

ESEMPIO [PC] (PEANO) DI INFINITE SOLUZIONI

$$\boxed{PC} \begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

• SOLUZIONE BANALE:

$y \equiv 0$ (STESSA COSA DI $y(x) = 0 \forall x \in I$)

• CERCHIAMO ALTRE SOLUZIONI

SE $y(x) \neq 0$ PER QUALCHE INTERVALLO, POSSO:

$$\frac{1}{3} (y(x))^{-2/3} y'(x) = 1, \quad \text{e INTEGRAMO}$$

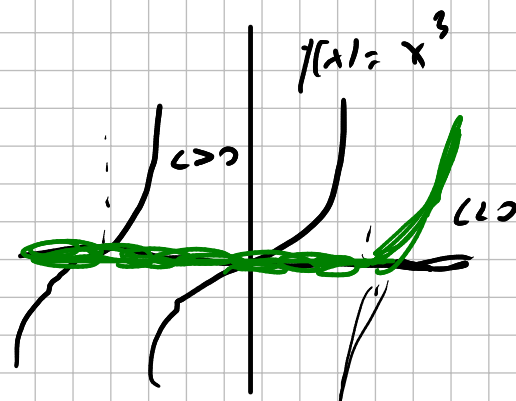
$$\rightarrow \frac{1}{3} \int (y(x))^{-2/3} \cdot y'(x) dx = \int 1 dx = x + C$$

FORMA GENERALE $\int y(x)^\beta y'(x) dx$ con $\beta \neq -1$

e si risolve come $\frac{[y(x)]^{\beta+1}}{\beta+1} + C$, $\left(\begin{array}{l} \text{DALLA SOLA} \\ \text{DI DERIVATE} \\ \text{COMPOSITE} \end{array} \right)$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{y(x)^{1/3}}{-\frac{2}{3} + 1} = (y(x))^{1/3}$

$$= (y(x))^{1/3} = x + C \Rightarrow y(x) = (x + C)^3$$



QUELLA VERDE È LA SOLUZIONE PER PEANO

CONSIDERO $c < 0$

$$y(-c) = 0$$

$$y_c(x) = \begin{cases} (x+c)^3, & x > -c \\ 0 & x \leq -c \end{cases}$$

CONSIDERO ANCORA $y'(x) = 3(x+c)^2$ CHE CON $x = -c$ HA COME RISULTATO SEMPRE 0.

$$\text{CIOÈ } y'(-c) = 0$$

E SIA y È DERIVABILE (CON y' CONTINUA)

2 SODDISFA EQ. DIFF 2 CONDIZIONE INIZIALE

\Rightarrow SOLUZIONE PC $\forall c < 0$

ESISTONO HP SULLA STRUTTURA DELL'EQ. CHE CONSENTONO UNICITÀ 2 ESISTENZA (NON QUESTO CASO) DEL PC.

QUESTO ESEMPIO È UN'EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = a(x)b(x) \quad b(y) \neq 0 \quad \frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

INTEGRANDO

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))} dx = \int a(x) dx$$

PER
SOSTITUZIONE

$$\int \frac{dy}{b(y)}$$

SEPARANDO I DIFFERENZIALI

"VARIABILI SEPARABILI": $\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$

$$\frac{dy}{b(y)} = a(x) dx$$

ESEMPI SIGNIFICATIVI

$$1) y' = 4x e^{-x^2} (1 + y^2)$$

$$2) y' = y^4 x^4$$

$$3) y' = y \cdot 4x$$

$$4) y' = y e^{x^2}$$

SOLUZIONI:

$$\textcircled{1} \quad \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = 4x e^{-x^2} \quad \text{e} \quad \text{INTEGRIAMO RISPETTO A } x$$

$$\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} dx = \int 4x e^{-x^2} dx \Rightarrow$$

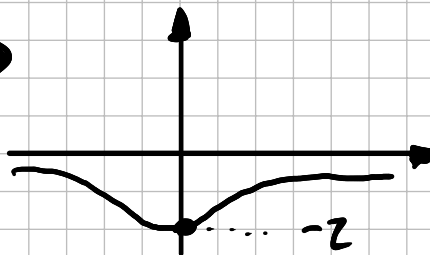
$$\arctan(y(x)) = -2e^{-x^2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

↳ SOLUZIONE IMPLICITA

$$y(x) = \tan(-2e^{-x^2} + c) \rightarrow \text{PERDIAMO DELLE SOLUZIONI A CAUSA DEL DOMINIO}$$

CIOÈ HA SENSO SE $-2e^{-x^2} + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \forall x \in \mathbb{R}$

IMMAGINE DI: $-2e^{-x^2} \Rightarrow$
 $[-2, 0)$



$$\text{QUINDI} \quad -2 + c < -2e^{-x^2} + c < 0 + c$$

$$\begin{cases} c < \frac{\pi}{2} \\ -2 + c > -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < \frac{\pi}{2} \\ c > 2 - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

②

$y \equiv 0$ È SOLUZIONE

INVECE SE $y \neq 0$ SU QUALCHE INTERVALLO \Rightarrow

$$\underline{y^{-4}(x) y'(x) = x^4}, \quad \text{INTEGRANDO PER } x$$

$$\underline{\int y^{-4}(x) y'(x) dx = \int x^4 dx = \underline{\frac{x^5}{5} + c}}$$

$$\int (y(x))^\beta y'(x)$$

$$= \frac{y(x)^{\beta+1}}{\beta+1} = \frac{y(x)^{-3}}{-3} \Rightarrow y^{-3} = -3\left(\frac{x^5}{5} + c\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{-3\left(\frac{x^5}{5} + c\right)}} \quad \text{SOLUZIONE } \checkmark$$

③

$y \equiv 0$ È SOLUZIONE

$y \neq 0$ IN QUALCHE INTERVALLO

$$\underline{\frac{y'(x)}{y(x)} = 4x}, \quad \text{INTEGRANDO}$$

$$\int \underline{\frac{y'(x)}{y(x)}} dx = \int \underline{4x} dx = 2x^2 + c$$

CERCO IL GIALLO (TERMINE DI SINISTRA)

$$\int \frac{dy}{y} = \ln |y(x)|$$

QUINDI:

$$\ln |y(x)| = 2x^2 + c, \quad \text{USIAMO L'ESPOENZIALE}$$

$$|y(x)| = \exp(2x^2 + c) = e^c \cdot e^{2x^2}$$

$y(x) = \frac{1}{2} e^c e^{2x^2}$ QUINDI CON C COSTANTE GENERICA

$$y(x) = c e^{2x^2}$$

④ $y \equiv 0$ È SOLUZIONE, ALLORA

INVECE SE $y \neq 0$ SU QUALCHE INTERVALLO \Rightarrow

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = e^{x^2} \quad \text{e INTEGRA MO}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} = \int e^{x^2} dx = \ln |y(x)| \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{INTEGRALE DI GAUSS, NON ESPRIMIBILE} \\ \text{COME A ESEMPIO} \end{array}$$

↳ PER ESEMPIO DI PRIMA \int

$$|y(x)| = \exp\left(\int e^{x^2} dx\right) \quad \text{CIOÈ} \quad y = \pm \exp\left(\int e^{x^2} dx\right)$$

ESEMPIO DI RIFLESSIONE SU INTERVALLO DI ESISTENZA MASSIMALE

$$\textcircled{PC} \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

① TROVARE LA SOLUZIONE (UNICA) DEL PC

② TROVARE INTERVALLO DI ESISTENZA "MASSIMALE" CIOÈ
INTERVALLO PIÙ GRANDE I_{max} SU CUI È DEFINITA LA
SOLUZIONE, e t.c. SODDISFA LA CONDIZIONE INIZIALE
($0 \in I_{max}$)

SOLUZIONE (ESSENDO $y(x)$ DERIVABILE e CONTINUA, e $y'(x) \neq 0$)

$$\int \frac{y'}{y^2} = \int 1 dx = \int \frac{y'}{y^2} dx = x + C$$

$$= \frac{y^{-1}}{-2+1} = x + C \Rightarrow \frac{1}{y} = x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x+C}$$

CONDIZ. INIZIALE

$$1 = -\frac{1}{0+C} \quad C = -1$$

$$y(x) = -\frac{1}{x-1} \quad (\checkmark)$$

VERIFICA DELLA SOLUZIONE

$$y' = \left(-\frac{1}{x-1}\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = y^2 \quad (\checkmark)$$

② $I_{\max} = (-\infty, 1)$ MAX INTERVALLO CN $\forall x \in I_{\max}$

EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE a COEFFICIENTI VARIABILI

$$y' + p(x)y = q(x) \quad p, q \in C(I) \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

$C(I) :=$ "CLASSE DI FUNZIONI CONTINUE NELL'INTERVALLO I "

OSS: L'EQUAZIONE è EQUIVALENTE A

$$y' = \underbrace{q(x) - p(x)y}_{f(x, y)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L} y = q(x) \quad \mathcal{L} y := y' + p(x)y$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall y_1, y_2$ DERIVABILI su I

$$\mathcal{L} y \equiv \mathcal{L}(y)$$

ABBIAMO

$$\mathcal{L}(aY_1 + bY_2) = a\mathcal{L}(Y_1) + b\mathcal{L}(Y_2)$$

↳ PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

DIMOSTRANDOLA...

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(aY_1 + bY_2) &= (aY_1 + bY_2)' + p(x)(aY_1 + bY_2) \\ &= aY_1' + bY_2' + a p(x)Y_1 + b p(x)Y_2 \\ &= a(Y_1' + p(x)Y_1) + b(Y_2' + p(x)Y_2) \\ &= a\mathcal{L}(Y_1) + b\mathcal{L}(Y_2) \quad \checkmark\end{aligned}$$

QUANDO $q(x) \neq \text{funz. nulla}$, ABBIAMO EQ. LINEARI
(A COEFF. VARIABILI) NON-OMogenee

NEL CASO $q(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow$ "EQ. omogenee"

TEOREMA DELLE EQ. DI PRIMO ORDINE LINEARI

LA SOLUZIONE DI $Y' + p(x)Y = q(x)$ È DATA DA

$$\textcircled{A} \quad Y(x) = e^{-\underline{p}(x)} \left\{ c + \int e^{\underline{p}(x)} \cdot q(x) dx \right\}$$

DOVE $\underline{p}(x)$ È UNA PRIMITIVA QUALSIASI (LE COSTANTI c SONO "INGLOBATE" IN ESSA)

\textcircled{B} IL PC

$$\begin{cases} Y' + p(x)Y = q(x) \\ Y(x_0) = y_0 \quad x_0 \in I \end{cases}$$

HA SOLUZIONE UNICA ED È

POSS. DETERMINARE c DEL PUNTO

\textcircled{A} IN MODO DA $\overset{*}{\text{sodd.}} Y(x_0) = y_0$

DIMOSTRAZIONE

(B)

• USANDO LA (A) È CONDIZIONE INIZIALE:

$$y_0 = y(x_0) = e^{-\int p(x_0)} \{c + Q(x)\} \quad \text{DOVE } Q(x) = \int e^{-\int p(x)} \cdot q(x) dx$$

$$\Rightarrow c = y_0 e^{\int p(x_0)} - Q(x_0)$$

UNICITÀ: SUPPONIAMO DI AVERE 2 SOL. DEL PC

$$\begin{cases} y_1' + p(x)y_1 = q(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_2' + p(x)y_2 = q(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SOTTRAGGO

$$\begin{cases} y_1' - y_2' + p(x)(y_1 - y_2) = q(x) - q(x) = 0 \\ y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

e DENOTIAMO $m = y_1 - y_2$, CIOÈ:

$$\begin{cases} m' + p(x)m = 0 \\ m(x_0) = 0 \end{cases}$$

CHE È UN CASO DEL (PC) DI (A)

DAU' EQ. $m' + p(x)m = 0$

$$(A) \Rightarrow m(x) = e^{-\int p(x)} \{c + e^{\int p(x)} \cdot 0\} = c e^{-\int p(x)}$$

MA DA $m(x_0) = 0$, ALLORA $\Rightarrow c = 0$ (PERCHÈ L'ESP. NON SI ANNULA)

QUINDI $m(x) = 0 \quad \forall x \in I$ CIOÈ $y_1 = y_2$ ✓

DIMOSTRAZIONE (A)

"METODO DEL FATTORE INTEGRANTE"

$$\text{PONGO } M(x) = \exp\left(\int p(x) dx\right) > 0$$

$$M'(x) = \frac{\exp\left(\int p(x) dx\right) \cdot p(x)}{M(x)} = M(x) \cdot p(x)$$

MULTIPLICO PER $\mu(x)$

$$y' \mu(x) + \underbrace{p(x) \cdot y \cdot \mu(x)}_{\mu'(x)} = q(x) \mu(x)$$

$$y' \mu(x) + y \cdot \mu'(x) = q(x) \mu(x)$$

$$(y(x) \mu(x))' = q(x) \mu(x)$$

INTEGRO:

$$y(x) = \frac{\int q(x) \mu(x) dx}{\mu(x)}$$