Esercizi di Algebra Lineare, corso A

Enrico Berni

06/02/2025

Provate a svolgere i seguenti esercizi in maniera autonoma, eventualmente confrontandovi con dei compagni. Le soluzioni saranno discusse durante il tutorato di giovedì 6 febbraio.

1. Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ rappresentato nella base canonica dalla matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$
   - Calcolare la segnatura di φ.
   - Determinare un sottospazio W di dimensione massima tale che $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$.

2. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$, dotato del prodotto scalare $\varphi(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$. Sia R la mappa di φ-rappresentazione, i.e. l'unica mappa definita implicitamente da
$$R : V^* \to V, \quad f(v) = \varphi(R(f), v)$$
per ogni $v \in V$.
Data la base $\mathcal{B} = \{x, 1 + x, x + x^2\}$ di V, determinare $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}(R)$.

3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dotato di una forma bilineare b. È sempre possibile dire che esistono due funzionali f e $g \in V^*$ tali che $\varphi(v, w) = f(v)g(w)$?

4. Siano $f_1, \ldots, f_k, g \in V^*$ dei funzionali lineari su uno spazio vettoriale V. Mostrare che g è linearmente dipendente dagli $\{f_j\}$ se e solo se $\operatorname{Ker} f_j \subseteq \operatorname{Ker} g$ per ogni j.

5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e sia φ un prodotto scalare non degenere su V. Diciamo che φ è *anisotropo* se $\varphi(v, v) = 0$ implica $v = 0$. Dimostrare che:

   (a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, φ è anisotropo se e solo se è definito (positivo o negativo).

   (b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, φ è anisotropo se e solo se V ha dimensione 1.