• EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

▲ FORMA GENERALE:

$$E(y, y', \dots, y^{(k)}, t) = 0 \qquad t \in I$$

↳ VARIABILE INDIPENDENTE

ALTRE NOTAZIONI PER FUNZIONI DERIVATE

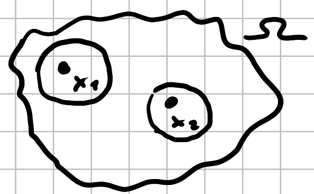
$$y' = \frac{dy}{dt} \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad y^{(k)} = \frac{d^k t}{dt^k}$$

• UNA **SOLUZIONE** È UNA y CHE SODDISFA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

DEFINIZIONE RIGOROSA:

SIA $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega$ "APERTO"

APERTO = $\forall x \in \Omega$, ESISTE UN DISCO CENTRATO IN x TUTTO CONTENUTO IN Ω
$D_x \subset \mathbb{R}$



UNA $y: I \to \mathbb{R}$ è SOLUZ. SE

- y è DERIVABILE SU I
- $(x, y(x)) \in \Omega$, $\forall x \in I$
- $y'(x) = f(x, y)$ $\quad \forall x \in I$

• L'**ORDINE** È L'ORDINE MASSIMO DELLE DERIVATE COINVOLTE NELL' EQUAZIONE

• NON TUTTE LE EQ. DIFFERENZIALI HANNO SOLUZIONE IN GENERALE CI DOBBIAMO CHIEDERE (SULLA SOLUZIONE):

- ESISTENZA
- UNICITÀ
- MOLTEPLICITÀ
- SOLUZIONI ESPLICITE (CIOÈ SVOLGIMENTO e RICERCA)

• **ESEMPIO NOTEVOLE: MALTHUS** $(y' = ky)$

- HA SOLUZIONE $y = c \cdot e^{kt}$ (TROVATA MOLTIP. PER e^{-kt})
- QUESTA y INGLOBA TUTTE LE SOLUZIONI POSSIBILI

▲ PROBLEMA DI CAUCHY

SELEZIONA UNA SOLUZIONE PARTICOLARE CON UNA CONDIZIONE INIZIALE

ES: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ EQ. DIFF. / CONDIZ. INIZIALE

$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e NOTI

UNA CERTA y È SOLUZIONE SE:

- $y = y(x)$ SODDISFA $y' = f(x, y)$ SU QUALCHE INTERVALLO
- $x_0 \in I$
- $y(x_0) = y_0$

▲ EQ. DIFFERENZIALE DI PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

$$(1)\quad y' = f(\underbrace{x}_{\text{VARIABILE INDIPENDENTE}}, \underbrace{y}_{\text{FUNZ. INCOGNITA}})$$

COEFF. y' SEMPRE 1

▲ TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE RIVISITATO

$f : [a, b]$ $\forall x \in [a, b]$ CONTINUA

$$y(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0, \quad \forall x \in [a, b]$$

È SOLUZIONE UNICA DEL PC

- DIM IMMEDIATA: $\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0\right)' = y(x_0) = f(x)$ ✓

e $y(x_0) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt}_{0} + y_0 \Rightarrow y(x_0) = y_0$

- DIM UNICITÀ

SUPPONGO $\begin{cases} y_1' = f(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y_2' = f(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$

SOTTRAGGO

$\begin{cases} (y_1 - y_2)' = f(x) - f(x) = 0 \\ (y_2 - y_1)x_0 = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$ e $M = y_1 - y_2 \Rightarrow \begin{cases} M' = 0 \\ M(x_0) = 0 \end{cases}$

CIOÈ:

$M(x) = c$ ($M' = 0$ SOLO CON f COSTANTE)

e $M(x) = 0$ QUINDI $c = 0$ $\forall x \in [a, b]$

CIOÈ $y_1 = y_2$

- UN PC PUÒ AVERE INFINITE SOLUZIONI (ES: PEANO) $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

QUESTO HA SOLUZIONE BANALE $y = 0$

MA ANCHE $y(x) = (x+c)^3$

PEANO RISOLVE CONSIDERANDO $y(-c) = 0$ CON $c < 0$

$$y_c(x) = \begin{cases} (x+c)^3 & x > -c \\ 0 & x \leq -c \end{cases}$$

- QUESTO È UN ES DI EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = a(x)\,b(x) \quad , \quad b(y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

e INTEGRANDO $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\,dx = \int a_x\,dx$ e PER SOSTITUZIONE

$$\int \frac{dy}{b(y)}$$

- EQ. LINEARI DEL PRIMO ORDINE A COEFF. VARIABILI

FORMA GENERALE: $y' + p(x)\,y = q(x)$ $\quad p(x), q(x) \in C(I)$

$C(I) \Rightarrow$ CLASSE DI f CONTINUE IN I

OPPURE: $y' = \underbrace{q(x) - p(x)\,y}_{f(x,y)}$ o $\mathcal{L}y = q(x)$ DOVE $\mathcal{L}y := y' + p(x)\,y$

- PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y_1, y_2 DERIVABILI SU I e $\mathcal{L}y = \mathcal{L}(y)$:

- $\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\,\mathcal{L}y_1 + \beta\,\mathcal{L}y_2$

DIM:

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha y_1' + \beta y_2' + \alpha p(x) y_1 + \beta p(x) y_2$$

- RACCOLGO α e β $\Rightarrow \alpha(y_1' + p(x)y_1) + \beta(y_2' + p(x)y_2)$

$= \alpha\,\mathcal{L}(y_1) + \beta\,\mathcal{L}(y_2)$ ✓

- TEOREMA DELLE EQ. DI PRIMO ORDINE LINEARI

UNA EQ. IN FORMA $y' + p(x)\,y = q(x)$ È

(A) $y(x) = e^{-P(x)} \left\{ c + \int e^{P(x)} \cdot q(x)\,dx \right\}$

DOVE $P(x)$ RAPPRESENTA UNA GENERICA PRIMITIVA (CON C "INGLOBATA")

(B) IL PC

$$\begin{cases} y' + p(x)\,y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x_0 \in I$$

HA SOLUZIONE UNICA GRAZIE ALLA CONDIZ. INIZIALE (CIOÈ TROVA LA C)

DIM (B)

PONGO $Q(x) = \int e^{P(x)} \cdot q(x)\,dx$ e QUINDI: $y_0 = y(x_0) = e^{-P(x)} \{ c + Q(x) \}$

e $c = y_0 e^{P(x)} - Q(x_0)$

UNICITÀ:

$$\begin{cases} y_1' + p(x)\,y_1 = q(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2' + p(x)\,y_2 = q(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- SOTTRAGGO

$$\begin{cases} y_1' - y_2' + p(x)(y_1 - y_2) = q(x) - q(x) = 0 \\ y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

e PONGO $M = y_1' - y_2'$

$$\begin{cases} M' + p(x)\,M = 0 \\ M(x_0) = 0 \end{cases}$$

CHE È UN CASO DEL PC DI (A), QUINDI RISOLVO CON FORMULA

$$M(x) = e^{-P(x)} \{ c + e^{P(x)} \cdot 0) = c\,e^{-Px}$$

e VISTO CHE $M(x_0) = 0$ (e L'ESPONENZIALE NON SI ANNULLA)
ALLORA $c = 0$

e $M(x) = 0 \quad \forall x \in I$ CIOÈ $\boxed{y_1 = y_2}$ ✓

DIM (A)

CON IL "METODO DEL FATTORE INTEGRANTE"

PONGO $M(x) = \exp \int p(x)\,dx > 0$

$M'(x) = \exp \int p(x)\,dx \cdot p(x) = M(x) \cdot p(x)$ (DERIVATA ESPONENZIALE)

- MOLTIPLICO PER $M(x)$

$$y'\,M(x) + p(x)\,y\,M(x) = q(x)\,M(x)$$

CIOÈ $\quad y' M(x) + M'(x) y = q(x) M(x)$

$$(y(x) M(x))' = q(x) M(x)$$ E INTEGRANDO

$$y(x) = \frac{\int q(x) M(x)\, dx}{M(x)} \quad \checkmark$$

- **EQUAZIONE DI BERNOULLI:**

RISOLVE LE EQUAZIONI DI TIPO: $y' + p(x) y = q(x) y^{\alpha}$, $p(x)$ e $q(x) \in C(I)$

$\alpha = 1$ e 0 SONO GIÀ NOTI e ASSUMO $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

DIVIDO PER y^{α}

$y' y^{-\alpha} + p(x) y^{1-\alpha} = q(x)$ e PONGO $z := y^{1-\alpha}$ e $z' := (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$

RISCRIVENDO CON z... $\frac{z'}{1-\alpha} + p(x) z = q(x) \Rightarrow z' + p(x)(1-\alpha) z = q(x)(1-\alpha)$

RISOLVIBILE CON TEOREMA DELLE EQ. DI 1 ORDINE LINEARI (TEO. 2)

- **EQUAZIONE DI RICCATI:**

$\underline{y' = r(x) + p(x) y + q(x) y^2}$ * $\quad r, p, q \in C(I)$ e CONOSCIAMO PER HP $y_0' =$ *

RISOLUZIONE

USO $z(x)$ COME $\Rightarrow y(x) = y_0(x) + \boxed{\frac{1}{z(x)}}$ SAREBBE IL "RESTO" e DERIVO:

$y' = y_0' - \frac{1}{z^2} \cdot z'$ e SOSTITUISCO NELLA FORMULA INIZIALE

$$\Rightarrow \cancel{y_0'} - \frac{z'}{z^2} = \cancel{r(x)} + p(x)\left(\cancel{y_0(x)} + \frac{1}{z(x)}\right) + q(x)\left(\cancel{y_0^2(x)} + \frac{2y_0(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right)$$ PERCHÈ y_0 È SOLUZIONE

$$= -\frac{z'}{z^2} = \frac{p(x)}{z(x)} + \frac{2y_0(x) q(x)}{z(x)} + \frac{p(x)}{z^2(x)} = 0 \quad \left(\text{MOLTIPLICO PER } z(x)\right) \Rightarrow z' + 2q(x) y_0(x) - z = -q(x) z$$

FORMA APPLICABILE AL TEO. 2 SU z, e TROVO y CON $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$