



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Progetto integrativo per il corso di Ricerca Operativa

Mix ottimo di produzione per una ditta
di chitarre e bassi

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Enrico Buratto

1142644

Indice

1	Abstract	2
2	Problema	3
3	Risoluzione del problema	5
3.1	Impostazione del problema	5
3.2	Modello matematico	6
4	Risoluzione con il software AMPL	9
4.1	Panoramica	9
4.2	Risultati	9

1 Abstract

Il problema che segue consiste in un classico problema di mix ottimo di produzione. Attraverso la modellazione matematica si vuole decidere il piano di produzione di una ditta di strumenti musicali, nello specifico chitarre e bassi, al fine di massimizzare il guadagno complessivo annuale dato dalla vendita di suddetti strumenti.

In un primo momento verrà definito il testo del problema, comprendente tutti i dati riguardanti i costi di produzione, la richiesta da parte del mercato, eventuali condizioni di cui l'azienda deve tener conto (**e.g.** la quantità massima di manodopera e relativo costo). Successivamente verrà creato un modello per il problema tramite la *programmazione lineare* che, una volta trasposto nel linguaggio di programmazione *AMPL*, porterà alla determinazione del guadagno complessivo massimo per l'azienda e quindi al piano di produzione che la ditta dovrà seguire per ottenere tale guadagno.

2 Problema

La ditta C & B co. produce chitarre e bassi partendo da un set di componenti prestabiliti e assemblandoli insieme per produrre gli strumenti.

Ogni componente esiste in due versioni: per chitarra e per basso; nonostante abbiano lo stesso nome, infatti, non si possono montare i componenti per chitarra su un basso e viceversa, tranne in alcuni casi specificati in seguito. Nella seguente tabella sono indicati nello specifico i componenti, i rispettivi prezzi e, per questioni di mercato, il numero massimo di ognuno che può essere acquistato dall'azienda in un anno.

	Chitarra		Basso	
	Quantità acquistabile	Prezzo (€/pezzo)	Quantità acquistabile	Prezzo (€/pezzo)
Chiavette	66636	3.5	66834	4.5
Capotasto	11103	2	11231	2
Manico	11071	48	11097	44
Tastiera	11071	16.5	11097	15.3
Tasti	225000	0.5	223211	0.7
Segnatasti	88920	0.95	88135	1.05
Corpo	11903	51	11081	49
Battipenna	22304	8	22202	7
Ponte	11106	11	11239	11
Pick-up	33211	42	22207	47.5
Selettore pick-up	22000	9	22000	7
Potenzimetri	33522	16.5	33633	15.2
Jack d'uscita	11240	3	11230	3
Truss-rod	11071	24	11097	28

La ditta produce quattro modelli di chitarre e due modelli di basso. Ogni modello necessita di una determinata quantità di componenti per poter essere realizzato; i dati sono riassunti nelle seguenti tabelle:

Chitarre

	Chiav.	Cap.	Man.	Tastiere	Tasti	Segnat.	Corpi	Batt.	Ponti	P.-U.	Selett.	P.-U.	Pot.	Jack	T.-R.
LP	6	1	1	1	26	11	1	0	2	2	1		4	1	1
Strato	7	1	1	1	19	8	1	1	1	3	1		2	1	1
Tele	6	1	1	1	22	9	1	1	1	1	1		2	1	1
EDS	18	2	2	2	43	15	2	2	3	5	2		4	1	2

Bassi

	Chiav.	Cap.	Man.	Tastiere	Tasti	Segnat.	Corpi	Batt.	Ponti	P.-U.	Selett.	P.-U.	Pot.	Jack	T.-R.
Mustang	4	1	1	1	19	8	1	1	1	1	1		1	1	1
Thunderbird	6	1	1	1	21	9	1	1	2	2	1		3	1	2

Come già detto, esistono delle eccezioni: si può infatti usare un selettore pick-up per chitarra su un basso (e viceversa) aggiungendo un adattatore con costo aggiuntivo di 1€, e/o un potenziometro per chitarra su un basso (e viceversa) aggiungendo un modulatore con costo aggiuntivo di 2€.

I prezzi con cui gli strumenti vengono immessi sul mercato sono riportati nella seguente tabella:

Strumento	Prezzo di vendita(€)
LP	624
Strato	559
Tele	476
EDS	1169
Mustang	309
Thunderbird	449

Per la produzione degli strumenti, l'azienda possiede tre stabilimenti produttivi A, B e C, ognuno con una quantità di ore di manodopera prestabilita; questa quantità è rispettivamente 20000, 30000 e 40000 ore. Ogni ora costa all'azienda 10€.

Ogni strumento può essere prodotto in ognuno dei tre stabilimenti, ma a causa della diversità di mezzi produttivi a disposizione il tempo per produrre un modello in uno stabilimento non è necessariamente lo stesso che si avrebbe in un altro stabilimento; in tabella sono riassunti questi dati.

Modello	Manodopera stab. A (h)	Manodopera stab. B (h)	Manodopera stab. C (h)
LP	1.2	4.5	5.5
Strato	2.5	3.7	5.6
Tele	3.0	4.3	6.6
EDS	3.8	3.5	4.1
Mustang	2.6	3.4	3.0
Thunderbird	2.9	4.0	5.9

Gli strumenti, inoltre, possono essere modificati dalla ditta su richiesta del cliente. Ogni modifica ha lo stesso costo e lo stesso uso di manodopera per ogni modello in ogni stabilimento; il costo per modello, la quantità di manodopera e il ricavo per l'azienda sono di seguito riportati:

Modello	Costo modifica(€)	Manodopera (h)	Aumento di prezzo (€)
LP	34	0.5	45
Strato	33	0.9	41
Tele	32	0.6	55
EDS	39	0.4	49
Mustang	30	0.6	43
Thunderbird	29	0.5	42

Si richiede di calcolare il mix ottimo di produzione dei vari strumenti, al fine di massimizzare il profitto dell'azienda.

3 Risoluzione del problema

3.1 Impostazione del problema

Prima di procedere con la modellazione e la risoluzione del problema, si è provveduto a definire **insiemi**, **parametri** e **variabili decisionali**.

Insiemi

$\mathbf{I} = \{1..6\}$ = tipi di strumenti. Gli indici sono numerici per questioni di leggibilità del modello e del successivo codice *AMPL*. Essi corrispondono a:

1. LP;
2. Strato;
3. Tele;
4. EDS;
5. Mustang;
6. Thunderbird.

$\mathbf{J} = \{A, B, C\}$ = stabilimenti di produzione degli strumenti.

$\mathbf{K} = \{1..14\}$ = componenti degli strumenti. Anche in questo caso per questioni di leggibilità è stato assegnato un numero a ogni componente nel modo seguente:

1. chiavette;
2. capotasto;
3. manico;
4. tastiera;
5. tasti;
6. segnatasti;
7. corpo;
8. battipenna;
9. ponte;
10. pick-up;
11. selettore pick-up;
12. potenziometri;
13. jack d'uscita;
14. truss-rod.

Tipi = $\{C, B\}$ = tipologia di strumento, cioè [C]hitarre e [B]assi. Questo insieme non è fondamentale, ma risulta utile per la successiva definizione dei parametri.

Chitarre = {1..4} = sottoinsieme di I, anche questo non indispensabile ma utile per la semantica dei parametri e del modello del problema.

ComponentiSpeciali = {11, 12} = sottoinsieme di K, utile (ma non fondamentale) per la modellazione di alcuni vincoli del modello.

Parametri

P_i = Prezzo di vendita dello strumento di tipo $i \in I$

Y_i = Numero di strumento di tipo $i \in I$ da modificare; questo viene deciso a priori, quindi non fa parte delle variabili decisionali

M_i = Guadagno per l'azienda proveniente dalla modifica di uno strumento di tipo $i \in I$

CM_i = Costo all'azienda per la modifica dello strumento di tipo $i \in I$

LS_i = Ore di manodopera necessarie per la modifica dello strumento $i \in I$

$ND_{k,t}$ = Numero di componenti di tipo $k \in K$ disponibili per strumento di tipo $t \in Tipi$

$NN_{k,i}$ = Numero di componenti di tipo $k \in K$ necessarie per la costruzione di uno strumento di tipo $i \in I$

$NP_{k,i}$ = Prezzo del componente $k \in K$ per lo strumento $i \in I$. È stato optata questa soluzione ($i \in I$ al posto di $t \in Tipi$) per una più semplice modellazione

C_i = Costo all'azienda dello strumento di tipo $i \in I$; definito come $\sum_{k \in K} NP_{k,i} * NN_{k,i} \forall i \in I$

LM_j = Numero di ore di manodopera massime dello stabilimento $j \in J$

$L_{i,j}$ = Numero di ore di manodopera necessarie per produrre uno strumento $i \in I$ nello stabilimento $j \in J$

$Manod$ = Costante che indica il costo della manodopera (€/ora)

Variabili decisionali

$x_{i,j}$ = Numero di strumenti di tipo $i \in I$ prodotti nello stabilimento $j \in J$

y = Numero di adattatori per selettori Pick-Up utilizzati

z = Numero di modulatori per potenziometri utilizzati

v_j = Ore di manodopera per la modifica degli strumenti nello stabilimento $j \in J$

Oltre a queste, sono state definite altre quattro variabili temporanee con il solo scopo di calcolare y e z mantenendo la linearità del modello; esse sono a , b , c , d .

3.2 Modello matematico

Essendo questo un problema di tipo *mix ottimo di produzione*, si richiede di massimizzare il guadagno complessivo per l'azienda andando a calcolare la corretta

combinazione di tipologie di strumenti da produrre. Il modello è quindi:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \overbrace{\sum_{i=1}^6 \sum_{j \in J} P_i * x_{i,j}}^{\text{Guadagno vendita strumenti}} - \overbrace{\sum_{i=1}^6 \sum_{j \in J} C_i * x_{i,j}}^{\text{Costo produzione strumenti}} + \overbrace{\sum_{i=1}^6 M_i * Y_i}^{\text{Guadagno modifica strumenti}} - \\
 & \overbrace{\sum_{i=1}^6 CM_i * Y_i}^{\text{Costo modifica strumenti}} - \overbrace{\sum_{i=1}^6 \sum_{j \in J} (L_{i,j} * x_{i,j}) * CostoManod}^{\text{Costo modifica strumenti}} - \\
 & \overbrace{\sum_{i=1}^6 (LS_i * Y_i) * CostoManod}^{\text{Costo manodopera modifiche}} - \underbrace{Scambi componenti chitarra-basso}_{y - 2z}
 \end{aligned}$$

subject to:

$$\forall k \in K - ComponentiSpeciali : \left(\sum_{i \in Chitarre} NN_{k,i} * \sum_{j \in J} x_{i,j} \right) \leq ND_{k,C} \quad (1)$$

$$\forall k \in K - ComponentiSpeciali : \left(\sum_{i \in I-Chitarre} NN_{k,i} * \sum_{j \in J} x_{i,j} \right) \leq ND_{k,B} \quad (2)$$

$$\forall k \in ComponentiSpeciali : \left(\sum_{i \in Chitarre} NN_{11,i} * \sum_{j \in J} x_{i,j} \right) \leq a \quad (3)$$

$$\forall k \in ComponentiSpeciali : \left(\sum_{i \in I-Chitarre} NN_{11,i} * \sum_{j \in J} x_{i,j} \right) \leq b \quad (4)$$

$$(a + b) \leq \sum_{t \in Tipi} ND_{11,t} \quad (5)$$

$$(y) \geq ND_{11,C} - a; \quad (6)$$

$$(y) \geq a - ND_{11,C}; \quad (7)$$

$$\forall k \in ComponentiSpeciali : \left(\sum_{i \in Chitarre} NN_{12,i} * \sum_{j \in J} x_{i,j} \right) \leq c \quad (8)$$

$$\forall k \in ComponentiSpeciali : \left(\sum_{i \in I-Chitarre} NN_{12,i} * \sum_{j \in J} x_{i,j} \right) \leq d \quad (9)$$

$$(c + d) \leq \sum_{t \in Tipi} ND_{12,t} \quad (10)$$

$$(z) \geq ND_{12,C} - c; \quad (11)$$

$$(z) \geq c - ND_{12,C}; \quad (12)$$

$$\forall j \in J : \left(\sum_{i \in I} (L_{i,j} * x_{i,j}) + v_j \right) \leq LM_j \quad (13)$$

$$\left(\sum_{j \in J} v_j \right) = \left(\sum_{i \in I} LS_i * Y_i \right) \quad (14)$$

3.2.1 Spiegazione dei vincoli

- (1) Il primo vincolo riguarda la quantità di componenti per chitarra disponibili; la somma dei componenti di tutte le chitarre prodotte deve essere minore o uguale al numero massimo di componenti acquistabili dall'azienda. Da questo vincolo sono esclusi i selettori pick-up e i potenziometri, per i quali sono stati definiti vincoli aggiuntivi;
- (2) Analogo al primo vincolo ma per i bassi. Anche in questo caso sono esclusi selettori pick-up e potenziometri;
- (3) Vincolo sul numero massimo di selettori pick-up disponibili per le chitarre. Insieme al vincolo **4** determina il numero di adattatori e di modulatori da utilizzare;
- (4) Analogo al vincolo precedente ma per i bassi;
- (5) Vincolo sulle variabili temporanee a e b : la somma dei due deve essere al più uguale al numero di selettori pick-up disponibili per chitarre e bassi;
- (6-7) Questi vincoli hanno il solo scopo di calcolare y , il quale è un valore assoluto;
- (8) Analogo al vincolo **3** ma per i potenziometri;
- (9) Analogo al vincolo **8** ma per i bassi;
- (10) Analogo al vincolo **5** ma per \mathbf{b} e \mathbf{c} ;
- (11-12) Analoghi ai vincoli **6-7** ma per calcolare z
- (13) Vincolo riguardante la manodopera massima a disposizione per ogni stabilimento;
- (14) Vincolo riguardante la manodopera a disposizione per la modifica degli strumenti in ogni stabilimento.

4 Risoluzione con il software AMPL

4.1 Panoramica

Per risolvere il problema è stato utilizzato il software *AMPL*, con il solver *cplex* alla sua versione 12.8, il tutto nell'ambiente di programmazione integrato *AMPLIde*.

Sono stati realizzati cinque files, i quali sono:

- **candb.mod**: contiene il modello del problema; in esso sono definiti gli insiemi, i parametri, le variabili decisionali, la funzione obiettivo e i vincoli;
- **candb.dat**: contiene i dati del problema; in esso vengono inizializzati tutti gli insiemi e i parametri. Lo scopo di avere i dati separati dal modello è la versatilità: si possono infatti modificare tutti i dati del problema senza andare a toccare il modello;
- **candb2.dat**: analogo al primo file **.dat** ma contenente un diverso set di dati;
- **candb.run**: script creato per facilitare il caricamento di modello e dati nel software e permettere una visualizzazione ordinata dei dati di output;
- **candb2.run**: analogo al primo file **.run** per l'automazione della risoluzione del problema con il secondo set di dati.

4.2 Risultati

Dopo la modellazione in AMPL, è stato eseguito il solver *cplex* per il calcolo del profitto massimo dell'azienda e la miglior distribuzione della produzione dei vari strumenti tra gli stabilimenti. Di seguito è riportato l'output dell'esecuzione.

Risultati dell'esecuzione:

```
=====
VISUALIZZAZIONE PER STABILIMENTI
=====
Stabilimento A
Strumento 1 : 849
Strumento 2 : 5093
Strumento 3 : 2082
Strumento 4 : 0
Strumento 5 : 1
Strumento 6 : 0
Stabilimento B
Strumento 1 : 0
Strumento 2 : 1
Strumento 3 : 2232
Strumento 4 : 0
Strumento 5 : 0
Strumento 6 : 92
Stabilimento C
Strumento 1 : 0
Strumento 2 : 0
Strumento 3 : 0
```

Strumento 4 : 0
Strumento 5 : 10912
Strumento 6 : 0

=====

VISUALIZZAZIONE PER STRUMENTI

=====

Strumento 1
Stabilimento A: 849
Stabilimento B: 0
Stabilimento C: 0
Strumento 2
Stabilimento A: 5093
Stabilimento B: 1
Stabilimento C: 0
Strumento 3
Stabilimento A: 2082
Stabilimento B: 2232
Stabilimento C: 0
Strumento 4
Stabilimento A: 0
Stabilimento B: 0
Stabilimento C: 0
Strumento 5
Stabilimento A: 1
Stabilimento B: 0
Stabilimento C: 10912
Strumento 6
Stabilimento A: 0
Stabilimento B: 92
Stabilimento C: 0

=====

ALTRI DATI

=====

Ore modifica stabilimento 0: 0.00
Ore modifica stabilimento 0: 22.50
Ore modifica stabilimento 0: 0.00
Numero di adattatori utilizzati: 0
Numero di moulatori utilizzati: 0

Ricavo massimo azienda = 1801504

Come si può evincere dai dati, la produzione dello strumento 4 non conviene all'azienda; per essa è preferibile investire il materiale e la manodopera sugli altri strumenti.

Durante le prove di esecuzione del programma è emersa una criticità riguardante lo strumento *EDS*: la sua produzione infatti non conviene all'azienda se il prezzo di vendita sta sotto una determinata soglia; superata questa, la produzione diventa

redditizia e vantaggiosa. Dal secondo set di dati, infatti, si può evincere che già aumentando di 10€ il prezzo di vendita dello strumento in questione i risultati cambiano completamente: da 0 strumenti *EDS* prodotti, infatti, si passa a 919. Aumentando ulteriormente il prezzo di vendita, il risultato dell'esecuzione tende sempre di più a favorire la produzione di tale strumento. Per completezza viene riportato il risultato dell'esecuzione con il secondo set di dati.

```
=====
VISUALIZZAZIONE PER STABILIMENTI
=====
```

```
Stabilimento A
Strumento 1 : 1
Strumento 2 : 3
Strumento 3 : 6663
Strumento 4 : 0
Strumento 5 : 0
Strumento 6 : 0
Stabilimento B
Strumento 1 : 0
Strumento 2 : 3
Strumento 3 : 1678
Strumento 4 : 919
Strumento 5 : 0
Strumento 6 : 92
Stabilimento C
Strumento 1 : 0
Strumento 2 : 0
Strumento 3 : 0
Strumento 4 : 0
Strumento 5 : 10913
Strumento 6 : 0
```

```
=====
VISUALIZZAZIONE PER STRUMENTI
=====
```

```
Strumento 1
Stabilimento A: 1
Stabilimento B: 0
Stabilimento C: 0
Strumento 2
Stabilimento A: 3
Stabilimento B: 3
Stabilimento C: 0
Strumento 3
Stabilimento A: 6663
Stabilimento B: 1678
Stabilimento C: 0
Strumento 4
```

Stabilimento A: 0
Stabilimento B: 919
Stabilimento C: 0
Strumento 5
Stabilimento A: 0
Stabilimento B: 0
Stabilimento C: 10913
Strumento 6
Stabilimento A: 0
Stabilimento B: 92
Stabilimento C: 0

=====

ALTRI DATI

=====

Ore modifica stabilimento 0: 0.00
Ore modifica stabilimento 0: 22.50
Ore modifica stabilimento 0: 0.00
Numero di adattatori utilizzati: 0
Numero di moulatori utilizzati: 0

Ricavo massimo azienda = 1803288