

APPROFONDIMENTO SUL TEO. 10

PER IL TEO. FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: $\Phi(x) = (x-\lambda_1)^{h_1} \dots (x-\lambda_m)^{h_m}$ (OGNI POLINOMIO PUO' ESSERE SCOMPOSTO IN m RADICI) CON MOLTEPLICITA' h_m

NEL NOSTRO CASO, POSSONO ANCHE ESSERE COMPLESSE. NEL NOSTRO TEOREMA, h E' LA MOLTEPLICITA'.

OSSERVAZIONE: $\lambda \in \mathbb{C}$ RADICE $\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ RADICE ($\bar{\lambda}$ E' IL COMPLESSO CONIUGATO)
PERCHÉ $\overline{\Phi(\lambda)} = \Phi(\bar{\lambda})$

ES: $\Phi(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $a_i \in \mathbb{R}$. SUPPONGO $\lambda \in \mathbb{C}$:
 $\rightarrow \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \rightarrow \overline{\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0} = \bar{0} \rightarrow \bar{\lambda}^3 + \bar{a}_2\bar{\lambda}^2 + \bar{a}_1\bar{\lambda} + \bar{a}_0 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \bar{\lambda}^3 + a_2\bar{\lambda}^2 + a_1\bar{\lambda} + a_0 = 0$ (TRAMITE LE PROP: [1] $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ e [2] $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$)

ABBI O DIMOSTRATO CHE: $\alpha + i\beta$ E' RADICE $\Leftrightarrow \alpha - i\beta$ E' RADICE (CONIUGATO COMPLESSO) *1

"ST SA" TEO. 3

SO $\lambda \in \mathbb{C}$ E' RADICE CON MOLTEP. h
 $z_i(x) = x^i e^{\lambda x}$, $i=0, 1, \dots, h-1$ (PER QUESTO CON $\lambda=0$ AVENDO e^x e $x e^x$)

GENERALIZZAZIONE TEO 3:

$$\sum_{j=1}^v h_j + 2 \sum_{j=2}^s t_j = k \quad \text{DOVE } h_i \text{ E' LA MOLTEPLICITA' DELLA RADICE REALE } \lambda_j$$

" " t_j " " COMPLESSA $\alpha_j + i\beta_j$
 k E' L'ORDINE DELL'EQ. DIFFERENZIALE

IL 2 VIENE DAL FATTO CHE SIA $\alpha + i\beta$ CHE $\alpha - i\beta$ SONO RADICI! *3

ALLORA

$\rightarrow x^{h_i} e^{\lambda_i x}$	$i=0, \dots, h-1$	} SPAZIO DI SOLUZIONI DI $\mathcal{L}(y)=0$ (LIN. INDIP.)
$\rightarrow x^{t_i} e^{\alpha_i x} \cos(\beta_i x)$	$i=0, \dots, t-1$	
$\rightarrow x^{t_i} e^{\alpha_i x} \sin(\beta_i x)$	$i=0, \dots, t-1$	

ALLO STESSO MODO PUO' ESSERE GENERALIZZATO ANCHE IL TEO. 10

ESEMPIO: $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = 0$

$$\Phi(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$\lambda=0$ RADICE
 $\lambda = 1, 2 \in \mathbb{R}$

TUTTE RADICI REALI

$0 \rightarrow h=2$	$\rightarrow w_1 = e^{0 \cdot x} = 1$ e $w_2 = x \cdot e^{0 \cdot x} = x$
$1 \rightarrow h=1$	$\rightarrow w_3 = e^x$
$2 \rightarrow h=2$	$\rightarrow w_4 = e^{2x}$

SOLU: $C_1 \cdot 1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{2x}$ CON $C_i \in \mathbb{R}$ $i=(1,2,3,4)$

ESERCIZIO: $y^{(3)} + 2y^{(2)} + y^{(1)} = x+2$ *

1. RIFERIMENTI ALLA TEORIA: EQ. DIFF. DI $K=3$, COEFF. COSTANTI IN \mathbb{R} , LINEARE

2. ~~6, 7, 8, 9, 10~~ (TEOREMI APPLICABILI) * si con $\alpha=0, \beta=0$ e USANDO IL COSENO

~~NON E' PC~~
~~NON E' PER TRAVARE~~
~~DEL GENERALE~~

3. SOLUZIONE GENERALE:

$$\mathbb{E} = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda \rightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \rightarrow \lambda=0 \quad h=1$$

$$\lambda = -1 \quad h=2$$

$w_1 = 1$
 $w_2 = e^{-x}$
 $w_3 = x e^{-x}$

$$y(x) = y_{\text{part}}(x) + C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$$

ESERCIZIO PER CASA: $y'' + y' + 2y = x^2 + x - 3$

SOLUZIONE:

1. STRUTTURA $L(y) = b(x)$ $b(x) \in C(I)$ e $L(y)$ a COEFF. COSTANTI e PER TEO. 7: $y(x) = y_*(x) + C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3$

QUINDI TROVO $\Phi(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)^2$
 QUINDI $\lambda=0$ RADICE CON $h=1 \rightarrow$
 $\lambda=-1$ RADICE CON $h=2 \rightarrow$

$e^{\lambda x} = e^{-x} = 1$ (w_1)
 $e^{\lambda x} = e^{-x}$ (w_2) e $x e^{\lambda x} = x e^{-x}$ (w_3)

SOLUZIONE PARTICOLARE $L(y) = b(x)$

SOL. GENERALE DI $L(y) = 0$ (TEO. 9)

SOL. GENERALE EQ. OMOGENEA $L(y) = 0$

POSSO APPLICARE TEO. 10: $b(x) = x+2 \rightarrow p_1(x) \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, CON $\alpha=0$ e $\beta=0$
 QUINDI: $y_* = x^h e^{\alpha x} (p_2^*(x) \cos(\beta x) + q_1^*(x) \sin(\beta x)) = x^h (p_1^*(x))$ DOVE h È LA MOLTIPLICITÀ DI $\alpha+i\beta=0$ ($h=1$)

$y_* = x(ax+b) \Rightarrow y_*' = 2ax+b$; $y_*'' = 2a$; $y_*''' = 0$ e SOSTITUISCO NELL'EQ. DIFFERENZIALE

$0 + 4a + 2ax+b = x+2 \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 4a+b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \end{cases}$ QUINDI: $y_* = \frac{1}{2}x^2$

CONCLUSIONE: $y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$