ESERCIZIO BERNOULLI

$$(PC)\begin{cases} y' = y(1+e^{-2x}\cos(3x)\,y^2) \\ y(0) = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{RISCRIVO NELLA FORMA DELL'EQ. DI BERNOULLI}} \begin{cases} y' - \overset{p(x)y}{y} = \boxed{e^{-2x}\cos(3x)}^{\,q(x)}\, y^{3\,(\alpha)} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

DIVIDO PER y^α E CONTROLLO I CASI: $y=0 \Rightarrow 0'-0=0$ ✓ MA NON SOLUZ. (PC); $y\neq 0$ *

$$* \quad \frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} = e^{-2x}\cos(3x) \Rightarrow$$

EFFETTUO IL CAMBIO $z(x) = \frac{1}{(y(x))^2}$ e $z' = \frac{(1)'y^2 - 1\cdot(y^2)'}{y^4}\cdot y' = -\frac{2y\cdot y'}{y^4} = -\frac{2y'}{y^3}$ e SOSTITUISCO NELL' EQUAZIONE ORIGINALE

$$-\frac{z'}{2} - z = e^{-2x}\cos(3x) \Rightarrow z' + 2z = -2e^{-2x}\cos(3x)$$

APPLICO LA FORMULA RISOLUTIVA: $z(x) = e^{P(x)}\cdot\left(c + \int e^{P(x)}\cdot q(x)\,dx\right)$

- $\int p(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x + c \quad P(x) = 2x \quad (c=0)$
- $z(x) = e^{-2x}\left(c + \int e^{2x}\cdot(-2e^{-2x}\cos(3x))\,dx\right) = e^{-2x}\cdot\left(c - \frac{2}{3}\int 3\cos(3x)\,dx\right) = e^{-2x}\cdot\left(c - \frac{2}{3}\sin(3x)\right)$

$$\frac{1}{y^2} = e^{-2x}\left(c - \frac{2}{3}\sin(3x)\right) \Rightarrow y^2 = \frac{e^{2x}}{c - \frac{2}{3}\sin(3x)} \Rightarrow y(x) = \pm\frac{e^x}{\sqrt{c - \frac{2}{3}\sin(3x)}}$$

INTEGRALE GENERALE: (SOLZ. ED) $\Rightarrow y = \pm\frac{e^x}{\sqrt{c - \frac{2}{3}\sin(3x)}}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} - \{\sin(3x) < \frac{3}{2}c\}$ se $c > \frac{2}{3}$ SEMPRE VERIFICATA $\sin(3x) < 1$

RISOLVIAMO (PC) $\Rightarrow \pm\frac{e^0}{\sqrt{c - \frac{2}{3}0}} = -1$

$\oplus$: $\frac{1}{\sqrt{c}} = -1$ IMPOSS!

$\ominus$: $-\frac{1}{\sqrt{c}} = -1 \Rightarrow c = 1$

$$y(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin(3x)}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

SE $y(0) = -\sqrt{3}$
$-\frac{1}{\sqrt{c}} = -\sqrt{3}$
$\sqrt{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

QUINDI $\longrightarrow$ $y(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sin(3x)}}$ $\quad \forall x$ t.c. $\sin(3x) < \frac{1}{2}$ cioè: $x \in \left(-\frac{7}{18}\pi, \frac{1}{18}\pi\right)$

EQUAZIONE DI RICCATI:

$$(PC)\begin{cases} y' - y^2 + 2xy - y = x^2 - x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

① TROVO UNA SOLUZIONE (PARTICOLARE DELL' ED)

PROVO UNA COSTANTE $y_0 = A \Rightarrow \cancel{A'} - A^2 + 2xA - A = x^2 - x + 1$
$-A^2 + 2xA - A = x^2 - x + 1$ $\nexists\, A$ CHE SODDISFA L'IDENTITÀ $\Rightarrow$ NO SOLZ. IDENTITÀ

PROVO QUINDI UN POLINOMIO DI GRADO 1: $y_0(x) = Ax + B \Rightarrow (Ax+B)' - (Ax+B)^2 + 2x(Ax+B) - (Ax+B) = x^2 - x + 1$

$$= A - A^2x^2 - B^2 - 2ABx + 2Ax^2 + 2Bx - Ax - B = x^2 - x + 1$$

$$\begin{cases} -2AB + 2B - A = -1 \\ A - B^2 - B = 1 \\ -A^2 + 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A-1)^2 = 0 \Rightarrow A = 1 \\ \cancel{1} - B^2 - B = \cancel{1} \Rightarrow B(B+1) = 0 \quad B=0,\ B=-1 \\ -1 + 2 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \ ✓ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ HO 2 SOLUZ. PARTICOLARI: $y_0(x) = Ax + B$: $y_0(x) = x$; $y_0(x) = x - 1$

② CAMBIO VARIABILE CON $y = y_0 + \frac{1}{z} \Rightarrow y(x) = x + \frac{1}{z(x)}$ e SOSTITUISCO:

$$\left(x + \frac{1}{z(x)}\right)' - \left(x + \frac{1}{z(x)}\right)^2 + 2x\left(x + \frac{1}{z(x)}\right) - \left(x + \frac{1}{z(x)}\right) = x^2 - x + 1$$

$$\cancel{1} - \frac{1}{z^2}z' - \cancel{x^2} - \cancel{\frac{2x}{z}} - \frac{1}{z^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{\frac{2x}{z}} - \cancel{x} - \frac{1}{z} = \cancel{x^2} - \cancel{x} + \cancel{1} \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow z' - 1 - z = 0 \Rightarrow z' - z = 1$$

RISOLVO CON TEOREMA 2

$$\int p(x) = \underbrace{x + c}_{c=0} = x$$

$z(x) = e^{-x}\cdot\left(c + \int e^x \cdot -1\,dx\right) \Rightarrow ce^{-x} - 1$ POI PONGO $y(x) = x + \frac{1}{z} \Rightarrow x + \frac{1}{ce^{-x} - 1}$ PONGO $y(0) = 1 \Rightarrow 0 + \frac{1}{c-1} = 1 \Rightarrow 1 = c - 1$, $c = 2$

SOLUZ: $y(x) = x + \frac{1}{2e^{-x} - 1}$ $\quad x \neq \ln(2)$ e INTERVALLO MASSIMALE $(-\infty, \ln(2))$
