PLC

- SIMPLESSO CLASSICO (min)

  ↳ SE FUNZ. OBB È MIN → $X_i \geq 0$ → TERMINI NOTI POSITIVI → COSTI TUTTI ≥ 0 OTTIMA

  SE HAI $\geq$ METTI SLACK NEGATIVO

- REGOLE PER IL PIVOT
  - ↳ COLONNA CON COSTO PIÙ NEGATIVO
  - ↳ RIGA CON COEFF FRAZIONARIO
  - ↳ CON COEFF. FRAZIONARI = USO REGOLA DI BLAND
  - ↳ SALTO RIGHE CON COEFF. NEGATIVI
  - ↳ SE HO TUTTI COEFF. NEGATIVI, PROBLEMA ILLIMITATO
  - ↳ COEFF. FRAZIONARIO DEVE ESSERE IL PIÙ PICCOLO

- METODO DELLE DUE FASI

→ QUANDO NON HO UNA BASE AMMISSIBILE (LIN. INDIP e TUTTI I COEFF. POSITIVI) (SOLITAMENTE MATRICE IDENTITÀ)

I FASE → INSERISCO VAR. ARTIFICIALI, CON COSTI TUTTI = 0 TRANNE QUELLI DELLE VAR. ARTF. A 1

RISOLVO PROB. ARTIFICIALE (RISOLVO IL TABLEAU), E VADO NELLA FASE II CON I NUOVI TERMINI NOTI e COEFF (COSTI = 0). REINTEGRO FUNZ. OBB. ORIGINALE

II RISOLVERE SIMPLESSO

- SIMPLESSO DUALE

in generale

min Primale → max Duale

	Primale	Duale
VINCOLI	$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
	$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
	$a_i^T x = b_i$	u_i libera
VAR.	$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
	$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
	x_j libera	$u^T A_j = c_j$

Duale \ Primale	finito	vuoto	illimitato
FINITO	×		
VUOTO		×	×
illimitato		×	

• SIMPLESSO PRIMALE

→ APPLICABILE QUAL'ORA I COSTI RIDOTTI SIANO ≥ 0
→ METODO ALTERNATIVO ALLE DUE FASI
ES:

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \end{matrix} \xrightarrow{\cdot -1} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & -6 \end{matrix}$$

-(3/-1) = 3
-(5/-3) = 5/3 <-- minore
-(4/-2) = 2

ORA OPERO IN MODO SPECULARE:
- SCELGO RIGA PER PIVOT (NON COLONNA) CON VALORE NEGATIVO
- FACCIO RAPPORTO TRA costo ridotto e termine di colonna (per ogni colonna, visto che la riga la ho già scelta)
- prendo come pivot quello con valore minore (devono essere positivi, infatti moltiplico per -1)
- VADO AVANTI SEGUENDO QUESTE REGOLE FINO A SOLUZIONE OTTIMA

• CONDIZ. DI ORTOGONALITÀ

Poichè $x \geq 0$ e $c^T - u^T A \geq 0$, si ha (scarti complementari)

$$\begin{cases} (c_1 - u^T A_1)x_1 = 0 \\ \dots \\ (c_n - u^T A_n)x_n = 0 \end{cases}$$

Analogamente da $u \geq 0$ e $Ax - b \geq 0$ si ha

$$\begin{cases} u_1(a_1 x - b_1) = 0 \\ \dots \\ u_m(a_m x - b_m) = 0 \end{cases}$$

MEGA SISTEMA CON PRIMALE E DUALE

• ANALISI DI SENSITIVITÀ

→ VARIAZIONE TERMINI NOTI AFFINCHÉ LA BASE NON CAMBI

$$B^{-1}b \geq -B^{-1}\Delta b$$

$$B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

a. What are the values of the primal and dual variables ?
b. What is the value of of the primal and dual objective function ?
c. Is the dual solution feasible?
d. is the primal solution optimal?

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$u^T = c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$z_P = c_B x_b = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 17$$

$$z_D = u^T b = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix} = 17$$

Esempio

$$\begin{aligned} \min \; & -x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	4	3	0	2	36
0	0	2	2	1	1	17
1	0	2	1	0	0	10
0	1	1	1	0	1	13

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b \geq -B^{-1}\Delta b$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -17 \\ -10 \\ -13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\Delta b_1 - \Delta b_2 + \Delta b_3 \geq -17 \\ \Delta b_1 \geq -10 \\ \Delta b_1 + \Delta b_3 \geq -13 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta b_2 = \Delta b_3 = 0 \quad & \Rightarrow \quad \Delta b_1 \geq -17/2 \\ \Delta b_1 = \Delta b_3 = 0 \quad & \Rightarrow \quad \Delta b_2 \leq 17 \\ \Delta b_1 = \Delta b_2 = 0 \quad & \Rightarrow \quad \Delta b_3 \geq -13 \end{aligned}$$

La soluzione non cambia per:

$$\begin{aligned} 3/2 \leq b_1 \leq +\infty \quad & (b_2 = 6,\ b_3 = 3) \\ -\infty \leq b_2 \leq 23 \quad & (b_1 = 10,\ b_3 = 3) \\ -10 \leq b_3 \leq +\infty \quad & (b_1 = 10,\ b_2 = 6) \end{aligned}$$

PLI

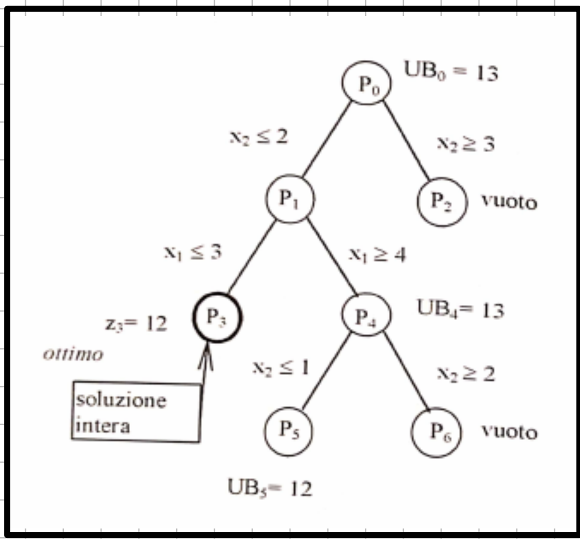
• B & B CLASSICO

→ DISEGNO IL PROBLEMA e DEFINISCO UN UB o LB INIZIALE
(SOLUZ. DEL PROBLEMA RILASSATO)
(GRAFICAMENTE o CON IL SIMPLESSO)

→ FAI I "TAGLI" GRAFICI

→ DISEGNI ALBERO DECISIONALE CON UB, z, BASE
(TUTTI I VINCOLI "SUPERIORI" DEVONO ESSERE RISPETTATI)

→ SCEGLI SOLUZIONE INTERA MAGGIORE

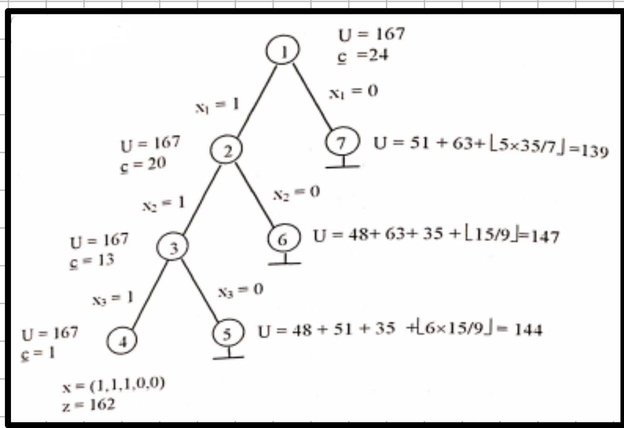


• B & B KNAPSACK 0-1

→ ORDINARE VETTORI SECONDO p/w
(PROFITTO/PESO)

→ SOLUZ. INIZIALE È L'UB FRAZIONARIO
(MASSIMIZZI PROFITTO)

→ UGUALE, MA TI SEGNI $\bar{c}$
(CAPACITÀ RESIDUA)



• GOMORY

→ FAI IL GRAFICO e SCRIVI SIMPLESSO OTTIMO
→ PRENDERE RIGA CON TERMINE NOTO CON PARTE FRAZIONARIA MAGGIORE

→ $\sum_i$ (PARTE FRAZ) $x_i \ge$ PARTE FRAZ. TERMINE NOTO

→ NON SI POSSONO USARE RIGHE CON TERM. NOTO < 0

→ SE UN COEFF È < 0 → DEVO PRENDERE:
$1 - |$PARTE FRAZ$|$ (ES: $-2,7$ → $1 - |0,7| = 0,3$)

→ INSERIRE NEL TABLEAU (CON VAR. SLACK)

GRAFI / PROGRAMMAZIONE DINAMICA

KNAPSACK

- IMPOSTO DUE TABELLE

$p = (10, 5, 8, 6)$ $w = (2, 3, 4, 3)$ $c = 8$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f^1	0	0	10	10	10	10	10	10	10
f^2	0	0	10	10	10	15	15	15	15
f^3	0	0	10	10	10	15	18	18	18
f^4	0	0	10	10	10	16	18	18	21

← QUI POSSO METTERE PROFITTO E CAPACITÀ

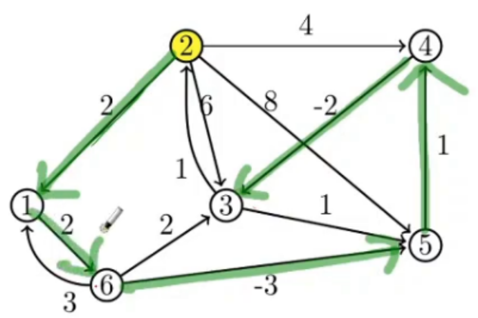
DIPENDE COSA MI CONVIENE

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
	J^0	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1^s	J^1	∅	∅	{1}	{1}	{1}	{1}	{1}	{1}	{1}
2^s	J^2	∅	∅	{1}	{1}	{1}	{1,2}	{1,2}	{1,2}	{1,2}
3^s	J^3	∅	∅	{1}	{1}	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,3}	{1,3}
4^s	J^4	∅	∅	{1}	{1}	{1}	{1,4}	{1,3}	{1,3}	{1,2,4}

↳ ELEMENTI

AD OGNI STEP, RIGUARDO LA RIGA SOPRA E LA COLONNA ATTUALE − PROFITTO ULTIMO OGGETTO E AGGIUNGO

BELLMAN-FORD



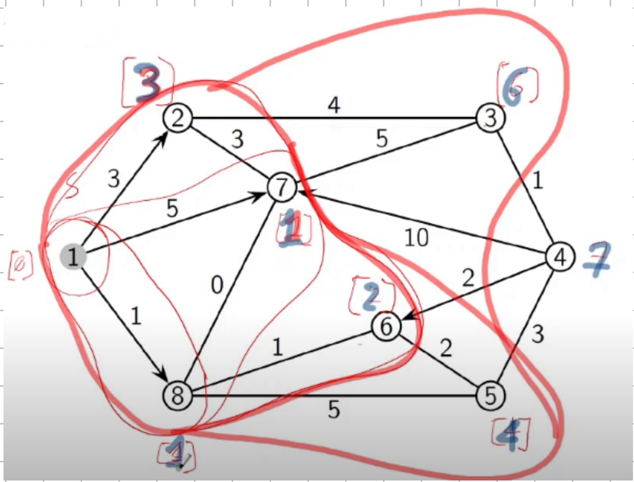
Source node = 2

Iter	$f(j)$ 1	2	3	4	5	6	pred 1	2	3	4	5	6
0	-	0	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-
1	2	0	6	4	8	-	2	2	2	2	2	-
2	2	0	2	4	7	4	2	2	4	2	3	1
3	2	0	2	4	1	4	2	2	4	2	6	1
4	2	0	2	2	1	4	2	2	4	5	6	1
5	2	0	0	2	1	4	2	2	4	5	6	1

OGNI RIGA CERCO UN CAMMINO MINIMO USANDO I RISULTATI PRECEDENTI. SE MI CONVIENE, AGGIORNO. SE NO, TENGO SOLUZIONE PRECEDENTE

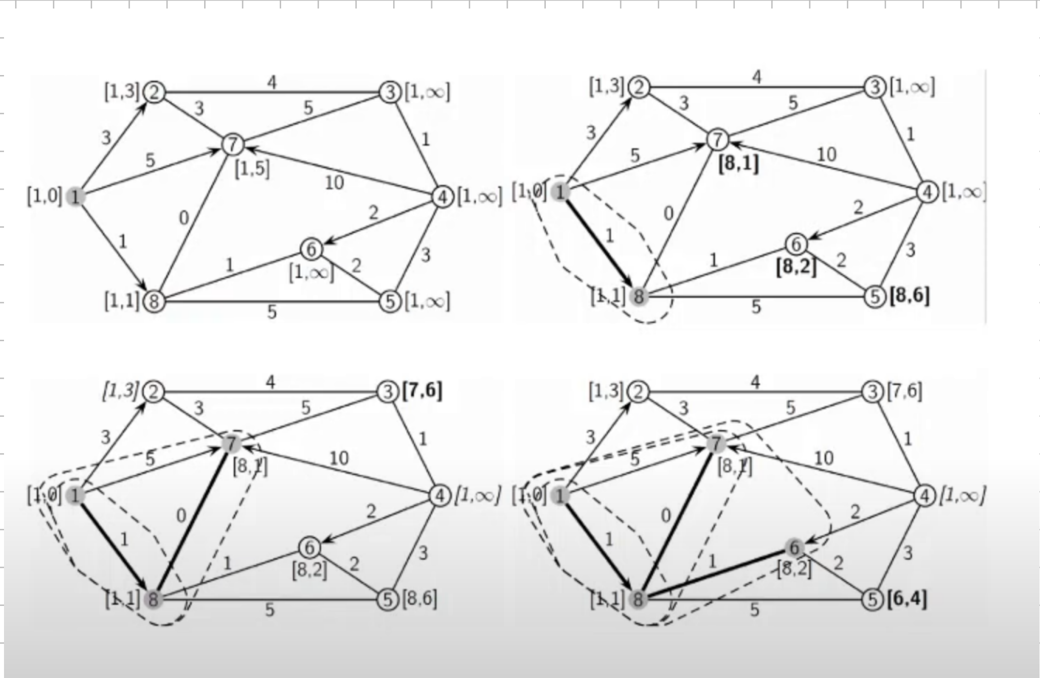
DIJKSTRA I

- SOLO CON GRAFI CON ARCHI DI PESO > 0



PARTENDO DALLA SORGENTE, MI ALLARGO CERCANDO MANO A MANO I MIGLIORI CAMMINI

DIJKSTRA II



USO INFORMAZIONI PRECEDENTI PER RIDURRE COMPLESSITÀ

ar version

$$
[c_{ij}] = \begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
1 & & 3 & & & & & 5 & 1 \\
2 & & & 4 & & & & 3 & \\
3 & & 4 & & 1 & & & 5 & \\
4 & & & 1 & & 3 & 2 & 10 & \\
5 & & & & 3 & & 2 & & 5 \\
6 & & & & & 2 & & & 1 \\
7 & & 3 & 5 & & & & & 0 \\
8 & & & & & 5 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

UTILIZZO LE SOLUZIONI PRECEDENTI PER ESPANDERTI IN MANIERA OTTIMA

S	$L[j]$							$pred[j]$						
	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7	8
{1}	3	∞	∞	∞	∞	5	$\boxed{1}$	1	1	1	1	1	1	1
{1,8}	3	∞	∞	6	2	$\boxed{1}$	1	1	1	1	8	8	8	1
{1,8,7}	3	6	∞	6	$\boxed{2}$	1	1	1	7	1	8	8	8	1
{1,8,7,6}	$\boxed{3}$	6	∞	4	2	1	1	1	7	1	6	8	8	1
{1,8,7,6,2}	3	6	∞	$\boxed{4}$	2	1	1	1	7	1	6	8	8	1
{1,8,7,6,2,5}	3	$\boxed{6}$	7	4	2	1	1	1	7	5	6	8	8	1
{1,8,7,6,2,5,3}	3	6	$\boxed{7}$	4	2	1	1	1	7	5	6	8	8	1
{1,8,7,6,2,5,3,4}	3	6	7	4	2	1	1	1	7	5	6	8	8	1