• ESEMPIO RISOLUZIONE CON EQ. DI RICCARDI

$$(PC)\begin{cases} y' - 4x^2 y + 2xy^2 = 2x + 1 - 2x^3 \; * \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

1 - VERIFICARE CHE HA UNA SOLUZ. NELLA FORMA $y_* = ax + b$

2 - TROVARE SOLUZ. (PC) e INTERVALLO ESISTENZA MASSIMALE (I_{MAX})

* STRUTT. EQ. RICCARDI

1 - $y_* = ax + b \Rightarrow y'_* = a$ e MI DOMANDO: $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $y_* = ax + b$ VERIFICATA?

↳ LI SOSTITUISCO NELL' EQUAZIONE

$$(\underbrace{-4a + 2a^2 + 2}_{2(a-1)^2})x^3 + (\underbrace{-4b + 4ab}_{4b(a-1)})x^2 + (\underbrace{2b^2 - 2}_{2(b^2-1)})x + a - 1 = 0$$

AFFINCHÉ SIA TUTTO 0, I COEFF. DEVONO ESSERE NULLI

$$\begin{cases} (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ b(a-1) = 0 \Rightarrow \cancel{b=0},\ a = 1 \\ b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = \pm 1 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

PERCHÉ NON VALE IN $b^2 - 1 = 0$

SOLUZIONI: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ CIOÈ: $\underset{y_0 =}{y_1 = x + 1}$ e $\underset{y_1 =}{y_2 = x - 1}$

ORA USIAMO LA VARIABILE AUSILIARIA z (DALL'EQ. DI RICCARDI) $y = \overset{y_0}{x+1} + \frac{1}{z}$, $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$

e SOSTITUIAMO NELL' EQ. $z' \underset{p(x)}{-4x} z = \underset{g(x)}{2x}$. APPLICO QUINDI TEOREMA 2

$$z(x) = e^{\int 4x\,dx}\left\{c + \int e^{-\int 4x\,dx} \cdot 2x\,dx\right\} = e^{2x^2}\left\{c + \int e^{-2x^2} 2x\,dx\right\} = e^{2x^2}\left\{c - \frac{1}{2}e^{-2x^2}\right\} = ce^{2x^2} - \frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2}$ $\quad - 4x$

e TROVO y CON $y = x + 1 + \frac{1}{z}$ CHE È $y = x + 1 + \left(ce^{2x^2} - \frac{1}{2}\right)^{-1}$

PONGO LA CONDIZ. INIZIALE $\Rightarrow 2 = 0 + 1 + \left(ce^0 - \frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow 1 = c - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

② $I_{max} = ?$

$$\frac{3}{2}e^{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3e^{2x^2} = 1 \quad e^{2x^2} = \frac{1}{3} \quad 2x^2 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad x = \pm\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{2}} \ominus \text{ NO!}$$

QUINDI $y \in C(\mathbb{R})$ CIOÈ $I_{max} \Rightarrow (\mathbb{R})$

• ESISTENZA e UNICITÀ PER PROBLEMI CAUCHY

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

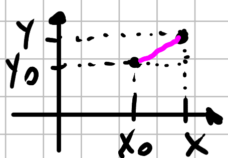
- UNA $f(x,y)$ È CONTINUA IN (x_0, y_0) SE:
  - $(x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (DOMINIO DI f)
  - $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ ESISTE FINITO ed È UGUALE A $f(x_0, y_0)$

↳ CIOÈ $\exists L \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ $\forall (x,y) \in \Omega$ t.c.

$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$

DISTANZA 2 PUNTI



STESSA COSA PER CONTINUITÀ SU INTERVALLI DEFINITA COME $f \in C(\Omega)$ CLASSI DI f CONTINUE SU Ω

• CRITERI DI CONTINUITÀ (CASI CONCRETI)

① SE $g(x)$ È CONTINUA SU I ALLORA $f(x,y) := g(x)$ È CONTINUA SU $\Omega = \overset{x \in}{I} \times \overset{y \in}{\mathbb{R}}$

② SOMMA, DIFFERENZA e PRODOTTO DI f CONTINUE SU Ω SONO CONTINUE SU Ω

③ IL QUOZIENTE DI f CONTINUE È CONTINUA $\forall (x,y) \in \Omega \setminus \{\text{DENOM} = 0\}$

④ I POLINOMI SONO f CONTINUE SU $\Omega = \mathbb{R}^2$

ES: $x^4y^3 + x^2y + y^5 + 1$

⑤ LE FUNZIONI RAZIONALI SONO CONTINUE SUL LORO DOMINIO $\left(\frac{p(x,y)}{q(x,y)} \quad q(x,y) \neq 0\right)$ (P, Q POLINOMI)

⑥ SE $g(x)$ È CONTINUA IN UN INTERVALLO I e $f(x,y)$ È CONTINUA NEI PUNTI $(x, g(x))$ ALLORA $f(x, g(x))$ È CONTINUA SU I

⑦ $f(x,y) \in C(U \subseteq \mathbb{R}^2)$ e $g(x) \in C$(CODOMINIO DI f) ALLORA $g(f(x,y)) \in C(U \subseteq \mathbb{R}^2)$

• TEOREMA DI PEANO

DATO (PC) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ DOVE $(x_0,y_0) \in \Omega$, $f \in C(\Omega)$, Ω APERTO

$\forall x, y$ $\exists$ DISCO CIOÈ TOLGO BORDO

TESI: (PC) HA UNA SOLUZIONE SU $y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DEFINITA SU QUALCHE INTERVALLO CONTENENTE x_0

• TEOREMA 3: DI ESISTENZA e UNICITÀ GLOBALE (PEANO, PICARD, CAUCHY, LINDORF)

SIA $\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}$ (OPPURE $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

- $(x_0, y_0) \in \Omega$
- $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C(\Omega)$

$$\boxed{\text{ASSUMIAMO } \exists L > 0 \text{ t.c. } |f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y-z| \quad \forall (x,y),(x,z) \in \Omega}$$

ALLORA ESISTE UNA SOLA SOLUZ DI (PC) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ PER $I = [a,b]$ (s $I = \mathbb{R}$ CON $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

CONDIZIONE DI LIPSCHITZ

• TEOREMA 4 (ESISTENZA e UNICITÀ LOCALE)

"BOLLA APERTA CENTRATA IN (x_0, y_0) DI RAGGIO $r > 0$"

$B_r(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$ e ASSUMIAMO $f \in C(B_r)$ e $\exists L > 0$ t.c.

ALLORA IL (PC) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ HA SOLUZ. UNICA DEFINITA SU I CONTENENTE x_0

• TEO. 2 - (B) DIMOSTRATO CON TEO. 3

$y' = \underbrace{q(x) - p(x)y}_{\in C(I \times \mathbb{R})} = f(x,y)$ CONSIDERO $[a,b] \subseteq I$ e $f \in C(\Omega)$ $\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}$ CON x_0

+ HP DI LIPSCHITZ, CIOÈ $|f(x,y) - f(x,z)| < L|y-z|$ $\forall (x,y),(x,z) \in \Omega$

DIVENTA $|\cancel{q(x)} - p(x)y - \cancel{q(x)} + p(x)z| = |-p(x)y + p(x)z| = |p(x)| \cdot |y-z| \leq \underbrace{\max|p(x)|}_{=L} \cdot |y-z|$

$\exists$ e FINITO PER WEIERSTRASS

$\leq L|y-z|$ ✓

QUINDI UNICITÀ e ESISTENZA SU $[a,b]$ ARBITRARIO, CIOÈ ANCHE SU I ✓

ESEMPIO: (PC) $\begin{cases} y' = \frac{2x}{x^2+1}y + xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3}\right)}}$

$I_{max} \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3} > 0 \Rightarrow 4 - (x^2+1)^3 > 0 \Rightarrow x^2 < \underbrace{\sqrt[3]{4} - 1}_{\alpha}$

$\Rightarrow$ $x \in (-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}) = I_{max}$, POSSO APPLICARE SOLO TEO. 4
(MA NON MI DA INFORM. SU I_{max})