

# Esercizi di Algebra Lineare, corso A

Enrico Berni

03/04/2025

Provate a svolgere i seguenti esercizi in maniera autonoma, eventualmente confrontandovi con dei compagni. Le soluzioni saranno discusse durante il tutorato di giovedì 3 aprile.

1. (Forma canonica di Jordan reale) Sia  $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ , e sia  $J(A) \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{C})$  la forma canonica di Jordan di  $A$ . Dimostrare che esiste una base di  $\mathbb{R}^n$  rispetto alla quale  $A$  ha la forma  $J_{\mathbb{R}}(A)$ , determinata univocamente dalla seguente costruzione:
  - (a) Si lasciano invariati i blocchi di Jordan relativi a autovalori reali.
  - (b) Per ogni coppia di autovalori complessi coniugati  $\mu$  e  $\bar{\mu}$ , si sostituisce ogni coppia di blocchi  $J_{\mu,k}, J_{\bar{\mu},k}$  con un blocco  $2k \times 2k$  della forma

$$\begin{pmatrix} H_{\mu} & I & & \\ & H_{\mu} & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & H_{\mu} \end{pmatrix},$$

dove  $H_{\mu}$  è la matrice

$$H_{\mu} = \begin{pmatrix} \Re(\mu) & -\Im(\mu) \\ \Im(\mu) & \Re(\mu) \end{pmatrix},$$

e  $I$  è la matrice identità di taglia 2.

Dedurre quindi che, date due matrici  $A, B \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ , i seguenti fatti sono tra loro equivalenti:

- (a)  $A$  e  $B$  sono simili su  $\mathbb{C}$ .
  - (b) Le loro forme canoniche di Jordan reali  $J_{\mathbb{R}}(A)$  e  $J_{\mathbb{R}}(B)$  sono uguali.
  - (c)  $A$  e  $B$  sono simili su  $\mathbb{R}$ .
2. Data una matrice  $A \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$  tale che  $A^6 = I$ , trovare tutte le possibili forme di Jordan di  $A$ , incluse quelle di Jordan reale.