EQUAZIONI A COEFF. COSTANTI (e relazioni con i complessi)

Consideriamo l'ordine 2: $y''+a_1 y'+a_0 y = b(x)$ $\quad b \in C(I)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ continue

con soluz: $y(x) = y_*(x) + C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Prendiamo $y''+a_1 y'+a_0 y=0$ e associo a essa un certo polinomio Φ

$\Phi = x^2 + a_1 x + a_0$ (polinomio caratteristico) $\longrightarrow \Delta := a_1^2 - 4a_0$ (discriminante)

con $\Phi = 0$ equazione caratteristica

e studiamo i casi del discriminante

① $\Delta > 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

② $\Delta = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2}$

③ $\Delta < 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

TEOREMA 9: ($\mathcal{L}(y)=0$ e $k=2$)

- La soluzione generale di $y''+a_1 y'+a_0=0$ $\quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ è data da: $y(x) = C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)$, dove:

$-\ \Delta > 0 \Rightarrow w_1 = e^{\lambda_1 x}$	e $w_2 = e^{\lambda_2 x}$	(radici reali di Φ)
$-\ \Delta = 0 \Rightarrow w_1 = e^{\lambda x}$	e $w_2 = x e^{\lambda x}$	(λ è la radice $\in \mathbb{R}$ unica di Φ)
$-\ \Delta < 0 \Rightarrow w_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	e $w_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$	($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ radici $\in \mathbb{C}$ di Φ)

→ per la generalizzazione, guarda lezione 9 (molto più utile)

queste funzioni sono lin. indipendenti su $\mathbb{R}$.

- **ESEMPIO:** oscillatore armonico: $y''+\omega^2 y=0$, $\quad \omega>0$
- eq. di ordine 2 $(k=2)$
- $a_1=0$, $a_0=\omega^2$, struttura $\mathcal{L}(y)=0$
  ↳ da teorema 6 $\Rightarrow y(x) = C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)$ con $\Phi = x^2+\omega^2=0$ $\quad \left(\frac{x}{\omega}\right)^2 = -1 \Rightarrow \frac{x}{\omega} = \pm i \Rightarrow \boxed{x = \pm i\omega} \longrightarrow \begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=\omega\end{matrix}$

da teo 9:

$w_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) = \cos(\omega x)$

$w_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) = \sin(\omega x)$ $\quad \Longrightarrow y(x) = C_1\cos(\omega x) + C_2\operatorname{sen}(\omega x)$

- **RISOLVERE IL PROBLEMA**

$\begin{cases} y''-2y'+y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=\cancel{0}\ 1 \end{cases}$ qui la soluz. sarebbe $y(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots = 1 \end{cases}$

- cambiato a 1 per rendere es. interessante

1. trovare soluz. generale
2. trovare C_1 e C_2 con le C.I.

1. $a_1 = -2$, $a_0 = 1$ $\Rightarrow x^2-2x+1 = (x-1)^2$ $\quad x=+1$ unica rad $(\Delta=0)$
   applico teo 9
   $w_1 = e^{1\cdot x}$, $w_2 = x e^{1\cdot x}$ $\Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$

2. $\begin{cases} C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ y'(x) = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x = 1 \quad C_1 + C_2 + 0 = 1 \Rightarrow C_2 = 1 \end{cases}$

$y(x) = x e^x$ (soluzione unica per teorema 5)

- **TROVARE SOLUZ. GENERALE**

$y(x) = \underbrace{y_*(x)}_{\text{soluz. particolare}} + \underbrace{C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)}_{\mathcal{L}(y)=0}$ $\quad * = \frac{x^2}{2} - 2$ (da esercizio fatto precedentemente)

cerchiamo quindi w_1 e w_2, usando il teorema 9:

$\Phi(x) = x^2+x+2$, $\Delta = -7 < 0$, $\lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\alpha} \pm i\underbrace{\frac{\sqrt{7}}{2}}_{\beta}$

$w_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

$w_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x) = e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

Concludendo, $y(x) = \frac{x^2}{2} - 2 + C_1 e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

GIUSTIFICAZIONE TEOREMA 3

FUNZIONE GENERALE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, CIOÈ $f(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ $\quad \alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

QUINDI CONSIDERO $\underline{f'(x) := \alpha'(x) + i\beta'(x)}$ $\quad \alpha, \beta$ DERIVABILI

RICHIAMO L'IDENTITÀ DI EULERO: $e^{ib} := \cos(b) + i\,\text{sen}(b)$

$e^{a+ib} := e^{a}(\cos(b) + i\,\text{sen}(b))$ $\qquad \Big(\underbrace{e^{a}\cos(b)}_{\mathbb{R}} + i\,\underbrace{e^{a}\,\text{sen}(b)}_{I_m}\Big)$

- PROCEDO AL CALCOLO DI $(e^{\lambda x})'$:

$e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cdot[\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx)]$

$(e^{\lambda x})' = (e^{ax})'(\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx)) + e^{ax}(\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx))'$

$= a e^{ax}\cdot e^{ibx} + e^{ax}(-b\,\text{sen}(bx) + bi\cos(bx))$

$= a e^{\lambda x} + e^{ax}(bi\,\underbrace{(\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx))}_{e^{ibx}})$

$a e^{\lambda x} + ib e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$

DIM TEOREMA 9

CONSIDERO $y'' + a_1 y' + a_0 = 0$, SOLUZIONI DEL TIPO $y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ E SOSTITUIAMO NELL' EQ:

$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0$, CERCHIAMO SOLUZIONI COMPLESSE

$\to \cancel{e^{\lambda x}}\cdot e^{-\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0\cdot\cancel{e^{-\lambda x}} \Rightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \Rightarrow \Phi(\lambda) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda \text{ È RADICE}}$ E ANALIZZO I 3 CASI:

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 SOLUZ. REALI λ_1 E $\lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow w_1 = e^{\lambda_1 x}$ E $w_2 = e^{\lambda_2 x}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ 1 SOLUZ DATA DA $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow w_1 = e^{\lambda x}$

  L'ALTRA SOLUZIONE È NELLA FORMA $y = c(x)e^{\lambda x}$ PER UNA $c(x)$. SAPPIAMO CHE $\lambda = -\frac{a_1}{2}$, CIOÈ $\Phi(x) = x^2 + a_1 x + a_0$

  E ABBIAMO $y'(x) = e^{\lambda x}(\lambda c(x) + c'(x))$ E $y''(x) = e^{\lambda x}(\lambda^2 c(x) + 2\lambda c'(x) + c''(x))$.

SOSTITUISCO $y(x) = c(x)e^{\lambda x}$ NELL' EQ. $y'' + a_1 y' + a_0 = 0$:

$e^{\lambda x}[\underbrace{(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)}_{=0\ (\lambda \text{ è RADICE})} c(x) + \underbrace{(2\lambda + a_1)}_{=0\ (\lambda = -\frac{a_1}{2})} c'(x) + c''(x)] = 0 \Longrightarrow c''(x) = 0 \Longleftrightarrow c'(x) = c_1 \xLongleftrightarrow{\text{INTEGRO}} c(x) = c_1 x + c_2$

CIOÈ: $y(x) = (c_1 x + c_2)e^{\lambda x}$ $\quad$ PER $c_1 = 0 \Rightarrow w_1 = e^{\lambda x}$

PER $c_2 = 0,\ c_1 = 1 \Rightarrow w_2 = x e^{\lambda x}$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ HO COME RADICI $\underbrace{-\frac{a_1}{2}}_{\alpha} \pm i\,\underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{\beta}$ CON $\lambda = \alpha + i\beta$ E $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ RADICI DISTINTE

$\Rightarrow v_1 = e^{\lambda x}$ E $v_2 = e^{\bar{\lambda} x}$ (FUNZIONI COMPLESSE). PER AVERE SOLUZ., SELEZIONO OPPORTUNE COMB. LIN. REALI

$w_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ $\quad$ E $\quad w_2 = -\frac{i}{2}v_1 + \frac{i}{2}v_2$. NOTO CHE $\mathcal{L}(y) = 0$ È LINEARE v_1, v_2 SOLUZIONI $\to w_1, w_2$ SOLUZIONI

$= e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $\qquad = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

$\hookrightarrow$ LA GIUSTIFICO:

$w_1 = \frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)x} = \frac{1}{2}e^{\alpha x}[\underbrace{\cos(\beta x) + i\,\cancel{\text{sen}(\beta x)}}_{e^{ibx}} + \overbrace{\cos(-\beta x) + i\,\cancel{\text{sen}(-\beta x)}}^{\text{IDENTITÀ EULERO}}]$ $= \frac{1}{\cancel{2}}e^{\alpha x}[\cancel{2}\cos(\beta x)] = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

$-\text{sen}(\beta x)$

• SOLUZIONI A EQ. DI K=2 NON OMOGENEE:

$y'' + a_1 y' + a_0 = b(x)$ DOVE $b(x)$ HA UNA FORMA PARTICOLARE

IMPORTANTE PREMESSA LEGATA ALLA LINEARITÀ:

STRUTTURA: $\mathcal{L}(y) = b(x)$. ES: $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ E SE SONO IN GRADO DI TROVARE y_1 E y_2 t.c. $\mathcal{L}(y_1) = b_1(x)$ * E $\mathcal{L}(y_2) = b_2(x)$ *

OPERATORE LINEARE

* SOLUZ. PARTICOLARI. ALLORA $y_* = y_1 + y_2$ È SOLUZ. DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$: $\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2) = b_1(x) + b_2(x) = b(x)$

CERCHIAMO UNA SOLUZ. CON $b(x)$:

$b(x) = P_r(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\text{sen}(\beta x)$ O $b(x) = P_r(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos(\beta x)$ $\quad$ CON P_r POLINOMIO DI GRADO r, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

TEOREMA 10:

SIANO $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ E P_r POLIN. DI GRADO r

TRA LE SOLUZ. DELLE EQUAZIONI DI FORMA $\quad y'' + a_1 y' + a_0 y = P_r(x)e^{\alpha x}\,\text{sen}(\beta x)$ VI È UNA SOLUZIONE

$'' \qquad\qquad '' \quad = \quad '' \qquad\qquad '' \cos(\beta x)$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_*(x) = x^h e^{\alpha x}\{P_r^*(x)\,\text{sen}(\beta x) + Q_r^*(x)\cos(\beta x)\} \\ \text{CON } P_r^* \text{ E } Q_r^* \text{ POLINOMI DI GRADO } r \text{ E } h=0 \text{ SE } \alpha + i\beta \text{ NON È RADICE DI } \Phi \\ \qquad h = 1 \text{ SE } \Delta > 0 \text{ O } \Delta < 0\ (\alpha + i\beta \text{ È RADICE DI } \Phi) \\ \qquad h = 2 \text{ SE } \Delta = 0 \text{ E } \alpha + 1\cdot 0 = \alpha \text{ È RADICE DI } \Phi\ (\in \mathbb{R}) \end{array}}$$

● ESEMPIO $y''+y'+2y=x^2+x-3$, CON $y_*=\frac{x^2}{2}-2$ (DA $y_*=ax^2+bx+c$)

OSSERVIAMO CHE y_* È ANCHE INDICATA DAL TEOREMA 10:

$b(x)=x^2+x-3=P_2(x)\underbrace{e^{0\cdot x}}_{1}\cdot\underbrace{\cos(0\cdot x)}_{1}$ $e^{\alpha x}$ CON $\alpha=0$ $\cos(\beta x)$ CON $\beta=0$ e POSSO APPLICARE LA FORMULA:

$h=?$ → SCRIVO $\alpha+i\beta$. È RADICE DI Φ? $\Phi(x)=x^2+x-2$, $\Phi(0)=-2$ NON È RADICE, $h=0$

$y_*=\underbrace{x^h}_{1}\underbrace{e^{\alpha x}}_{1}\{P_2^*(x)\underbrace{\cos(\beta x)}_{1}+\cancel{Q_2^*(x)}\underbrace{\operatorname{sen}(\beta x)}_{0}\}=P_2^*(x)$ (POLINOMIO DI 2° GRADO CON COEFF. DA DETERMINARE) ✓

● ESEMPIO: TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI: $2y''-3y'+y=3e^{2x}$ (SU $I\in\mathbb{R}$)

$=\underbrace{y''-\frac{3}{2}y'+\frac{1}{2}y}_{\mathcal{L}(y)}=\underbrace{\frac{3}{2}e^{2x}}_{b(x)}$ CON SLZ: $y(x)=\underbrace{y_*(x)}_{\text{TEO. 10}}+\underbrace{C_1w_1(x)+C_2w_2(x)}_{\text{TEO. 3}}$

① DETERMINO w_1 e w_2

$\Phi(\lambda)=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}$ e EQ. CARATT. $\Phi(\lambda)=0$, $\Delta>0$ CON $\lambda=\frac{+\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}}{2}$ ⟨ 1, $\frac{1}{2}$ $\in\mathbb{R}$

TEO 5: $w_1=e^x$ e $w_2=e^{\frac{x}{2}}$ QUINDI $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{x/2}$ È SLZ. GENERALE

② TROVO $y_*=?$ $\boxed{2.1}$ VERIFICO CHE TEO. 10 SIA APPLICABILE $b(x)=\underbrace{\frac{3}{2}}_{P_0(x)}\underbrace{e^{2x}}_{\alpha=2}\cdot\underbrace{1}_{\cos(0\cdot x)}$ e $h=0$ (2 NON È RADICE) 2 DA $\underset{\alpha}{2}+\underset{\beta}{0}i=2$, $\Phi(2)=+4$

$y_*=1\cdot e^{2x}\{P_0^*(x)\cdot1+\cancel{Q_0^*}\underbrace{\operatorname{sen}(\beta x)}_{0}\}\Rightarrow e^{2x}$

RES: $y(x)=e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{x/2}$ $C_1,C_2\in\mathbb{R}$

ALTRO ES

$y''-\frac{3}{2}y'+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}e^{2x}+1\Rightarrow y''-\frac{3}{2}y'+\frac{1}{2}y=1$ CON $y=c$ (COSTANTE) TROVO $c=2$ e $y_*=y_2+y_1=e^{2x}+2$