ES: $f_n(x) := (\operatorname{sen} x \arctan nx)^2 \, e^{-\frac{n^2}{1+x^2}}$, $\quad I = [0,1]$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$. $\quad f_n \in C[0,1]$ (COMPOSIZIONE DI f CONTINUE)

CERCHIAMO LIMITE PUNTUALE: $|f_n(x)| \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \underbrace{e^{-\frac{n^2}{1+x^2}}}_{:=g_n(x)} \to 0$, $n \to \infty$ ($\forall x \in I$, FISSATO)

$f_n(x) \to f(x) \equiv 0 \leftarrow$ limite puntuale

ANALIZZO $g_n(x) =$ $\quad g_n'(x) = e^{-\frac{n^2}{1+x^2}}(-n^2)\left(-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)\cdot 2x \ge 0 \Rightarrow g_n$ è CRESCENTE

$|f_n(x)| \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \overset{\text{MAX IN } I}{g_n(1)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 e^{-\frac{n^2}{2}}$. IN QUESTO CASO SUP = MAX ($x \in [0,1]$) $|f_n(x)| \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 e^{-\frac{n^2}{2}} \to 0 \Rightarrow$ CONV. UNIFORME A $f(x)=0$

ALLORA VALE $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

ALTRO ES:

$f_n(x) = x^n$ $\quad x \in [0,1]$. LA f LIMITE PUNTUALE È * $f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x \in [0,1[\end{cases}$

PERTANTO, $f_n(x)$ NON È CONVERGENTE UNIFORMEMENTE PERCHÈ * NON È CONTINUA

ALTRO ES:

$f_n(x) := \begin{cases} \exp(-x^2), & |x| < n \\ 0, & |x| \ge n \end{cases}$. CERCHIAMO LIM PUNTUALE, CON $I = \mathbb{R}$. FISSANDO x, $\forall x \; \exists n$ t.c. $|x| < n$ QUINDI $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \exp(-x^2)$

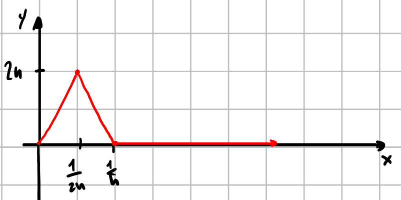
$\Rightarrow f(x) := e^{-x^2}$ È LIMITE PUNTUALE DI f_n SU I. ALLORA VERIFICHIAMO LA CONV. UNIFORME (SU I)

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup \begin{cases} 0, & |x| < n \\ e^{-x^2}, & |x| \ge n \end{cases} = e^{-n^2} \to 0$, $n\to\infty$. CIOÈ CONVERGE UNIFORMEMENTE.

ES:

$f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2} \longrightarrow 0$ (UNIFORME in $I=[1,2]$) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_1^2 f_n(x)\,dx = \int_1^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^2 0\,dx = 0$.

CONTROESEMPIO IN CUI NON VALE L'INTERCAMBIALITÀ DI LIMITE e INTEGRALE



$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -4n^2x + 4n, & x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & x > \frac{1}{n} \end{cases}$ $\quad$ | $f = 0$ è lim PUNTUALE in $[0,\infty)$ ma $\int_0^1 f_n(x) \ne 0$ NON UNIFORME

TEOREMA:

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCC. DI FUNZ., $f \in C^1[a,b]$ ($\exists$ e continua f' su $[a,b]$) $f_n \to f$ PUNTUALMENTE. f_n' UNIF. CONV. SU $[a,b]$ A UNA FUNZIONE φ CONTINUA.

TH: $f' = \varphi$ (f È DERIVABILE e COINCIDE CON φ)

↳ EQUIVALENTE: $\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$

DIM:

$\forall x \in [a,b]$: $\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,dt = \int_a^x \varphi(t)\,dt$

TEO. FOND. CALCOLO INT.

$= \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)]$

$\downarrow$ HP. DI CONV. PUNTUALE

$f(x) - f(a)$

CIOÈ $f(x) - f(a) = \int_a^x \overset{\text{CONTINUA}}{\varphi(t)}\,dt \Rightarrow f(x)$ È DERIVABILE PERCHÈ $\int_a^x \varphi(t)\,dt$ lo È e $(f(x) - f(a))' = \left(\int_a^x \varphi(t)\,dt\right)' \Rightarrow f'(x) = \varphi(t)$ $\forall x \in [a,b]$

ES: (VERIFICARE LE IPOTESI)

$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$, $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow f'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = \cos(nx)$

INOLTRE: $|f_n(x)| = \frac{|\operatorname{sen}(nx)|}{n} \le \frac{1}{n} \Rightarrow \sup_{x \in [0,2\pi]} |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0$. CONVERGENZA UNIF. E PUNTUALE A $f(x) = 0$ $\forall x \in [0, 2\pi]$

CI CHIEDIAMO: $\lim_{n\to\infty} (f_n)' \overset{?}{=} (\lim_{n\to\infty} f_n)'$ CIOÈ: $\lim_{n\to\infty} \cos(nx) \overset{!}{=} 0$. QUALE DELLE HP NON È VERIFICATA

TEOREMA (CRITERIO DI CAUCHY)

CONDIZIONE NECC. e SUFF. AFFINCHÈ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, SIA UNIF. CONV. A UNA FUNZ. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ È CHE:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = \varepsilon(n_0)$ t.c. $\boxed{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0}$

RICHIAMO SULLE SUCC. NUMERICHE:

DATA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ CONVERGENTE AD $a \in \mathbb{R}$: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$ ALLORA VALE LA PROPRIETÀ DI CAUCHY:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n, m > n_0$ VALE: $\{|a_n - a_m| < \varepsilon\}$.

$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \le |a_n - a| + |a_m + a|$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$ t.c. $\left.\begin{array}{l}\forall n > n_0 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $\forall n, m > n_0$ VALE: $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

- ANCHE IL RECIPROCO È VERO
- UNA SUCC. CHE GODE DI QUESTA PROPRIETÀ VIENE CHIAMATA "DI CAUCHY"

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLA CONV. UNIFORME

HP: DATA a_n SUCC. DI CAUCHY (GUARDA PROPRIETÀ SOPRA)

TH: a_n È CONVERGENTE ($\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$)

DIM:

- SE $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE UNIF. SU $I \subseteq \mathbb{R}$ a f, ALLORA $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| \le \sup_{x\in I} (|f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)|)$ $\boxed{\text{IN QUANTO } \sup_{x\in I}(f(x) + g(x)) \le \sup_{x\in I} f(x) + \sup_{x\in I} g(x)}$

$\Rightarrow \le \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in I} |f_m(x) - f(x)|$

DALLA CONV. UNIFORME $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0$: $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall m > m_0$: $\sup_{x\in I} |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

- ORA DIM. CHE LA PROP. DI CAUCHY IMPLICA LA CONVERGENZA UNIFORME

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n, m > n_0$ VALE: $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ e OSSERVIAMO: $|f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| \le \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall n, m > n_0(\varepsilon)$.

PONENDO $m \to \infty$

$|f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ $\forall n > n_0(\varepsilon)$, $\forall \bar{x}$ FISSATO $\in I$ $\Leftrightarrow$ CONV. UNIFORME (PRIMA DEFINIZIONE).

MA $f(x) = ?$

$|f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| \le \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall n, m > n_0$ $\Rightarrow$ ALLORA $a_n = f_n(\bar{x})$ È UNA SUCC. DI CAUCHY $\Rightarrow \exists \overbrace{a = f(\bar{x})}^{\text{DIPENDENZA DI } a \text{ DA } \bar{x}}$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

SERIE DI FUNZIONI

CONSIDERIAMO UNA SUCC. DI FUNZ. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. CONSIDERIAMO $\forall x \in I$ FISSATO L'ESPRESSIONE

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ "SERIE DI FUNZIONI", CHE DIPENDE DA $x \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{K\to\infty} \overbrace{\underbrace{\sum_{n=1}^{K} f_n(x)}_{S_K(x)}}^{\text{SOMME PARZIALI}} \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} S_K(x)$

DEF: SE, $\forall x \in I$ FISSATO, $\exists \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, ALLORA LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE IN I. PONGO $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e DICO CHE CONVERGE UNIF. SU I SE $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE UNIF. A f SU I.

TEOREMA:

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE UNIF. A $f(x)$

TH: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx}_{S} = \underbrace{\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx}_{D}$

$$S = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \overbrace{\left(\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right)}^{S_k} dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b S_k(x)\,dx \overset{\text{DALLA HP}}{=} \int_a^b \lim_{k\to\infty} S_k(x)\,dx$$

TEOREMA:

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1[a,b]$ t.c. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE PUNTUAL. SU $[a,b]$ A UNA FUNZ. $f(x)$ E t.c. $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ SIA UNIF. CONVERG. SU $[a,b]$

TH: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ $\forall x \in [a,b]$. ($\exists f'(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ È DERIVABILE E COINCIDONO)

TEOREMA (WEIERSTRASS M-TEST) →

HP: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ VALE: $|f_n(x)| \le M_n$ $\forall x \in I$ E $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. ALLORA LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ È UNIF. CONVERGENTE SU I.

DIM:

DATO $x \in I$, PER HP SO CHE: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ $\Rightarrow$ DAL TEO. CONFRONTO QUESTO IMPLICA CHE CONVERGE.

(RICORDA: SE $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ CONVERGE, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE TOTALMENTE)

PONIAMO $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ E DIMOSTRIAMO LA CONV. UNIFORME CIOÈ CHE $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (SUCC. DELLE SOMME PARZIALI) CONVERGE UNIFORMEMENTE A I SU f.

ABBIAMO $|f(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k$

$\Leftrightarrow |f(x) - S_n(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \Rightarrow \sup_{x\in I} |f(x) - S_n(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f(x) - S_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k\right) = 0.$

→ PER DEF. S_k CONVERGE UNIF. QUINDI ANCHE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE. □

ESEMPIO:

$f_n(x) = \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}$ $\rightarrow |f_n(x)| \le \frac{1}{n^2} \; (= M_n)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ E OSSERVO $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty}$ CONVERGENZA $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}$ È UNIF. CONV. SU $\mathbb{R}$

ES:

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $x \in \overbrace{[0, \tfrac{1}{2}]}^{I}$. $\forall x \in I$, HO: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{\text{SERIE GEOMETRICA}} - x^0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$. LA SERIE CONVERGE. DIMOSTRIAMO ORA LA CONV. PUNTUALE

$\frac{1-x^{k+1}}{1-x}$, $x^{k+1} \to 0$

$|x^n| \le \frac{1}{2^n} = M_n$ E OSSERVIAMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 < \infty$. LA SERIE CONV. UNIFORMEMENTE.

ES:

$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $x \in [-r, r]$ $r < 1$. SAPPIAMO DALL' ES PRECEDENTE $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$. CERCHIAMO DI DIM. CHE $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ È TOT. CONVERGENTE USANDO M-TEST DI WEIES.

$\forall r < 1$ HO: $\sum_{n=1}^{\infty} |n x^{n-1}| \le \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}} \overset{?}{<} \infty \rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n r^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{n^{\frac{1}{n}}}_{1} \underbrace{r^{1-\frac{1}{n}}}_{r} = r < 1$ PER CRIT. RADICE CONVERGE $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-2}$ CONV. UNIF. SU $[-r, r]$

APPLICO CRIT. DELLA RADICE

PER TEO. SCAMBIO DI DERIVATA-SERIE:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

↳ $\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ CIOÈ: $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$