 1; innerhalb dieses Themenfelds können durch Erlass Schwerpunkte und Konkretisierungen ausgewiesen werden; je nach Länge der Kurshalbjahre Q1 bis Q4 können Teile eines der Themenfelder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Halbjahren verschoben werden

---

Für die Bearbeitung des verbindlichen Themenfelds wird im Kurshalbjahr Q4 in der Regel ein zeitlicher Gesamtumfang von circa 4 Unterrichtswochen zugrunde gelegt.

**Q4.1 Funktionenscharen****grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- Untersuchen und Integrieren von Funktionenscharen ganzrationaler Funktionen, Bedeutung des Parameters für den Graphen
- Untersuchen von Funktionenscharen, bei denen Exponentialfunktionen mit ganzrationalem Funktionen verknüpft sind (Addition, Multiplikation und Verkettung), Berechnen von Integralen (Stammfunktionsnachweis durch Ableiten)
- Untersuchen von Funktionenscharen aller weiteren bekannten Funktionsklassen, falls der Parameter ausschließlich eine Streckung oder Verschiebung bewirkt

**erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- Ortskurven:  
Bestimmen der Ortskurven von Extrem- und Wendepunkten

**Q4.2 Problemlösen und Argumentieren****grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme
- Anwenden heuristischer Strategien (zum Beispiel Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, systematisches Probieren) und Prinzipien (zum Beispiel Extremalprinzip, Symmetrieprinzip) zur Lösung mathematischer Probleme
- Beurteilen vorgegebener Aussagen oder Stellung nehmen zu vorgegebenen Aussagen
- Nachvollziehen, Erläutern und Entwickeln von Argumentationen und logischen Schlussfolgerungen
- Anwendung auf exemplarisch durch die Lehrkraft ausgewählte Themenfelder (Mögliche Beispiele zur Orientierung werden nachfolgend ohne Anspruch auf Vollständigkeit angegeben):

## Analysis

- Betrachtung unterschiedlicher Funktionsklassen (Verhalten im Unendlichen, Anzahl der Extrema und Wendestellen, rechnerische Strategien zur Nullstellenbestimmung), anschauliches Begründen der Anzahl der Schnittpunkte eines vorgegebenen Graphen mit einer Geraden (zum Beispiel Tangenten)
- Argumentieren mit einem heuristischen Stetigkeitsbegriff (ohne Sprung, Zwischenwertsatz)

- Argumentieren anhand vorgegebener Rechnungen, Begründen und interpretieren gegebener Terme,

Analytische Geometrie:

- Begründen der Eigenschaften von Figuren (vergleiche Themenfeld Q2.2) und Ausnutzen dieser zum Beispiel zur Berechnung von Flächeninhalten,
- Begründen der Eigenschaften von Körpern (vergleiche Themenfeld Q2.2) und Ausnutzen dieser zum Beispiel zur Berechnung von Volumina, Untersuchung von Teilungsverhältnissen bei Strecken und Volumina, Begründen besonderer Lagen von Geraden und Ebenen im Raum

Lineare Algebra:

- Lösungsstrategien für lineare Gleichungssysteme, Kategorisierung der möglichen Lösungsmengen (eindeutig, unendlich viele Lösungen, nicht lösbar)

Stochastik:

- Problemlösestrategien bei diskreten Verteilungen: Identifizierung von gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen und passender Zählverfahren beziehungsweise geeigneter Verteilungen (Binomialverteilung vs. Hypergeometrische Verteilung beziehungsweise Lotto-Problem), kombinatorische Probleme, systematisches Probieren, Modellierungsgrenzen (mathematisch und im Sachzusammenhang),
- Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten zum Beispiel anhand zu bestimmender Terme, Formulieren von Zufallsexperimenten und Ereignissen anhand gegebener Terme

### **erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

Stochastik

- Strategien zur Formulierung von Hypothesen und zum Auffinden des kritischen Werts  $k$  (systematisches Probieren, Sigma-Regeln), Variation der Aufgabenstellung (zum Beispiel Veränderung des Stichprobenumfangs  $n$ )
- Einfluss des Stichprobenumfangs  $n$  auf Operationscharakteristik beziehungsweise Gütefunktion, Bestimmung der Entscheidungsregel oder des Stichprobenumfangs  $n$  anhand des Graphen der Operationscharakteristik beziehungsweise Gütefunktion

### **Q4.3 Komplexe Zahlen**

#### **grundlegendes Niveau (Grundkurs und Leistungskurs)**

- algebraische Form:  
Real- und Imaginärteil, Rechnen mit komplexen Zahlen
- Polarform:  
Darstellen in der Gaußschen Zahlenebene,  $z = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$ , Deuten der Grundrechenarten in der Gaußschen Zahlenebene
- Lösen von Gleichungen in der Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen

#### **erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- Darstellen der komplexen Zahlen mit  $2 \times 2$ -Matrizen

HESSEN



**Hessisches Ministerium  
für Kultus, Bildung und Chancen**  
Luisenplatz 10  
60185 Wiesbaden  
<https://kultus.hessen.de>