CALCUL NUMÈRIC MATCAD 21-22

Representació de traces (ground tracks) d'òrbites de satèl·lits artificials

Enric Chust Gimeno

Maig 2022

1. Motivació

El Departament de Control de Missió de l'Agència Espacial Catalana (AEC) necessita una eina de software per tal de determinar la posició d'un satèl·lit artificial en el seu pla orbital.

Aquest càlcul està basat en la resolució numèrica de l'equació de Kepler. Tot i això, l'AEC ens demana que li proporcionem per separat una rutina per buscar zeros de funcions, d'aquesta forma els seus programadors del departament de Test i Validació la podran incorporar a les seves biblioteques i utilitzar-la per separat.

Així que els objectius són:

- Fer una eina de software per tal de determinar la posició d'un satèl·lit artificial en el seu pla orbital mitjançant la resolució numèrica de l'equació de Kepler.
- Desenvolupar una rutina per buscar zeros a les funcions, que també s'utilitzarà en l'eina de software principal.

2. Software

El software està compost per una rutina i una utilitat. La rutina s'anomena bisnwt i la utilitat kplt2nu.

2.1 bisnwt

La rutina bisnwt busca zeros a les funcions. Per fer això hem combinat la velocitat del mètode Newton amb la robustesa del mètode bisecció. La estratègia que hem seguit ha estat la de partir d'un *a*, *b*, on la funció que volem anul·lar pren signes diferents, fer bisecció fins que obtenim un interval de longitud més petita que el valor prefixat δ, que serà entrat per l'usuari com un argument, una vegada tenim aquest interval apliquem el mètode Newton.

2.2 kplt2nu

La utilitat kplt2nu ens permetrà determinar la posició d'un satèl·lit en el seu pla orbital. Per trobar la posició d'un satèl·lit artificial dins del seu pla orbital hem de trobar la seva anomalia vertadera com a funció del temps. Per això, primer hem de trobar l'anomalia mitjana, ja que la necessitarem per buscar l'arrel de l'equació de Kepler: $E - e\ sinE - M$ que ho farem mitjançant el mètode de bisecció.

Un cop tinguem l'arrel calcularem l'anomalia vertadera amb la fórmula: $v = \text{acos}\left(\frac{e-\cos(E)}{e-\cos(E)-1}\right)$ i triarem la determinació del arcos segons si $E \in [k2\pi, \text{k}2\pi + \pi]$ o si $E \in [k2\pi + \pi, \mathrm{k}2\pi + 2\pi]$ si v i E estan a la mateixa mitja volta. Aquest procés el farem el nombre de vegades que haguem entrat com a paràmetre nt.

3. Manual del software

3.1 bisnwt()

La rutina bisnwt està composta pels nou arguments següents:

- **double a:** és el valor que li passarem a la funció per tal de fer la bisecció, juntament amb l'argument b, formen l'amplada.
- **double b:** és l'altre valor que li passarem a la funció juntament amb a per fer la bisecció i formar l'amplada de l'interval.
- **double *arrel:** on emmagatzemarem el valor de l'arrel de la funció. Aquest és el valor on trobem el zero de la funció, és a dir:$f(x) = 0$. En cas de no trobar-ne emmagatzemarem el punt mig en aquella iteració.
- **double *dlt:** on guardem delta, valor que ens marcarà fins quan fem bisecció. També atura la rutina en cas de ser més petita que la tolerància i en cas de que el mètode de Newton no convergeixi, aquesta pren el seu valor dividit per dos i tornem a fer la mateixa rutina bisnwt amb aquest nou valor delta.
- **double tol:** és valor de la tolerància per a *dlt i el mètode de Newton.
- **int maxit:** nombre màxim d'iteracions del mètode Newton.
- **double (*f)(double, void*):** és la funció de la que busquem l'arrel.
- **double (*df)(double, void*):** és la derivada de la funció anterior que anem a avaluar, aquest argument l'utilitzarem per fer el mètode Newton.
- **void *prm:** és un vector de tipus void on emmagatzemarem un altre vector

3.2 kplt2nu()

La utilitat kplt2nu consta de cinc arguments:

- **double e:** nombre d'Euler, que és igual a 2,71828182845904523536.
- **double T:** període de l'òrbita del satèl·lit en segons.
- **double M0:** valor de l'anomalia mitjana a l'inici de la simulació.
- **double tf:** la durada total de la simulació en segons.
- **int nt:** nombre de punts que tindrà la simulació

A més també compta d'una estructura i quatre funcions:

- **struct keplre_prm:** és l'estructura on guardarem els valors e i M.
- **double amitj:** funció que aplica la fórmula per obtenir l'anomalia mitjana, que és la següent $\frac{(t-tp)}{T} 2\pi$. Li passem com a paràmetres t, tp i T.
- **double eq_kepler:** és l'equació de Kepler. La passarem com la funció a la rutina bisnwt. Aquesta funció serà: $E - e\sin(E) - M$. Passant-li com a paràmetres la E i *prm on tenim e i M.
- **double fkepler:** fa la derivada de l'equació de kepler. Que també la passarem com a paràmetre de la rutina bisnwt per tal de fer el mètode Newton. Aquesta derivada queda tal que: $1 - e\cos(E)$. Passant com a paràmetres E i *prm.
- **double get_v**: ens retorna l'anomalia vertadera mitjançant els paràmetres e i E amb la fórmula, $v = \mathrm{acos}\left(\frac{e-\cos(E)}{e-\cos(E)-1}\right)$.

4. Validació

4.1 Validació bisnwt

Per validar aquesta rutina hem avaluat bisnwt sobre la funció $f(x) = e^x - 2$ tres cops, utilitzant els paràmetres de la taula següent:

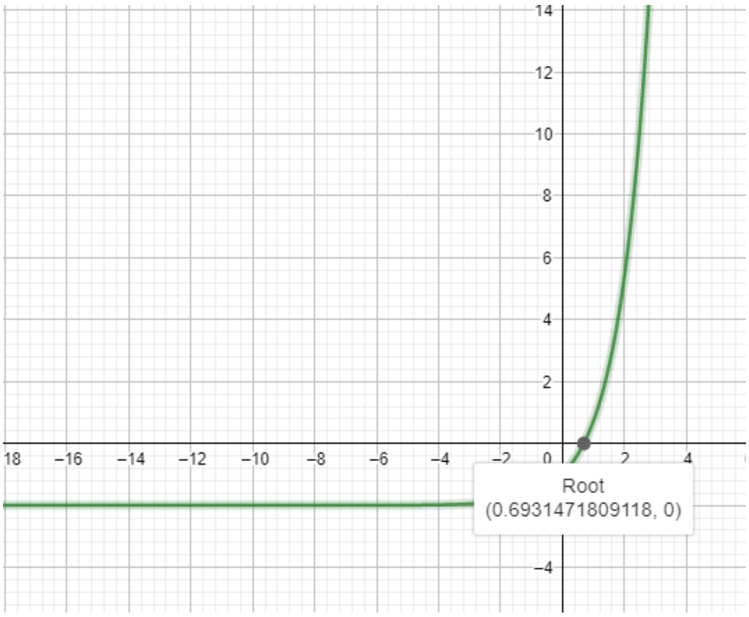
a	b	dlt	tol	maxit
-9	1	10	10^{-12}	10
-9	1	2.5	10^{-12}	10
-9	1	0.01	10^{-12}	10

Per fer-ho, hem creat el programa prova_exp, el qual aplica la rutina bisnwt per a al funció anterior amb els diferents paràmetres, i fem un print per a que ens retorni el nombre d'iteracions i l'arrel. Els resultats son els següents:

```
Nombre iteracions per delta = 0.01: 3 arrel: 0.693147
Nombre iteracions per delta = 2.5:  7 arrel: 0.693147
Nombre iteracions per delta = 10:   7 arrel: 0.693147
```

Podem veure que l'arrel coincideix en els tres casos. Per comprovar que el resultat correcte busquem el zero de $f(x)$ resolent l'equació $0 = e^x - 2$, on $x = \ln(2)$, així confirmem que l'arrel de $f(x)$ és igual a 0.693147.

També podem mirar on talla a la funció representant-la a un programa com el Geogebra.



En quant al nombre d'iteracions veiem que per delta=0.01 és igual a 3, mentre que per delta=2.5 i delta=10 coincideix amb 7. Això es deu ja que a mesura que la delta és més gran, iteres menys vegades dins el primer interval de bisecció, i aleshores iteres més vegades amb el mètode Newton.

4.2 Validació kplt2nu

Per compilar kplt2nu utilitzem el makefile que hem escrit, escrivint a la línia de comandes:

```
make kplt2nu
```

Ara ja tindrem el programa llest per executar amb els paràmetres que li volem donar. Després d'experimentar amb diferents valors he decidit que com arguments introduïts a la rutina bisnwt que utilitzem li passem $delta = 2.5 \quad maxit = 10 \quad tol = 10^{-12}$ i l'executem amb els arguments següents:

```
./kplt2nu 0.74105=e 43081.95859068188=T 3.141592653589793=M0
86163.91718136377=tf 333=nt
```

```
78401.4021199799 14.57585780719592 15.44053086698367
78660.15262202604 14.61359465588769 15.45060779413174
78918.90312407218 14.65133150457946 15.46055131782197
79177.65362611832 14.68906835327123 15.47036896991408
79436.40412816446 14.726805201963 15.48006788794826
79695.1546302106 14.76454205065477 15.48965484755868
79953.90513225674 14.80227889934654 15.49913629199572
80212.65563430288 14.84001574803831 15.50851835907505
80471.40613634902 14.87775259673008 15.51780690583328
80730.15663839516 14.91548944542185 15.52700753113638
80988.9071404413 14.95322629411362 15.53612559645886
81247.65764248744 14.99096314280539 15.54516624502612
81506.40814453358 15.02869999149716 15.5541344194915
81765.15864657972 15.06643684018893 15.56303487830025
82023.90914862585 15.1041736888807 15.57187221087663
82282.65965067199 15.14191053757247 15.58065085175583
82541.41015271813 15.17964738626424 15.58937509377015
82800.16065476427 15.21738423495601 15.59804910038801
83058.91115681041 15.25512108364778 15.60667691729458
83317.66165885655 15.29285793233955 15.61526248329488
83576.41216090269 15.33059478103131 15.6238096406127
83835.16266294883 15.36833162972308 15.63232214465233
84093.91316499497 15.40606847841485 15.64080367328472
84352.66366704111 15.44380532710662 15.64925783571474
84611.41416908725 15.48154217579839 15.65768818098215
84870.16467113339 15.51927902449016 15.66609820614512
85128.91517317953 15.55701587318193 15.67449136419236
85387.66567522567 15.5947527218737 15.6828710717271
85646.41617727181 15.63248957056547 15.69124071646412
85905.16667931795 15.67022641925724 15.69960366457917
86163.91718136409 15.70796326794901 15.70796326794897
```

Ens surt per pantalla els 334 valors del temps, l'anomalia mitjana en cada moment i l'anomalia excèntrica. Comparem el resultat amb el fitxer orb.txt i tot i que els tres últims decimals de cada columna no coincideixen però si que s'aproximen podem considerar que el resultat és correcte.

5. Traça d'òrbites espia

L'objectiu real de la AEC és dissenyar òrbites de satèl·lit espia. Per fer això utilitzem el gnuplot i li introduïm sis camp de dades diferents:

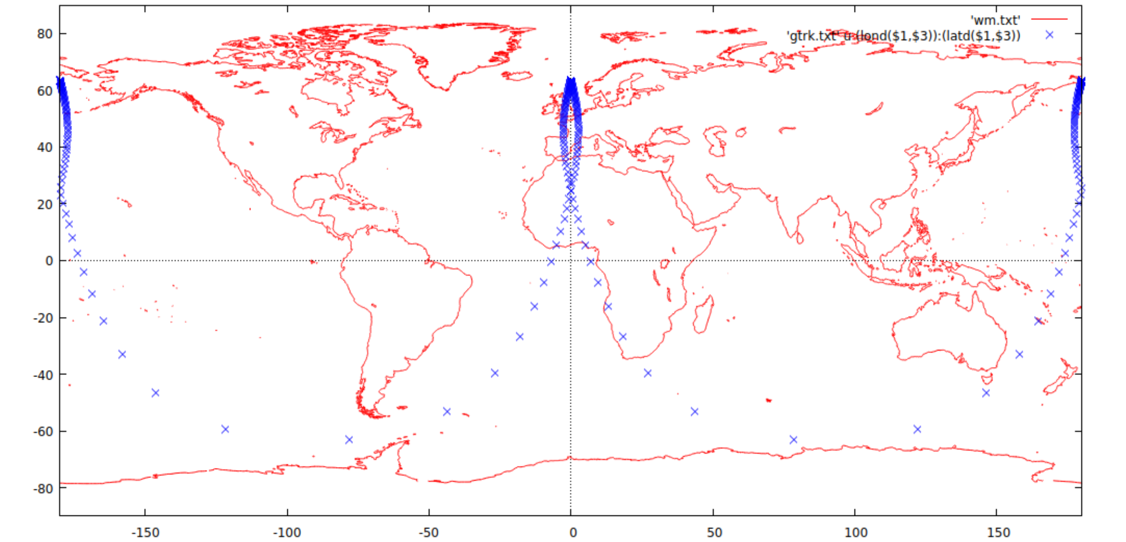
- **lonesp:** longitud del lloc que espiem
- **xc:** excentritat
- **T:** període de l'òrbita
- **i:** inclinació de l'òrbita en radiants
- **tf:** temps final
- **nt:** nombre de punts que representen a la traça

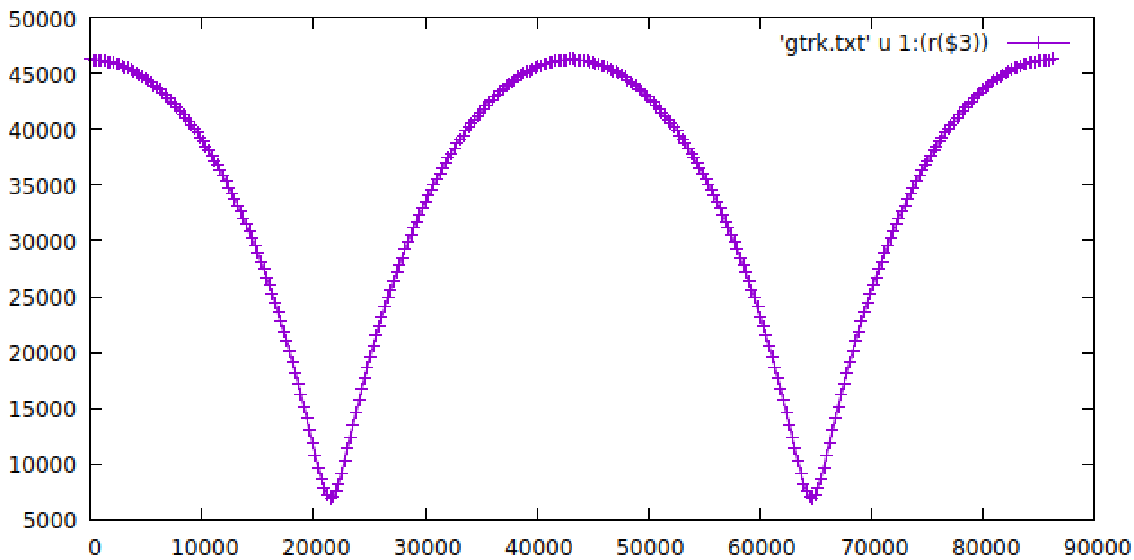
És molt important que la inclinació de l'òrbita sigui sempre de 63.4 graus, ja que aquesta inclinació evita que degut a la asimetria de la terra l'òrbita roti dins del seu pla.

Comprovem que ens funciona bé calculant la mateixa traçada que tenim a l’enunciat:

```
lonesp=0
xc=0.74105
T=dias/2
i=63.4*(pi/180)
tf=dias
nt=333
```

Obtenint com a resultat la següent traça:

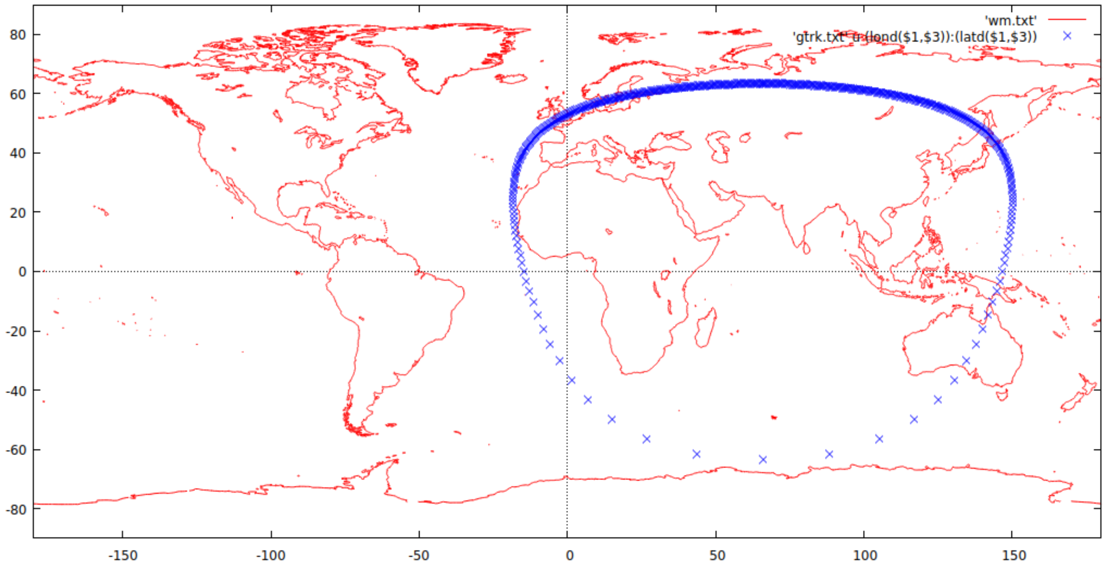


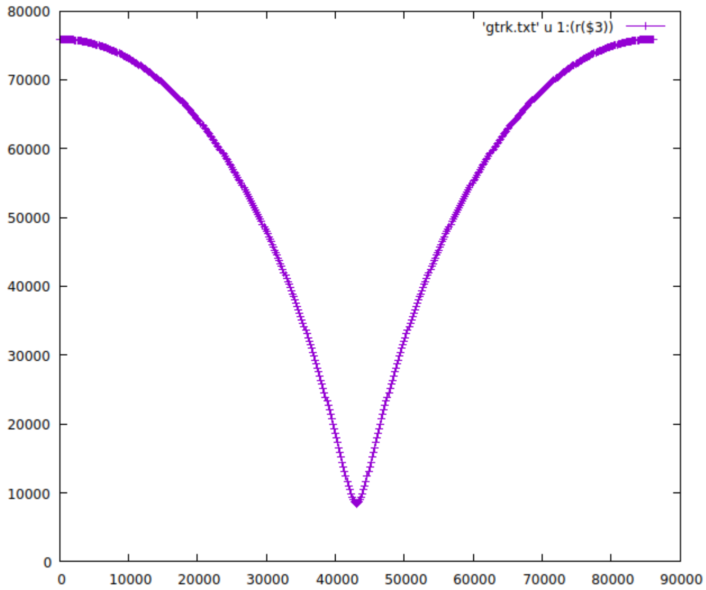


Ara busquem a qui espiar, l’AEC és una aliada dels Estats Units, amb qui col·labora en diferents missions espacials, per tal de reforçar el seu compromís, l’AEC vol tenir els seus propis satèl·lits per poder col·laborar amb els Estats Units en missions secretes de caràcter internacional que podrien escalar a grans conflictes. És per això que vol enviar un satèl·lit que orbiti a voltat de la zona del àrtic i Rússia degut a la gran tensió actual per controlar una nova zona de pas en un futur i observar moviments en la frontera de Rússia amb un nou país de la OTAN com podria ser Finlandia. L’altre satèl·lit que volem enviar orbitarà sobre el sud-est asiàtic, l’objectiu serà traçar una esl·lipse per tal d’espiar el mateix satèl·lit la península de Corea on es troba una de les grans amenaces potencials Corea del Nord, i també l'illa de Taiwan, amb una gran tensió per la reivindicació Xinesa i on hi ha molts d'interessos occidentals per la fabricació dels microxips.

Per enviar el satèl·lit en òrbita per espiar al voltant de la zona de la frontera amb Finlàndia i propera al àrtic hem agafat els següents paràmetres:

```
lonesp=20
xc=0.8
T=dias/2
i=63.4*(pi/180)
tf=dias
nt=500
```





Per enviar el satèl·lit espia que orbite al voltant de la península de Corea i Taiwan hem utilitzat els següents paràmetres:

```
lonesp=40
xc=0.2
T=dias
i=63.4*(pi/180)
tf=dias
nt=450
```