

# **Fisica 1**

Enrico Bragastini

24 maggio 2021

# Indice

<b>1</b>	<b>Nozioni di base</b>	<b>1</b>
1.1	Misura di una grandezza . . . . .	1
1.2	Grandezze fisiche fondamentali e derivate . . . . .	1
1.3	Sistemi di Unità di Misura . . . . .	1
1.3.1	Ulteriori Unità di Misura . . . . .	2
1.4	Notazione Scientifica . . . . .	2
1.5	Analisi Dimensionale . . . . .	3
1.6	Sistemi di Coordinate . . . . .	3
1.6.1	Coordinate cartesiane . . . . .	3
1.6.2	Coordinate scalari . . . . .	3
1.7	Grandezze scalari e grandezze vettoriali . . . . .	4
1.7.1	Grandezza scalare . . . . .	4
1.7.2	Grandezza vettoriale . . . . .	4
1.8	Proprietà e operazioni con i vettori . . . . .	5
1.8.1	Uguaglianza di due vettori . . . . .	5
1.8.2	Somma tra vettori (metodo grafico) . . . . .	5
1.8.3	Opposto di un vettore . . . . .	6
1.8.4	Sottrazione tra vettori . . . . .	6
1.8.5	Prodotto tra un vettore e uno scalare . . . . .	6
1.9	Componenti di un vettore e vettori unitari . . . . .	7
1.9.1	Componenti di un vettore . . . . .	7
1.9.2	Vettori unitari . . . . .	7
1.9.3	Somma tra vettori (metodo con vettori unitari) . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Cinematica</b>	<b>9</b>
2.1	Moto in una dimensione . . . . .	9
2.2	Posizione, spostamento e distanza . . . . .	9
2.3	Velocità media e istantanea . . . . .	9
2.4	Moto Rettilineo Uniforme . . . . .	10
2.5	Accelerazione media e istantanea . . . . .	11
2.6	Moto rettilineo uniformemente accelerato . . . . .	11
2.6.1	Corpi in caduta libera . . . . .	12
2.7	Moto in due dimensioni . . . . .	12
2.7.1	Moto in due dimensioni con accelerazione costante . . . . .	13
2.7.2	Moto dei proiettili . . . . .	13
2.8	Moto Circolare Uniforme . . . . .	15

<b>3</b>	<b>Dinamica</b>	<b>17</b>
3.1	Concetto di forza . . . . .	17
3.2	Prima legge di Newton - principio d'Inerzia . . . . .	19
3.2.1	Massa . . . . .	19
3.3	Seconda legge di Newton . . . . .	20
3.3.1	La forza gravitazionale e il peso . . . . .	20
3.4	Terza legge di Newton . . . . .	20
3.5	Modelli di analisi . . . . .	21
3.5.1	Punto materiale in equilibrio . . . . .	21
3.5.2	Piano inclinato . . . . .	23
3.6	Forze di attrito . . . . .	23
3.7	Altre applicazioni delle leggi di Newton . . . . .	25
3.7.1	Estensione del Moto Circolare Uniforme . . . . .	25
3.7.2	Moto Circolare non Uniforme . . . . .	25
3.8	Moto in presenza di forze frenanti . . . . .	26
3.8.1	Forza frenante proporzionale alla velocità del corpo . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Energia</b>	<b>27</b>
4.1	Energia di un sistema . . . . .	27
4.1.1	Lavoro compiuto da una forza costante . . . . .	27
4.1.2	Prodotto scalare tra due vettori . . . . .	27
4.2	Lavoro di una forza variabile . . . . .	28
4.2.1	Lavoro compiuto da una molla . . . . .	28
4.3	Energia Cinetica . . . . .	30
4.4	Energia potenziale . . . . .	30
4.4.1	Energia potenziale gravitazionale . . . . .	30
4.4.2	Energia potenziale elastica . . . . .	31
4.5	Forze conservative e non conservative . . . . .	32
4.5.1	Forze conservative . . . . .	32
4.5.2	Forze non conservative . . . . .	32
4.5.3	Relazione tra forze conservative ed energia potenziale . . . . .	32
4.6	Conservazione dell'energia . . . . .	33
4.6.1	Energia meccanica e conservazione dell'energia meccanica . . . . .	33
4.6.2	Sistemi con attrito dinamico . . . . .	34
4.6.3	Generalizzazione della legge di conservazione dell'energia . . . . .	35
4.7	Potenza . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Quantità di moto e urti</b>	<b>36</b>
5.1	Quantità di moto (sistema isolato) . . . . .	36
5.2	Quantità di moto (sistema non isolato) . . . . .	37
5.3	Urti in una dimensione . . . . .	37
5.3.1	Urti anelastici . . . . .	38
5.3.2	Urti elastici . . . . .	38
5.4	Centro di massa . . . . .	39
5.5	Moto di un sistema di punti materiali . . . . .	41

<b>6</b>	<b>Rotazione del corpo rigido</b>	<b>43</b>
6.1	Posizione, velocità e accelerazione angolari . . . . .	43
6.1.1	Corpo rigido con accelerazione costante . . . . .	44
6.1.2	Variabili angolari e variabili lineari . . . . .	44
6.2	Momento di una forza . . . . .	45
6.2.1	Prodotto vettoriale . . . . .	46
6.2.2	Corpo rigido soggetto a un momento risultante . . . . .	46
6.2.3	Calcolo dei momenti di Inerzia . . . . .	47
6.2.4	Energia cinetica di rotazione . . . . .	48
6.2.5	Considerazioni energetiche nel moto rotatorio . . . . .	48
6.3	Momento angolare . . . . .	49
6.3.1	Momento angolare di un corpo rigido in rotazione . . . . .	50
6.3.2	Conservazione del momento angolare . . . . .	50
6.3.3	Moto di giroscopi e trottole . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Equilibrio del corpo rigido</b>	<b>52</b>
7.1	Baricentro . . . . .	53
<b>8</b>	<b>Gravitazione</b>	<b>54</b>
8.1	Legge di gravitazione universale di Newton . . . . .	54
8.1.1	Accelerazione di caduta libera e forza gravitazionale . . . . .	54
8.1.2	Campo gravitazionale . . . . .	55
8.2	Le leggi di Keplero . . . . .	55
8.2.1	Prima legge di Keplero . . . . .	55
8.2.2	Seconda legge di Keplero . . . . .	56
8.2.3	Terza legge di Keplero . . . . .	56
8.3	Energia potenziale gravitazionale . . . . .	56

# Nozioni di base

## 1.1 Misura di una grandezza

Una **grandezza fisica** è la proprietà di un fenomeno, corpo o sostanza, che può essere espressa quantitativamente mediante un numero e un riferimento.

La misura di una grandezza può avvenire con due modalità:

- Mediante un dispositivo sperimentale
- Confronto con un'altra grandezza omogenea di riferimento e costante

L'espressione di una grandezza fisica avviene nella forma:

$$\text{Numero} + \textit{Unit\grave{a} di misura}$$

## 1.2 Grandezze fisiche fondamentali e derivate

Possiamo distinguere le grandezze fisiche in fondamentali e derivate.

Le **grandezze fisiche fondamentali** sono:

- Lunghezza [L]
- Massa [M]
- Tempo [t]
- Intensità Di Corrente [i]
- Temperatura Assoluta [T]

Le **grandezze fisiche derivate** sono grandezze che possono essere espresse in forma di combinazioni matematiche delle grandezze fondamentali. Alcuni esempi di grandezze derivate sono:

- Superficie
- Accelerazione
- Volume
- Forza
- Velocità
- Pressione

## 1.3 Sistemi di Unità di Misura

SISTEMA	Lunghezza	Massa	Tempo	Corrente	Temperatura
MKS (s. i.)	m	kg	s	A	°K
cgs	cm	g	s	A	°K

### 1.3.1 Ulteriori Unità di Misura

Esistono ulteriori sistemi di unità di misura che permettono di avere maggiore comodità nelle misurazioni di particolari grandezze. Se ne elencano alcuni:

1. Lunghezza: Ångströms, Anno-Luce
2. Tempo: Minuto, Ora
3. Volume: Litro
4. Velocità: Chilometro/Ora
5. Pressione: Atmosfera, Millimetro di mercurio
6. Energia: Elettrovolt, Chilovattora

## 1.4 Notazione Scientifica

Per i numeri particolarmente grandi o piccoli risulta comodo rappresentarli in **Notazione Scientifica** utilizzando le potenze del 10.

La notazione scientifica permette di scrivere un numero in cui compare una sequenza molto lunga di zeri in forma compatta. In matematica si dice che un numero è scritto in notazione scientifica se è della forma  $n \cdot 10^e$

Esempio:

$$1,2 \cdot 10^5$$

Un numero in *notazione scientifica* è quindi composto da:

- Un numero compreso  $n$  tale che  $1 \leq n < 10$
- Una potenza del 10 con esponente intero

## 1.5 Analisi Dimensionale

Quando si è di fronte ad una formula fisica o si svolgono calcoli con grandezze fisiche e unità di misura, per verificare la plausibilità della formula data e la consistenza dei calcoli svolti si può ricorrere all'analisi dimensionale.

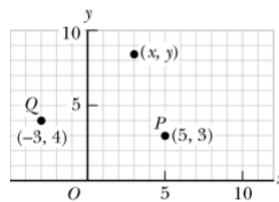
Eseguire l'analisi dimensionale di una formula, o più in generale di un'equazione fisica, vuol dire ricavare le dimensioni di ognuno dei due membri allo scopo di verificare che esse coincidano: se così non fosse ci sarebbe necessariamente qualcosa di sbagliato, perché avremmo a che fare con un'equazione dimensionalmente non consistente.

## 1.6 Sistemi di Coordinate

Molti aspetti della fisica hanno in qualche modo a che fare con la descrizione di un punto dello spazio. Ad esempio, la descrizione matematica del moto di un corpo richiede un metodo che descriva la successione delle posizioni occupate dal corpo nel tempo.

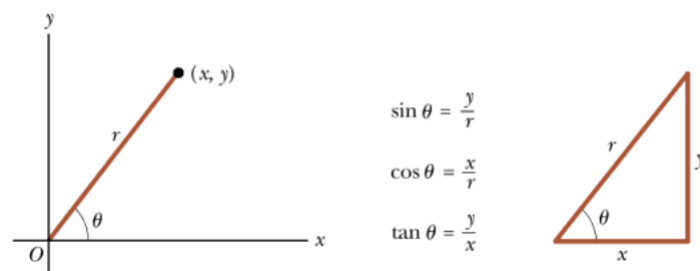
### 1.6.1 Coordinate cartesiane

In due dimensioni questa descrizione può essere realizzata con l'uso di un sistema di **coordinate cartesiane** in cui due assi perpendicolari si intersecano in un punto definito come punto origine. Le coordinate cartesiane sono anche dette *coordinate rettangolari*.



### 1.6.2 Coordinate scalari

Talvolta è più conveniente rappresentare un punto in un piano tramite le sue **coordinate polari piane**  $(r, \theta)$ .



In questo sistema di coordinate polari,  $r$  è la distanza dall'origine al punto di coordinate cartesiane  $(x, y)$  e  $\theta$  è l'angolo fra un asse fisso e la semiretta tracciata dall'origine al punto, generalmente misurato in verso antiorario dall'asse  $x$  positivo.

**Conversione delle coordinate** Partendo dalle coordinate polari, si possono ottenere le coordinate cartesiane tramite le seguenti equazioni:

- $x = r \cdot \cos \theta$
- $y = r \cdot \sin \theta$

Inoltre, sfruttando la trigonometria si possono ottenere queste altre informazioni:

- $\tan \theta = \frac{y}{x}$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

## 1.7 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

### 1.7.1 Grandezza scalare

Una *grandezza scalare* è una grandezza che è specificata solamente da un valore con una certa unità di misura e non associata con una direzione.

Alcune grandezze scalari sono *sempre positive*, come la massa e la velocità scalare. Altre, come la temperatura, possono avere valori *sia positivi che negativi*. Per manipolare le quantità scalari si adoperano le **normali regole dell'aritmetica**.

### 1.7.2 Grandezza vettoriale

Una grandezza vettoriale è una grandezza che, per essere specificata, ha bisogno sia di un numero con le sue unità di misura (**modulo del vettore**), sia di una **direzione orientata**.

Per rappresentare un vettore, si utilizza una lettera sormontata da una freccia come da esempio:

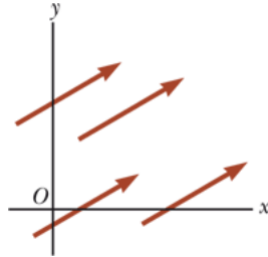
$$\vec{A}$$



## 1.8 Proprietà e operazioni con i vettori

### 1.8.1 Uguaglianza di due vettori

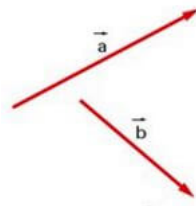
Due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  sono **uguali** se sono uguali i loro *moduli*, la *direzione* e il *verso*. L'uguaglianza è *indipendente dall'origine*, ovvero i vettori possono essere traslati sul grafico in base alla necessità senza che venga persa la loro uguaglianza.



### 1.8.2 Somma tra vettori (metodo grafico)

La somma tra vettori può essere svolta rapidamente in modo grafico.

In generale, se si vogliono sommare due spostamenti rappresentati dai due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  come di seguito rappresentato:

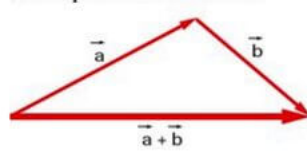


**Metodo punta-coda:** Spostiamo uno dei due vettori in modo tale che la sua coda coincida con la punta del primo vettore.

Riferendoci al nostro caso, spostiamo il vettore  $\vec{b}$  in modo tale che la sua coda coincida con la punta del vettore  $\vec{a}$ , come di seguito rappresentato:



Come è possibile notare dalla figura precedente lo spostamento del vettore  $\vec{b}$  deve essere effettuato in modo tale che la freccia rimanga sempre parallela a se stessa. Lo spostamento totale si ottiene unendo la coda del vettore  $\vec{a}$  con la punta del vettore  $\vec{a}$ , come di seguito rappresentato:



Si noti che in generale il modulo del vettore somma non è uguale alla somma dei moduli dei singoli spostamenti.

### 1.8.3 Opposto di un vettore

L'**opposto di un vettore**  $\vec{A}$  è definito come il vettore che sommato a  $\vec{A}$  permette di ottenere 0.

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$$

Il vettore  $(-\vec{A})$  è quindi un vettore che ha lo **stesso modulo** di  $\vec{A}$ , con la **stessa direzione** ma di **verso opposto**.

### 1.8.4 Sottrazione tra vettori

La **sottrazione tra vettori** si ottiene sfruttando la definizione di *vettore opposto*. Quindi, si vuole sottrarre il vettore  $\vec{B}$  al vettore  $\vec{A}$ , basta *sommarne l'opposto*.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

### 1.8.5 Prodotto tra un vettore e uno scalare

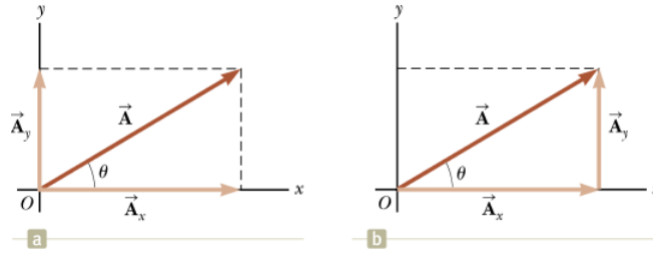
- Se un vettore  $\vec{A}$  viene moltiplicato per una quantità scalare positiva  $m$ , allora il prodotto è  $m\vec{A}$  e possiede la stessa direzione di  $A$  e modulo  $mA$ .
- Se un vettore  $\vec{A}$  viene moltiplicato per una quantità scalare negativa  $-m$ , allora il prodotto è  $-m\vec{A}$  e possiede direzione opposta di  $A$  e modulo  $mA$ .

## 1.9 Componenti di un vettore e vettori unitari

### 1.9.1 Componenti di un vettore

Il metodo geometrico di somma vettoriale non è raccomandabile in quelle situazioni in cui si richiede una precisione elevata, oppure nei problemi in tre dimensioni. Esiste un metodo per sommare i vettori che fa uso delle *proiezioni dei vettori* lungo gli assi coordinati. Queste proiezioni sono chiamate **componenti del vettore** o anche componenti rettangolari del vettore. Un vettore può essere descritto in modo completo dai suoi componenti.

Un vettore  $\vec{A}$  può essere espresso come *somma di due vettori componenti*:  $\vec{A}_x$ , parallelo all'asse  $x$ , sommato a  $\vec{A}_y$ , parallelo all'asse  $y$ .



Si ottengono quindi le seguenti relazioni:

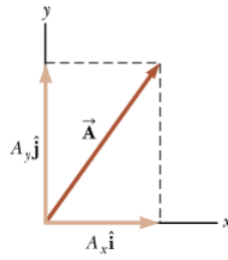
- $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$
- $\vec{A}_x = A \cos \theta$
- $\vec{A}_y = A \sin \theta$
- $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
- $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{A_y}{A_x} \right)$

Nell'affrontare un problema fisico si può scegliere di specificare un vettore  $\vec{A}$  per mezzo delle sue componenti  $\vec{A}_x$  e  $\vec{A}_y$  oppure per mezzo del suo modulo  $A$  e dell'angolo  $\theta$ .

### 1.9.2 Vettori unitari

Un **vettore unitario** è un *vettore adimensionale* il cui modulo è esattamente 1. I vettori unitari hanno l'unico scopo di indicare una direzione orientata e non hanno nessun altro significato fisico. Il modulo dei vettori unitari è uguale a 1, ovvero  $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

Useremo i simboli  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , e  $\hat{k}$  per rappresentare i vettori unitari che puntano rispettivamente nelle direzioni positive  $x$ ,  $y$  e  $z$ .



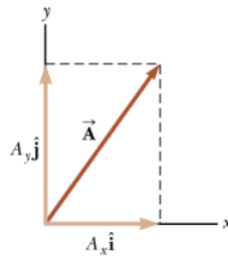
Consideriamo un vettore  $\vec{A}$  che giace nel piano  $xy$  come in figura. Il prodotto della componente  $A_x$  per il vettore unitario  $\hat{i}$  è il vettore  $\vec{A}_x = A_x \hat{i}$  parallelo all'asse delle  $x$  e di modulo  $|A_x|$ . Analogamente,  $\vec{A}_y = A_y \hat{j}$  è un vettore di modulo  $|A_y|$  parallelo all'asse  $y$ . Così, nella notazione dei vettori unitari, il vettore  $\vec{A}$  è

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

### 1.9.3 Somma tra vettori (metodo con vettori unitari)

Quando il metodo grafico non risulta sufficientemente accurato ci si può avvalere dell'utilizzo delle componenti dei vettori da sommare.

Si supponga di voler sommare il vettore  $\vec{A}$  composto da  $\vec{A}_x$  e da  $\vec{A}_y$  al vettore  $\vec{B}$  composto da  $\vec{B}_x$  e da  $\vec{B}_y$ .



Per effettuare questa somma basta sommare separatamente le componenti  $x$  e  $y$ . Il vettore risultante  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$  si ottiene con:

$$\vec{R} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

ovvero

$$\vec{R} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j}$$

Il vettore ottenuto può essere a sua volta visto come  $\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$ .

# Cinematica

La **Cinematica** è un ramo della **meccanica classica** che si occupa di descrivere quantitativamente il moto dei corpi, indipendentemente dalle cause del moto stesso.

## 2.1 Moto in una dimensione

**Punto materiale** Nello studio del moto traslatorio utilizziamo il modello **punto materiale** e descriviamo il moto di un corpo approssimandolo ad “una particella” senza considerare le sue dimensioni reali.

In generale un punto materiale è quel corpo che *ha una massa ma ha dimensioni infinitesimali*.

## 2.2 Posizione, spostamento e distanza

**Posizione** Indichiamo come posizione il punto occupato *istante per istante* dal punto materiale oggetto di studio. Un corpo è considerato *in moto* se la sua posizione cambia con il passare del tempo.

**Spostamento** Lo spostamento, indicato con  $\Delta x$ <sup>1</sup> è definito come la variazione della sua posizione in un certo intervallo di tempo.

Se da  $x_i$  il punto materiale raggiunge la posizione  $x_f$  il suo spostamento è definito come la posizione finale meno la posizione iniziale:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Lo spostamento è una *grandezza vettoriale*, ma sul moto rettilineo è possibile considerarlo come una *lunghezza scalare*.

**Distanza percorsa** La distanza percorsa *non è lo spostamento*. La distanza indica la lunghezza del cammino percorso da una particella.

Supponiamo che un'automobile parta dal punto  $A$ , arrivi al punto  $B$  e poi ritorni al punto  $A$ . In questo caso abbiamo che lo spostamento è nullo, infatti  $x_i = x_f$ , ovvero  $\Delta x = 0$ . Mentre la distanza percorsa corrisponde a  $2(B - A)$ .

## 2.3 Velocità media e istantanea

**Velocità media** La **velocità media**,  $v_m$  di un punto materiale, è definita come il rapporto tra lo spostamento  $\Delta x$  del punto materiale e l'intervallo di tempo  $\Delta t$  durante il

---

<sup>1</sup>La lettera greca  $\Delta$  indica in generale una *variazione*

quale lo spostamento è avvenuto:

$$v_{x,media} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- L'unità di misura è:  $\frac{m}{s}$
- Se  $\Delta x > 0$  (spostamento nel verso positivo), allora  $v_m > 0$ .
- Se  $\Delta x < 0$  (spostamento nel verso negativo), allora  $v_m < 0$

**Velocità media scalare** La velocità scalare media  $v_{media}$  di un punto materiale, una quantità scalare, è definita come il rapporto fra la distanza totale  $d$  percorsa e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerla:

$$v_m \equiv \frac{d}{\Delta t}$$

**Velocità istantanea** La velocità istantanea  $v_x$  di un corpo in un determinato istante di tempo  $t$  è uguale al valore limite del rapporto  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  quando  $\Delta t$  tende a 0. Nel linguaggio del calcolo differenziale questo limite è la derivata di  $x$  rispetto a  $t$ :

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Esempio:

Espressione analitica dello spostamento di un punto materiale:  $x = -4t + 2t^2$  Calcolo della velocità istantanea a  $t = 2, 5s$

$$\begin{aligned} x &= -4t + 2t^2 \\ \frac{dx}{dt} &= -4 + 4t \\ v_x &= 6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

## 2.4 Moto Rettilineo Uniforme

Un corpo si muove con **moto rettilineo uniforme** quando si sposta lungo una retta con velocità costante.

Basandoci su questa definizione si possono ricavare le seguenti equazioni:

- $v_x = \text{costante}$
- $v_{x,media} = v_x$
- $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$
- $x_f = x_i + \frac{v_x(t_f - t_i)}{v_x \Delta t}$ , scegliendo  $\begin{matrix} t_i = 0 \\ t_f = t \end{matrix}$  otteniamo  $x_f = x_i + v_x \cdot t$

## 2.5 Accelerazione media e istantanea

**Accelerazione media** Quando la velocità cambia nel tempo, si dice che la particella sta accelerando. L'accelerazione media  $a_{x,media}$  del punto materiale è definita come la variazione della velocità  $\Delta v_x$  divisa per l'intervallo di tempo  $\Delta t$  in cui avviene la variazione:

$$a_{x,media} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

L'unità di misura dell'accelerazione è  $m/s^2$

**Accelerazione istantanea** Si definisce l'accelerazione istantanea come il limite dell'accelerazione media quando  $\Delta t$  tende a zero.

$$a_{x,media} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'accelerazione istantanea è la derivata della velocità rispetto al tempo che è anche la pendenza della curva del grafico velocità-tempo.

## 2.6 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Nel caso del **moto rettilineo uniformemente accelerato**, il moto del *punto materiale* avviene con *accelerazione costante*.

Se il moto avviene con accelerazione costante, allora la velocità media e la velocità istantanea coincidono.

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

Supponendo  $t_i = 0$  otteniamo  $a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t}$  e quindi  $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$  (per  $a_x$  costante)

Poiché la velocità varia linearmente con il tempo, la velocità media in un intervallo di tempo arbitrario è uguale alla *media aritmetica* della velocità iniziale  $v_{xi}$  e della velocità finale  $v_{xf}$ :

$$v_{media} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf}) \quad (\text{per } a_x \text{ costante})$$

Ora, ricordando che  $\Delta x = x_f - x_i$  e che  $\Delta t = t_f - 0 = t$ , si ottiene:

$$x_f - x_i = v_{media} t = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf}) t$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf}) t$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)] t$$

$$x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (\text{per } a_x \text{ costante})$$

Si può infine ottenere un'espressione per la velocità finale che non contiene il tempo:

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

### 2.6.1 Corpi in caduta libera

È un fatto ben noto che vicino alla superficie della Terra e senza la resistenza dell'aria, tutti i corpi sotto l'influenza della gravità terrestre cadono verso la Terra con la **stessa accelerazione costante**.

Indicheremo il modulo dell'accelerazione di caduta libera, detta anche accelerazione di gravità con il simbolo  $g$ . Sulla superficie della Terra, il valore di  $g$  è approssimativamente  $9.80 \text{ m/s}^2$ .

## 2.7 Moto in due dimensioni

A differenza del moto in una sola dimensione, nel *moto a due dimensioni*, le posizioni di inizio e di fine dello spostamento di un punto materiale sono **grandezze vettoriali** e sono indicate da  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_f$ .

La posizione è quindi descritta dal *vettore*  $\vec{r}$ . Lo spostamento del punto materiale è indicato con  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ .

**Velocità media** La velocità media è definita come:

$$\vec{v}_{media} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

La direzione e il verso di  $\vec{v}_{media}$  sono le stesse di  $\Delta\vec{r}$  in quanto  $\Delta t$  è uno scalare.

**Velocità istantanea** La velocità istantanea è definita come:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La velocità istantanea è la *derivata* del vettore posizione rispetto al tempo. La direzione del vettore velocità istantanea in un punto è quella della retta tangente alla traiettoria in quel punto ed è orientata nel verso del moto.

**Accelerazione media** Conoscendo la velocità in ciascuno dei due punti è possibile determinare l'accelerazione media:

$$\vec{a}_{media} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

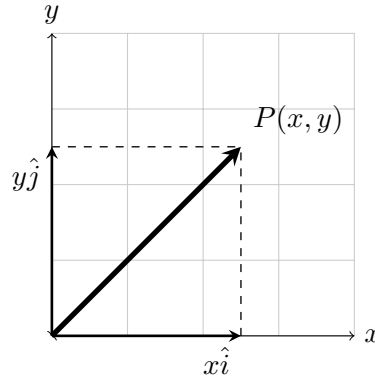
**Accelerazione istantanea** Dall'accelerazione media è possibile ricavare l'accelerazione istantanea:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



### 2.7.1 Moto in due dimensioni con accelerazione costante

Il moto in due dimensioni può essere modellizzato come *due moti indipendenti* lungo ciascuna delle due direzioni ortogonali che possono essere associate agli *assi*  $x$  e  $y$ . Qualunque azione in direzione  $x$  non influenza il moto in direzione  $y$  e viceversa.



Il **vettore posizione** per un punto materiale che si muove nel piano  $xy$  può essere scritto come

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Se il vettore posizione è noto, la **velocità** può essere ricavata:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

Essendo l'**accelerazione costante**, anche  $a_x$  e  $a_y$  sono costanti.

Sostituendo  $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$  e  $v_{yf} = v_{yi} + a_y t$  alla formula della velocità si ottiene:

$$\begin{aligned} v_f &= (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j} \\ &= (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t \\ &= v_i + at \end{aligned}$$

Analogamente le coordinate  $x_f$  e  $y_f$  sono date da:

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

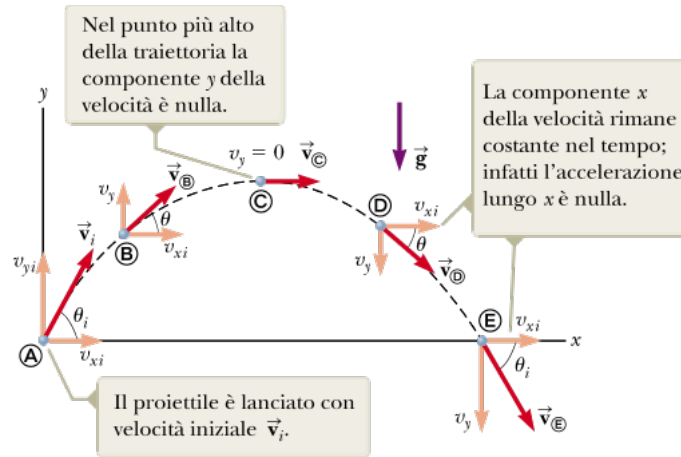
Sostituendole nella formula del vettore posizione si ottiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_f &= x_f\hat{i} + y_f\hat{j} \\ &= (x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\hat{i} + (y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\hat{j} \\ &= (x_i\hat{i} + y_i\hat{j}) + (v_{xi}\hat{i} + v_{yi}\hat{j})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t^2 \\ &= \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a} t^2 \end{aligned}$$

### 2.7.2 Moto dei proiettili

Il moto dei proiettili (moto parabolico) può essere analizzato mediante due ipotesi:

1. l'accelerazione di caduta libera si mantiene costante per tutto il moto ed è diretta verso il basso



## 2. l'effetto della resistenza dell'aria è trascurabile

Sotto queste ipotesi, la traiettoria del proiettile è *sempre una parabola*.

Il moto del proiettile è considerabile con accelerazione orizzontale  $a_x = 0$ , mentre l'accelerazione verticale è costante:  $\vec{a} = \vec{g}$ . L'espressione del vettore posizione del proiettile è quindi pari a:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

dove le due componenti di  $\vec{v}_i$  sono:

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i$$

$$v_{yi} = v_i \sin \theta_i$$

Tenendo a mente che il moto del proiettile è la sovrapposizione di un punto materiale con velocità orizzontale costante

$$x_f = x_i + v_{xi} t$$

e un punto materiale con accelerazione verticale costante ( $a_y = -g$ ), otteniamo le seguenti relazioni:

- $v_{yf} = v_{yi} - gt$
- $v_{y,media} = \frac{v_{yi} + v_{yf}}{2}$
- $y_f = y_i + \frac{1}{2}(v_{yi} + v_{yf})t$
- $y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$
- $v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$

**Altezza massima** L'altezza massima  $h_{max}$  raggiunta dal corpo lanciato è determinabile notando che nel *picco* la velocità verticale si annulla  $v_y = 0$

$$v_{yf} = v_{yi} - gt \rightarrow 0 = v_i \sin \theta_i - gt$$

$$t = \frac{v_i \sin \theta_i}{g} \quad (\text{tempo per raggiungere } h_{max})$$

Possiamo utilizzare questa espressione del tempo per calcolare l'altezza massima raggiunta. Partendo dalla precedente espressione per il calcolo di  $y_f$  si sostituisce  $t$  con l'espressione appena trovata e  $y_f$  diventa l'altezza  $h_{max}$

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow h_{max} = 0 + (v_i \sin \theta_i) \frac{v_i \sin \theta_i}{g} - \frac{1}{2}g \left( \frac{v_i \sin \theta_i}{g} \right)^2$$

$$h_{max} = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$

**Gittata** La gittata  $R$  è la distanza orizzontale percorsa dal proiettile in un *tempo doppio* di quello necessario a raggiungere l'altezza massima.

$$x_f = x_i + v_{xi}t \quad R = v_{xi}t = (v_i \cos \theta_i)2t$$

$$t = \frac{v_i \sin \theta_i}{g} \quad R = (v_i \cos \theta_i) \frac{2v_i \sin \theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{g}$$

Poiché vale la relazione  $2 \sin \theta_i \cos \theta_i = \sin 2\theta$ , si può scrivere:

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

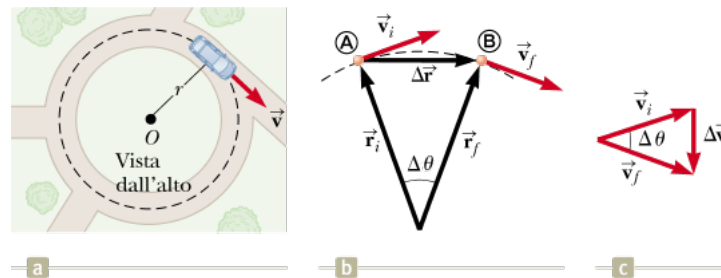
## 2.8 Moto Circolare Uniforme

Il *moto circolare* è uno dei moti semplici studiati dalla fisica e dalla cinematica, e consiste in un moto di un punto materiale lungo una circonferenza.

Se il **moto circolare** è **uniforme** significa che **è costante il vettore velocità angolare**, cioè si ha **velocità lineare costante in modulo**. Poiché comune in molte situazioni fisiche, questo tipo di moto viene schematizzato in un modello di analisi, detto **punto materiale in moto circolare uniforme**.

Il **vettore velocità**, che è sempre **tangente alla traiettoria**, è **perpendicolare al raggio** della traiettoria circolare. Quindi la direzione del vettore velocità cambia continuamente.

In un moto circolare uniforme il **vettore accelerazione** può avere solamente un componente **perpendicolare alla traiettoria**, ovvero *diretto verso il centro della circonferenza*.



**Accelerazione media** Partendo dall'equazione  $\vec{a}_{media} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  e conoscendo la relazione tra le lunghezze nei due triangoli delle figure

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{r}$$

è possibile calcolare il modulo dell'accelerazione media nell'intervallo di tempo in cui avviene lo spostamento:

$$|\vec{a}_{media}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{|\Delta t|} = \frac{v}{r} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

Infine, passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ , si ottiene per il modulo dell'accelerazione:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Questo tipo di accelerazione è chiamata **accelerazione centripeta**.

**Periodo** È conveniente descrivere il moto circolare uniforme di un punto materiale su una circonferenza di raggio  $r$  usando come parametro il **periodo**  $T$ , definito come l'intervallo di tempo necessario perché il punto compia una *rivoluzione* completa. Nell'intervallo di tempo  $T$  il punto percorre la circonferenza di lunghezza  $2\pi r$ . Ne segue che la velocità costante è uguale alla lunghezza della circonferenza divisa per il periodo, e cioè  $v = \frac{2\pi r}{T}$  e, da questa:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

**Velocità angolare** Il reciproco del periodo è la *frequenza*, e si misura in giri al secondo. Poiché un giro completo del punto materiale corrisponde ad una rotazione di  $2\pi$  radianti, il prodotto tra  $2\pi$  e la frequenza dà la **velocità angolare**  $\omega$  del punto materiale, che si misura in radianti/s:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

**Rapporto tra velocità angolare e velocità** Combinando l'espressione della *velocità angolare* con quella del *periodo* è possibile trovare una relazione tra la velocità angolare e la velocità con cui il punto si muove sulla traiettoria circolare:

$$\omega = 2\pi \left( \frac{v}{2\pi r} \right) = \frac{v}{r} \rightarrow v = r\omega$$

Fissata la velocità angolare, **la velocità aumenta all'aumentare del raggio**.

È possibile esprimere l'accelerazione centripeta in moto circolare uniforme in termini della velocità angolare:

$$a_c = \frac{(r\omega)^2}{r} \qquad a_c = r\omega^2$$

# Dinamica

In fisica, la dinamica è il ramo della meccanica newtoniana che si occupa dello *studio del moto dei corpi a partire dalle sue cause*, le **forze** o, in termini più concreti, delle circostanze che lo determinano e lo modificano nel tempo e nello spazio del suo sistema di riferimento.

## 3.1 Concetto di forza

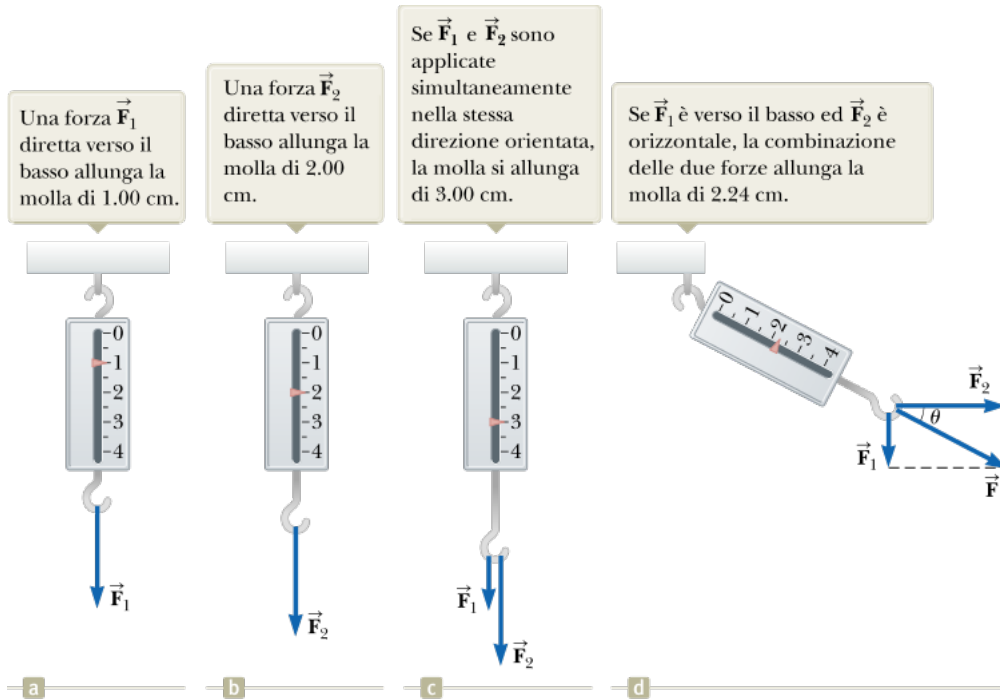
Le **forze** sono definite come le cause che provocano un cambiamento nel moto del corpo, nella velocità del corpo. Si possono distinguere le forze in due categorie:

1. **Forze di contatto**, ovvero forze che si esercitano attraverso il contatto fisico tra due oggetti.
2. **Forze di campo**, ovvero le forze che non richiedono il contatto fisico tra gli oggetti, come la forza gravitazionale, la forza elettrica o la forza magnetica.

Tuttavia, se vengono esaminate a livello atomico, tutte le forze, che classifichiamo come forze di contatto, sono in realtà dovute alle forze elettriche (forze di campo). Di fatto tutte le forze conosciute in natura sono *forze di campo*:

1. Attrazione gravitazionale
2. Forze elettromagnetiche
3. Forze nucleari forti tra particelle subatomiche
4. Forze nucleari deboli (in processi di decadimento radioattivo)

Le forze hanno una **natura vettoriale**. È possibile infatti provare sperimentalmente che le forze agiscono secondo una natura vettoriale e di conseguenza è necessario utilizzare le regole della *somma di vettori* per ottenere la forza risultante su di un corpo.



Come mostrato nella nel punto  $d$  della figura, le due forze vengono applicate simultaneamente con  $\vec{F}_1$  verticalmente verso il basso e  $\vec{F}_2$  orizzontalmente. In questo caso, l'indicatore indicherà  $2.24 \text{ cm}$ . La forza  $\vec{F}$  che produce la stessa lettura della somma dei due vettori  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ . In altre parole,  $|\vec{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 2.24 \text{ unità}$  e la sua direzione è  $\theta = \tan^{-1}(-0.500) = -26.6^\circ$

**Dinamometro** Il dinamometro è uno strumento di misura utilizzato in meccanica per determinare l'entità di una forza ad esso applicata. Il meccanismo di misurazione utilizza il principio della legge di Hooke, per il quale la deformazione di un materiale elastico è direttamente proporzionale alla forza applicata al materiale stesso.

## 3.2 Prima legge di Newton - principio d’Inerzia

La **prima legge di Newton** del moto, che viene spesso chiamata **legge d’inerzia**, definisce una particolare classe di sistemi di riferimento detti **sistemi inerziali**. Questa legge può essere espressa nel seguente modo:

Se un corpo non interagisce con altri corpi, si può trovare un sistema di riferimento nel quale la sua accelerazione è nulla.

Un tale sistema di riferimento viene chiamato **sistema di riferimento inerziale**. Ogni sistema di riferimento che si muove a velocità costante rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, è esso stesso un *sistema inerziale*.

Per i nostri scopi possiamo considerare anche la *Terra come un sistema inerziale*. La Terra in realtà non è un sistema inerziale a causa del suo moto orbitale intorno al Sole e del suo moto di rotazione intorno all’asse terrestre. Queste accelerazioni hanno comunque valori piccoli rispetto a  $g$  e possono spesso essere trascurate.

È possibile riformulare la *prima legge di Newton* in un modo più pratico:

In assenza di forze esterne e se osservato da un sistema di riferimento inerziale, un corpo in quiete rimane in quiete ed un corpo in moto rimane in moto (con moto rettilineo uniforme).

**Inerzia** È possibile definire l’*inerzia* come la *tendenza di un corpo a non modificare il suo stato di moto*.

### 3.2.1 Massa

Quantitativamente il concetto di *inerzia* viene quantificato dalla **massa**. La massa è la proprietà (scalare) di un corpo che misura quanta resistenza un corpo offre al cambiamento di velocità. È una delle grandezze fondamentali.

L’unità di misura della massa  $m$  è il *kg*.

**Rapporto massa-accelerazione** Tra le due grandezze vi è un rapporto *inversamente proporzionale*.

Si supponga di applicare una stessa forza  $\vec{F}$  a due masse diverse  $m_1$  e  $m_2$ , andando a misurare le accelerazioni  $a_1$  e  $a_2$  che la forza ha provocato. Si verificherà la seguente relazione:  $\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{a_2}{a_1}$

### 3.3 Seconda legge di Newton

La **seconda legge di Newton** risponde alla domanda: che cosa succede ad un corpo se su di esso agiscono una o più forze?

- L'accelerazione di un corpo è *direttamente proporzionale* alla forza applicata su di esso:  $\vec{F} \propto \vec{a}$
- L'intensità dell'accelerazione di un corpo è *inversamente proporzionale* alla sua massa:  $|\vec{a}| \propto \frac{1}{m}$

Queste osservazioni sono sintetizzate dalla *seconda legge di Newton*:

Misurata in un sistema di riferimento inerziale, l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza risultante agente su di esso ed inversamente proporzionale alla sua massa:

$$\vec{a} \propto \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

Scegliendo la costante di proporzionalità pari a 1, è possibile scrivere la seguente equazione:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Questa equazione è un *espressione vettoriale* e quindi è equivalente alle seguenti tre equazioni scalari, una per ogni componente:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z$$

**Unità di misura della forza** L'unità di misura della forza nel SI, è il newton (N). Una forza di 1 N è la forza che, se applicata ad un corpo di massa 1 kg, produce una accelerazione di 1 m/s<sup>2</sup>.

Il newton può essere espresso in funzione delle unità fondamentali di massa, lunghezza e tempo:

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Per il sistema *c.g.s.* esiste l'unità di misura "dina". 1 dina è la forza, che applicata a un corpo di massa 1 g, produce un'accelerazione di 1 cm/s<sup>2</sup>.

#### 3.3.1 La forza gravitazionale e il peso

Un corpo in caduta libera (lasciato libero in prossimità della superficie terrestre) si muove con accelerazione costante pari a  $g$  (9.81 m/s<sup>2</sup>). In base alla seconda legge di Newton, la forza che produce questa accelerazione, la forza di attrazione gravitazionale, equivale a  $\vec{F}_g = mg$ .

Il *modulo* di questa forza viene chiamato **peso**:  $F_g = mg$  (misurato in N).

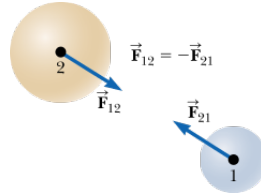
### 3.4 Terza legge di Newton

«A un'azione è sempre opposta un'uguale reazione: ovvero, le azioni vicendevoli di due corpi l'uno sull'altro sono sempre uguali e dirette verso parti opposte.»



Per ogni forza, che un corpo  $A$  esercita su un altro corpo  $B$ , ne esiste istantaneamente un'altra uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso, causata dal corpo  $B$  che agisce sul corpo  $A$ .

Esempio grafico:

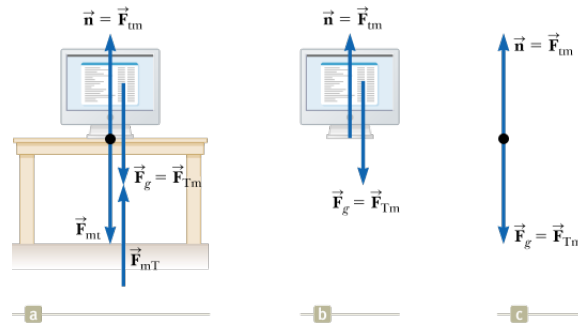


Vediamo due corpi interagiscono che tra loro, la forza  $\vec{F}_{12}$  esercitata dal corpo 1 sul corpo 2 è uguale in intensità ed è opposta in verso alla forza  $\vec{F}_{21}$  esercitata dal corpo 2 sul corpo 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

**Diagramma di corpo libero** Quando analizziamo un corpo soggetto a più forze, siamo interessati alla **forza risultante** su questo singolo corpo, che schematizzeremo come *punto materiale*. Il diagramma di corpo libero, quindi, ci aiuta ad isolare solamente le forze che agiscono sul corpo ed eliminare dalla nostra analisi tutte le altre forze.

Nel **diagramma di corpo libero** è utilizzato il modello punto materiale per rappresentare il corpo come un punto e le forze che agiscono sul corpo sono applicate al punto.



Il punto C dello schema rappresenta il *diagramma di corpo libero*

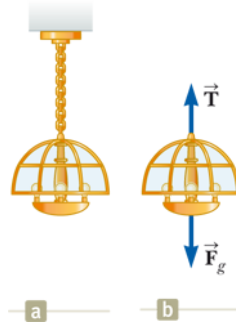
## 3.5 Modelli di analisi

### 3.5.1 Punto materiale in equilibrio

Se l'accelerazione di un corpo schematizzato come un punto materiale è nulla, il corpo verrà descritto con il modello **punto materiale in equilibrio**. In questo schema, la forza risultante sul corpo è zero:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Attenzione: Anche un corpo che si muove a velocità costante può essere considerato *in equilibrio*.



Esempio: Le forze agenti sulla lampada sono la forza di gravità  $\vec{F}_g$  verticale verso il basso e la forza di trazione  $\vec{T}$  esercitata dalla catena verticalmente verso l'alto:

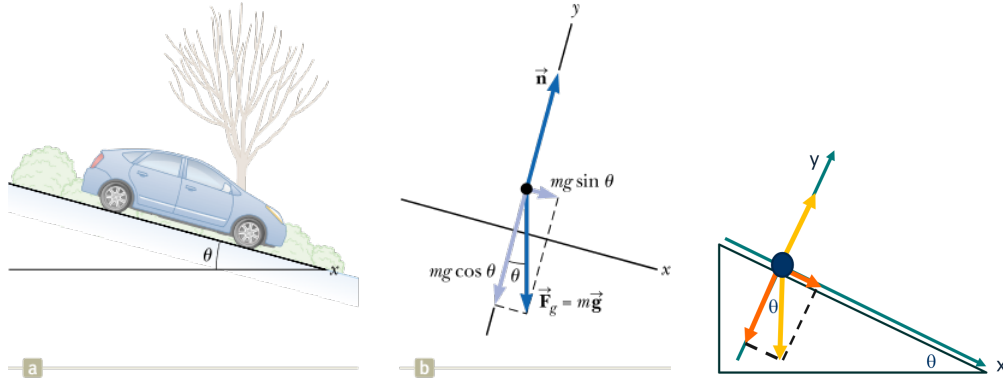
$$\sum F_y = 0 \rightarrow \sum F_y = T - F_g = 0 \rightarrow T = F_g$$

Si noti che, di nuovo,  $\vec{T}$  e  $\vec{F}_g$  *non sono una coppia di forze di azione e reazione* perché esse sono applicate sullo stesso corpo, il lampadario. La forza di reazione a  $\vec{T}$  è applicata verso il basso dalla lampada alla catena.

### 3.5.2 Piano inclinato

Esempio pratico:

Un'automobile di massa  $m$  sta scivolando lungo una discesa ghiacciata inclinata di un angolo  $\theta$ , come mostrato in figura



Le forze in gioco sono:

- **Forza peso**  $\vec{F}_g = m\vec{g}$ , sempre verticale verso il basso, divisa nelle sue componenti  $x$  e  $y$ 
  - $\vec{F}_{gx} = mg \sin \theta = ma_x = \sum F_x$
  - $\vec{F}_{gy} = mg \cos \theta$
- **Reazione vincolare**  $\vec{n}$ , perpendicolare al piano

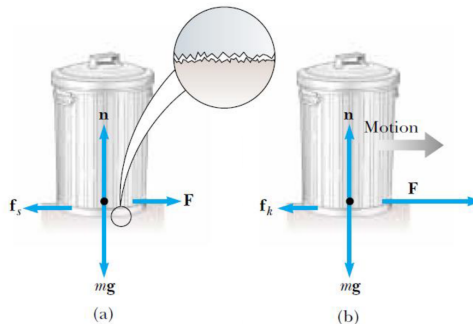
Sull'asse  $y$  non è presente accelerazione:  $\sum F_y = n - mg \cos \theta = 0$

L'accelerazione in  $x$  quindi vale  $a_x = g \sin \theta$

La reazione vincolare è pari a  $n = mg \cos \theta$

### 3.6 Forze di attrito

Quando un corpo è in moto o su di una superficie o in un mezzo viscoso, come l'aria o l'acqua, nasce una *resistenza al moto* a causa delle interazioni tra il corpo ed il mezzo che lo circonda. Questa resistenza prende il nome di **forza di attrito**.



**Attrito statico** Se applichiamo a un'oggetto una forza  $\vec{F}$  esterna orizzontale verso destra e se la forza  $\vec{F}$  che applichiamo è piccola, l'oggetto rimarrà fermo.

La forza che agisce sull'oggetto e che contrasta  $\vec{F}$  impedendogli di muoversi verso sinistra, prende il nome di forza di **attrito statico**  $\vec{f}_s$ .

Fino a quando l'oggetto rimane fermo, si ha  $\vec{f}_s = \vec{F}$ . Quindi se  $\vec{F}$  aumenta, aumenterà anche  $\vec{f}_s$ . In ugual modo, se  $\vec{F}$  diminuisce, diminuirà anche  $\vec{f}_s$ .

L'intensità della forza di attrito statico tra due superfici qualunque a contatto tra loro può assumere i valori

$$f_s \leq \mu_s n$$

dove la costante adimensionale  $\mu_s$  è chiamata **coefficiente di attrito statico**.

**Attrito dinamico** Aumentando il valore di  $\vec{F}$ , l'oggetto arriverà sul punto di iniziare a muoversi,  $\vec{f}_s$  raggiunge il suo valore massimo,  $\vec{f}_{s,max}$ .

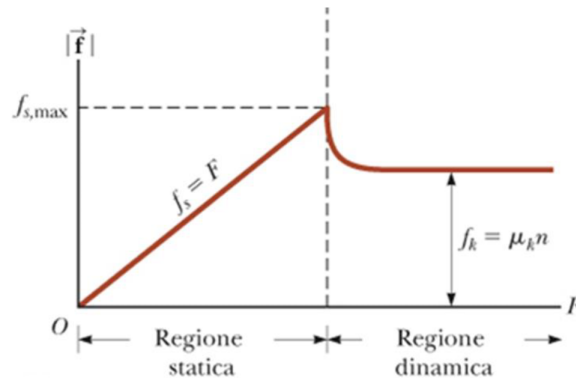
Quando  $F$  supera il valore  $\vec{f}_{s,max}$ , il bidone inizierà a muoversi e, quindi, ad accelerare verso destra. La forza di attrito su di un corpo in movimento prende il nome di **forza di attrito dinamico**  $\vec{f}_k$ . La forza risultante è  $\vec{F} - \vec{f}_k > 0$  (moto).

Quando il bidone è in moto, il valore della forza di attrito dinamico che agisce sul corpo è minore di  $\vec{f}_{s,max}$ .

L'intensità della forza di attrito dinamico tra due superfici qualunque a contatto tra loro è

$$f_k = \mu_k n$$

dove la costante adimensionale  $\mu_k$  è chiamata **coefficiente di attrito dinamico**.



Sperimentalmente, sia  $\vec{f}_k$  che  $\vec{f}_{s,max}$  hanno moduli proporzionali al modulo di  $n$ .

## 3.7 Altre applicazioni delle leggi di Newton

### 3.7.1 Estensione del Moto Circolare Uniforme

Nel moto circolare uniforme il punto materiale si muove con velocità in modulo  $v$  costante lungo una traiettoria circolare di raggio  $r$ . Il punto materiale si muove con **accelerazione centripeta** di modulo

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

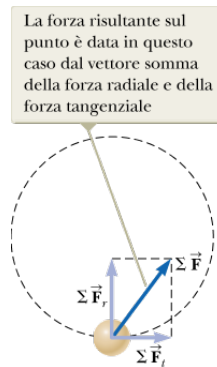
L'accelerazione è diretta verso il *centro* ed è perpendicolare a  $v$ . Per la seconda legge di Newton, la forza risultante che produce l'accelerazione centripeta può essere messa in relazione con l'accelerazione come segue:

$$\sum F = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

Una forza che produce un'accelerazione centripeta deve agire nella direzione che punta al **centro** del percorso circolare e provoca una variazione della direzione del vettore velocità.

### 3.7.2 Moto Circolare non Uniforme

se un punto materiale si muove con velocità di modulo variabile su un percorso circolare, ci deve essere, oltre alla componente radiale della accelerazione, una componente tangenziale di modulo  $|\frac{dv}{dt}|$ . Quindi, anche la forza agente sulla particella deve avere una componente tangenziale ed una radiale.



L'accelerazione risultante è:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

E di conseguenza la forza risultante esercitata sulla particella è:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_r + \sum \vec{F}_t$$

Il vettore  $\sum \vec{F}_r$  è diretto verso il centro della circonferenza ed è responsabile dell'accelerazione centripeta. Il vettore  $\sum \vec{F}_t$  tangente alla circonferenza è responsabile della accelerazione tangenziale, che rappresenta una variazione nel tempo del modulo della velocità del punto materiale.

### 3.8 Moto in presenza di forze frenanti

Consideriamo ora l'interazione tra il corpo in movimento e il mezzo nel quale esso si muove, che può essere un liquido o un gas. Il mezzo esercita una **forza frenante**  $\vec{R}$  sul corpo che lo sta attraversando. L'intensità di  $\vec{R}$  dipende dal *modulo* della velocità del corpo, mentre il verso di  $\vec{R}$  è sempre *opposto alla direzione di moto* del corpo relativamente al mezzo attraversato.

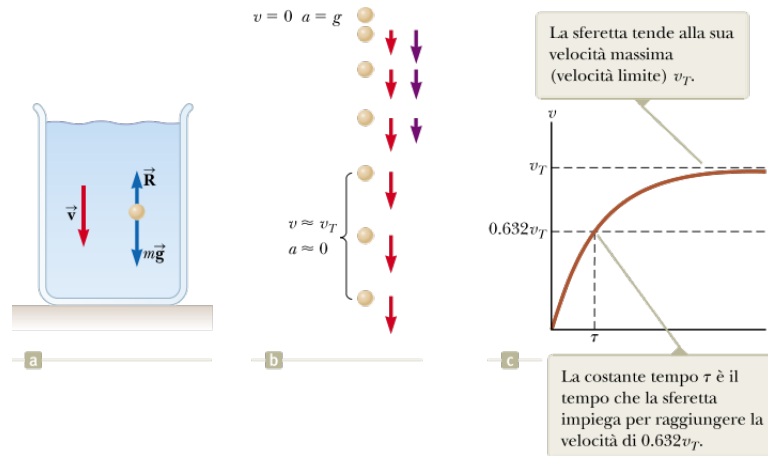
#### 3.8.1 Forza frenante proporzionale alla velocità del corpo

Se facciamo l'ipotesi che la forza frenante che agisce su un corpo in moto in un liquido o in un gas sia proporzionale alla velocità del corpo, allora la forza frenante può essere espressa come

$$R = -b\vec{v}$$

dove  $b$  è una **costante** il cui valore dipende dalle *proprietà del mezzo*, dalla forma e dalle dimensioni del corpo, e  $\vec{v}$  è la velocità del corpo rispetto al mezzo.

Esempio: Sfera di massa  $m$  lasciata cadere in un liquido.



La sommatoria delle forze che agiscono è

$$\sum F_y = mg - bv = ma$$

Al crescere del tempo cresce la velocità e di conseguenza cresce anche l'intensità della forza frenante  $R$ . Si arriverà ad un punto in cui  $|R| = |F_p|$ . In queste condizioni l'accelerazione diventerà nulla  $a = 0$  e la velocità tenderà alla **velocità limite**  $v_T$ .

$$mg - bv_T = 0 \rightarrow v_T = \frac{mg}{b}$$

La velocità in funzione del tempo si ricava con:

$$v = v_T(1 - e^{-t/\tau})$$

dove la **costante di tempo**  $\tau = \frac{m}{b}$  corrisponde all'intervallo di tempo nel quale la sferetta partendo da ferma raggiunge il 63.2% del valore della sua  $v_T$ .

# Energia

## 4.1 Energia di un sistema

### 4.1.1 Lavoro compiuto da una forza costante

In fisica, il **lavoro** è l'*energia scambiata tra due sistemi* quando avviene uno spostamento attraverso l'*azione di una forza*, o una risultante di forze, che ha una componente non nulla nella direzione dello spostamento. Pertanto, ha le dimensioni di una forza applicata lungo una determinata distanza.

Il lavoro  $W$  compiuto su un sistema da un agente che esercita su di esso una forza costante è uguale al prodotto tra il **modulo  $F$  della forza**, il **modulo  $\Delta r$  dello spostamento** del punto di applicazione della forza e  **$\cos \theta$** , dove  $\theta$  è l'angolo tra il vettore forza e il vettore spostamento:

$$W \equiv F \Delta r \cos \theta$$

L'unità di misura del **lavoro** è:  $N \cdot m = kg \cdot m^2/s^2 = J$  (joule).

Alcune osservazioni:

- Una forza compie un lavoro nullo su un corpo se esso non viene spostato. Infatti, se  $\Delta r = 0$ , l'Equazione fornisce  $W = 0$ .
- Il lavoro compiuto da una forza su un corpo in movimento è zero quando la forza applicata è perpendicolare allo spostamento del suo punto di applicazione. Infatti, se  $\theta = 90^\circ$  allora  $W = 0$  poiché  $\cos 90^\circ = 0$ .
- Il lavoro compiuto dalla forza applicata su un sistema è positivo quando la proiezione di  $\vec{F}$  lungo la direzione di  $\Delta \vec{r}$  ha lo stesso verso dello spostamento. Quando la proiezione di  $\vec{F}$  lungo la direzione di  $\Delta \vec{r}$  ha verso opposto a quello dello spostamento,  $W$  è negativo.
- Una considerazione importante nell'approccio ai problemi consiste nel pensare al lavoro come **trasferimento di energia**. Se  $W$  è il lavoro compiuto su un sistema e  $W$  è positivo, dell'energia viene trasferita *al sistema*; se  $W$  è negativo, dell'energia è trasferita *dal sistema*.

### 4.1.2 Prodotto scalare tra due vettori

Per tener conto del modo in cui i vettori forza e spostamento sono combinati, è utile introdurre un appropriato strumento matematico chiamato **prodotto scalare tra due vettori**. Il prodotto scalare tra i vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  viene indicato con l'espressione  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ .

Il prodotto scalare tra due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  è una quantità scalare uguale al prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo  $\theta$  compreso tra di essi:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

Confrontando tale definizione con l'equazione , possiamo esprimere l'equazione del **lavoro** sotto forma di un prodotto scalare:

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

## 4.2 Lavoro di una forza variabile

Consideriamo un punto materiale che si sposta lungo l'asse  $x$  sotto l'azione di una *forza che varia con la posizione*. In tale situazione, non è possibile utilizzare l'equazione vista in precedenza per calcolare il lavoro fatto dalla forza in quanto tale relazione si applica solo se il vettore  $\vec{F}$  rimane costante in modulo, direzione e verso.

Possiamo suddividere l'intervallo in tanti piccoli intervalli di spostamento  $\Delta x$  e assumere che la forza in ogni intervallo valga un dato  $F_x$ . Il lavoro complessivo sarà quindi approssimato con la sommatoria del lavoro di ogni intervallo:

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Per migliorare questa approssimazione valutiamo il limite per  $\Delta x$  che tende a 0:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Se sul corpo agiscono più forze (nella direzione  $x$ ):

$$\sum W = W_{est} = \int_{x_i}^{x_f} (\sum F_x) dx$$

Se una forza risultante variabile in modulo e direzione agisce sul corpo:

$$\sum W = W_{est} = \int_{x_i}^{x_f} (\sum \vec{F}) \cdot d\vec{r}$$

### 4.2.1 Lavoro compiuto da una molla

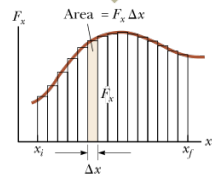
Lo schema di un sistema fisico molto comune nel quale la forza varia in funzione della posizione è mostrato in Figura. Il sistema è un blocco che giace su una superficie orizzontale senza attrito, collegato ad una molla. Se la molla viene allungata o compressa di un piccolo tratto rispetto alla sua lunghezza di riposo (equilibrio), essa esercita sul blocco una forza che matematicamente può essere espressa nella forma

$$F_s = -kx$$

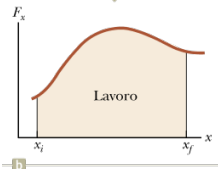
**Legge di Hooke**

dove  $x$  indica la posizione del blocco rispetto alla sua posizione di equilibrio ( $x = 0$ ) e  $k$  è una costante positiva chiamata **costante elastica** della molla.

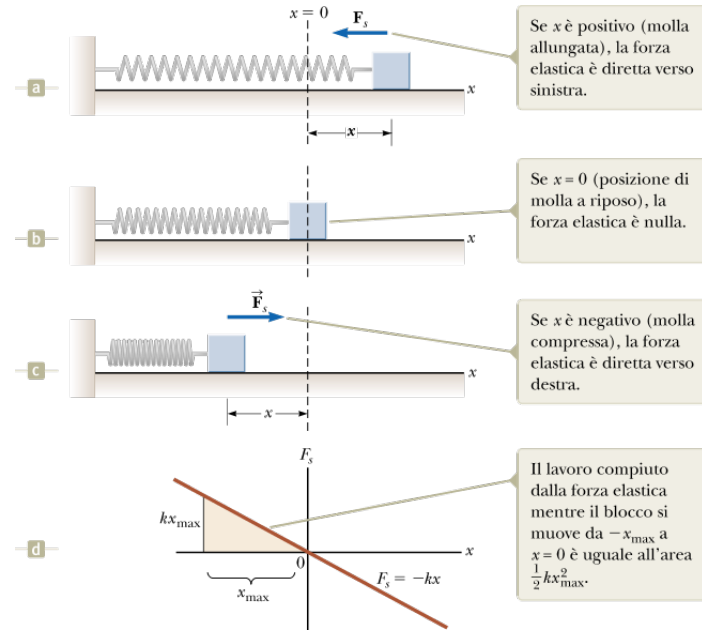
Il lavoro totale compiuto nello spostamento da  $x_i$  a  $x_f$  è approssimativamente dato dalla somma delle aree di tutti i rettangoli.



Il lavoro compiuto dalla componente  $F_x$  di una forza variabile quando il punto materiale si sposta da  $x_i$  a  $x_f$  è esattamente uguale al valore dell'area sottesa da questa curva.







Il valore di  $k$  dà una misura della rigidità della molla. Molle “rigide” hanno grandi valori di  $k$ , mentre per molle “morbide” i valori di  $k$  sono piccoli. L’unità di misura di  $k$  corrisponde a  $N/m$ . Il lavoro della forza elastica sarà

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx$$

Ipotizzando di partire dal punto di massima compressione della molla ( $-x_{\max}$ ) ed arrivare al punto  $x = 0$

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \int_{-x_{\max}}^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_{\max}^2$$

Per uno spostamento arbitrario da  $x_i$  a  $x_f$ :

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2$$

Da notare che, per qualunque spostamento in cui punto iniziale e punto finale coincidono, il lavoro è nullo.

Consideriamo ora il lavoro compiuto sul blocco da un agente esterno che applica una forza sul blocco mentre questo si sposta molto lentamente da  $x_i = -x_{\max}$  a  $x_f = 0$ . Possiamo calcolare questo lavoro osservando che per ogni valore della posizione, la forza applicata  $\vec{F}_{app}$  è uguale in modulo e opposta in verso alla forza elastica  $\vec{F}_s$ , cosicché

$$F_{app} = -(-kx) = kx$$

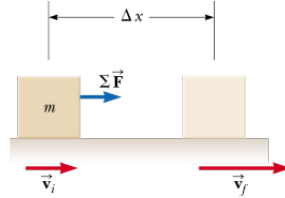
$$W_{F_{app}} = \int_0^{x_{\max}} F_{app} dx = \int_0^{x_{\max}} kx dx = \frac{1}{2} kx_{\max}^2$$

Per uno spostamento arbitrario del blocco, il lavoro compiuto sul sistema dall’agente esterno è dato da

$$W_{F_{app}} = \int_{x_i}^{x_f} F_{app} dx = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

## 4.3 Energia Cinetica

Una possibile *conseguenza del lavoro* compiuto su un sistema è la *variazione della sua velocità*. L'**energia cinetica** è l'energia che un corpo possiede a causa del proprio movimento.



La figura mostra un blocco di massa  $m$  che si muove verso destra sotto l'azione di una forza risultante  $\sum \vec{F}$  verso destra. Dalla seconda legge di Newton sappiamo che il blocco si muove con un'accelerazione  $\vec{a}$ . Essendo la forza costante, il moto è *uniformemente accelerato*. Per cui vale la relazione

$$\begin{aligned} v_f^2 - v_i^2 &= 2a(x_f - x_i) = 2\frac{F}{m}(x_f - x_i) \\ F(x_f - x_i) &= \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W \end{aligned}$$

Definendo l'**energia cinetica** come

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

notiamo quindi che il **lavoro** non è altro che la **variazione dell'energia cinetica**.  
Teorema dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = K_f - K_i = \Delta K \\ W &= \Delta K \end{aligned}$$

L'unità di misura dell'energia cinetica è il **Joule**.

## 4.4 Energia potenziale

### 4.4.1 Energia potenziale gravitazionale

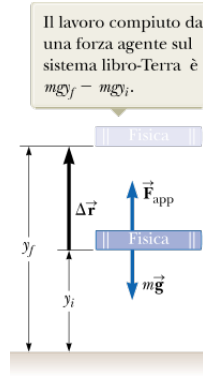
Pensiamo a un sistema costituito da un libro e dalla Terra, interagenti attraverso la forza gravitazionale. Compriamo un certo lavoro sul sistema sollevando lentamente il libro che compie uno spostamento verticale  $\Delta \vec{r} = (y_f - y_i)\hat{j}$ .

Il lavoro compiuto sul sistema deve manifestarsi come un aumento di energia del sistema. Il libro è in quiete prima che compiamo il lavoro ed è in quiete dopo che lo abbiamo compiuto. Quindi, non c'è variazione dell'energia cinetica del sistema.

Possiamo dire che quando il libro si trova nella posizione più alta, l'energia del sistema ha la *potenzialità di diventare energia cinetica*, che non si manifesta finché non lasciamo cadere il libro. Pertanto, il meccanismo di immagazzinamento di energia prima che il libro venga lasciato cadere è chiamato **energia potenziale**.

Il lavoro compiuto dall'agente esterno quando il corpo viene sollevato è

$$W_{est} = (\vec{F}_{app}) \cdot \Delta \vec{r} = (mg\hat{j}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{j}] = mgy_f - mgy_i$$



Pertanto possiamo identificare la quantità  $mgy$  come l'energia potenziale gravitazionale  $U_g$  di un sistema di un corpo di massa  $m$  e della Terra:

$$U_g \equiv mgy$$

L'energia potenziale gravitazionale si misura in **Joule**, cioè nelle stesse unità del lavoro e dell'energia cinetica.

L'equazione del lavoro può essere riscritta come

$$W_{est} = \Delta U_g$$

che matematicamente dice che il lavoro esterno compiuto sul sistema in questa situazione si manifesta come *variazione dell'energia potenziale gravitazionale* del sistema.

**L'energia potenziale gravitazionale dipende unicamente dall'altezza del corpo** rispetto alla superficie della Terra. Supponendo infatti che lo spostamento  $\Delta \vec{r}$  abbia una componente  $x$  e una componente  $y$  vediamo che

$$\begin{aligned} W_{est} &= (\vec{F}_{app}) \cdot \Delta \vec{r} \\ &= mg\hat{j} \cdot (\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}) = mg\Delta y \\ &= mgy_f - mgy_i \end{aligned}$$

#### 4.4.2 Energia potenziale elastica

Consideriamo un sistema costituito da un blocco e da una molla. La forza che la molla esercita sul blocco è data da  $F_s = -kx$ . Il lavoro esterno compiuto da una forza applicata  $F_{app} = -(-kx)$  su un sistema formato da blocco-molla è dato dall'equazione

$$W_{F_{app}} = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Vediamo che il lavoro compiuto sul sistema è uguale alla differenza tra i valori iniziale e finale di una espressione che dipende dalla configurazione del sistema. La funzione **energia potenziale elastica** associata al sistema blocco-molla è definita da:

$$U_s \equiv \frac{1}{2}kx^2$$

L'equazione del lavoro può quindi essere espressa come

$$W_{F_{app}} = \Delta U_s$$

## 4.5 Forze conservative e non conservative

### 4.5.1 Forze conservative

Le **forze conservative** godono delle due seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

1. Il lavoro compiuto da una forza conservativa agente su un punto materiale che si muove tra due punti qualsiasi *non dipende dal percorso*.
2. Il lavoro compiuto da una forza conservativa agente su un punto materiale che descrive un qualsiasi percorso chiuso è nullo. (Un percorso chiuso è una linea in cui il punto di partenza e il punto di arrivo coincidono.)

Sono forze conservative, ad esempio, la *forza di gravità* (forza peso) e la *forza elastica*. Infatti il lavoro compiuto da queste forze dipende solamente dalla *posizione iniziale* e dalla *posizione finale*, non dal percorso che ha seguito il corpo.

In generale, il lavoro  $W_{int}$  compiuto da una forza conservativa su un elemento di un sistema quando questo si sposta da un punto ad un altro è uguale alla differenza tra l'energia potenziale del sistema iniziale e quella finale:

$$W_{int} = U_i - U_f = -\Delta U$$

### 4.5.2 Forze non conservative

Una forza è non conservativa se *non soddisfa* le proprietà 1 e 2 valide per le forze conservative. Il lavoro compiuto da una forza non conservativa, *dipende dal percorso fatto*.

### 4.5.3 Relazione tra forze conservative ed energia potenziale

Immaginiamo un sistema di punti materiali nel quale una forza conservativa  $\vec{F}$  agisce fra le singole particelle e che la configurazione di tale sistema varia a causa del moto di un punto lungo l'asse  $x$ . Quindi, possiamo calcolare il lavoro interno compiuto da questa forza mentre il punto si muove lungo l'asse  $x$

$$W_{int} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U$$

che possiamo anche esprimere nella forma

$$\Delta U = U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Pertanto è possibile esprimere la **funzione energia potenziale** come

$$U_f = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i$$

stabilendo una posizione arbitraria di riferimento ( $U_i$ ) e misurando la variazione di energia potenziale rispetto a tale posizione.

## 4.6 Conservazione dell'energia

Esistono dei meccanismi di accumulo dell'energia e meccanismi di trasmissione di energia. Le forme di accumulo dell'energia sono:

- **Energia cinetica** ( $K$ ), legata al movimento dei costituenti di un sistema
- **Energia potenziale** ( $U$ ), legata alla configurazione del sistema
- **Energia interna** ( $E_{int}$ ), legata alla temperatura

I meccanismi di trasferimento dell'energia sono:

- **Lavoro meccanico** ( $W$ )
- **Onde meccaniche** ( $T_{OM}$ )
- **Calore** ( $Q$ )
- **Trasferimento di materia** ( $T_M$ )
- **Trasmissione elettrica** ( $T_E$ )
- **Radiazioni elettromagnetiche** ( $T_{EM}$ )

L'aspetto centrale della nostra discussione è che l'energia non può essere né creata, né distrutta: l'energia si *conserva* sempre. Quindi se l'energia totale di un sistema subisce una variazione, è necessario che una quantità di energia uguale alla variazione abbia attraversato i confini del sistema, con un meccanismo di trasferimento simile a quelli sopra elencati.

L'enunciato più generale del **principio di conservazione dell'energia** è contenuto nella equazione della conservazione dell'energia:

$$\Delta E_{sistema} = \sum T$$

in cui  $E_{sistema}$  è l'energia totale del sistema, che comprende tutte le forme di immagazzinamento dell'energia e  $T$  (sta per trasferimento) è la quantità di energia trasferita mediante vari meccanismi attraverso la superficie che delimita il sistema.

Attenzione: in un **sistema isolato** non c'è scambio di energia,  $\Delta E_{sistema} = 0$ .

È possibile estendere l'equazione della conservazione dell'energia in una forma più estesa:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W + Q + T_{OM} + T_M + T_E + T_{EM}$$

che è la rappresentazione matematica fondamentale, in versione energia, del modello di analisi **sistema non isolato**. Se si verifica il caso in cui tutti i termini a secondo membro si annullano, parleremo di sistema isolato.

### 4.6.1 Energia meccanica e conservazione dell'energia meccanica

Supponiamo di aver sollevato un corpo fino a  $y_i$  e calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza peso nella caduta (da  $y_i$  a  $y_f$ )

$$\begin{aligned} W_g &= -mg\hat{j} \cdot (y_f - y_i)\hat{j} = mgy_i - mgy_f \\ &= U_i - U_f = -\Delta U \end{aligned}$$

Per il teorema del lavoro e dell'energia cinetica sappiamo che

$$W_g = K_f - K_i = \Delta K$$

Mettendo in relazione le due equazioni:

$$\begin{aligned}\Delta K &= -\Delta U \\ K_f - K_i &= U_i - U_f \\ K_f + U_f &= K_i + U_i \\ E_{mecc_f} &= E_{mecc_i}\end{aligned}$$

Definiamo quindi l'**energia meccanica** come:

$$E_{mecc} = K + U$$

Ci si rende subito conto che durante il processo di caduta, in ogni momento, l'**energia meccanica** rimane la stessa, ovvero si **conserva**. Il risultato si può applicare a tutti i sistemi isolati in cui siano coinvolte solo Forze Conservative.

#### 4.6.2 Sistemi con attrito dinamico

Lo spostamento che appare nell'espressione del lavoro è lo spostamento del *punto di applicazione della forza*. Nella realtà la forza di attrito è distribuita su tutta l'area di contatto del corpo che scivola sulla superficie e non può certo essere localizzata in un punto. Il valore delle forze di attrito nei vari punti di contatto cambia continuamente al cambiare delle saldature generate durante il contatto delle due superfici.

Di fatto lo spostamento del punto di applicazione della forza di attrito non può essere calcolato e, di conseguenza, nemmeno il lavoro della forza di attrito.

Il teorema lavoro-energia cinetica è valido nel caso di una particella puntiforme o di un corpo che possa essere schematizzato come un punto materiale. Però, in presenza di forze di attrito, il lavoro di queste forze non può essere calcolato. In questa situazione la seconda equazione di Newton rimane ancora valida, mentre il teorema lavoro-energia cinetica non è più utilizzabile.

Supponiamo che su un corpo agiscano più forze, compreso l'attrito. La risultante di queste forze rimane costante. Partiamo dalla seconda legge di Newton

$$\begin{aligned}\left(\sum \vec{F}_x\right) &= ma_x \\ \left(\sum \vec{F}_x\right) \Delta x &= (ma_x) \Delta x\end{aligned}$$

Se la risultante rimane costante, allora il corpo è in moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$a_x = \frac{v_f - v_i}{t} \qquad \Delta x = \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$$

$$\begin{aligned}\left(\sum \vec{F}_x\right) \Delta x &= m \left(\frac{v_f - v_i}{t}\right) \frac{1}{2}(v_i + v_f)t \\ \left(\sum \vec{F}_x\right) \Delta x &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\end{aligned}$$

Se la risultante è costituita solamente dalla forza d'attrito:

$$\left(\sum \vec{F}_x\right) \Delta x = -f_k \Delta x = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K$$

Consideriamo ora un sistema isolato composto da un libro con una velocità iniziale  $v_i > 0$  che scorre su un tavolo. L'unica forza che agisce sul libro è la forza di attrito. L'energia del sistema è data da:

$$E_{system} = \Delta K + \Delta E_{int} = 0$$

Conoscendo già la variazione dell'energia cinetica del libro:

$$\begin{aligned} -f_k d + \Delta E_{int} &= 0 \\ \Delta E_{int} &= f_k d \end{aligned}$$

Vediamo quindi che la forza d'attrito *trasforma* l'energia cinetica in energia interna. L'aumento dell'energia interna del sistema è uguale al prodotto della forza d'attrito per la distanza totale percorsa dal corpo.

### 4.6.3 Generalizzazione della legge di conservazione dell'energia

Supponiamo di avere un **sistema isolato** in cui possa cambiare sia l'*energia cinetica* che l'*energia potenziale*. Essendo il sistema isolato, non c'è variazione di energia:

$$\begin{aligned} \Delta E_{system} &= 0 \\ \Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} &= 0 \\ \Delta U + \Delta K &= -\Delta E_{int} \end{aligned}$$

Conosciamo già il valore della variazione di energia interna:  $\Delta E_{int} = f_k d$

$$\begin{aligned} \Delta U + \Delta K &= -f_k d \\ \Delta E_{mecc} &= -f_k d \end{aligned}$$

Vediamo quindi che la quantità di energia meccanica ( $\Delta E_{mecc} = \Delta U + \Delta K$ ) persa è dovuta al lavoro della forza d'attrito.

## 4.7 Potenza

La potenza è definita come l'energia trasferita per unità di tempo. L'energia trasferita nell'unità di tempo è detta **potenza istantanea**  $P$  ed è definita come:

$$P \equiv \frac{dE}{dt}$$

Se una forza esterna è applicata ad un corpo ed il lavoro compiuto sul corpo da questa forza in un intervallo di tempo  $\Delta t$  è  $W$ , la **potenza media** in quell'intervallo di tempo è

$$P_{media} \equiv \frac{W}{\Delta t}$$

In modo analogo a quanto già fatto per definire velocità e accelerazione in un istante di tempo, possiamo definire la potenza istantanea come il valore limite della potenza media, al tendere a zero di  $\Delta t$ :

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

L'unità di misura della Potenza è il Watt:  $1W = 1J/s = 1kg \cdot m^2/s^3$

# Quantità di moto e urti

## 5.1 Quantità di moto (sistema isolato)

Per introdurre questa nuova quantità, consideriamo un sistema isolato composto da due particelle di massa  $m_1$  ed  $m_2$  che si muovono, ad un certo istante, con velocità  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

Se una forza dovuta alla particella 1 (per esempio, una forza gravitazionale) agisce sulla particella 2, ci deve quindi essere una seconda forza – uguale in modulo ma opposta in verso – che la particella 2 esercita sulla 1. In altre parole, queste due forze formano una coppia *azione-reazione* nel senso del *terzo principio di Newton*, e risulta  $\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$ . Ovvero possiamo riscrivere l'equazione come

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

Nel caso di un sistema di punti materiali, questa equazione ci dice che la somma delle forze che agiscono su un sistema isolato è *zero*. Possiamo riscrivere l'equazione sostituendo la forza con la quantità  $m\vec{a}$ , ottenendo

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 &= 0 \\ m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Se le masse  $m_1$  ed  $m_2$  sono costanti, le possiamo portare dentro l'operatore di derivazione

$$\begin{aligned} \frac{d(m_1 \vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \vec{v}_2)}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) &= 0 \end{aligned}$$

**Definizione** Chiamiamo **quantità di moto** la **grandezza vettoriale**  $m\vec{v}$ :

$$p \equiv m\vec{v}$$

L'unità di misura di questa grandezza è  $kg \cdot m/s$

Se la derivata della somma  $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$  è uguale a *zero*, significa che la somma deve rimanere costante. Notiamo quindi che la quantità di moto  $p = m\vec{v}$ , dove  $m$  è la massa e  $\vec{v}$  la velocità di una particella, soddisfa una proprietà importante: la somma di tutte le quantità di moto per un sistema isolato **si conserva**.

Ogni qualvolta due o più particelle di un sistema fisico isolato interagiscono, la quantità di moto totale del sistema rimane costante:

$$p_{tot} = p_1 + p_2 + \dots + p_n = constant$$



**Seconda legge di Newton** È possibile esprimere la seconda legge della Dinamica in termini della quantità di moto. La seconda legge di Newton ci dice che la forza risultante applicata a un corpo è data dalla sua massa per l'accelerazione.

$$\sum \vec{F} = ma = m \frac{dv}{dt}$$

Essendo la massa costante, la possiamo portare all'interno dell'operatore di derivazione:

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Vediamo quindi che la variazione della quantità di moto di un corpo non è altro che la forza risultante che agisce sullo stesso.

## 5.2 Quantità di moto (sistema non isolato)

Da un punto di vista energetico, un sistema non è isolato se c'è un flusso di energia attraverso i confini del sistema. Per quanto riguarda la conservazione della quantità di moto, un sistema è non isolato se la risultante delle forze esterne agenti sul sistema in un dato intervallo di tempo non è nulla. In tale situazione, possiamo immaginare che della quantità di moto venga trasferita al sistema proprio dalla risultante delle forze esterne.

Per iniziare ad approfondire questo importante concetto, facciamo l'ipotesi che una risultante delle forze  $\sum \vec{F}$  agisca su un punto materiale e che tale forza possa variare nel tempo in accordo con la seconda legge di Newton.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad d\vec{p} = \sum \vec{F} dt$$

Integrando questa espressione nell'intervallo di tempo in cui agisce la forza, si ottiene la variazione di quantità di moto del punto materiale. Se la quantità di moto del punto materiale cambia da  $\vec{p}_i$  all'istante  $t_i$  a  $\vec{p}_f$  all'istante  $t_f$ , l'integrazione dell'equazione dà:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt$$

**Impulso** La quantità a secondo membro di questa equazione è chiamata impulso della risultante  $\sum \vec{F}$  agente sul punto materiale nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ :

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt \qquad \Delta\vec{p} = \vec{I}$$

## 5.3 Urti in una dimensione

**Definizione** L'**urto** è il termine fisico con il quale si identifica la collisione di due corpi che si scontrano. Due corpi interagiscono scambiandosi forze molto intense per intervalli di tempo molto piccoli. Si parla quindi di **approssimazione impulsiva**, intendendo che le forze che agiscono in questi brevi intervalli di tempo siano molto più intense di tutte le forze esterne presenti, permettendoci di trascurarle.

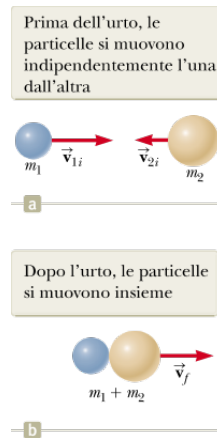
Tenendo solamente conto delle forze interne, possiamo rifarci al modello di sistema isolato in cui la **quantità di moto si conserva**.

### 5.3.1 Urti anelastici

Un **urto anelastico** è un urto in cui le energie cinetiche totali del sistema prima e dopo l'urto sono diverse (anche se la quantità di moto del sistema è conservata). Gli urti anelastici sono di *due tipi*:

1. **Urti perfettamente anelastici**: Quando due oggetti si urtano e rimangono uniti l'uno all'altro (es. meteorite che colpisce la terra)
2. **Urti anelastici**: Quando gli oggetti che si urtano non rimangono uniti, ma si ha ugualmente dissipazione di energia cinetica (es. una palla di gomma colpisce una superficie dura)

Consideriamo un caso di **urto perfettamente anelastico**. Due punti materiali di massa  $m_1$  ed  $m_2$  che si muovono con velocità iniziali  $\vec{v}_{1i}$  e  $\vec{v}_{2i}$  lungo una retta. I due punti materiali si urtano centralmente, rimangono uniti e si muovono, dopo l'urto, con una velocità comune  $\vec{v}_f$ .



La quantità di moto rimane invariata prima e dopo l'urto:

$$\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f \rightarrow m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

La velocità finale quindi equivale a

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

### 5.3.2 Urti elastici

Un **urto elastico** tra due oggetti è un urto in cui l'energia cinetica totale del sistema è uguale prima e dopo l'urto (così come la quantità di moto totale). Alcuni tipi di urti che avvengono nella realtà che quotidianamente ci circonda sono elastici solo *approssimativamente*, esiste sempre una dissipazione di energia cinetica.

Gli unici urti che sono realmente elastici sono quelli che avvengono tra *particelle subatomiche*. Tali urti possono essere descritti usando il modello sistema isolato sia per l'energia che per la quantità di moto. Infatti, in essi non vi è alcuna trasformazione di energia cinetica in altre forme di energia all'interno del sistema.

Consideriamo ora due punti materiali di massa  $m_1$  ed  $m_2$  che si muovono in linea retta con velocità iniziali date da  $\vec{v}_{1i}$  e da  $\vec{v}_{2i}$ , come mostrato in figura

I due punti materiali urtano centralmente e dopo si allontanano dalla zona di interazione con velocità differenti, che indicheremo con  $\vec{v}_{1f}$  e  $\vec{v}_{2f}$ . Se la collisione è di tipo elastica, sia la quantità di moto che l'energia cinetica del sistema si devono conservare. Quindi, assumendo che le velocità siano dirette lungo l'asse orizzontale abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{p}_i = \vec{p}_f &\rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ K_i = K_f &\rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2\end{aligned}$$

Riscriviamo l'equazione della conservazione dell'energia cinetica e scomponiamo i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned}m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) &= m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \\ m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) &= m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})\end{aligned}$$

Separiamo ora i termini dell'equazione della conservazione della quantità di moto:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

Dividendo quindi l'equazione dell'energia cinetica per l'equazione della quantità di moto:

$$\begin{aligned}v_{1i} + v_{1f} &= v_{2f} + v_{2i} \\ v_{1i} - v_{2i} &= -(v_{1f} - v_{2f})\end{aligned}$$

Vediamo quindi che la velocità relativa prima dell'urto,  $v_{1i} - v_{2i}$ , è uguale e di segno opposto alla velocità relativa dopo l'urto,  $-(v_{1f} - v_{2f})$ .

Si supponga che le masse e le velocità iniziali delle due particelle siano note. Le precedenti equazioni possono essere risolte per calcolare le velocità finali in funzione delle velocità iniziali, poiché si hanno due equazioni e due incognite. Il risultato è:

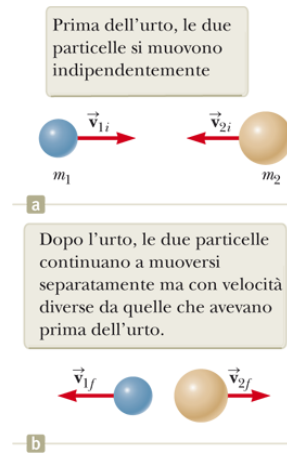
$$\begin{aligned}v_{1f} &= \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \\ v_{2f} &= \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}\end{aligned}$$

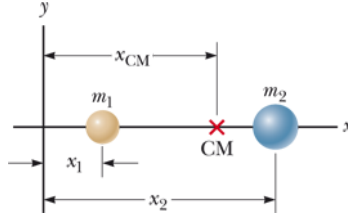
## 5.4 Centro di massa

Descriveremo ora il moto complessivo di un sistema meccanico in termini del moto di un particolare punto, detto **centro di massa (CM)** del sistema. Il sistema meccanico può essere costituito sia da un insieme di punti materiali, sia da un corpo continuo.

Vedremo che il centro di massa è un punto materiale che si muove come se tutta la massa del sistema fosse in esso concentrata. Il sistema si muove quindi come se la risultante delle forze esterne fosse applicata ad un singolo punto materiale posto nel centro di massa.

Si consideri ora un sistema composto da due particelle di massa  $m_1$  e  $m_2$  disposte lungo l'asse delle  $x$ . Il **centro di massa** della coppia di punti materiali si troverà sempre





sull'asse delle  $x$  in un punto intermedio fra le due particelle. La sua coordinata è definita dalla relazione:

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

La definizione può essere estesa a  $n$  punti materiali:

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

Nel caso più generale, ovvero quello in cui  $n$  particelle sono distribuite nello spazio tridimensionale, le coordinate  $y$  e  $z$  sono definite come:

$$y_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad z_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$$

dove  $M$  è la massa totale del sistema.

La posizione del centro di massa può anche essere individuata tramite il suo vettore posizione  $\vec{r}_{CM}$ . Si ha quindi

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM} \hat{i} + y_{CM} \hat{j} + z_{CM} \hat{k}$$

ovvero

$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

dove  $\vec{r}_i$  è il vettore posizione della  $i$ -esima particella, definito da

$$\vec{r}_i \equiv x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

Un **corpo esteso generico** può essere pensato come un sistema composto da un gran numero di elementi infinitesimi di massa. Poiché le distanze tra i suddetti elementi sono infinitesime, la distribuzione di massa del corpo può essere considerata come continua. Dividendo il corpo esteso in elementi di massa  $\Delta m_i$ , con coordinate  $x_i, y_i, z_i$ , si vede che la coordinata  $x_{CM}$  del centro di massa è approssimativamente:

$$x_{CM} \approx \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta m_i$$

con simili espressioni per le coordinate  $y$  e  $z$ . Se facciamo tendere ad infinito il numero  $n$  degli elementi di massa  $\Delta m_i$ , facendo decrescere simultaneamente  $\Delta m$ , il valore di  $x_{CM}$  sarà esatto. Con questa operazione di passaggio al limite si passa dalla somma all'integrale, sostituendo agli elementi di massa  $\Delta m_i$  l'elemento differenziale di massa  $dm$  e si ottiene quindi

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \int x dm$$

e in maniera del tutto analoga per  $y$  e  $z$ :

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \, dm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

Il vettore posizione del centro di massa di un corpo rigido  $\vec{r}_{CM}$  può quindi essere scritto come:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm$$

Poiché un corpo esteso è una distribuzione continua di massa, su ognuna delle sue masse infinitesime costituenti agirà la forza di gravità. La risultante di tutte le forze di gravità che agiscono sul corpo rigido è equivalente ad una singola forza  $M\vec{g}$  applicata in un punto speciale chiamato **baricentro** (o **centro di gravità**). Se  $\vec{g}$  è uguale in tutti i punti del corpo, allora il baricentro coincide con il centro di massa. Se un corpo è appeso per il suo baricentro, è in equilibrio qualunque sia il suo orientamento.

## 5.5 Moto di un sistema di punti materiali

Si consideri il centro di massa di un sistema formato da due o più punti materiali. È possibile far luce sul suo significato fisico e sulla sua utilità calcolando la derivata rispetto al tempo del suo vettore posizione. La derivata temporale di un vettore posizione è, per definizione, il vettore velocità. Supponendo per ipotesi che  $M$  sia costante, otteniamo la seguente espressione per la **velocità del centro di massa**:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

dove  $\vec{v}_i$  è la velocità dell' $i$ -esimo punto materiale. L'equazione può essere anche riscritta nella forma:

$$M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_{tot}$$

Possiamo quindi concludere che la quantità di moto totale del sistema è uguale alla massa totale moltiplicata per la velocità del centro di massa. In altre parole, la quantità di moto totale del sistema è uguale a quella di un singolo punto materiale di massa  $M$  che si muove con la velocità  $\vec{v}_{CM}$ .

Derivando l'equazione della velocità del centro di massa rispetto al tempo otteniamo l'**accelerazione del centro di massa**:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

che può essere riscritta utilizzando la legge di Newton:

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

dove  $\vec{F}_i$  è la risultante delle forze agenti sull' $i$ -esimo corpo.

Le forze  $\vec{F} \rightarrow i$  su ciascun punto materiale del sistema includono sia le *forze esterne* (azioni dall'esterno del sistema) che le *forze interne* (interazioni fra le particelle del sistema). Ma, in base alla terza legge di Newton, la forza interna esercitata, per esempio, dalla particella 1 sulla particella 2, è esattamente uguale e contraria a quella esercitata dalla

particella 2 sulla 1. Quindi, quando sommiamo tutte le forze interne, esse si elidono a coppie. La forza risultante è quindi dovuta solamente alle forze esterne. Possiamo quindi riscrivere l'equazione nella forma:

$$\sum F_{est} = M\vec{a}_{CM}$$

# Rotazione del corpo rigido

## 6.1 Posizione, velocità e accelerazione angolari

Immaginiamo di analizzare il movimento di un CD simile a quello in figura.

Il disco ruota attorno ad un **asse fisso perpendicolare** al piano della figura e passante per il **centro**  $O$  del disco stesso.

Un elemento infinitesimo del disco, schematizzabile come un punto materiale localizzato nel **punto**  $P$ , si trova ad una certa **distanza**  $r$  **dall'origine** e ruota intorno ad essa percorrendo un traiettoria circolare di **raggio**  $r$ .

Rappresentiamo la posizione del punto  $P$  in termini delle sue **coordinate polari**  $(r, \theta)$ . Durante la rotazione, il raggio  $r$  rimane costante, mentre l'angolo  $\theta$  varia nel tempo.

Quando il punto materiale si muove lungo la circonferenza da un punto sulla retta di riferimento ( $\theta = 0$ ) al punto  $P$ , percorre un arco di lunghezza  $s$  come mostrato in figura. Tale arco è legato all'angolo  $\theta$  dalla relazione

$$s = r\theta$$

$$\theta = \frac{s}{r}$$

L'angolo  $\theta$  è un **numero puro** e la sua unità di misura sono i **radianti**.

**Posizione angolare** Scegliamo un raggio vettore condotto dall'origine  $O$  ad un punto arbitrariamente scelto del disco. La **posizione angolare** del corpo rigido viene quindi definita come l'angolo  $\theta$  tra tale raggio vettore e la retta di riferimento, spesso scelta come *asse*  $x$ .

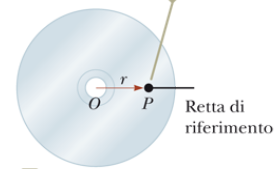
**Spostamento angolare** Quando un punto materiale del corpo rigido si muove da  $A$  a  $B$  in un intervallo di tempo  $\Delta t$ , il raggio vettore spazza un angolo  $\Delta\theta$ . Questa quantità viene definita lo **spostamento angolare** del corpo:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

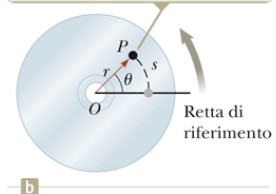
**Velocità angolare** La rapidità con cui avviene la rotazione può essere quantificata introducendo la **velocità angolare media**  $\omega_{media}$  definita come il rapporto tra lo spostamento angolare  $\Delta\theta$  e l'intervallo di tempo  $\Delta t$  impiegato

$$\omega_{media} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Per definire lo spostamento angolare del disco, si fissa una retta di riferimento. Un punto materiale in  $P$  ha una distanza  $r$  dal punto  $O$  dell'asse di rotazione.



Quando il disco ruota, il punto materiale in  $P$  percorre un arco di lunghezza  $s$  della circonferenza di raggio  $r$ . La posizione angolare di  $P$  è  $\theta$ .



La **velocità angolare istantanea** è analogamente definita come il limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  della velocità angolare media:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

La velocità angolare si misura in  $rad/s$ , o meglio in secondi<sup>-1</sup> ( $s^{-1}$ ) essendo il radiante adimensionale.

La velocità angolare è positiva se l'angolo  $\theta$  aumenta, ovvero quando il moto è in senso antiorario. Se l'angolo  $\theta$  diminuisce, quindi il moto è in senso orario, allora la velocità angolare sarà negativa.

**Accelerazione angolare** L'**accelerazione angolare media**  $\alpha_{media}$  di un corpo in rotazione è il rapporto fra la variazione della velocità angolare e l'intervallo di tempo  $\delta t$ , in cui avviene tale variazione:

$$\alpha_{media} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Analogamente, l'**accelerazione angolare istantanea** è il limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  dell'accelerazione angolare media:

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

L'accelerazione angolare si misura in radianti per secondo al quadrato ( $rad/s^2$ ), oppure in secondi<sup>-2</sup> ( $s^{-2}$ ).

Si noti che  $\alpha$  è positiva quando un corpo rigido che sta compiendo una rotazione antioraria ruota più rapidamente o, equivalentemente, quando un corpo rigido che sta compiendo una rotazione oraria ruota meno rapidamente.

Nel caso delle rotazioni intorno ad un asse fisso, tutti i punti materiali di un corpo rigido ruotano dello **stesso angolo** in un dato intervallo di tempo e quindi hanno la **stessa velocità angolare** e la **stessa accelerazione angolare**. Ciò significa che le grandezze  $\theta$ ,  $\omega$  ed  $\alpha$  caratterizzano il moto rotatorio di tutto il corpo rigido così come quello di ogni sua parte.

### 6.1.1 Corpo rigido con accelerazione costante

Come nel caso del punto materiale abbiamo introdotto il modello di analisi punto materiale con accelerazione costante, ora introduciamo un nuovo modello di analisi chiamato **corpo rigido in moto con accelerazione angolare costante**. Le leggi cinematiche che si applicano a tale modello, sono del tutto analoghe a quelle del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$\begin{aligned}\omega_f &= \omega_i + \alpha t \\ \theta_f &= \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega_f^2 &= \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \\ \theta_f &= \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t\end{aligned}$$

### 6.1.2 Variabili angolari e variabili lineari

Vediamo ora le **relazioni** che legano la velocità angolare e l'accelerazione angolare di un corpo rigido in rotazione rispettivamente alla velocità e all'accelerazione di un suo



qualunque punto.

Velocità tangenziale:  $v_t = r\omega$

Accelerazione tangenziale:  $a_t = r\alpha$

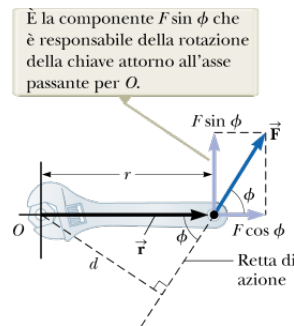
Accelerazione centripeta:  $a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

L'accelerazione del punto sarà quindi uguale a

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

## 6.2 Momento di una forza

Valutiamo il sistema rappresentato in figura, in cui una chiave inglese viene usata per serrare il dado; dado e chiave possono ruotare intorno ad un asse, perpendicolare al piano della figura.



In generale, la forza  $\vec{F}$  forma un angolo  $\phi$  con la chiave. Definiamo il modulo del momento della forza  $\vec{F}$  attorno all'asse passante per  $O$  tramite la relazione

$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd$$

dove  $r$  rappresenta la distanza fra l'asse di rotazione ed il punto di applicazione della forza  $\vec{F}$  e  $d$  è la distanza fra l'asse di rotazione e la retta di azione della forza  $\vec{F}$ .

È facilmente ricavabile che

$$d = r \sin \phi$$

Questa grandezza viene chiamata **braccio** della forza  $\vec{F}$ .

Si noti che  $\tau$  è massimo per un angolo  $\phi$  di  $90^\circ$ , cioè quando la forza  $\vec{F}$  è applicata perpendicolarmente a  $r$ . Quando invece la forza viene applicata parallelamente a  $r$ , il momento è nullo.

Convenzione sul segno del momento:

- Il momento della forza è positivo se la forza tende a far ruotare il corpo in senso antiorario
- Il momento della forza è negativo se la forza tende a far ruotare il corpo in senso orario

### 6.2.1 Prodotto vettoriale

Dati due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  si definisce il prodotto vettoriale tra  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  con il vettore  $\vec{C}$  così definito:

$$C = A \times B$$

$$C \equiv AB \sin \theta$$

la direzione del vettore  $C$  è perpendicolare al piano individuato da  $A$  e  $B$ . Per il segno si utilizza la regola della mano destra: le dita parallele al vettore  $A$  vanno chiuse verso il vettore  $B$ ; il pollice indicherà il verso.

Alcune proprietà del prodotto vettoriale:

- Il prodotto vettoriale non è commutativo:  $A \times B = -B \times A$
- Se  $A \parallel B$ , allora  $A \times B = 0$
- Se  $A \perp B$ , allora  $|A \times B| = AB$
- Proprietà distributiva:  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- Derivata:  $\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}$

**Momento come prodotto vettoriale** Il momento di una forza può essere espresso come il prodotto vettoriale tra  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$

$$\tau \equiv r \times F$$

### 6.2.2 Corpo rigido soggetto a un momento risultante

Si consideri un punto materiale di massa  $m$  che si muove lungo una circonferenza di raggio  $r$  sotto l'azione di una risultante tangenziale delle forze  $\sum \vec{F}_t$  e di una risultante radiale  $\sum \vec{F}_r$ .

La componente radiale è responsabile dell'accelerazione centripeta e ha momento nullo rispetto al centro della circonferenza, essendo antiparallela.

La forza tangenziale è responsabile dell'accelerazione tangenziale  $\vec{a}_t$ , ovvero il cambiamento del modulo della velocità, e in base alla seconda legge della dinamica abbiamo che

$$\sum \vec{F}_t = ma_t$$

Moltiplicando entrambi i termini per il raggio  $r$ , e tenendo a mente che essendo la forza tangenziale *perpendicolare*, il  $\sin$  di  $\theta$  è nullo, possiamo scrivere

$$\sum \tau = \sum F_t r = (ma_t)r$$

A questo punto, avendo definito in precedenza  $a_t = r\alpha$ , possiamo riscrivere la precedente equazione

$$\sum \tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha$$

Definiamo ora  $I$  come la quantità  $mr^2$ , che chiameremo **Momento d'Inerzia**. Questo ci consente di riscrivere nuovamente la precedente equazione

$$\sum \tau \equiv I\alpha$$

Notiamo che questa formula ha la stessa forma della seconda legge di Newton  $\sum F = ma$ .

Estendiamo lo stesso ragionamento al caso di un *corpo rigido di forma arbitraria*, che ruota intorno ad un asse fisso passante per  $O$ . Il corpo può essere considerato come un insieme di punti materiali di massa  $m_i$ .

Per ogni elemento, in base alla seconda legge di Newton si ha:

$$F_i = m_i a_i$$

Il momento associato ad ogni forza rispetto all'asse di rotazione è

$$\tau_i = r_i F_i = r_i m_i a_i$$

Essendo  $a_i = r_i \alpha$ , possiamo scrivere

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

È importante ricordare che, sebbene ogni punto materiale del corpo rigido abbia una accelerazione ai diversi, **l'accelerazione angolare  $\alpha$  è la stessa per tutti i punti**. Tenendo presente questo fatto è possibile sommare i momenti agenti su ciascuno dei punti materiali che costituiscono il corpo rigido per ottenere il **momento risultante** rispetto ad un asse passante per  $O$  e *dovuto a tutte le forze esterne agenti sul corpo*:

$$\sum \tau_{est} = \sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha = I \alpha$$

Otteniamo la formulazione matematica del modello **corpo rigido soggetto a un momento risultante**, che è l'*analogo rotazionale* del modello *punto materiale soggetto ad una forza risultante*.

### 6.2.3 Calcolo dei momenti di Inerzia

Dalla precedente relazione abbiamo definito il *momento di inerzia* con la seguente equazione

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Immaginando che il corpo sia suddiviso in tanti piccoli elementi di volume, ciascuno di massa  $\Delta m_i$  abbiamo definizione di momento di Inerzia per un corpo esteso

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$$

passando al limite per  $m_i \rightarrow 0$  la somma diventa un integrale esteso a tutto il corpo rigido

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

È di solito più facile calcolare i momenti d'inerzia in termini di elementi di volume piuttosto che in termini delle loro masse. Questo si può fare usando la densità  $\rho \equiv m/V$ . Ricaviamo quindi  $dm = \rho dV$

$$I = \int \rho r^2 dV$$

Il momento d'inerzia varia cambiando la posizione dell'asse di rotazione.

**Teorema degli assi paralleli** Se il momento d'Inerzia di un corpo calcolato rispetto ad un asse passante per il suo centro di massa è  $I_{CM}$ , il momento d'Inerzia calcolato rispetto ad un qualunque altro asse (parallelo al primo) e distante  $D$  rispetto da esso, vale:

$$I = I_{CM} + MD^2$$

#### 6.2.4 Energia cinetica di rotazione

Consideriamo quindi un corpo rigido come un insieme di punti materiali ed assumiamo che esso sia in moto rotatorio attorno ad un asse fisso  $z$  con una velocità angolare  $\omega$ . Valutiamo un punto materiale posizionato a distanza  $r_i$  dall'asse di rotazione. Indicando con  $m_i$  la massa del punto materiale e con  $v_i$  la sua velocità, l'energia cinetica di tale punto materiale è

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

Ricordando che ogni punto materiale del corpo ha la stessa velocità angolare  $\omega$  e che la velocità dei singoli punti dipende dalla loro distanza  $r_i$  dall'asse di rotazione, l'energia cinetica totale del corpo rigido non è altro che la somma delle energie cinetiche dei singoli punti materiali che lo compongono

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

Che possiamo scrivere anche nella forma

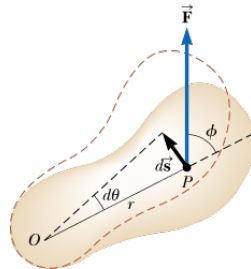
$$K_R = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

Riconosciamo quindi che  $\omega^2$  è uguale per tutti i punti e che la quantità dentro le parentesi è il momento di inerzia del corpo:

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

#### 6.2.5 Considerazioni energetiche nel moto rotatorio

Consideriamo il corpo rigido in figura che può ruotare intorno ad un asse passante per  $O$  e supponiamo che la sola forza esterna  $\vec{F}$  sia applicata nel punto  $P$ . La forza  $\vec{F}$  giace



nel piano del foglio. Il lavoro compiuto da  $\vec{F}$ , quando il suo punto di applicazione ruota intorno all'asse di un tratto infinitesimo,  $ds = r d\theta$  è

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi) r d\theta$$

Poiché il modulo del momento intorno ad  $O$  della forza  $\vec{F}$  equivale a  $rF \sin \phi$ , possiamo riscrivere il lavoro come

$$dW = \tau d\theta$$

Il lavoro compiuto nell'unità di tempo si ottiene dividendo il lavoro della forza  $\vec{F}$  applicata al corpo in rotazione per l'intervallo  $dt$  in cui la forza ha agito

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

La grandezza  $dW/dt$  non è altro che la **potenza**  $P$  sviluppata dalla forza ed essendo  $d\theta/dt = \omega$  l'equazione si riduce a

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$

**Teorema del lavoro ed energia cinetica** Analogamente al teorema lavoro-energia cinetica per il moto traslatorio, questo teorema afferma che il lavoro fatto dalla risultante delle forze esterne su un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso è uguale alla variazione della energia cinetica di rotazione del corpo.

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega d\omega = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

Se un corpo in rotazione è isolato e tutte le forze interne sono conservative, si può applicare il modello sistema isolato e quindi il principio di conservazione dell'energia meccanica.

### 6.3 Momento angolare

Si consideri un punto materiale di massa  $m$ , a cui è associata la quantità di moto  $\vec{p}$  e la cui posizione sia individuata dal vettore  $\vec{r}$ . Nel descrivere il moto di traslazione di un punto materiale, abbiamo trovato che  $\sum \vec{F} = \vec{p}/dt$ . Moltiplichiamo vettorialmente  $r$  da entrambe le parti

$$\vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Aggiungiamo ora al termine di destra la quantità  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$  che è uguale a zero in quanto  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ , e i vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{p}$  sono paralleli. Otteniamo quindi

$$\sum \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

che possiamo riscrivere come

$$\sum \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

**Definizione** Il **momento angolare**  $\vec{L}$  di un punto materiale rispetto ad un asse passante per l'origine  $O$  è, ad un certo istante, il prodotto vettoriale tra il vettore posizione  $\vec{r}$  del punto materiale e la sua quantità di moto  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

Possiamo quindi riscrivere la precedente equazione come

$$\sum \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

### 6.3.1 Momento angolare di un corpo rigido in rotazione

Restringiamo ora l'analisi su un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso coincidente con l'asse  $z$  del sistema di coordinate del quale vogliamo determinare il momento angolare. Tutti i punti materiali che costituiscono il corpo rigido ruotano nel piano  $xy$ , attorno all'asse  $z$ , con la stessa velocità angolare  $\omega$ .

Il modulo del momento angolare intorno all'asse  $z$  dell' $i$ -esimo punto materiale di massa  $m_i$  è  $m_i v_i r_i$  e, poiché  $v_i = r_i \omega$  si ha

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

Siamo ora in grado di trovare il momento angolare totale del corpo (che, in questo caso ha solo componente nell'asse  $z$ ) effettuando la somma degli  $L_i$  su tutti i punti materiali:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

da cui possiamo finalmente trovare che

$$L_z = I \omega$$

tale equazione è matematicamente simile all'equazione per la quantità di moto.

### 6.3.2 Conservazione del momento angolare

**Definizione** Il **momento angolare totale** di un sistema **rimane costante** (in modulo, direzione e verso) se è **nullo** il **momento risultante** delle **forze esterne**, cioè se il **sistema è isolato**.

Questo principio è alla base del modello sistema isolato basato sul momento angolare. Vediamo infatti che se risulta

$$\sum \vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = 0$$

allora si ha

$$\Delta \vec{L}_{tot} = 0$$

Nel caso in cui durante il moto rotatorio la distribuzione delle masse di un corpo materiale si modifichi, il suo momento di inerzia cambia nel tempo; necessariamente, poiché il modulo del momento angolare del sistema è  $L = I\omega$ , la conservazione del momento angolare implica che il prodotto di  $I$  per  $\omega$  rimanga costante. Pertanto, se il sistema è isolato, ad una variazione di  $I$  deve corrispondere una variazione di  $\omega$ . In questo caso, scriveremo il principio di conservazione del momento angolare come

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{costante}$$

### 6.3.3 Moto di giroscopi e trottole

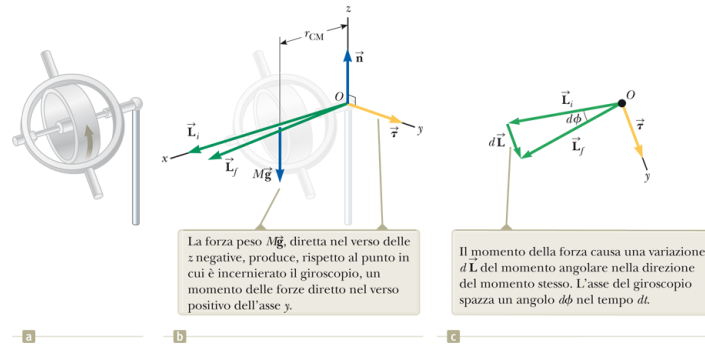
Nel moto di rotazione della trottola abbiamo due diverse rotazioni: la rotazione della trottola intorno al suo asse e la rotazione dell'asse della trottola intorno ad un asse verticale, ovvero l'asse  $z$ .

La trottola è soggetta alla forza peso applicata al suo centro di massa e dovrebbe cadere se non fosse in rotazione, ovvero se non possedesse momento angolare.

Il moto dell'asse di simmetria attorno alla verticale è detto **moto di precessione** ed è generalmente più lento rispetto al moto di rotazione della trottola intorno al proprio asse.

Il centro di massa della trottola non si trova sulla verticale del punto di appoggio  $O$  e, quindi, rispetto a questo punto, la forza peso  $M\vec{g}$  della trottola ha un momento, che farebbe certamente cadere la trottola se questa non fosse in rotazione. A causa del moto di rotazione, la trottola possiede un momento angolare  $\vec{L}$  diretto lungo il suo asse di simmetria.

Le caratteristiche fondamentali del moto di precessione possono essere illustrate considerando il semplice **giroscopio** mostrato in figura. Mentre la reazione vincolare ha momento nullo, la forza peso  $M\vec{g}$  rivolta verso il basso ha un momento dato da  $\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$ . Sappiamo già che il momento della forza applicata produce un cambiamento del momento angolare, ovvero  $\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$ .



Si osserva che il momento  $\vec{\tau}$  produce nell'intervallo di tempo  $dt$  una variazione di momento angolare  $d\vec{L}$  che ha la stessa direzione e verso di  $\vec{\tau}$ , ed è quindi perpendicolare a  $\vec{L}$ . In un intervallo di tempo, la variazione del momento angolare è  $d\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = \vec{\tau}dt$ . Poiché  $d\vec{L}$  è perpendicolare a  $\vec{L}$ , il modulo di  $\vec{L}$  non cambia, ma cambia la sua direzione: ha la stessa direzione e verso di  $\vec{\tau}$ .

## Equilibrio del corpo rigido

Quando abbiamo studiato il modello *punto materiale*, abbiamo stabilito la sua condizione di equilibrio, che si presenta quando il moto, compiuto con velocità costante, di un punto materiale soggetto a forze di risultante nulla:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Nel caso reale di un corpo esteso, *la situazione è più complessa* perché il corpo non può spesso essere trattato come un punto materiale. Infatti, perché un corpo esteso sia in equilibrio, deve essere soddisfatta anche una seconda condizione che tenga conto anche dei **possibili moti rotazionali del corpo**.

La condizione necessaria affinché un corpo rigido sia in *equilibrio rotazionale* è che il momento risultante delle forze rispetto ad un qualsiasi asse sia nullo. Dobbiamo dunque soddisfare due condizioni affinché un corpo rigido sia in equilibrio:

- La risultante delle forze esterne deve essere nulla:

$$\sum \vec{F}_{est} = 0$$

- La risultante dei momenti esterni calcolati *rispetto a qualsiasi asse* deve essere nulla

$$\sum \vec{\tau}_{est} = 0$$

Queste condizioni descrivono il modello di analisi **corpo rigido in equilibrio**. La prima condizione garantisce l'equilibrio traslatorio: l'*accelerazione del centro di massa* del corpo, osservato da un riferimento inerziale, deve essere nulla. La seconda condizione garantisce l'equilibrio rotatorio: l'*accelerazione angolare del corpo*, rispetto ad un *qualsiasi asse*, deve essere nulla.

Semplifichiamo il caso di studio a casi in cui le forze sono contenute sullo stesso piano  $xy$ . Questo riduce il sistema a solamente tre equazioni scalari:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum \tau_z = 0$$

essendo infatti le forze orientate solamente sugli assi  $x$  e  $y$ , queste producono solamente momenti lungo l'asse  $z$ .

Se un corpo è in *equilibrio traslazionale* e se il momento risultante è nullo rispetto ad un asse, allora è nullo rispetto a qualunque altro asse, indipendentemente dal numero di forze applicate.



## 7.1 Baricentro

Nell'analizzare il moto di corpi rigidi, una delle forze da considerare è la forza di attrazione gravitazionale e, quindi, è necessario conoscere il suo punto di applicazione, ovvero il **baricentro**. L'insieme delle forze gravitazionali agenti sulle masse che compongono l'oggetto è equivalente ad una *singola forza gravitazionale* che agisce in questo punto. Quindi, per calcolare il momento della forza peso  $M\vec{g}$ , tutto il peso del corpo può essere considerato applicato nel baricentro.

Nel caso che l'accelerazione  $\vec{g}$  sia uniforme su tutto l'oggetto, allora il centro di gravità coincide con il centro di massa. Supponiamo di dividere un corpo in tanti piccoli elementi di massa  $m_i$ . Su ogni massa agisce la forza peso  $m_i g_i$ . Su ogni elemento di massa agisce anche un *momento*  $m_i g_i x_i$ .

Vogliamo definire un punto (centro di gravità o baricentro) tale che la forza peso totale abbia lo stesso effetto di rotazione delle forze peso applicate alle singole  $m_i$

# Gravitazione

## 8.1 Legge di gravitazione universale di Newton

Nel 1687 **Newton** pubblicò il suo lavoro sulla legge della forza di gravità nei suoi “*Mathematical Principles of Natural Philosophy*”. La **legge di gravitazione universale** di Newton stabilisce che *ogni punto materiale* nell’Universo attrae ogni altro punto materiale con una forza che è *direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse* ed *inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza* reciproca.

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove  $G$  è una costante universale chiamata **costante di gravitazionale universale**, il cui valore in unità SI è

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

Possiamo esprimere questa forza in forma vettoriale definendo un versore unitario  $\hat{r}_{12}$ . Poiché questo versore unitario è diretto dal punto materiale 1 al punto materiale 2, la forza esercitata dal punto materiale 1 sul punto materiale 2 è

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Per la terza legge di Newton, la forza  $\vec{F}_{21}$  esercitata dal punto materiale 2 sul punto materiale 1 ha lo stesso modulo di  $\vec{F}_{12}$  e verso opposto, cioè queste due forze formano una coppia di forze di azione e reazione e quindi risulta  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ .

### 8.1.1 Accelerazione di caduta libera e forza gravitazionale

Abbiamo chiamato il modulo della forza gravitazionale agente su di un corpo posto in prossimità della superficie terrestre, il peso del corpo.

$$mg = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

La seconda equazione lega l’accelerazione di caduta libera  $g$  ad alcuni parametri fisici che caratterizzano la Terra, come la massa e il suo raggio, e spiega l’origine del valore  $9.80 \text{ m/s}^2$  usato in precedenza. Consideriamo ora un corpo di massa  $m$  ad una distanza  $h$  al di sopra della superficie terrestre, corrispondente ad una distanza  $r = R_T + h$  dal centro della Terra. Il valore della forza gravitazionale che agisce su questa massa è

$$F_g = G \frac{M_T m}{r^2} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

Il modulo della forza gravitazionale che agisce sul corpo in questa posizione può anche essere scritto come  $F_g = mg$ , dove  $g$  è il valore dell'accelerazione di gravità alla quota  $h$ , quindi sostituendo questa espressione per  $F_g$  nell'ultima equazione otteniamo per  $g$  il valore

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

Ne consegue che  **$g$  decresce al crescere della quota**. Poiché il peso di un corpo è  $mg$ , vediamo che, per  $r \rightarrow \infty$ , il peso tende a zero.

### 8.1.2 Campo gravitazionale

Oggi si può guardare all'interazione gravitazionale da un punto di vista diverso, utilizzando il concetto di **campo gravitazionale** esistente in ogni punto dello spazio. Quando un punto materiale viene posto in un punto dello spazio in cui è presente un campo gravitazionale, il punto materiale risente di una forza gravitazionale. In altre parole, si immagina che sia il campo ad esercitare una forza su di una particella piuttosto che pensare alla forza come diretta interazione reciproca. Il campo gravitazionale  $\vec{g}$  è quindi definito da

$$\vec{g} \equiv \frac{\vec{F}_g}{m_0}$$

Il campo gravitazionale, cioè, è eguale in ogni punto alla forza gravitazionale  $\vec{F}_g$  che un punto materiale di prova subisce divisa per la massa stessa, e chiameremo il corpo responsabile dell'instaurarsi del campo *sorgente*.

## 8.2 Le leggi di Keplero

L'astronomo tedesco Giovanni Keplero custodì i dati astronomici del maestro Brahe e passò circa 16 anni cercando di dedurre un modello matematico per il moto dei pianeti. L'interpretazione di questi dati risultò assai complessa in quanto i pianeti erano osservati da un sistema – la Terra – anch'esso in moto. L'analisi di Keplero del moto planetario può essere riassunta in *tre affermazioni*, oggi universalmente note come **leggi di Keplero**.

### 8.2.1 Prima legge di Keplero

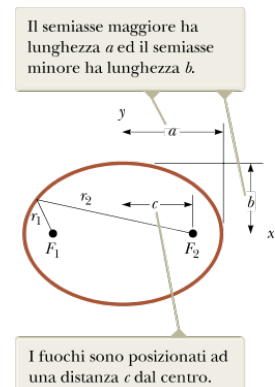
**Enunciato** Tutti i pianeti percorrono orbite ellittiche con il Sole in uno dei fuochi.

Per definire matematicamente un'ellisse è necessario scegliere due punti  $F_1$  ed  $F_2$ , chiamati **fuochi**. La distanza maggiore tra due punti dell'ellisse è chiamata **asse maggiore**, passa per il centro dell'ellisse stessa ed ha lunghezza  $2a$ , dove  $a$  è detto **semiasse maggiore**. Analogamente, la distanza minore tra due punti dell'ellisse contenente il centro è chiamata **asse minore**, ed ha lunghezza  $2b$ , dove  $b$  è detto **semiasse minore**. Ciascun fuoco dell'ellisse si trova ad una distanza  $c$  dal centro della stessa tale che

$$a^2 = b^2 + c^2$$

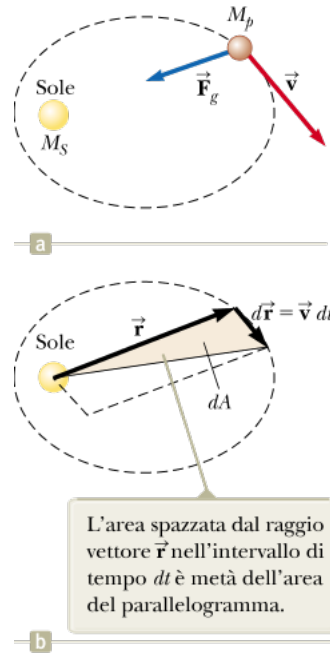
Nel moto dei pianeti del sistema solare, **il Sole si trova in uno dei due fuochi**, e non vi è niente nell'altro.

L'**eccentricità** di un'ellisse è definita dalla relazione  $e = c/a$  ed è il parametro che dà un'idea immediata della forma dell'ellisse.



### 8.2.2 Seconda legge di Keplero

**Enunciato** Il raggio vettore che unisce il Sole ad un qualsiasi pianeta spazza aree eguali in intervalli di tempo eguali.



### 8.2.3 Terza legge di Keplero

**Enunciato** Il quadrato del periodo orbitale di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita ellittica.

$$T^2 = K_s r^3$$

dove  $K_s$  è una costante data da

$$K_s = \frac{4\pi^2}{GM_s} = 2.97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

ed è uguale per tutti i pianeti.

## 8.3 Energia potenziale gravitazionale

Quando abbiamo introdotto l'energia potenziale gravitazionale abbiamo messo in rilievo il fatto che l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale  $U = mgy$  è valida solo quando la particella  $m$  è prossima alla superficie della Terra, cioè dove la forza gravitazionale è indipendente da  $y$ . Tale espressione inoltre vale nel caso in cui si abbia a che fare con un corpo molto massivo (come la Terra) che crea un campo gravitazione  $g$  nel quale un punto materiale di massa  $\mathcal{L}$  molto più piccola si trova immerso.