

# Esercizi di Algebra Lineare, corso A

Enrico Berni

16/01/2025

Provate a svolgere i seguenti esercizi in maniera autonoma, eventualmente confrontandovi con dei compagni. Le soluzioni saranno discusse durante il tutorato di giovedì 16 gennaio.

1. Dato un gruppo  $G$ , definiamo il suo centro come

$$Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}.$$

Sia  $GL(n, \mathbb{R})$  il gruppo delle matrici invertibili di taglia  $n$ . Determinare  $Z(GL(n, \mathbb{R}))$ .

2. Determinare, se esiste, un'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathfrak{M}(3, \mathbb{R})$ , tale che  $\text{Im} f$  contenga l'insieme delle matrici di rango 2.

3. Sia  $A \in \mathfrak{M}(3, \mathbb{R})$  tale che  $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Sia  $L_A$  l'applicazione lineare

$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $L_A(v) = Av$ . Mostrare che  $\text{Ker} L_A = \text{span}(e_1)$ .

4. Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ; diciamo che  $f$  è  $\mathbb{R}$ -lineare se è lineare rispetto alla struttura di  $\mathbb{C}$  come spazio vettoriale reale. Diciamo che è  $\mathbb{C}$ -lineare, se è lineare rispetto alla struttura di  $\mathbb{C}$  come spazio vettoriale complesso.

- (a) Mostrare che una funzione  $\mathbb{C}$ -lineare è sempre  $\mathbb{R}$ -lineare.
- (b) Esibire una funzione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  che sia  $\mathbb{R}$ -lineare ma non  $\mathbb{C}$ -lineare.
- (c) Mostrare che una funzione  $\mathbb{R}$ -lineare è tale che  $f(iz) = if(z)$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare.

5. Sia  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ , e sia  $f_A : \mathfrak{M}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}(3, \mathbb{R})$  la mappa  $f_A(X) = AX$ .

(a) Trovare una base per  $\text{Ker}(f_A)$ .

(b) Trovare una base  $\mathcal{B}$  tale che  $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & A \end{bmatrix}$ .