

DEF: $\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

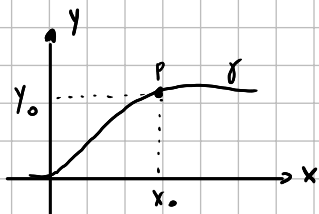
$\varphi(x, y) := (x, y, f(x, y)) \in G_f$ (GRAFICO DI f)

\hookrightarrow MAPPA DI $f(x)$ SU UN PIANO 3D

OSS: LA CORRISPONDENZA $\varphi: \Omega \rightarrow G_f$ È BIUNIVOCA: FISSATO $P \in G_f \exists (x_0, y_0) \in \Omega$ t.c.
 $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

DEF: IL PIANO TANGENTE A UNA f IN P È L'INSIEME DEI VETTORI TANGENTI A QUEL PUNTO.

CONSIDERO UNA CURVA $\gamma: (-\delta, \delta) \ni t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \Omega$.



QUINDI $(x_0, y_0) = \gamma(0) \rightarrow$ ALL'ISTANTE 0 PASSA PER x_0, y_0

SIMILE AL MODELLO CINEMATICO

CIOÈ $(x_0, y_0) = \varphi^{-1}(P)$ (CON P FISSATO) \rightarrow SIAMO SICURI \exists PER BIUNIVOCITÀ.

A QUESTO PUNTO CONSIDERO UN ULTERIORE CURVA $\varphi(\gamma(t)): (-\delta, \delta) \rightarrow G_f$

e $\varphi(\gamma(t)) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ CON $t \in (-\delta, \delta)$. AL VARIARE DI t CREIAMO UN CAMMINO SU G_f DOVE CON $t=0$, $\varphi(\gamma(0)) = P$.

OSS: SE $\gamma(t)$ È REGOLARE (CIOÈ $\gamma \in C^1(-\delta, \delta)$ t.c. $\gamma'(t) \neq 0$) ALLORA ANCHE $\varphi(\gamma(t))$ È REGOLARE

MATRICE IACOPIANA:

DATA $\varphi(x, y) := (x, y, f(x, y))$

$$I_P(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_{x_1}(x, y) \\ \varphi_{x_2}(x, y) \\ \varphi_{x_3}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial y} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x} & \frac{\partial x_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$$

DOVE
 $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$
 $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

LA MATRICE I_P HA RANGO 2 $\left(\begin{matrix} c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0 \end{matrix} \right)$

CERCHIAMO QUINDI $\varphi'(\gamma(t))$, CHE È REGOLARE E PER IL TED. DERIVAZIONE COMPOSTA:

$$\varphi'(\gamma(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma(t))y'(t) \neq 0 \quad (\text{CON } t \in (-\delta, \delta) \text{ SE } \gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0)$$

e IN PARTICOLARE $\varphi'(\gamma(0))$, CON $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ e $\varphi(x_0, y_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \rightarrow \varphi'(\gamma(0)) = \varphi'(x_0, y_0)$
 (CHE È ESPRIMIBILE COME COMB. LINEARE DI $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma(0))$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma(0))$).

INOLTRE VALE IL VICEVERSA: SE $\exists W = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$, POSSO DEFINIRE.

UNA CURVA REGOLARE PASSANTE PER P , IL SUO VETTORE TANGENTE PER $t=0$ È $W: \varphi'(\lambda t + x_0, \mu t + y_0)$
 e $P(0) = \varphi(x_0, y_0) = P$. INOLTRE $P'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\lambda t + x_0, \mu t + y_0)\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\lambda t + x_0, \mu t + y_0)$

QUINDI DEFINIAMO LO SPAZIO TANGENTE AL PUNTO $P \in G_f$ L'INSIEME DELLE COMB. LINEARI DI $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$

DEFINIAMO VETTORE NORMALE AL PIANO TANGENTE A G_f IN P :

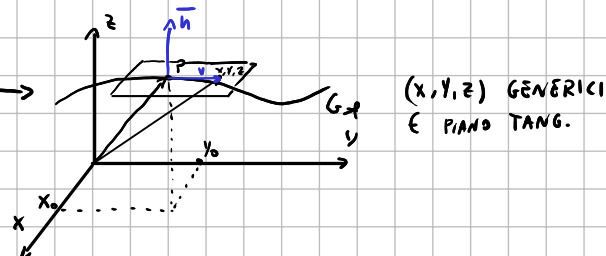
$$\bar{n} := \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}{\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \|}$$

DOVE $\bar{a} \wedge \bar{b}$ ($\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3$) = $\det \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ CON \bar{e} BASE CANONICA
 e $\bar{a} \wedge \bar{b}$ ORTOGONALE A \bar{a} e \bar{b}

$$\text{IN } \mathbb{R}^3 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$\bar{h} = \left(\frac{-f_x(x_0, y_0)}{\sqrt{f_x^2(x_0, y_0) + f_y^2(x_0, y_0)}}, \frac{-f_y(x_0, y_0)}{\dots}, \frac{1}{\dots} \right)$$

GRAFICAMENTE \rightarrow



DA QUESTA RELAZIONE RICAVIAMO CHE: $V = (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0))$ È \perp A \bar{h} : $\langle V, \bar{h} \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$

E DA CUI LA FORMULA DEL PIANO TANGENTE: $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

STUDIO DI ESTREMI LOCALI

DERIVATA DI ORDINE SUPERIORE:

DATA $f: A \subseteq \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: A \subseteq \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$ $i, j = 1, \dots, h$

DI CIAMMO f È DERIVABILE 2 VOLTE RISPETTO A x_j SE:

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ e poniamo } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

TEOREMA DI SCHWARZ:

HP: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A APERTO, $f \in C^2(A)$ (\exists DERIVATE SECONDE E SONO CONTINUE SU A)

$$\text{TH: } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \quad i, j = 1, \dots, h$$

MATRICE HESSIANA:

HP: $f: A \subseteq \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$

$$\text{TH: LA MATRICE HESSIANA DI } f \text{ IN } x_0 \in A \text{ È: } H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0), & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0), & \dots \\ \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_h^2}(x_0) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} &\bullet \text{ SIMMETRICA PER TED. SCHWARZ} \\ &\bullet \text{ TUTTI GLI AUTOVALORI SONO REALI} \end{aligned}$$

(SOLUZ. DI $\det(H_f(x_0) - \lambda I_h) = 0$)

MATRICE QUADRATICA ASSOCIATA

DATA UNA MATRICE $H = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,h}$ ASSOCIO UNA FUNZIONE $q_H: \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$ (FORMA QUADRATICA ASSOCIATA AD H)

$$h \in \mathbb{R}^h \mapsto \langle Hh, h \rangle_{\mathbb{R}^h} = \sum_{i,j=1}^h a_{ij} h_i h_j$$

- POSITIVA: $q_H(h) > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^h - \{0\}$
- NEGATIVA: $q_H(h) < 0$
- INDEFINITA: $\exists h_1, h_2 \text{ t.c. } q(h_1) < 0 < q(h_2)$

TEOREMA (CORRISPONDENZA AUTOVALORI - q_H)

HP: H SIMMETRICA, q_H FORMA QUADRATICA

$$\text{TH: } \begin{aligned} 1) & \quad q_H \text{ POSITIVA} \iff \text{TUTTI AUTOV. POSITIVI} \\ 2) & \quad \text{NEGATIVA} \iff \text{NEGATIVI} \\ 3) & \quad \text{INDEFINITA} \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \text{ t.c. } \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \end{aligned}$$

UN "MINORE PRINCIPALE" È UN MINORE OTTENUTO CANCELLANDO RIGHE E COLONNE DELLO STESSO INDICE

- q_H POSITIVA: TUTTI I MINORI PRINCIPALI SONO \oplus
- NEGATIVA: MINORI PRINCIPALI DI INDICE PARI SONO \oplus , I DISPARI \ominus
- INDEFINITA: $\det(H) \neq 0$ e \exists MINORE PRINCIPALE DI ORDINE PARI NEGATIVO

DEFINIZIONE MAX E MIN LOCALE

DATA $f: A \subseteq \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

x_0 È MAX SE: $\exists r > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap A$

MIN SE: $f(x) \geq f(x_0)$

1. PER TEO FERMAT: SE $x_0 \in \mathbb{A}$, $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$ NON VALE IL VICEVERSA.