ESERCIZI. CALCOLARE, SE $\exists$, I LIMITI

1) $\lim_{x,y \to 0,0} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

2) $\lim_{x,y \to 0,0} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$

SOLUZ. VALE PER ENTRAMBE $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , y=0, x \neq 0\}$ $\quad f|_B (x,y) = 0$
QUINDI SE I LIMITI $\exists$, SONO $=0$.

1) DEFINISCO $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y>0,\ x = y^3\}$. $\quad f|_D (x,y) = \frac{y^6}{y^6+y^6} = \frac{1}{2} \neq 0$ NON ESISTE

2) NOTIAMO CHE SECONDO LA DEF. DI LIMITE $\lim_{x,y \to 0,0} f(x,y) = 0$ È EQ. A $\lim_{x,y \to 0,0} |f(x,y)| = 0$.

POSSO USARE $0 \leq |f(x,y)| \to 0 \leq \frac{|xy^3|}{x^2+y^4} = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^4}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{|y^3|}{\sqrt{x^2+y^4}}}_{g(x,y)} = \underbrace{\frac{y^2}{\sqrt{y^4+x^2}}}_{\leq 1} \cdot |y| \Rightarrow 0 \leq |f(x,y)| \leq |y| \leq \sqrt{y^2+x^2} \to 0$ CIOÈ $\lim_{x,y \to 0,0} |f(x,y)| = 0$
$\iff \lim_{x,y \to 0,0} f(x,y) = 0$

CONTINUITÀ DI FUNZIONI:

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $p \in A$, DICIAMO CHE f È CONTINUA IN p SE $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $\|f(x) - f(p)\| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ t.c. $\|x - p\| < \delta$

TEOREMA:
HP: se $p \in A_{cc}(A)$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
TH: f è CONTINUA IN $p \iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

- POSSO USARLO DEFINENDO $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$ e ORA È CONTINUA

INSIEME APERTO e INSIEME CHIUSO

$A \in \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- x_0 È UN PUNTO INTERNO DI A SE $\exists r > 0$, t.c. $B(x_0, r) \subseteq A$
- x_0 È UN PUNTO DI FRONTIERA DI A SE $\forall r > 0$: $\begin{cases} B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x_0, r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$
- x_0 È UN PUNTO DELLA CHIUSURA DI A SE $\forall r > 0$ SI HA $B(x_0, r) \cap A \neq 0$

$\to$ SEGUE CHE $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$
e SI VERIFICA:
$\bar{A} = \mathring{A} \cup F_r(A)$
$\bar{A} = A \cup A_{cc}(A)$

DEFINIZIONE:
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ È APERTO SE $A = \mathring{A}$
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ È CHIUSO SE $A = \bar{A}$

PROPOSIZIONE: A È APERTO $\iff$ A^c È CHIUSO
A È CHIUSO $\iff$ A^c È APERTO

ESEMPIO: $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ È APERTO: "$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$"
" CHIUSO: "$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$"

PROPOSIZIONE: SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA e $c \in \mathbb{R}$
ALLORA: $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\}$ È APERTO
$B = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ È CHIUSO

DIM: SIA $x \in A$, APPLICO LA DEF. DI CONTINUITÀ: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall y$ t.c. $\|y - x\| < \delta$ VALE $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
ed EQUIVALENTEMENTE $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$. SCELGO $\varepsilon < c - f(x)$, QUINDI $\forall y$ t.c. $\|y - x\| < \delta$ VALE
$f(y) < f(x) + \varepsilon \leq f(x) + c - f(x) = c$ $\to$ $f(y) < c$ $\forall y$ t.c. $\|x - y\| < \delta$ CIOÈ $\forall y \in B(x, \delta)$ CIOÈ $B(x, \delta) \subseteq A$. HO TROVATO UNA BOLLA TUTTA CONTENUTA IN A

VISTO CHE x È ARBITRARIO e INTERNO, $\mathring{A} = A$.

DIM B È UGUALE.

ALTRI ESEMPI:

$-\infty < a \leq L < +\infty$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$A = \{x \in \mathbb{R}^n : a < f(x) < b\}$ APERTO
$B = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq f(x) \leq b\}$ CHIUSO
$\to$ IN GENERALE C, D APERTI $\to C \cup D$ È APERTO, $C \cap D$ È CHIUSO
C, D CHIUSO $\to C \cup D$ È CHIUSO, $C \cap D$ È CHIUSO

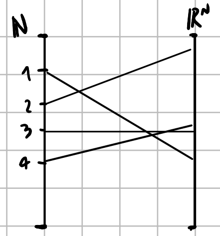
- INSIEMI LIMITATI:

SIA $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. DICIAMO A LIMITATO. SE $A \leq B(0,R)$, $R>0$ ABBASTANZA GRANDE.

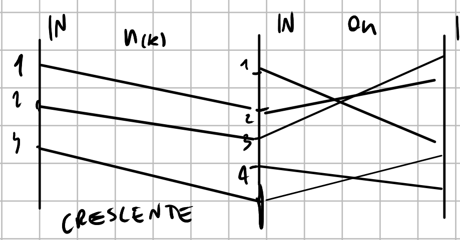
- SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}^n$:

DEF: $a_n : n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ ES: $a_n = (2^{-n}, \frac{1}{n}, 1)$

DEF: DATA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (INSIEME DEI PUNTI DELLA SUCC) $\subset \mathbb{R}^n$ CONVERGE A $l \in \mathbb{R}^n$ SE $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 > 0$ t.c. $\forall n > n_0$ $\|a_n - l\| < \varepsilon$



SIA $n(k)$ UNA FUNZIONE CRESCENTE da $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ CIOÈ $n(k+1) > n(k)$ ALLORA $a_{n_k} := a_{n(k)}$



UNA SOTTOSUCCESSIONE È UNA SUCCESSIONE COSTRUITA DALL'ORIGINALE CON DEI FILTRI

ES: $a_n = (2^{-n}, \frac{1}{n}, 1)$ e $n(k) = k^2 \Rightarrow a_{n_k} = (2^{-k^2}, \frac{1}{k^2}, 1)$ $\quad a_{n_k}$ È SOTTOSUCC. DI $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

COMPATTEZZA:

DEF: SIA $K \subset \mathbb{R}^n$. K È COMPATTO SE DA OGNI FAMIGLIA DI APERTI $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ t.c. $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ ("COPERTURA APERTA DI K") È POSSIBILE ESTRARRE UNA "SOTTOCOPERTURA FINITA" $O_1, O_2 \dots O_N \subset \{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ t.c. $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} O_i$

TEOREMA DI HEINE-BOREL

HP: $K \subset \mathbb{R}^n$

TH K È COMPATTO $\Longleftrightarrow$ CHIUSO e LIMITATO

COROLLARIO I: $K \subset \mathbb{R}^n$ COMPATTO. ALLORA OGNI SOTTOINSIEME K_∞ INFINITO DI K HA ALMENO UN PUNTO DI K CHE È DI ACCUM. PER K_∞

DIM:

SE NESSUN PUNTO DI K È DI ACCUMULAZIONE PER K_∞ $\forall x \in K$ È IL CENTRO DI UNA BOLLA $B(x, r_x)$ CONTENENTE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞ (x SE $x \in K_\infty$). ALLORA $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ e ALLO STESSO TEMPO NON È POSSIBILE ESTRARRE UNA SOTTOCOPERTURA FINITA (DATO CHE K_∞ È UN INSIEME INFINITO e CIASCUN $B(x, r_x)$ CONTIENE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞).

COROLLARIO II: OGNI SOTTOINSIEME INFINITO e LIMITATO DI $\mathbb{R}^n$ HA ALMENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE

DIM:

SIA K_∞ TALE INSIEME: DATO CHE È LIMITATO: $K_\infty \subset \overline{B(0,R)}$. DEFINISCO $K = \overline{B(0,R)}$ e VISTO CHE K È COMPATTO APPLICO COROLLARIO I e $\exists$ PUNTO DI ACC. DI K_∞

COROLLARIO III: K_∞ SOTTOIN. ∞ DI $\mathbb{R}^n$ e LIMITATO ($\exists$ PUNTO ACC. y), ALLORA $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_\infty$ t.c. $\lim_{n \to \infty} x_n = y$

DIM:

DATO $y \in Acc(K_\infty) \Rightarrow \forall r > 0$, $B(y, r) \setminus \{y\} \cap K_\infty \neq \emptyset$. PER FINI DIMOSTRATIVI, PRENDO $r = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \in B(y, \frac{1}{n}) \setminus \{y\} \cap K_\infty$ e INOLTRE $\|x_n - y\| < \frac{1}{n}$ (EQUIVALENTE A $x_n \in B(y, \frac{1}{n})$) CIOÈ $\lim_{n \to \infty} x_n = y$

TEOREMA DI BOLZANO - WEIESTRASS:

OGNI SUCCESSIONE $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ LIMITATA HA UNA SOTTO SUCC. CONVERGENTE

DIM: $E \overset{\text{DEF.}}{=} (x_n)_n \in \mathbb{N}$

- SE E È FINITO

RIGUARDA!

- SE E È INFINITO

$\forall r>0 \ \exists x_r \in E (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\|x_r - y\| < r$ e $B(y,r) \setminus \{y\} \cap E \neq 0$,

ALLORA POSSO USARE $r>0$ PRENDENDO $\|x_{n_1} - y\| < 1$ e $n_2 > n_1$ t.c. $\|x_{n_2} - y\| < \frac{1}{2}$ e IN GENERALE $n_k > n_{k-1} > \dots > n_1$

x_{n_k} t.c. $\|x_{n_k} - y\| < \frac{1}{k}$ CIOÈ $\underbrace{\lim_{k\to\infty} x_k = y}$

TEOREMA DI WEIESTRASS

$A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, COMPATTO. SIA $f: A \to \mathbb{R}$ CONTINUA SU A. <u>ALLORA</u>, ESISTONO $x, y \in A$ t.c. $f(x) \leq f(z) \leq f(y) \ \forall z \in A$

(x È UN PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO, y DI MAX ASSOLUTO).

PROPOSIZIONE: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$, <u>ALLORA</u>, $\exists$ DUE SUCCESSIONI $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.c.
- $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf f(A)$
- $\lim_{k\to\infty} f(y_k) = \sup f(A)$

DOVE $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ È SUCCESSIONE MINIMIZZANTE e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ È MASSIMIZZANTE

DIM (PER $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- SE $\sup f(A) = +\infty \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \ \exists y_k \in A$ t.c. $f(y_k) > k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(y_k) = +\infty = \sup f(A)$
- SE $\overbrace{\sup f(A)}^{=\ell} < \infty$. PER DEF DI SUPERIORE: • $f(y) \leq \ell \ \forall y \in A$ • $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists y_k \in A$ t.c. $\ell - \frac{1}{k} < f(y_k)$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \ \exists y_k \in A$ t.c. $\ell - \frac{1}{k} < f(y_k) \leq \ell$ e PER TEO. CONFRONTO $\to \lim_{k\to\infty} f(y_k) = \ell$