Algebra Lineare

Enrico Bragastini

29 marzo 2021

Indice

Matrici

1.1 Introduzione alle Matrici

Una **Matrice** è una tabella numerica a doppia entrata con i coefficienti ordinati per righe e per colonne

1.1.1 Dimensioni di una matrice (forma)

Si dice che una matrice è $m \times n$ se ha *m righe* e *n colonne.*
Per esempio, date le seguenti due matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- La matrice A è 2×3 perché ha 2 righe e 3 colonne.
- La matrice B è 2×2 perché ha 2 righe e 2 colonne

1.1.2 Vettore riga e Vettore colonna

Esistono due particolari tipologie di matrici distinte dalla loro *forma*:

- **Vettore riga**
  Si tratta di una matrice composta da *una sola riga.* Un *vettore riga* è quindi una matrice di forma $1 \times n$.
  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Vettore colonna**
  Si tratta di una matrice composta da *una sola colonna.* Un *vettore colonna* è quindi una matrice di forma $m \times 1$.
  $$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.1.3 Matrice quadrata

Una Matrice si dice **quadrata** quando il numero delle righe è uguale al numero delle colonne, ovvero quando $m = n$. In tale caso, n è chiamato **ordine** della matrice.

Esempio:

La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ è *quadrata* di *ordine* pari a 2.

1.1.4 Diagonali di una matrice quadrata

Una *matrice quadrata* presenta due **diagonali**:

- **Diagonale principale**, costituita dagli elementi che attraversano centralmente la matrice, a partire dall'angolo superiore sinistro a quello inferiore destro
- **Diagonale secondaria**, costituita dagli elementi che attraversano centralmente la matrice, a partire dall'angolo inferiore sinistro a quello superiore destro

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Gli elementi della matrice in rosso fanno parte della **diagonale principale**. Gli elementi della matrice in blu fanno parte della **diagonale secondaria**

1.1.5 Posto in una matrice

Ogni elemento di una matrice è univocamente determinato dal posto che occupa nella tabella. L'unico elemento di posto (i, j) è l'elemento che si trova nella *i-esima riga* e nella *j-esima colonna*.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Nella matrice A:

- *1* è l'elemento di posto (1, 1)
- *2* è l'elemento di posto (1, 2)
- *6* è l'elemento di posto (2, 3)

1.1.6 Notazione generica

Una matrice A di forma $m \times n$, ovvero una matrice del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

può essere indicata mediante la sua **notazione generica**:

$$A = [a_{i,j}] \quad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

1.1.7 Matrici uguali

Due matrici si dicono **uguali** se hanno:

1. **Stessa forma**: <u>*stesso numero di righe*</u> e <u>*stesso numero di colonne*</u>
2. **Stessi coefficienti**

<u>Esempio 1:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Le due matrici sono diverse perché la prima è 2×3 mentre la seconda è 3×2.

<u>Esempio 2:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Le due matrici sono diverse perché $A_{2,2} \neq B_{2,2}$.

1.2 Matrici particolari

1.2.1 Matrice nulla

La **matrice nulla** è una matrice $m \times n$ del tipo

$$O_{mn} = [0] \quad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

tale che

$$A + O_{mn} = A$$

1.2.2 Matrice opposta

La **matrice opposta** di una matrice $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ si denota con $-A$ ed è la matrice con la stessa forma di A (ovvero $m \times n$) tale che

$$A + (-A) = O_{mn}$$

1.2.3 Matrice identità

La **Matrice identità** è una matrice I tale che $AI = A$, dove A è una matrice $n \times m$. Definiamo quindi la *matrice identità* come la matrice quadrata $n \times n$ composta da tutti 1 sulla diagonale principale e 0 altrove.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Delta di Kronecker In matematica per *delta di Kronecker* si intende una funzione di due variabili discrete che vale 1 se i loro valori coincidono, mentre vale 0 in caso contrario.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Di conseguenza è possibile definire la **matrice identità** sfruttando questa funzione:

$$I_n = [\delta_{i,j}] \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.3 Operazioni con le matrici

1.3.1 Somma tra matrici

Se A e B sono due matrici $m \times n$, allora si può definire la loro somma, che viene denotata con $A + B$.

$$A = [a_{i,j}] \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

$$A + B = [c_{i,j}] \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \quad \text{dove } \ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

$$B = [b_{i,j}] \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

La somma di due matrici (con la stessa *forma*) si fa **posto per posto**.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

1.3.2 Prodotto per uno scalare

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ uno scalare. Consideriamo $A = [a_{i,j}] \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$ allora αA denota la matrice con la stessa forma di A (ovvero $m \times n$) e con termine generico $b_{i,j} = \alpha a_{i,j}$

Esempio:

$$\alpha = 2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \ 2 \times 2$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \ 2 \times 2$$

Tre situazioni particolari Data $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, allora:

- $0 \cdot A = O_{m,n}$ (*matrice nulla*)
- $1 \cdot A = A$
- $(-1) \cdot A = -A$ (*matrice inversa*)

1.3.3 Prodotto tra matrici

La moltiplicazione tra matrici, a differenza della somma che opera posto per posto, viene effettuata **riga per colonna**.

Caso base Prodotto tra un vettore riga e un vettore colonna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots 1_{1n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$