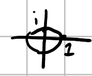
CALCOLO DIFFERENZIALE:

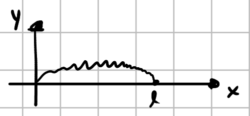
ALCUNE MOTIVAZIONI:

- STUDIO DI FUNZIONI $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ ES: $N=1, M=2$ $t \to e^{it}$, NOTANDO $|e^{it}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ (CIRCONF. UNITARIA NEL PIANO COMPLESSO)



È UNA CURVA, DESCRIVE LA TRAIETTORIA CIRCOLARE DI UN PUNTO AL VARIARE DEL TEMPO

e IN GENERALE: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ SONO CURVE

- 

$\to$ DESCRIZIONE DI UNA CORDA VIBRANTE: $y = y(x,t)$ SOLUZIONE DI:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$ CON $\frac{\partial^2}{\partial^2 x^2}$ DERIVATA SECONDA RISPETTO A x

---

NORMA e PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}^N$

- $x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$
- DATI x e $y \in \mathbb{R}^N$: (VETTORI)

SOMMA $x+y = (x_1+y_1, \dots, x_N+y_N)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^N$

PRODOT. PER SCALARE $a \cdot x = (ax_1, \dots, ax_N)$ $x \in \mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}$

PRODOT. SCALARE: $\langle x,y\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = x_1y_1 + \dots + x_Ny_N}$ $\to$ NUMERO REALE

PROPOSIZIONI (PROPRIETÀ PRODOTTO SCALARE)

1 • $\langle ax+by, z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^N$ $\to$ LINEARITÀ A SINISTRA

2 • $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^N$ $\to$ SIMMETRIA

3 • $\langle x,x\rangle \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$ e $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x=0$

DIM 1: $\langle ax+by, z\rangle = \sum_{j=1}^{N}(ax_j+by_j)z_j = \sum_{j=1}^{N} ax_jz_j + \sum_{j=1}^{N} by_jz_j = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$

e VEDIAMO CHE ① e ② $\to$ IMPLICANO LA LINEARITÀ A DESTRA (BASTA SPOSTARE PER SIMMETRIA)

NORMA: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

① $\|x\| \geq 0$, e $\|x\| = 0 \Rightarrow x=0$

② $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall a \in \mathbb{R}$

③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^N$ $\to$ DIMOSTRABILE DALLA DISUG. DI CAUCHY-SCHWARZ ($|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$)

PER LE DIM: GUARDA APPUNTI GEO

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^N$:

DATO $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, DEFINIAMO $r > 0$

$B(\bar{x}, r) := \{y \in \mathbb{R}^N : \|\bar{x} - y\| < r\}$ (BOLLA CENTRATA IN $\bar{x}$ e DI RAGGIO r)

ES:

$\hookrightarrow B(0,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < r^2\}$

$\hookrightarrow B(0,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < r^2\}$

NOZIONE DI INTORNO:

SIA $\bar{x} \in U \in \mathbb{R}^N$. DICIAMO CHE U È INTORNO DI $\bar{x}$ SE ESISTE $r>0$ t.c. $B(\bar{x}, r) \subseteq U$. (ANCHE $B(\bar{x}, r)$ È INTORNO DI r)

ES: $N=2$ $\to$ $Q = (-r,r) \times (-r,r)$ È UN INTORNO DELL'ORIGINE $(0,0)$

PUNTI INTERNI, ESTERNI e DI FRONTIERA

$A \subseteq \mathbb{R}^N$, $A \neq \emptyset$

- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO INTERNO DI A ($x \in \mathring{A}$, $\mathring{A}$ = INSIEME PUNTI INTERNI DI A)

  SE $\exists r > 0$ t.c. $B(x,r) \subseteq A$

- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO ESTERNO DI A ($x \in A^c$, COMPLEMENTARE DI A)

  SE $\exists r > 0$ t.c. $B(x,r) \cap A = \emptyset$

- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO DI FRONTIERA DI A ($x \in \partial A$ ($F_r(A)$))

$\forall r>0$ si ha che $\begin{cases} B(x,r)\cap A \neq \emptyset \\ B(x,r)\cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$ ES: $A:=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\leq R\}$, $R>0$ FISSATO

AFFERMAZIONE: $\mathring{A}=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|<R\}$

DIMOSTRIAMO CHE $\forall x\in\mathbb{R}^n$ t.c. $\|x\|<R$ è un PUNTO INTERNO : SIA x t.c. $\|x\|<R$

DEFINIAMO $r:=R-\|x\|$ e DIMOST. CHE $B(x,r)\subseteq\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|<R\}$

PRENDO UN GENERICO $y\in B(x,r)\to\|y\|=\|y-x+x\|\overset{\text{DISUG. TRIANG.}}{\leq}\underbrace{\|y-x\|}_{<r}+\|x\|\leq r+\|x\|=R-\cancel{\|x\|}+\cancel{\|x\|}\Rightarrow\|y\|\leq R$

PUNTI DI ACCUMULAZIONE, CHIUSURA e ISOLATI

- x è PUNTO ACCUMULAZIONE DI A SE $\forall r>0$ SI HA CHE $B(x,r)\setminus\{x\}\cap A\neq\emptyset$ e SCRIVIAMO $x\in Acc(A)$ (INSIEME DEI PUNTI DI ACC. DI A)(x PUò NON APPARTENERE AD A)

- x è UN PUNTO DELLA CHIUSURA DI A SE ($x\in\bar{A}$), $\forall r>0$ SI HA CHE $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$ ($A\subseteq\bar{A}$ (CHIUSURA DI A))

ES: $\overline{B(x,r)}=\{y\in\mathbb{R}^n : \|x-y\|\leq r\}$

- $x\in A$ è PUNTO ISOLATO SE $\exists r>0$ t.c. $B(x,r)\cap A=\{x\}$ (SOLO x). NOTA: $\bar{A}=\mathring{A}\cup\partial A$

ES: SIA $A=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\leq R\}$, VERIFICHIAMO CHE $\overset{Fr(A)}{\partial A}=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|=R\}$, CIOè $=\{x\in\mathbb{R}^n : x_1^2+x_2^2+\dots x_n^2\}$

POSSIAMO VERIFICARE, SE $\|x\|=R$

$\forall r>0\begin{cases} B(x,r)\cap A\neq 0 & ① \\ B(x,r)\cap A^c\neq 0 & ② \end{cases}$. PROVIAMO LA 2: RICORDO $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$ $\forall a\in\mathbb{R}$

SELEZIONO $a=\dfrac{R+\frac{r}{2}}{R}$ ($r>0$ ARBITRARIO), INOLTRE $y=ax$ CON $\|x\|=R$

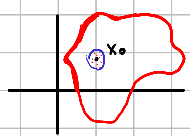
DIMOSTRO $y\in B(x,r)\cap A^c$: $\|y\|=\|ax\|=|a|\cdot\|x\|=\dfrac{R+\frac{r}{2}}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R}=R+\frac{r}{2}>r\Rightarrow\underline{y\in A^c}$

INOLTRE: $\|x-y\|<r\to\|x-y\|=\|x-ax\|=\|(1-a)\cdot x\|=|1-a|\cdot\|x\|=\left|1-\dfrac{R+\frac{r}{2}}{R}\right|\cdot R=\left|\dfrac{\cancel{R}-\cancel{R}+\frac{r}{2}}{\cancel{R}}\right|\cancel{R}\ \frac{r}{2}<r$. $y\in B(x,r)$

NOTA: x ARBITRARIO t.c. $\|x\|=R$ e r ARBITRARIO

LIMITE, CONTINUITà

$A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^k$, $n,k\in\mathbb{N}$, $x_0\in Acc(A)$ e $\ell\in\mathbb{R}^k$



POSSO AVVICINARMI ARBITRARIAMENTE A x_0, CON BOLLE CONTENENTI PUNTI $\in A$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell \text{ SE } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|f(x)-\ell\|<\varepsilon\ \forall x\in A-\{x_0\} \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{AVENDO } x_0\in A,\ f \text{ è CONTINUA in } x_0 \text{ SE:}\\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon\quad\forall x \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta\end{array}}$$

PROPOSIZIONE: SIA $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^k$ ($k>1$) CIOè $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_k(x)\end{pmatrix}$

1) $x_0\in Acc(A)$ SIA $\ell=\begin{pmatrix}\ell_1\\ \vdots\\ \ell_k\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^k$
- $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell \iff \begin{cases}\lim_{x\to x_0}f_1(x)=\ell_1\\ \vdots\\ \lim_{x\to x_0}f_k(x)=\ell_k\end{cases}$

2) $x_0\in A$, f è CONTINUA IN $x_0\iff$
- $\begin{cases}f_1(x) \text{ è CONTINUA IN } x_0\\ \vdots\\ f_k(x) \text{ è CONTINUA IN } x_0\end{cases}$

DIM 1 ASSUMO $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell\Rightarrow\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|f(x)-\ell\|<\varepsilon\ \forall x\in A-\{x_0\} \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta}$ DEFINIZIONE

CIOè $|f_i(x)-\ell_i|\leq\sqrt{(f_1(x)-\ell_1)^2+\dots+(f_k(x)-\ell_k)^2}<\varepsilon$ $\forall i=1,\dots,k$ CIOè: $\lim_{x\to x_0}f_i(x)=\ell_i$

e D'ALTRA PARTE $\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_i>0 \text{ t.c. } |f_i(x)-\ell_i|<\varepsilon\ \forall x \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta_i \text{ CON } x\in A-\{x_0\}}$

DEFINISCO $\delta:=\min\{\delta_1,\dots,\delta_k\}$

$\|f(x)-\ell\| \; \sqrt{(f_1(x)-\ell_1)^2+\ldots+(f_k(x)-\ell_k)^2} < \sqrt{\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^2} = \sqrt{k}\cdot\varepsilon \quad \forall x \in A-\{x_0\}$ t.c. $\|x-x_0\|<\delta$ □

DIM 2 È UGUALE

ES: FUNZIONE "PROIEZIONE DI X" È CONTINUA: $x \in \mathbb{R}^N$ $P_J(x) := x_J$, $J = 1 \ldots N$
e CON $x_0 \in \mathbb{R}^N$

$|P_J(x) - P_J(x_0)| = |x_J - (x_0)_J| \le \sqrt{(x_1-(x_0)_1)^2+\ldots+(x_N-(x_0)_N)^2} = \|x-x_0\|$, FISSATO $\varepsilon>0$ POSSO PRENDERE $\delta=\varepsilon$
IN MODO TALE DA FAR VALERE (CON $\|x-x_0\|<\delta$) $|P_J(x)-P_J(x_0)|<\varepsilon$.

PROPRIETÀ DEI LIMITI

PROPOSIZIONE: $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in Acc(A)$.
HP: $\ell, m \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

ALLORA
1) $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \ell + m$
2) $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \ell \cdot m$
3) $m \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$

PROPRIETÀ CONTINUITÀ (f e g CONTINUE IN x_0)
i) $f+g$
ii) $f\cdot g$
iii) $g(x)\neq 0 \to \frac{f}{g}$

$\Big\}$ CONTINUE

PROPOSIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq \mathbb{R}^K$, $N, K, M \in \mathbb{N}$

SIA: $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}^M$ e SIA $x_0 \in A$ e PONIAMO $y_0 := f(x_0)$. SE f È CONTINUA IN x_0 e $g(y)$ IN y_0
ALLORA: $g \circ f$ È CONTINUA IN x_0

PROPOSIZ: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in Acc(A)$, SIA $f: A \to \mathbb{R}^K$
$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = m \end{cases}$ $\boxed{\ell = m}$ UNICITÀ LIMITE

TEOREMA DEL CONFRONTO:
HP: • $A \subseteq \mathbb{R}^N$, e $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ CON $f(x) \le g(x) \le h(x)$
• $x_0 \in Acc(A)$, $\ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$

$\boxed{\text{ALLORA } \exists \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell}$

DATO $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq A$, $f: A \to \mathbb{R}^K$
DEFINIAMO $f|_B : B \to \mathbb{R}^K$ COME
$f|_B(x) = f(x) \quad \forall x \in B$ "RESTRIZIONE DI f SU B"

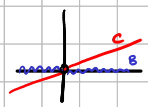
PROPOSIZIONE:
HP: $x_0 \in Acc(A)$, $\ell \in \mathbb{R}^K$. SUPPONIAMO CHE $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. SIA $x_0 \in Acc(B)$
TH: $\lim_{x\to x_0} f|_B(x) = \ell$

ESERCIZI

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$; 2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; 3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

① DEFINITA SU $\mathbb{R}^2 - \{\underline{0}\}$, SIA $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0,\ y = 0\}$

NOTO:
- $(0,0) \in Acc(B)$
- $f|_B(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) = 0$
- SE $\exists \lim_{x,y\to 0,0} f(x,y)$ DEVE ESSERE 0



CONSIDERO:
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ y \neq 0$
- $f|_C(x,y) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$
- NOTO: $(0,0) \in Acc(C)$, $\lim_{x,y\to 0,0} f(x,y) = \frac{1}{2}$

E $\lim_{x,y\to 0,0} f(x,y)\ \nexists$ PER LA DIM. PRECEDENTE

② $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0, y = 0\}$, $f|_B(x,y) = 0$ (CIOÈ SE $\exists \lim_{x,y\to 0,0} f(x) = 0$)

CERCO ALTRE DIREZIONI

$C_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx,\ x \neq 0\}$, $f|_{C_m}(x,y) = \frac{m^2x^4}{x^2+m^2x^2} = \frac{m^2}{1+m^2}x^2 \to 0$, $(x,y) \to (0,0)$

VISTO CHE IL RISULTATO È 0, POTREBBE ESSERCI LIMITE

NOTO: $0 \leq f(x,y) = \overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{\leq 1} \cdot y^2 \leq y^2 \leq y^2+x^2 = \|(x,y)\|^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

$\Rightarrow$ DAL TEO. CONFRONTO: $\lim_{x,y\to 0,0} f(x,y) = 0$ ✓

③ $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. HO $B = \{y = 0,\ x \neq 0\}$ $f|_B(x,y) = 0$. SE IL LIMITE $\exists$, È $= 0$.

PER AIUTARCI, DEFINIAMO $C_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = mx,\ x \neq 0\}$. $f|_{C_m}(x,y) = \frac{x^3m^2}{x^2+m^4x^4} = \frac{xm^2}{1+m^4x^2} \to 0$ (PER ORA NO CONTRADDIZIONE)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 \neq 0\}$ ALLORA $f|_D(x,y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$ (CONTRADDIZIONE) $\to \lim_{(x,y)\to 0,0} f|_D(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0 \ (\lim_{\cdots \to 0,0} f|_B(x,y))$

NON ESISTE