

● ESEMPIO TEO. UNICITÀ E ESISTENZA LOCALE

$f(x, y)$ CONTINUA, MA $\forall [a, b]$ INFINITO t.c. HP LIPSCHITZ VERIFICATA

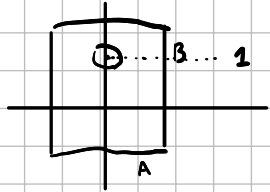
$$\exists L > 0 \quad \text{t.c.} \quad \left| \frac{2x}{x^2+1} y + xy^2 - \frac{2x}{x^2+1} z - xz^2 \right| \leq L|y-z|$$

① IPOTIZZIAMO PER ASSURDO CHE VALGA L'HP. DI LIPSCHITZ (PER CAPIRE CHE NON SI PUÒ APPL. IL TEO. 3)
PER $x=0$ RISULTA UN ESPRESS. NULLA, PER $z=0$, $\bar{x} \neq 0$:

$$\left| \frac{2\bar{x}}{\bar{x}^2+1} y + \bar{x}y^2 \right| \leq L|y| \Rightarrow |y| \left| \frac{2\bar{x}}{\bar{x}^2+1} + \bar{x}y \right| \leq L|y| \Rightarrow \left| \frac{2\bar{x}}{\bar{x}^2+1} + \bar{x}y \right| \leq L$$

FALSA PER VALORI GRANDI DI y : TEO. 3 NON APPLICABILE

② $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ALLORA VERIFICHIAMO SOLO L'HP DI LIPSCHITZ **LOCALE**



$$R_{A,B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < A, |y| < B\}$$

$$A, B > 0 \quad \text{e} \quad (0, 1) \in R_{A,B}$$

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z| \quad \forall (x, y), (x, z) \in R_{A,B} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{2x}{x^2+1} y + xy^2 - \frac{2x}{x^2+1} z - xz^2 \right| \stackrel{\text{DISUG. TRIANG.}}{\leq} \left| \frac{2x}{x^2+1} y - \frac{2x}{x^2+1} z \right| + |xy^2 - xz^2| = \underbrace{\frac{2|x|}{x^2+1}}_{\leq 1} |y-z| + |x| |y^2 - z^2|$$

CONSIDERO $|x| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\rightarrow < A$

PER STUDIARE $|y^2 - z^2|$ USO TEO. VALORE MEDIO (LAGRANGE): $g(t) \in C([a, b])$ e DERIV. SU (a, b)

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b-a) \Rightarrow |g(b) - g(a)| = |g'(c)| \cdot |b-a|$$

QUINDI PONGO $g(y) = y^3$

$$|y^3 - z^3| = 3c^2 |y - z| \leq 3B^2 |y - z|$$

$$c \in (y, z) \Rightarrow |f(x, y) - f(x, z)| \leq \underbrace{(1 + 3AB^2)}_L |y - z|$$

$\forall (x, y, z) \in R_{A,B}$
QUINDI \exists SLZ. UNICA SU I CONTINENTE $x_0 = 0$

● ESEMPIO

$$\textcircled{PC} \begin{cases} y' = 2x + 2 - 2x^3 + 4x^2 y - 2xy^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

① TEO. 4 APPLICABILE?

② TEO. 3 NON È APP. SU ALCUN I CONTINENTE $(0, 2)$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

● ES NEWTON: $F = m y''(t)$

↑
MASSA \hookrightarrow OSC. AL TEMPO t

● EZ. OSCILL. ARMONICO

$$y'' + \frac{k}{m} y = 0$$

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

STRUTTURA GENERALE:

$$y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)})$$

\hookrightarrow VARIABILE INDIPENDENTE

DEFINIZIONE: SIA $f: \underbrace{\Omega \subseteq \mathbb{R}}_{x \in} \times \underbrace{\mathbb{R}^k}_{y, y', \dots, y^{(k-1)}} \rightarrow \mathbb{R}$ e DICIAMO CHE y È **SOLUZIONE** DI $\#$ SU I SE:

- y È DERIVABILE SU I FINO ALL'ORDINE k
- $(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I$
- $y^{(k)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$ (VERIFICARE CHE L'EQ. SIA VERIFICATA)
SU UN QUALCHE I

$$\textcircled{\text{PC}} \begin{cases} y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1} \end{cases} \rightarrow \text{CONDIZ. INIZIALI DEL PC} \quad (x_0, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) \text{ NOTI}$$

● **ESEMPIO:** TROVARE $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c. $y(x) = ax^2 + bx + c$ è soluz. di

$$y'' + y' + 2y = x^2 + x - 3 \quad \text{su } I = \mathbb{R}$$

ABBIAMO $y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$ e SOSTITUISCO: $2a + 2ax + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + x - 3 \quad \forall x \in I = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 2ax^2 + (2a + 2b)x + 2a + 2c + b = x^2 + x - 3$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 1 \\ 2a + 2c + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{QUINDI } y = \frac{x^2}{2} - 2 \text{ È UNICA SOLUZIONE}$$

EQ. DIFF. "LINEARI" DI ORDINE SUPERIORE:

CIO'è GENERALIZZAZIONE DI: $\underbrace{y' + p(x)y}_{L(y)} = q(x)$

! RICORDARE PROP. LINEARITA'!

QUINDI: $y^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x)y^{(i)} = b(x)$
COEFF. DERIVATA i-ESIMA

$a_i, b \in C(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$

$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2)$

e $L(y) = 0$ È NOTA COME EQ. OMOGENEA (ASSOCIATA A $L(y) = b(x)$)

TEOREMA 5, ESISTENZA e UNICITÀ, GENERALIZZAZIONE DEL TEO. 2

SIA $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $a_i(x), b(x) \in C(I)$

$$\text{ALLORA } \textcircled{\text{PC}} \begin{cases} y^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x)y^{(i)} = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_k \end{cases} \Rightarrow \text{HA UN'UNICA SOLUZIONE } y = y(x) \text{ SU } I$$

INDIPENDENZA LINEARE: DEFINIZIONE:

SIANO DATE K FUNZIONI $V_1(x), \dots, V_K(x)$ DEFINITE SU $I \subseteq \mathbb{R}$ e SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE:

$C_1 V_1(x) + \dots + C_K V_K(x) = 0 \quad \forall x \in I$ e $C_1 = C_2 = \dots = C_K = 0$

TEOREMA 6:

$a_i(x)$, $i=0, \dots, (K-1)$ \neq CONTINUE SU I

e DEFINIAMO $S = \{ \text{INSIEME SOLUZIONI SU } I \text{ DI } L(y) = 0 \}$

① S È SPAZIO VETTORIALE

② $\dim(S) = K$ (ORDINE EQ. DIFF.) \Rightarrow È POSS. SELEZIONARE K SOLUZIONI DI $L(y) = 0$, LIN. INDIPENDENTI SU I , w_1, \dots, w_K t.c.

OGNI ALTRA SOLUZIONE $y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DI $L(y) = 0$ SI SCRIVE COME:

$y(x) = C_1 w_1(x) + \dots + C_K w_K(x) \quad \forall x \in I$ PER OPPORTUNI COEFF. $C_1, \dots, C_K \in \mathbb{R}$

\hookrightarrow SOL. GENERALE $L(y) = 0$ SU I (CIO'È ESPRESSA COME COMBINAZ. LINEARE)

CENNO ALLA DIM:

S SODDISFA GLI ASSIOMI DEGLI SPAZI VETTORIALI, IN PARTICOLARE $y_1, y_2 \in S$ ALLORA $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in S \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, INFATTI

$\underbrace{L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{=0} = \alpha_1 \underbrace{L(y_1)}_0 + \alpha_2 \underbrace{L(y_2)}_0 = 0$

TEOREMA 1:

HP: $\mathcal{L}(y), b(x) \in C(I)$

TH: SLZ. GENERALE $\mathcal{L}(y) = b(x)$ (su I) È: $y(x) = y_*(x) + c_1 w_1(x) + \dots + c_k w_k(x)$

DOVE y_* È UNA SLZ. PARTICOLARE DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ E DOVE w_1, \dots, w_k SONO k SOLUZIONI LINEARMENTE INDIP. DI $\mathcal{L}(y) = 0$

ES: $\underbrace{y'' + y' + 2y}_{\mathcal{L}(y)} = \underbrace{x^2 + x - 3}_{b(x)}$ E $y(x) = y_*(x) + \underbrace{c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)}_{\text{SOLUZ. LINEARMENTE INDIPENDENTI DI } y'' + y' + 2y = 0}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

DIM TEOREMA 1

$$\mathcal{L}(y_* + c_1 w_1 + \dots + c_k w_k) = \mathcal{L}(y_*) + c_1 \overset{=0}{\mathcal{L}(w_1)} + \dots + c_k \overset{=0}{\mathcal{L}(w_k)} = \mathcal{L}(y_*) = b(x)$$

PRENDO UNA SOLUZIONE DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ ARBITRARIA: $y = y(x)$

$$\mathcal{L}(y - y_*) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y_*) = b(x) - b(x) = 0 \quad \forall x \quad \text{cioè} \quad \mathcal{L}(y - y_*) = 0 \iff y - y_* \in S \xrightarrow{\text{tes. 6}} y - y_* = c_1 w_1 + \dots + c_k w_k$$

DOVE w_i LIN. INDIPENDENTI CIOÈ:
 $y = y_* + c_1 w_1 + \dots + c_k w_k$

h BRACCIOLO: $\sim 16 \text{ cm}$
w " " : $\sim 11,5 \text{ cm}$