STUDIO PUNTI CRITICI CON MATRICE HESSIANA

- (x_0, y_0) È UN **PUNTO CRITICO** SE: $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ (A DIMENSIONE h, CON IL GRADIENTE NULLO)
- UN PUNTO CRITICO, SE NON È NÉ DI MASSIMO NÉ DI MINIMO È DETTO **DI SELLA**.

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR DEL SECONDO ORDINE)

HP: $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, $f \in C^2(A)$.

$$\boxed{\text{TH: } f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2}\langle Hh, h\rangle + o(\|h\|^2)}$$

CON $\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \to 0$ $(\|h\| \to 0)$ e H MATRICE HESSIANA.

PER A APERTO, SAPPIAMO CHE $\exists B(x_0, r) \subset A$ CIOÈ $\|x_0 - (x_0 + h)\| < r \to \|h\| < r$

DIM:

SIA $B(x_0, r) \subset A$ CONVESSO, ALLORA $x \in B(x_0, r) \Rightarrow \underbrace{[x, x_0]}_{\text{SEGMENTO CHE CONGIUNGE } x_0 \text{ e } x} \subset B(x_0, r) \subset A$

"PARAMETRIZZO" QUESTO SEGMENTO USANDO $\varphi : [0, \|x - x_0\|] \to A \subset \mathbb{R}^n$

DEFINITA COME: $\varphi(t) := x_0 + \frac{t(x-x_0)}{\|x-x_0\|}$ CON $\varphi'(t) := \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$ COSTANTE RISPETTO A t

$\varphi(0) = x_0$ e $\varphi(\|x-x_0\|) = \cancel{x_0} + \frac{x-x_0}{\cancel{\|x-x_0\|}}\cancel{\|x-x_0\|} = x$

USIAMO UNA FUNZ. AUSILIARIA:

$g(t) := f(\varphi(t))$, $g : [0, \|x-x_0\|] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, $\varphi \in C^2$ CON $\Rightarrow f(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t) \in C^2([0, \|x-x_0\|])$

e DA TAYLOR PER UNA VARIABILE:

$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + o(t^2)$, $t \to 0$

CON $g(0) = f(\overbrace{\varphi(0)}^{x_0}) = f(x_0)$

$g'(t) \underset{\text{DAL TEO DER. COMPOSTA}}{=} \langle \nabla f(\varphi(t)), \underbrace{\varphi'(t)}_{\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} = k} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) k_i$

$g''(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) k_i\right) \overset{\text{PERCHÉ DERIVAZ. È LINEARE}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) k_i \overset{\text{DERIV. COMPOS.}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\varphi(t)) k_j k_i$

CASO $g''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overbrace{\varphi(0)}^{x_0}) k_j k_i$

RITORNANDO ALLA FORMULA DI TAYLOR: $g(t) = f(\varphi(t)) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + o(t^2)$

$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), k \rangle t + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) t^2 + o(t^2)$

PONGO $t = \|x - x_0\| \to g(\|x-x_0\|) = f(\varphi(\|x-x_0\|)) = f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), \frac{x-x_0}{\cancel{\|x-x_0\|}} \rangle \cancel{\|x-x_0\|} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \overbrace{\frac{(x-x_0)_i}{\cancel{\|x-x_0\|}}}^{k_i} \overbrace{\frac{(x-x_0)_j}{\cancel{\|x-x_0\|}}}^{k_j} \overbrace{\cancel{\|x-x_0\|^2}}^{t^2}$

$+ o(\|x-x_0\|^2)$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x-x_0), x - x_0 \rangle + o(\|x-x_0\|)^2$ □ (DA $h = x - x_0$)

TEOREMA MAX/MIN ↔ MATRICE HESSIANA

HP: $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω APERTO, $f \in C^2(\Omega)$. $z_0 \in \Omega$ t.c. $\nabla f(z_0) = 0$

TH: 1) $Hf(z_0)$ È DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow z_0$ MINIMO LOCALE

NEGATIVA $\Rightarrow$ MASSIMO LOCALE

INDEFINITA $\Rightarrow$ SELLA

DIMOSTRAZIONE:

DA TAYLOR (SECONDO ORDINE)

$f(z_0 + h) = f(z_0) + \cancel{\langle \nabla f(z_0), h \rangle} + \frac{1}{2}\langle Hf(z_0)h, h\rangle + o(\|h\|^2)$, $\|h\| \to 0$

GIUSTIFICO ①

$f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{1}{2}\langle Hf(z_0)h, h\rangle + o(\|h\|^2)$. PONIAMO $z_0 \in \Omega$, APERTO (CIOÈ: $\exists\, B(z_0, r) \subset \Omega$)

$x \in B \iff x = z_0 + h \in B(z_0, r)$, CIOÈ: $\|z_0 - (z_0+h)\| = \|h\| < r$. QUINDI $\exists r > 0$ t.c. $\|h\| < r \Rightarrow z_0 + h \in \Omega$

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \|h\|^2\left(\frac{1}{2}\overbrace{\left\langle Hf(z_0)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right\rangle}^{q_{Hf(z_0)}\left(\frac{h}{\|h\|}\right)} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|}\right)$$

$\frac{h}{\|h\|} \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ COMPATTO, SAPPIAMO CHE $q_{Hf(z_0)}$ È CONTINUA, QUINDI VALE IL TEO. DI WEIERSTRASS:

$\exists x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ t.c. $q_{Hf(z_0)}(x_0) = \min_{h:\|h\|=1} q_{Hf(z_0)}(h) = m > 0 \Rightarrow f(z_0+h) - f(z_0) \geq \|h\|^2\left\{\frac{m}{2} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|}\right\}$ ⊛ ALLORA POSSO TROVARE $c > 0$ t.c.

SE $\|h\| < c$ ALLORA $\left|\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}\right| \leq \frac{m}{2} \iff -\frac{m}{2} \leq \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \leq \frac{m}{2}$ *

USO * IN ⊛: $f(z_0+h) - f(z_0) \geq \|h\|^2\left\{\frac{m}{2} - \frac{m}{2}\right\} = 0 \quad \forall h$ t.c. $\|h\| < c \Rightarrow f(z_0+h) \geq f(z_0)$ □

- **CASO DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI**

TEOREMA:

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e $f \in C^2(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ t.c. $\nabla f(z_0) = \underline{0}$. $Hf(z_0)$ MATRICE HESSIANA.

TH: ① $\det(Hf(z_0)) > 0 \Rightarrow z_0$ È ESTREMANTE LOCALE, MINIMO RELATIVO SE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0) > 0$ e MINIMO RELATIVO $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0) < 0$

② $\qquad\qquad < 0 \Rightarrow z_0$ NON È ESTREMANTE.

DIM:

DATA $f \in C^2(\Omega)$ ALLORA $Hf(x_0)$ È SIMMETRICA $\Rightarrow$ AUTOVALORI $m, M \in \mathbb{R}$ (SOLUZIONI DI $P(\lambda) = 0$ CON $P(\lambda) = \det(Hf(z_0) - \lambda I_{2\times 2})$)

CIOÈ: $\det\begin{pmatrix} f_{xx}(z_0) - \lambda & f_{xy}(z_0) \\ f_{xy}(z_0) & f_{yy}(z_0) - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$,

TENIAMO IN CONTO CHE IL POL. CARATT. È: $P(\lambda) = (\lambda - m)(\lambda - M) = \lambda^2 - (m+M)\lambda + mM$

ABBIAMO LE RELAZIONI $\overbrace{f_{xx} + f_{yy}}^{①} = m + M$. $\quad \det Hf(z_0) = \overbrace{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}^{②} = mM$

SE ② $< 0 \to m$ e M SEGNO DISCORDE $\to H$ INDEFINITA

② $> 0 \to m$ e M SEGNO CONCORDE $\to H$ POSITIVA o NEGATIVA. È IMPLICATO ANCHE $f_{xx} \cdot f_{yy} > 0$.

DALLA RELAZIONE $f_{xx} + f_{yy} = m + M$ ABBIAMO CHE PER $f_{xx} > 0$ LA FORMA QUADRATICA ASSOCIATA È DEF. POSITIVA

$f_{xx} < 0$ NEGATIVA

ES: $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 - 3x$. RICERCA PUNTI CRITICI

SOLUZ:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2 - 3 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y = 0 \quad \Rightarrow x = 0, y = 0$

$y = 0 \to x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm 1$

$(-1, 0)$ e $(1, 0)$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$, $\quad Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det = -12 \qquad \det = 12$

DAL TEO. $(-1,0)$ NON È ESTREMANTE, $(1,0)$ È DI MINIMO $(f_{xx} = 6 > 0)$

ES: $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y)$ IN $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $|x| < \pi, |y| < \pi\}$. TROVARE PUNTI CRITICI

SOLUZIONE:

- $f(x,y) \in C^\infty(Q)$.

$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos x - \operatorname{sen}\cancel{(x+y)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \cos y - \operatorname{sen}\cancel{(x+y)} = 0 \end{aligned}\right\}$ (È UN SISTEMA) $\to \begin{cases} \cos(x) = \cos(y) \\ \cos x = \operatorname{sen}(x+y) \end{cases}$ e RISOLVO:

I CASO: $\begin{cases} x = -y \\ \cos(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \mp\frac{\pi}{2} \\ x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

II CASO $\begin{cases} x = y \\ \cos(x) = \operatorname{sen}(2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \cos x = 2\operatorname{sen} x \cos x \end{cases} \to \begin{cases} x = y \\ \cos x(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \end{cases}$

$\to \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$. $\quad \Rightarrow$ 4 PUNTI TOTALI: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right)$

$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$

CALCOLIAMO $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\operatorname{sen} y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$ CON $\det = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\cos(x+y)$

$\det Hf\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = \det Hf\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \det Hf\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1 \longrightarrow$ PUNTI DI SELLA

$\det Hf\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = \underset{+}{3} \rightarrow f_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = \underset{+}{2} \longrightarrow$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO

$\det Hf\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \underset{+}{\frac{3}{4}} \rightarrow f_{xx}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \underset{-}{-1} \rightarrow$ PUNTO DI MAX RELATIVO

$\det Hf\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right) = \underset{+}{\frac{3}{4}} \rightarrow f_{xx}\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right) = \underset{-}{-1} \rightarrow$ MAX