NELLA FORMULA DI TAYLOR DEL SECONDO ORDINE SOSTITUIAMO $h = x - x_0$

$$f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle = \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x-x_0),(x-x_0)\rangle + o(\|x-x_0\|^2), \quad x \to x_0$$

$z = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$ (EQ. PIANO TANGENTE A G_f IN $(x_0, f(x_0))$)

ES: TROVARE PUNTI STAZIONARI $f(x,y) = y^2(x^2+y^2-1)$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ E CLASSIFICARLI

- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 = 0 \Rightarrow \underset{(1)}{x = 0}, \underset{(2)}{y = 0}$

  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx^2 + 4y^3 - 2y = 0$

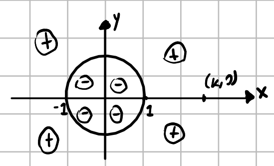
(1) $2y(2y^2-1) = 0 \Rightarrow y=0,\ y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \to \cancel{(0,0)}$ e $(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(k,0)$

È COMPRESO

(2) CON $y=0$ $\xrightarrow{\text{SECONDA EQ.}}$ $y = 0 \to 0 = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2+12y^2-2 \end{pmatrix} \to Hf(0, \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ CON $\det = 4 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0 \Rightarrow$ MIN. RELATIVO

$$\to Hf(k,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k^2-2 \end{pmatrix}$$ CON $\det = 0$



- $k < -1$ e $k > 1$ $f(x,y) \geq f(k,0)$ CIOÈ MINIMO
- $-1 < k < 1 \to f(x,y) \leq f(k,0)$ MAX
- $k = -1 \wedge k = +1$ $\exists x,y$ t.c. $f(x,y) > f(k,0)$ e $f(x,y) < f(k,0)$ ↳ PUNTO DI SELLA

ESTREMANTI VINCOLATI:

ES: $f(x,y) = e^{x+y}$ RISTRETTA A $\overline{B(0,1)} = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}$

PER WEIERSTRASS: $\exists \underset{\text{MIN}}{(x_m, y_m)}, \underset{\text{MAX}}{(x_M, y_M)} \in \overline{B(0,1)}$ t.c. $f(x_m,y_m) \leq f(x,y) \leq f(x_M, y_M)$

SE SONO INTERNI, $\nabla f = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underset{\neq 0}{e^{x+y}} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ CHE NON SARÀ MAI $= 0$

QUINDI SONO SUI BORDI: $\partial B(0,1) = \{(x,y): \underbrace{x^2+y^2-1=0}_{f(x,y)=0}\}$

↳ RIDUCIAMO IL PROBLEMA A UNA MASSIMIZZAZIONE E MINIMIZZAZIONE VINCOLATA:

- $f(x_m, y_m) = \min\limits_{(x,y) \in \partial B(0,1)} f(x,y) = \min\limits_{(x,y):\, f(x,y)=0} f(x,y)$
- $f(x_M, y_M) = \max\limits_{(x,y) \in \partial B(0,1)} f(x,y) = \max\limits_{(x,y):\, f(x,y)=0} f(x,y)$

TEOREMA FUNZIONE IMPLICITÀ:

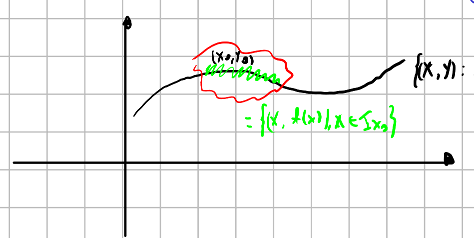
PERCHÈ? MOLTI LUOGHI GEOMETRICI SONO ESPRIMIBILI COME EQUAZIONI CON $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
E CI CHIEDIAMO: $\exists$ UN INTORNO DI $(x_0,y_0) \in E$ $U_{x_0,y_0} \subset \mathbb{R}^2$, t.c. $E \cap U_{(x_0,y_0)} \overset{?}{=} G_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = h(x),\ x \in I_{x_0}\}$

ES: SE $E = \{(x,y): x^2+y^2-1 = 0\}$ DOVE (x,y) CON $y>0$ SI PUÒ SCRIVERE $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x \in I_{x_0}$, CON $y > 0$ COINCIDE CON: $\{(x, \sqrt{1-x^2}),\ x \in (-1,1)\} = G_h$. DOBBIAMO RISOLVERE L'EQUAZIONE ESPRIMENDOLA IN FUNZIONE DELL'ALTRA

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$. $(x_0,y_0) \in \Omega$ t.c. $f(x_0,y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.

TH: $\exists$ INTORNI U_{x_0} DI x_0 E V_{y_0} DI y_0 $U_{x_0} \times V_{y_0} \subseteq \Omega$ t.c.
$\forall x \in U_{x_0}$ $\exists!$ $y = f(x)$ t.c. $f(x,y) = 0$, $y_0 = f(x_0)$ e $\{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\} \cap \overbrace{(U_{x_0} \times V_{y_0})}^{\text{INTORNO DI } (x_0,y_0)} = \{(x, f(x)),\ x \in U_{x_0}\}$

VISTO CHE $f \in C^1(\Omega)$ $\exists \to f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x))}$, $x \in I_{x_0}$ $\xrightarrow{=}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$ (*)



CIOÈ $\gamma(x) = (x, f(x))$ È UNA CURVA DI $E \cap U_{x_0,y_0}$

$\gamma'(x) = (1, f'(x))$

(*) $\Rightarrow (1, f'(x)) \perp \nabla f(x, f(x))$

DIM: (NON LO CHIEDE ALL'ORALE)

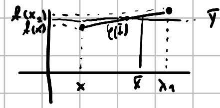
DATO $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$, HA UN SEGNO. $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ $\boxed{I_{x_0}^{\delta}}$ $\boxed{I_{y_0}^{\gamma}}$

$f \in C^1(\Omega)$ POSSO SUPPORRE $F_y(x,y) > 0$ SU $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \gamma, y_0 + \gamma]$. ALLORA $y \longmapsto f(x_0, y)$ È CRESCENTE ALLORA

DATO CHE $f(x_0, y_0) = 0$ ALLORA $\begin{cases} F(x_0, y_0 - \gamma) < 0 \\ F(x_0, y_0 + \gamma) > 0 \end{cases} \overset{\text{PER CONTINUITÀ}}{\Longrightarrow} \begin{cases} F(x_0, y_0 - \gamma) < 0 \\ F(x_0, y_0 + \gamma) > 0 \end{cases}$ $\forall x \in \begin{matrix} I_{x_0}^{\sigma_1} & ① \\ I_{x_0}^{\sigma_2} & ② \end{matrix}$ ALLORA DEFINISCO $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$ e ① e ② VALGONO ASSIEME

QUINDI $\forall x \in I_{x_0}^{\sigma}$ $\exists !$ $y = f(x) \in I_{y_0}^{\gamma}$ t.c. $f(x,y) = 0$. PONGO $U_{x_0} = I_{x_0}^{\sigma}$ e $V_{y_0} = I_{y_0}^{\gamma}$, E $y_0 = f(x_0)$ DATO CHE È L'UNICO t.c. $f(x_0, y_0) = 0$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE f È CONTINUA SU U_{x_0}. PRENDIAMO $x_1, x \in U_{x_0}$ e SIA $\begin{matrix} y = f(x) \\ y_1 = f(x_1) \end{matrix}$ e



$\varphi(\bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y})$

PARAMETRIZZANDO IL SEGMENTO CON $\varphi(t) = (x, f(x)) + t(x_1 - x, f(x_1) - f(x))$

QUINDI USIAMO $g(t) = F(\varphi(t))$, $t \in [0,1]$. A $g(t)$ APPLICHIAMO IL TEO. DEL VALORE MEDIO DI LAGRANGE:

$g(b) - g(a) = g'(\bar{t})(b-a)$ $\bar{t} \in (a,b)$. $(a,b) = (0,1)$. $\to$ $g(1) - g(0) = g'(\bar{t})$, $\bar{t} \in (0,1)$

TROVO $\varphi'(t) = (x_1 - x, f(x_1) - f(x))$, $\forall t$

RISCRIVO USANDO f

$g(1) - g(0) = f(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_1, f(x_1)}) - f(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_1, f(x)})$, $g'(1) = 0$ CIOÈ: $\frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \Big|_{t=\bar{t}} = 0$

DAL TEO. DERIVAZ. COMPOSTA:

$\frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \Big|_{t=\bar{t}} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x_1 - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(f(x_1) - f(x)) = 0$ CIOÈ $f(x) - f(x_1) = -\frac{f_x(\bar{x}, \bar{y})}{f_y(\bar{x}, \bar{y})}(x - x_1)$

e $|f(x) - f(x_1)| \leq C|x - x_1|$ DOVE $\left| \frac{f_x(\bar{x}, \bar{y})}{f_y(\bar{x}, \bar{y})} \right| \leq C$ $\Rightarrow$ $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = -\frac{f_x(\bar{x}, \bar{y})}{f_y(\bar{x}, \bar{y})}$

$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$, CONTINUITÀ.

COMPOSIZ. f CONTINUE $\Rightarrow$ f' È CONTINUA

PER $x_1 \to x$, f CONTINUA, ABBIAMO $(\bar{x}, \bar{y}) \to (x, f(x))$ e $f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = -\lim_{(\bar{x}, \bar{y}) \to (x, f(x))} \frac{f_x(\bar{x}, \bar{y})}{f_y(\bar{x}, \bar{y})} = -\frac{f_x(x, f(x))}{f_y(x, f(x))}$

DEFINIZIONE: SIA $E = \{x \in f(x) = 0\}$ x_M È UN PUNTO DI MASSIMO CONDIZIONATO PER f CON VINCOLO $f(x) = 0$ SE $\exists\, U \subset \mathbb{R}^2$ INTORNO DI x_M t.c. $f(x) \leq f(x_M)$ $\forall x \in E \cap U$

TEOREMA: REGOLA DEL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE:

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO, $f, F: \Omega \to \mathbb{R}$, $f, F \in C^1(\Omega)$. $(x_0, y_0) \in \Omega$ MAX o MIN VINCOLATO $(f(x,y) = 0)$. INOLTRE $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$

TH: $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.c. (x_0, y_0, z_0) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

DIM: $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. PER TEO. FUNZIONE IMPLICITA, IN I_{x_0} L'INSIEME $E = \{(x,y) \in \Omega : F(x,y) = 0\}$ COINCIDE $h \in C^1$ DI 1 VARIABILE $(y = h(x))$

DALLO STESSO TEOREMA: $h'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$ $\Longleftrightarrow$ $F_x(x_0, y_0) + h'(x_0) F_y(x_0, y_0) = 0$ Ⓐ

DATO CHE (x_0, y_0) È ESTREMANTE VINCOLATO PER F ALLORA x_0 È "LIBERO" PER $f(x, h(x))$ = RESTRIZIONE LOCALE DI f AD E)

ALLORA APPLICO FERMAT $x \longmapsto f(x, h(x))$ $\Rightarrow$ $f'(x_0, h(x_0)) = 0$ $\Rightarrow$ DERIVATA DI FUNZ. COMPOSTA

$0 = f'(x_0, \underbrace{h(x_0)}_{y_0}) = f_x(x_0, h(x_0)) + f_y(x_0, h(x_0))$ Ⓑ

A+B = $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla F(x_0, y_0)$ ORTOGONALI A $(1, h'(x_0))$ $\Rightarrow$ MULTIPLI L'UNO DELL'ALTRO! $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla F(x_0, y_0)$ □