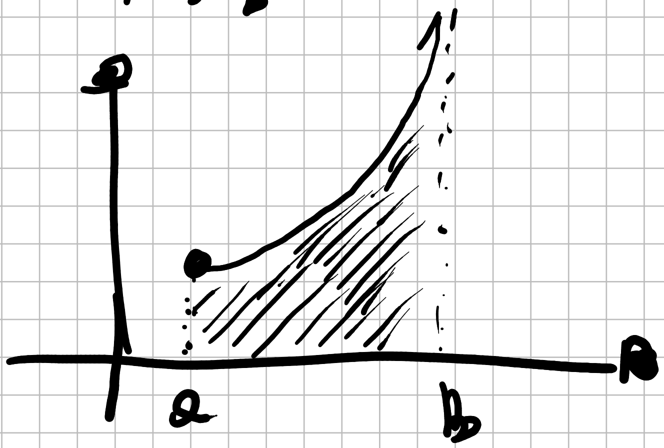
INTEGRALI GENERALIZZATI

IN UN INTERVALLO NON LIMITATO:

ES) $f(x)$ IN $[a, b) \to \mathbb{R}$ INTERVALLO APERTO

CON $\lim_{x \to b^{\pm}} f(x) = \pm\infty$



f CONTINUA $\forall \beta < b$

NELL' INTERVALLO $[a, \beta]$

DEF

SE ESISTE, FINITO

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$ ALLORA f È INTEGRABILE

(IN SENSO GENERALIZZATO O IMPROPRIO)

SU $[a, b)$ E SI INDICA $\int_a^b f(x)\,dx$

E DIREMO CHE È CONVERGENTE

SE INVECE IL LIMITE È $\pm\infty$ ALLORA

È DIVERGENTE

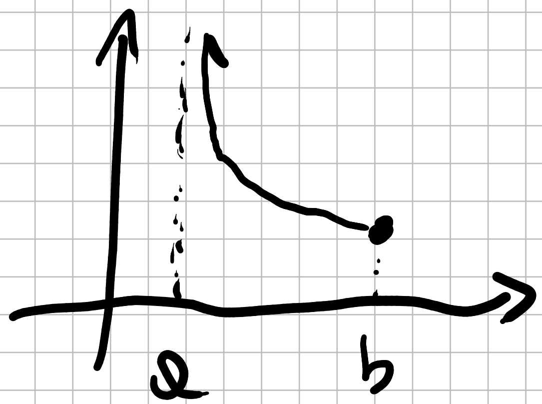
SE NON ESISTE, NON HA SENSO

ALLO STESSO MODO:

$f(x)$ IN $(a, b]$ (APERTO IN a)

f È CONTINUA IN $[\alpha, b]$ $\forall \alpha > a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$



DEF FORMULA DI SPEZZAMENTO

SE $f(a, b) \to \mathbb{R}$ ED È INTEGRABILE IN $[\alpha, \beta]$ $\alpha > a$ e $\beta < b$

SCELGO $c \in (a, b)$

ALLORA f È INTEGRABILE SU $(a, c]$ e $[c, b)$ e:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

SE UNO TRA $\int_a^c \dots$ e $\int_c^b \dots$ DIVERGE, ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx$ DIVERGE

NEGLI ALTRI CASI, NON HA SENSO

$\boxed{\text{OSS}}$

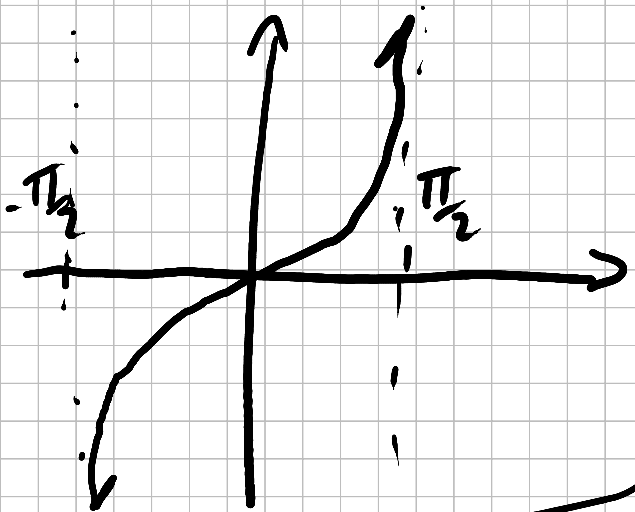
PER GLI INTEGRALI GENERALIZZATI, VALGONO SOMMA e CONFRONTO

ESEMPIO

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)\,dx \;\ast =$$

→ DOMINIO CORRETTO ✓

→ $\lim_{x \to \pm\pi/2} \tan(x) = \pm\infty$



$$\ast = \int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \Big[-\log(\cos x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$$

$$= -\log\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right| + \log\left|\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right| =$$

$$= -\log|\sin(+\varepsilon)| + \log(\sin(\varepsilon))$$

FORMA INDETERMINATA / $\boxed{-\infty+\infty}$

FORMULA DI SPEZZAMENTO NON VERIFICATA

ESEMPIO NOTEVOLE

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{in} \quad (0, 1]$$

- SE $\alpha \leq 0$ la f è INTEGRABILE
- SE $\alpha > 0$ $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$

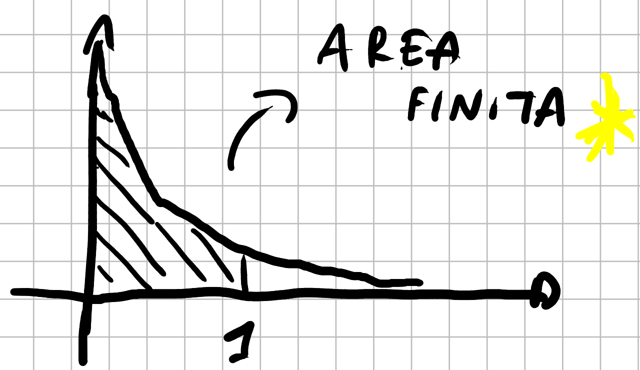
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} [\log x]_\varepsilon^1 \\ \left[\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\log \varepsilon & \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} \qquad 1-\alpha \to \beta$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \to \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

QUINDI:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty \quad \text{se} \quad 0 < \alpha < 1$$



ES $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty$

CALCOLO:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx \to \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx \cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right]_\varepsilon^1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2-\cancel{2\sqrt{\varepsilon}}\right] = 2$$ AREA *

CRITERI DI INTEGRABILITÀ AL FINITO

$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ CONTINUA T.C.

$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$

TEOREMA CRITERIO DEL CONFRONTO:

SE $0 \le f(x) \le g(x)$ in $[a,b)$ ALLORA

1) SE g È INTEGRABILE $\Rightarrow$ f INTEGRABILE

2) SE f DIVERGENTE $\Rightarrow$ g DIVERGENTE

TEOREMA CONFRONTO ASINTOTICO

$f>0$ e $g>0$ $f \sim g$ PER $x\to b$

(CIOÈ $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$)

ASINTOTICAMENTE UGUALE

ALLORA

f INTEGRABILE $\iff g$ INTEGRABILE

ESEMPIO

STUDIA $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3}\cos^2 x}\,dx$ NON CONTINUA IN 0

TRA $]0,1] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$\displaystyle\lim_{x\to 0} = +\infty$ QUINDI $\to \dfrac{e^x}{\sqrt[4]{x^3}\cos^2 x} \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

PERCHÉ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\cancel{\sqrt[4]{x^3}}\cos^2 x}\cdot \cancel{\sqrt[4]{x^3}} = 1 \in \mathbb{R}$

PER CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO:

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ È EQUIVALENTE a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int_0^1 x^{-3/4}\,dx < +\infty$

TEOREMA

SE $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$ ALLORA $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$

ESEMPIO

$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}\,dx$ CONVERGE PERCHÈ

$$\int_0^1 \frac{|\operatorname{sen}x|}{\sqrt{x}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx < +\infty$$

INTEGRAZIONE SU INTERVALLI ILLIMITATI

- SIA $f\,[a,+\infty)$ CONTINUA

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

SE QUESTO ESISTE ED È FINITO, ALLORA CONVERGE, SE NO NON HA SENSO

- ANALOGO PER f IN $(-\infty, a]$

....

ESEMPIO NOTEVOLE

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ in $[1,+\infty)$

$\alpha < 0$ DIVERGE

$\alpha \geq 0$ $\to$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \begin{cases} [\log x]_1^b & \alpha = 1 \\ \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^b & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\to \lim_{b\to+\infty} \begin{cases} \log b & \alpha = 1 \\ \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ 1/(1-\alpha) & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \le 1 \end{cases}$$

RIASSUMENDO

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$$

- $0 < \alpha < 1$ CONVERGE $\int_0^1 \ldots$
- $\alpha = 1$ NON ESISTE
- $\alpha > 1$ CONVERGE $\int_1^{+\infty} \ldots$

OSS I TEOREMI DI CONFRONTO e DI CONFRONTO ASINTOTICO VALGONO PER INTEGRABILITÀ AD INFINITO

ESEMPIO

VALUTARE ESISTENZA DI $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = 2+2 = 4$ $\int_{-1}^{0} \ldots + \int_0^1 \ldots$