

# Esercizi di Algebra Lineare, corso A

Enrico Berni

30/01/2025

Provate a svolgere i seguenti esercizi in maniera autonoma, eventualmente confrontandovi con dei compagni. Le soluzioni saranno discusse durante il tutorato di giovedì 30 gennaio.

1. Sia  $\mathfrak{M}(m, n, \mathbb{R})$  lo spazio delle matrici quadrate di taglia  $m \times n$  a coefficienti reali. Sia  $\varphi$  l'applicazione

$$\varphi : \mathfrak{M}(m, n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}(m, n, \mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = \text{tr}(A^t B).$$

- (a) Mostrare che  $\varphi$  è un prodotto scalare definito positivo.
  - (b) Nel caso  $m = n$ , determinare l'ortogonale del sottospazio  $S(n, \mathbb{R})$  delle matrici simmetriche.
2. Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $\mathbb{K}$ . Sia  $\varphi$  un prodotto scalare su  $V$ , e sia  $v_0$  un vettore tale che  $\varphi(v_0, v_0) = 0$ . Mostrare che  $\{v_0\}$  si estende a una base ortogonale di  $V$  se e solo se  $\text{span}(v_0)^\perp = V$ .
  3. Sia  $\varphi$  il prodotto scalare su  $\mathbb{R}^5$  rappresentato nella base canonica dalla matrice

$$\mathfrak{M}_c(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Trovare una base di  $\text{Rad}(\varphi)$ .
- (b) Calcolare la segnatura di  $\varphi$ ,  $\sigma(\varphi)$ .
- (c) Determinare un sottospazio totalmente isotropo di dimensione massima.

4. Determinare una matrice  $A \in \mathfrak{M}(3, \mathbb{R})$  che rappresenti nella base canonica un prodotto scalare  $\varphi$  su  $\mathbb{R}^3$  tale che
- $\sigma(\varphi) = (2, 1, 0)$ ;
  - $\sigma(\varphi|_W) = (1, 1, 0)$ , dove  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ ;
  - Il vettore  $e_1$  sia isotropo per  $\varphi$ .
5. Usando soltanto gli assiomi di determinante, e il comportamento dello stesso rispetto all'algoritmo di Gauss, calcolare il determinante di

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$