CENTRO DI UNA CONICA 12.36

• PARABOLA, CONICA e IPERBOLE

DIMOSTRAZIONE

PER DIMOSTRARE LA TESI CONSIDERO IL P DI COORDINATE OMOGENEE $[A_{00}, A_{01}, A_{02}]$ e NE FACCIO LA POLARE.
SE DIMOSTRO CHE È LA RETTA IMPROPRIA HO PROVATO CHE IL PUNTO CONSIDERATO È CENTRO PER DEFINIZIONE (POLO RETTA IMPROPRIA)

$$\pi_c : (x_0\, x_1\, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{00} \\ A_{01} \\ A_{02} \end{pmatrix} = 0$$

$$= (x_0\, x_1\, x_2) \begin{pmatrix} a_{00}A_{00} + a_{01}A_{01} + a_{02}A_{02} \\ a_{01}A_{00} + a_{11}A_{01} + a_{12}A_{02} \\ a_{02}A_{00} + a_{12}A_{01} + a_{22}A_{02} \end{pmatrix} = 0$$

→ DET A (LAPLACE) SVILUPPATO PER 1ª RIGA

→ = 0 (2ª TEOR. DI LAPLACE)

→ = 0 (=)

$$= (x_0\, x_1\, x_2) \begin{pmatrix} \det A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

VISTO CHE LA CONICA NON È DEGENERE, $\det A \neq 0$

QUINDI $\pi_c : x_0 \det(A) = 0 \to \boxed{x_0 = 0}$

C È CENTRO PERCHÉ π_c È LA RETTA IMPROPRIA

ESEMPIO

$C: x^2 - 4xy + 4y^2 - 14x - 2y + 3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -7 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = \cancel{12} - 14 - 14 - 1 - \cancel{12} - 4 \cdot 7^2 < 0$$

C NON DEGENERE ✓

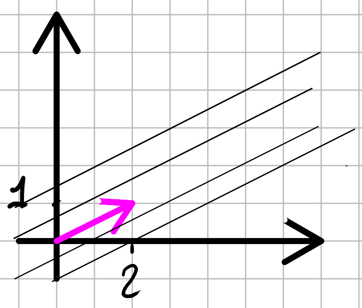
$$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \qquad \boxed{\text{PARABOLA}}$$

PUNTO IMPROPRIO

$$C = [A_{00}, A_{01}, A_{02}] = \left[0, -\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\right] = [0, 30, 15]$$

$= [0, 2, 1]$

COSA SO ORA:



"BUCA" L'ORIZZONTE IN 2, 1 IMPROPRIO

ESEMPIO

$$C: x^2 - y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ +2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A \neq 0 \quad \text{NON DEGENERE}$$

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \underline{\text{IPERBOLE}}$$

PUNTO PROPRIO $\quad C = [2, 2]$

$$C = [A_{00}, A_{01}, A_{02}] = \left[-1, -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ +2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ +2 & 0 \end{vmatrix}\right] = [-1, -2, -2]$$

12.37 ASINTOTO

TANGENTE ALLA CONICA IN UN SUO PUNTO IMPROPRIO
DEVE ESSERE RETTA PROPRIA

- ELLISSE NO → PERCHÉ NO PUNTI IMPROPRI
- PARABOLA NO → HA PT. IMPROPRIO, MA LA TANGENTE È IMPROPRIA
- IPERBOLE $\boxed{\text{SI}}$

ESEMPIO

$$\begin{cases} (x_1)^2 - (x_2)^2 - \cancel{4x_0x_1} + \cancel{4x_0x_2} - \cancel{4(x_0)^2} = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} P_{1\infty} = [0, 1, 1] \\ P_{2\infty} = [0, 1, -1] \end{matrix}$$

QUINDI GLI $\underline{\text{ASINTOTI}}$ DI C SONO $\underbrace{\pi_{P_1,\infty} \text{ e } \pi_{P_2,\infty}}_{\text{POLARI DEI DUE PUNTI}}$

$$\pi_{P_1\infty}: (x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix}-4 & -2 & +2\\ -2 & 1 & 0\\ +2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = x_1 - x_2 = 0 \longrightarrow \boxed{X-Y=0}$$

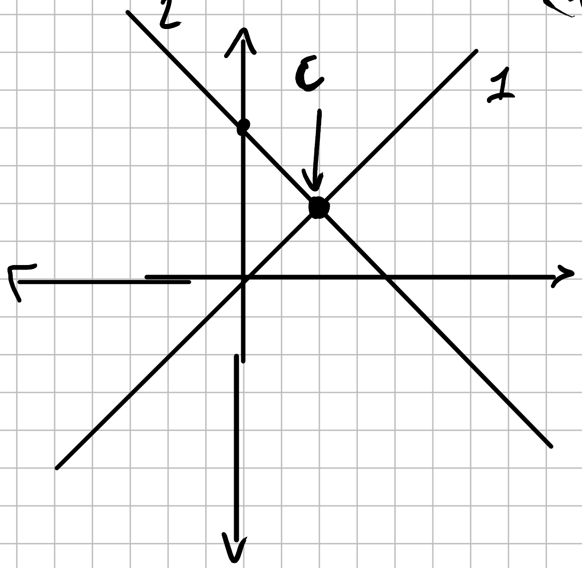
ASINTOTO 1

$$\pi_{P_2\infty}: (x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix}-4 & -2 & +2\\ -2 & 1 & 0\\ +2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = (x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix}-4\\+1\\+1\end{pmatrix}=0$$

$$= -4x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

$$= \boxed{X+Y-4=0}$$

ASINTOTO 2



12.40 ASSE e VERTICE

ASSE = RETTE POLARI DEI PUNTI IMPROPRI (DIAMETRI) ORTOGONALI ALLA DIREZIONI

VERTICI = INTERSEZIONE SUPPORTO PROPRIO e ASSI

12.41

M_{00} = COMPL. ALGEBRICO a_{00}

CERCO AUTOVALORI M_{00} e I RELATIVI AUTOSPAZI

CERCO POLARE DEL PUNTO IMPROPRIO DELL'AUTOSPAZIO

ESEMPIO

$$\det(tI_2 - M_{00}) = 0$$

$$\begin{vmatrix}t-1 & 0\\ 0 & t+1\end{vmatrix} = 0 \quad (t-1)(t+1)=0 \qquad \lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = -1$$

AUTOSPAZIO $U_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\m\end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases}0=0\\ 2m=0\end{cases} \Rightarrow U_1 = \mathcal{L}((1,0))$

$Q_{1\infty} = [0,1,0]$ PUNTO IMPROPRIO

$\Pi_{Q_{1\infty}}: \rightarrow \boxed{\text{ASSE DI } C}$

$$L_{>}: (x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Q_{1\infty}} \Rightarrow (x_0 x_1 x_2)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2x_0 + x_1 = 0$$

$$\boxed{x - 2 = 0}$$

1° Asse

AUTOSPAZIO $U_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} -2l = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow U_2 = L((0,1))$

$Q_{2\infty} = [0, 0, 1]$

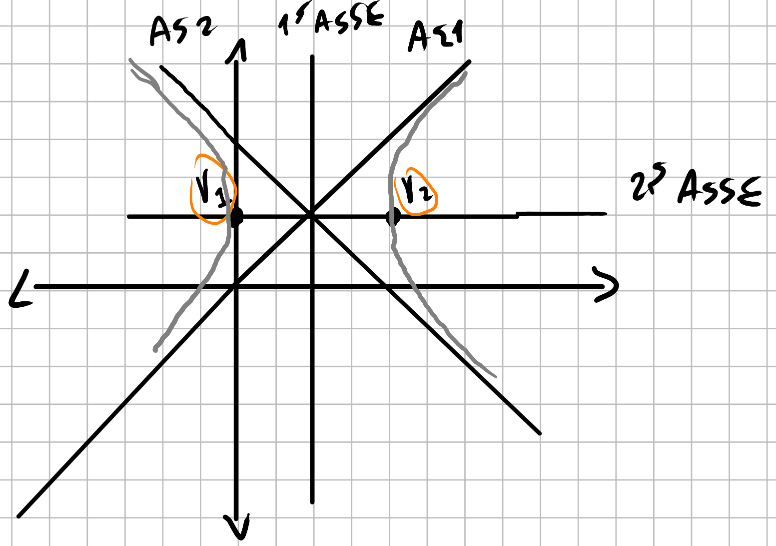
$$\Pi_{Q_2\infty}: (x_0 x_1 x_2)\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_0 x_1 x_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2x_0 - x_2 = 0$$

$$\rightarrow -y + 2 = 0$$

$$\boxed{y - 2 = 0}$$

2° ASSE

AGGIORNO GRAFICO



CALCOLO I VERTICI

$$1 \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - y^2 - 4x + 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ \cancel{4} - y^2 - 8 + 4y - \cancel{4} = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$y^2 - 4y + 8 = 0 \ \boxed{\text{NO}}$$

$$2 \begin{cases} y = 2 \\ x^2 + 2^2 - 4x + 4 \cdot 2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x^2 - \cancel{4} - 4x + \cancel{8} - \cancel{4} \end{cases}$$

$$x(x-4) = 0$$

$V_1 = (0, 2)$ e $V_2 = (4, 2)$

ESEMPIO PARABOLA:

$C: x^2 - 4xy + 4y^2 - 14x - 2y + 3$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -7 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad C = [0, 2, 1]$ (ESERCIZIO PAG. SOPRA)

RICERCA ASSI:

AUTOVAL. E AUTOSPAZI

$\begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 2 & t-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + \cancel{4} - \cancel{4} = 0 \quad t(t-5) = 0 \nearrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{matrix}$

U_2 ($V_1 = 0$ NO!) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4l + 2m = 0 \\ \cancel{2l + m = 0} \end{cases}$

$= \quad 2l = -m$

$m = -2l$

$U_2 = \mathcal{L}(\underbrace{(1, -2)})$

$Q_\infty = [0, 1, -2]$ POLO DELL' UNICO ASSE

$\pi_{Q_\infty} = (x_0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -7 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow (x_0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$= -5x_0 + 5x_1 - 10x_2$

$= +5x - 10y - 5 = 0$

$\boxed{x - 2y - 1 = 0}$

ASSE

VERTICI:

$\begin{cases} x = 2y + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \\ (2y+1)^2 - 4(2y+1)y + 4y^2 - 14(2y+1) - 2y + 3 = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \Big\{ \cancel{4y^2} + \cancel{4y} + 1 - \cancel{8y^2} - \cancel{4y} + \cancel{4y^2} - 28y - 14 - 2y + 3 = 0$

$-30y - 10 = 0 \qquad 3y + 1 = 0 \qquad y = -\frac{1}{3} \rightarrow V\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

PERDIAMO UNA SOLUZ. IMPROPRIA CHE È IL CENTRO