- **TEOREMA 8:**

SIA PER SEMPLICITÀ $k=2$ (ORDINE EQ. DIFF.) e $a_1(x)$ e $a_0(x) \in C(I)$ $I \subseteq \mathbb{R}$, $w_1$ e $w_2$ SIANO SOLUZIONI DI $\underbrace{y'' + a_1(x) y' + a_0 y}_{\mathcal{L}(y)} = 0$

ALLORA $w_1$ e $w_2$ SONO LINEARM. INDIPENDENTI SU $I$ SE E SOLO SE:

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} w_1(x) & w_2(x) \\ w_1'(x) & w_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I}$$

MATRICE WRONSKIANA

- ESEMPIO: VERIFICARE: DATE $w_1(x) = x$ e $w_2(x) = 2|x|$
  - DIPENDENZA LIN. SU $I = (-\infty, 0)$
  - INDIP. LIN SU $I = (-\infty, +\infty)$

guarda file esercizi 03

---

- TROVARE SOLUZIONE GENERALE (TUTTE LE SOLUZIONI) DI:

$9x^2 y'' + 12 x y' - 2y = 0$ SU $I = (0, +\infty)$

↳ L'EQ. NON È IN FORMA NORMALE ($\mathcal{L}(y) = 0$) MA POSSIAMO RICONDURCI A ESSA DIVIDENDO PER $9x^2$

$\overset{k=2}{\Rightarrow}$ SOLUZIONE GENERALE $y(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$ DOVE $w_1, w_2$ LIN. INDIP. SU $(0, +\infty)$

– CONSIDERO DUE EQ. DEL TIPO: $y(x) = x^\alpha$ SU $(0, +\infty)$ e CONSIDERO $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

SOSTITUENDO:

$9x^2 \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 12x\,\alpha x^{\alpha-1} - 2x^\alpha = 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow [9\alpha(\alpha-1) + 12\alpha - 2]\cancel{x^\alpha} = 0 \Rightarrow 9\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$ e $\alpha = -\frac{2}{3}$

CIOÈ $w_1 = x^{\frac{1}{3}}$ e $w_2 = x^{-\frac{2}{3}}$ SONO SOLUZIONI SU $(0, +\infty)$

VERIFICO LA LIN. INDIPENDENZA

$\det \begin{pmatrix} w_1(x) & w_2(x) \\ w_1'(x) & w_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x^{\frac{1}{3}} & x^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix} = -x^{-\frac{4}{3}} \neq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

$\overset{\text{TEO. 8}}{\Rightarrow}$ $w_1, w_2$ LIN. INDIP. e $\overset{\text{TEO. 6}}{\Rightarrow}$ LA SOL. GENERALE È: $y(x) = c_1 x^{\frac{1}{3}} + c_2 x^{-\frac{2}{3}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

---

- TROVARE UNICA SOLUZIONE DI:

$\begin{cases} 9x^2y'' + 12xy' - 2y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ → PARTO DALLA SOLUZ. GENERALE $y(x) = c_1 x^{\frac{1}{3}} + c_2 x^{-\frac{2}{3}}$ $\overset{\text{UTILIZZO CONDIZ. INIZIALE}}{\Longrightarrow}$ $\begin{cases} 1 = y(1) = c_1 w_1(1) + c_2 w_2(1) \\ 0 = y'(1) = c_1 w_1'(1) + c_2 w_2'(1) \end{cases}$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} w_1(1) & w_2(1) \\ w_1'(1) & w_2'(1) \end{pmatrix}}_{= W}^{\text{DET} \neq 0} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$