- **EQ. 2 GRADO CON $\Delta<0$**

$\Delta<0 \Rightarrow (2ax+b)^2 = -1\cdot(-\Delta) \iff \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 = -1$ CHE SI PUÒ SCRIVERE COME $x^2=-1$ (NON HA SIGNIFICATO IN $\mathbb{R}$)

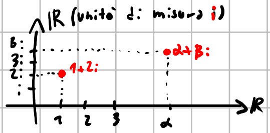
DIAMO SIGNIFICATO A $x^2=-1$ TRAMITE I NUMERI COMPLESSI ($\mathbb{C}$) e ASSEGNA $\boxed{x=\pm i \quad \text{DOVE } \boxed{i^2} = i\cdot i = (-i)\cdot(-i) = \boxed{-1}}$

"i" È DETTA UNITÀ IMMAGINARIA e VALE $\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \pm i \Rightarrow x = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,\beta$ CIOÈ $x=\alpha+\beta i$

DEFINIAMO $\mathbb{C}$ (NUMERI COMPLESSI) COME

- $\{(\alpha,\beta),\ \alpha\in\mathbb{R}, \beta\in\mathbb{R}\} = \{\alpha+i\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ CIOÈ COPPIE DI ELEMENTI DI $\mathbb{R}^2$ e LE LORO OPERAZIONI

$z\in\mathbb{C}$ ALLORA $z=(\overset{\in\mathbb{R}}{\alpha},\overset{\in\mathbb{R}}{\beta}) = \alpha+i\beta$



⟿ PIANO $\mathbb{R}\times i\mathbb{R}$ NOTO COME PIANO DI ARGAND-GAUSS

TERMINOLOGIA: SE $z\in\mathbb{C}$ RAPPRESENTATO COME $z=(\alpha,\beta)=\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $\alpha=\mathrm{R}(z)$ "PARTE REALE DI z"
$\beta=\mathrm{Im}(z)$ "PARTE IMMAGINARIA DI z"

- i PUNTI $\beta=0$ CORRISPONDONO A $\mathbb{R}$
- i PUNTI $\alpha=0$ CORRISPONDONO AI NUMERI IMMAGINARI, INFATTI $i=\underset{\alpha}{0}+i\cdot\underset{\beta}{1} = (0,1) \Rightarrow i$ È IMMAGINARIO

- **DEFINIZIONE SOMMA**

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\quad z_1=\alpha_1+i\beta_1$, $z_2=\alpha_2+i\beta_2$ $\quad \alpha_1,\beta_1\in\mathbb{R}$, $\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{R}$ ↳ PROVIAMO: $\boxed{z_1+z_2} = \alpha_1+i\beta_1+\alpha_2+i\beta_2 = \alpha_1+\alpha_2+i(\beta_1+\beta_2) = \boxed{(\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2)}$

↳ LO PRENDO COME DEF. DI SOMMA

- **DEFINIZIONE PRODOTTO**

PARTIAMO DA $i^2=-1=(-1,0)$. $\boxed{z_1\cdot z_2} = (\alpha_1+i\beta_1)(\alpha_2+i\beta_2) = \alpha_1\alpha_2+i\beta_1\alpha_2+i\alpha_1\beta_2-\beta_1\beta_2 = \alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2+i(\beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2) = \boxed{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2, \beta_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2)}$

↳ PRENDO COME DEF. DI PRODOTTO

NOTA: SIA PRODOTTO CHE SOMMA SONO COMMUTATIVI

e DALLA DEF DI SOMMA e PRODOTTO POSSO DEFINIRE $z=\alpha+i\beta = (\alpha,0)+(0,1)\cdot(\beta,0) = (\alpha,\beta)$ (COME $i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1\in\mathbb{R}$)

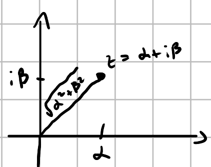
- **ELEMENTI NEUTRI:**

$(0,0)$ SOMMA

$(0,1)$ PRODOTTO *

* CERCO DI DIMOSTRARE: $z\cdot z^{-1}=(1,0)$ CIOÈ $z^{-1}=x+iy$ t.c. $(\alpha+i\beta)(x+iy)=(1,0)$

RISCRIVO $\alpha x-\beta y+i(\alpha y+\beta x) = (\alpha x-\beta y, \alpha y+\beta x) = (1,0) \iff \begin{cases}\alpha x-\beta y=1\\ \alpha y+\beta x=0\end{cases}$ e HA UN'UNICA SOL. $\begin{cases}x=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\\ y=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\end{cases}$



PRODOTTO TRA $z=\alpha+i\beta$ e $\bar{z}:=\alpha-i\beta$ "COMPLESSO CONIUGATO DI z"

$z\cdot\bar{z}=\bar{z}\cdot z=(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=\alpha^2+\beta^2=|z|^2$ DOVE $|z|:=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ "MODULO DI z"

OPERAZIONE DI "CONIUGATO"

$z=\alpha+i\beta \Rightarrow \bar{z}:=\alpha-i\beta \Rightarrow \bar{\bar{z}}=\alpha+i\beta=z$ $\quad \bar{\bar{z}}=z$ OPERAZIONE INVOLUTIVA

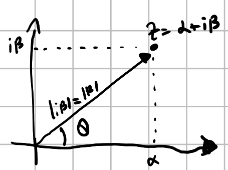
- **DEFINIZIONE RAPPORTO**

$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}=(\alpha_1+i\beta_1)\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}-\frac{i\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\right) = \frac{\alpha_1+i\beta_1}{\alpha_2+i\beta_2} = \frac{\alpha_1+i\beta_1}{\alpha_2+i\beta_2}\cdot\frac{\alpha_2-i\beta_2}{\alpha_2-i\beta_2} \to \alpha_2^2+\beta_2^2$

- **ALCUNE PROPRIETÀ:**
  - $z+\bar{z}=2\mathrm{R}(z)$
  - $z-\bar{z}=2\mathrm{Im}(z)$
  - $z\cdot\bar{z}=|z|^2$
  - $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
  - $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

PROPRIETÀ DEL MODULO:
- $|z|=0 \iff z=0$
- $|\lambda z|=|\lambda|\cdot|z| \quad \forall\lambda,z\in\mathbb{C}$
- $|z+w|\le|z|+|w| \quad \forall z,w\in\mathbb{C}$

- **FORMA POLARE**



$\begin{cases}\alpha=r\cos(\theta)\\ \beta=r\sin(\theta)\end{cases}$ $\quad\theta$ ANGOLO "ARGOMENTO DI z"

e

$\begin{cases}r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \text{ (DIST. ORIGINE)}\\ \cos(\theta)=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\\ \sin(\theta)=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\end{cases}$ $\quad \theta\in[0,2\pi)$

CIOÈ $z = \alpha + i\beta = r(\cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta)$ FORMA POLARE DI z

SE ABBIAMO $r = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$ CIOÈ DESCRIVO IL CERCHIO UNITARIO DEL PIANO DI ARGAND - GAUSS

ES: $\begin{cases} z = \rho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi) \\ w = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \end{cases}$

CIOÈ: $z \cdot w = (r\rho)(\cos(\phi+\theta) + i\,\text{sen}(\phi+\theta))$

• FORMULA DI DE MOIVRE

SIA $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \in \mathbb{C}$, SIA $n \in \mathbb{Z}$, ALLORA

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta))$$

CON CONSEGUENZA:

• TEOREMA *

SIA $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ ALLORA $x^n = z$ HA n SOLUZIONI (RADICI n-ESIME) e SONO DATE DA: (CON $z = \rho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$)

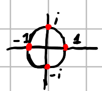
$$\boxed{x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, \dots, (n-1)}$$

PROVIAMO $\theta_k := \frac{\phi + 2k\pi}{n}$ e IN GENERALE $\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{2\pi}{n}$. DETTO IN UN ALTRO MODO, LE "RADICI" e SOLUZIONI DI $x^n = z$ DIVIDONO IL CERCHIO IN n ARCHI UGUALI

ES: $x^4 - 1 = z$ $\quad x = ? \in \mathbb{C}$

NOTO: $z = \underset{r}{1} \cdot (\cos \underset{\theta}{0} + i\,\text{sen}\,0)$ CIOÈ $x = 1\left(\cos\frac{0+2k\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{0+2k\pi}{4}\right)$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

ANALIZZO $k = 0 \Rightarrow x = 1$



4 ARCHI UGUALI.

QUINDI $x = 1, i, -1, -i$

ES: $x^2 = -1 = z = \underset{r}{1}(\cos\underset{\theta}{\pi} + i\,\text{sen}(\pi))$

$x = 1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi+2\pi k}{2}\right)$ CON $k = 0 \Rightarrow x = i$, CON $k = 1 \Rightarrow x = -i$

DIM *

PONGO • z (NOTO) $= \rho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$ $\quad (\rho > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi))$ e PONGO $x = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$x^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta))$ •

VERIFICO SE SONO UGUALI x^n e z

$\rho = r^n \Rightarrow r = \rho^{\frac{1}{n}}$

e $\left.\begin{matrix} \cos(n\theta) = \cos\phi \\ \text{sen}(n\theta) = \text{sen}\,\phi \end{matrix}\right\} \Rightarrow n\theta = \phi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ CON RADICI DISTINTE PER $k = 0, \dots, n-1$

NOTA: UNA GENERICA $f(x) = a^2x + bx + c$ CON $\Delta < 0$ HA 2 SOLUZIONI COMPLESSE CONIUGATE

$f(x) = a(x - z)(x - \bar{z})$ $\quad z = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

QUESTO PUÒ ESSERE GENERALIZZATO A GRADO k:

$\Phi(x) = a_k x^k + \dots + a_0$ $\quad a_k \neq 0$ (PER ESSERE DI GRADO k)

TEOREMA FONDAMENTALE DELL' ALGEBRA

$\Phi(a_k, \dots, a_0 \in \mathbb{R})$ HA k $\underbrace{\text{RADICI}}_{\text{VALORI DI } x \text{ t.c. } \Phi(x) = 0}$ in $\mathbb{C}$ (POSSIBILMENTE REALI e/o COINCIDENTI)

CIOÈ: $\Phi(x) = a_k(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_m)^{n_m}$ DOVE $n_1 + \dots + n_m = k$ DOVE x_i SONO RADICI e n_i SONO LE LORO "MOLTEPLICITÀ"

• OPERAZIONE DI EXP SU $\mathbb{C}$

PARTO DA: $e^{x_1 + ix_2} = \underbrace{e^{x_1}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{e^{ix_2}}_{?} \Rightarrow \boxed{e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x \quad \text{IDENTITÀ DI EULERO}}$ CON CASO PART $x = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

$\rightarrow e^{x_1} \cdot (\cos(x_2) + i\,\text{sen}(x_2))$