• EQ. 2 GRADO CON $\Delta < 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow (2ax+b)^2 = -1 \cdot (-\Delta) \iff \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 = -1$ CHE SI PUÒ SCRIVERE COME $x^2 = -1$ (NON HA SIGNIFICATO IN $\mathbb{R}$

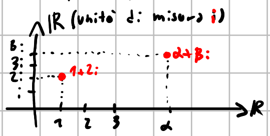
DIAMO SIGNIFICATO A $x^2 = -1$ TRAMITE I NUMERI COMPLESSI ($\mathbb{C}$) e ASSEGNA $\boxed{x = \pm i \quad \text{DOVE } \boxed{i^2} = i \cdot i = (-i)\cdot(-i) = \boxed{-1}}$

"i" È DETTA UNITÀ IMMAGINARIA e VALE $\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \pm i \Rightarrow x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \beta$ CIOÈ $x = \alpha + \beta i$

DEFINIAMO $\mathbb{C}$ (NUMERI COMPLESSI) COME

• $\{(\alpha,\beta),\ \alpha\in\mathbb{R}, \beta\in\mathbb{R}\} = \{\alpha + i\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ CIOÈ COPPIE DI ELEMENTI DI $\mathbb{R}^2$ e LE LORO OPERAZIONI

$z \in \mathbb{C}$ ALLORA $z = (\overset{\in\mathbb{R}}{\alpha}, \overset{\in\mathbb{R}}{\beta}) = \alpha + i\beta$



⟿ PIANO $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ NOTO COME PIANO DI ARGAND-GAUSS

TERMINOLOGIA: SE $z \in \mathbb{C}$ RAPPRESENTATO COME $z = (\alpha,\beta) = \alpha + i\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. $\alpha = R(z)$ "PARTE REALE DI z"
$\beta = Im(z)$ "PARTE IMMAGINARIA DI z"

- i PUNTI $\beta = 0$ CORRISPONDONO A $\mathbb{R}$
- i PUNTI $\alpha = 0$ CORRISPONDONO AI NUMERI IMMAGINARI, INFATTI $i = \underset{\alpha}{0} + i \cdot \underset{\beta}{1} = (0, i) \Rightarrow i$ È IMMAGINARIO

• DEFINIZIONE SOMMA

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\quad z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ $\quad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ↳ PROVIAMO: $\boxed{z_1 + z_2} = \alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2) = \boxed{(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)}$
↳ LO PRENDO COME DEF. DI SOMMA

• DEFINIZIONE PRODOTTO

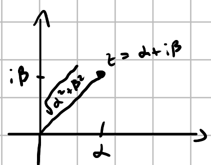
PARTIAMO DA $i^2 = -1 = (-1, 0)$. $\boxed{z_1 \cdot z_2} = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = \alpha_1\alpha_2 + i\beta_1\alpha_2 + i\alpha_1\beta_2 - \beta_1\beta_2 = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + i(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) = \boxed{(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2, \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)}$
↳ PRENDO COME DEF. DI PRODOTTO

NOTA: SIA PRODOTTO CHE SOMMA SONO COMMUTATIVI

e DALLA DEF DI SOMMA e PRODOTTO POSSO DEFINIRE $z = \alpha + i\beta = (\alpha, 0) + (0,1)\cdot(\beta, 0) = (\alpha, \beta)$ (COME $i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R}$)

• ELEMENTI NEUTRI:
$(0,0)$ SOMMA
$(0,1)$ PRODOTTO *

* CERCO DI DIMOSTRARE: $z \cdot z^{-1} = (1,0)$ CIOÈ $z^{-1} = x + iy$ t.c. $(\alpha + i\beta)(x + iy) = (1,0)$
RISCRIVO $\alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) = (1,0) \iff \begin{cases} \alpha x - \beta y = 1 \\ \alpha y + \beta x = 0 \end{cases}$ e HA UN'UNICA SOL. $\begin{cases} x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \\ y = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$



PRODOTTO TRA $z = \alpha + i\beta$ e $\bar{z} := \alpha - i\beta$ "COMPLESSO CONIUGATO DI z"
$z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2$ DOVE $|z| := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ "MODULO DI z"

OPERAZIONE DI "CONIUGATO"
$z = \alpha + i\beta \Rightarrow \bar{z} := \alpha - i\beta \Rightarrow \bar{\bar{z}} = \alpha + i\beta = z$ $\quad \bar{\bar{z}} = z$ OPERAZIONE INVOLUTIVA

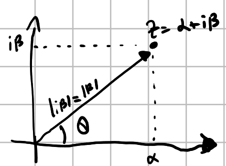
• DEFINIZIONE RAPPORTO

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (\alpha_1 + i\beta_1) \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} - \frac{i\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\right) = \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\alpha_2 + i\beta_2} = \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\alpha_2 + i\beta_2} \cdot \frac{\alpha_2 - i\beta_2}{\alpha_2 - i\beta_2} \rightarrow \alpha_2^2 + \beta_2^2$

• ALCUNE PROPRIETÀ:
- $z + \bar{z} = 2\,\mathbb{R}(z)$
- $z - \bar{z} = 2\,Im(z)$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

PROPRIETÀ DEL MODULO:
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z| \quad \forall \lambda, z \in \mathbb{C}$
- $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

• FORMA POLARE



$\begin{cases} \alpha = r\cos(\theta) \\ \beta = r\sin(\theta) \end{cases}$ $\quad \theta$ ANGOLO "ARGOMENTO DI z"

e $\begin{cases} r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{ (DIST. ORIGINE)} \\ \cos(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{cases}$ $\quad \theta \in [0, 2\pi)$

CIOÈ $z = \alpha + i\beta = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ FORMA POLARE DI z

SE ABBIAMO $r = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$ CIOÈ DESCRIVO IL CERCHIO UNITARIO DEL PIANO DI ARGAND - GAUSS

ES: $\begin{cases} z = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \\ w = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \end{cases}$

CIOÈ: $z \cdot w = (r\rho)(\cos(\phi+\theta) + i \operatorname{sen}(\phi+\theta))$

• FORMULA DI DE MOIVRE

SIA $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{C}$, SIA $n \in \mathbb{Z}$, ALLORA

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

CON CONSEGUENZA:

• TEOREMA *

SIA $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ ALLORA $x^n = z$ HA n SOLUZIONI (RADICI n-ESIME) e SONO DATE DA: (CON $z = \rho(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$)

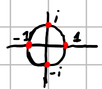
$$\boxed{x = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, \dots, (n-1)}$$

PROVIAMO $\theta_k := \frac{\phi + 2k\pi}{n}$ e IN GENERALE $\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{2\pi}{n}$. DETTO IN UN ALTRO MODO, LE "RADICI" e SOLUZIONI DI $x^n = z$ DIVIDONO IL CERCHIO IN n ARCHI UGUALI

ES: $x^4 - 1 = z$ $\quad x = ? \in \mathbb{C}$

NOTO: $z = \underset{r}{1} \cdot (\cos \underset{\theta}{0} + i \operatorname{sen} 0)$ CIOÈ $x = 1\left(\cos\frac{0+2k\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{4}\right)$ $k = 0, 1, 2, 3$

ANALIZZO $k=0 \Rightarrow x = 1$



4 ARCHI UGUALI,

QUINDI $x = 1, i, -1, -i$

ES: $x^2 = -1 = z = \underset{r}{1}(\cos \underset{\theta}{\pi} + i \operatorname{sen}(\pi))$

$x = 1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right)$ CON $k=0 \Rightarrow x = i$, CON $k=1 \Rightarrow x = -i$

DIM *

PONGO • z (NOTO) $= \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ $\quad (\rho > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi))$ e PONGO $x = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$x^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$ •

VERIFICO SE SONO UGUALI x^n e z

$\rho = r^n \Rightarrow r = \rho^{\frac{1}{n}}$

e $\left.\begin{matrix} \cos(n\theta) = \cos\phi \\ \operatorname{sen}(n\theta) = \operatorname{sen}\phi \end{matrix}\right\} \Rightarrow n\theta = \phi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ CON RADICI DISTINTE PER $k = 0, \dots, n-1$

NOTA: UNA GENERICA $f(x) = a^2 x + bx + c$ CON $\Delta < 0$ HA 2 SOLUZIONI COMPLESSE CONIUGATE

$f(x) = a(x - z)(x - \bar{z})$ $\quad z = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

QUESTO PUÒ ESSERE GENERALIZZATO A GRADO k:

$\Phi(x) = a_k x^k + \dots + a_0$ $\quad a_k \neq 0$ (PER ESSERE DI GRADO k)

TEOREMA FONDAMENTALE DELL' ALGEBRA

$\Phi(a_k, \dots, a_0 \in \mathbb{R})$ HA k $\underbrace{\text{RADICI}}_{\text{VALORI DI } x \text{ t.c. } \Phi(x)=0}$ in $\mathbb{C}$ (POSSIBILMENTE REALI e/o COINCIDENTI)

CIOÈ: $\Phi(x) = a_k(x - x_1)^{h_1}(x - x_2)^{h_2} \dots (x - x_m)^{h_m}$ DOVE $h_1 + \dots + h_m = k$ DOVE x_i SONO RADICI e h_i SONO LE LORO "MOLTEPLICITÀ"

• OPERAZIONE DI EXP SU $\mathbb{C}$

PARTO DA: $e^{x_1 + ix_2} = \underbrace{e^{x_1}}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{e^{ix_2}}_{?}$ $\Rightarrow$ $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{IDENTITÀ DI EULERO}}$ CON CASO PART $x = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

$\hookrightarrow e^{x_1} \cdot (\cos(x_2) + i \operatorname{sen}(x_2))$