

LEZIONE 2

$|A|$ = CARDINALITÀ DI A (numero di elementi)

SPAZIO DI PROBABILITÀ UNIFORME

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$\hookrightarrow \textcircled{1} P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$$

$$\textcircled{2} P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B) \text{ SE DISGIUNTI}$$

UN EVENTO ELEMENTARE HA CARDINALITÀ = 1

ES: POSSO AVERE $\{1, 2\}$ NEL DADO

$$\frac{|\{1, 2\}|}{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

ES: MESE DI NASCITA RANDOM

$$\Omega = \{\text{Jan}, \dots, \text{Dec}\}$$

• POSSO USARE MESI EQUITABILI ...

$$\text{Jan} = \frac{1}{12}, \dots, \text{Dec} = \frac{1}{12}$$

• MIGLIORIO A USO I GIORNI

$$\text{Jan} = \frac{31}{365}, \dots, \text{Dec} = \frac{31}{365}$$

• AGGIUNGO ANNI BISESTILI

CONTROLLA SE VALGONO I POSTULATI:

$$\boxed{1} = P(\Omega) = 1 = \sum_{w \in \Omega} P(\{w\}) = P(\{Idh\}) + \dots + P(\{dec\}) = \frac{21}{365} + \dots + \frac{31}{365} = 1$$

$$\boxed{2} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$$

$$P(A \cup B) = \sum_{w \in A \cup B} P(\{w\}) = \sum_{w \in A} P(\{w\}) + \sum_{w \in B} P(\{w\})$$

LEGGI DI DE MORGAN

$$(E \vee F)^c = E^c \wedge F^c$$

$$(A^c \wedge B^c) = (A \vee B)^c$$

ES.

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A^c \cup B^c) = ? = \frac{11}{12}$$

• REGOLA ADDIZIONE

$$P(A^c) + P(B^c) - \boxed{P(A^c \wedge B^c)} \rightarrow P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

SPAZIO CAMPIONARIO INFINITO

ESEMPIO: PROB. DI TROVARE 6 PER LA PRIMA VOLTA AL TERZO LANCI

SPAZIO CAMPIONARIO:

$\{(w_1, w_2, w_3) \mid w_i \in \{1, \dots, 6\}\}$ TRIPLETTE DI LANCI

$$\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\left[\frac{5}{6} \right] \cdot \left[\frac{5}{6} \right] \cdot \left[\frac{1}{6} \right] \xrightarrow{\text{SENZA 6}} \textcircled{6}$$

$$\frac{25}{6^3}$$

IN GENERALE...

$$P(\{w\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{w-1} \cdot \frac{1}{6}$$

DEVO VERIFICARE $P(\Omega) = 1$ ✓

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{n\}) = 1 \quad \text{SU TUTTI I NATURALI} \geq 1$$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{6}} = 1 \quad \textcircled{\checkmark}$$

$k = n - 1$ (PER APPLICARE GEOMETRICA)

SPAZIO DI PROBABILITÀ. DISCRETO NON NECESSARIAMENTE FINITO

DEFINIZIONE QUASI UGUALE, CONTROLLA SLIDE

(L'HO PERSA AL MOMENTO)

SPAZIO DI PROBABILITÀ NON DISCRETO

Lo SPAZIO DEGLI EVENTI DEVE ESSERE UNA σ ALGEBRA
SE SODDISFA

Σ = FAMIGLIA DI SOTTOINSIEMI DI Ω

Σ È UNA σ ALGEBRA SE:

① $\Omega, \emptyset \in \Sigma$

② $A \in \Sigma \implies A^c \in \Sigma$ (CHIUSURA RISP. A SUCC. NUMERABILI)

③ $A_1, \dots, A_n \in \Sigma \implies A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$ (CHIUSURA RISP. ALL'UNIONE)

LEGGI DI DE-MORGAN RIVISITATE

$$\bullet \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

$$\bullet \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

COROLLARIO DI σ ALGEBRA

④ CHIUSURA RISPETTO A INTERSEZIONI

DIMOSTRABILE DALLA PROP. 2 e 3 + USANDO DE-MORGAN

ESEMPIO:

ORA DI PRIMO ARRIVO DI UNA TELEFONATA

$$\Omega = [0, +\infty) \quad A = [0, 5]$$

$$\mathbb{N} \subseteq \Omega$$

SE CONSIDERO SPAZIO EVENTI COME TUTTI I SOTTOINSIEMI
DI Ω , NON È POSSIBILE DEF. UNA FUNZ. DI PROB.

→ DA QUI NASCE σ SIGMA ALGEBRA.