
TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE HUIXQUILUCAN

INGENIERÍA MECATRÓNICA

**“DISEÑO DE DOS CONFIGURACIONES DE
PÉNDULOS INVERTIDOS”**

I. TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO MECATRÓNICO**

PRESENTA:

C. Kevin Uriel Villa Rosas

Asesor: Dr. Enrique García Trinidad

Revisores: Ing. Víctor Esteban Santiago Trejo
Dr. César Felipe Juárez Carrillo
Ing. Hipólito Flores Loyola

Índice general

Resumen	viii
Abstract	ix
Objetivos	x
Justificación	xi
Introducción	xii
1. Estado del Arte	1
2. Sistemas pendulares	5
2.1. Pendulos Invertidos	7
3. Modelo Dinámico	11
4. Diseño del Péndulo	21
4.1. Relación de Masa, por Elementos de Péndulos	25
5. Selección de Materiales Para la Construcción de los Péndulos	27
5.1. Aluminio	27
5.2. Bronce	29
5.3. Aceros Inoxidables	29
6. Fricción y Desgaste	31
6.1. Principios de Fricción, Desgaste y Lubricación	32
6.1.1. Fricción	32
6.1.2. Desgaste	33
7. Simulaciones y resultados de Simulink	35
7.1. Herramientas para Diseño de Modelos Básicos	35
7.2. Herramientas para Simulación	36
7.3. Herramientas para el Análisis	36
7.4. Simulación de Pendulo-Carro	36
7.4.1. Código de función de bloque utilizado	36
7.4.2. Diagrama de bloques creado	37

7.4.3. Graficas obtenidas	38
Conclusiones	39
Apéndices	40

Índice de figuras

2.1.	Péndulo con movimiento lineal sobre carro	7
2.2.	Péndulo con movimiento giratorio	8
2.3.	Péndulo con rueda inercial	8
2.4.	Sistema bola-viga	9
2.5.	Robot planar de uniones elásticas	9
2.6.	Cohete espacial	10
2.7.	(a) Robot Asimo de Honda y (b) Segway Human Transporter	10
3.1.	Péndulo de Furuta	12
3.2.	Diagrama de Cuerpo libre del sistema del Péndulo de Furuta	15
3.3.	Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro (PIC)	16
4.1.	Diagrama de flujo de procesos, para manufactura de péndulos	22
6.1.	Partes de un Rodamiento	31
6.2.	Rodadura de Contacto Irregular	33
7.1.	Diagrama de bloques creado para hacer la simulación del péndulo-carro . .	37
7.2.	Graficas obtenidas por medio de la simulación del péndulo-carro.	38
1.	Rectificado de Soportes	77
2.	Maquinado de Placa Superior para Dejar a Escuadra	77
3.	Maquinado de Eje	78
4.	Maquinado de Eje	78
5.	Barrenado de Eje	79
6.	Barrenado para Fijación de Placa Inferior	79
7.	Machueleado para Tornillos	80
8.	Barrenado de Placa Superior	80
9.	Maquinado de Brida	81
10.	Maquinado de Inserto	81
11.	Barrenado de Placa Inferior	82
12.	Péndulo de Carro Vista Isométrica.	82
13.	Péndulo de Carro Vista Frontal.	83
14.	Péndulo de Furuta Vista Superior.	83
15.	Péndulo de Furuta Vista Frontal.	84
16.	Péndulo de Furuta Vista Lateral.	84

Índice de tablas

4.1.	Tabla de Velocidades de Corte para Torno y Fresadora	23
4.2.	Tabla de Velocidades para Rimado Recomendadas para las Rimas de Acero de Alta Velocidad	23
4.3.	Avances para diversos materiales con el uso de herramientas para alta ve- locidad	24
4.4.	Avances para el barrenado en el taladro	24
4.5.	Calculo de Revoluciones Por Minuto, para taladro, torno y fresadora	24
4.6.	Tabla de Materiales, Avances y Maquinados de Carro Péndulo	25
4.7.	Tabla de Materiales, Avances y Maquinados de Péndulo de Furuta	25
4.8.	Relación de Masa por Elementos de los Péndulos	26

*“Diseño de Dos Configuraciones de
Péndulos Invertidos”*

Agradecimientos

A mi padre Andrés

Por los ejemplos de perseverancia y constancia que lo caracterizan y que me ha infundado siempre, por el valor mostrado para salir adelante y por su amor. Y sé que está orgulloso de la persona en la cual me he convertido.

A mi madre Fidelia

Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, principalmente, por su amor. Dando su confianza que sin duda alguna en el trayecto de mi vida me ha demostrado su amor, corrigiendo mis faltas y celebrando mis triunfos.

A mis hermanos

Por ser esas personas que ven mis triunfos, fracasos como experiencias propias, siendo su modelo a seguir, apoyando en cualquier situación.

Al Dr. Enrique

Por ser el director de esta tesis con la valiosa guía, colaboración y asesoramiento para la realización de la misma.

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el diseño y la manufactura de dos péndulos de diferente configuración, uno de Furuta y otro invertido sobre carro. Estos tratan de un sistema subactuado de dos grados de libertad, el primero con un elemento que tiene un giro perpendicular a la base, mientras que el segundo elemento (péndulo) se encuentra colocado en un extremo del brazo y su eje de giro es colineal al eje axial del brazo, realizando el giro en un plano perpendicular. El segundo tiene el primer elemento lineal en su base, mientras que el segundo elemento del péndulo se encuentra colocado en un extremo del brazo y su eje de giro es colineal al eje axial del brazo, realizando el giro en un plano perpendicular.

Se aborda el estado del arte sobre los péndulos y los antecesores de estos, así como las aplicaciones en donde se emplean este tipo de mecanismos. Se hace una comparativa de materiales para determinar los más óptimos para los procesos de manufactura involucrados en la construcción.

También presentamos los modelos dinámicos para cada uno y las simulaciones en software especializado.

Abstract

In this thesis work the design and manufacture of two pendulums of different configuration, one of Furuta and the other inverted on a car. These deal with a sub-actuated system of two degrees of freedom, the first with an element that has a rotation perpendicular to the base, while the second element (pendulum) is placed at one end of the arm and its axis of rotation is collinear to the axial axis of the arm, making the turn in a perpendicular plane. The second has the first linear element at its base, while the second pendulum element is located at one end of the arm and its axis of rotation is collinear to the axial axis of the arm, making the rotation in a perpendicular plane.

The state of the art on pendulums and their ancestors is addressed, as well as the applications where these types of mechanisms are used. A comparison of materials is made to determine the most optimal for the manufacturing processes involved in construction.

We also present the dynamic models for each one and the simulations in specialized software.

Objetivos

Objetivo general

Diseño mecánico de dos péndulos invertidos; el primer péndulo es del tipo Furuta y el segundo péndulo es invertido sobre carro.

Objetivos específicos

1. Realizar los cálculos de centro de masa, momentos de inercia y modelo dinámico.
2. Realizar el diseño mecánico de los péndulos invertidos
3. Diseño en software SolidWorks
4. Selección de materiales con las más optimas especificaciones de acuerdo a las necesidades de los péndulos
5. Fabricación y ensamble de los elementos mecánicos necesarios para la construcción de un prototipo del sistema.

Justificación

Con la realización de esta tesis se pretende familiarizar a los alumnos de Ingeniería Mecatrónica del TESH, en las materias de Control Automático y Control Digital; con la implementación de prácticas dentro del laboratorio de Automatización, en base a los conocimientos teóricos vistos en el salón de clases.

Ejemplificando los conceptos de control, las condiciones necesarias para que un sistema sea controlable, el diseño de placas de sensores, en los casos que no se pueden medir todas las variables de estado. Lograr un mejor entendimiento del análisis matemático que se realiza al modelar un sistema físico, junto con la importancia de un buen modelado.

Los prototipos que se proponen serán una herramienta que facilitará la comprensión de la teoría vista en clase. Además, dichos prototipos pueden ser usados para evaluar el desempeño de diversos algoritmos de control tanto lineales como no lineales. Es decir, los prototipos pueden ser utilizados para docencia e investigación.

Introducción

Al paso del tiempo, la evolución de los sistemas mecánicos ha ido de la mano con la creación de sistemas cada vez más sofisticados, esto con el fin de cubrir las necesidades de las diferentes civilizaciones. Ejemplo de ello, es la introducción de teléfonos celulares que utilizan microcomponentes para disminuir el peso y el tamaño del artefacto, la perforación de pozos petroleros a profundidades de cientos de metros bajo la superficie del mar, el transporte de carga con rapidez y seguridad, los proyectiles y cohetes espaciales, la exploración espacial y marítima, la creciente demanda de energía eléctrica utilizando diferentes medios para su generación.

En el estudio de estos mecanismos se ha manifestado que la dinámica que los caracteriza puede interpretarse como un conjunto de movimientos independientes y sincronizados de cada una de sus partes. Tales movimientos pueden producirse por la acción de un actuador, llamada actuación directa, o bien por medio de otros elementos a los cuales se encuentran conectados, conocida como actuación indirecta. En mecánica a estos movimientos se les conoce como grados de libertad.

Por tanto, de acuerdo al número de grados de libertad y a los actuadores que poseen los mecanismos, estos últimos se pueden clasificar en dos tipos: sistemas mecánicos completamente actuados y sistemas mecánicos subactuados. Los primeros sistemas son aquellos que poseen igual número de grados de libertad que de actuadores, mientras que los segundos son aquellos que poseen mayor número de grados de libertad que de actuadores.

En las últimas décadas ha surgido un fuerte interés, por parte de investigadores del área de ingeniería de control, en los sistemas mecánicos subactuados. El interés que se tiene en este tipo de sistemas radica en las ventajas que pueden ofrecer en lo relativo al ahorro de energía y esfuerzos de control, puesto que se pretende que los sistemas subactuados realicen las mismas tareas que los sistemas completamente actuados, pero haciendo frente a las dificultades de control que conlleva un sistema con menor número de actuadores. Así el control de los sistemas mecánicos subactuados es actualmente un campo activo de investigación debido a su amplia gama de aplicaciones en áreas como robótica, aeroespacial y vehículos marinos [1].

Muchos sistemas de control que podemos observar en la vida real, tales como: robots móviles, robots caminantes, robots de articulaciones flexibles, robots sobre plataformas móviles,

robots nadadores, cohetes espaciales, satélites, aviones de despegue vertical, helicópteros, proyectiles, vehículos submarinos, barcos, buques de superficie, etc., son ejemplos de sistemas mecánicos subactuados [2]. El control de estos sistemas está fuertemente vinculado con el sector industrial. Esto se hace notar en los beneficios que la ingeniería de control ha aportado en lo relativo a la mejora de calidad de los productos fabricados, a la minimización del consumo de energía, en el aumento de la seguridad en las plantas industriales, etc.

Los péndulos invertidos son una familia de artefactos que constituyen un banco de pruebas muy completo e interesante para la ingeniería de control no lineal. El más estudiado de los miembros de esta familia es el denominado control invertido sobre un vehículo, al que corrientemente se denomina como carro [1]. Consiste en un péndulo o varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un carro que se mueve sobre una guía rectilínea horizontal bajo la acción de una fuerza F , que es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición de la varilla.

Inicialmente, en los años 60 del siglo pasado, se podía ver este sistema en los laboratorios de control. La demostración consistía en situar inicialmente de forma manual el péndulo en la posición vertical invertida, soltarlo luego y que, de forma autónoma, realimentando su posición, el péndulo continuase en la posición invertida mediante la adecuada actuación sobre el carro [3]. El problema de control, así considerado, es local y su interés residía en que se trataba de estabilizar una posición inestable en bucle abierto lo que, como se sabe, constituye un problema de control muy notable.

Este problema, por su carácter local, puede resolverse con métodos lineales y así se ha hecho desde los años 60. Es importante destacar que, en sistemas lineales, la estabilización en un lazo cerrado de un punto inestable en lazo abierto, no ofrece particulares problemas; estos aparecen cuando el sistema es no lineal. El inconveniente con esta versión del péndulo, a la hora de plantear problemas globales, reside en que el recorrido del carro está acotado, por lo que si se alcanza uno de los extremos del soporte horizontal el sistema deja de funcionar [4].

Para evitar esta limitación Katsuhisa Furuta, del Instituto de Robótica de Tokio, propuso en los años 70 el péndulo rotatorio conocido desde entonces como péndulo de Furuta [1].

Consiste en un motor de eje vertical al que es solidario un brazo de cuyo extremo cuelga la varilla del péndulo. Es decir, el extremo del brazo juega el mismo papel que el carro en el péndulo. Con este artificio se evitan los problemas de final de carrera, aunque aparecen otros nuevos debido a que la dinámica del sistema se complica considerablemente al hacer su aparición fuerzas centrífugas y de Coriolis [6].

Capítulo 1

Estado del Arte

El péndulo invertido es un experimento muy práctico usado durante bastante tiempo para propósitos educativos en el campo de la teoría de control moderno. En la actualidad, ya existen diferentes tipos de modelos físicos para experimentar, empezando desde el más clásico “péndulo de carro de un riel”, hasta los más raros como el “de Furuta” .

El péndulo invertido Furuta fue inventado por **Katsuhisa Furuta** [1] en el *Tokyo Institute of Technology*. El proyecto tenía como nombre el TITech Pendulum. En 1992, Furuta propuso un control robusto (swing-up) usando un sub espacio proyectado desde todo el espacio de estados. El controlador usa un método de control llamado ”bang-bang” pseudo-state feedback.

En 1995, Yamakita [1] consideró diferentes métodos para elevar con movimientos un péndulo invertido doble. Uno es basado en la conservación de la energía y el otro en un método de control robusto. En 1996, Iwashiro [5] planteó un tiro de golf con el péndulo invertido de Furuta usando métodos basados en la conservación de la energía.

En 1999, Olfati-Saber [2], propusieron la estabilización semi global para el péndulo Furuta, usando controladores de puntos fijos.

Despues, en el 2000, Olfati introdujo nuevas formas de cascada normal para los sistemas mecánicos sub actuados.

En 2002 se presentó el diseño de un controlador para el péndulo rotacional invertido a través de la aplicación de la dinámica de Newton [3] para obtener un modelo en espacio de estados que se linealiza alrededor del punto de operación y se implementa un controlador en tiempo discreto por reubicación de polos. Los autores de ese trabajo mencionan que se emplea una técnica que utiliza las propiedades energéticas de la planta a través de una función de energía que asegura la atracción de sistema a zonas cercanas al origen o punto de operación. Los resultados presentan la implementación del controlador eficiente en puntos cercanos a la región de operación de la planta.

En 2004 se presenta un trabajo de grado en el que se propone realizar un controlador con base en la regulación de energía, [15] lo que requiere de un modelado fundamentado en técnicas matemáticas avanzadas como son la formulación Langrangiana y Hamiltoniana incluyendo sobre estos, características o restricciones físicas que son inherentes a los sistemas físicos. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios ya que lograron el objetivo trazado inicialmente, obteniéndose así un controlador con un correcto desempeño. En el trabajo desarrollado en el año 2009, presentaron el diseño de un controlador en dos etapas, [3] la primera de ellas aplica la dinámica para conocer en cada instante de tiempo la energía de la planta en función de sus características físicas, con lo que se logra balancear el sistema a regiones cercanas al punto de equilibrio; en la segunda etapa se desarrolla un control por modos deslizantes que sostiene al sistema físico en el punto de operación.

Los resultados obtenidos fueron exitosos y presentan un control robusto con la capacidad de rechazar perturbaciones y continuar en operación aún ante variaciones en los parámetros físicos del sistema.

En 2007, estudiaron la planeación de desplazamientos del péndulo de Furuta, [13] considerando restricciones holonómicas virtuales (podemos decir que los robots o sistemas holonómicos son aquellos capaces de modificar su dirección instantáneamente, para esta consideración se contempla masa nula), y sin necesidad de rotar previamente) y la técnica de estabilización por retroalimentación. Adicionalmente, elaboraron una técnica para crear oscilaciones del péndulo en algunas regiones de su punto de equilibrio en la posición invertida y en la posición colgante. Los resultados obtenidos de simulaciones numéricas y pruebas experimentales fueron comparados.

En 2009, [2] resuelven el problema de crear oscilaciones de alta frecuencia, casi armónicas, alrededor del punto de equilibrio hacia arriba del péndulo de Furuta. [2] Esto fue logrado mediante un controlador para la transformación de energía de fase, aplicado a la unión pasiva del sistema, el cual dio paso al diseño de un controlador basado en redireccionar para la generación de las oscilaciones. El desempeño del controlador fue verificado a través de simulaciones numéricas y experimentos. Finalmente, también propusieron un nuevo enfoque que muestra como otras curvas homoclínicas pueden ser pre planeadas para dinámicas de la unión pasiva del péndulo de Furuta. Esto fue logrado mediante la parametrización de movimientos de acuerdo a relaciones geométricas entre las coordenadas generalizadas, conocidas como restricciones holonómicas virtuales.

En 2010, [1] presentaron un controlador no lineal por retroalimentación para la estabilización del péndulo de Furuta, obtenido a través de la aplicación del método directo de Lyapunov, basado en la linealización de sólo la coordenada actuada del sistema. El análisis de estabilidad fue llevado a cabo utilizando el principio de invariancia de LaSalle. [11] En adición, se incluyeron resultados obtenidos a través de simulaciones numéricas.

Hirata Etal [16], en 2011, propusieron una nueva metodología para el diseño de un esquema de control adaptivo robusto VSS (Sistema de Estructura Variable) para un PIR

(Pasivo Infrarrojo). La estabilización del péndulo fue llevada a cabo mediante el método de control adaptivo VSS del tipo seguimiento; mientras que la del brazo giratorio fue realizada simultáneamente, por un esquema de control de auto sintonización que asegura el ángulo límite de referencia del péndulo. Simulaciones numéricas y experimentos fueron realizados con el fin de validar el esquema de control propuesto. Más aún, Hassanzadeh y Mobayen [18], en 2011, presentaron tres enfoques evolutivos para el diseño inteligente de controladores para el PIR. Se incluyeron algoritmos genéticos, optimización de enjambres de partículas y el método de optimización de colonias de hormigas. Siendo el objetivo principal de ese trabajo el de balancear el péndulo en la posición invertida.

Recientemente, Türker et al. [17], en 2012, propusieron un algoritmo de estabilización basado en linealización por retroalimentación, transformaciones de coordenadas y método directo de Lyapunov para el péndulo de Furuta, con el que se probó que un controlador diseñado estabiliza asintóticamente el sistema si el péndulo esta inicialmente en el medio plano superior con ninguna dependencia en los parámetros físicos. La efectividad del método de estabilización fue ilustrada con simulaciones.

Más recientemente, Semanet al. [10], en 2013, sugirieron un controlador predictivo, basado en una ley de control óptima con perturbación, para el balanceo del péndulo de Furuta en la posición invertida. Tal controlador es un regulador lineal cuadrático (LQR) que presenta correcciones en la señal de control cuando las restricciones son excedidas. El desempeño del controlador fue ilustrado mediante experimentos en tiempo real. Finalmente, Aracilet al. [11]

Actualmente el péndulo Furuta está siendo implementado en diferentes universidades del mundo. La Universidad de Illinois en Estados Unidos, utiliza el péndulo de Furuta en el laboratorio de la clase de control digital y plantea que con el experimento los alumnos aprenden de forma práctica y didáctica las técnicas de diseño de controladores que se les enseña en el curso teórico.

Las mejoras al modelo consisten en generar una trayectoria circular que en teoría no limita la posición del péndulo; sin embargo, liberar estas restricciones incluye en la planta dinámicas no lineales de orden superior que dificultan el desarrollo de modelos matemáticos con un alto grado de exactitud, razón por la cual se abordan metodologías matemáticas de alto nivel con el fin de tener un alto grado de aproximación a los fenómenos reales presentes en el sistema.

Al día de hoy el diseño de controladores para sistemas pendulares propone un reto dadas sus características físicas y su similitud con diferentes equipos a nivel industrial, es así como para la realización de esta tesis se tienen en cuenta aportes realizados en investigaciones anteriores.

El interés por el péndulo fue y aún sigue siendo inmenso. A través de los siglos ha constituido una fuente inagotable de problemas, ideas y técnicas. Por un lado, describiremos el período del péndulo y veremos que éste no es propiamente independiente de la amplitud inicial de la oscilación. Pero sí lo es cuando se trata de oscilaciones pequeñas. Galileo fue el primero en notar esto, observando una lámpara en oscilación de la catedral de Pisa. Esto condujo al reloj de péndulo, el primero realmente preciso que llegó a ser el estándar durante siglos.

Sin embargo, hubo gente que estudió el problema general de encontrar una curva sobre la cual las oscilaciones debidas a la acción de la gravedad fueran independientes de la posición inicial. Christian Huygens (1629-1695) [8] llegó a demostrar, con argumentos geométricos, que esta curva era una cicloide. Por otra parte, el estudio del péndulo estaba ligado a dos problemas fundamentales de la época: la forma de la tierra y la verificación de la ley de atracción gravitatoria. Aunque el período de oscilación de un péndulo depende de la amplitud de oscilación.

Capítulo 2

Sistemas pendulares

Respecto al panorama histórico de los péndulos invertidos, se tiene que el péndulo, el cual toma su nombre del latín *pendere* que en español significa colgar de, ha sido uno de los sistemas mecánicos más importantes tanto en dinámica como en control, ampliamente estudiado desde los tiempos de Galileo. Siendo, de hecho, el estudio empírico de Galileo acerca del movimiento de un péndulo el que diera lugar a importantes cuestiones en mecánica, a las cuales se les dio respuesta, tiempo después con las leyes de movimiento formuladas por Newton. Los experimentos de Galileo hicieron notar que un péndulo casi vuelve a la altura a la que fue lanzado y eventualmente alcanza una posición de reposo, encontrando que los péndulos más ligeros eran los que volvían más rápidamente a la posición de reposo.

Además, descubrió que las oscilaciones del péndulo dependen únicamente de la longitud de dicho péndulo y no del peso balanceado; también descubrió, para amplitudes pequeñas, que el periodo es casi dependiente de la amplitud [4]. Por otro lado, en lo relativo a las aplicaciones de los péndulos, en 1841 Forbes propuso por primera vez la utilización de un péndulo invertido como sismógrafo. [20]

El dispositivo consistía de una varilla de metal dispuesta verticalmente y unida a una masa que podía dejarse a lo largo de su longitud. Asimismo, dicha varilla se apoyaba sobre un alambre cilíndrico de acero, cuya rigidez podía modificarse manualmente. Así, el periodo libre del péndulo podía variarse a través de la posición de la masa y de la rigidez del apoyo, obteniendo diferentes amplificaciones de la respuesta del mismo ante la acción de un terremoto. El efecto de este fenómeno natural se registraba por medio de un lápiz sujeto al extremo libre del péndulo invertido de tal forma que las oscilaciones quedaran impresas sobre un papel previamente puesto.

La estabilidad del péndulo en la posición invertida se basaba en la rigidez del apoyo. Posteriormente, en 1851 Foucault suspendió una bola de hierro en la cúpula del panteón de París mediante un cable. [16]

En la parte inferior de dicha bola se colocó una aguja que marcaba la trayectoria del péndulo sobre una superficie cubierta con arena.

Pasando unas horas, el trazo de la aguja se engrosó, comprobando que el plano de oscilación del péndulo rotaba en sentido horario unos once grados por hora, logrando de esta forma demostrar la rotación de la Tierra.

En 1860 Cavalleri, [7] con el fin de poder estudiar el contenido de las frecuencias de un terremoto, dispuso seis péndulos de diferentes frecuencias naturales de tal forma que la frecuencia dominante del terremoto hiciera entrar en resonancia aquel péndulo cuya frecuencia natural se aproximara más al valor de dicha frecuencia dominante. Más tarde, en 1908 Stephenson [18] consiguió estabilizar un péndulo rígido en su posición invertida por medio de una vibración en el punto de sujeción, donde las amplitudes de tales vibraciones deberían ser pequeñas comparadas con la longitud del péndulo y considerando que la masa se encontraba concentrada en el extremo del péndulo.

Estudios posteriores mostraron una posible estabilización del sistema con menores frecuencias de estabilización y mayores amplitudes, de tal forma que las regiones de estabilización se obtenían en función de los valores de parámetros asociados al sistema físico y a la vibración de excitación.

Así, esto último fue explicado a detalle en 1951 por Kapitza, conociéndose desde entonces a este dispositivo como el péndulo de Kapitza. [10]

Si bien, el péndulo es un sistema que frecuentemente es introducido en cursos de Física para ilustrar conceptos básicos, como el movimiento periódico y la conservación de energía, y avanzados, como el movimiento caótico. Su importancia no sólo radica en la ilustración de conceptos teóricos a nivel educativo, sino que, también, muchos sistemas de ingeniería pueden ser modelados como péndulos.

2.1. Pendulos Invertidos

Algunos de los sistemas mecánicos subactuados más conocidos son los péndulos invertidos, los cuales representan un excelente punto de referencia para muchos problemas de ingeniería [4], tales como:

- Modelado
- Identificación de parámetros.
- Control de posición y velocidad.
- Oscilación del péndulo desde la posición inicial colgante hasta llevarlo a la posición invertida (swing-up).
- Estabilización del péndulo en la posición invertida (balance del péndulo).
- Análisis del ciclo límite.
- Control híbrido (swing up y balance del péndulo).
- Seguimiento de trayectoria de un punto a otro.
- Generación de oscilaciones.

Básicamente, dependiendo del tipo de mecanismo que mueve a los péndulos invertidos, existen dos versiones diferentes [5]:

- Péndulo con movimiento lineal sobre un carro.
- Péndulo con movimiento giratorio.

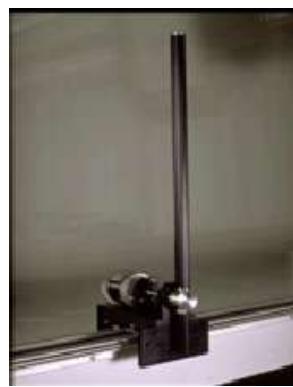


Figura 2.1: Péndulo con movimiento lineal sobre carro

El primero, mostrado en la Figura 2.1, corresponde a la estructura convencional de un péndulo invertido, el cual consiste en un carro que corre sobre un riel horizontal y un péndulo. Este último posee desplazamiento angular sobre el plano vertical y está unido al



Figura 2.2: Péndulo con movimiento giratorio

carro mediante uno de sus extremos. En este tipo de sistema el carro tiene una limitante de movimiento, considerada como una restricción del sistema de control. Este mecanismo también se conoce como péndulo sobre carro

El segundo, mostrado en la Figura 2.2, es comúnmente conocido como el péndulo de Furuta, el cual lleva el nombre del profesor K. Furuta, ascrito al Tokio Institute of Technology, debido a que fue él quien lo inventó.

Tal mecanismo está formado por dos eslabones, uno llamado brazo y el otro péndulo, y dos articulaciones rotacionales. En uno de los extremos del brazo se encuentra unido un actuador (motor), el cual imprime movimiento angular al brazo sobre el plano horizontal. En el extremo libre del brazo se encuentra conectado el péndulo, a través de una articulación que puede girar libremente y permite la rotación de este último en el plano vertical.



Figura 2.3: Péndulo con rueda inercial

Otros ejemplos de sistemas mecánicos subactuados son el péndulo con rueda inercial, el sistema bola-viga y el robot planar de uniones elásticas. El péndulo con rueda inercial (ver Figura 2.3) se describe como una varilla utilizada como péndulo, la cual en el extremo final

tiene una rueda giratoria. Ésta, a su vez se encuentra unida al eje de un motor de corriente directa (CD), responsable de imprimirle movimiento angular a la rueda, provocando que la varilla se balancee sobre el pivote [4].



Figura 2.4: Sistema bola-viga

El sistema bola-viga, mostrado en la Figura 2.4, consiste de una viga o varilla que cuenta con un canal dentro del cual rueda un balín o bola. La inclinación de la varilla puede ser modificada empleando un motor de CD y esta inclinación provoca el movimiento del balín por efecto de la gravedad [6].



Figura 2.5: Robot planar de uniones elásticas

El robot planar de uniones elásticas o flexibles (ver Figura 2.5) consiste en un brazo con dos eslabones que se mueven en el plano horizontal y perpendicular a la fuerza de gravedad. El primer eslabón está unido a un eje sobre el cual rota libremente debido a la aplicación directa de un par; mientras que un segundo eslabón se encuentra unido al extremo libre del primer eslabón, mediante una unión elástica como bien puede ser un resorte [2].

La característica, que comparten los mecanismos antes descritos, de solo poseer un actuador y tener la capacidad de realizar diferentes movimientos, es precisamente la que los define como sistemas mecánicos subactuados. Es por este hecho que las existentes técnicas de control desarrolladas para robots manipuladores completamente actuados no pueden ser directamente aplicadas para el control de los sistemas mecánicos subactuados, lo cual ha capturado la atención de muchos investigadores durante años.

A continuación, se presentan algunos ejemplos y aplicaciones que pueden ser modelados como sistemas de péndulos invertidos [4]. En aeroespacial, se requiere del control activo para mantener un cohete en la posición vertical invertida durante su despegue (ver Figura 2.6). En este caso el ángulo de inclinación es controlado por medio de la variación del ángulo de aplicación de la fuerza de empuje, colocada en la base del cohete. Asimismo, en biomecánica, el péndulo invertido es frecuentemente utilizado para modelar bípedos caminantes.



Figura 2.6: Cohete espacial

Por ejemplo, el robot humanoide Asimo de Honda mostrado en la Figura 2.7. Al ser un robot bípedo, la pierna de apoyo en contacto con el suelo a menudo se modela como un péndulo invertido; mientras que la pierna en movimiento se comporta como un péndulo oscilante libremente, suspendido de la cadera. Finalmente, en la Figura ??, se puede ver el Segway human transporter, el cual es un péndulo invertido, cuyo control está basado en entradas sensoriales de giroscopios montados en la base del segway y un sistema de control por computadora que mantiene el balance mientras las personas pasean sobre el vehículo.

Asimismo, la estabilización de grúas, la estabilización del balanceo de buques y camiones y el control del balanceo de líquidos son ejemplos de problemas de control donde la dinámica del péndulo proporciona información útil.



Figura 2.7: (a) Robot Asimo de Honda y (b) Segway Human Transporter

Capítulo 3

Modelo Dinámico

Se puede definir el modelado de un determinado proceso como la obtención de un conjunto de funciones matemáticas que permiten representar, al menos de forma aproximada, el comportamiento de las variables de mayor interés del sistema bajo estudio.

Existen diferentes técnicas de modelado de sistemas dinámicos, pero de una forma muy esquematizada se pueden separar en dos grandes grupos: el modelado experimental y el modelado analítico. El modelado experimental hace uso de la respuesta del sistema ante determinadas entradas de prueba para obtener una función matemática que relaciona las variables de salida del sistema con las variables de entrada al mismo. Se puede decir que esta metodología de modelado ve al sistema a estudiar como una caja negra en la que no se analiza de ninguna forma el tipo de componentes que lo forman y que obtiene la expresión matemática que liga entradas y salidas sin conocer los elementos internos.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar de muchas formas pero, tal vez, la más interesante puede ser atendiendo a las variables físicas que se manejan en sistemas:

- Mecánicos: Compuestos por masas, resortes, amortiguadores, etc.
- Eléctricos: Compuestos por resistencias, capacidades, inductancias, amplificadores operacionales, etc.
- Electromecánicos: como por ejemplo motores y generadores.
- Térmicos: En los que se producen transferencias de calor entre las sustancias, ya sea por conducción, convección o radiación.
- Hidráulicos: Aquellos sistemas cuyo funcionamiento conlleva un flujo de líquidos.
- Neumáticos: Aquellos sistemas que contiene fluidos a presión, tales como el aire.
- Químicos: en su funcionamiento se producen reacciones químicas.
- Etc.

Modelo Dinámico de un Péndulo de Furuta

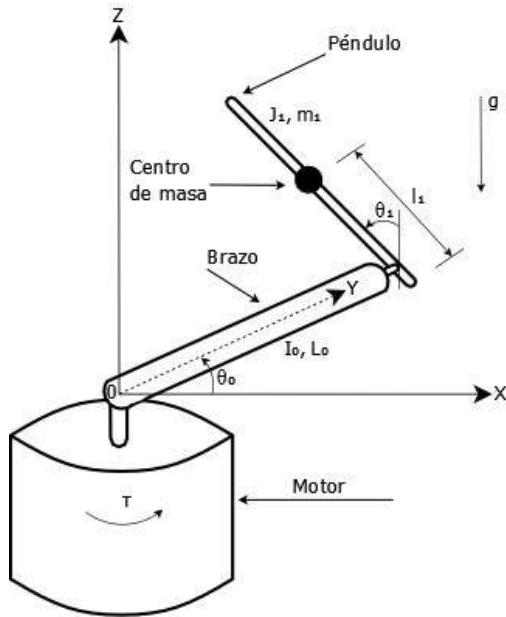


Figura 3.1: Péndulo de Furuta

Se describe detalladamente la deducción del modelo matemático del péndulo de Furuta. Una representación gráfica del péndulo Furuta se muestra en la Figura 3.1, θ_0 es la posición angular del brazo medida con respecto a una posición arbitraria, θ_1 es la posición angular del péndulo medida con respecto a la posición vertical, τ es el par (aplicado al brazo) generado por el motor eléctrico, I_0 es la inercia del brazo (cuando gira alrededor de uno de sus extremos) y la inercia del motor, L_0 es la longitud del brazo, m_1 , l_1 , J_1 son la masa, el centro de la ubicación de masa, y la inercia del péndulo, respectivamente. Por último, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ representa la aceleración de la gravedad. [1] [4]

Para obtener el modelo matemático del péndulo de Furuta mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, es necesario la expresión de la energía total del sistema, la cual es la suma de la energía cinética y la energía potencial [2].

Ecuaciones de Euler-Lagrange

Como el péndulo de Furuta es un sistema de dos grados de libertad, su modelo dinámico es dado por dos ecuaciones de movimiento de Lagrange, que se definen por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = \tau \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3.2)$$

Donde $\dot{\theta}_0$ es la velocidad angular del brazo, $\dot{\theta}_1$ la velocidad angular del péndulo, y L el sistema Lagrangiano determinado como [5] [9]

$$L = K - V \quad (3.3)$$

Siendo K y V la energía cinética y la energía potencial, respectivamente, del sistema péndulo furuta. Por un lado, K es la suma de la energía cinética del brazo y del péndulo, que se definen, respectivamente, como sigue:

$$k_0 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 \quad (3.4)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 \quad (3.5)$$

Donde v_1 es la velocidad lineal del centro de masa del péndulo. Por lo tanto, se requiere un análisis de la cinemática del péndulo Furuta. [7] [14] A continuación, a partir de la Figura 3.1, la ubicación del centro de masa del péndulo se determina por

$$x = [x_x, x_y, x_z]^T \quad (3.6)$$

Donde x_x, x_y y x_z se definen como sigue

$$x_x = L_0 \cos(\theta_0) - l_1 \sin(\theta_1) \sin(\theta_0)$$

$$x_y = L_0 \sin(\theta_0) + l_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_0)$$

$$x_z = l_1 \cos(\theta_1)$$

Así, v_1 es dado por

$$v_1 = [\dot{x}_x, \dot{x}_y, \dot{x}_z]^T \quad (3.7)$$

Finalmente tenemos los componentes de v_1

$$\dot{x}_x = -\dot{\theta}_0 L_0 \sin(\theta_0) - l_1 (\dot{\theta}_0 \sin(\theta_1) \cos(\theta_0) + \dot{\theta}_1 \sin(\theta_0) \cos(\theta_1))$$

$$\dot{x}_y = -\dot{\theta}_0 L_0 \cos(\theta_0) + l_1 (\dot{\theta}_1 \cos(\theta_0) \cos(\theta_1) - \dot{\theta}_0 \sin(\theta_0) \sin(\theta_1))$$

$$\dot{x}_z = -\dot{\theta}_1 l_1 \sin(\theta_1)$$

Después de reemplazar (3.7) en (3.5) y reducir la expresión resultante, se encuentra lo siguiente

$$K_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[(\dot{\theta}_0 L_0)^2 + l_1 (\dot{\theta}_0 \sin(\theta_1))^2 + (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + 2\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) \right]$$

Por lo tanto, la energía cinética del péndulo de Furuta K es dada por

$$K = K_0 + K_1$$

$$= \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[(\dot{\theta}_0 L_0)^2 + (l_1 \dot{\theta}_0 \sin(\theta_1))^2 + (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + 2\dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1) \right] \quad (3.8)$$

Por otra parte, V es la suma de la energía potencial del brazo y el péndulo. Puesto que el brazo se mueve en el plano horizontal, su energía potencial es constante y puede considerarse igual a cero. [1] Por lo tanto, la energía potencial del péndulo Furuta V se reduce a la energía potencial del péndulo, es decir:

$$V = -hm_1g = m_1gl_1(\cos(\theta_1) - 1) \quad (3.9)$$

A continuación, a partir de (3.3), que se ha asociado a (3.8) y (3.9), y después de llevar a cabo los derivados correspondientes en el sistema de ecuaciones (3.1), (3.2), la dinámica del péndulo Furuta se encuentra de la siguiente manera:

$$\tau = \alpha \ddot{\theta}_0 + \beta \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 + \gamma \ddot{\theta}_1 + \sigma \dot{\theta}_1^2 \quad (3.10)$$

$$0 = \gamma \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_0^2 - m_1 g l_1 \sin(\theta_1) \quad (3.11)$$

Donde $\ddot{\theta}_0$ es la aceleración angular del brazo, $\ddot{\theta}_1$ es la aceleración angular del péndulo

$$\alpha = I_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2(\theta_1)$$

$$\gamma = m_1 L_0 l_1 \cos(\theta_1)$$

$$\beta = m_1 l_1^2 \sin(2\theta_1)$$

$$\sigma = m_1 L_0 l_1 \sin(\theta_1)$$

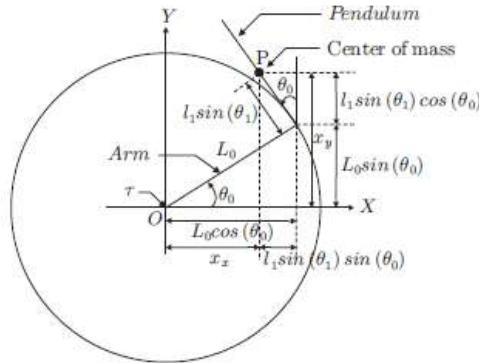
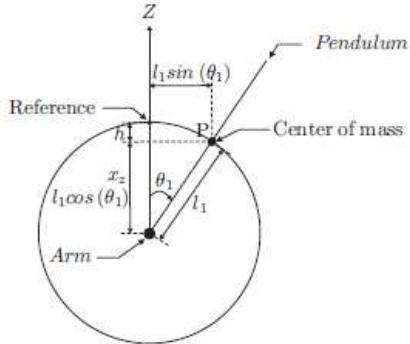
(a) Projection of the *arm* and *pendulum* in the horizontal plane.(b) Projection of the *pendulum* in the vertical plane.

Figura 3.2: Diagrama de Cuerpo libre del sistema del Péndulo de Furuta

Modelo Dinámico de un Péndulo Invertido sobre un Carro

En el sistema péndulo invertido sobre un carro se analiza partir de la aplicación de las leyes de movimiento de Newton, donde las fuerzas y variables que actúan en el sistema se observan en la Figura 3.2. Se considera la barra con masa despreciable y en su extremo superior se posiciona una masa (m) que oscila libremente alrededor de un pivote fijo (P) montado en el carro de masa (M) que se desplaza sobre una trayectoria lineal. [11] [12] [16]

Donde M es la masa del carro, m es la masa del centro de gravedad, ℓ es la longitud de la barra, I es la inercia del péndulo, u es la fuerza aplicada al carro, x es la posición del carro, θ es el ángulo del péndulo desde la vertical superior, y g es la constante gravitacional, P Pivote. [3] [8]

Las ecuaciones (3.12) y (3.13) representan el punto $C_{cg}(x_{cg}, y_{cg})$ en el sistema de coordenadas cartesianas referentes al centro de gravedad del péndulo. La posición del centro de gravedad en el extremo del péndulo se obtiene a partir de la Figura:3.3.

$$x_{cg} = x + \ell \sin \theta \quad (3.12)$$

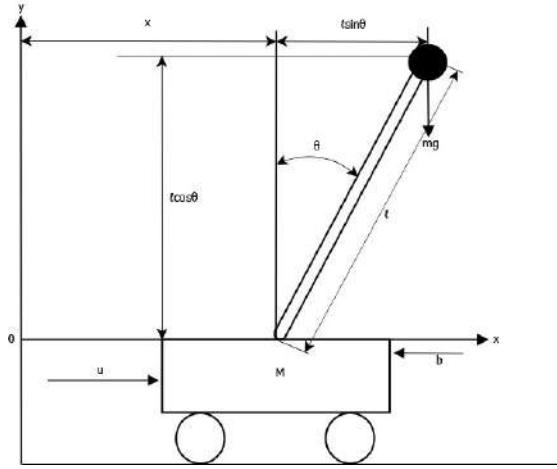


Figura 3.3: Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro (PIC)

$$y_{cg} = \ell \cos \theta \quad (3.13)$$

Donde se observa que el carro de masa M se desplaza de forma horizontal sobre el eje x y al aplicar la segunda Ley de Newton en la dirección horizontal, se obtiene la ecuación del movimiento del sistema Péndulo Invertido sobre el Carro, la cual queda definida por la ecuación (3.14).

$$M\ddot{x} + F_x = u(t) \quad (3.14)$$

Donde F_x representa el movimiento horizontal del péndulo y $u(t)$ representa la fuerza de entrada. Por otro lado, al aplicar la segunda Ley de Newton al movimiento rotacional con referencia al centro de gravedad C_{cg} del péndulo se obtiene la ecuación (3.15).

$$I\ddot{\theta} = F_y \ell \sin \theta - F_x \ell \cos \theta \quad (3.15)$$

Siendo I es el momento de inercia del péndulo alrededor de su centro de gravedad, F_x representa el movimiento horizontal del péndulo y F_y representa el movimiento vertical del mismo. [13] El movimiento F_x , queda expresado por la ecuación (3.16).

$$F_x = mx_{cg} \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) depende de la abscisa x_{cg} del punto de coordenadas del centro de gravedad C_{cg} , representada por la ecuación (3.12). El movimiento sobre el eje x del péndulo (3.17) se encuentra a partir de las ecuaciones (3.12) y (3.16), quedando expresada de la siguiente manera:

$$F_x = m\ddot{x} + m\ddot{a} \quad (3.17)$$

Se obtiene el término $\ddot{a} = \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta$ para simplificar (3.17).

$$a = (\cos \theta)\ddot{\theta} - (\sin \theta)\dot{\theta}^2 \quad (3.18)$$

$$F_x = m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \quad (3.19)$$

El movimiento vertical F_y del péndulo está representado en la ecuación (3.20) en donde se observa la relación de la ordenada del punto del centro de gravedad (y_{cg}) del péndulo. [10] [16]

$$F_y = m\ddot{y}_{cg} + mg \quad (3.20)$$

Relacionando las ecuaciones (3.13) y (3.20), se obtiene el movimiento vertical del péndulo (3.21):

$$F_y = m\ell\ddot{\theta} + mg \quad (3.21)$$

Siendo el término $\ddot{b} = \frac{d^2}{dt^2}\cos\theta$:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\cos\theta) = (-\sin\theta)\ddot{\theta} - (\cos\theta)\dot{\theta}^2 \quad (3.22)$$

Con las ecuaciones (3.21) y (3.22) se obtiene la representación del movimiento vertical del péndulo (3.23):

$$F_y = -m\ell\ddot{\theta}\sin\theta - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta + mg \quad (3.23)$$

Usando las ecuaciones (3.15), (3.19) y (3.23), se representa el movimiento rotacional del péndulo (3.24):

$$I\ddot{\theta} = [-m\ell\ddot{\theta}\sin\theta - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta + mg]\ell\sin\theta - [m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta]\ell\cos\theta \quad (3.24)$$

Debido a que la masa (m) se encuentra posicionada en el extremo superior del péndulo, se puede suponer que el momento de inercia es igual a cero, es decir $I\ddot{\theta} = 0$ y manipulando algebraicamente la ecuación (3.24) ahora se expresa (3.25):

$$(mg\ell)\sin\theta = m\ell^2\ddot{\theta} + (mg\ddot{x})\cos\theta \quad (3.25)$$

La ecuación (3.25) representa el movimiento rotacional del péndulo. Para obtener la ecuación del movimiento translacional del sistema Péndulo Invertido sobre un Carro se relacionan las ecuaciones (3.14) y (3.19) obteniendo (3.26).

$$(M+m)\ddot{x} - m\ell^2\dot{\theta}^2\sin\theta + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta = u(t) \quad (3.26)$$

El movimiento del sistema Péndulo Invertido sobre un Carro está limitado a dos grados de libertad y su modelo matemático no lineal se representa por las ecuaciones (3.25) y (3.26). La expresión (3.27) representa las ecuaciones diferenciales no lineales del sistema Péndulo Invertido sobre un Carro en forma matricial. [14]

$$\begin{bmatrix} m\ell & m\cos\theta \\ m\ell\cos\theta & (M+m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg\sin\theta \\ u(t) + m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

El objetivo de control para el sistema Péndulo Invertido sobre un Carro es mantener el péndulo sobre la vertical. Considerando a θ y $\dot{\theta}$ pequeños, es posible linealizar las ecuaciones (3.25) y (3.26) al sustituir $\sin \theta = \theta$ y $\cos \theta = 1$ respectivamente, despreciándose el término $\theta\dot{\theta}^2$ de la ecuación (3.26) y con las expresiones anteriores se obtienen las ecuaciones (3.28) y (3.29).

$$mg\theta = m\ell\ddot{\theta} + m\ddot{x} \quad (3.28)$$

$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u(t) \quad (3.29)$$

Se relacionan las ecuaciones (3.28) y (3.29) para obtener los términos \ddot{x} y $\ddot{\theta}$ respectivamente, y así se obtienen las ecuaciones (3.30) y (3.31).

$$\ddot{x} = -\frac{m}{M}g\theta + \frac{1}{M}u(t) \quad (3.30)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M-m)}{M\ell}g\theta - \frac{1}{M\ell}u(t) \quad (3.31)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (3.31) se obtiene la función de transferencia del péndulo (3.32):

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = -\frac{1}{M\ell} \cdot \frac{1}{s^2 - g\frac{(M+m)}{M\ell}} \quad (3.32)$$

Una representación en el espacio de estados del sistema Péndulo Invertido sobre un carro de las variables de estados en términos de θ y x :

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = x, x_4 = \dot{x} \quad (3.33)$$

Se sustituyen las variables de estado (3.33) en las ecuaciones (3.30) y (3.31), para obtener las ecuaciones (3.34) y (3.35):

$$\dot{x}_2 = \frac{(M+m)}{M\ell}gx_1 - \frac{1}{M\ell}u(t) \quad (3.34)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M}gx_1 + \frac{1}{M}u(t) \quad (3.35)$$

Finalmente se obtienen las ecuaciones de estado y salida del sistema Péndulo Invertido sobre un Carro (3.36) y (3.37) respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g\frac{(M+m)}{M\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g\frac{m}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{M\ell} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \quad (3.36)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Momento de Inercia

El eje de rotación se encuentra en un extremo de la varilla, de igual manera sabemos que es una varilla muy delgada. Por eso la modelamos como un objeto que es de una dimensión.

Donde la longitud la vamos a denominar como L .

El momento de inercia es igual a:

$$I = \int_0^L r^2 dm \quad (3.38)$$

Suponiendo que la varilla se encuentra de forma paralela al eje X, y sustraemos una infinécima parte de la varilla que nombramos Δx , por tanto x sera igual al radio r de nuestra formula.

Para el diferencial de masa dm , la densidad también se considera en una dimensión por lo cual la tomamos como la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{m}{\Delta x} \quad (3.39)$$

Despejando la masa nos queda:

$$m = \rho \Delta x \quad (3.40)$$

Este segmento es infinitamente pequeño, entonces tendra un pequeño diferencial de masa que esta definido por:

$$dm = \rho dx \quad (3.41)$$

Sustituyendo r y dm en nuestra ecuación inicial nos queda de la siguiente forma:

$$I = \int_0^L x^2 \rho dx \quad (3.42)$$

Como ρ es una constante la podemos sacar de la integral para obtener:

$$I = \rho \int_0^L x^2 dx \quad (3.43)$$

Resolvemos la integral y evaluamos con los limites de integración para obtener:

$$I = \rho \left(\frac{L^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \quad (3.44)$$

Quedando solamente:

$$I = \rho \left(\frac{L^3}{3} \right) \quad (3.45)$$

Se sustituye ρ por $\frac{m}{L}$, para que la ecuación quede de la siguiente forma:

$$I = \left(\frac{m}{L} \right) \left(\frac{L^3}{3} \right) \quad (3.46)$$

Quedando finalmente el momento de inercia definido como:

$$I = \frac{mL^2}{3} \quad (3.47)$$

Capítulo 4

Diseño del Péndulo

Un péndulo invertido de Furuta es un mecanismo físico de mediana complejidad. Conssta de una barra vertical que se llamará péndulo, una barra horizontal que se denominará brazo, un actuador, que en este caso es un motor, y un sistema de control que se encarga de tomar las decisiones. Para poder formar un mecanismo.

Mientras tanto el diseño mecánico consiste en la construcción y maquinado del brazo, los péndulo, la estructura que soportará los motores de corriente directa (C.D.) y las piezas en estas estructuras para posicionar los sensores a utilizar. Se determina que los prototipos deben cumplir con los siguientes requerimientos de diseño:

- La estructura debe ser robusta, duradera, estable, y libre de oscilaciones.
- El modelo físico debe evitar vibraciones producidas por el mismo sistema. Esto con el fin de no tener perturbaciones innecesarias al sistema.
- Modular y ensamble rápido.
- Adaptable para futuras modificaciones.
- Todos los componentes del péndulo invertido Furuta deben estar a la vista. Esto permite al docente y a los estudiantes una rápida comprensión global del sistema.

La estructura que soporta el mecanismo está compuesta por una base metálica (acero 1018), unas columnas de aluminio (T-6061) de perfil cuadrado y unas placas metálicas que soportan el motor y los elementos electrónicos.

La base de acero garantiza que el mecanismo no se desplome para ningún lado y mantenga equilibrio. Se utilizó un material como el acero gracias a sus propiedades de peso, las cuales permiten fijar el sistema a la superficie dónde se coloque. El aluminio se seleccionó como material para el resto de la estructura, ya que ayuda a la manufactura y es de bajo peso.

Para el diseño y manufactura de los péndulos se siguió el diagrama de flujo de procesos mostrado a continuación:

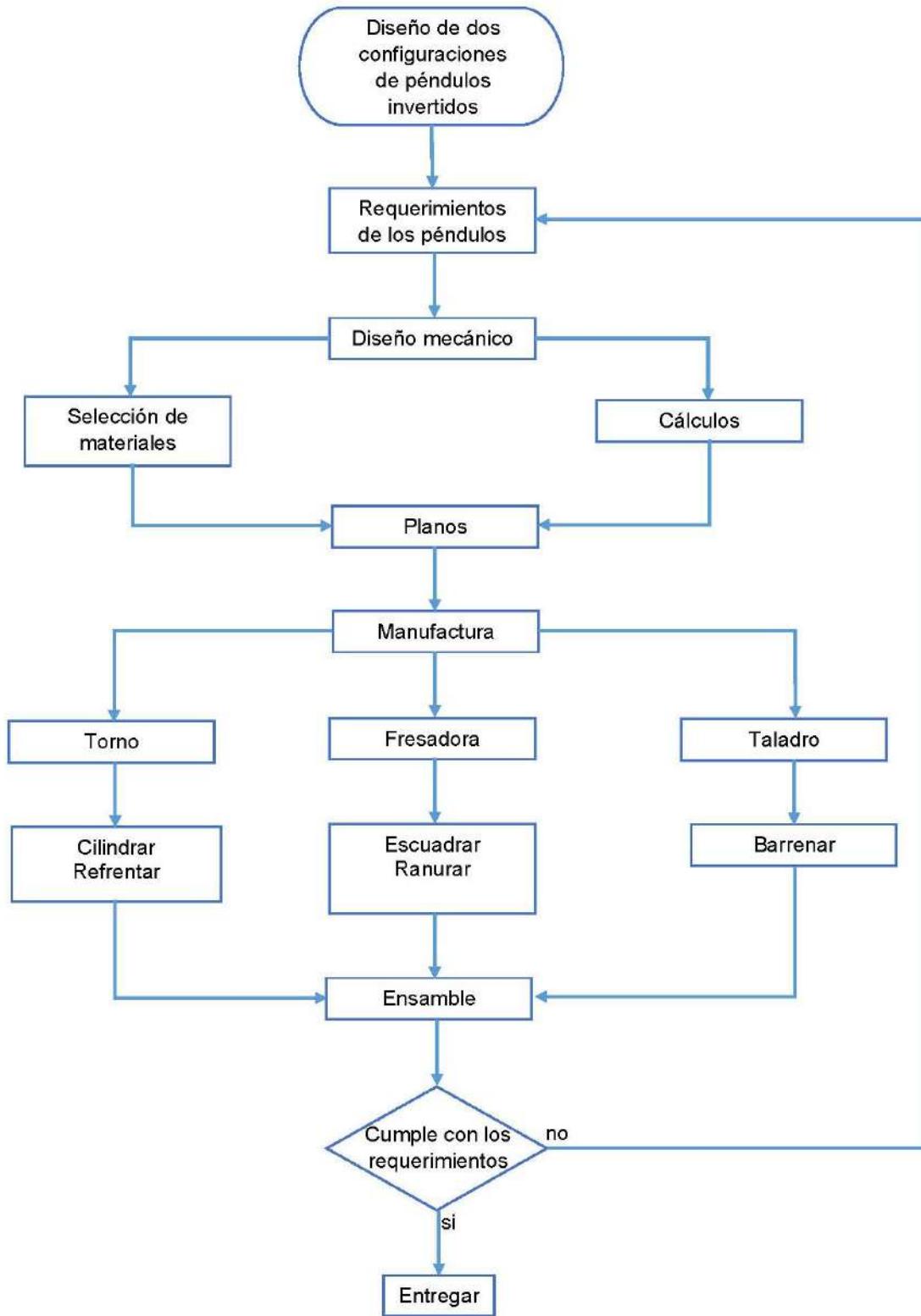


Figura 4.1: Diagrama de flujo de procesos, para manufactura de péndulos

Velocidades de Corte, Avance y RPM

Para el maquinado de las piezas de los péndulos se realizaron los cálculos siguientes para las velocidades de avance y RPM de cada una de las piezas, dependiendo del maquinado ya sea en torno, fresadora o taladro.

Velocidad de Corte

Refrendado, torneado, rectificación						
	Desbastado		Acabado		Roscado	
Material	pies/min	m/min	pies/min	m/min	pies/min	m/min
Acero de máquina	90	27	100	30	35	11
Acero de herramienta	70	21	90	27	30	9
Hierro fundido	60	18	80	24	25	8
Bronce	90	27	100	30	25	8
Aluminio	200	61	300	93	60	18

Tabla 4.1: Tabla de Velocidades de Corte para Torno y Fresadora

	Velocidad	
Material	pie/min /	m/min
Aluminio	130 a 200	39 a 60
Latón	130 a 180	39 a 55
Bronce	50 a 100	15 a 30
Hierro fundido	50 a 80	14 a 24
Aceros para máquinas	50 a 70	15 a 21
Aceros aleados	30 a 40	9 a 12

Tabla 4.2: Tabla de Velocidades para Rimado Recomendadas para las Rimas de Acero de Alta Velocidad

Velocidad de Avance

Material	Desbaste		Acabado	
	Pulgadas	Milímetros	Pulgadas	Milímetros
Acero de máquina	0.010 - 0.020	0.25 - 0.50	0.003 - 0.010	0.07 - 0.25
Acero de herramientas	0.010 - 0.020	0.25 - 0.50	0.003 - 0.010	0.07 - 0.25
Hierro fundido	0.015 - 0.025	0.40 - 0.65	0.005 - 0.12	0.13 - 0.30
Bronce	0.015 - 0.025	0.40 - 0.65	0.003 - 0.010	0.07 - 0.25
Aluminio	0.015 - 0.030	0.40 - 0.75	0.005 - 0.010	0.13 - 0.25

Tabla 4.3: Avances para diversos materiales con el uso de herramientas para alta velocidad

Diámetro en pulgadas	Avance en pulgadas por revolución	Diámetro en mm	Avance en mm por revolución
Abajo de $\frac{1}{8}$ "	0.001 a 0.002"	Abajo de 3mm	0.02 a 0.05mm
$\frac{1}{8}$ " a $\frac{1}{4}$ "	0.002 a 0.004"	3mm a 6mm	0.05 a 0.10mm
$\frac{1}{4}$ " a $\frac{1}{2}$ "	0.004 a 0.007"	6mm a 13mm	0.10 a 0.18mm
$\frac{1}{2}$ " a 1"	0.007 a 0.015"	13mm a 25mm	0.18 a 0.40mm
1" a más	0.015 a 0.025"	25mm a más	0.40 a 0.60mm

Tabla 4.4: Avances para el barrenado en el taladro

RPM

Sistema	Formula	Vc	D
Métrico	$RPM = \frac{V_c \cdot 300}{D}$	m/min	mm
Ingles	$RPM = \frac{V_c \cdot 4}{D}$	ft/min	in

Tabla 4.5: Calculo de Revoluciones Por Minuto, para taladro, torno y fresaora

Nomenclatura:

300 y 4 = constantes

Vc = Velocidad de corte

D = Diámetro del material o herramienta de corte

RPM = Revoluciones Por Minuto

Carro Péndulo

Pieza	Material	Maquina a utilizar	Velocidad de avance para desbaste	Velocidad de avance para acabado	RPM para torno/fresadora	RPM para taladro	Plano
Agarre de Flecha	Aluminio T-6061	Torno y Taladro de Banco	0.50 mm	0.20 mm	1,400	900	1
Barra péndulo	Acero Inoxidable 304	Torno	0.35 mm	0.20 mm	900		2
Base de Banda	Aluminio T-6061	Fresadora y Taladro de Banco	0.60 mm	0.18 mm	1,400	900	3
Bases	Bronce SAE 62	Fresadora y Taladro de Banco	0.50 mm	0.19 mm	650	800	4
Rieles	Acero Inoxidable 304	Torno	0.40 mm	0.20 mm	1,500		5
Soportes	Aluminio T-6061	Fresadora y Taladro de Banco	0.50 mm	0.20 mm	1,400	900	6
Soportes de Motor	Aluminio T-6061	Fresadora y Taladro de Banco	0.50 mm	0.20 mm	1,500	900	7
Soporte de Potenciómetro	Aluminio T-6061	Fresadora y Taladro de Banco	0.50 mm	0.20 mm	1,500	900	8

Tabla 4.6: Tabla de Materiales, Avances y Maquinados de Carro Péndulo

Péndulo de Furuta

Pieza	Material	Maquina a utilizar	Velocidad de avance para desbaste	Velocidad de avance para acabado	RPM para torno/fresadora	RPM para taladro	Plano
Brida	Aluminio T-6061	Torno y Taladro de Banco	0.50 mm	0.20 mm	700	600	9
Brida para motor	Aluminio T-6061	Fresadora y Taladro de Banco	0.50 mm	0.20 mm	700	600	10
Eje	Aluminio T-6061	Torno y Taladro de Banco	0.50 mm	0.20 mm	1,150	800	11
Placa Superior	Aluminio T-6061	Fresadora y Taladro de Banco	0.35 mm	0.18 mm	700	600	12
Ángulo	Aluminio T-6061	Fresadora y Taladro de Banco	0.60 mm	0.20 mm	1,400	600	13
Soportes Cuadrados	Acero 1018	Fresadora y Taladro de Banco	0.35 mm	0.20mm	700	650	14
Placa Inferior	Aluminio T-6061	Fresadora y Taladro de Banco	0.35 mm	0.18 mm	700	600	15
Barra	Aluminio T-6061	Torno Taladro de Banco	0.50 mm	0.20 mm	1,150	570	16

Tabla 4.7: Tabla de Materiales, Avances y Maquinados de Péndulo de Furuta

4.1. Relación de Masa, por Elementos de Péndulos

Los datos de la masa, son esenciales para lograr las simulaciones de Sumulink. Por lo tanto, se presentan en la siguiente tabla.

Elemento de Péndulo Carro	Masa en Kg
Varilla de péndulo-carro	0.086
Brida de péndulo-carro	0.014
Potenciómetro, Soporte de Potenciómetro y Base de Banda	0.230
Banda de péndulo-carro	0.028
Elemento de Péndulo de Furuta	Masa en Kg
Varilla de péndulo de Furuta	0.022
Eje y Soporte de Motor	0.088
Motor de Varilla	0.096

Tabla 4.8: Relación de Masa por Elementos de los Péndulos

Capítulo 5

Selección de Materiales Para la Construcción de los Péndulos

En la selección de materiales la calidad puede definirse como la conformidad relativa con las especificaciones de diseño, o también es común encontrar la satisfacción en un producto, cumpliendo todas las expectativas que busca algún cliente; en este caso la Academia de Ingeniería Mecatrónica, por tal motivo se recurre a la utilización de los materiales ferrosos de entre los cuales podemos mencionar los materiales aleados, por tanto, es necesario tener conocimiento dentro de la manufactura sobre aspectos trascendentales para poder diferenciar dentro de una gran variedad de aleaciones existentes en la actualidad.

Además, es importante hacer mención de las diferentes características de los materiales aleados, en cuanto a su durabilidad, características físicas, químicas e inclusive a las características eléctricas.

5.1. Aluminio

Las características sobresalientes del aluminio y sus aleaciones son su relación resistencia-peso, su resistencia a la corrosión y su alta conductividad térmica y eléctrica. La densidad de este metal es de aproximadamente $2\ 770\ kg/m^3$ ($0.10\ lbf/pulg^3$), que se compara positivamente con la del acero, de $7\ 750\ kg/m^3$ ($0.28\ lbf/pulg^3$). El aluminio puro tiene una resistencia a la tensión de aproximadamente 90 MPa (13 kpsi), pero se puede mejorar mucho mediante el trabajo en frío y también al alearlo con otros materiales. Su módulo de elasticidad, así como los de sus aleaciones, es de 71.7 GPa (10.4 Mpsi), lo que significa que su rigidez es aproximadamente un tercio de la del acero.

El costo y la resistencia del aluminio y sus aleaciones los colocan entre los materiales más versátiles desde el punto de vista de la fabricación. El aluminio se procesa mediante la fundición en arena o en matriz, trabajo en caliente o en frío, o extrusión. Sus aleaciones

se pueden maquinar, trabajar en prensa, soldar en forma directa, al bronce o al estaño. El aluminio puro se funde a 660°C (1,215°F), lo que lo hace muy deseable para producir en moldes permanentes o de arena. Está comercialmente disponible en forma de placa, barra, lámina, hoja, varilla, tubo, en perfiles estructurales y extruidos. Deben tomarse ciertas precauciones al unir aluminio mediante soldadura directa al bronce o al estaño; los anteriores métodos de unión no se recomiendan para todas las aleaciones.

La resistencia a la corrosión de las aleaciones de aluminio depende de la formación de un recubrimiento delgado de óxido. Dicha película se forma de modo espontáneo porque el aluminio es inherentemente muy reactivo. La erosión constante o la abrasión remueven esta película y permiten que se produzca la corrosión. Se puede producir una película de óxido muy pesada mediante el proceso llamado anodizado. En este proceso el elemento de aluminio se coloca como el ánodo en un electrolito, que puede ser ácido crómico, ácido oxálico o ácido sulfúrico. En este proceso es posible controlar el color de la película resultante de manera muy exacta.

Los elementos más útiles para alejar con el aluminio son el cobre, el silicio, el manganeso, el magnesio y el zinc. Las aleaciones de aluminio se clasifican como aleaciones fundidas o forjadas. Las primeras tienen porcentajes más altos de elementos de aleación para facilitar la fundición, lo que dificulta el trabajo en frío. Muchas de las aleaciones fundidas y algunas de las forjadas no pueden endurecerse por medio de un tratamiento térmico. En las aleaciones que se tratan térmicamente se utiliza un elemento de aleación que se disuelve en el aluminio. El tratamiento térmico consiste en el calentamiento del elemento hasta una temperatura que permita que el elemento aleante pase en solución, y luego se templa rápidamente de manera que dicho elemento no se precipite.

El proceso de envejecimiento se acelera si el aluminio se calienta de manera ligera, lo cual proporciona una dureza y resistencia aún mayores. Una de las aleaciones tratable térmicamente que mejor se conoce es el duraluminio o 2017 (4% Cu, 0.5% Mg, 0.5% Mn). Esta aleación se endurece en cuatro días a temperatura ambiente. Debido a este envejecimiento rápido, la aleación debe almacenarse bajo refrigeración después del templado y antes del formado, o se forma de inmediato después del templado. Se han desarrollado otras aleaciones (como la 5053) que se endurecen por envejecimiento en forma mucho más lenta, de manera que sólo se requiere una refrigeración moderada antes del formado. Después de que éste se envejece de manera artificial en un horno, posee aproximadamente la misma resistencia y dureza que las aleaciones 2024. Estas aleaciones de aluminio que no pueden tratarse térmicamente sólo se endurecen mediante el trabajo en frío. Tanto el endurecimiento por trabajo como el endurecimiento que se produce mediante el tratamiento térmico pueden removese por medio de un proceso de recocido.

5.2. Bronce

El *bronce al silicio*, que contiene 3% de silicio y 1% de manganeso además del cobre, presenta propiedades mecánicas iguales a las del acero dulce, así como buena resistencia a la corrosión. Se puede trabajar en frío o en caliente, maquinar o se puede soldar. Es útil donde quiera que se necesite resistencia a la corrosión combinada con resistencia.

El *bronce al fósforo*, que se elabora con hasta 11% de estaño y cantidades pequeñas de fósforo, es muy resistente a la fatiga y a la corrosión. Presenta una alta resistencia a la tensión y una alta capacidad para absorber energía y es también resistente al desgaste. Estas propiedades lo hacen muy útil como material para resortes.

El *bronce al aluminio* es una aleación tratable de manera térmica que contiene hasta 12% de aluminio. La aleación muestra resistencia y propiedades de resistencia a la corrosión que son mejores que las del latón y, además, sus propiedades pueden variar mucho mediante el trabajo en frío, el tratamiento térmico o cambiando su composición. Cuando se agrega hierro en cantidades de hasta 4%, la aleación muestra un alto límite de resistencia a la fatiga y una excelente resistencia al desgaste.

El *bronce al berilio* es otra aleación tratable de modo térmico, que contiene aproximadamente 2% de berilio. Esta aleación es muy resistente a la corrosión y tiene alta resistencia, dureza elevada y gran resistencia al desgaste. Aunque es una aleación muy costosa, se emplea para resortes y otras partes sometidas a cargas de fatiga donde se requiere resistencia a la corrosión. Con una ligera modificación, la mayoría de las aleaciones con base de cobre están disponibles en forma de fundición.

5.3. Aceros Inoxidables

Las aleaciones con base de hierro que contienen al menos 12% de cromo se llaman aceros inoxidables. La característica más importante de estos aceros es su resistencia a muchas condiciones corrosivas, pero no a todas. Los cuatro tipos disponibles son los aceros al cromo ferríticos, los aceros al cromo-níquel austeníticos, así como los aceros inoxidables martensíticos y endurecibles por precipitación.

Los aceros al cromo ferríticos presentan un contenido de cromo que varía de 12 a 27%. Su resistencia a la corrosión es una función del contenido de cromo, de manera que las aleaciones que contienen menos de 12% aún presentan cierta resistencia a la corrosión, aunque se oxidan. El endurecimiento por templado de estos aceros es una función del contenido de cromo y de carbono. Los aceros con un contenido muy alto de carbono tienen un endurecimiento por templado hasta aproximadamente 18% de cromo, mientras que en los intervalos de bajo carbono desaparece casi con 13% de cromo. Si se agrega un poco de níquel, estos aceros retienen un cierto grado de endurecimiento con un contenido de hasta 20% de cromo. Si el contenido de cromo excede 18%, es muy difícil soldarlos, y en los niveles muy altos de cromo la dureza se hace tan grande que se debe poner atención

especial a las condiciones de servicio. Como el cromo es costoso, el diseñador debe elegir el contenido menor que sea consistente con las condiciones corrosivas.

Los aceros inoxidables al cromo-níquel retienen la estructura austenítica a temperatura ambiente, por lo que no son susceptibles al tratamiento térmico. La resistencia de estos aceros se mejora mucho mediante el trabajo en frío. No son magnéticos a menos que se trabajen en frío. Sus propiedades de endurecimiento mediante trabajo también causan que sean difíciles de maquinar. Todos los aceros al cromo-níquel se soldan y muestran mayores propiedades de resistencia a la corrosión que los aceros al cromo simples. Cuando se agrega más cromo para lograr una mayor resistencia a la corrosión, también debe agregarse más níquel si se desea mantener las propiedades austeníticas.

Capítulo 6

Fricción y Desgaste

La fricción y el desgaste son fenómenos presentes en la industria, ya sea en piezas de máquinas o en la maquinaria en sí. Los rodamientos se utilizan en casi todas las máquinas que poseen movimiento giratorio. No obstante, los fabricantes protegen los rodamientos, a causa de las altas temperaturas y otros fenómenos presentes durante su operación, las capas de lubricante llegan a romperse causando un deterioro. Este deterioro progresivo acelera la vida útil del rodamiento, presentando perdidas físicas y económicas.

Los nombres, cojinetes de rodamiento, o simplemente rodamiento, y cojinete antifricción, se emplean para describir la clase de soporte de eje, en el que la carga principal se transmite a través de elementos que están en contacto rodante y no deslizante. La Figura 6.1 muestra las partes principales de un rodamiento. En un rodamiento, la fricción inicial es aproximadamente dos veces la fricción en marcha, y resulta despreciable en comparación con el rozamiento inicial en un rodamiento de casquillo o chumacera. La carga, la velocidad y la viscosidad de operación del lubricante afectan los parámetros principales de un rodamiento.

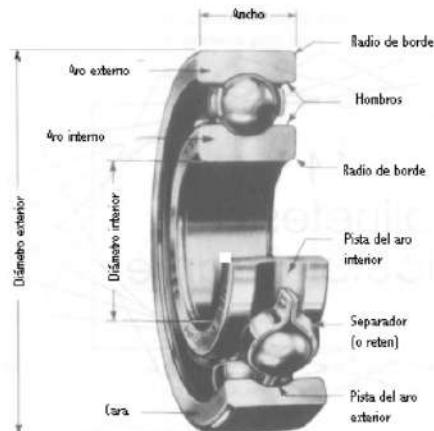


Figura 6.1: Partes de un Rodamiento

Existe un área de contacto aparente en la interface de ambas superficies, aunque en las puntas de las asperezas el área real de contacto sólo se presenta en unos cuantos puntos, a causa de esto las cargas, en la interface entre el elemento rodante y las pistas, en los rodamientos actúan en pequeñas áreas de contacto en la unión de los dos miembros. Estas cargas inducen esfuerzos que se presentan en la superficie de contacto. Un rodamiento presenta un esfuerzo normal de compresión por encima de los 1380N/mm^2 . En algunas aplicaciones y durante pruebas de resistencia, los esfuerzos normales en las superficies exceden los 3449N/mm^2 . El área efectiva de contacto aumenta rápidamente conforme los esfuerzos actúen en la profundidad bajo la superficie rodante. Los esfuerzos de compresión que se presentan en la superficie no logran penetrar completamente el miembro rodante. Los contactos de deformación se generan a causa de los esfuerzos de deformación, esto a causa del comportamiento respecto a la deformación que presentan los rodamientos. Estas deformaciones son de 0.025 mm o menos en rodamientos de acero.

Algunos tipos de rodamientos que se emplean en la práctica, son los rodamientos de bolas y los rodamientos de rodillos. De estos los más usados son los rodamientos de bolas, a causa de que presentan una mayor capacidad para cargas axiales y radiales, además de ser usados para grandes velocidades.

6.1. Principios de Fricción, Desgaste y Lubricación

Los principales procesos que tienen lugar en la superficie de fricción de rodamientos ocurren bajo grandes presiones locales. Estas presiones son suficientemente grandes aun cuando la carga total del par deslizante sea pequeña, ya que el área total de puntos de contacto es muy pequeña. [18]

6.1.1. Fricción

La fuerza necesaria para romper las uniones de dos superficies que entran en contacto y deslizarse, es igual a la fuerza de fricción; otra definición sería: la resistencia al movimiento la cual existe cuando un sólido se mueve de manera tangencial con respecto a otro y en el cual existe contacto entre ambos, además, si una superficie es más dura, sus asperezas rompen las asperezas de la superficie más blanda. [19] Así mismo si la superficie más blanda, tiene un esfuerzo cortante promedio τ , y el área real de contacto es A_t , entonces la fuerza de fricción necesaria para romper las asperezas y deslizar una superficie sobre otra es $F = A_t \tau$. El área real de contacto A_t es proporcional a la carga e independiente del tamaño y la forma de las asperezas, por lo que, la fuerza de fricción también será proporcional a la carga y no dependerá del tamaño y la forma de las asperezas, por tanto, se tiene:

$$\mu = \frac{F}{W} = \frac{A_t \tau}{A_t \sigma_y} = \frac{\tau}{\sigma_y} = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{presión de flujo}} \quad (6.1)$$

donde μ es el coeficiente de fricción. Así, el coeficiente de fricción para materiales sin alguna película contaminante en su superficie se determina por sus propiedades de esfuerzo cortante y presión de flujo.

En los rodamientos, se presentan dos tipos de movimiento principales: (1) de rodadura y (2) de deslizamiento. Para la rodadura, existen dos diferentes fenómenos: en el primero, el cuerpo rodante es de forma irregular, y el segundo tiene una superficie lisa. [19]

El primer caso se muestra en la Figura 6.2, la fuerza F_R en N , que inicia el movimiento, es igual a L multiplicado por $\tan \theta$, donde L es la carga en N , y θ es el ángulo entre la vertical y la línea de unión del centro de gravedad del cuerpo y la proyección donde existe la rodadura. De aquí el coeficiente de fricción en rodadura f_R se expresa:

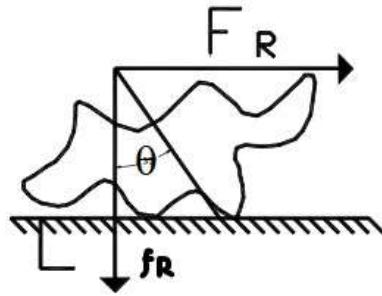


Figura 6.2: Rodadura de Contacto Irregular

$$f_R = \frac{F_R}{L} = \tan \theta \quad (6.2)$$

En el caso de rodadura continua, θ cambia consecutivamente, tomando frecuentemente valores negativos; a velocidad constante toma valores positivos y negativos. Drutowski mostró, por ejemplo, que el coeficiente de fricción de rodadura es de 0.0001, valor que obtuvo en experimentos con bolas de acero de 12.7 mm de diámetro y una carga de 356 N. Uno de los fenómenos básicos que existen es la fricción de rodadura. Podría restringirse a cuerpos cercanos a formas perfectas con pequeñas rugosidades en la superficie; el componente de aspereza de la fuerza de fricción es muy bajo. [20] [21].

6.1.2. Desgaste

El daño ocasionado a una superficie como resultado de un movimiento relativo entre dos superficies, sería una definición de desgaste. Este daño puede ser en forma de pérdida de material, formación de microgrietas o también en términos de deformación plástica, se presenta por la fuerte adhesión que existe de las uniones y la dificultad para romperlas. Las tres variables que más afectan el desgaste son el área de contacto, la fuerza de unión interfacial y la dinámica de materiales. Uno de los primeros intentos de correlacionar estos

factores se debe a Archard, quien propuso que el volumen del material removido está dado por:

$$V = kS \left(\frac{L}{H} \right) \quad (6.3)$$

donde V es el volumen del material removido, S la distancia recorrida, L la carga aplicada, H la dureza de la muestra y k es una constante de proporcionalidad. De aquí parte para definir los principales tipos de desgaste, que son:

Desgaste Adhesivo: Sucede cuando dos superficies lisas entran en contacto deslizando la una respecto a la otra, de modo que pequeños fragmentos de material son arrancados de una superficie y adheridos a otra.

Desgaste Abrasivo: La abrasión se presenta cuando una superficie dura, o una superficie blanda con partículas duras, se desliza sobre una superficie blanda, causando una serie de cavidades y desplazando material de estas cavidades en forma de partículas generalmente libres.

Desgaste Corrosivo: Cuando las superficies en contacto se encuentran en un medio corrosivo, los productos de la corrosión formarán una capa encima de las superficies que frenará o inhibirá la corrosión. Sin embargo, el continuo deslizamiento podría arrancar este capa continuando así el ataque corrosivo.

Desgaste por Fatiga Superficial: Se presenta durante el deslizamiento o rodamiento repetitivo a lo largo de una huella. La exposición a ciclos de carga y descarga de las superficies puede inducir la formación de grietas superficiales o justo por debajo de ella, que podría llegar a romper la superficie en forma de grandes fragmentos, dejando grandes marcas en la superficie.

Capítulo 7

Simulaciones y resultados de Simulink

Simulink es un software hecho para modelar, simular y analizar sistemas dinámicos. Soporta tanto sistemas lineales como no lineales, modelando en tiempo continuo, tiempo discreto o en forma mixta. Los sistemas a modelar también pueden tener velocidades múltiples, es decir, tener diferentes partes que se manejen a cinéticas diferentes. Simulink permite realizar preguntas sobre un sistema, modelarlo y ver que sucede. Con Simulink, fácilmente se pueden construir modelos desde la nada, o tomando un modelo existente y agregarlo a él. Miles de ingenieros alrededor del mundo usan Simulink para modelar y resolver diferentes problemas en una gran variedad de industrias.

Los siguientes puntos explican las herramientas que posee Simulink:

7.1. Herramientas para Diseño de Modelos Básicos

- Con Simulink, se puede mover más allá de los modelos linealizados y idealizados para explorar modelos no lineales que describen fenómenos más reales.
- Simulink transforma el PC en un laboratorio para modelar y analizar sistemas que simplemente no podría ser posible o práctico de otra manera.
- Simulink tiene numerosos demos que modelan una gran cantidad de fenómenos de la vida real.
- Para modelar, Simulink entrega una Interfaz Gráfica para el Usuario (GUI) para construir los modelos como diagramas de bloques, usando operaciones de clic-and-drag del mouse. Con la ayuda de esta interfaz, se pueden dibujar los modelos como si se realizaran con lápiz y papel. Simulink incluye una extensa librería de bloques

para fuentes, resultados, componentes lineales y no lineales y conectores, además de poder crear nuestros propios bloques (Escribir funciones-S).

- Los modelos creados son jerárquicos, con lo cual se pueden crear modelos usando varias ventanas. Se puede ver el sistema desde el nivel más alto, para luego mediante un doble clic revisar los diversos subsistemas insertados en el modelo general. Esta forma de presentación presenta la ventaja de analizar cómo se encuentra organizado el modelo y cómo sus partes interactúan.

7.2. Herramientas para Simulación

Una vez definido el modelo, se puede simular, usando una suerte de métodos matemáticos de integración, tanto desde los menús de Simulink o ingresando comandos en la ventana de comandos de MATLAB. Los menús son convenientes para el trabajo interactivo, mientras que la línea de comandos es útil cuando se realiza una serie de simulaciones.

Usando scopes y otros bloques de salida, se puede ver los resultados de la simulación mientras ésta se ejecuta. Además, se puede cambiar algunos parámetros y analizar qué sucede. Los resultados de la simulación pueden ser colocados en el workspace de MATLAB para su visualización y reprocesamiento.

7.3. Herramientas para el Análisis

Las herramientas de Análisis incluyen linealización y arreglo de los modelos, los cuales pueden ser accedidos desde la línea de comandos de MATLAB, junto con las numerosas herramientas que posee MATLAB y sus toolboxes de aplicaciones. Como MATLAB y Simulink se encuentran integrados se puede simular, analizar y revisar los modelos en cualquiera de los dos ambientes.

7.4. Simulación de Pendulo-Carro

Los resultados obtenidos en las simulaciones son bajo condiciones ideales, tomando en cuenta que en la práctica real pueden ser diferentes y comportarse de forma diferente.

7.4.1. Código de función de bloque utilizado

```
function dx = PenduloCarro(x,u)
```

Definicion de Parametros

$m=0.356$; masa del carro y varilla

$g=9.81$; gravedad

$L=0.39$; longitud de la varilla

$J=(m*L^2)/3$ inercia

$b=0.5$ coeficiente de friccion viscosa

Definicion de variables

$x_1=x(1)$;

$x_2=x(2)$;

$$\begin{aligned} dx = [x_2; \dots \\ m*g*L/J*\sin(x_1) - b/J*x_2 + 1/J*u]; \end{aligned}$$

7.4.2. Diagrama de bloques creado

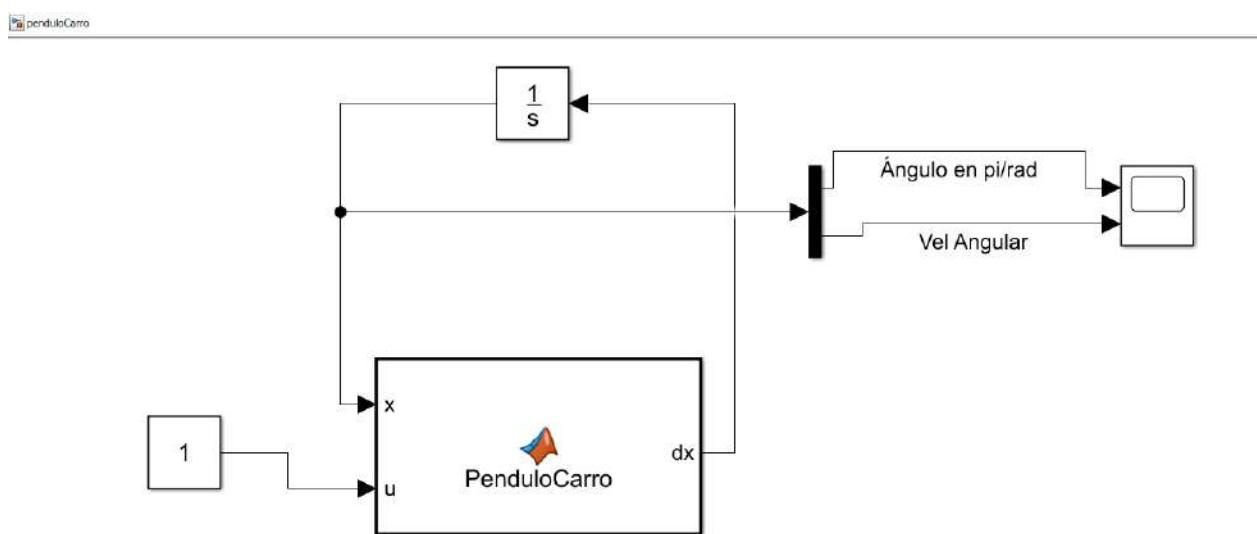


Figura 7.1: Diagrama de bloques creado para hacer la simulación del péndulo-carro

7.4.3. Graficas obtenidas

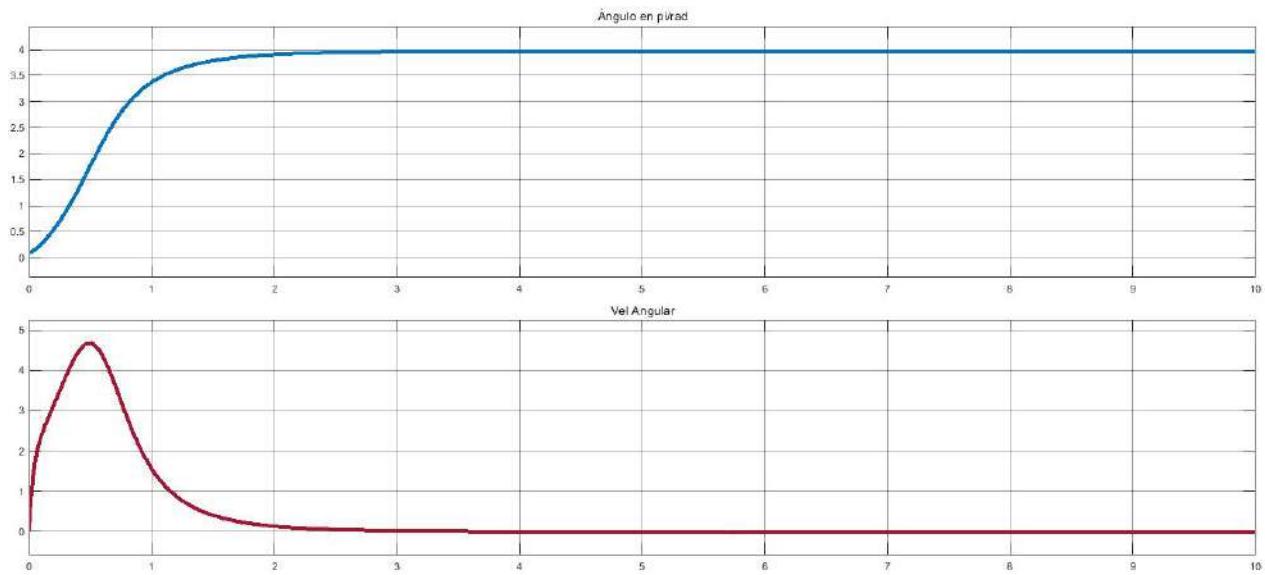


Figura 7.2: Graficas obtenidas por medio de la simulación del péndulo-carro.

En la primera se muestra el ángulo de la varilla en $\pi/\text{radianes}$ (eje Y) con respecto al tiempo en segundos (eje X). La segunda muestra la velocidad angular (eje Y) y su relación con el tiempo (eje X) de la misma.

Conclusiones

Finalmente, podemos decir que cumplimos con los objetivos planteados al principio de esta tesis, entregando dos péndulos para su uso y experimentación dentro de los laboratorios de Ingeniería Mecatrónica del Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan.

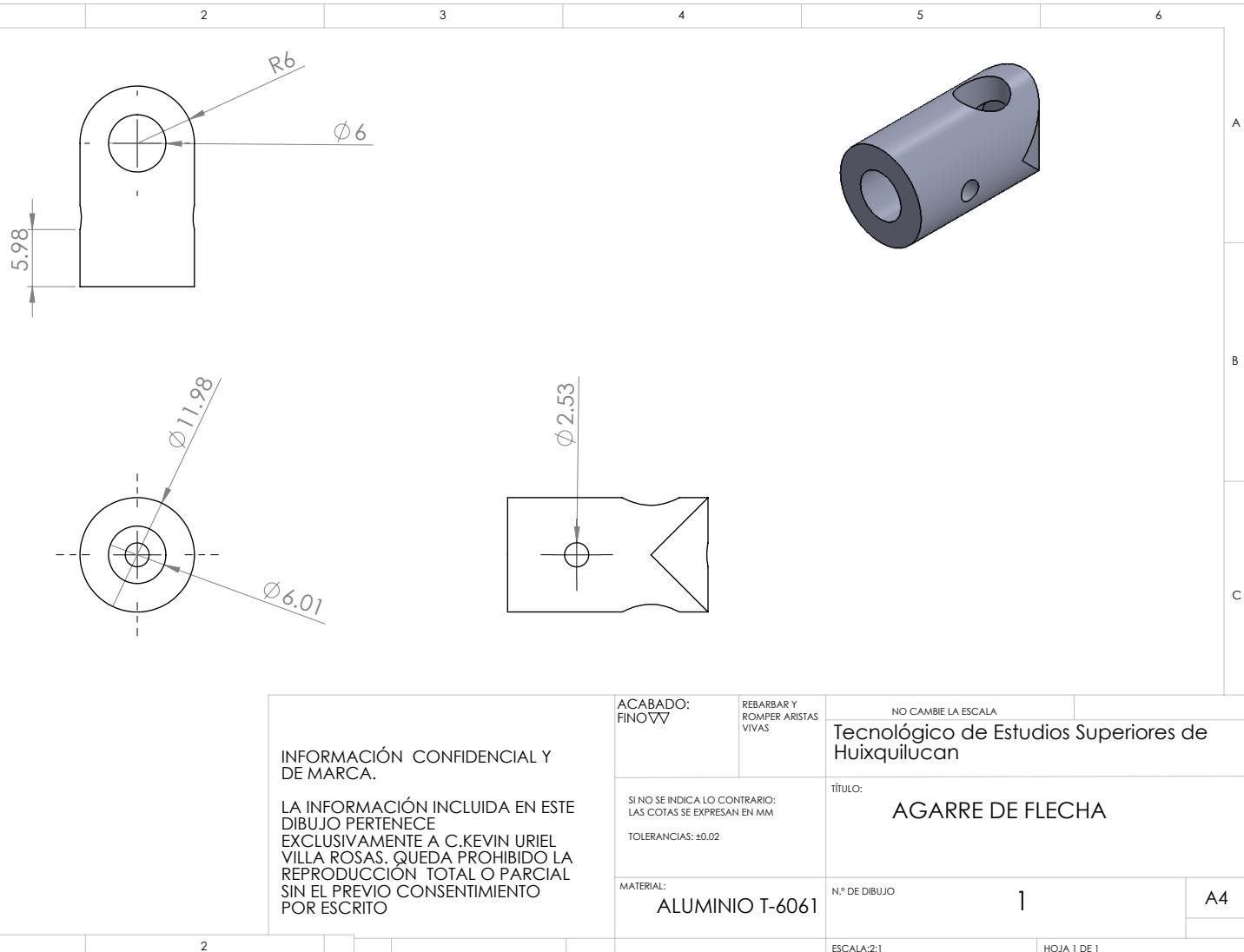
Nos enfrentamos durante el desarrollo de este trabajo a algunas adversidades las cuales se fueron superando sin más complicaciones. Logrando concluir con el diseño y ensamblaje de los dos sistemas de péndulos, de la misma forma se presentaron las simulaciones en software especializado.

Dicho trabajo se enfoca únicamente en el diseño y la construcción mecánica, por tanto, se dejan listas las adaptaciones para que en trabajos futuros se instalen las tarjetas de control electrónico y un sistema de control para los péndulos y así tener un trabajo integral.

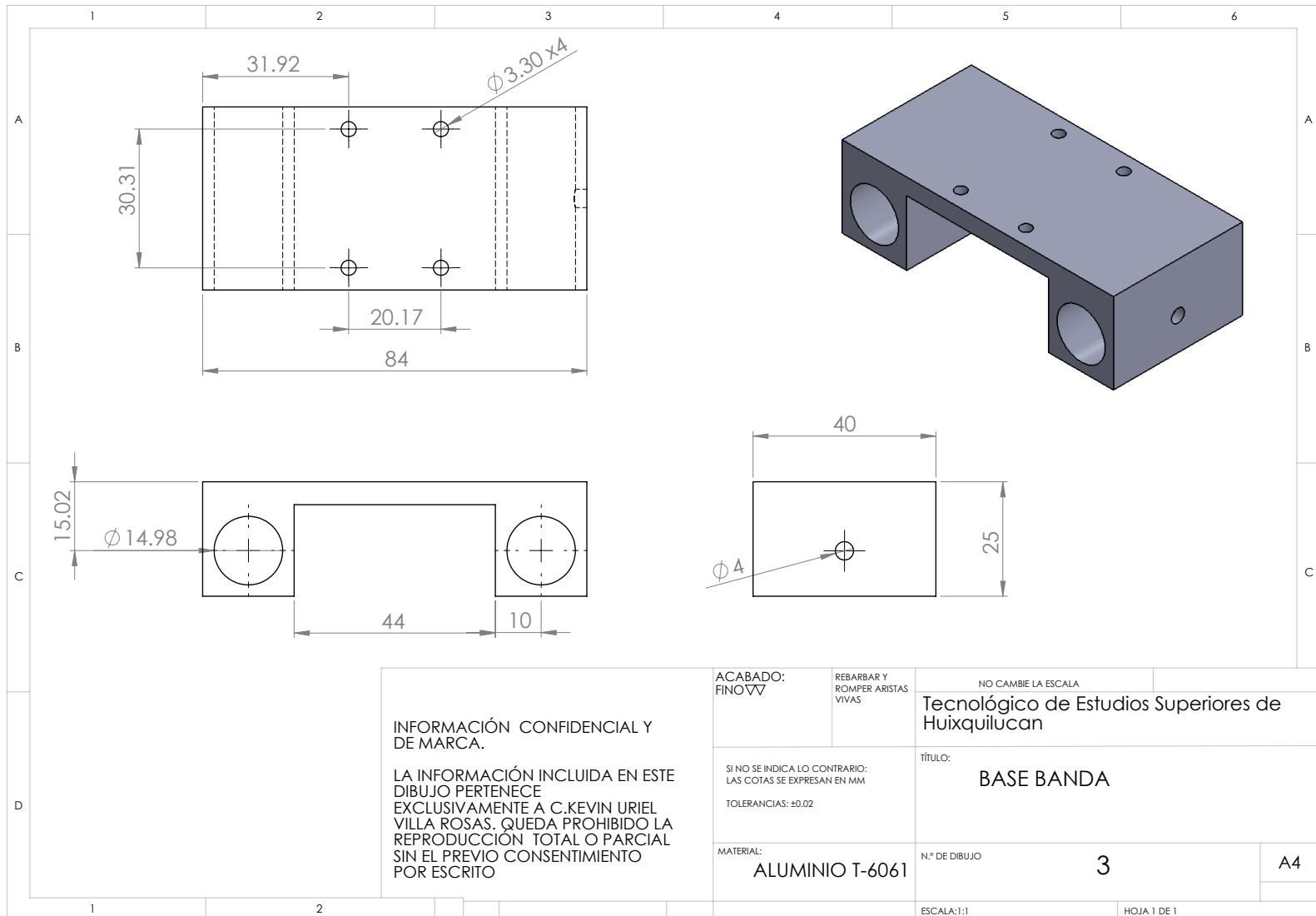
Finalmente, se puede concluir que para la manufactura de los péndulos no es necesaria una inversión monetaria elevada con respecto a los materiales a maquinar, sin embargo, la parte de los motores si es un poco más elevada, pero comparando aun así dicho gasto con la relación de beneficio es más redituable diseñar y construir nuestros propios péndulos que comprar algunos modelos comerciales.

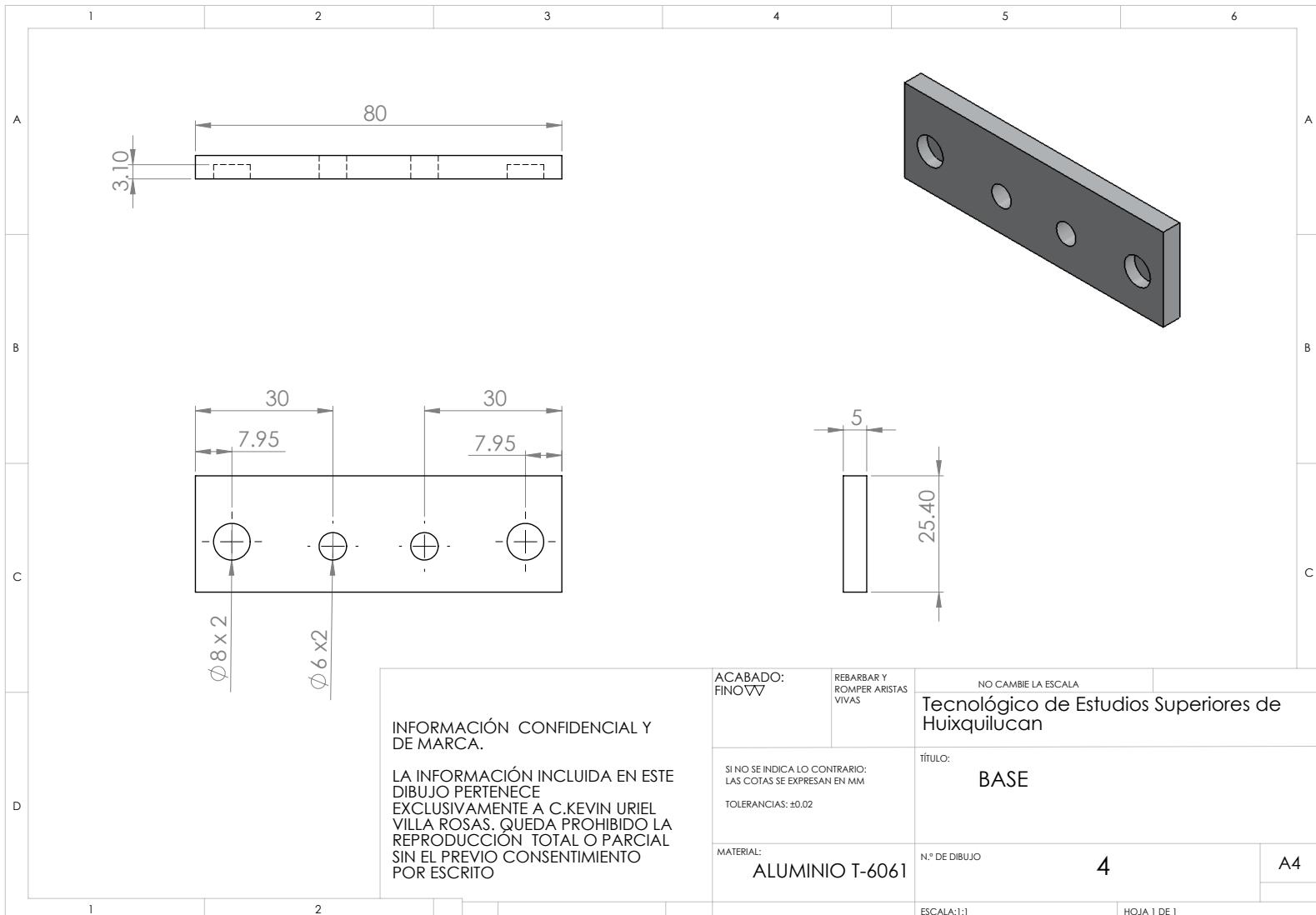
Apéndices

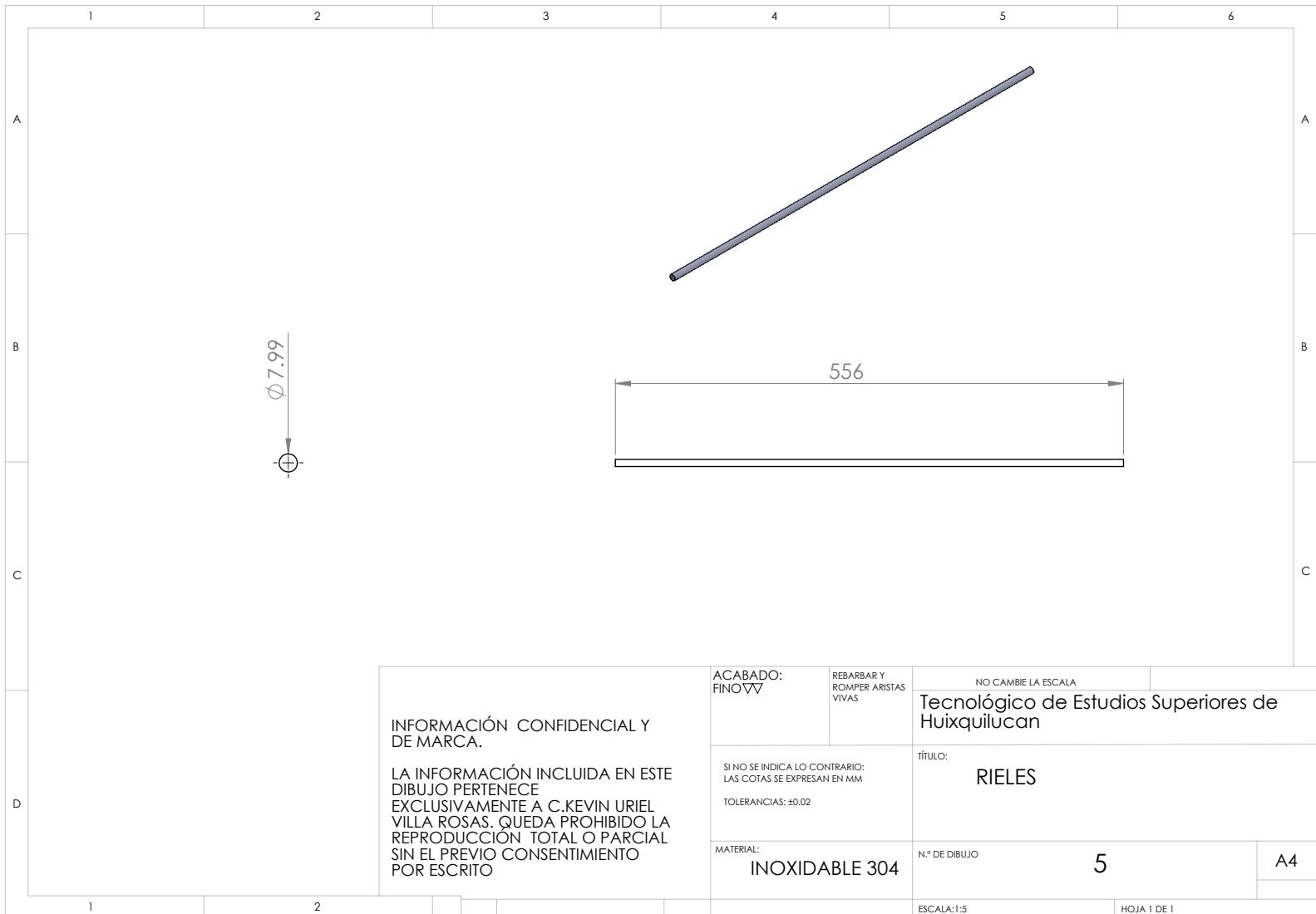
Planos y Explosiónados

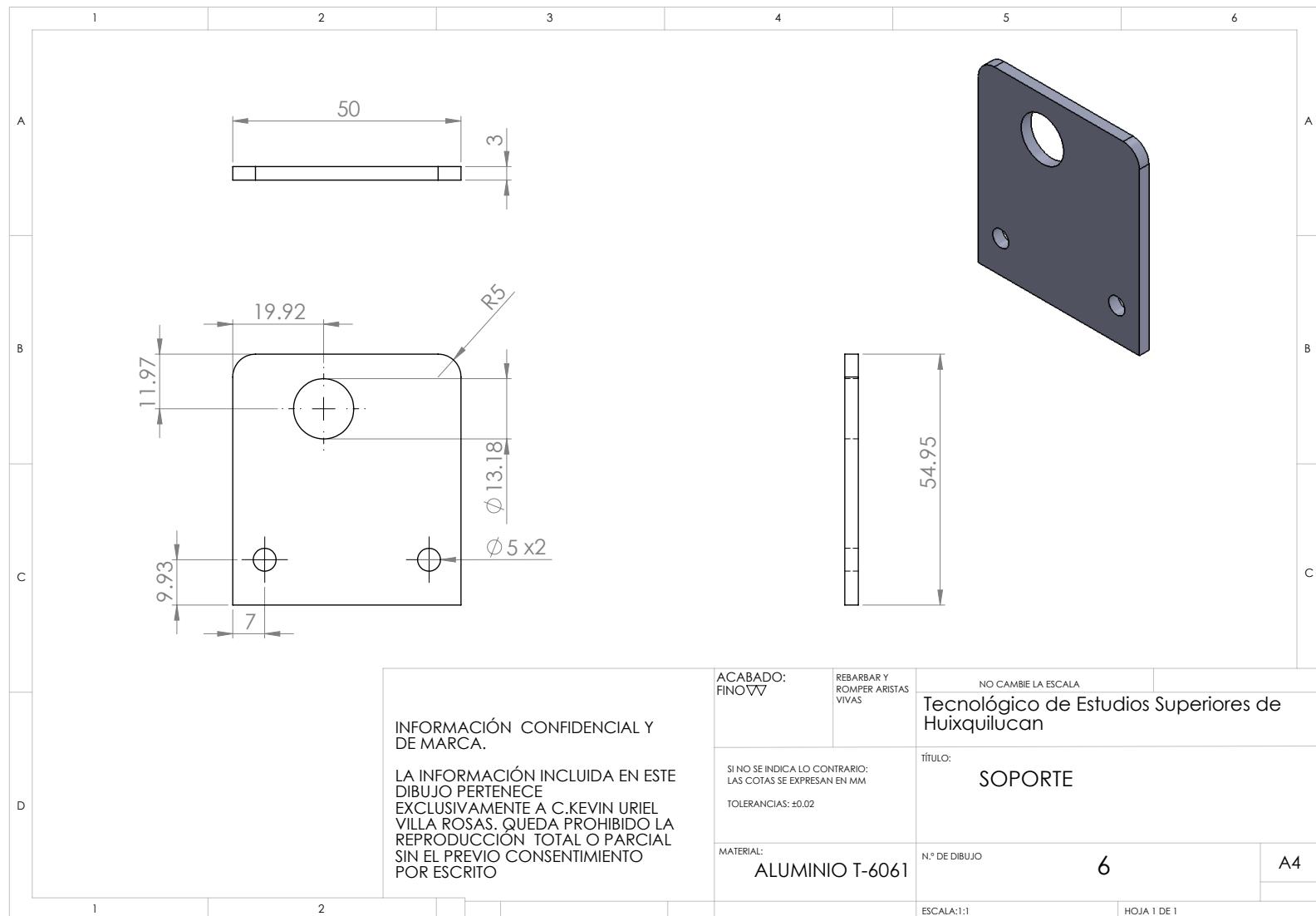


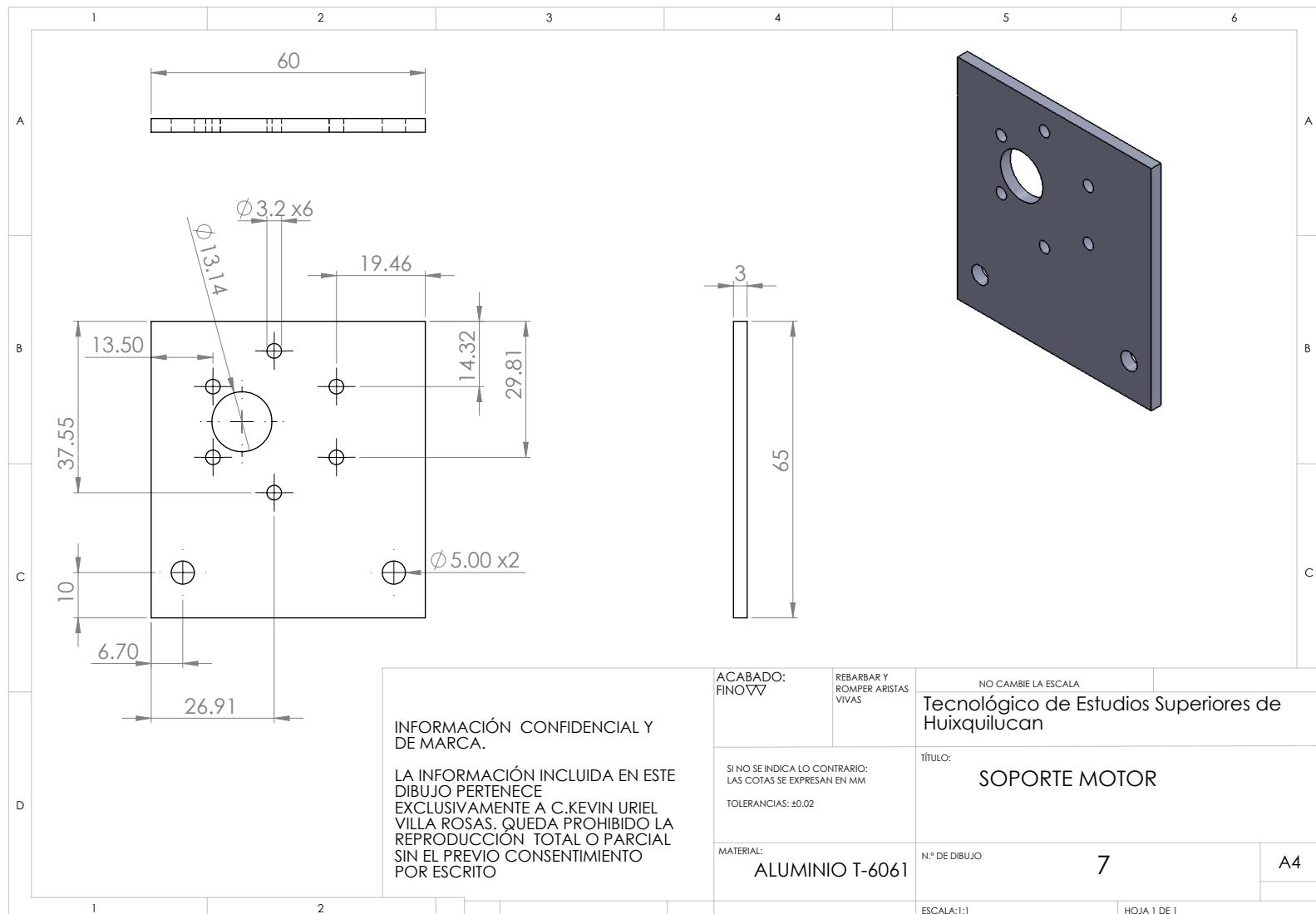


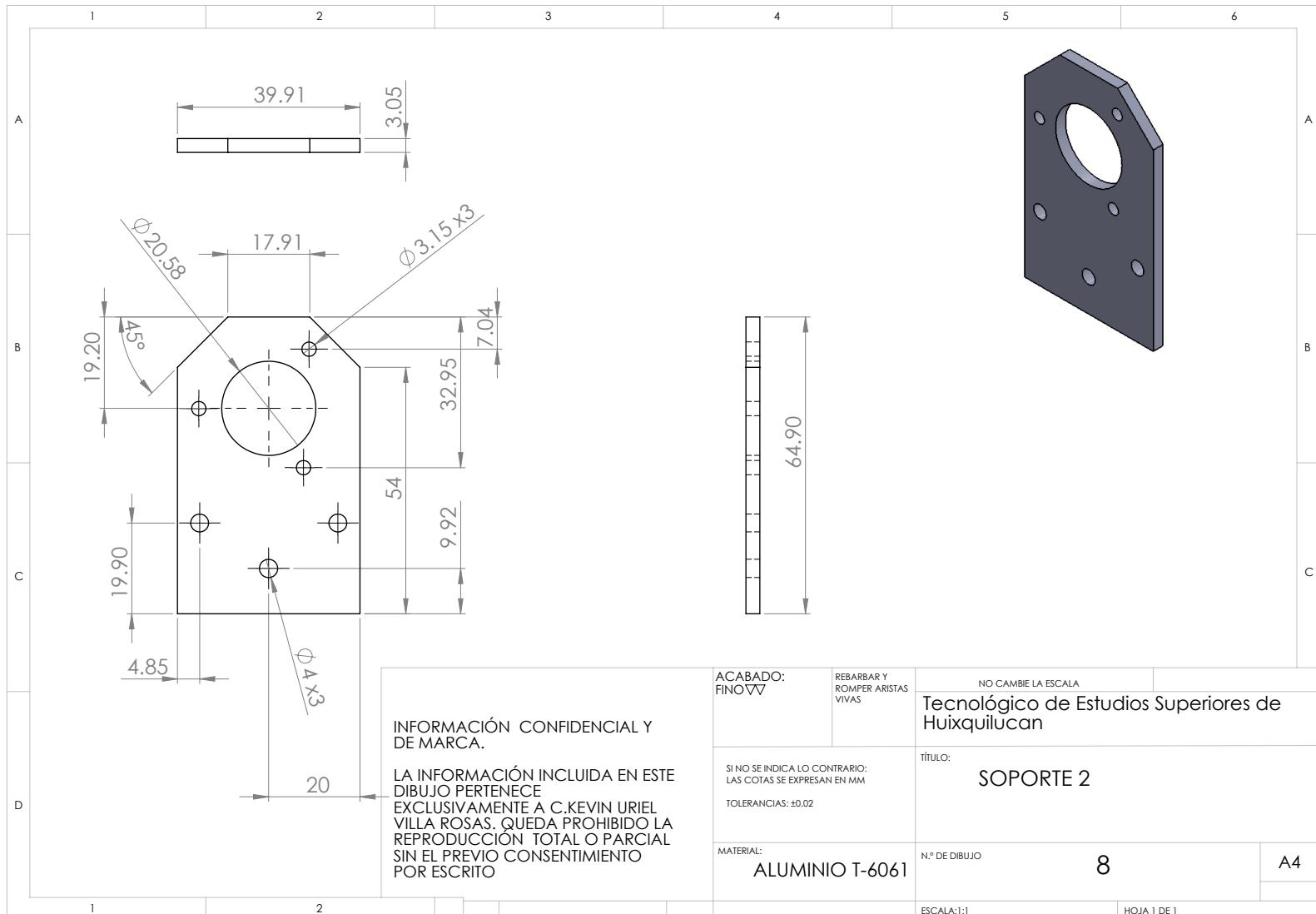








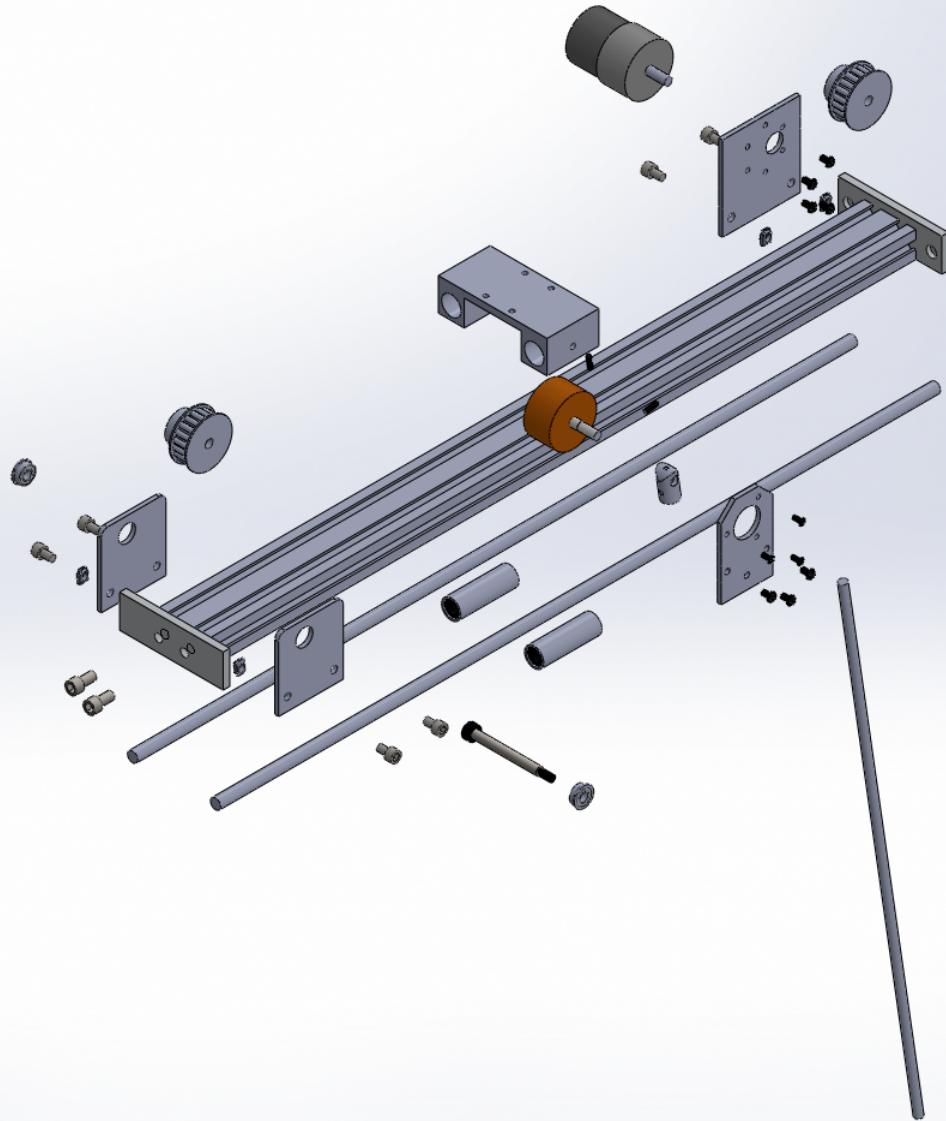




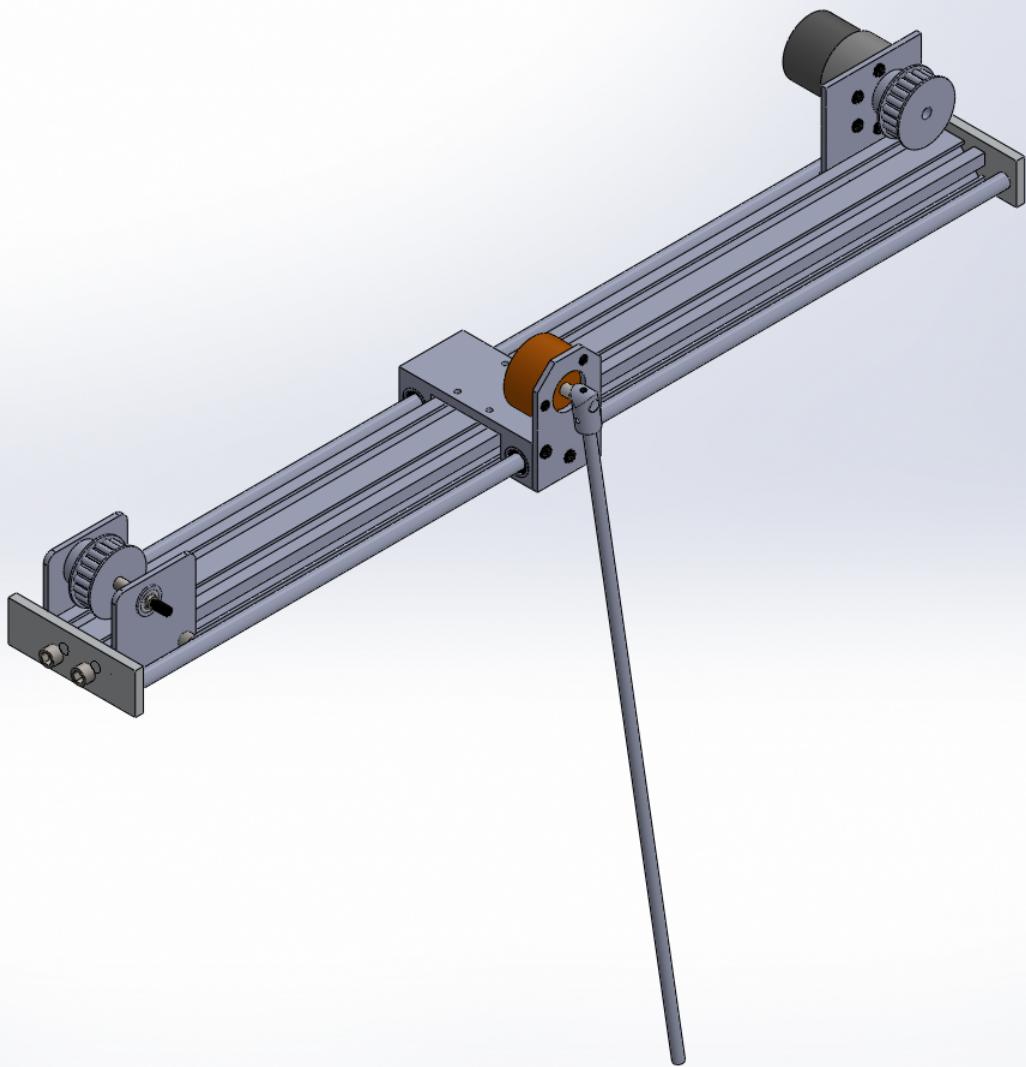
1	2	3	4	5	6
A	N.º DE ELEMENTO	N.º DE PIEZA	CANTIDAD		
1	1	Perfil de Aluminio	1		
2	2	Tuerca	6		
3	3	Soporte Motor 1	1		
4	4	Soporte 2	2		
5	5	Tornillo Allen 5 mm	6		
6	6	Rieles	2		
7	7	Tornillo Allen 6mm	4		
8	8	Balero	2		
9	9	Balero Rieles	2		
10	10	Base Banda	1		
11	11	Soporte Motor	1		
12	12	Tornillo Allen 4 mm	7		
13	13	Tornillo Guia	1		
14	14	Catarina para Banda	2		
15	15	Tornillo Allen 3 mm	3		
16	16	Base	2		
17	17	Potenciómetro	1		
18	18	Agarre de Flecha	1		
19	19	Barra Péndulo	1		
20	20	Opresor	2		
21	21	Motor del Péndulo	1		

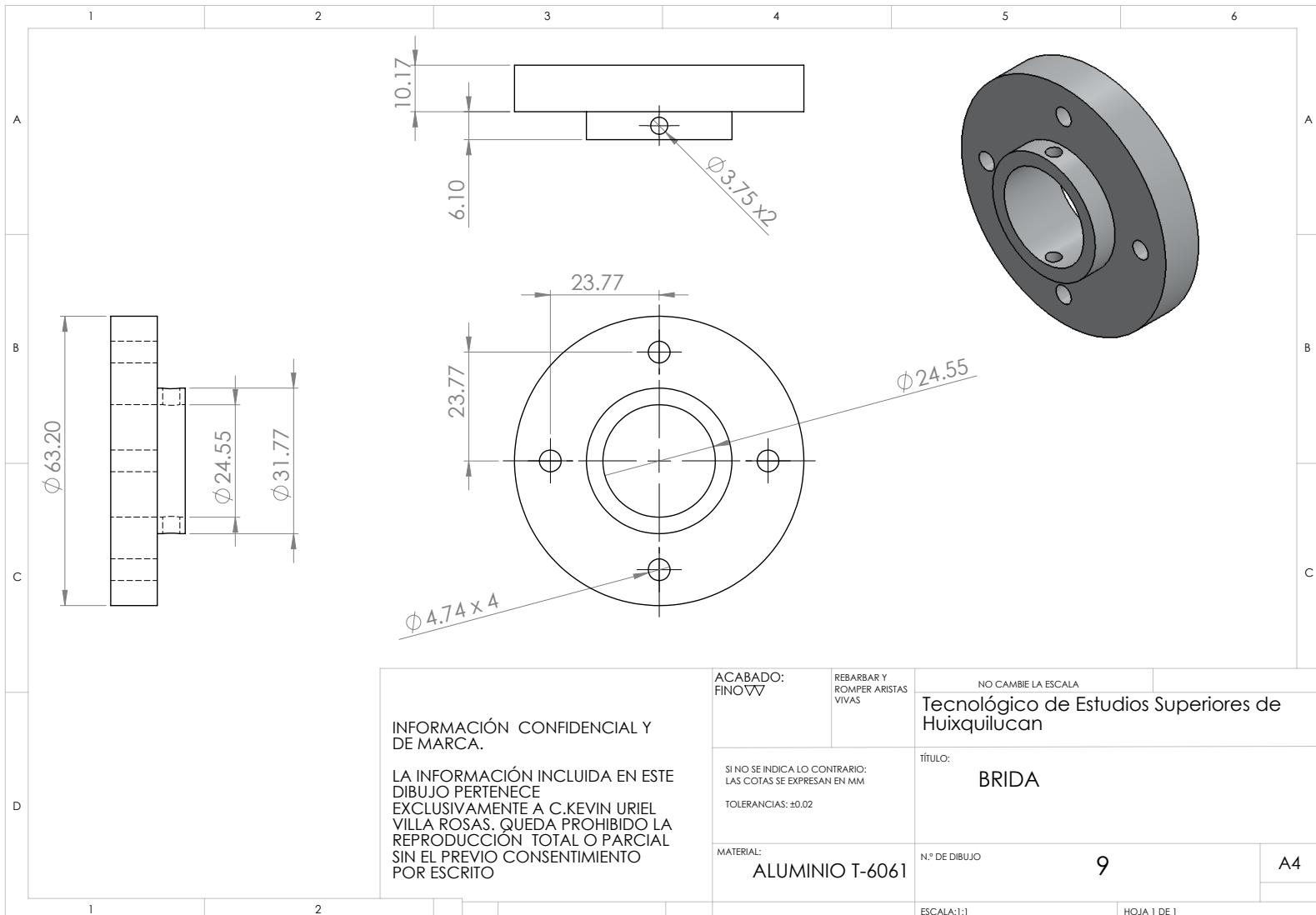
INFORMACIÓN CONFIDENCIAL Y DE MARCA.	ACABADO: REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS					NO CAMBIE LA ESCALA
LA INFORMACIÓN INCLUIDA EN ESTE DIBUJO PERTENECE EXCLUSIVAMENTE A C.KEVIN URIEL VILLA ROSAS. QUEDA PROHIBIDO LA REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL SIN EL PREVIO CONSENTIMIENTO POR ESCRITO		SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM			Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan	
		TOLERANCIAS: ±0.02			TÍTULO: Carro Péndulo	
		MATERIAL:			N.º DE DIBUJO	
					ESCALA:1:10	HOJA 1 DE 1
					A4	

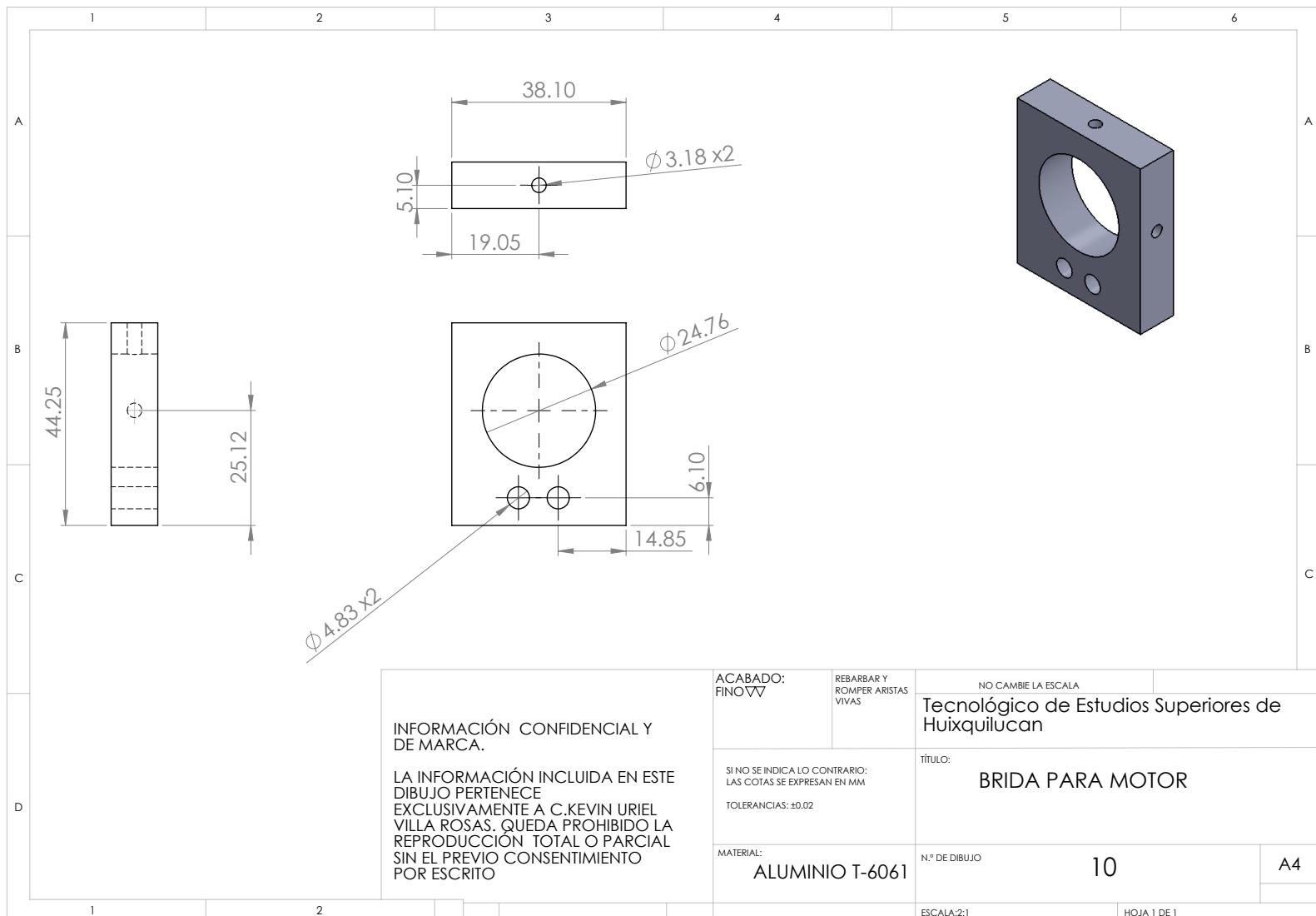
Explosionado de Péndulo Carro

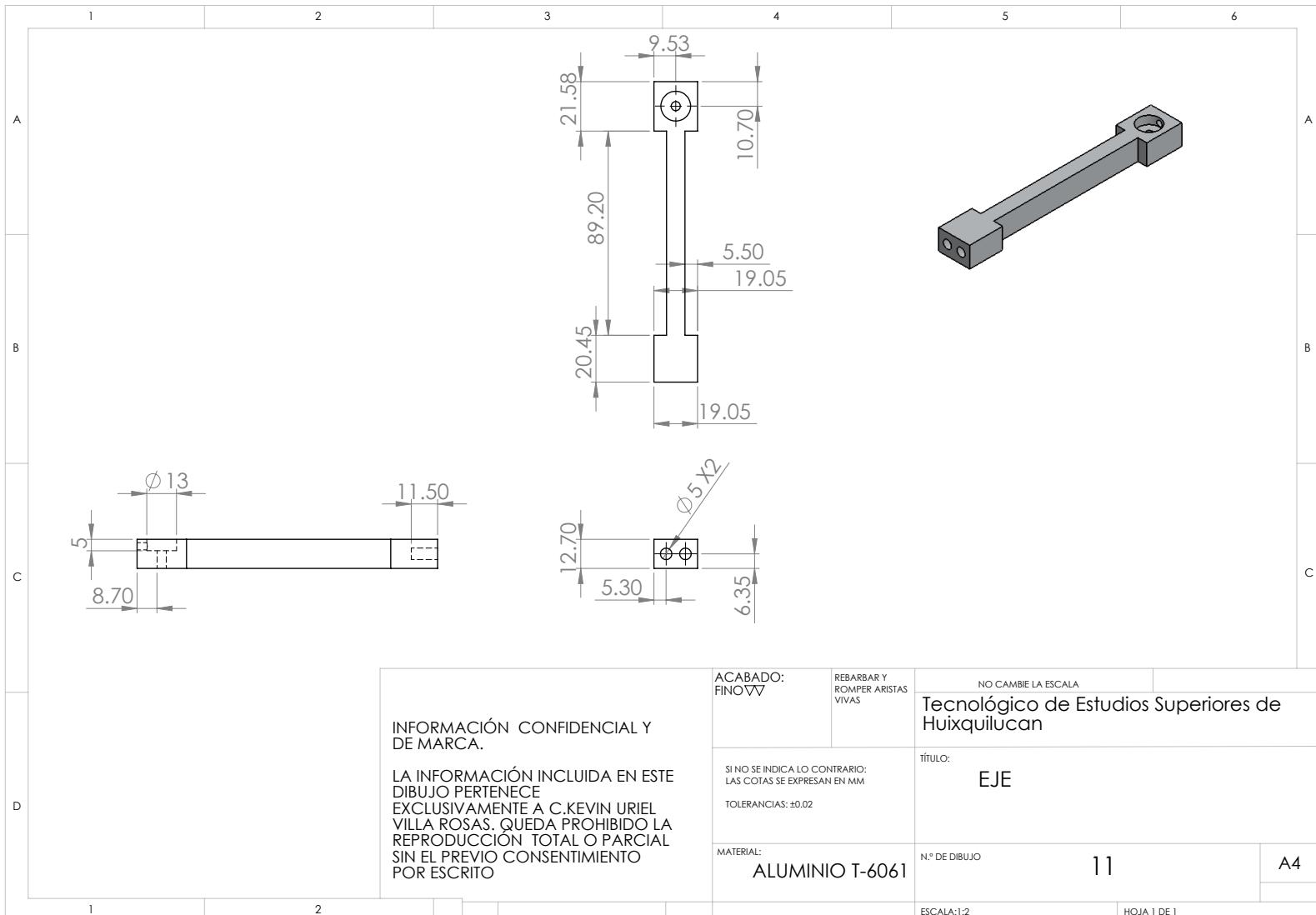


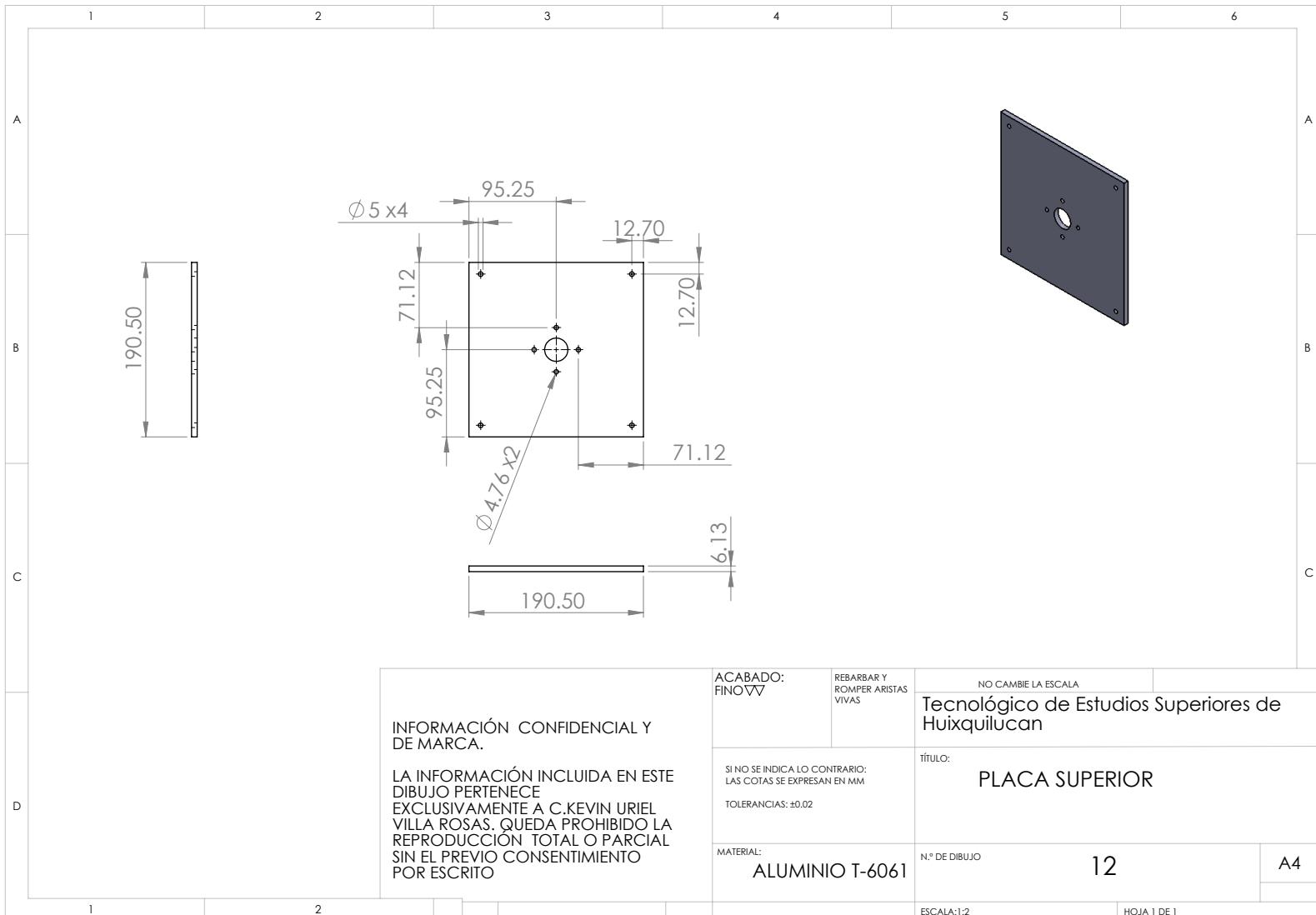
Ensamble de Péndulo Carro

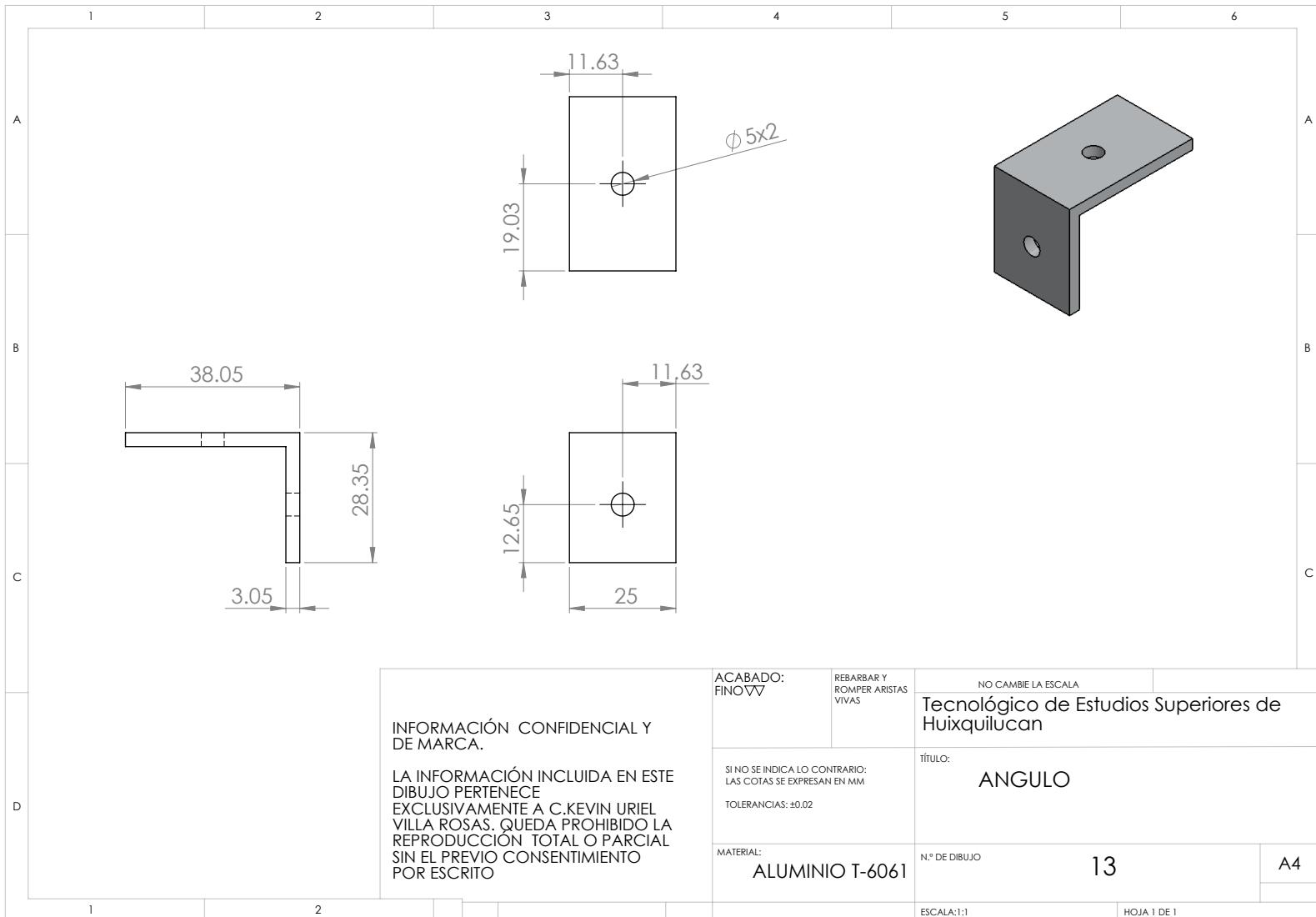


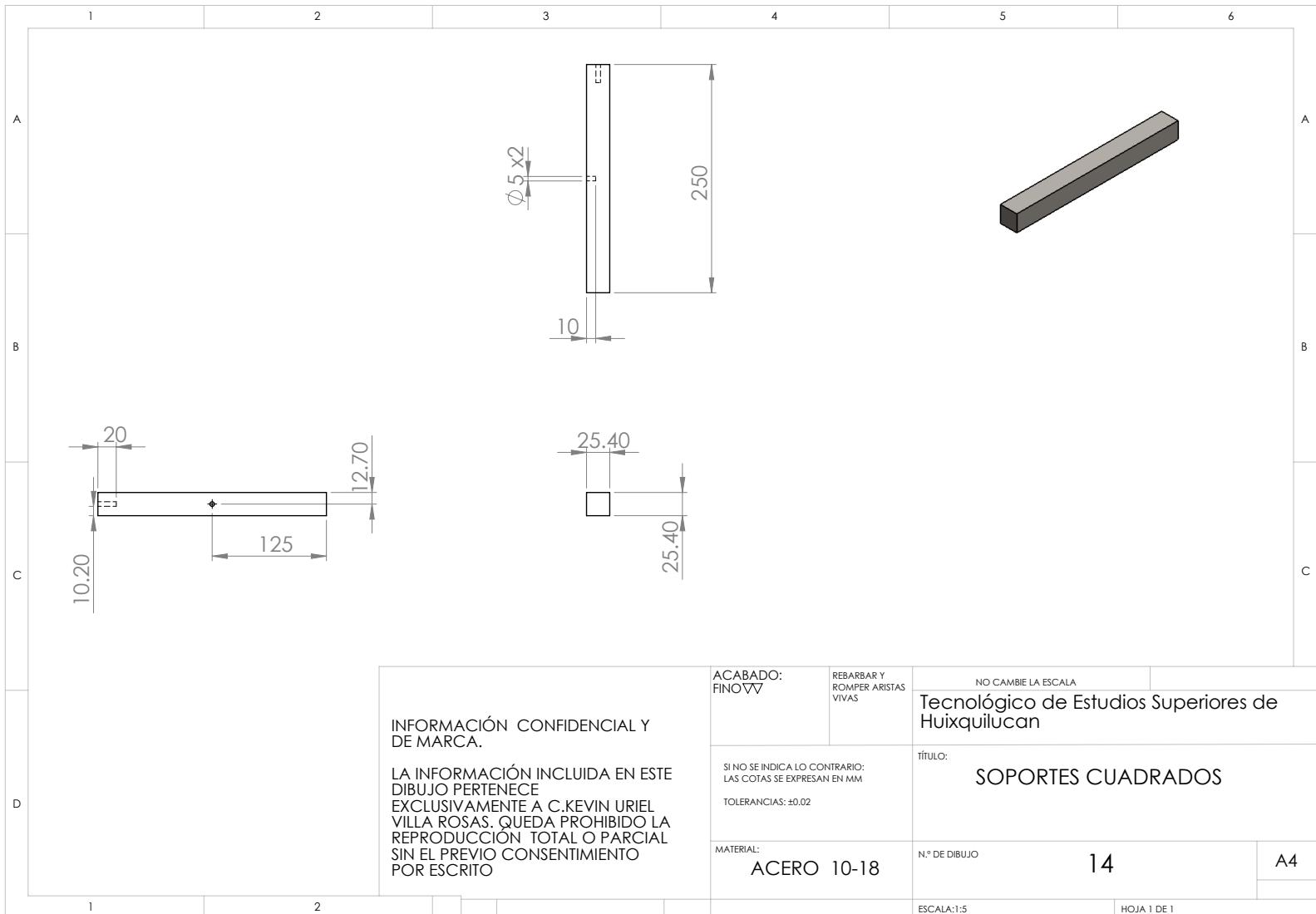


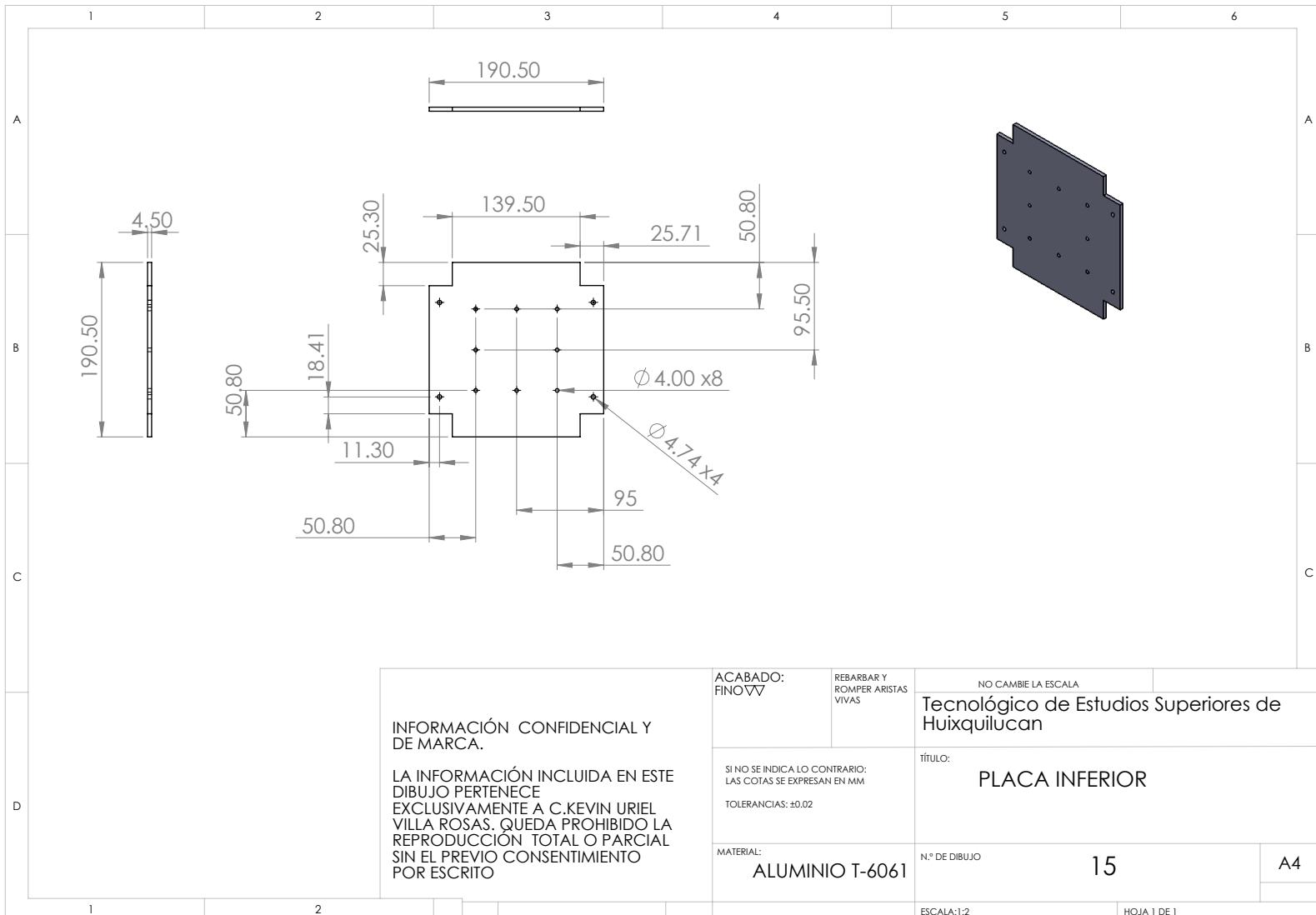


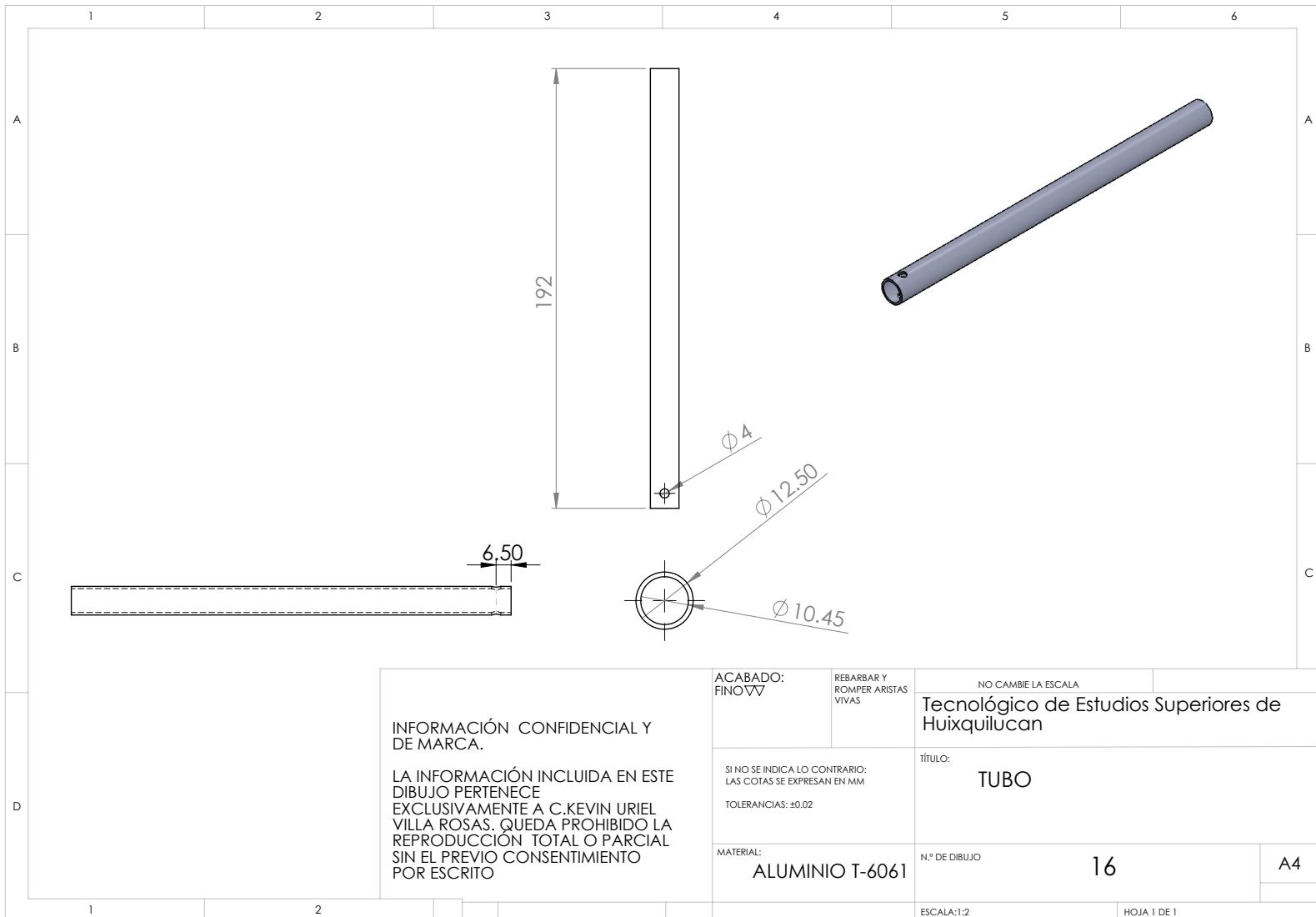












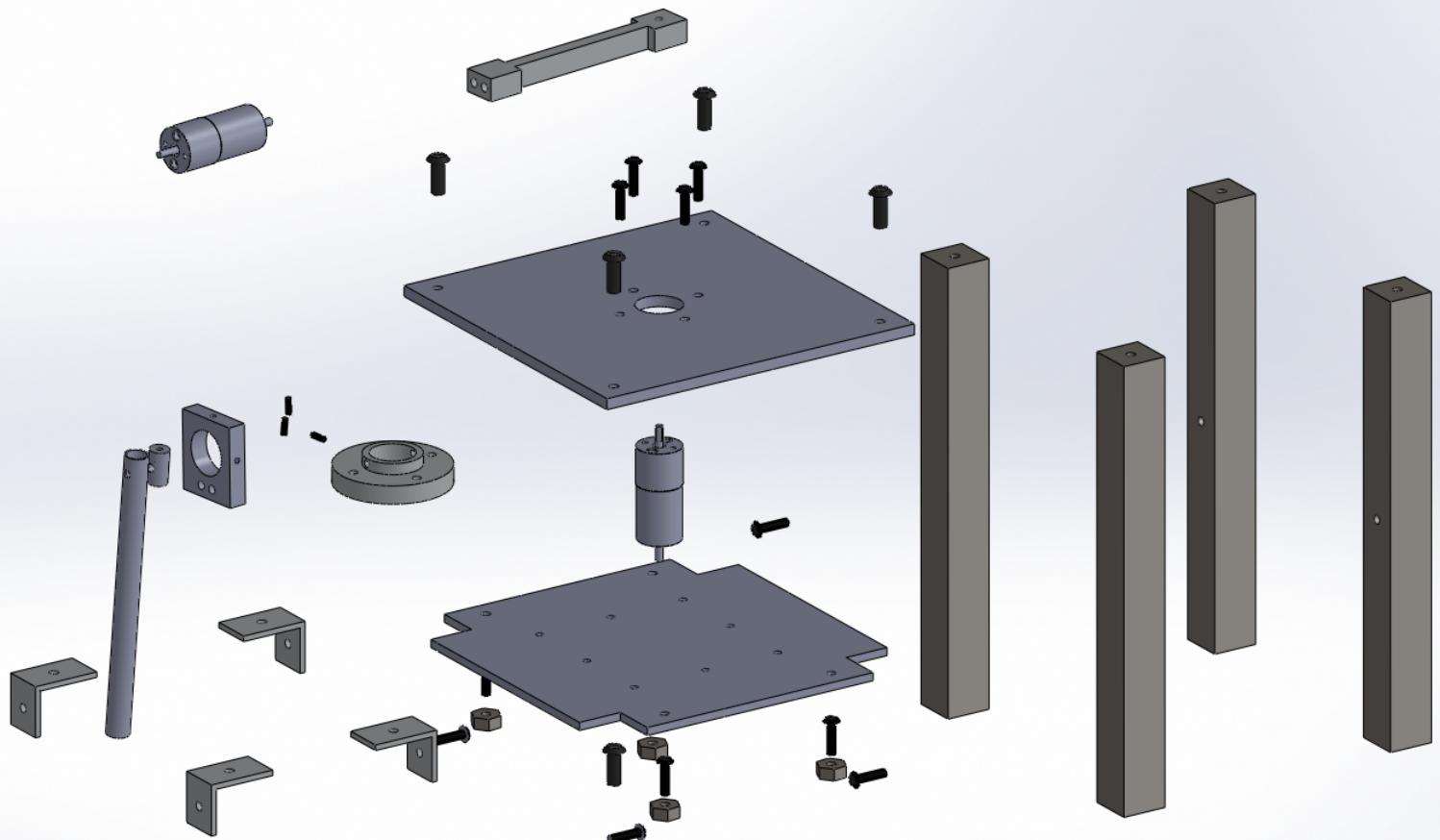
1	2	3	4	5	6
N.º DE ELEMENTO	N.º DE PIEZA	CANTIDAD			
1	Placa Superior	1			
2	Brida Para Motor	1			
3	Opresor	4			
4	Inserto	1			
5	Base Para Motor	1			
6	Ángulo	4			
7	Barra	1			
8	Placa Inferior	1			
9	Tornillo 3/16"	12			
10	Tuerca	4			
11	Soporte	4			
12	Eje	1			
13	Tornillo	5			
14	Motor	2			

ACABADO: REBARBAR Y ROMPER ARISTAS VIVAS NO CAMBIE LA ESCALA
Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan

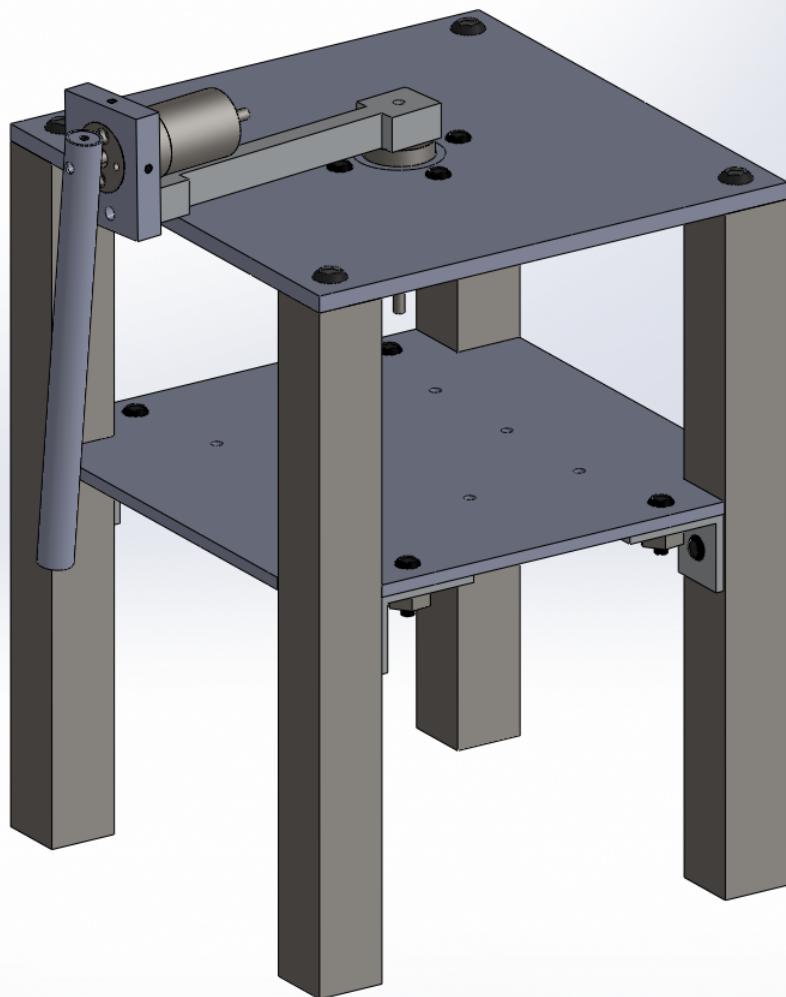
SI NO SE INDICA LO CONTRARIO: LAS COTAS SE EXPRESAN EN MM
TOLERANCIAS: ±0.02
TÍTULO:
Péndulo Furuta

MATERIAL: N.º DE DIBUJO
ESCALA: 1:5 HOJA 1 DE 1

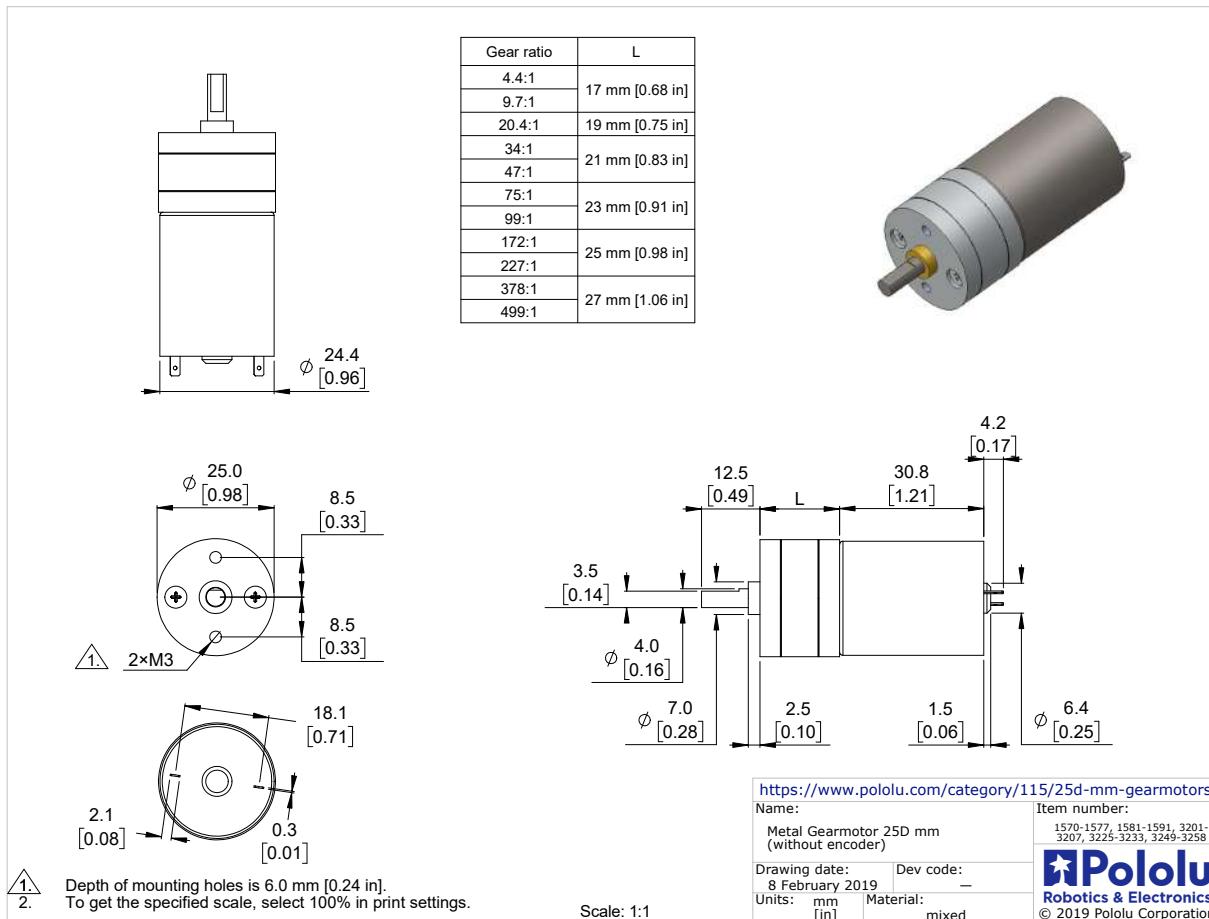
Explosionado Péndulo de Furuta

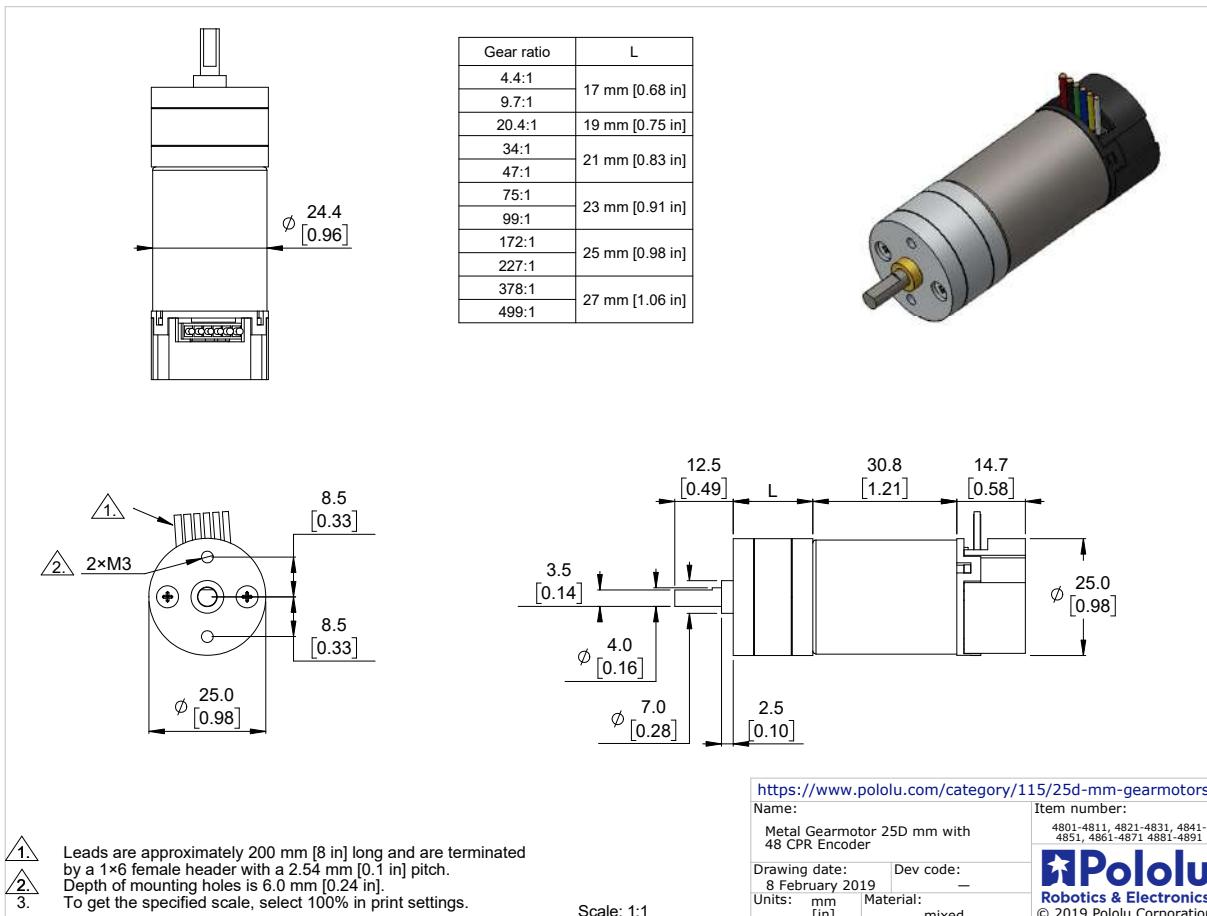


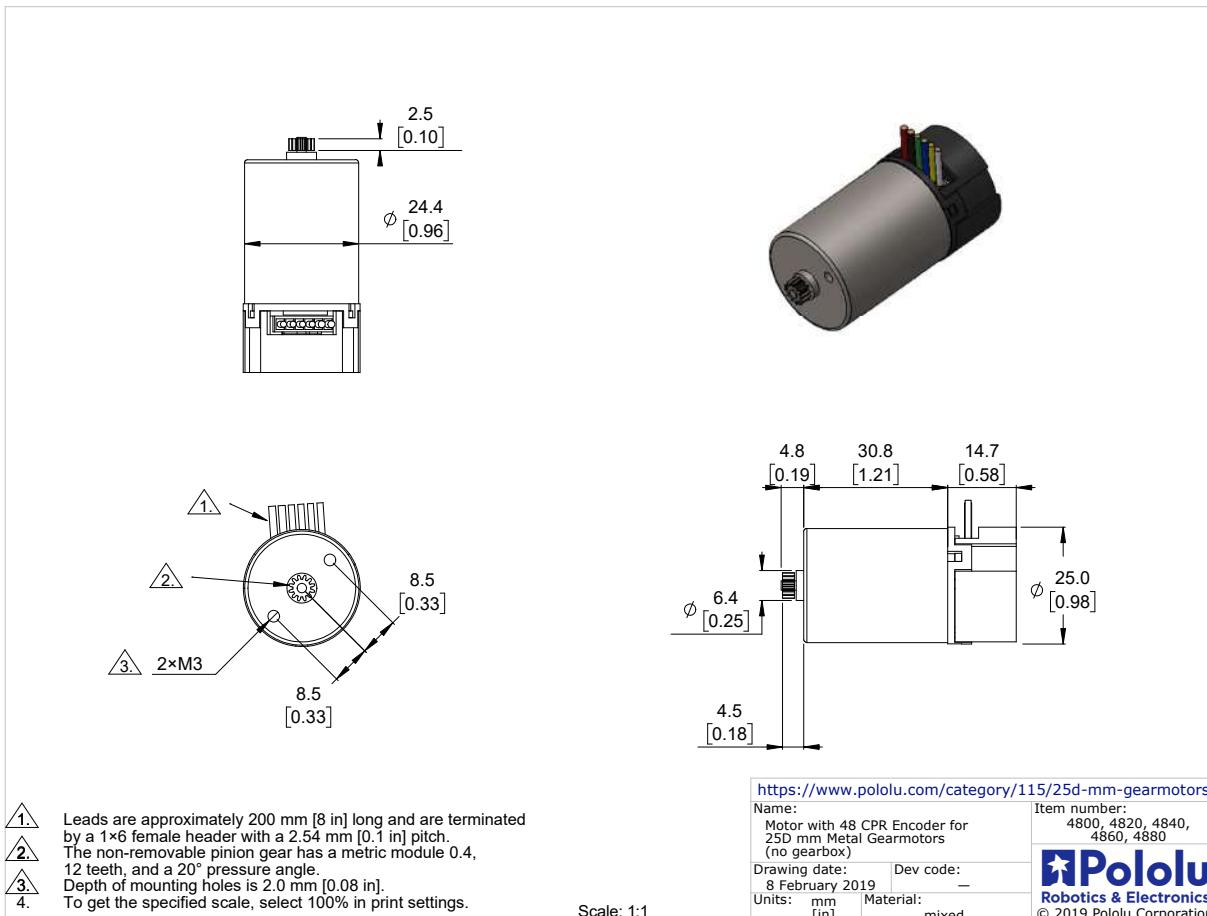
Ensamble Péndulo de Furuta



*Hojas de Datos (DataSheets) de Componentes
Electrónicos*



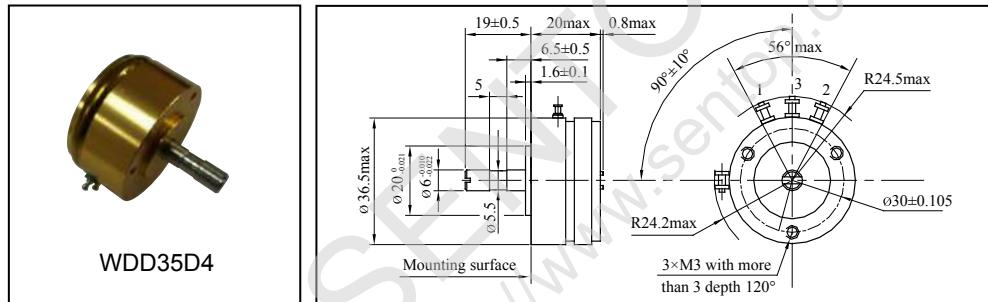




WDD35 Conductive Plastic Potentiometers

WDD35

■ Standard Dimensions



■ General Specifications

Mechanical Travel	360°(Endless)
Housing Surface	Aluminum alloy, surface oxidation (Gold)
Shaft	Stainless steel
Bearing	Group 2 ball bearings
Starting Torque	$\leq 10 \times 10^{-4}$ N·M
Life expectancy	50,000,000 shaft revolutions
Operating temperature range	-55°C~+125°C
Vibration	15G 10Hz~2000Hz
Shock	50G 11ms
Mass	Abt.50g

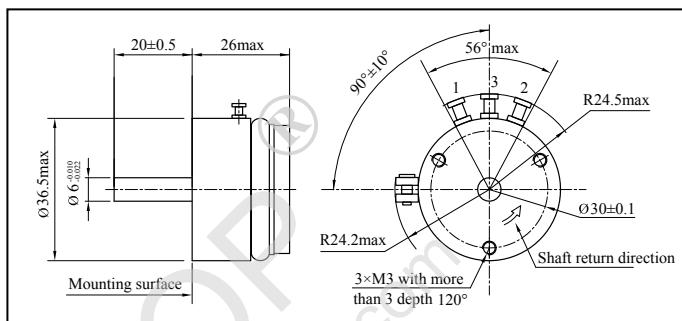
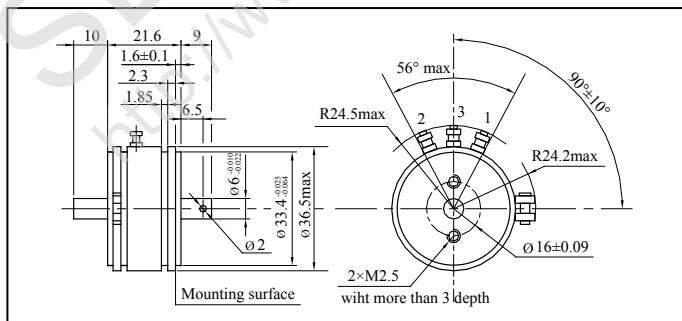
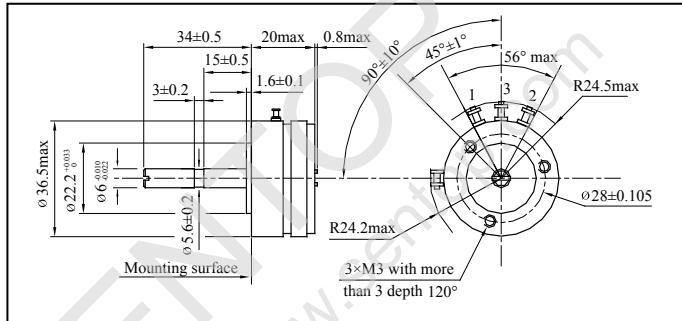
■ Electrical Specifications

Standard Resistance	1K, 2K, 3K, 5K(Ω)
Total Resistance Tolerance	±15%
Independent Linearity Tolerance	±0.1%
Electrical Travel	345°±2°
Power Rating	2W(@70°C)
The maximum current through the brush	μA ~1mA(Max.1mA)
Insulation Resistance	≥ 1000MΩ(500V.D.C.)
Dielectric Strength	1000V(AC.RMS) 1 min
Output Smoothness	≤ ±0.10%
Resistance Temperature Coefficient	≤ ±0.04%/°C

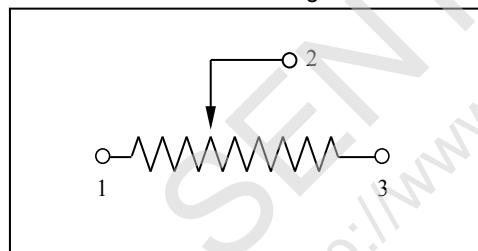
■ Special Specifications Available

With stopper, Special electrical travel, Special shaft length, Special machining on the shaft.

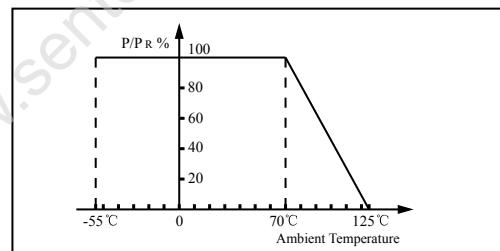
■ Other Commonly Used Types



■ Terminal Connection Diagram



■ Rated Power Ratio





Elektrotechnik Karl-Heinz Mauz GmbH

MG513

EKULIT

SPECIFICATIONS:

Item	Unit	Specification
Rated voltage	VDC	12.0
Gear Ratio		1/86
Rotation		CW
Motor Position		All position in horizontal
Temperature	°C	0~30
Humidity	%	30~95
• Performance of Motor		
No-load Speed	rpm	7.500±10%
No-load Current	mA	55 (max.)
Stall Current	mA	1500 (max.)
Stall Torque	g.cm	190
• Performance of Gear motor		
Output Speed	rpm	85±10%
No-load Current	mA	100 (max.)
Stall Current	mA	1500 (max.)
Stall Torque	kg.cm	14.0
Rated Torque	g.cm	2500
Rated Current	mA	300 (max.)
Noise	dB	52
• The Dimension		
The Outside Shaft Length	mm	21
Shaft End Play	mm	0.05-0.50
Screw Size		M3 (allowed the depth 3mm)
Dia of Shaft	mm	Ø6-D12mm

Adresse: Felix-Wankel-Str. 35 • 73760 Ostfildern/Nellingen

Tel: +49-711/3414023 Fax: +49-711/3414024

E-mail: info@ekulit.de Web site: www.EKULIT.de



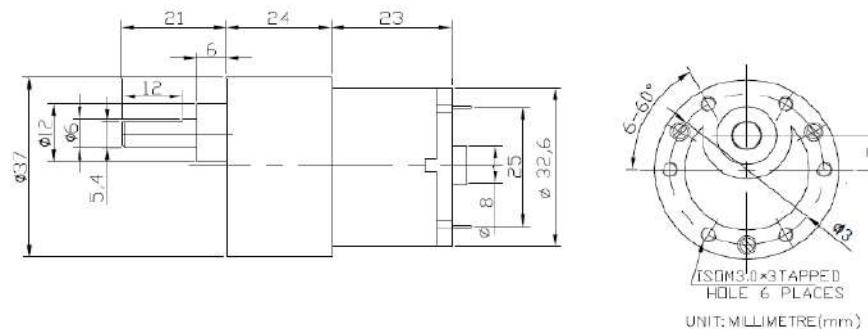
Elektrotechnik Karl-Heinz Mauz GmbH

MG513

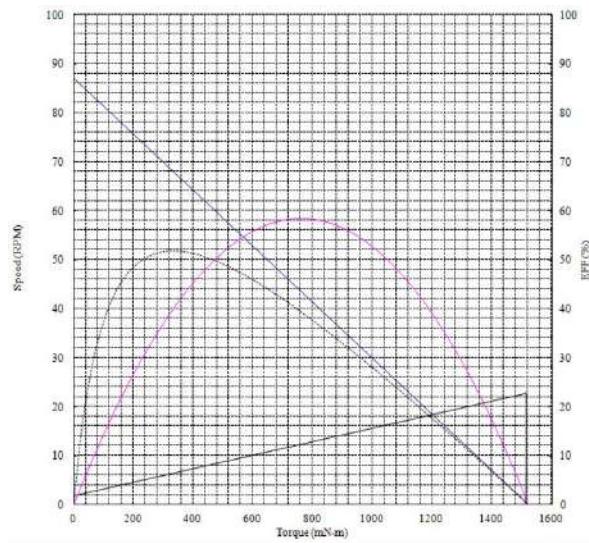
EKULIT

DIMENSIONS :

(Unit: mm)



Curve drawings :



Adresse: Felix-Wankel-Str. 35 • 73760 Ostfildern/Nellingen

Tel: +49-711/3414023 Fax: +49-711/3414024

E-mail: info@ekulit.de Web site: www.EKULIT.de

Elementos Comerciales



Moas Modular Aluminum System SA de CV

12-124 Perfil de aluminio 20x40 mm

Especificaciones

- a) **Material:** aleación de aluminio 6063 con temple T6, acabado anodizado natural mate.
- b) **Resistencia a la tensión:** minima 260 N/mm²
- c) **Elongacion (en muestras de 2"):** -8% mínimo
- d) **Módulo de elasticidad:** 70,000 N/mm².
- e) **Dureza:** 75 HB 2.5/187.5
- f) **Resistencia a la temperatura:** material estable de -40 a 200° C
- g) **Acabado:** anodizado natural mate AA M10, C22, A31 , prof. mínima 0.010mm, dureza 250 HV
- h) **Tolerancia dimensional:** +- 0.2-0.4 mm
- i) **Torsión (por cada 300 mm):** no mayor a 0.25°
- j) **Planicidad:** 0.10 por cada 25 mm de ancho
- k) **Peso :** 0.80 kg/mt

Imagen:



Moas Modular Aluminum System, SA de CV

Tule No. 24 Local A y B, Tlalnepantla Mexico CP 54080

Tel oficina (55) 5362 4016 Almacen (55) 4993 9413 Cel. 04455 3733 0934

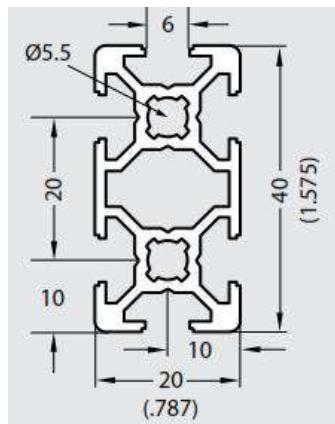
www.moastienda.com.mx

www.perfilesdealuminioranurado.com.mx



Moas Modular Aluminum System SA de CV

Dimensiones generales



Ranura 6 mm

Centro de 5.50 mm, se rosca a M6 directamente

Presentación: perfil de hasta 6 metros de largo

Usar accesorios de ranura 6 mm para serie 20 mm

Ideal para construcciones ligeras, manipuladores para máquinas de inyección, marcos, etc.

Accesorios relacionados:

Sujetador std	20-021
Sujetador interno	20-197
Angulo de aluminio	20-115
Angulo interno con tapa	22-021
Bisagra plástica	23-020
Bisagra metálica	23-020M
Tuerca plana M5	20-085
Tuerca balin 20, rosca M5	20-045
Tuerca cab/martillo, M4	20-047R6
Tapa plástica	18-802
Cubre ranuras negro	12-115B

Moas Modular Aluminum System, SA de CV

Tule No. 24 Local A y B, Tlalnepantla Mexico CP 54080

Tel oficina (55) 5362 4016 Almacen (55) 4993 9413 Cel. 04455 3733 0934

www.moastienda.com.mx

www.perfilesdealuminioranurado.com.mx

www.rambal.com

Rodamiento lineal - 8mm LM8UU

(Traducido por Rambal Ltda.)

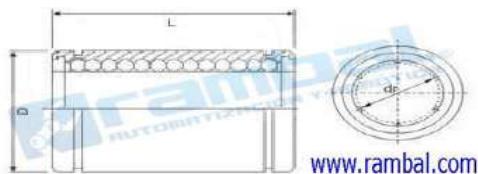


Descripción

Este tipo de rodamientos de bolas lineales es distinto a los que usted puede estar familiarizado. Su propósito es deslizarse a lo largo de un eje lineal 8mm, en lugar de girar alrededor de él. Estos son muy escasos y buenos para cuando se desea adjuntar un carro de movimiento en una barandilla sin añadir mucho peso.

Característica

- 24 mm de largo (L) x 15mm de diámetro exterior (D) x 8 mm diámetro interior (dr).
- Bolas de acero templado endurecido. Larga vida útil gracias al tratamiento superficial.

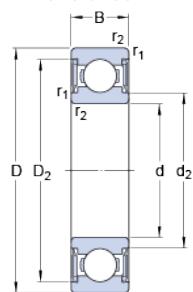
www.rambal.com



W 624-2RS1

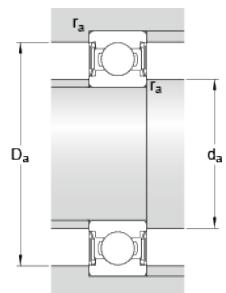
Producto popular

Dimensiones



d	4	mm
D	13	mm
B	5	mm
d ₂	≈ 6	mm
D ₂	≈ 11.35	mm
r _{1,2}	min. 0.2	mm

Dimensiones de los resaltos



d _a	min. 5.6	mm
d _a	max. 5.9	mm
D _a	max. 11.5	mm
r _a	max. 0.2	mm

Datos del cálculo

Capacidad de carga dinámica básica	C	0.741	kN
Capacidad de carga estática básica	C ₀	0.25	kN
Carga límite de fatiga	P _u	0.011	kN
Velocidad límite		32000	r/min
Factor de cálculo	k _r	0.03	
Factor de cálculo	f ₀	6.4	

Masa

Rodamiento de masa	0.0031	kg
--------------------	--------	----

Evidencias de Maquinados y Péndulos Terminados

Figura 1: Rectificado de Soportes



Figura 2: Maquinado de Placa Superior para Dejar a Escuadra



Figura 3: Maquinado de Eje



Figura 4: Maquinado de Eje



Figura 5: Barrenado de Eje



Figura 6: Barrenado para Fijación de Placa Inferior



Figura 7: Machuelead o para Tornillos



Figura 8: Barrenado de Placa Superior



Figura 9: Maquinado de Brida



Figura 10: Maquinado de Inserto



Figura 11: Barrenado de Placa Inferior



Figura 12: Péndulo de Carro Vista Isométrica.



Figura 13: Péndulo de Carro Vista Frontal.



Figura 14: Péndulo de Furuta Vista Superior.



Figura 15: Péndulo de Furuta Vista Frontal.



Figura 16: Péndulo de Furuta Vista Lateral.

Referencias

- [1] J. Á. Acosta, *Furuta's pendulum: A conservative nonlinear model for theory validation and practise*, Mathematical Problems in Engineering, 2010.
- [2] R. Olfati-Saber, *Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry*, IEEE Transactions on Automatic Control, 2002.
- [3] O. O. Gutiérrez Frías, *Diseño de controladores para sistemas subactuados del tipo péndulo invertido*, Tesis doctoral dirigida por C. Aguilar-Ibáñez, Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional, 2009.
- [4] D. J. Block, K. J. Astrom y M. W. Spong, *The Reaction Wheel Pendulum*, 1a Edición, vol. 1, M. W. Spong, (Ed). Champaign, IL, USA: Morgan & Claypool, 2007.
- [5] D. Pagano, L. Pizarro y J. Aracil, *Local bifurcation analysis in the Furuta pendulum via normal forms*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000.
- [6] V. M. Hernández-Guzmán, R. Silva-Ortigoza y R. V. Carrillo-Serrano, *Control automático: Teoría de diseño, construcción de prototipos, modelado, identificación y pruebas experimentales*, México, DF, MX: Colección CIDETEC IPN, 2013.
- [7] S. Jadlovská y J. Sarnovský, *Modelling of classical and rotary inverted pendulum systems a generalized approach*, Journal of Electrical Engineering, 2013.
- [8] I. Fantoni y R. Lozano, *Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit*, International Journal of Control, 2002.
- [9] F. Gordillo, J. A. Acosta y J. Aracil, *A new swing-up law for the Furuta pendulum*, International Journal of Control, 2003.
- [10] P. Seman, B. Rohal'-Ilkiv, M. Juhás y M. Salaj, *Swinging up the Furuta pendulum and its stabilization via model predictive control*, Journal of Electrical Engineering, 2013.
- [11] J. Aracil, J. Á. Acosta y F. Gordillo, *A nonlinear hybrid controller for swinging-up and stabilizing the Furuta pendulum*, Control Engineering Practice, 2013.
- [12] C. Aguilar-Ibáñez y H. Sira-Ramírez, *A linear differential atness approach to controlling the Furuta pendulum*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2007.

- [13] C. Aguilar Ibáñez y J. H. Sossa Azuela, *Stabilization of the furuta pendulum based on a Lyapunov function*, Nonlinear Dynamics, 2007.
- [14] K. Yubai, K. Okuhara y J. Hirai, *Gain-scheduling control of a rotary inverted pendulum by weight optimization and $H\infty$ loop shaping procedure*, Electrical Engineering in Japan, 2008.
- [15] C. Aguilar-Ibáñez, M. S. Suarez-Castaño n y O. O. Gutiérres-Friás, *The direct Lyapunov method for the stabilisation of the Furuta pendulum*, International Journal of Control, 2010.
- [16] H. Hirata, T. Takabe, M. Anabuki y S. Ouchi, *VSS robust adaptive control including a self-tuning controller for a rotary inverted pendulum*, Electronics and Communications in Japan, 2011.
- [17] T. Turker, H. Gorgun y G. Cansever, *Lyapunov's direct method for stabilization of the Furuta pendulum*, Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences, 2012.
- [18] Measurement Group. *Strain Gage Based Transducer Their Design and Construction*. Raleight, North Carolina, U.S.A.
- [19] Catalogo General 4000/II SP SKF, 1997.
- [20] T. A. Harris. *Rolling Bearing Analysis*, 3ra Edición. 1991.
- [21] Sánchez Salgado José Alberto. *Aplicación de la extensómetria eléctrica en el diseño de dispositivos para la medición de fuerza y presión*. (Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, Cuernavaca Morelos,: Centro Nacional de Investigación y desarrollo Tecnológico, 1998).