① DETERMINARE L'UNICA SOLUZ. DEL (PC)

① $\begin{cases} y' = 2xy^{20} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e I_{max} su cui $y = y(x)$ sol. è definita

② DET. SOLUZ. $y = y(x)$ (PC) $\begin{cases} y' + x^3 y = -\frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) y^5 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ * DIM. CHE TEO. 4 È APPLICABILE

③ $w_1(x) = x$ $\quad w_2(x) = 2|x|$ • LIN DIP IN $I = (-\infty, 0)$
• LIN INDIP IN $I = (-\infty, +\infty)$

---

① RISOLVO EQ. DIFF. $\Rightarrow \int y'/y^{20}\, dx = \int 2x\, dx \Rightarrow \int \frac{y'}{y^{20}} dx = x^2 + c$

$= -\frac{1}{13 y^{13}} + \cancel{c_1} = x^2 + c_2 \Rightarrow y^{13} = -\frac{1}{13(x^2+c)} \Rightarrow y = \sqrt[13]{-\frac{1}{13(x^2+c)}}$

$y(0) = 1 \Rightarrow \sqrt[13]{-\frac{1}{13c}} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{13c} = 1 \to c = -\frac{1}{13}$

I_{max} $y = \sqrt[13]{-\frac{1}{13(x^2 - \frac{1}{13})}} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{13} \neq 0 \quad x^2 \neq \frac{1}{13} \quad x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$

$I_{max} = \left(-\frac{1}{\sqrt{13}}, +\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$

---

② $\begin{cases} y' + x^3 y = -\frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) y^5 \\ y(0) = - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'/y^5 + x^3/y^4 = -\frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$

$z = y^{-4}$ e $z' = -4y^{-5} \cdot y'$

$\begin{cases} -\frac{1}{4} z' + x^3 z = -\frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' - 4x^3 z = e^{x^4} \cos(x) \end{cases}$

$z(x) = e^{-P(x)} \left\{ c + \int e^{P(x)} \cdot q(x)\, dx \right\}$ $\quad P(x) = \int -4x^3 dx = -x^4 + c$

$e^{-x^4} \left\{ c + \int \cancel{e^{-x^4}} \cdot \cancel{e^{x^4}} \cos(x)\, dx \right\}$ $\quad z(x) = c e^{x^4} + e^{x^4} \sin(x)$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{c e^{x^4} + e^{x^4} \sin(x)}} = \quad y(0) = -1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt[4]{c+0}} = \sqrt[4]{c} = 1 \quad c = 1$

$e^{x^4}(1 + \sin(x)) \quad \sin(x) \neq -1 \quad \boxed{x \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi}$

$y = -\frac{1}{\sqrt[4]{e^{x^4} + e^{x^4} \sin(x)}}$

---

③ ~~$\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2|x| \\ 1 & 2\frac{|x|}{x} \end{pmatrix} = 2|x| - 2|x| = 0 \quad x \neq 0$~~

~~$\det \begin{pmatrix} x & 2|x| \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -2x - 2|x| \to -2(x + |x|) \neq 0 \quad x \neq 0$~~

~~$\det \begin{pmatrix} x & 2|x| \\ 1 & +2 \end{pmatrix} = 2x - 2|x| \to 2(x - |x|) = 0$~~

③ NON SAPPIAMO CHE w_1 e w_2 SONO SOLUZIONI e w_2 NON È DERIV. IN 0

e OSSERVIAMO CHE PER $I=(-\infty,0)$ ABBIAMO: $w_1 = x$ $w_2=-2x$ CIOÈ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SU $(-\infty,0)$

PER VERIFICARE CHE SONO LIN. INDIP SU $\mathbb{R}$ DEVO VERIFICARE CHE

$c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\to c_1 x + 2c_2 |x| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e USIAMO $x=\pm 1$ COME CASI ARBITRARI

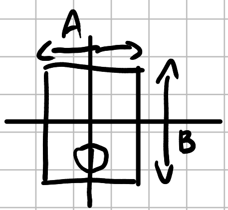
$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ NON POSSO APPLICARE TEO. 8

---

②* $f(x,y) = -x^3 y - \frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) y^5 \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ ESSENDO POLINOMIO

? DEVO VERIFICARE L'HP DI LIPTSCHITZ $\to |f(x,y) - f(x,z)| < L|y-z|$

CON $L>0$ e $\forall (x,y),(x,z) \in \underbrace{B_r(0,1)}_{I}$ → DALLE CONDIZ. INIZIALI



$$\left| -x^3 y - \frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) y^5 + x^3 z + \frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) z^5 \right| < L|y-z|$$

PER DISUG. TRIANG. $\underbrace{|x^3 (y-z)|}_{< A^3} + \underbrace{\frac{1}{4} e^{x^4}}_{< e^{A^4}} |\cos(x)| \, |y^5 - z^5| < L|y-z|$

?

⇒ $y^5 - z^5 = 5c^4 (y-z)$, $c \in (y,z)$ $|y|,|z| < B$

(LAGRANGE, VALOR MEDIO)

$\Rightarrow |y^5 - z^5| \leq 5B^4 |y-z|$

RISCRIVO:

$$\underbrace{\left(A^3 |\cancel{y-z}| + \frac{1}{4} e^{A^4} \cdot 5B^4 |\cancel{y-z}| \right)}_{\text{COSTANTE}} < L|\cancel{y-z}|$$

COSTANTE $<$ L