CALCOLO DIFFERENZIALE

NORMA e PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}^N$

- $x := (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $x, y \in \mathbb{R}^N$ (VETTORI N-DIMENSIONALI)
  - SOMMA : $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N)$
  - PROD. PER SCALARE : $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  - PROD. SCALARE : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$ (IL RISULTATO $\in \mathbb{R}$)

PROPOSIZIONI RELATIVE AL PRODOTTO SCALARE:

- LINEARITÀ (A SX) : $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^N$
- SIMMETRIA : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$
- POSITIVITÀ : $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

DIMOSTRAZIONE LINEARITÀ:

$\langle ax + by, z \rangle = \sum_{j=1}^{N} (a x_j + b y_j) z_j = \sum_{j=1}^{N} a x_j z_j + \sum_{j=1}^{N} b y_j z_j = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$ $\square$ (STESSA DIM PER LINEARITÀ A DX)

NORMA DI VETTORE:

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$x, y \in \mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ:
1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (COME PROD. SCALARE)
2. $\|a x\| = |a| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\rightarrow$ DIM CON LA DISUG. DI CAUCHY-SCHWARZ ($|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$)

PER DIM DELLE PROPRIETÀ GUARDARE GEO

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^N$

DATO $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, DEFINIAMO $r > 0$

$B(\bar{x}, r) := \{ y \in \mathbb{R}^N : \|\bar{x} - y\| < r \}$ (BOLLA CENTRATA IN $\bar{x}$ e DI RAGGIO r)

NOZIONE DI INTORNO:

SIA $\bar{x} \in U \in \mathbb{R}^N$. DICIAMO CHE U È INTORNO DI $\bar{x}$ SE ESISTE $r > 0$ t.c. $B(\bar{x}, r) \subseteq U$. (ANCHE $B(\bar{x}, r)$ È INTORNO DI r)

PUNTI INTERNI, ESTERNI e DI FRONTIERA

$A \subseteq \mathbb{R}^N$, $A \neq \emptyset$

- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO INTERNO DI A ($x \in \mathring{A}$, $\mathring{A}$ = INSIEME PUNTI INTERNI DI A) SE $\exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subseteq A$
- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO ESTERNO DI A ($x \in A^c$, COMPLEMENTARE DI A) SE $\exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \cap A = \emptyset$
- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO DI FRONTIERA DI A ($x \in \partial A$ ($F_r(A)$))

$\forall r > 0$ SI HA CHE $\begin{cases} B(x, r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

AFFERMAZIONE: $\mathring{A} = \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R \}$

DIMOSTRIAMO CHE $\forall x \in \mathbb{R}^N$ t.c. $\|x\| < R$ È UN PUNTO INTERNO : SIA x t.c. $\|x\| < R$

DEFINIAMO $r := R - \|x\|$ e DIMOST. CHE $B(x, r) \subseteq \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R \}$

PRENDO UN GENERICO $y \in B(x, r) \rightarrow \|y\| = \|y - x + x\| \overset{\text{DISUG. TRIANG.}}{\leq} \underbrace{\|y - x\|}_{< r} + \|x\| \leq r + \|x\| = R - \cancel{\|x\|} + \cancel{\|x\|} \Rightarrow \|y\| < R$

PUNTI DI ACCUMULAZIONE, CHIUSURA e ISOLATI

- x è punto ACCUMULAZIONE di A se $\forall r>0$ si ha che $B(x,r)\setminus\{x\}\cap A\neq\emptyset$
  e scriviamo $x\in Acc(A)$ (insieme dei punti di acc. di A)(x può non appartenere ad A)

- x è un punto della CHIUSURA di A se $(x\in\bar{A})$, $\forall r>0$ si ha che $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$ ($A\subseteq\bar{A}$ (chiusura di A))

- $x\in A$ è punto ISOLATO se $\exists r>0$ t.c. $B(x,r)\cap A=\{x\}$ (solo x). NOTA: $\bar{A}=\mathring{A}\cup\partial A$

POSSIAMO VERIFICARE, SE $\|x\|=R$

$$\forall r>0 \begin{cases} B(x,r)\cap A\neq 0 & (1)\\ B(x,r)\cap A^c\neq 0 & (2)\end{cases}$$

PROVIAMO LA 2: RICORDO $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$ $\forall a\in\mathbb{R}$

SELEZIONO $a=\dfrac{R+\frac{r}{2}}{R}$ ($r>0$ ARBITRARIO), INOLTRE $y=ax$ con $\|x\|=R$

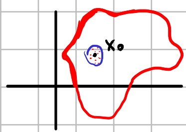
DIMOSTRO $y\in B(x,r)\cap A^c$: $\|y\|=\|ax\|=|a|\cdot\|x\|=\dfrac{R+\frac{r}{2}}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R}=R+\frac{r}{2}>r \Rightarrow y\in A^c$

INOLTRE: $\|x-y\|<r \to \|x-y\|=\|x-ax\|=\|(1-a)\cdot x\|=|1-a|\cdot\|x\|=\left|1-\dfrac{R+\frac{r}{2}}{R}\right|\cdot R=\left|\dfrac{\cancel{R}-\cancel{R}-\frac{r}{2}}{\cancel{R}}\right|\cdot\cancel{R}\ \frac{r}{2}<r$. $y\in B(x,r)$

NOTA: x ARBITRARIO t.c. $\|x\|=R$ e r ARBITRARIO

LIMITE e CONTINUITÀ

$A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^k$, $n,k\in\mathbb{N}$, $x_0\in Acc(A)$, $l\in\mathbb{R}^k$



POSSO AVVICINARMI ARBITRARIAMENTE A x_0, CON BOLLE CONTENENTI PUNTI $\in A$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=l \text{ se } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|f(x)-l\|<\varepsilon\ \ \forall x\in A-\{x_0\} \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{AVENDO } x_0\in A,\ f \text{ è continua in } x_0 \text{ se:}\\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon\ \ \forall x \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta\end{array}}$$

PROPOSIZIONE: SIA $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^k$ $(k>1)$ cioè $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_k(x)\end{pmatrix}$

1) $x_0\in Acc(A)$ sia $l=\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_k\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^k$

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=l \iff \begin{cases}\lim_{x\to x_0} f_1(x)=l_1\\ \vdots\\ \lim_{x\to x_0} f_k(x)=l_k\end{cases}$

2) $x_0\in A$, f è continua in $x_0 \iff$

- $\begin{cases} f_1(x) \text{ è continua in } x_0\\ \vdots\\ f_k(x) \text{ è continua in } x_0\end{cases}$

DIM 1 ASSUMO $\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Rightarrow$ $\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|f(x)-l\|<\varepsilon\ \ \forall x\in A-\{x_0\} \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta}$ DEFINIZIONE

cioè $|f_i(x)-l_i|\leq\sqrt{(f_1(x)-l_1)^2+\dots+(f_k(x)-l_k)^2}<\varepsilon$ $\forall i=1,\dots,k$ cioè: $\lim_{x\to x_0} f_i(x)=l_i$

e D'ALTRA PARTE $\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_i>0 \text{ t.c. } |f_i(x)-l_i|<\varepsilon\ \forall x \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta_i \text{ con } x\in A-\{x_0\}}$

DEFINISCO $\delta:=\min\{\delta_1,\dots,\delta_k\}$

$\|f(x)-l\|$ $\sqrt{(f_1(x)-l_1)^2+\dots+(f_k(x)-l_k)^2}<\sqrt{\varepsilon^2+\dots+\varepsilon^2}=\sqrt{k}\cdot\varepsilon$ $\forall x\in A-\{x_0\}$ t.c. $\|x-x_0\|<\delta$ □

DIM 2 è UGUALE

PROPRIETÀ DEI LIMITI

PROPOSIZIONE: $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in Acc(A)$.

HP: $\ell, m \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

ALLORA

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + m$

2) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell \cdot m$

3) $m \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$

PROPRIETÀ CONTINUITÀ (f e g continue in x_0)

i) $f + g$

ii) $f \cdot g$

iii) $g(x) \neq 0 \to \frac{f}{g}$

} CONTINUE

PROPOSIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq \mathbb{R}^K$, $N, K, m \in \mathbb{N}$

SIA: $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}^M$ e SIA $x_0 \in A$ e PONIAMO $y_0 := f(x_0)$. SE f è CONTINUA IN x_0 e $g(x)$ IN y_0

ALLORA: $g \circ f$ è CONTINUA IN x_0

PROPOSIZ: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in Acc(A)$, SIA $f: A \to \mathbb{R}^K$

$\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = m \end{cases}$ $\boxed{\ell = m}$ UNICITÀ LIMITE

TEOREMA DEL CONFRONTO:

HP: • $A \subseteq \mathbb{R}^N$, e $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ CON $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

• $x_0 \in Acc(A)$, $\ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

$\boxed{\text{ALLORA } \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell}$

Restrizione di f su B

DATO $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq A$, $f: A \to \mathbb{R}^K$

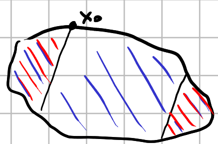
DEFINIAMO $f|_B : B \to \mathbb{R}^K$ COME

$f|_B(x) = f(x) \quad \forall x \in B$ "RESTRIZIONE DI f SU B"

PROPOSIZIONE:

HP: $x_0 \in Acc(A)$, $\ell \in \mathbb{R}^K$. SUPPONIAMO CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. SIA $x_0 \in Acc(B)$

TH: $\lim_{x \to x_0} f|_B(x) = \ell$



A B

CONTINUITÀ DI FUNZIONI:

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$, $p \in A$, DICIAMO CHE f è CONTINUA IN p SE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\|f(x) - f(p)\| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ t.c. $\|x - p\| < \delta$

TEOREMA:

$\boxed{\begin{array}{l} \text{HP: } * \ p \in Acc(A), \ f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K \\ \text{TH: } f \text{ è CONTINUA IN } p \iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p) \end{array}}$

INSIEME APERTO e INSIEME CHIUSO

$A \in \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- x_0 È UN PUNTO **INTERNO** DI A SE $\exists r>0$, t.c. $B(x_0,r) \subseteq A$
- x_0 È UN PUNTO DI FRONTIERA DI A SE $\forall r>0$: $\begin{cases} B(x_0,r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x_0,r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$
- x_0 È UN PUNTO DELLA CHIUSURA DI A SE $\forall r>0$ SI HA $B(x_0,r) \cap A \neq 0$

$\rightarrow$ SEGUE CHE $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$

e SI VERIFICA:

$\bar{A} = \mathring{A} \cup F_r(A)$

$\bar{A} = A \cup A_{cc}(A)$

DEFINIZIONE:
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ È APERTO SE $A = \mathring{A}$
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ È CHIUSO SE $A = \bar{A}$

PROPOSIZIONE: A È APERTO $\Longleftrightarrow$ A^c È CHIUSO

A È CHIUSO $\Longleftrightarrow$ A^c È APERTO

PROPOSIZIONE: SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA e $c \in \mathbb{R}$

ALLORA: $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\}$ È APERTO

$B = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ È CHIUSO

DIM: SIA $x \in A$, APPLICO LA DEF. DI CONTINUITÀ: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ t.c. $\forall y$ t.c. $\|y-x\|<\delta$ VALE $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

ed EQUIVALENTEMENTE $f(x)-\varepsilon < f(y) < f(x)+\varepsilon$. SCELGO $\varepsilon < c - f(x)$, QUINDI $\forall y$ t.c. $\|y-x\| < \delta$ VALE

$f(y) < f(x)+\varepsilon \leq f(x)+c-f(x) = c$ $\rightarrow$ $f(y) < c$ $\forall y$ t.c. $\|x-y\|<\delta$ CIOÈ $\forall y \in B(x,\delta)$ CIOÈ $B(x,\delta) \subseteq A$. HO TROVATO UNA BOLLA TUTTA CONTENUTA IN A

VISTO CHE x È ARBITRARIO e INTERNO, $\mathring{A} = A$.

DIM B È UGUALE.

CASI NOTEVOLI

$-\infty < a \leq L < +\infty$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$A = \{x \in \mathbb{R}^n : a < f(x) < b\}$ APERTO

$B = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq f(x) \leq b\}$ CHIUSO

$\rightarrow$ IN GENERALE C, D APERTI $\rightarrow$ $C \cup D$ È APERTO, $C \cap D$ È CHIUSO

C, D CHIUSO $\rightarrow$ $C \cup D$ È CHIUSO, $C \cap D$ È CHIUSO

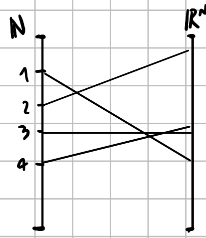
- **INSIEMI LIMITATI:**

SIA $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. DICIAMO A LIMITATO SE $A \subseteq B(0,R)$, $R>0$ ABBASTANZA GRANDE.

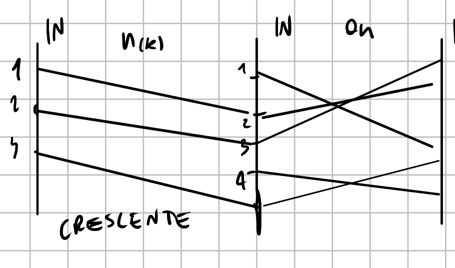
SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}^N$

DEF: $a_n : n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}^n$ ES: $a_n = (2^{-n}, \frac{1}{n}, 1)$

DEF: DATA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (INSIEME DEI PUNTI DELLA SUCC) $\subset \mathbb{R}^n$ CONVERGE A $l \in \mathbb{R}^n$ SE $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0>0$ t.c. $\forall n>n_0$ $\|a_n - l\| < \varepsilon$



SIA $n(k)$ UNA FUNZIONE CRESCENTE da $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ CIOÈ $n(k+1) > n(k)$ ALLORA $a_{n_k} := a_{n(k)}$



UNA SOTTOSUCCESSIONE È UNA SUCCESSIONE COSTRUITA DALL' ORIGINALE CON DEI FILTRI

COMPATTEZZA:

DEF: SIA $K \subset \mathbb{R}^n$. K È COMPATTO SE DA OGNI FAMIGLIA DI APERTI $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ t.c. $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ ("COPERTURA APERTA DI K") È POSSIBILE ESTRARRE UNA "SOTTOCOPERTURA FINITA" $O_1, O_2 \dots O_N \subset \{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ t.c. $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} O_i$

TEOREMA DI HEINE-BORL

HP: $K \subset \mathbb{R}^n$

TH K È COMPATTO $\iff$ CHIUSO E LIMITATO

COROLLARIO I: $K \subset \mathbb{R}^n$ COMPATTO. ALLORA OGNI SOTTOINSIEME K_∞ INFINITO DI K HA ALMENO UN PUNTO DI K CHE È DI ACCUM. PER K_∞

DIM:

SE NESSUN PUNTO DI K È DI ACCUMULAZIONE PER K_∞ $\forall x \in K$ È IL CENTRO DI UNA BOLLA $B(x, r_x)$ CONTENENTE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞ (x SE $x \in K_\infty$). ALLORA $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ E ALLO STESSO TEMPO NON È POSSIBILE ESTRARRE UNA SOTTOCOPERTURA FINITA (DATO CHE K_∞ È UN INSIEME INFINITO E CIASCUN $B(x, r_x)$ CONTIENE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞).

COROLLARIO II: OGNI SOTTOINSIEME INFINITO E LIMITATO DI $\mathbb{R}^n$ HA ALMENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE

DIM:

SIA K_∞ TALE INSIEME: DATO CHE È LIMITATO: $K_\infty \subset \overline{B(0,R)}$. DEFINISCO $K = \overline{B(0,R)}$
E VISTO CHE K È COMPATTO APPLICO COROLLARIO I E $\exists$ PUNTO DI ACC. DI K_∞

COROLLARIO III: K_∞ SOTTOIN. ∞ DI $\mathbb{R}^n$ E LIMITATO ($\exists$ PUNTO ACC. y), ALLORA $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_\infty$ t.c. $\lim_{n \to \infty} x_n = y$

DIM:

DATO $y \in Acc(K_\infty) \Rightarrow \forall r > 0$, $B(y,r) \setminus \{y\} \cap K_\infty \neq \emptyset$. PER FINI DIMOSTRATIVI, PRENDO $r = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \in B(y, \frac{1}{n}) \setminus \{y\} \cap K_\infty$
E INOLTRE $\|x_n - y\| < \frac{1}{n}$ (EQUIVALENTE A $x_n \in B(y, \frac{1}{n})$) CIOÈ $\lim_{n \to \infty} x_n = y$

TEOREMA DI BOLZANO-WEIESTRASS:

OGNI SUCCESSIONE $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ LIMITATA HA UNA SOTTOSUCC. CONVERGENTE