

Maria Rita Casali • Carlo Gagliardi • Luigi Grasselli

GEOMETRIA



**SOCIETÀ EDITRICE
ESCULAPIO**

MARIA RITA CASALI
Professore Ordinario di Geometria
Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche
Università di Modena e Reggio Emilia

CARLO GAGLIARDI
Professore Ordinario di Geometria
Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche
Università di Modena e Reggio Emilia

LUIGI GRASSELLI
Professore Ordinario di Geometria
Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria
Università di Modena e Reggio Emilia

ISBN 978-88-7488-976-1

Prima edizione: Luglio 2001

Ristampa corretta: Ottobre 2002

Seconda edizione: Settembre 2010

Terza edizione: Settembre 2016

Responsabile produzione: Alessandro Parenti

Redazione: Giancarla Panigali e Carlotta Lenzi

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E. Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico o commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del volume.

CLEARedi - Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali Corso di Porta Romana, n. 108 - 20122 Milano

e-mail: autorizzazioni@clearedi.org - sito: <http://www.clearedi.org>.



40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136

www.editrice-esculapio.it

Prefazione

Il presente testo sviluppa argomenti tradizionalmente trattati negli insegnamenti di “Geometria” (ovvero di “Algebra e Geometria”) nell’ambito delle lauree di primo livello, ed è particolarmente rivolto agli studenti dei vari Corsi di Laurea in Ingegneria, e di quelli in Matematica, Fisica e Informatica.

Il testo è suddiviso in due parti:

- *la prima parte contiene gli elementi fondamentali di Algebra lineare;*
- *la seconda parte, di carattere più propriamente geometrico, riguarda le principali proprietà degli spazi euclidei, sviluppando in tale ambito la teoria delle coniche e delle quadriche.*

L’esposizione risulta articolata, come ovvio per ogni teoria matematica, in Definizioni e Proposizioni (o Teoremi, nel caso in cui gli enunciati rivestano particolare importanza). Un ruolo significativo viene attribuito a Osservazioni ed Esempi atti a:

- *chiarire concetti, risultati, dimostrazioni;*
- *stimolare i necessari collegamenti tra i vari argomenti;*
- *motivare la genesi dei concetti e dei problemi;*
- *evidenziare i casi notevoli di particolare rilievo nell’ambito di una teoria generale;*
- *indicare possibili generalizzazioni o descrizioni alternative di una teoria.*

Ciò può consentire inoltre al Docente di “dosare” con maggiore libertà, secondo le proprie convinzioni ed esperienze didattiche, il peso da attribuire, durante le lezioni, ai vari argomenti del corso.

Definizioni, Proposizioni e Osservazioni sono dotati di una numerazione progressiva all’interno di ogni Capitolo; l’esposizione della teoria è arricchita inoltre da esempi notevoli, con numerazione autonoma all’interno di ogni Capitolo.

Con l’eccezione delle principali proprietà degli insiemi numerici fondamentali e dell’utilizzo di una teoria “ingenua”, non rigorosamente assiomatica, degli insiemi (peraltro, brevemente richiamata nel primo Capitolo), il testo appare essenzialmente auto-contenuto. In particolare, non risulta necessario alcun prerequisito di Geometria euclidea così come viene sviluppata, a partire da un sistema interno di assiomi, nelle Scuole secondarie.

Seguendo l’impostazione algebrica ormai dominante nelle varie teorie matematiche e quindi in una ottica di “algebrizzazione della Geometria”, i concetti e i risultati di natura geometrica, compresi quelli relativi alla Geometria euclidea, sono infatti ricavati da conoscenze di tipo algebrico precedentemente introdotte. Abbiamo cercato

tuttavia di non fare perdere contenuto geometrico a tali concetti, sia mediante il metodo con cui questi vengono presentati, sia facendo spesso ricorso a Osservazioni ed Esempi atti ad aiutare il lettore a ritrovare, pure in ambiti più generali, le proprietà geometriche già note.

La scelta privilegiata è stata quella di sviluppare la teoria, sia dal punto di vista algebrico che da quello geometrico, per spazi di dimensione finita n ; le dimensioni due e tre sono tuttavia sempre illustrate in modo dettagliato, come casi particolari e nelle loro specificità, sfruttandone le caratteristiche di rappresentatività. Tale scelta di generalità nella dimensione è dovuta essenzialmente a due considerazioni: da un lato riteniamo opportuno evitare inutili ripetizioni nella enunciazione della teoria per le varie dimensioni particolari, dall'altro siamo convinti che lo sviluppo della teoria in ambito ragionevolmente generale sia un ottimo stimolo allo sviluppo della capacità di astrazione e generalizzazione che è obiettivo fondamentale di ogni corso di matematica, anche nell'ambito dei nuovi ordinamenti degli studi universitari.

La presente III edizione risulta integrata, rispetto a quelle precedenti, in primo luogo con l'introduzione di test di valutazione al termine di ciascuna delle due parti (Algebra lineare e Geometria euclidea) in cui il testo è suddiviso, rendendo così possibile al lettore una verifica del proprio livello di comprensione delle tematiche trattate. È stata inoltre realizzata una rivisitazione sostanziale di alcuni argomenti (in particolare: i metodi di risoluzione dei sistemi lineari, la teoria delle isometrie, l'ampliamento proiettivo degli spazi euclidei), aggiungendo nuove osservazioni ed esempi lungo tutto lo sviluppo del testo.

L'edizione è infine integrata con una versione elettronica del testo e con contenuti online aggiuntivi (tra cui le soluzioni dei test di valutazione), reperibili alla pagina Web: <http://textincloud.editrice-esculapio.com>.

GLI AUTORI

Indice

Prefazione	1
Capitolo 1. Insiemi e relazioni	7
1. Insiemi	7
2. Operazioni fra insiemi	10
3. Relazioni e applicazioni	12
4. Relazioni di equivalenza e quozienti	15
5. Cardinalità di un insieme	18
Capitolo 2. Strutture algebriche	19
1. Operazioni su insiemi	19
2. Gruppi	21
3. Anelli e campi	23
4. Sottostrutture e morfismi	26
5. n -ple	27
6. L'anello dei polinomi	28
7. Algebre di Boole	30
Capitolo 3. Matrici e determinanti	33
1. Matrici e loro operazioni	33
2. L'anello delle matrici quadrate	38
3. Matrici ridotte e trasformazioni elementari	41
4. Permutazioni	45
5. Determinante di una matrice quadrata	48
6. Calcolo del determinante	54
Capitolo 4. Spazi e sottospazi vettoriali	61
1. Spazi vettoriali	61
2. Sottospazi	65
3. Sistemi di generatori	66
4. Dipendenza e indipendenza lineare	69
5. Basi e dimensione	72
6. Componenti di un vettore	75
7. Somma e intersezione di sottospazi	77
Capitolo 5. Trasformazioni lineari	81
1. Trasformazioni lineari e isomorfismi	81
2. Matrici associate a una trasformazione lineare	88

3. Rango di una matrice	94
4. Cambiamenti di base	97
5. Matrici simili	99
Capitolo 6. Sistemi Lineari	103
1. Sistemi lineari e loro risolubilità	103
2. Metodi di risoluzione per sistemi lineari	109
3. Rappresentazioni dei sottospazi vettoriali	117
Capitolo 7. Autovalori ed autovettori	123
1. Autovalori e autospazi di un operatore lineare	123
2. Polinomio caratteristico	126
3. Diagonalizzazione di matrici e operatori lineari	131
TEST DI VALUTAZIONE - I PARTE	135
Capitolo 8. Spazi vettoriali euclidei	141
1. Prodotti scalari e norme	141
2. Basi ortonormali	146
3. Trasformazioni ortogonali	151
4. Complemento ortogonale	152
5. Matrici di Gram e proiezioni ortogonali	156
6. Orientazione di uno spazio vettoriale euclideo	160
7. Prodotto vettoriale e prodotto misto	161
Capitolo 9. Spazi euclidei	165
1. Definizioni ed esempi	165
2. Sistemi di riferimento	167
3. Sottospazi euclidei	170
4. Rappresentazioni di sottospazi euclidei	173
5. Condizioni di parallelismo	175
6. Ortogonalità tra sottospazi	178
7. Distanza euclidea	181
8. Simplessi e volumi	183
9. Isometrie	186
Capitolo 10. Il piano euclideo	193
1. I sottospazi del piano euclideo: punti e rette	193
2. Distanze	200
3. Le isometrie del piano euclideo	202
4. Le coniche come luoghi geometrici	203
Capitolo 11. Lo spazio euclideo	209
1. I sottospazi dello spazio euclideo: punti, rette e piani	209
2. Distanze	223
Capitolo 12. Elementi di teoria delle coniche e delle quadriche	231
1. Ampliamento proiettivo di uno spazio euclideo	231

2. Le coniche del piano euclideo	240
3. Riduzione a forma canonica delle coniche	254
4. Fasci di coniche	260
5. Le quadriche dello spazio euclideo	263
6. Riduzione a forma canonica delle quadriche	279
TEST DI VALUTAZIONE - II PARTE	289
Appendice A. Equazioni algebriche	295
1. Radici di un polinomio	295
2. Equazioni algebriche a coefficienti reali o complessi	299
Appendice B. Forme bilineari e quadratiche	303
1. Matrici simmetriche	303
2. Forme bilineari, quadratiche e matrici simmetriche associate	304
3. Congruenza di matrici simmetriche	305
4. Forme canoniche	307
5. Forme e matrici definite	308
Indice analitico	311

CAPITOLO 1

Insiemi e relazioni

1. Insiemi

Non ci addentreremo nella presentazione di una teoria assiomatica degli insiemi, che andrebbe oltre gli scopi di questo testo. Supporremo invece noto il concetto intuitivo di *insieme*, quale “collezione” di *elementi* o *oggetti*, a due a due distinti.

Se A è un insieme e a è un elemento di A , diremo che a *appartiene ad* A e scriveremo $a \in A$; se a non appartiene ad A , scriveremo invece $a \notin A$.

Dati due insiemi A, B , diremo che A è un *sottoinsieme* di B , e scriveremo $A \subseteq B$, se ogni elemento di A è anche elemento di B .

Diremo ancora che A e B sono *uguali*, e scriveremo $A = B$, se hanno gli stessi elementi (cioè se sono lo stesso insieme). Quindi $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. In caso contrario, diremo che A e B sono *diversi* e scriveremo $A \neq B$.

Diremo infine che A è un *sottoinsieme proprio* di B , e scriveremo $A \subset B$, se $A \subseteq B$, ma $A \neq B$.

Useremo spesso, nel corso della trattazione, i seguenti simboli logici:

- “ \forall ” (detto *quantificatore universale*), che si legge “per ogni” o “qualunque sia”;
- “ \exists ” (detto *quantificatore esistenziale*), che si legge “esiste un” o “esiste almeno un”;
- “ $\exists!$ ”, che si legge “esiste uno e un solo” o “esiste ed è unico”;
- “ \nexists ”, che si legge “non esiste alcun”.

Se \mathcal{P} è una opportuna proprietà e A è un insieme, la scrittura

$$\forall x \in A, \mathcal{P}(x)$$

si legge “per ogni elemento x dell’insieme A , $\mathcal{P}(x)$ è vera”; la scrittura

$$\exists x \in A, \mathcal{P}(x)$$

si legge “esiste almeno un elemento x dell’insieme A , per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera”; la scrittura

$$\exists! x \in A, \mathcal{P}(x)$$

si legge “esiste uno e un solo elemento x dell’insieme A , per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera”; la scrittura

$$\nexists x \in A, \mathcal{P}(x)$$

si legge “non esiste alcun elemento x dell’insieme A , per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera”.

Useremo anche i seguenti simboli (connettivi logici):

- “ \Rightarrow ” (detto *implicazione*), che si legge “*implica*”;
- “ \Leftrightarrow ” (detto *coimplicazione*), che si legge “*se e solo se*”.

Se \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono due proposizioni, allora la scrittura

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

si legge “ \mathcal{P} *implica* \mathcal{Q} ” o anche “*se* \mathcal{P} *allora* \mathcal{Q} ”; la scrittura

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$$

si legge “ \mathcal{P} *se e solo se* \mathcal{Q} ” ed equivale a “ $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ ”.

Supporremo noto al lettore l'insieme dei *numeri naturali* $1, 2, 3, \dots$, che sarà indicato con \mathbb{N} , nonché le sue proprietà elementari.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, indicheremo con \mathbb{N}_n *l'insieme dei primi n numeri naturali*. Indicheremo poi con:

- \mathbb{Z} *l'insieme dei numeri interi relativi*;
- \mathbb{Q} *l'insieme dei numeri razionali*;
- \mathbb{R} *l'insieme dei numeri reali*;
- \mathbb{C} *l'insieme dei numeri complessi*.

Supporremo inoltre note le principali proprietà di tali insiemi numerici.

Il *principio d'induzione* risulta spesso molto utile per dimostrare una “successione di proposizioni”.

Principio d'induzione.¹ *Supponiamo data, per ogni numero naturale n , una affermazione $A(n)$. Supponiamo inoltre che:*

- (1) *l'affermazione $A(1)$ sia vera;*
- (2) *$\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, se $A(k-1)$ è vera, allora anche $A(k)$ è vera.*

Allora $A(n)$ è vera, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Gli insiemi finiti, cioè aventi un numero finito di elementi, potranno essere indicati per “elencazione”, racchiudendo tra parentesi graffe gli elementi stessi (o altrettanti simboli che li rappresentano), separati da virgole.

Ad esempio, l'insieme delle cinque vocali potrà essere indicato con $\{a, e, i, o, u\}$. Si noti che l'ordine in cui gli elementi sono scritti non ha alcuna rilevanza: quindi $\{a, e, i, o, u\} = \{o, i, u, a, e\}$. Inoltre, la ripetizione di uno o più elementi non ha alcun effetto: ad esempio, $\{a, e, a, i, u, o, i, a, e, e\} = \{a, e, i, o, u\}$.

Se gli elementi di un insieme A sono caratterizzati da una certa proprietà \mathcal{P} , diremo che A è l'insieme di tutti gli elementi x , per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera, e scriveremo:

$$A = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}.$$

¹Tale principio può equivalentemente essere enunciato in una formulazione alternativa, in cui la ipotesi induttiva (2) viene sostituita con la seguente:

(2') $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, se $A(h)$ è vera per ogni $h \in \mathbb{N}_{k-1}$, allora anche $A(k)$ è vera.

Si osservi che ciò non significa che ogni proprietà \mathcal{P} dia automaticamente vita a un insieme. Infatti il famoso “paradosso di Russel²” nasce proprio da una tale assunzione. Se B è un insieme e A è il sottoinsieme di B caratterizzato dalla proprietà \mathcal{P} , scriveremo:

$$A = \{x \in B \mid \mathcal{P}(x)\}.$$

Esempio 1.1. L'insieme \mathbb{P} dei numeri naturali *pari* e l'insieme \mathbb{D} dei numeri naturali *dispari* potranno essere indicati come segue:

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \{p \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, p = 2m\}; \\ \mathbb{D} &= \{d \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, d = 2m - 1\}.\end{aligned}$$

Le scritture precedenti si leggono: \mathbb{P} (rispettivamente \mathbb{D}) è l'insieme di tutti i numeri naturali p (risp. d), per cui esiste un numero naturale m , tale che $p = 2m$ (risp. $d = 2m - 1$).

Le proprietà enunciate forniscono un vero e proprio “test di appartenenza” di un numero naturale n all'insieme \mathbb{P} dei numeri pari (risp. all'insieme \mathbb{D} dei numeri dispari). Ad esempio, $12 \in \mathbb{P}$, in quanto $\exists 6 \in \mathbb{N}$, tale che $2 \cdot 6 = 12$; invece $13 \notin \mathbb{P}$, in quanto non esiste alcun numero naturale m , tale che $2 \cdot m = 13$. Analogamente $13 \in \mathbb{D}$, in quanto $\exists 7 \in \mathbb{N}$, tale che $2 \cdot 7 - 1 = 13$.

Esempio 1.2. L'insieme \mathbb{N}_n dei primi n numeri naturali può essere indicato con

$$\mathbb{N}_n = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Si osservi che, anche nel caso di insiemi con un numero finito di elementi, è spesso preferibile la seconda rappresentazione. Ad esempio, l'insieme A dei numeri naturali compresi tra 2 e 1.000.000.000 potrà essere indicato con

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid 2 \leq i \leq 1.000.000.000\},$$

mentre l'elenco dei suoi elementi, pur teoricamente possibile, presenta evidenti problemi di scrittura.

Diremo *insieme vuoto* l'insieme \emptyset privo di elementi; per tale motivo, \emptyset può essere considerato sottoinsieme di un qualsiasi insieme A .

Dato un insieme A , diremo *insieme delle parti* di A l'insieme:

$$\mathfrak{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

In altre parole, $\mathfrak{P}(A)$ è l'insieme i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di A .

Ad esempio, se $A = \{a, b, c\}$, allora

$$\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

²Bertrand Russel: filosofo e matematico inglese (Trelleck, 1872 - Penthyfrndraeth, 1970).

2. Operazioni fra insiemi

Siano A, B sottoinsiemi di un insieme U .

Diremo *unione* di A e B l'insieme:

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\},$$

costituito dagli elementi di U che appartengono ad almeno uno degli insiemi A, B .

Diremo *intersezione* di A e B l'insieme:

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\},$$

costituito dagli elementi di U che appartengono sia ad A che a B .

Se $A \cap B = \emptyset$, diremo che A e B sono *disgiunti*.

Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e $B = \{1, 4, 5, 8\}$, allora $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ e $A \cap B = \{1, 4\}$.

Se invece come nell'Esempio 1.1, \mathbb{P} e \mathbb{D} indicano rispettivamente gli insiemi dei numeri naturali pari e dispari, allora $\mathbb{P} \cup \mathbb{D} = \mathbb{N}$, $\mathbb{P} \cap \mathbb{D} = \emptyset$ (cioè \mathbb{P} e \mathbb{D} sono disgiunti).

Diremo *differenza* tra A e B l'insieme

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Se, inoltre, $B \subseteq A$, allora l'insieme $A - B$ sarà indicato con $C_A B$ e sarà detto il *complementare* di B in A .

Se, ad esempio, $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, allora $A - B = \{2, 4, 6\}$, mentre $B - A = \{5, 7, 9\}$.

Dall'Esempio 1.1 segue inoltre che $C_{\mathbb{N}} \mathbb{P} = \mathbb{D}$ e $C_{\mathbb{N}} \mathbb{D} = \mathbb{P}$.

Le operazioni sopra definite soddisfano le seguenti proprietà, la cui dimostrazione è un utile esercizio.

– Se A, B e C sono insiemi, si ha:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

(*proprietà commutativa dell'unione e dell'intersezione*);

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(*proprietà associativa dell'unione e dell'intersezione*);

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(*proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione*);

– Se A e B sono sottoinsiemi di un insieme X , si ha:

- $C_X(A \cup B) = C_X A \cap C_X B$;
- $C_X(A \cap B) = C_X A \cup C_X B$

(*leggi di De Morgan*³).

Nel seguito il simbolo (x, y) indicherà la *coppia* (ordinata) il cui primo elemento è x e il cui secondo elemento è y , con x e y elementi di un insieme X .

Gli elementi x e y saranno anche detti *prima* e *seconda componente* della coppia (x, y) . Si osservi che $\{x, y\} = \{y, x\} \forall x, y \in X$, mentre, se $x \neq y$, allora $(x, y) \neq (y, x)$.

In modo del tutto analogo si possono definire le terne, le quaterne e, più in generale, le n -ple di elementi di un insieme, essendo n un arbitrario numero naturale.

Siano A, B insiemi. Diremo *prodotto cartesiano*⁴ di A per B l'insieme:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Si osservi che $A \times B = \emptyset$ se e solo se $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$; inoltre, se $A \neq B$, allora $A \times B \neq B \times A$.

Se $A = B$, allora il prodotto cartesiano di A per se stesso si indica con $A \times A$ o con A^2 .

Analogamente sarà indicato con A^n l'insieme delle n -ple (ordinate) (a^1, \dots, a^n) di elementi di A .⁵

Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$, allora

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\},$$

mentre

$$B \times A = \{(x, 1), (y, 1), (x, 2), (y, 2), (x, 3), (y, 3)\}.$$

Inoltre

$$A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

$$B^3 = B \times B \times B = \{(x, x, x), (x, x, y), (x, y, x), (x, y, y), \\ (y, x, x), (y, x, y), (y, y, x), (y, y, y)\}$$

Si determinino A^3 e B^2 .

³Augustus De Morgan: matematico e logico inglese (Madura, India, 1806 - Londra, 1871).

⁴Dal nome del filosofo e matematico francese René Descartes (Cartesio) (La Hauge, 1596 - Stoccolma, 1650).

⁵In taluni casi si utilizzerà per le n -ple anche la notazione con gli indici in basso: (a_1, \dots, a_n) .

3. Relazioni e applicazioni

♦ **Definizione 1.1.** Siano A, B insiemi. Diremo *relazione* fra A e B ogni sottoinsieme \mathfrak{R} del prodotto cartesiano $A \times B$.

Se $(a, b) \in \mathfrak{R}$, diremo che a è *in relazione* \mathfrak{R} con b e scriveremo anche $a \mathfrak{R} b$.

Se $\mathfrak{R} \subseteq A \times B$ è una relazione fra A e B , diremo *relazione inversa* di \mathfrak{R} la relazione \mathfrak{R}^{-1} fra B e A , definita come segue:

$$\mathfrak{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \mathfrak{R}\}$$

Se, ad esempio, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ e $\mathfrak{R} = \{(1, x), (1, y), (2, x), (3, y)\} \subseteq A \times B$, allora

$$\mathfrak{R}^{-1} = \{(x, 1), (y, 1), (x, 2), (y, 3)\} \subseteq B \times A.$$

Il concetto di relazione tra due insiemi si particolarizza in quello di *applicazione* o *funzione* di A in B .

Intuitivamente parlando, una applicazione di A in B è una “legge” f , che associa a ogni elemento $x \in A$ uno e un solo elemento $y \in B$.

Tale nozione è formalizzata nella seguente:

♦ **Definizione 1.2.** Siano A, B insiemi. Diremo *applicazione* o *funzione* o *mappa* di A in B ogni relazione $f \subseteq A \times B$, tale che:

$$\forall x \in A, \exists ! y \in B, (x, y) \in f.$$

L'elemento y , univocamente individuato da f e da x , sarà detto il *trasformato* (o *l'immagine*) di x mediante f e sarà indicato col simbolo $f(x)$.

Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ e $\mathfrak{R} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 6)\}$ allora \mathfrak{R} non è una funzione di A in B ; invece $f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 3)\}$ è una funzione di A in B . In tal caso si ha $f(1) = f(2) = 5$, $f(3) = 3$.

Se f è una applicazione di A in B , scriveremo $f : A \rightarrow B$ o, se $y = f(x)$,

$$\begin{array}{ccc} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

Gli insiemi A e B saranno detti rispettivamente *dominio* e *codominio* di f .

♦ **Definizione 1.3.** Sia $f : A \rightarrow B$ una applicazione e X un sottoinsieme del dominio A . Diremo *immagine* di X il seguente sottoinsieme di B :

$$f(X) = \{b \in B \mid \exists x \in X, f(x) = b\}.$$

In particolare, l'immagine $f(A)$ del dominio A sarà anche detta *immagine* di f e denotata con $\text{Im } f$.

Sia ora $Y \subseteq B$. Diremo *controimmagine* o *immagine inversa* di Y il seguente sottoinsieme di A :

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

In particolare, se $Y = \{b\}$, allora la controimmagine di $\{b\}$ sarà anche detta *controimmagine dell'elemento* $b \in B$ e indicata con $f^{-1}(b)$.

Si osservi che $f^{-1}(b)$ risulta definito come segue:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

Ad esempio, se $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 4, 5, 6\}$ è la funzione definita da: $f(1) = 5$, $f(2) = 5$, $f(3) = 3$, allora $f(\{1, 2\}) = \{5\}$, $\text{Im } f = f(\{1, 2, 3\}) = \{3, 5\}$, $f^{-1}(5) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(6) = \emptyset$.

◆ **Definizione 1.4.** Sia $f : A \rightarrow B$ una applicazione.

Diremo che

f è *suriettiva* se $\text{Im } f = B$, cioè se

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b;$$

f è *iniettiva* se

$$(f(a') = f(a'')) \Rightarrow (a' = a'');$$

f è *biiettiva* o *biunivoca* se è iniettiva e suriettiva, cioè se

$$\forall b \in B, \exists! a \in A, f(a) = b.$$

Ad esempio, l'applicazione $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c\}$ definita da $f(1) = c$, $f(2) = a$, $f(3) = b$, $f(4) = a$ è suriettiva, ma non iniettiva (in quanto $f(2) = f(4) = a$). Invece l'applicazione $g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$, definita da $g(1) = b$, $g(2) = c$, $g(3) = d$ è iniettiva, ma non suriettiva (in quanto $a \notin \text{Im } g = \{b, c, d\}$). Si determinino due applicazioni $f, g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$, in modo che f non sia né iniettiva né suriettiva e g sia biunivoca.

Le applicazioni tra insiemi si dicono anche *morfismi*. Le applicazioni biunivoche (di A in B) si dicono anche *isomorfismi* o *biezioni* o *corrispondenze biunivoche* e, se $A = B$, si parla anche di *permutazioni* o *sostituzioni* (su A).

Si osservi che, data un'applicazione $f : A \rightarrow B$, la relazione inversa $f^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid f(a) = b\}$ non è, in generale, una applicazione, in quanto l'immagine inversa $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ di un elemento $b \in B$ può essere vuota (se f non è suriettiva e $b \notin \text{Im } f$), o costituita da più di un elemento (se f non è iniettiva).

Quindi, f^{-1} è una applicazione se e solo se f è biunivoca; in tal caso f^{-1} è a sua volta biunivoca e si ha $(f^{-1})^{-1} = f$.

◆ **Definizione 1.5.** Siano A, B, C insiemi e $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ applicazioni. Diremo *prodotto di g con f* l'applicazione:

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

definita, per ogni $a \in A$, da $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Il simbolo “ \circ ” (che sarà talvolta omissa) è detto *prodotto* o *composizione* di applicazioni.

Si osservi che, se $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$ sono applicazioni, allora risultano definite sia $h \circ (g \circ f)$ che $(h \circ g) \circ f$ e si ha $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Inoltre se $A = B = C$, allora risultano definite sia $g \circ f$ che $f \circ g$. In generale, però, $g \circ f \neq f \circ g$.

Ad esempio, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da $g(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$f \circ g(x) = f(x^2) = 2x^2; \quad g \circ f(x) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2.$$

Si osservi infine che, se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ sono applicazioni biunivoche, allora anche $g \circ f$ è biunivoca, e si ha $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Per ogni insieme X , diremo *identità* o *applicazione identica* su X l'applicazione $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ definita, $\forall x \in X$, da $\text{Id}_X(x) = x$.

◆ **Definizione 1.6.** Una applicazione $f : A \rightarrow B$ è detta *invertibile* se esiste una applicazione $f' : B \rightarrow A$, tale che $f' \circ f = \text{Id}_A, f \circ f' = \text{Id}_B$.

■ **Proposizione 1.7.** Una applicazione f è invertibile se e solo se è biunivoca. In tal caso, la relazione inversa f^{-1} è una applicazione invertibile che coincide con f' .

Dimostrazione. Se f è biunivoca, anche f^{-1} è biunivoca e si ha $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A, f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$. Quindi f è invertibile e $f' = f^{-1}$.

Viceversa, se f è invertibile, allora, da $f' \circ f = \text{Id}_A$ segue che se $f(x) = f(x')$ allora $x = f' \circ f(x) = f' \circ f(x') = x'$ e dunque f è iniettiva; inoltre per ogni $y \in B$, posto $x = f'(y)$, si ha $f(x) = f \circ f'(y) = y$ e dunque f è suriettiva. Ciò prova che f è biunivoca, con $f' = f^{-1}$. □

Sia $f : A \rightarrow B$ una applicazione e $X \subseteq A$. Diremo *restrizione* di f a X l'applicazione $f|_X : X \rightarrow B$ definita, $\forall x \in X$, da $f|_X(x) = f(x)$.

Talvolta risulta comodo, dati $f : A \rightarrow B$ e $Y \subseteq B$, con $\text{Im } f \subseteq Y$, considerare l'applicazione $\tilde{f} : A \rightarrow Y$, tale che $\tilde{f}(a) = f(a), \forall a \in A$. Si dirà che \tilde{f} è la *restrizione di f a $Y \subseteq B$* .

Esempio 1.3. Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $f(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$; f è iniettiva, in quanto se $f(n) = f(m)$, cioè se $2n = 2m$, allora $n = m$. L'applicazione f non è però suriettiva (e quindi neppure biunivoca), in quanto $\text{Im } f = \mathbb{P} \neq \mathbb{N}$. L'applicazione $\tilde{f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$, restrizione di f a $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$, è invece biunivoca.

L'applicazione inversa $\tilde{f}^{-1} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N}$ è definita, $\forall p = 2n \in \mathbb{P}$, da $\tilde{f}^{-1}(p) = \tilde{f}^{-1}(2n) = n$. Si osservi che effettivamente $\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f} = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ e $\tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{P}}$.

Esempio 1.4. Sia \mathbb{Z} l'insieme dei numeri interi relativi e $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. L'applicazione f non è suriettiva, in quanto $\text{Im } f \neq \mathbb{Z}$ (ad esempio $2 \notin \text{Im } f$); f non è neppure iniettiva, in quanto $x^2 = (-x)^2$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. L'applicazione $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, definita da $\tilde{f}(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (dove \mathbb{R} è l'insieme dei numeri reali e \mathbb{R}_0^+ l'insieme dei numeri reali non negativi) è invece suriettiva, ma non iniettiva. Infine l'applicazione $\tilde{f}|_{\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, restrizione di \tilde{f} a $\mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}$, è biunivoca e la sua inversa $g = (\tilde{f}|_{\mathbb{R}_0^+})^{-1}$ è data, per ogni $y \in \mathbb{R}_0^+$, da $g(y) = \sqrt{y}$.

Esempio 1.5. Le funzioni $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\text{cos} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non sono né suriettive (in quanto, posto $[a, b] = \{y \in \mathbb{R} \mid a \leq y \leq b\}$, si ha $\text{Im } \text{sen} = \text{Im } \text{cos} = [-1, 1]$), né iniettive (in quanto, ad esempio, $\text{sen } 0 = \text{sen } \pi = 0$ e $\text{cos}(-\pi/2) = \text{cos}(\pi/2) = 0$). Le loro restrizioni $\text{sên} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ e $\text{côs} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ sono invece biunivoche e le loro inverse sono rispettivamente le funzioni $\text{arcsen} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ e $\text{arc cos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

L'applicazione $\text{ex} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita, $\forall x \in \mathbb{R}$, da $\text{ex}(x) = e^{ix} = \cos x + i \text{sen } x$ non è suriettiva (in quanto $\text{Im } \text{ex} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$), né iniettiva (in quanto, ad esempio, $\text{ex}(0) = \text{ex}(2\pi) = 1$).

Posto $[0, 2\pi[= \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 2\pi\}$, la sua restrizione $\text{êx} : [0, 2\pi[\rightarrow \text{Im } \text{ex} \subset \mathbb{C}$ è invece biunivoca.

4. Relazioni di equivalenza e quozienti

Si ricorda che una relazione tra due insiemi A e B è un sottoinsieme \mathfrak{R} di $A \times B$. Se $A = B$, allora $\mathfrak{R} \subset A \times A$ sarà detta una *relazione su* A . In accordo con le notazioni del § 3, $x\mathfrak{R}y$ equivale a $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

◆ **Definizione 1.8.** Una relazione \mathfrak{R} su A sarà detta:

- (R) *riflessiva* se $\forall x \in A, x\mathfrak{R}x$;
- (S) *simmetrica* se $(x\mathfrak{R}y) \Rightarrow (y\mathfrak{R}x)$;
- (T) *transitiva* se $(x\mathfrak{R}y \text{ e } y\mathfrak{R}z) \Rightarrow (x\mathfrak{R}z)$.

Diremo poi che \mathfrak{R} è una *relazione di equivalenza* su A se è contemporaneamente riflessiva, simmetrica e transitiva.

Se $a \in A$, diremo *classe di equivalenza di* a l'insieme

$$[a] = \{x \in A \mid x\mathfrak{R}a\}.$$

■ **Lemma 1.9.** Sia \mathfrak{R} una relazione di equivalenza su A . Se $a, b \in A$ e $a \in [b]$, allora $[a] = [b]$.

Dimostrazione. Innanzitutto, se $a \in [b]$, allora $a\mathfrak{R}b$; per la proprietà simmetrica (S), $b\mathfrak{R}a$ e quindi $b \in [a]$. Se ora $x \in [a]$, allora $x\mathfrak{R}a$ e $a\mathfrak{R}b$; per la proprietà transitiva (T), $x\mathfrak{R}b$, cioè $x \in [b]$. Ciò prova che $[a] \subseteq [b]$. Per simmetria si prova che $[b] \subseteq [a]$, e cioè che $[a] = [b]$. □

■ **Lemma 1.10.** *Se \mathfrak{R} è una relazione di equivalenza su A , allora si ha:*

- (i) $\forall x \in A, x \in [x]$;
- (ii) se $a, b \in A$, allora $[a] = [b]$ oppure $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Dimostrazione. La proprietà riflessiva (R) prova (i).

(ii) Se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, allora esiste $x \in [a] \cap [b]$. Per il Lemma 1.9, si ha $[a] = [x] = [b]$. □

I lemmi precedenti giustificano la seguente:

◆ **Definizione 1.11.** Se \mathfrak{R} è una relazione di equivalenza su A , allora diremo che ogni $x \in [a]$ è un *rappresentante* di $[a]$.

Ad esempio, sia A l'insieme dei cittadini italiani. Se $x, y \in A$, poniamo $x\mathfrak{R}y$ se e solo se x e y hanno lo stesso nome. È facile verificare che \mathfrak{R} è una relazione di equivalenza su A . Se il nome di x è Valeria, allora $[x]$ è l'insieme dei cittadini italiani di nome Valeria e ciascuno di essi è un rappresentante di $[x]$.

◆ **Definizione 1.12.** Sia \mathfrak{R} una relazione di equivalenza su A . Diremo *insieme quoziente di A modulo \mathfrak{R}* l'insieme:

$$A/\mathfrak{R} = \{[a] \mid a \in A\},$$

i cui elementi sono le classi di equivalenza degli elementi di A .

Si osservi che $A/\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(A)$.

◆ **Definizione 1.13.** Sia A un insieme e $\mathfrak{P}(A)$ l'insieme delle parti di A . Un sottoinsieme \mathfrak{B} di $\mathfrak{P}(A)$ sarà detto:

- (i) un *ricoprimento* di A se

$$\forall x \in A, \exists B \in \mathfrak{B}, x \in B;$$

- (ii) una *partizione* di A se $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ e

$$\forall x \in A, \exists! B \in \mathfrak{B}, x \in B.$$

In altre parole, una *partizione* di A è un *ricoprimento*, non contenente l'insieme vuoto, i cui elementi sono a due a due disgiunti.

Il risultato che segue mostra come i concetti di “relazione di equivalenza” e di “partizione” siano strettamente connessi.

■ **Teorema 1.14.** *Se \mathfrak{R} è una relazione di equivalenza su A , allora l'insieme quoziente A/\mathfrak{R} è una partizione di A .*

Viceversa, se $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ è una partizione di A , allora esiste ed è unica la relazione di equivalenza \mathfrak{R} su A , tale che $A/\mathfrak{R} = \mathfrak{B}$.

Dimostrazione. Il Lemma 1.10 prova la prima parte del teorema.

Supponiamo ora data una partizione \mathfrak{B} di A . Definiamo la relazione \mathfrak{R} su A ponendo, $\forall x, y \in A$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se x e y appartengono a uno stesso $B \in \mathfrak{B}$. \mathfrak{R} è una relazione di equivalenza su A e $A/\mathfrak{R} = \mathfrak{B}$. Se poi \mathfrak{R}' è una seconda relazione di equivalenza su A tale che $A/\mathfrak{R} = A/\mathfrak{R}' = \mathfrak{B}$, allora evidentemente, $\forall x, y \in A$, si ha $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x\mathfrak{R}'y$. Ciò prova che $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$, completando la dimostrazione del Teorema 1.14. \square

Le relazioni di equivalenza saranno solitamente indicate con simboli quali “ \sim ”, “ \simeq ”, “ \approx ”, “ \equiv ”.

Esempio 1.6. Sia R l'insieme delle rette del piano. Se $r, s \in R$, poniamo $r \parallel s$ se e solo se r e s sono parallele o coincidenti. Allora \parallel è una relazione di equivalenza su R e gli elementi dell'insieme quoziente R/\parallel sono i “fasci” di rette parallele del piano.

Se T è l'insieme dei triangoli del piano, allora la congruenza e la similitudine di triangoli sono relazioni di equivalenza su T .

Esempio 1.7. (L'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali) Supposte note le operazioni in \mathbb{Z} , se $m, m' \in \mathbb{Z}$ e $n, n' \in \mathbb{Z} - \{0\}$, poniamo $(m, n) \sim (m', n')$ se e solo se $mn' = nm'$.

La relazione \sim è di equivalenza su $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$.

Infatti le proprietà riflessiva e simmetrica sono immediate; per dimostrare la proprietà transitiva, sia $(m, n) \sim (m', n')$ e $(m', n') \sim (m'', n'')$. Si ha allora $mn''n' = mn'n'' = m'n'n'' = m'n''n = n'm''n = nm''n'$. Essendo $n' \neq 0$, si ottiene che $mn'' = nm''$, cioè $(m, n) \sim (m'', n'')$.

L'insieme quoziente $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}))/\sim$ è l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali. Ogni elemento di \mathbb{Q} è dunque una classe di equivalenza $[(m, n)]$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$; è d'uso porre

$$[(m, n)] = \frac{m}{n}.$$

Sia

$$\tilde{\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{m}{1} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

L'applicazione $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ definita, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, da

$$\varphi(m) = \frac{m}{1}$$

è iniettiva; inoltre, evidentemente, $\text{Im } \varphi = \tilde{\mathbb{Z}}$. Ciò consente di identificare \mathbb{Z} con $\tilde{\mathbb{Z}}$ mediante l'applicazione φ , e di considerare \mathbb{Z} sottoinsieme di \mathbb{Q} .

Esempio 1.8. (L'insieme \mathbb{Z}_n delle classi resto modulo n) Sia \mathbb{Z} l'insieme dei numeri interi e sia n un fissato intero positivo. Se $x, y \in \mathbb{Z}$, poniamo $x \equiv y \pmod{n}$ se e solo se $\exists k \in \mathbb{Z}$, $x - y = kn$. La relazione $\equiv \pmod{n}$ (detta *congruenza modulo n*) è di equivalenza su \mathbb{Z} . Infatti: (R) $x - x = 0n$; (S) se $x - y = kn$, allora $y - x = -kn$; (T) se $x - y = kn$ e $y - z = hn$, allora $x - z = x - y + y - z = kn + hn = (k + h)n$. L'insieme quoziente, di norma indicato con \mathbb{Z}_n , anziché con $\mathbb{Z}/\equiv \pmod{n}$, viene detto *l'insieme delle classi resto modulo n* . Tale terminologia è giustificata dal fatto che esso consta di esattamente n classi, indicate con $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$, dove la classe \bar{r} contiene tutti e soli gli interi il cui resto della divisione per n è uguale a r .

Infatti, dato comunque $z \in \mathbb{Z}$, si ha che $z = kn + r$, essendo $0 \leq r \leq n - 1$. Quindi $z - r = kn$, cioè $z \equiv r \pmod{n}$, il che implica $z \in \bar{r}$.

Inoltre, se $0 \leq r < s \leq n - 1$, allora $\bar{r} \neq \bar{s}$, in quanto $0 < s - r \leq n - 1$ e quindi, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $s - r \neq kn$.

5. Cardinalità di un insieme

◆ **Definizione 1.15.** Diremo che due insiemi A, B sono *equipotenti* se esiste una applicazione biiettiva $f : A \rightarrow B$.

Diremo anche, in tal caso, che A e B hanno la stessa *potenza* o la stessa *cardinalità* o lo stesso *numero cardinale*, e scriveremo $\text{Card } A = \text{Card } B$.

Si osservi che gli insiemi \mathbb{N}_n e \mathbb{N}_m sono equipotenti se e solo se $n = m$.

◆ **Definizione 1.16.** Un insieme A equipotente con \mathbb{N}_n è detto *finito*, di *cardinalità* n . L'insieme vuoto è, per convenzione, l'unico insieme finito di cardinalità 0.

Un insieme è detto *infinito* se non è finito, cioè se non è né vuoto, né equipotente con \mathbb{N}_n , per alcun $n \in \mathbb{N}$.

I numeri cardinali degli insiemi finiti sono, dunque, in corrispondenza biunivoca con i numeri interi ≥ 0 . I numeri cardinali degli insiemi infiniti sono detti *transfiniti*.

Un insieme equipotente con \mathbb{N} è detto *numerabile* e il suo numero cardinale è solitamente indicato con \aleph_0 (la lettera \aleph si legge “alef” ed è la prima lettera dell'alfabeto ebraico).

È abbastanza semplice provare che *ogni sottoinsieme di un insieme numerabile è finito o numerabile*. Quindi \aleph_0 è il più piccolo numero cardinale transfinito.

► **Osservazione 1.17.** Un insieme finito *non può essere equipotente con un suo sottoinsieme proprio*. È possibile provare che *tale proprietà caratterizza gli insiemi finiti*.

Si dimostra inoltre che \mathbb{Z} e \mathbb{Q} sono *insiemi numerabili* e che \mathbb{R} *non è numerabile*. Un insieme equipotente con \mathbb{R} è detto avere la *potenza del continuo*. È possibile provare che \mathbb{C} ha la *potenza del continuo*.

Posto $\text{Card } \mathbb{R} = \mathfrak{c}$, si ha dunque:

$$\text{Card } \mathbb{Q} = \text{Card } \mathbb{Z} = \text{Card } \mathbb{N} = \aleph_0$$

e

$$\text{Card } \mathbb{C} = \text{Card } \mathbb{R} = \mathfrak{c}.$$

CAPITOLO 2

Strutture algebriche

1. Operazioni su insiemi

◆ **Definizione 2.1.** Siano A, B, C insiemi. Diremo *operazione binaria* ogni applicazione $\varphi : A \times B \rightarrow C$.

Se, in particolare, $A = B = C$, allora diremo che $\varphi : A \times A \rightarrow A$ è *un'operazione binaria interna su A* .

Il trasformato di $(x, y) \in A \times B$ mediante l'operazione φ sarà solitamente indicato con $x\varphi y$, anziché con $\varphi(x, y)$. Inoltre le operazioni saranno solitamente indicate, anziché con lettere, con appositi simboli, quali “ \perp , \top , $*$, \circ , $+$, \cdot ”.

Esempio 2.1. I “prototipi” di operazioni binarie interne sono l'usuale “somma” e l'usuale “prodotto” di numeri naturali:

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) & \mapsto m + n \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) & \mapsto m \cdot n \end{array} .$$

Analogamente, l'usuale “somma” e l'usuale “prodotto” di numeri interi:

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

sono operazioni binarie interne su \mathbb{Z} .

Si osservi che la “differenza” non è una operazione binaria interna su \mathbb{N} , mentre lo è su \mathbb{Z} ; invece la “divisione” non è una operazione binaria interna né su \mathbb{N} , né su \mathbb{Z} .

Esempio 2.2. Sia $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})) / \sim$ l'insieme dei numeri razionali, costruito nell'Esempio 1.7.

Poniamo, $\forall x, z \in \mathbb{Z}, \forall y, t \in \mathbb{Z} - \{0\}$,

$$(x, y) + (z, t) = (xt + yz, yt); \qquad (x, y) \cdot (z, t) = (xz, yt).$$

Non è difficile provare che, se $(x, y) \sim (x', y')$ e se $(z, t) \sim (z', t')$, allora

$$\begin{aligned} (xt + yz, yt) &\sim (x't' + y'z', y't'); \\ (xz, yt) &\sim (x'z', y't'). \end{aligned}$$

Ciò consente di definire le seguenti applicazioni (ancora indicate con $+$ e \cdot):

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \qquad \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

ponendo:

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{xt + yz}{yt},$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{t} = \frac{xz}{yt}.$$

Le applicazioni $+$ e \cdot sopra definite sono operazioni binarie interne su \mathbb{Q} ; esse coincidono con le usuali operazioni di “somma” e “prodotto” di numeri razionali.

Esempio 2.3. Le operazioni di “somma” e “prodotto” di numeri reali (che saranno supposte note) sono operazioni binarie interne su \mathbb{R} . A partire da queste si definiscono la somma e il prodotto di numeri complessi:

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d); \\ (a + ib) \cdot (c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Queste risultano ovviamente operazioni binarie interne su \mathbb{C} .

Esempio 2.4. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e sia $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$ l'insieme delle classi resto modulo n , costruito nell'Esempio 1.8.

Si osservi che, se $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$, $x \equiv x' \pmod{n}$ e $y \equiv y' \pmod{n}$, allora anche

$$x + y \equiv x' + y' \pmod{n} \quad \text{e} \quad xy \equiv x'y' \pmod{n}.$$

Ciò consente di definire le seguenti applicazioni (ancora indicate con $+$ e \cdot):

$$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n \quad \cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

ponendo:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}, \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}.$$

Esse sono ovviamente operazioni binarie interne su \mathbb{Z}_n .

Se ad esempio, $n = 2$, allora le operazioni introdotte possono essere visualizzate nelle seguenti tabelle:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

\cdot	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Esempio 2.5. Sia U un insieme. Le operazioni di unione, intersezione e differenza tra sottoinsiemi di U (introdotte nel § 2 del Capitolo 1) sono operazioni binarie interne su $\mathfrak{P}(U)$.

Esempio 2.6. Sia X un insieme non vuoto e $\text{Hom}(X)$ l'insieme di tutte le applicazioni $f : X \rightarrow X$. L'applicazione:

$$\begin{aligned}\circ : \text{Hom}(X) \times \text{Hom}(X) &\longrightarrow \text{Hom}(X) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g\end{aligned}$$

dove $f \circ g : X \rightarrow X$ è il prodotto di f con g (Definizione 1.5), è una operazione binaria interna su $\text{Hom}(X)$.

Sia $\mathfrak{S}(X) \subseteq \text{Hom}(X)$ l'insieme di tutte le applicazioni biunivoche (permutazioni) $\varphi : X \rightarrow X$. Se $\eta, \psi \in \mathfrak{S}(X)$, allora anche $\eta \circ \psi \in \mathfrak{S}(X)$. Quindi il prodotto di applicazioni, opportunamente ristretto, induce una operazione binaria interna (ancora indicata con \circ) su $\mathfrak{S}(X)$.

2. Gruppi

Per *struttura algebrica* intenderemo una n -pla costituita da insiemi e operazioni su di essi.

La più semplice struttura algebrica, spesso detta *gruppoide*, è una coppia (X, \perp) , dove X è un insieme e \perp è un'operazione binaria interna su X .

◆ **Definizione 2.2.** Sia (X, \perp) un gruppoide.

(a) L'operazione \perp è detta *associativa* se

$$\forall x, y, z \in X, \quad (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z).$$

(b) L'operazione \perp è detta *commutativa* se

$$\forall x, y \in X, \quad x \perp y = y \perp x.$$

(c) Un elemento $u \in X$ è detto *elemento neutro* per l'operazione \perp se

$$\forall x \in X, \quad x \perp u = u \perp x = x.$$

(d) Se (X, \perp) ammette un elemento neutro u , un elemento $x \in X$ è detto *invertibile* se

$$\exists x' \in X, \quad x \perp x' = x' \perp x = u.$$

In tal caso, x e x' sono detti *inversi* o *opposti* l'uno dell'altro.

Si osservi che, se \perp è associativa (e solo in tal caso), ha senso la scrittura $x \perp y \perp z$, intesa come rappresentazione semplificata dell'elemento $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$.

■ **Proposizione 2.3.** Sia (X, \perp) un gruppoide.

(i) Se (X, \perp) ammette elemento neutro, questo è unico.

(ii) Se (X, \perp) ammette elemento neutro e \perp è associativa, allora, se $x \in X$ è invertibile, il suo inverso è unico.

Inoltre, se $x, y \in X$ sono invertibili, allora anche $x \perp y$ è invertibile e, detti $x', y', (x \perp y)'$ gli inversi rispettivamente di $x, y, x \perp y$, si ha:

$$(x \perp y)' = y' \perp x'.$$

Dimostrazione. (i) Siano u, \bar{u} elementi neutri per (X, \perp) . Allora, evidentemente:

$$u = u \perp \bar{u} = \bar{u}.$$

(ii) Sia u l'elemento neutro di (X, \perp) e siano x', x'' inversi di $x \in X$. Allora:

$$x' = x' \perp u = x' \perp (x \perp x'') = (x' \perp x) \perp x'' = u \perp x'' = x''.$$

Inoltre si ha:

$$(x \perp y) \perp (y' \perp x') = x \perp (y \perp y') \perp x' = x \perp u \perp x' = x \perp x' = u;$$

$$(y' \perp x') \perp (x \perp y) = y' \perp (x' \perp x) \perp y = y' \perp u \perp y = y' \perp y = u.$$

□

◆ **Definizione 2.4.** Sia \mathbb{G} un insieme e \perp un'operazione binaria interna su \mathbb{G} . Diremo che la struttura algebrica (\mathbb{G}, \perp) è un *gruppo* se soddisfa le seguenti proprietà:

- (G1) l'operazione \perp è associativa;
- (G2) (\mathbb{G}, \perp) ammette elemento neutro;
- (G3) ogni elemento $x \in \mathbb{G}$ è invertibile.

Un gruppo (\mathbb{G}, \perp) è detto *commutativo* o *abeliano*¹ se soddisfa l'ulteriore proprietà:

- (G4) l'operazione \perp è commutativa.

L'insieme \mathbb{G} sarà detto *supporto* o *insieme soggiacente* del gruppo (\mathbb{G}, \perp) .

Si dirà anche, con abuso di linguaggio, che \mathbb{G} è un gruppo, sottintendendo in tal modo l'operazione \perp su di esso definita.

Solitamente, l'operazione di un gruppo viene indicata o con il simbolo $+$ o con il simbolo \cdot . In quest'ultimo caso, il simbolo sarà spesso omesso.

Nel primo caso, $(\mathbb{G}, +)$ è detto un *gruppo additivo*; l'elemento neutro è detto *zero*, indicato con 0 , e l'inverso di $x \in \mathbb{G}$ è detto *opposto* e indicato con $-x$.

Nel secondo caso, (\mathbb{G}, \cdot) è detto *gruppo moltiplicativo*; l'elemento neutro, indicato con 1 , è detto *unità* e l'inverso di $x \in \mathbb{G}$ è indicato con x^{-1} .

Esempio 2.1 bis. $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppoide associativo e commutativo. Esso non ammette elemento neutro.

Se $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, allora $(\mathbb{N}_0, +)$ è ovviamente associativo e commutativo e 0 ne è l'elemento neutro. Però nessun elemento di \mathbb{N}_0 , tranne 0 , ammette opposto.

(\mathbb{N}, \cdot) è un gruppoide associativo e commutativo; inoltre 1 ne è l'elemento neutro. Però nessun elemento, tranne 1 , è invertibile.

$(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano; 0 ne è l'elemento neutro e l'opposto di z è $-z$.

(\mathbb{Z}, \cdot) è un gruppoide associativo e commutativo, avente 1 quale elemento neutro. Però i suoi unici elementi invertibili sono 1 e -1 .

Esempio 2.2 bis. $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo abeliano; $0 = \frac{0}{1}$ ne è l'elemento neutro e l'opposto

$$\text{di } \frac{x}{y} \text{ è } -\frac{x}{y} = \frac{-x}{y}.$$

(\mathbb{Q}, \cdot) è un gruppoide associativo e commutativo, con $1 = \frac{1}{1}$ quale elemento neutro.

Si osservi che

$$\forall \frac{z}{t} \in \mathbb{Q}, \quad 0 \cdot \frac{z}{t} = \frac{0}{1} \cdot \frac{z}{t} = \frac{0}{t} = \frac{0}{1} = 0.$$

Quindi $0 = \frac{0}{1}$ non è invertibile in (\mathbb{Q}, \cdot) . Se invece $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{x}{y} \neq 0$, allora $\frac{x}{y}$ è invertibile in (\mathbb{Q}, \cdot) e $\frac{y}{x}$ ne è l'inverso.

Quindi, posto $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$, si ha che (\mathbb{Q}^*, \cdot) è un gruppo abeliano.

Esempio 2.3 bis. $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo abeliano e 0 ne è l'elemento neutro. Posto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, (\mathbb{R}^*, \cdot) è un gruppo abeliano e 1 ne è l'elemento neutro.

¹Dal nome del matematico norvegese *Niels H. Abel* (Findö, 1802 - Froland, 1829).

Analogamente, $(\mathbb{C}, +)$ è un gruppo abeliano; $0 = 0 + i \cdot 0$ ne è l'elemento neutro e l'opposto di $z = a + ib$ è $-z = -a - ib$.

Posto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, (\mathbb{C}^*, \cdot) è un gruppo abeliano; $1 = 1 + i \cdot 0$ ne è l'elemento neutro e l'inverso di $z = a + ib$ ($z \neq 0$) è

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Esempio 2.4 bis. Per ogni $n \geq 2$, $(\mathbb{Z}_n, +)$ è un gruppo abeliano, $\bar{0}$ ne è l'elemento neutro e l'opposto di \bar{x} è $-\bar{x}$.

(\mathbb{Z}_n, \cdot) è un gruppoide associativo e commutativo, con $\bar{1}$ quale elemento neutro.

Esempio 2.6 bis. Se $X \neq \emptyset$, $(\text{Hom}(X), \circ)$ è un gruppoide associativo ma, in generale, *non commutativo* e l'applicazione identica Id_X ne è l'elemento neutro. Inoltre una applicazione $f \in \text{Hom}(X)$ è invertibile se e solo se è biunivoca (si veda la Proposizione 1.7), cioè se e solo se $f \in \mathfrak{S}(X)$. Quindi $(\mathfrak{S}(X), \circ)$ è un gruppo (*non abeliano* se X ha almeno tre elementi), che viene usualmente detto il *gruppo delle sostituzioni o permutazioni* su X .

3. Anelli e campi

Nel presente paragrafo studieremo strutture algebriche del tipo $(X, +, \cdot)$, costituite da un insieme X e da due operazioni binarie interne su X , che saranno dette rispettivamente *somma* e *prodotto* di elementi di X .

◆ **Definizione 2.5.** Sia \mathbb{A} un insieme e $+, \cdot$ due operazioni binarie interne su \mathbb{A} . Diremo che la struttura algebrica $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ è un *anello* se soddisfa le seguenti proprietà:

- (A1) $(\mathbb{A}, +)$ è un gruppo abeliano;
- (A2) il prodotto è associativo;
- (A3) $\forall x, y, z \in \mathbb{A}$,

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \text{e} \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$$

La proprietà (A3) si esprime anche dicendo che *il prodotto è distributivo rispetto alla somma*.

Un anello $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ è detto *commutativo* se il prodotto è commutativo.

Un anello $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ è detto *unitario* o *con unità* se (\mathbb{A}, \cdot) ammette elemento neutro.

◆ **Definizione 2.6.** Sia \mathbb{K} un insieme e $+, \cdot$ due operazioni binarie interne su \mathbb{K} . Diremo che la struttura algebrica $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un *campo* se soddisfa le seguenti proprietà:

- (K1) $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo abeliano;
- (K2) se 0 è l'elemento neutro di $(\mathbb{K}, +)$ e $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$, allora (\mathbb{K}^*, \cdot) è un gruppo abeliano;
- (K3) il prodotto è distributivo rispetto alla somma.

In altre parole, un campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un anello commutativo e unitario (contenente almeno due elementi), in cui ogni elemento diverso da 0 è invertibile rispetto al prodotto.

Se $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ è un anello (rispettivamente, se $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un campo), allora l'insieme \mathbb{A} (rispettivamente \mathbb{K}) è detto *insieme soggiacente* o *supporto*.

Si dirà anche, con abuso di linguaggio, che \mathbb{A} è un anello (rispettivamente, che \mathbb{K} è un campo), sottintendendo così le operazioni su di esso definite.

Esempio 2.7. (L'anello degli interi) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità, ma non un campo (si veda l'Esempio 2.1 bis).

Esempio 2.8. (I campi dei numeri razionali, reali e complessi) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sono campi (si vedano gli Esempi 2.2 bis e 2.3 bis).

Esempio 2.9. (L'anello delle classi resto modulo n) Per ogni $n \geq 2$, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità (si veda l'Esempio 2.4 bis). Si può provare che $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

In ogni anello $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ valgono alcune proprietà elementari che sono conseguenze del fatto che $(\mathbb{A}, +)$ è un gruppo abeliano e che (\mathbb{A}, \cdot) è un gruppoide associativo. Così l'elemento 0 è unico e l'opposto $-a$ di $a \in \mathbb{A}$ è unico. Inoltre, se \mathbb{A} ammette elemento unità, questo è unico; se poi \mathbb{A} è un campo, l'inverso a^{-1} di $a \in \mathbb{A}^*$ è unico.

Gli anelli godono di altre proprietà elementari che dipendono, oltre che dagli assiomi dei gruppi abeliani e dei gruppidi associativi, anche dalla distributività del prodotto rispetto alla somma.

Ad esempio, se $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ è un anello, allora, per ogni $x \in \mathbb{A}$, si ha:

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0.$$

► **Osservazione 2.7.** Se \mathbb{A} è un anello con unità che contiene almeno 2 elementi, allora, quale conseguenza immediata della proprietà precedente, si ha sempre $1 \neq 0$. In particolare, ogni campo contiene almeno i due elementi distinti 0 e 1.

I concetti di *caratteristica* e di *divisore dello zero*, che stiamo per introdurre, inducono a riflettere su alcune familiari proprietà, valide nell'anello \mathbb{Z} degli interi (e nei campi \mathbb{Q} , \mathbb{R} o \mathbb{C} dei numeri razionali, reali o complessi), che devono essere usate con cautela in ambito più generale.

♦ **Definizione 2.8.** Sia $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ un anello con unità (in particolare, un campo). Se, per ogni $m \in \mathbb{N}$, si ha $1 + \cdots + 1 \neq 0$, allora diremo che \mathbb{A} ha *caratteristica zero*. In caso contrario, diremo *caratteristica* di \mathbb{A} il minimo intero positivo n tale che $1 + \cdots + 1 = 0$.

Si osservi che, se \mathbb{A} ha caratteristica n , allora, $\forall a \in \mathbb{A}$, si ha:

$$a + \cdots + a = 1 \cdot a + \cdots + 1 \cdot a = (1 + \cdots + 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

$n \text{ volte} \qquad \qquad \qquad n \text{ volte} \qquad \qquad \qquad n \text{ volte}$

◆ **Definizione 2.9.** Sia $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ un anello. Se $a, b \in \mathbb{A} - \{0\}$ sono due elementi non nulli di \mathbb{A} tali che $a \cdot b = 0$, si dice che a e b sono *divisori dello zero*.

► **Osservazione 2.10.** La mancanza di divisori dello zero nell'anello \mathbb{A} equivale alla seguente proprietà, nota come *legge di annullamento del prodotto*:

$$\forall a, b \in \mathbb{A}, \text{ se } a \cdot b = 0 \text{ allora } a = 0 \text{ oppure } b = 0.$$

■ **Proposizione 2.11.** Ogni campo è privo di divisori dello zero e la sua caratteristica è zero o un numero primo.

Dimostrazione. Sia \mathbb{K} un campo, e siano $a, b \in \mathbb{K}$ tali che $a \cdot b = 0$. Se $a \neq 0$, allora

$$b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0;$$

ciò prova la prima parte dell'enunciato.

Supponiamo ora che la caratteristica di \mathbb{K} sia $n = n' \cdot n''$, con $1 < n' < n$, $1 < n'' < n$. Poiché

$$0 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ volte}} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n' \text{ volte}} \cdot \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n'' \text{ volte}},$$

la mancanza di divisori dello zero implica che uno almeno dei due fattori deve essere nullo, contro l'ipotesi che n sia la caratteristica di \mathbb{K} . □

Esempio 2.10. L'anello degli interi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è privo di divisori dello zero e ha caratteristica zero. I campi $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dei numeri razionali, reali e complessi hanno caratteristica zero.

Esempio 2.11. Per ogni $n \geq 2$, l'anello delle classi resto modulo n $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ha caratteristica n ; inoltre, ha divisori dello zero se e solo se n non è un numero primo. Ad esempio $\bar{2}$ e $\bar{3}$ sono divisori dello zero in \mathbb{Z}_6 . Ciò conferma che, se n non è primo, \mathbb{Z}_n non è un campo.

Esempio 2.12. Se U è un insieme non vuoto, poniamo, $\forall A, B \subseteq U$:

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B); \quad A \cdot B = A \cap B.$$

Con tali posizioni, $(\mathfrak{P}(U), +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità (l'insieme U).

L'elemento neutro di $(\mathfrak{P}(U), +)$ è l'insieme vuoto \emptyset . Si osservi che $\forall A \in \mathfrak{P}(U)$, $A + A = \emptyset$; dunque, $\mathfrak{P}(U)$ ha caratteristica due.

Inoltre, ogni elemento $A \in \mathfrak{P}(U)$, con $A \neq \emptyset$, $A \neq U$, è un divisore dello zero. Infatti $A \cdot C_U A = \emptyset$.

Infine si osservi che $\forall A \in \mathfrak{P}(U)$, si ha: $A^2 = A \cdot A = A$. Un anello con tale proprietà è detto *booleano*².

²Dal nome del matematico inglese *George Boole* (Lincoln, 1815 - Cork, 1864).

4. Sottostrutture e morfismi

♦ **Definizione 2.12.** Sia X un insieme, \top un'operazione binaria interna su X e $Y \subseteq X$. Diremo che Y è *chiuso* rispetto all'operazione \top se:

$$\forall x, y \in Y, \quad x \top y \in Y.$$

In tal caso, è possibile restringere opportunamente dominio e codominio di \top , in modo da ottenere una applicazione

$$\top_Y : Y \times Y \rightarrow Y$$

che risulta un'operazione binaria interna su Y .

Diremo, per brevità, che \top_Y è la restrizione a $Y \subseteq X$ dell'operazione \top . Inoltre, con abuso di linguaggio, spesso indicheremo \top_Y ancora con \top .

Nel seguito l'elemento neutro del gruppo \mathbb{G} sarà indicato con u .

♦ **Definizione 2.13.** Sia $(\mathbb{G}, *)$ un gruppo e \mathbb{H} un sottoinsieme di \mathbb{G} , chiuso rispetto all'operazione $*$. Diremo allora che \mathbb{H} è un *sottogruppo* di $(\mathbb{G}, *)$ se $(\mathbb{H}, *)$ è un gruppo, dove $* = *_{\mathbb{H}}$ indica la restrizione a \mathbb{H} dell'operazione definita su \mathbb{G} .

♦ **Definizione 2.14.** Sia $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ un anello (rispettivamente un campo) e \mathbb{H} un sottoinsieme di \mathbb{F} , chiuso rispetto a entrambe le operazioni definite su \mathbb{F} . Diremo che \mathbb{H} è un *sottoanello* (rispettivamente un *sottocampo*) di $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ se $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ è un anello (rispettivamente un campo), dove $+ = +_{\mathbb{H}}$ e $\cdot = \cdot_{\mathbb{H}}$ indicano le restrizioni a \mathbb{H} delle operazioni di somma e prodotto definite su \mathbb{F} .

♦ **Definizione 2.15.** Siano $(\mathbb{G}, *)$ e $(\mathbb{G}', *)$ due gruppi. Diremo *omomorfismo* di \mathbb{G} in \mathbb{G}' ogni applicazione $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}'$ tale che, $\forall x, y \in \mathbb{G}$:

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y).$$

♦ **Definizione 2.16.** Siano $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{F}', +, \cdot)$ due anelli (in particolare, due campi). Diremo *omomorfismo* di \mathbb{F} in \mathbb{F}' ogni applicazione $\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}'$ tale che, $\forall x, y \in \mathbb{F}$:

$$(i) \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y);$$

$$(ii) \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Per *isomorfismo* (tra due gruppi o tra due anelli o tra due campi) intenderemo sempre un omomorfismo biiettivo. Si noti che *l'inverso* φ^{-1} di un isomorfismo φ è ancora un isomorfismo.

Esempio 2.13. Sia $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ il campo dei numeri razionali e $\tilde{\mathbb{Z}} = \{m/1 \mid m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$. Evidentemente $\tilde{\mathbb{Z}}$ è un sottoanello (commutativo e unitario) di \mathbb{Q} .

Identificando \mathbb{Z} con $\tilde{\mathbb{Z}}$, mediante l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, che associa a ogni intero $m \in \mathbb{Z}$ il razionale $m/1 \in \mathbb{Q}$ (si veda l'Esempio 1.7), si può considerare \mathbb{Z} sottoanello di \mathbb{Q} .

Analogamente \mathbb{Q} può essere identificato con un sottocampo $\tilde{\mathbb{Q}}$ del campo \mathbb{R} dei numeri reali e \mathbb{R} può essere identificato con un sottocampo $\tilde{\mathbb{R}}$ del campo \mathbb{C} dei numeri complessi.

Esempio 2.14. Se $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ è un anello con unità, allora il sottoinsieme $\{1, -1\}$, con l'operazione di prodotto indotta da \mathbb{A} , è un gruppo.

Se \mathbb{A} è tale che $1 + 1 = 0$, allora $1 = -1$ e quindi $\{-1, 1\}$ si riduce al gruppo banale $\{1\}$ costituito dalla sola unità di \mathbb{A} .

Se, invece, $1 + 1 \neq 0$, allora l'applicazione $f : \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\} \rightarrow \{1, -1\}$, definita da $f(\bar{0}) = 1$ e $f(\bar{1}) = -1$ è un isomorfismo di $(\mathbb{Z}_2, +)$ in $(\{1, -1\}, \cdot)$.

Esempio 2.15. Sia $I(\mathbb{A})$ l'insieme degli elementi invertibili (rispetto al prodotto) di un anello unitario \mathbb{A} .

Evidentemente $1 \in I(\mathbb{A})$ e, per la Proposizione 2.3 (ii), $\forall x, y \in I(\mathbb{A})$, $x \cdot y \in I(\mathbb{A})$ e $x^{-1} \in I(\mathbb{A})$. Ciò prova che $(I(\mathbb{A}), \cdot)$ è un gruppo, detto il *gruppo degli elementi invertibili* di \mathbb{A} .

Si osservi che $\{-1, 1\}$ è un sottogruppo di $I(\mathbb{A})$. Inoltre, se \mathbb{K} è un campo, allora $I(\mathbb{K}) = \mathbb{K} - \{0\}$.

Esempio 2.16. Sia \mathbb{R} il campo dei numeri reali, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ e $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > 0\}$.

Evidentemente, (\mathbb{R}^+, \cdot) è un sottogruppo di (\mathbb{R}^*, \cdot) .

Se $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, indichiamo con $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ la funzione esponenziale che a $x \in \mathbb{R}$ associa $\exp_a(x) = a^x \in \mathbb{R}^*$.

È noto che \exp_a è una funzione (strettamente) crescente, dunque iniettiva, e che $\text{Im } \exp_a = \mathbb{R}^+$. Inoltre, se $x, y \in \mathbb{R}$, allora

$$\exp_a(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y).$$

Ciò prova che \exp_a è un isomorfismo del gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ dei numeri reali nel gruppo moltiplicativo (\mathbb{R}^+, \cdot) dei numeri reali positivi.

L'isomorfismo inverso \exp_a^{-1} è la funzione logaritmo $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

5. n -ple

Sia \mathbb{K} un anello commutativo con unità (in particolare, un campo). Se $n \in \mathbb{N}$ sia poi \mathbb{K}^n l'insieme delle n -ple di elementi di \mathbb{K} (si veda § 2 del Capitolo 1):

$$\mathbb{K}^n = \{\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n) \mid a^i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}.$$

La somma definita su \mathbb{K} induce su \mathbb{K}^n una “somma di n -ple”, definita come segue:

se $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$, $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n) \in \mathbb{K}^n$, allora $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a^1 + b^1, \dots, a^n + b^n)$.

Rispetto a tale somma, $(\mathbb{K}^n, +)$ è un gruppo abeliano.

Si osservi che l'elemento neutro è la “ n -pla nulla” $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ e che la “ n -pla opposta” di $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$ è $-\mathbf{a} = (-a^1, \dots, -a^n)$.

Si definisce anche una operazione di *prodotto di un elemento di \mathbb{K} per una n -pla*

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

ponendo:

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{K}^n, \quad \alpha \cdot \mathbf{a} = (\alpha a^1, \dots, \alpha a^n).$$

Ad esempio, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $\mathbf{a} = (1, \pi, 0)$, $\mathbf{b} = (3, 0, -4)$, $\alpha = \sqrt{2}$, allora:
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (4, \pi, -4)$ e $\sqrt{2} \cdot \mathbf{a} = (\sqrt{2}, \pi\sqrt{2}, 0)$.

♦ **Definizione 2.17.** Siano $\mathbf{a}_1 = (a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, \mathbf{a}_m = (a_m^1, \dots, a_m^n)$ n -ple di elementi di \mathbb{K} e siano $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ elementi di \mathbb{K} . Diremo *combinazione lineare* di $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ con coefficienti $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ la n -pla

$$\lambda^1 \cdot (a_1^1, \dots, a_1^n) + \dots + \lambda^m \cdot (a_m^1, \dots, a_m^n) = \lambda^1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda^m \cdot \mathbf{a}_m \in \mathbb{K}^n$$

che sarà anche indicata con il simbolo

$$\sum_{i=1}^m \lambda^i \cdot \mathbf{a}_i$$

Ad esempio, in \mathbb{R}^3 , se

$$\mathbf{a}_1 = (1, 3, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{a}_4 = (1, 7, -3)$$

$$\lambda^1 = 2, \quad \lambda^2 = -1, \quad \lambda^3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda^4 = 0$$

allora

$$\begin{aligned} \lambda^1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda^2 \cdot \mathbf{a}_2 + \lambda^3 \cdot \mathbf{a}_3 + \lambda^4 \cdot \mathbf{a}_4 &= 2 \cdot (1, 3, 0) + (-1) \cdot (0, 1, 1) + \frac{1}{2} \cdot (0, 0, 1) + 0 \cdot (1, 7, -3) = \\ &= (2, 6, 0) + (0, -1, -1) + (0, 0, \frac{1}{2}) + (0, 0, 0) = (2, 5, -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

6. L'anello dei polinomi

Nel presente paragrafo, \mathbb{K} indicherà un campo. Ricordiamo inoltre che $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Una scrittura formale

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i t^i$$

con $a_i \in \mathbb{K}$ per ogni $i \in \mathbb{N}_0$, è detta *polinomio nell'indeterminata t a coefficienti in \mathbb{K}* se $\exists m \in \mathbb{N}_0$ tale che, per ogni $i \geq m$, $a_i = 0$. Per ogni $i \in \mathbb{N}_0$, $a_i t^i$ è detto *monomio di grado i* e a_i è detto *coefficiente di grado i* del polinomio.

Si noti che l'indeterminata t è un simbolo astratto e *non deve essere considerata un elemento di \mathbb{K}* .

Indicheremo con $\mathbb{K}[t]$ l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti in \mathbb{K} . Le operazioni di somma e prodotto di polinomi in $\mathbb{K}[t]$, sono definite come segue:

$$\text{se } p(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i t^i, \quad q(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} b_i t^i \in \mathbb{K}[t],$$

$$p(t) + q(t) = r(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (a_i + b_i) t^i;$$

$$p(t) \cdot q(t) = s(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} c_k t^k, \quad \text{dove } c_k = \sum_{r=0}^k a_r b_{k-r}.$$

La struttura $(\mathbb{K}[t], +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità (lo zero di $\mathbb{K}[t]$ è il polinomio nullo $\mathbf{0}$, cioè il polinomio $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} z_i t^i$, con $z_i = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}_0$; l'unità di $\mathbb{K}[t]$ è il polinomio $\mathbf{1}$, cioè il polinomio $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} u_i t^i$ con $u_0 = 1$ e $u_j = 0$, per ogni $j \geq 1$).

Definiamo inoltre un'operazione $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[t] \rightarrow \mathbb{K}[t]$, ponendo, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall p(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i t^i \in \mathbb{K}[t]$,

$$\lambda \cdot p(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (\lambda \cdot a_i) t^i.$$

La definizione di *combinazione lineare di polinomi* è lasciata al lettore.

◆ **Definizione 2.18.** Si dice *grado* $\text{gr}(p(t))$ di un polinomio non nullo $p(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i t^i$ il massimo intero $r \geq 0$ tale che $a_r \neq 0$; a_r è detto *coefficiente principale* di $p(t)$. Se il coefficiente principale è uguale a 1, il polinomio si dice *monico*.

Al polinomio nullo $\mathbf{0}$ si attribuisce, convenzionalmente, grado -1 .

Per ogni $r \geq -1$, poniamo

$$\mathbb{K}^r[t] = \{p(t) \in \mathbb{K}[t] \mid \text{gr}(p(t)) \leq r\}.$$

Evidentemente $\mathbb{K}^{-1}[t] = \{\mathbf{0}\}$.

► **Osservazione 2.19.** Sia $\psi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}[t]$ l'applicazione che associa a ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ il polinomio $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} u_i t^i$ definito ponendo $u_0 = \alpha$ e, per ogni $i \geq 1$, $u_i = 0$. Si verifica facilmente che ψ è un omomorfismo iniettivo dell'anello \mathbb{K} nell'anello $\mathbb{K}[t]$ tale che $\text{Im } \psi = \mathbb{K}^0[t]$.

Ciò consente di *identificare*, in maniera naturale, ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ con $\psi(\alpha) \in \mathbb{K}^0[t]$ e di considerare quindi \mathbb{K} come sottoanello di $\mathbb{K}[t]$. Con tale identificazione, il prodotto di un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ per un polinomio $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ coincide con il prodotto del polinomio $\alpha \in \mathbb{K}^0[t]$ per $q(t)$.

► **Osservazione 2.20.** Per ogni $j \in \mathbb{N}_0$, conveniamo di indicare semplicemente con il simbolo t^j il polinomio $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} \nu_i t^i$ definito ponendo $\nu_j = 1$, e, per ogni $i \in \mathbb{N}_0 - \{j\}$, $\nu_i = 0$. Con tale convenzione, posto $t^0 = 1$, $t^1 = t$ e ricordata l'osservazione precedente, ogni polinomio

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i t^i \in \mathbb{K}^r[t], \quad r \geq 0,$$

è combinazione lineare degli $r+1$ polinomi $1, t, t^2, \dots, t^r$, con coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{K}$. Si ha cioè:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_r t^r.$$

Ad esempio, l'espressione $1 + 2t + t^3 - t^4$ rappresenta il polinomio

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i t^i \in \mathbb{Z}[t],$$

dove $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$ e, per ogni $j \geq 5$, $a_j = 0$.

Se $p(t) = 1 - 3t^2$, $q(t) = -1 + 2t + 3t^2 + 2t^3 \in \mathbb{Z}[t]$, allora:

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= 2t + 2t^3; \\ p(t) \cdot q(t) &= -1 + 2t + 6t^2 - 4t^3 - 9t^4 - 6t^5; \\ 7 \cdot p(t) &= 7 - 21t^2. \end{aligned}$$

■ **Proposizione 2.21.** Se $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, allora:

- (a) $\text{gr}(p(t) + q(t)) \leq \max\{\text{gr}(p(t)), \text{gr}(q(t))\}$;
- (b) se $\alpha \neq 0$, $\text{gr}(\alpha \cdot p(t)) = \text{gr}(p(t))$;
- (c) se $p(t)$ e $q(t)$ sono entrambi non nulli, si ha:

$$\text{gr}(p(t) \cdot q(t)) = \text{gr}(p(t)) + \text{gr}(q(t)).$$

Le dimostrazioni sono semplici verifiche. □

► **Osservazione 2.22.** Dalla Proposizione 2.21 (a) segue subito che $\mathbb{K}^r[t]$ è un sottogruppo del gruppo abeliano $(\mathbb{K}[t], +)$.

Inoltre, per la Proposizione 2.21 (b), se $\alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{K}^0[t]$ e $q(t) \in \mathbb{K}^r[t]$, allora $\alpha \cdot q(t) \in \mathbb{K}^r[t]$.

In generale, però, se $p(t), q(t) \in \mathbb{K}^r[t]$, con $r \geq 1$, allora $p(t) \cdot q(t) \in \mathbb{K}^{2r}[t]$ (si veda la Proposizione 2.21 (c)). Dunque, per $r \geq 1$, $\mathbb{K}^r[t]$ non è un sottoanello di $(\mathbb{K}[t], +, \cdot)$.

► **Osservazione 2.23.** $(\mathbb{K}[t], +, \cdot)$ non è un campo. Infatti, se $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ ha grado $m \geq 1$, allora, qualunque sia il polinomio non nullo $q(t)$, per la Proposizione 2.21 (c), $\text{gr}(p(t) \cdot q(t)) \geq m$ e quindi $p(t) \cdot q(t) \neq 1$. Ciò prova che $p(t)$ non è invertibile.

7. Algebre di Boole

◆ **Definizione 2.24.** Si dice *algebra di Boole* una struttura algebrica (A, \cup, \cap) , dove A è un insieme contenente almeno due elementi e \cup, \cap sono due operazioni binarie interne su A (dette rispettivamente *disgiunzione* (o OR) e *congiunzione* (o AND)) che godono delle seguenti proprietà:

- (i) \cup e \cap sono commutative, cioè per ogni $a, b \in A$ si ha

$$a \cup b = b \cup a \quad \text{e} \quad a \cap b = b \cap a;$$

- (ii) esistono in A un elemento neutro rispetto a \cup (indicato con 0) e un elemento neutro rispetto a \cap (indicato con 1), cioè per ogni $a \in A$ si ha

$$a \cup 0 = a \quad \text{e} \quad a \cap 1 = a;$$

- (iii) ciascuna delle due operazioni è distributiva rispetto all'altra, cioè per ogni $a, b, c \in A$, risulta

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

- (iv) Per ogni $a \in A$ esiste $a' \in A$ (detto *complemento di a*) tale che

$$a \cup a' = 1 \quad \text{e} \quad a \cap a' = 0.$$

Esempio 2.17. Sia $A = \{0, 1\}$ e siano \cup, \cap le operazioni binarie interne su A definite dalle tabelle seguenti:

\cup	0	1
0	0	1
1	1	1

\cap	0	1
0	0	0
1	0	1

È immediato verificare che (A, \cup, \cap) è una algebra di Boole, detta *algebra di commutazione* o *algebra a due valori*.

Si noti che, considerando la corrispondenza di 0 (risp. 1) con *Falso* (risp. *Vero*) e dando alle operazioni \cup, \cap il significato logico di *disgiunzione* e *congiunzione* rispettivamente, l'algebra di Boole a due valori rappresenta la cosiddetta *logica proposizionale*, e in tale ambiente le tabelle sopra esposte sono dette *Tabelle di verità*; in questo caso, il complemento di una proposizione logica coincide con la sua negazione.

La medesima algebra di Boole riveste un'importanza particolare anche nelle applicazioni, ad esempio considerando i circuiti elettrici, dando a 0 (risp. 1) il significato di *interruttore spento* (risp. *interruttore acceso*) e associando all'operazione \cup (risp. \cap) un circuito con interruttori *in parallelo* (risp. *in serie*).

Esempio 2.18. Per ogni insieme non vuoto X , indicando con 0 l'insieme \emptyset e con 1 l'insieme X stesso, e considerando le operazioni \cup e \cap come l'usuale unione e intersezione insiemistica, la terna $(\mathfrak{P}(X), \cup, \cap)$ risulta una algebra di Boole (avente come sostegno l'insieme $\mathfrak{P}(X)$ delle parti di X)³. Nel caso in cui X contenga un solo elemento, tale algebra di Boole si identifica con l'algebra di Boole a due valori.

► **Osservazione 2.25.** Si noti che negli assiomi che definiscono le algebre di Boole (Definizione 2.24) è possibile intercambiare le operazioni \cup e \cap e gli elementi neutri 0 e 1 rimanendo all'interno del sistema di assiomi stesso. Ne segue che da ogni affermazione vera su un'algebra di Boole A , espressa in termini di $\cup, \cap, 0$ e 1 , se ne può ottenere un'altra - detta *duale* della precedente -, pure vera su A , intercambiando ovunque i simboli \cup e \cap e i simboli 0 e 1. Tale proprietà è nota come *Principio di dualità*.

³In realtà, si dimostra che ogni algebra di Boole finita (A, \cup, \cap) è isomorfa all'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme X ; da questo segue che la cardinalità di A è esattamente 2^n , dove n è la cardinalità di X .

■ **Proposizione 2.26.** *Sia (A, \cup, \cap) un'algebra di Boole. Allora:*

- $\forall a \in A, \quad a \cup a = a \quad e \quad a \cap a = a$
- $\forall a \in A, \quad a \cup 1 = 1 \quad e \quad a \cap 0 = 0$
- $\forall a, b \in A, \quad a \cup (a \cap b) = a \quad e \quad a \cap (a \cup b) = a$

Dimostrazione. Per il Principio di dualità (Osservazione 2.25), è sufficiente provare soltanto la prima uguaglianza di ogni affermazione. Facendo uso opportunamente degli assiomi delle algebre di Boole, si ha:

- $a \cup a = (a \cup a) \cap 1 = (a \cup a) \cap (a \cup a') = a \cup (a \cap a') = a \cup 0 = a;$
- $a \cup 1 = 1 \cap (a \cup 1) = (a \cup a') \cap (a \cup 1) = a \cup (a' \cap 1) = a \cup a' = 1;$
- $a \cup (a \cap b) = (a \cap 1) \cup (a \cap b) = a \cap (1 \cup b) = a \cap 1 = a.$

□

Analogamente, facendo uso degli assiomi delle algebre di Boole (Definizione 2.24) e del Principio di dualità (Osservazione 2.25), uniti alle proprietà contenute nella Proposizione 2.26, non è difficile provare le seguenti affermazioni:

■ **Proposizione 2.27.** *In ogni algebra di Boole (A, \cup, \cap) , le operazioni \cup e \cap sono associative:*

$$\forall a, b, c \in A, \quad (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) \quad e \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c).$$

Inoltre:

- $\forall a \in A, \text{ è unico l'elemento } a' \in A \text{ tale che } a \cup a' = 1 \quad e \quad a \cap a' = 0;$
- $\forall a, b \in A, \quad (a \cup b)' = a' \cap b';$
- $\forall a \in A, \quad (a')' = a.$

□

◆ **Definizione 2.28.** Sia (A, \cup, \cap) una algebra di Boole. Si dice *costante* in A ogni simbolo che indica un elemento specificato di A (ad esempio 0 e 1), mentre si dice *variabile* in A ogni simbolo che rappresenta un elemento arbitrario di A . Si dice *funzione booleana* ogni espressione ottenuta a partire da un numero finito di elementi di A , combinati mediante le operazioni \cup e \cap . Il *numero di variabili* di una funzione booleana è il numero di variabili distinte che compaiono in essa, supponendo di identificare ogni elemento con il suo complemento.

Tramite le proprietà dell'algebra di Boole è possibile semplificare espressioni booleane complesse; in particolare, è possibile esprimere ogni funzione booleana come “unione di intersezioni” contenenti tutte le variabili (*forma canonica disgiuntiva*) oppure come “intersezione di unioni” contenenti tutte le variabili (*forma canonica congiuntiva*). Ciò riveste una particolare importanza nel caso dell'algebra di Boole a due valori, per le implicazioni alla semplificazione dei circuiti (elettrici o logici).

Matrici e determinanti

1. Matrici e loro operazioni

♦ **Definizione 3.1.** Sia X un insieme e sia (m, n) una coppia di interi positivi. Si dice *matrice di tipo $m \times n$ a coefficienti in X* una applicazione $A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \rightarrow X$. Se $m = n$, allora A è detta *matrice quadrata di ordine n* .

Indicheremo l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ a coefficienti in X con il simbolo $\mathcal{M}_{m \times n}(X)$. Se $m = n$, l'insieme delle matrici quadrate di ordine n sarà indicato con $\mathcal{M}_n(X)$, anziché con $\mathcal{M}_{n \times n}(X)$.

Una generica matrice A di $\mathcal{M}_{m \times n}(X)$ è dunque completamente individuata dagli $m \cdot n$ elementi $A(i, j) \in X$, con $i \in \mathbb{N}_m$ e $j \in \mathbb{N}_n$. Per ogni $(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$, porremo $A(i, j) = a_j^i$.⁽¹⁾

Per ogni fissato $i \in \mathbb{N}_m$, la n -pla $\mathbf{a}^i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i) \in X^n$ sarà detta la *i -esima riga* di A . Analogamente, per ogni fissato $j \in \mathbb{N}_n$, la m -pla $\mathbf{a}_j = (a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^m) \in X^m$ sarà detta la *j -esima colonna* di A .

Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(X)$, scriveremo ancora:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

o anche, più semplicemente, $A = (a_j^i)$, qualora sia chiaro dal contesto il tipo di A .

Diremo ancora che a_j^i è il *generico elemento* di A e che gli interi i e j sono rispettivamente *l'indice di riga* e *l'indice di colonna* di a_j^i .

Le notazioni precedenti giustificano il termine di *matrice con m righe e n colonne*, spesso usato per “matrice di tipo $m \times n$ ”.

Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

¹Scriveremo talvolta $A(i, j) = a_{ij}$ (anziché $A(i, j) = a_j^i$).

appartiene a $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$; le sue due righe sono le terne $\mathbf{a}^1 = (2, \sqrt{3}, -2)$, $\mathbf{a}^2 = (-1, 4, 0) \in \mathbb{R}^3$, mentre le sue tre colonne sono le coppie $\mathbf{a}_1 = (2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (\sqrt{3}, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Si osservi che ogni matrice di tipo $1 \times n$ (risp. $m \times 1$) si identifica con la n -pla (risp. con la m -pla) costituita dalla sua unica riga (risp. colonna). Pertanto, l'insieme $\mathcal{M}_{1 \times n}(X)$ (risp. $\mathcal{M}_{m \times 1}(X)$) si identifica con X^n (risp. con X^m).

♦ **Definizione 3.2.** Si dice *matrice trasposta* di $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}(X)$ la matrice ${}^tA = (b_k^h) \in \mathcal{M}_{n \times m}(X)$, i cui elementi, per ogni $h \in \mathbb{N}_n$ e $k \in \mathbb{N}_m$, sono definiti come segue:

$$b_k^h = a_h^k.$$

La matrice tA si ottiene dunque semplicemente considerando come colonne le righe di A e viceversa. Si ha pertanto:

$${}^t({}^tA) = A$$

Ad esempio, la trasposta della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

è la matrice

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{3} & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

♦ **Definizione 3.3.** Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(X)$ è detta *simmetrica* se ${}^tA = A$. In altre parole, $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(X)$ è simmetrica se, per ogni $i, j \in \mathbb{N}_n$, $a_j^i = a_i^j$.

L'insieme delle matrici simmetriche di ordine n su X sarà indicato con $\mathcal{S}_n(X)$.

D'ora in poi, considereremo matrici a coefficienti in \mathbb{K} , essendo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo. Come di consueto, indicheremo con 0 e 1 lo zero e l'unità di \mathbb{K} .

♦ **Definizione 3.4.** Date due matrici $A = (a_j^i), B = (b_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, si dice *matrice somma* di A con B la matrice $A + B = (c_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, dove, per ogni $i \in \mathbb{N}_m$ e $j \in \mathbb{N}_n$, si ha:

$$c_j^i = a_j^i + b_j^i.$$

♦ **Definizione 3.5.** Dato un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ e una matrice $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, si dice *matrice prodotto di α per A* la matrice $\alpha \cdot A = (d_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, dove, per ogni $i \in \mathbb{N}_m$ e $j \in \mathbb{N}_n$, si ha:

$$d_j^i = \alpha \cdot a_j^i.$$

Ad esempio, date

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

e $4 \in \mathbb{R}$, si ha:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & -1+6 & 0-2 \\ 3-4 & \sqrt{2}+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ -1 & \sqrt{2}+1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$4 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot \sqrt{2} & 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 12 & 4\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

► **Osservazione 3.6.** Le Definizioni 3.4 e 3.5 introducono rispettivamente un'operazione binaria interna

$$\begin{aligned} + : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\mapsto A + B \end{aligned}$$

e un'operazione

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ (\alpha, A) &\mapsto \alpha \cdot A. \end{aligned}$$

Il concetto di *combinazione lineare di matrici* appartenenti a $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, in analogia con la Definizione 2.17, si ottiene applicando più volte le operazioni precedenti.

Si noti poi che, nel caso particolare delle matrici riga (risp. colonna), tali operazioni coincidono con quelle già introdotte nel § 5 del Capitolo 2, identificando $\mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$ (risp. $\mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$) con \mathbb{K}^n (risp. con \mathbb{K}^m).

■ **Proposizione 3.7.** *La struttura algebrica $(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo abeliano. Valgono inoltre, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, le seguenti proprietà:*

- (a) $(\alpha + \beta) \cdot A = (\alpha \cdot A) + (\beta \cdot A)$;
- (b) $\alpha \cdot (A + B) = (\alpha \cdot A) + (\alpha \cdot B)$;
- (c) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$;
- (d) $1 \cdot A = A$.

Dimostrazione. È una semplice verifica.

Si noti comunque che l'elemento neutro rispetto alla somma è la “matrice nulla” $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ avente tutti gli elementi uguali a 0, mentre l'opposta di $A = (a_{ij}^i)$ è la matrice $-A = (-a_{ij}^i)$.

□

Introdurremo ora una operazione di prodotto tra matrici che, assieme alla somma, darà all'insieme delle matrici quadrate di ordine fissato una struttura di anello con unità.

Definiamo innanzitutto *prodotto naturale* di due n -ple $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ l'elemento

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k \in \mathbb{K}.$$

Ad esempio, date

$$\mathbf{a} = \left(3, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{b} = (1, 0, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3,$$

si ha

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

♦ **Definizione 3.8.** Una coppia (A, B) di matrici a coefficienti in \mathbb{K} è detta *conformabile* se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B .

♦ **Definizione 3.9.** Data una coppia conformabile (A, B) , con $A = (a_k^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_j^k) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$, si dice *prodotto (righe per colonne)* di A per B la matrice $A \cdot B = (c_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$, il cui generico elemento c_j^i è il prodotto naturale della i -esima riga \mathbf{a}^i di A per la j -esima colonna \mathbf{b}_j di B .

In altre parole, per ogni $i \in \mathbb{N}_m$ e $j \in \mathbb{N}_p$, si ha:

$$c_j^i = \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{b}_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_k^i b_j^k.$$

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 4}(\mathbb{R}),$$

allora la coppia (A, B) è conformabile e si ha:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}^1, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}^1, \mathbf{b}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}^1, \mathbf{b}_3 \rangle & \langle \mathbf{a}^1, \mathbf{b}_4 \rangle \\ \langle \mathbf{a}^2, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}^2, \mathbf{b}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}^2, \mathbf{b}_3 \rangle & \langle \mathbf{a}^2, \mathbf{b}_4 \rangle \\ \langle \mathbf{a}^3, \mathbf{b}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}^3, \mathbf{b}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}^3, \mathbf{b}_3 \rangle & \langle \mathbf{a}^3, \mathbf{b}_4 \rangle \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 + \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

La coppia (B, A) non è invece conformabile.

► **Osservazione 3.10.** La conformabilità di (A, B) non implica, in generale, la conformabilità di (B, A) . In effetti, se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{r \times s}$, allora (A, B) è conformabile se e solo se $n = r$, mentre (B, A) è conformabile se e solo se $s = m$.

In ogni caso, anche se (A, B) e (B, A) sono entrambe coppie conformabili, si ha, in generale, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■ **Proposizione 3.11.** *Se (A, B) e (B, C) sono coppie conformabili, allora anche $(A \cdot B, C)$ e $(A, B \cdot C)$ sono coppie conformabili e si ha:*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Dimostrazione. Supponiamo $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$; allora

$$A \cdot B \in \mathcal{M}_{m \times p}, \quad B \cdot C \in \mathcal{M}_{n \times q}$$

e dunque la prima parte della proposizione risulta evidente.

Inoltre, se $A = (a_j^i)$, $B = (b_h^j)$, $C = (c_k^h)$, il generico elemento s_k^i di $(A \cdot B) \cdot C$ sarà

$$s_k^i = \sum_{h=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_j^i b_h^j \right) c_k^h,$$

mentre il generico elemento t_k^i di $A \cdot (B \cdot C)$ sarà

$$t_k^i = \sum_{j=1}^n a_j^i \left(\sum_{h=1}^p b_h^j c_k^h \right).$$

Utilizzando la distributività del prodotto rispetto alla somma in \mathbb{K} si prova che $s_k^i = t_k^i$ e dunque la proposizione risulta completamente dimostrata. □

■ **Proposizione 3.12.** *Se (A, B) (risp. (B, A)) è una coppia conformabile e C è una matrice dello stesso tipo di B , anche (A, C) e $(A, B + C)$ (risp. (C, A) e $(B + C, A)$) sono coppie conformabili e si ha:*

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= (A \cdot B) + (A \cdot C) \\ (\text{risp. } (B + C) \cdot A &= (B \cdot A) + (C \cdot A)). \end{aligned}$$

Dimostrazione. È una semplice verifica (il cui procedimento risulta del tutto analogo a quello della Proposizione 3.11). □

Risultano inoltre di immediata verifica le seguenti proprietà relative alle matrici trasposte.

■ **Proposizione 3.13.**

- (a) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$;
- (b) ${}^t(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot {}^tA$;
- (c) se (A, B) è una coppia conformabile, allora anche $({}^tB, {}^tA)$ è una coppia conformabile e si ha:

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA.$$

□

2. L'anello delle matrici quadrate

Sia $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti nel campo \mathbb{K} .

◆ **Definizione 3.14.** Si dice *diagonale principale* (risp. *secondaria*) di una matrice quadrata $A = (a_{ij}^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la n -pla $(a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n)$ (risp. la n -pla $(a_n^1, a_{n-1}^2, \dots, a_1^n)$).

Ad esempio, nella matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

la diagonale principale è la terna $(3, 1, 0)$, mentre la diagonale secondaria è la terna $(-1, 1, 5)$.

◆ **Definizione 3.15.** Una matrice quadrata $A = (a_{ij}^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è detta *matrice diagonale* se

$$(a_{ij}^i \neq 0) \Rightarrow (i = j).$$

In altre parole, A è diagonale se gli unici elementi eventualmente non nulli di A appartengono alla sua diagonale principale.

Risulta utile, ai fini notazionali, introdurre i seguenti simboli δ_j^i (indicati anche con δ^{ij} o con δ_{ij}), noti come *simboli di Kronecker*², definiti, per ogni $i \in \mathbb{N}_m$ e per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, da:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

essendo, come d'uso, 0 e 1 gli elementi neutri rispettivamente della somma e del prodotto in \mathbb{K} .

Si dice *matrice identica* di ordine n su \mathbb{K} la matrice $I_n = (\delta_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cioè la matrice diagonale di ordine n avente ogni elemento della diagonale principale uguale a 1.

²Leopold Kronecker: matematico tedesco (Liegnitz, 1823 - Berlino, 1891).

◆ **Definizione 3.16.** Una matrice quadrata $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *triangolare alta* (resp. *bassa*) se:

$$(a_j^i \neq 0) \Rightarrow (i \leq j) \quad (\text{resp. } (i \geq j)).$$

In altri termini, A è triangolare alta (resp. bassa) se tutti gli elementi “al di sotto” (resp. “al di sopra”) della sua diagonale principale sono nulli.

Evidentemente, se A è triangolare alta, allora tA è triangolare bassa e viceversa.

Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è triangolare alta, mentre la matrice

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

è triangolare bassa.

Una matrice diagonale è contemporaneamente triangolare alta e bassa: così né A né tA sono, in questo esempio, matrici diagonali, mentre è diagonale la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che tutte le coppie di matrici di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ risultano conformabili. In altri termini, *il prodotto tra matrici è una operazione binaria interna su $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Si ha inoltre:

■ **Proposizione 3.17.** *La struttura $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ è un anello, avente la matrice identica I_n quale unità moltiplicativa.*

Dimostrazione. È una semplice verifica (si vedano anche le Proposizioni 3.11, 3.12). \square

► **Osservazione 3.18.** Si noti che $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ è identificabile con \mathbb{K} e che, se $n > 1$, l'anello $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non è commutativo.

Inoltre, se $n > 1$, nell'anello $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non vale la legge di annullamento del prodotto: una coppia di divisori dello zero in $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ è, ad esempio,

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Infine, se $n > 1$, esistono in $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrici non nulle che non ammettono inversa.

Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

non è invertibile. Infatti, se

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è una generica matrice di $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, allora

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non può mai essere la matrice identica I_2 di $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Le matrici di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertibili rispetto al prodotto sono dette *regolari*. L'insieme delle matrici regolari di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si indica con il simbolo $GL_n(\mathbb{K})$.

Si osservi che, come caso particolare della Proposizione 2.3 (ii), se $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, allora anche $A \cdot B \in GL_n(\mathbb{K})$ e si ha $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Si ha pertanto:

■ **Teorema 3.19.** *La struttura algebrica $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è un gruppo (non abeliano per $n > 1$) detto “gruppo lineare di ordine n su \mathbb{K} ”.*

□

■ **Proposizione 3.20.** *Se $A \in GL_n(\mathbb{K})$, allora anche ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ e si ha:*

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Dimostrazione. Si ha infatti (Proposizione 3.13 (c)):

$${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \cdot A) = {}^tI_n = I_n \quad \text{e} \quad {}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tI_n = I_n.$$

□

◆ **Definizione 3.21.** Una matrice regolare A si dice *ortogonale* se $A^{-1} = {}^tA$.

L'insieme delle matrici ortogonali di ordine n su \mathbb{K} sarà indicato con $\mathcal{O}_n(\mathbb{K})$.

■ **Proposizione 3.22.** $\mathcal{O}_n(\mathbb{K})$ è un sottogruppo del gruppo lineare $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$.

Dimostrazione. Innanzitutto, osserviamo che la matrice identica I_n è banalmente ortogonale. Inoltre, ricordando la Proposizione 3.13 (c), si ha, per ogni $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K})$:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = {}^tB \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot B),$$

$$(A^{-1})^{-1} = A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^{-1}).$$

□

Il gruppo $(\mathcal{O}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è detto *gruppo ortogonale di ordine n su \mathbb{K}* .

Proveremo in seguito (Proposizione 3.46) una importante caratterizzazione delle matrici ortogonali.

Esempio 3.1. Il gruppo ortogonale $\mathcal{O}_1(\mathbb{K})$ è costituito dalle matrici (1) e (-1) .

Esempio 3.2. Analizziamo il gruppo ortogonale $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

si ha $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cioè se e solo se valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{array}{ll} (I) & a^2 + c^2 = 1 \\ (II) & b^2 + d^2 = 1 \\ (III) & ab + cd = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (I') & a^2 + b^2 = 1 \\ (II') & c^2 + d^2 = 1 \\ (III') & ac + bd = 0. \end{array}$$

Come è noto, condizione necessaria e sufficiente affinché, nel campo \mathbb{R} , valga (I) (risp. (II)) è che esista uno e un solo $\varphi \in [0, 2\pi[$ (risp. $\psi \in [0, 2\pi[$) tale che:

$$\begin{cases} a = \cos \varphi \\ c = \sin \varphi \end{cases} \quad \left(\text{risp.} \begin{cases} b = \cos \psi \\ d = \sin \psi \end{cases} \right).$$

Sostituendo tali espressioni in (III) si ottiene

$$\cos \varphi \cdot \cos \psi + \sin \varphi \cdot \sin \psi = \cos(\varphi - \psi) = 0,$$

da cui $\varphi - \psi = \pi/2$ oppure $\varphi - \psi = 3\pi/2$. Poiché, per tali valori, anche (I') , (II') , (III') risultano soddisfatte, si conclude che:

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi[\right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi[\right\}.$$

3. Matrici ridotte e trasformazioni elementari

Il presente paragrafo si rivelerà di notevole importanza nel successivo § 6 e, soprattutto, nel Capitolo 6.

♦ **Definizione 3.23.** Una matrice $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ si dice *ridotta a gradini* (per riga) o anche, più semplicemente, *ridotta* se esiste un intero h , $0 \leq h \leq m$, tale che:

- (1) se $1 \leq r \leq h$, la r -esima riga \mathbf{a}^r di A contiene un elemento $a_{j_r}^r \neq 0$ ($j_r \in \mathbb{N}_n$), mentre tutti i suoi elementi a_j^r aventi indice di colonna $j < j_r$ sono nulli; inoltre si ha $j_1 < j_2 < \dots < j_h$;
- (2) se $h + 1 \leq r \leq m$, la r -esima riga \mathbf{a}^r di A è nulla.

Gli elementi $a_{j_r}^r$, $r \in \mathbb{N}_h$, sono detti *elementi speciali* o *pivot* di A , mentre l'intero h è detto *rango* di A .

Si osservi che se $h = 0$, A è necessariamente la matrice nulla.

Inoltre, la matrice ridotta A si dice *completamente ridotta* se:

$$(3) \text{ per ogni } r \in \mathbb{N}_h, a_{j_r}^r = 1 \text{ e, per ogni } i \in \mathbb{N}_m - \{r\}, a_{j_r}^i = 0.$$

Si osservi che le condizioni (1) e (2) implicano che:

$$\forall r \in \mathbb{N}_h, \text{ se } r < i \leq m, \text{ allora } a_{j_r}^i = 0,$$

cioè che ogni elemento speciale è l'ultimo elemento non nullo della colonna cui appartiene. Pertanto, una *matrice quadrata ridotta è sempre triangolare alta*.

Si osservi che la condizione (3) equivale a richiedere che ogni pivot sia uguale a 1 e costituisca l'unico elemento non nullo della colonna cui appartiene.

Pertanto *l'unica matrice quadrata di ordine n completamente ridotta di rango n è la matrice identica I_n* .

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{5} & 6 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora:

A è ridotta, ma non completamente ridotta;

B è completamente ridotta;

C è quadrata ridotta (e dunque triangolare alta), ma non completamente ridotta;

D non è ridotta, ma risulta triangolare alta (anzi, addirittura diagonale).

◆ **Definizione 3.24.** Si definiscono *trasformazioni elementari (di riga)* le seguenti modifiche sulle righe di una matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$:

T_1 : scambiare tra loro due differenti righe $[\mathbf{a}^i \leftrightarrow \mathbf{a}^j]$;

T_2 : sommare a una riga una differente riga moltiplicata per un elemento di \mathbb{K} $[\mathbf{a}^i \leftarrow \mathbf{a}^i + \alpha \cdot \mathbf{a}^j]$;

T_3 : moltiplicare una riga per un elemento non nullo di \mathbb{K} $[\mathbf{a}^i \leftarrow \alpha \cdot \mathbf{a}^i]$.

Si noti che l'applicazione iterata della trasformazione elementare T_2 alla stessa riga produce la seguente trasformazione:

T'_2 : sommare a una riga una combinazione lineare di righe differenti $[\mathbf{a}^i \leftarrow \mathbf{a}^i + \sum_{l \neq i} \alpha_l \mathbf{a}^l]$.

■ **Teorema 3.25.** *Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ è trasformabile in una matrice ridotta (risp. completamente ridotta) mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 (risp. T_1 , T_2 e T_3).*

Dimostrazione. Supponiamo che la colonna di indice j_1 in A sia la prima contenente almeno un elemento non nullo; mediante la trasformazione T_1 è possibile permutare le righe in modo che tale elemento compaia nella prima riga.

Supponiamo dunque $a_{j_1}^1 \neq 0$; per ogni indice di riga $i > 1$, si applichi la seguente trasformazione elementare T_2 :

$$[\mathbf{a}^i \leftarrow \mathbf{a}^i + \alpha^i \cdot \mathbf{a}^1], \quad \text{essendo } \alpha^i = -a_{j_1}^i \cdot (a_{j_1}^1)^{-1}.$$

Nella matrice A_1 così ottenuta, i cui elementi, per comodità di notazione, saranno ancora indicati coi simboli a_j^i , le prime $j_1 - 1$ colonne sono tuttora nulle e inoltre, per ogni $i > 1$, $a_{j_1}^i = 0$.

Si ripeta allora il procedimento sulla matrice ottenuta da A_1 sopprimendo la sua prima riga, osservando che, in tale matrice, la prima eventuale colonna avente almeno un elemento non nullo ha indice $j_2 > j_1$.

Ripetendo induttivamente tale procedimento si perviene dunque a una matrice ridotta $A_{h-1} = B = (b_j^i)$; siano $b_{j_1}^1, \dots, b_{j_h}^h$ i suoi pivot.

Si applichino a B , inizialmente per $k = 2$ e poi per ogni k fino a h , le seguenti trasformazioni elementari T_2 :

$$[\mathbf{b}^i \leftarrow \mathbf{b}^i + \alpha^{ik} \mathbf{b}^k], \quad \text{con } \alpha^{ik} = -b_{j_k}^i \cdot (b_{j_k}^k)^{-1}, \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}_{k-1}.$$

In tal modo si perviene a una matrice ridotta C i cui pivot sono gli unici elementi non nulli delle rispettive colonne.

Moltiplicando la riga k -esima, per ogni $k \in \mathbb{N}_h$, per l'inverso del pivot in essa contenuto (e, dunque, applicando a ogni riga una trasformazione elementare T_3), si perviene a una matrice completamente ridotta D .

□

► **Osservazione 3.26.** In realtà, è possibile trasformare ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ in una matrice ridotta anche mediante una successione finita di sole trasformazioni elementari T_2 : infatti, se la colonna di indice j_1 di A (o di qualunque matrice su cui si applica il passo induttivo del procedimento descritto nella dimostrazione del Teorema 3.25) è la prima a contenere almeno un elemento non nullo, ma tale elemento compare sulla riga k -esima, con $k \neq 1$, allora applicando la trasformazione elementare T_2 : $[\mathbf{a}^1 \leftarrow \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^k]$ si ottiene una nuova matrice in cui il primo elemento della colonna di indice j_1 è diverso da zero, senza utilizzare trasformazioni elementari T_1 . Si noti però che, in generale, il numero di trasformazioni elementari necessario per ottenere una matrice ridotta utilizzando solo trasformazioni elementari T_2 è maggiore di quello necessario se si utilizzano trasformazioni elementari T_1 e T_2 .

Esempio 3.3. Applichiamo il procedimento indicato nella dimostrazione del Teorema 3.25 alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Nella prima colonna di A si ha $a_1^1 = 0$, mentre $a_1^2 = 1 \neq 0$; applichiamo quindi ad A una trasformazione elementare T_1 scambiando fra loro la prima e la seconda riga.

Partendo dalla matrice \bar{A} così ottenuta, attraverso la seguente successione di trasformazioni elementari T_2 , si perviene alle matrici ridotte B e C (secondo le notazioni della dimostrazione del Teorema 3.25):

$$\begin{aligned} \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\mathbf{a}^4 \leftarrow \mathbf{a}^4 - 2\mathbf{a}^1]{\mathbf{a}^3 \leftarrow \mathbf{a}^3 - 2\mathbf{a}^1} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow[\mathbf{a}^4 \leftarrow \mathbf{a}^4 - \frac{2}{3}\mathbf{a}^2]{\mathbf{a}^3 \leftarrow \mathbf{a}^3 + \frac{2}{3}\mathbf{a}^2} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 & -14/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{a}^4 \leftarrow \mathbf{a}^4 - 4\mathbf{a}^3} A_3 = \\ = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -22/3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathbf{a}^1 \leftarrow \mathbf{a}^1 + \frac{3}{2}\mathbf{a}^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -22/3 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow[\mathbf{a}^3 \leftarrow \mathbf{a}^3 + \frac{1}{11}\mathbf{a}^4]{\begin{matrix} \mathbf{a}^1 \leftarrow \mathbf{a}^1 + \frac{9}{22}\mathbf{a}^4 \\ \mathbf{a}^2 \leftarrow \mathbf{a}^2 + \frac{3}{22}\mathbf{a}^4 \end{matrix}} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Applicando le seguenti trasformazioni elementari T_3 su C si giunge infine a una matrice completamente ridotta D

$$C \xrightarrow[\mathbf{a}^4 \leftarrow -\frac{3}{22}\mathbf{a}^4]{\begin{matrix} \mathbf{a}^2 \leftarrow \frac{1}{3}\mathbf{a}^2 \\ \mathbf{a}^3 \leftarrow -\frac{1}{2}\mathbf{a}^3 \end{matrix}} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

È evidente che tutte le considerazioni del presente paragrafo continuano a valere scambiando il ruolo delle righe con quello delle colonne. In particolare, è possibile

introdurre le nozioni di *matrice (completamente) ridotta per colonna* e di *trasformazioni elementari di colonna*; per esse vale un risultato analogo al Teorema 3.25. Si noti inoltre che una matrice quadrata ridotta per colonna è sempre triangolare bassa.

4. Permutazioni

◆ **Definizione 3.27.** Sia n un numero naturale. Diremo *permutazione* o *sostituzione* su n oggetti ogni applicazione biunivoca $p : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$.

Indicheremo con \mathfrak{S}_n (anziché con $\mathfrak{S}(\mathbb{N}_n)$, come nell'Esempio 2.6) l'insieme delle permutazioni su n oggetti.

Si osservi che, come caso particolare dell'Esempio 2.6 bis, *la struttura algebrica* (\mathfrak{S}_n, \circ) è un gruppo, non abeliano se $n \geq 3$.

Ogni permutazione $p \in \mathfrak{S}_n$ si rappresenta usualmente, in modo esplicito, come n -pla (p_1, p_2, \dots, p_n) di elementi distinti di \mathbb{N}_n , dove $p_i = p(i)$ indica l'immagine dell'elemento $i \in \mathbb{N}_n$, mediante p .

◆ **Definizione 3.28.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, indicheremo con il simbolo $n!$ (che si legge *n fattoriale*) il prodotto dei primi n numeri naturali. Cioè

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Porremo poi, convenzionalmente, $0! = 1$.

■ **Teorema 3.29.** Il numero delle permutazioni su n oggetti ($n \geq 1$) è $n!$.

Dimostrazione. Appliciamo il Principio d'induzione (pag. 8).

Per $n = 1$, il numero delle permutazioni di \mathfrak{S}_1 è evidentemente $1! = 1$.

Supponiamo quindi che, per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, il numero delle permutazioni di \mathfrak{S}_{n-1} sia $(n-1)!$ e proviamo che il numero delle permutazioni di \mathfrak{S}_n è $n!$.

A tale scopo, osserviamo che, per ogni fissato $k \in \mathbb{N}_n$, l'insieme

$$I(k) = \{p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathfrak{S}_n \mid p_k = n\}$$

è in corrispondenza biunivoca (e quindi equipotente) con \mathfrak{S}_{n-1} . Quindi il numero di elementi di $I(k)$ è $(n-1)!$.

Poiché

$$\mathfrak{S}_n = I(1) \cup I(2) \cup \dots \cup I(n)$$

ed essendo tali insiemi a due a due disgiunti, si può concludere che il numero di elementi di \mathfrak{S}_n è effettivamente $n \cdot (n-1)!$, cioè $n!$. □

◆ **Definizione 3.30.** Sia $p \in \mathfrak{S}_n$ e $I_n^< = \{(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \mid i < j\}$. Una coppia $(i, j) \in I_n^<$ è detta *in inversione rispetto a p* se $p(i) > p(j)$.

Il numero delle coppie in inversione rispetto a p sarà indicato con $\mu(p)$.

♦ **Definizione 3.31.** Fissato un campo \mathbb{K} e una permutazione $p \in \mathfrak{S}_n$, si dice *segno* di p (in \mathbb{K}) l'elemento $\text{sign } p = (-1)^{\mu(p)} \in \{1, -1\} \subseteq \mathbb{K}$.³

Sia, ad esempio, $p = (6, 8, 1, 7, 5, 3, 4, 2) \in \mathfrak{S}_8$; l'insieme delle coppie in inversione di p è:

$$\{(1, 3), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), \\ (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 8), (7, 8)\}.$$

Pertanto si ha $\mu(p) = 20$, $\text{sign } p = (-1)^{20} = 1$.

♦ **Definizione 3.32.** Una permutazione $t = t_{h,k} \in \mathfrak{S}_n$ ($n \geq 2$) è detta *trasposizione* o *scambio* (di indici $h, k \in \mathbb{N}_n$, $h \neq k$) se $t(h) = k$, $t(k) = h$ e $t(i) = i$, per ogni $i \in \mathbb{N}_n - \{h, k\}$. In altre parole, $t_{h,k}$ “scambia tra loro h e k ” lasciando fissi tutti gli altri elementi di \mathbb{N}_n .

■ **Proposizione 3.33.** (a) Se Id_n indica la permutazione identica di \mathfrak{S}_n , allora $\text{sign } \text{Id}_n = 1$.

(b) Se $p \in \mathfrak{S}_n$ è una qualsiasi permutazione e $t \in \mathfrak{S}_n$ è una qualsiasi trasposizione, allora $\text{sign}(p \circ t) = -\text{sign } p$. In particolare, si ha $\text{sign } t = -1$.

Dimostrazione. (a) Basta osservare che Id_n non ha coppie in inversione.

(b) Proviamo direttamente che $\text{sign}(p \circ t) = -\text{sign } p$. Ponendo poi $p = \text{Id}_n$, si ottiene, come caso particolare, che

$$\text{sign } t = \text{sign}(\text{Id}_n \circ t) = -\text{sign } \text{Id}_n = -1.$$

Supponiamo dapprima $t = t_{r,r+1}$, con $r \in \mathbb{N}_{n-1}$. In tal caso, se

$$p = (p_1, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_n),$$

allora

$$p \circ t_{r,r+1} = (p_1, \dots, p_{r+1}, p_r, \dots, p_n).$$

Sia $(i, j) \in I_n^<$: si attribuisce segno $+1$ o -1 alla coppia (i, j) , a seconda che essa sia o no in inversione.

Nel passaggio da p a $p \circ t_{r,r+1}$, ci sono un numero dispari di coppie che cambiano segno: infatti, oltre alla coppia $(r, r+1)$, cambiano segno, per ogni $i < r$ (risp. $i > r+1$) tale che $\min\{p(r), p(r+1)\} < p(i) < \max\{p(r), p(r+1)\}$, tutte le coppie (i, r) , $(i, r+1)$ (risp. (r, i) , $(r+1, i)$). Quindi

$$\mu(p \circ t_{r,r+1}) = \mu(p) \pm 1 \quad \text{e} \quad \text{sign}(p \circ t_{r,r+1}) = -\text{sign } p.$$

Se ora $t = t_{h,k}$, con $h < k$, si ha:

$$t_{h,k} = t_{h,h+1} \circ t_{h+1,h+2} \circ \dots \circ t_{k-2,k-1} \circ t_{k-1,k} \circ t_{k-2,k-1} \circ \dots \circ t_{h+1,h+2} \circ t_{h,h+1}.$$

Quindi

$$\text{sign}(p \circ t_{h,k}) = (-1)^{2(k-h-1)+1} \cdot \text{sign } p = -\text{sign } p.$$

□

³Si osservi che $\text{sign } p$ vale $1 \in \mathbb{K}$, se $\mu(p)$ è pari, mentre vale $-1 \in \mathbb{K}$, se $\mu(p)$ è dispari. Nel caso particolare in cui il campo \mathbb{K} abbia caratteristica due, poi, si ha ovviamente $\text{sign } p = 1 \in \mathbb{K}$, $\forall p \in \mathfrak{S}_n$.

■ **Teorema 3.34.** (i) Ogni permutazione $p \in \mathfrak{S}_n$ ($n \geq 2$) è prodotto di trasposizioni.
(ii) Se $p \in \mathfrak{S}_n$ è prodotto di m trasposizioni, allora $\text{sign } p = (-1)^m$. Quindi, se p è esprimibile sia come prodotto di r trasposizioni che come prodotto di s trasposizioni, allora r e s sono entrambi pari (se $\text{sign } p = 1$) oppure entrambi dispari (se $\text{sign } p = -1$).

Dimostrazione. (i) Sia $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathfrak{S}_n$. Dal momento che, data comunque una trasposizione $t_{i,j} \in \mathfrak{S}_n$, si ha $t_{i,j} \circ t_{i,j} = \text{Id}_n$, possiamo supporre $p \neq \text{Id}_n$. Sia allora h_1 il minimo intero per cui $p_{h_1} \neq h_1$ ($1 \leq h_1 \leq n-1$). Se $h_1 = n-1$, allora $p = t_{n-1,n}$ è una trasposizione e il risultato è banalmente vero.

Se, invece, $h_1 < n-1$, sia k_1 l'intero tale che $p_{k_1} = h_1$ ($h_1 + 1 \leq k_1 \leq n$). Allora la permutazione $p' = p \circ t_{h_1,k_1}$ è tale che $p'_i = i$, per $1 \leq i \leq h_1$.

Un numero finito di passi analoghi prova che esistono $(h_1, k_1), \dots, (h_m, k_m) \in I_n^<$, tali che

$$p \circ t_{h_1,k_1} \circ \dots \circ t_{h_m,k_m} = \text{Id}_n.$$

Ciò implica che

$$p = t_{h_m,k_m} \circ \dots \circ t_{h_1,k_1}.$$

(ii) Per la Proposizione 3.33 (b) e per il punto (i) del presente Teorema, si ha che $\text{sign } p = 1$ (risp. $\text{sign } p = -1$) se e solo se p è prodotto di un numero pari (risp. dispari) di trasposizioni. Ciò prova che, se p può essere espresso come prodotto sia di r trasposizioni che di s trasposizioni, allora r e s hanno la stessa parità e $(-1)^r = (-1)^s = \text{sign } p$. □

Se, ad esempio, p è ancora la permutazione $(6, 8, 1, 7, 5, 3, 4, 2) \in \mathfrak{S}_8$, allora, procedendo come nella precedente dimostrazione, si ha:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, k_1 = 3; & p \circ t_{1,3} &= (1, 8, 6, 7, 5, 3, 4, 2) \\ h_2 &= 2, k_2 = 8; & p \circ t_{1,3} \circ t_{2,8} &= (1, 2, 6, 7, 5, 3, 4, 8) \\ h_3 &= 3, k_3 = 6; & p \circ t_{1,3} \circ t_{2,8} \circ t_{3,6} &= (1, 2, 3, 7, 5, 6, 4, 8) \\ h_4 &= 4, k_4 = 7; & p \circ t_{1,3} \circ t_{2,8} \circ t_{3,6} \circ t_{4,7} &= \text{Id}_8. \end{aligned}$$

Si ha allora

$$p = t_{4,7} \circ t_{3,6} \circ t_{2,8} \circ t_{1,3}.$$

Si osservi che è anche possibile ottenere p come segue:

$$p = t_{6,7} \circ t_{4,7} \circ t_{1,4} \circ t_{3,4} \circ t_{4,6} \circ t_{2,8}.$$

Questo conferma che $\text{sign } p = (-1)^4 = (-1)^6 = 1$.

■ **Corollario 3.35.** Se $p, q \in \mathfrak{S}_n$, allora:

- (i) $\text{sign } (p \circ q) = (\text{sign } p) \cdot (\text{sign } q)$.
- (ii) $\text{sign } p = \text{sign } (p^{-1})$.

Dimostrazione. (i) Se p è esprimibile come prodotto di r trasposizioni e q come prodotto di s trasposizioni, allora $p \circ q$ è prodotto di $r + s$ trasposizioni. Quindi

$$\text{sign } (p \circ q) = (-1)^{r+s} = (-1)^r \cdot (-1)^s = \text{sign } p \cdot \text{sign } q.$$

(ii) Da $p \circ p^{-1} = \text{Id}_n$ segue

$$1 = \text{sign}(\text{Id}_n) = \text{sign}(p \circ p^{-1}) = \text{sign } p \cdot \text{sign}(p^{-1}),$$

che prova l'asserto. □

5. Determinante di una matrice quadrata

Sia \mathbb{K} un campo e sia $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in \mathbb{K} .

♦ **Definizione 3.36.** Se $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si dice *determinante* di A , e si indica con $\det A$ o con $|A|$, l'elemento

$$\sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot a_{p(1)}^1 \cdot a_{p(2)}^2 \cdot \cdots \cdot a_{p(n)}^n \in \mathbb{K},$$

dove $\text{sign } p$ indica il segno della permutazione p in \mathbb{K} .

La definizione 3.36 introduce dunque una applicazione $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$.

Si osservi che, prescindendo dal segno, il determinante di A è la somma di tutti i prodotti ottenibili estraendo n elementi da A in modo che tra essi figurino un solo elemento di ciascuna riga e ciascuna colonna.

Esempio 3.4.

- (a) Se $n = 1$, allora $A = (a)$ e dunque $\det A = a$.
- (b) Se $n = 2$, poiché \mathfrak{S}_2 contiene due soli elementi (l'identità Id_2 e la trasposizione $t_{1,2}$), si ha:

$$\det A = a_1^1 \cdot a_2^2 - a_2^1 \cdot a_1^2.$$

In altri termini, il determinante di una matrice quadrata di ordine due si ottiene sottraendo dal prodotto degli elementi della diagonale principale il prodotto degli elementi della diagonale secondaria.

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, allora $\det A = 1 \cdot 7 - 3 \cdot (-1) = 10$.

- (c) Se $n = 3$, si ha

$$\mathfrak{S}_3 = \{ \text{Id}_3 = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \}$$

dove le prime tre permutazioni sono di classe pari mentre le ultime tre sono di classe dispari.

Pertanto si ha:

$$\det A = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3.$$

Si usa spesso, per ricordare i sei addendi dei determinanti di ordine tre, la seguente *regola di Sarrus*⁴: costruita la matrice A' aggiungendo alla destra di A

⁴Pierre-Frédéric Sarrus: matematico francese (St. Affrique, 1798-1861).

le prime due colonne di A stessa, il determinante di A si ottiene come somma algebrica dei prodotti degli elementi della diagonale principale di A e delle sue due parallele in A' (col segno positivo) e dei prodotti della diagonale secondaria di A e delle sue due parallele in A' (col segno negativo), così come indicato nel seguente schema:

$$A' = \begin{pmatrix} a_1^1 & & a_2^1 & & a_3^1 & & a_1^1 & & a_2^1 \\ & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\ a_1^2 & & a_2^2 & & a_3^2 & & a_1^2 & & a_2^2 \\ & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\ a_1^3 & & a_2^3 & & a_3^3 & & a_1^3 & & a_2^3 \\ & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\ & & - & & - & & + & & + & & + \end{pmatrix}$$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, allora $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

e quindi:

$$\det A = 3 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 5 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 = 0 + 0 - 10 - 4 - 45 - 0 = -59.$$

■ **Proposizione 3.37.** Per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si ha:

$$\det A = \det({}^t A).$$

Dimostrazione. Basta provare che, per ogni $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si ha:

$$\det A = \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \dots \cdot a_n^{p(n)}.$$

Il risultato si ottiene essenzialmente dalla commutatività del prodotto in \mathbb{K} , riordinando gli elementi di ogni addendo di $\det A$ per colonna, anziché per riga.

□

Esaminiamo ora alcune notevoli proprietà del determinante di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Con il termine *linea* intenderemo indifferentemente una riga o una colonna di A ; qualora una stessa proprietà coinvolga più linee, *intenderemo che queste siano contemporaneamente tutte righe o tutte colonne*.

Dimostreremo tali proprietà relativamente alle righe; la validità delle analoghe proprietà relative alla colonne è immediata conseguenza della Proposizione 3.37.

Proprietà I. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contiene una linea nulla, allora $\det A = 0$.

Dimostrazione. Se $A = (a_j^i)$ ha la k -esima riga nulla, allora, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, $a_j^k = 0$. Dunque ogni addendo nello sviluppo di $\det A$ è nullo.

□

Proprietà II.⁵ Se B è la matrice ottenuta scambiando tra loro due linee della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (cioè mediante una trasformazione elementare T_1 di riga o di colonna), si ha:

$$\det B = -\det A.$$

Dimostrazione. Supponiamo che B si ottenga da $A = (a_j^i)$ scambiando la sua h -esima riga con la k -esima ($h < k$). Si ha pertanto, posto $B = (b_j^i)$, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, $b_j^h = a_j^k$, $b_j^k = a_j^h$ e, per ogni $i \in \mathbb{N}_n - \{h, k\}$, $b_j^i = a_j^i$.

Allora, ricordando che, se $p \in \mathfrak{S}_n$, $\text{sign } p = -\text{sign } (p \circ t_{h,k})$ (Proposizione 3.33 (b)), e osservando che $\{p' = p \circ t_{h,k} \mid p \in \mathfrak{S}_n\} = \mathfrak{S}_n$, si ha:

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot b_{p(1)}^1 \cdots b_{p(h)}^h \cdots b_{p(k)}^k \cdots b_{p(n)}^n = \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot a_{p(1)}^1 \cdots a_{p(h)}^k \cdots a_{p(k)}^h \cdots a_{p(n)}^n = \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot a_{p(1)}^1 \cdots a_{p(k)}^h \cdots a_{p(h)}^k \cdots a_{p(n)}^n = \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} (-\text{sign } (p \circ t_{h,k})) \cdot a_{p \circ t_{h,k}(1)}^1 \cdots a_{p \circ t_{h,k}(h)}^h \cdots a_{p \circ t_{h,k}(k)}^k \cdots a_{p \circ t_{h,k}(n)}^n = \\ &= - \sum_{p' \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p' \cdot a_{p'(1)}^1 \cdots a_{p'(h)}^h \cdots a_{p'(k)}^k \cdots a_{p'(n)}^n = -\det A. \end{aligned}$$

□

Proprietà III. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contiene due linee uguali, allora $\det A = 0$.

Dimostrazione. Scambiando le due linee uguali, si riottiene la matrice A : per la Proprietà II si ha quindi $\det A = -\det A$. Nel caso in cui il campo \mathbb{K} abbia caratteristica diversa da 2, questo implica necessariamente $\det A = 0$, come affermato dall'enunciato. La Proprietà è comunque valida per ogni campo \mathbb{K} , ma la dimostrazione nel caso di un campo a caratteristica 2 esula dagli scopi del presente testo.

□

Si è soliti esprimere la Proprietà III dicendo che l'applicazione $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ è *alternante*. Per esprimere invece le seguenti Proprietà IV' e IV'', si parla di *multilinearità* del determinante.

Proprietà IV'. Se A è la matrice ottenuta moltiplicando una linea della matrice $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ per un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ (in particolare, per $\alpha \neq 0$, se A si ottiene da A_1 mediante una trasformazione elementare T_3 di riga o di colonna), si ha:

$$\det A = \alpha \cdot \det A_1.$$

⁵Si noti che, nel caso in cui il campo \mathbb{K} abbia caratteristica 2, essendo $+1 = -1$, questa proprietà si traduce nella invarianza del determinante rispetto allo scambio di linee.

Dimostrazione. Supponiamo che A si ottenga moltiplicando la h -esima riga di A_1 per l'elemento $\alpha \in \mathbb{K}$; si ha pertanto, posto $A = (a_j^i)$ e $A_1 = (b_j^i)$, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, $a_j^h = \alpha \cdot b_j^h$, mentre, per ogni $i \in \mathbb{N}_n - \{h\}$, $a_j^i = b_j^i$. Allora:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot a_{p(1)}^1 \cdots a_{p(h)}^h \cdots a_{p(n)}^n = \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot b_{p(1)}^1 \cdots \alpha \cdot b_{p(h)}^h \cdots b_{p(n)}^n = \\ &= \alpha \cdot \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot b_{p(1)}^1 \cdots b_{p(h)}^h \cdots b_{p(n)}^n = \alpha \cdot \det A_1. \end{aligned}$$

□

Ad esempio, se:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } A_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

poiché $(6, 2, 4) = 2(3, 1, 2)$, si ha $\det A = 2 \det A_1$.

Proprietà IV''. Se una linea di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è la somma di due n -ple e A_1 (risp. A_2) denota la matrice ottenuta da A sostituendo a tale linea la prima (risp. la seconda) n -pla, si ha:

$$\det A = \det A_1 + \det A_2.$$

Dimostrazione. Supponiamo che, posto $A = (a_j^i)$, $A_1 = (b_j^i)$, $A_2 = (c_j^i)$, si abbia, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, $a_j^h = b_j^h + c_j^h$, mentre, per ogni $i \in \mathbb{N}_n - \{h\}$, $a_j^i = b_j^i = c_j^i$. Allora, per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma in \mathbb{K} , si ha:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot a_{p(1)}^1 \cdots a_{p(h)}^h \cdots a_{p(n)}^n = \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot a_{p(1)}^1 \cdots (b_{p(h)}^h + c_{p(h)}^h) \cdots a_{p(n)}^n = \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot b_{p(1)}^1 \cdots b_{p(h)}^h \cdots b_{p(n)}^n + \\ &+ \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot c_{p(1)}^1 \cdots c_{p(h)}^h \cdots c_{p(n)}^n = \det A_1 + \det A_2. \end{aligned}$$

□

Ad esempio, se:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{2} & 4 \\ -1 & \mathbf{2} & 3 \\ 1 & \mathbf{5} & 6 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{2} & 4 \\ -1 & \mathbf{1} & 3 \\ 1 & -\mathbf{3} & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{0} & 4 \\ -1 & \mathbf{1} & 3 \\ 1 & \mathbf{8} & 6 \end{pmatrix},$$

poiché $(2, 2, 5) = (2, 1, -3) + (0, 1, 8)$, si ha $\det A = \det A_1 + \det A_2$.

Proprietà V. Se, in una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, una linea è combinazione lineare di altre linee di A , si ha $\det A = 0$.

Dimostrazione. È sufficiente provare la proprietà nei casi particolari in cui (a) la riga h -esima di A sia α volte (con $\alpha \neq 0$) la riga k -esima, (b) la riga h -esima di A sia somma della riga r -esima e della riga s -esima. La prova, nel caso generale, si ottiene per ripetute applicazioni di (a) e (b).

(a) Supponiamo quindi che $\mathbf{a}^h = \alpha \cdot \mathbf{a}^k$. La matrice B , ottenuta moltiplicando per α la riga k -esima di A ha due righe uguali e pertanto $\det B = 0$ (Proprietà III). Del resto, per la Proprietà IV', $\det B = \alpha \cdot \det A$, per cui $\det A = 0$.

(b) Supponiamo che $\mathbf{a}^h = \mathbf{a}^r + \mathbf{a}^s$. Indichiamo con A_1 (risp. A_2) la matrice ottenuta da A sostituendo \mathbf{a}^r ad \mathbf{a}^h (risp. \mathbf{a}^s ad \mathbf{a}^h). A_1 e A_2 hanno entrambe due righe uguali e pertanto (Proprietà III) $\det A_1 = \det A_2 = 0$. Del resto, per la Proprietà IV'', $\det A = \det A_1 + \det A_2$ per cui $\det A = 0$. □

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -7 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

poiché

$$(-7, 7, 6) = -3 \cdot (3, 1, 2) + 2 \cdot (1, 5, 6),$$

si ha $\det A = 0$. Infatti, posto

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

dalle Proprietà III, IV' e IV'', segue:

$$\det A = -3 \cdot \det B_1 + 2 \cdot \det B_2 = 0.$$

Proprietà VI. Se B è ottenuta dalla matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sommando a una sua linea una combinazione lineare di altre linee di A (cioè se B è ottenuta da A mediante una trasformazione elementare T_2 o T_2' di riga o di colonna), si ha:

$$\det B = \det A.$$

Dimostrazione. Basta provare la proprietà nel caso in cui B si ottenga da A sostituendo alla riga \mathbf{a}^i la riga $\mathbf{a}^i + \alpha \mathbf{a}^j$, con $\alpha \in \mathbb{K}$ e $i \neq j$. Se C indica la matrice ottenuta da A sostituendo alla riga \mathbf{a}^i la riga \mathbf{a}^j , si ha, per la Proprietà III, $\det C = 0$. Dalle Proprietà IV' e IV'' segue allora:

$$\det B = \det A + \alpha \cdot \det C = \det A.$$

□

Concludiamo il paragrafo dimostrando il seguente importante risultato.

■ **Proposizione 3.38. (Teorema di Binet⁶)** Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si ha:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Dimostrazione. Identificheremo, per comodità di notazione, ogni matrice con la n -pla delle sue righe. Supponiamo dunque che sia $A = (\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n) = (a_j^i)$, $B = (\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n) = (b_j^i)$, $C = A \cdot B = (\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^n) = (c_j^i)$.

Per definizione di prodotto righe per colonne, si ha, per ogni $i, j \in \mathbb{N}_n$:

$$c_j^i = \sum_{h=1}^n a_h^i b_j^h,$$

cioè, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$:

$$\mathbf{c}^i = \sum_{h=1}^n a_h^i \mathbf{b}^h.$$

Si ottiene pertanto:

$$\det C = \det(\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \dots, \mathbf{c}^n) = \det \left(\sum_{h=1}^n a_h^1 \mathbf{b}^h, \sum_{h=1}^n a_h^2 \mathbf{b}^h, \dots, \sum_{h=1}^n a_h^n \mathbf{b}^h \right).$$

La multilinearità del determinante, applicata alla prima riga di C , prova allora che:

$$\det C = \sum_{k=1}^n a_k^1 \det \left(\mathbf{b}^k, \sum_{h=1}^n a_h^2 \mathbf{b}^h, \dots, \sum_{h=1}^n a_h^n \mathbf{b}^h \right).$$

Applicando ancora iterativamente tale proprietà a partire dalla seconda riga di C fino alla sua n -esima riga, si ottiene:

$$\det C = \sum_{d \in \mathcal{D}'_{n,n}} a_{d(1)}^1 \cdot a_{d(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{d(n)}^n \cdot \det(\mathbf{b}^{d(1)}, \mathbf{b}^{d(2)}, \dots, \mathbf{b}^{d(n)}),$$

avendo indicato con $\mathcal{D}'_{n,n}$ l'insieme delle n -ple di elementi (anche non tutti distinti) di \mathbb{N}_n ⁷. Poiché dalla Proprietà III segue che le n -ple $d \in \mathcal{D}'_{n,n}$ che non sono permutazioni producono addendi nulli nella sommatoria, si ottiene:

$$\det C = \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} a_{p(1)}^1 \cdot a_{p(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{p(n)}^n \cdot \det(\mathbf{b}^{p(1)}, \mathbf{b}^{p(2)}, \dots, \mathbf{b}^{p(n)}).$$

Ricordando la Proprietà II, si ha infine:

$$\begin{aligned} \det C &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} a_{p(1)}^1 \cdot a_{p(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{p(n)}^n \cdot (\text{sign } p \cdot \det(\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^n)) = \\ &= \left(\sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot a_{p(1)}^1 \cdot a_{p(2)}^2 \cdot \dots \cdot a_{p(n)}^n \right) \cdot \det(\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^n) = \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

□

⁶Jacques Philippe Marie Binet: matematico e astronomo francese (Rennes, 1786 - Parigi, 1856).

⁷Gli elementi di $\mathcal{D}'_{n,n}$ sono detti usualmente “disposizioni con ripetizione di n oggetti a n a n ”.

Si osservi che $\mathfrak{S}_n \subset \mathcal{D}'_{n,n}$.

6. Calcolo del determinante

■ **Proposizione 3.39.** *Il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi della diagonale principale.*

Dimostrazione. Ogni permutazione diversa dall'identità produce, nello sviluppo del determinante di una matrice triangolare, un addendo nullo.

Poiché $\text{sign}(\text{Id}_n) = 1$, si ha quindi: $\det A = a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^n$.

□

Si ha dunque, in particolare: $\det(I_n) = 1$.

Si ricordi che il Teorema 3.25 fornisce un metodo algoritmico per trasformare una qualunque matrice quadrata in una matrice ridotta (e dunque triangolare) mediante una successione finita di trasformazioni elementari T_1 e T_2 . Poiché tali trasformazioni, a meno del segno, lasciano inalterato il determinante della matrice (Proprietà II e VI), la Proposizione 3.39 consente di interpretare tale algoritmo come uno strumento, noto come *metodo di Gauss*⁸, per il calcolo del determinante di una matrice quadrata.

Nell'Esempio 3.3 la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

viene trasformata nella matrice triangolare

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -22/3 \end{pmatrix}$$

attraverso una trasformazione elementare T_1 , seguita da una successione di trasformazioni elementari T_2 . Facendo uso del metodo di Gauss, si ottiene dunque:

$$\det A = -\det B = -(1 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-22/3)) = -44.$$

Si vuole ora descrivere un importante strumento, noto come *Teorema di Laplace*⁹, che consente, in alternativa alla definizione e al metodo di Gauss, di calcolare il determinante di una matrice quadrata.

⁸Carl Friedrich Gauss: matematico, fisico e astronomo tedesco (Brunswick, 1777 - Gottinga, 1855).

⁹Pierre-Simon Laplace: matematico e astronomo francese (Beaumont-en-Auge, 1749 - Parigi, 1827).

♦ **Definizione 3.40.** Data una matrice $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, si dice *sottomatrice* di tipo $h \times k$ (con $h \leq m$ e $k \leq n$) estratta da A ogni matrice avente per elementi gli elementi di A appartenenti contemporaneamente a h righe fissate e a k colonne fissate. In particolare, si dice *minore* (di ordine k , con $k \leq \min\{m, n\}$) di A ogni sottomatrice quadrata (di ordine k) estratta da A . Nel caso in cui $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si dice poi *minore complementare dell'elemento a_j^i* la matrice M_j^i di ordine $n - 1$ ottenuta da A cancellandone la i -esima riga e la j -esima colonna. Si dice infine *complemento algebrico dell'elemento a_j^i in A* (con $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) l'elemento

$$A_j^i = (-1)^{i+j} \cdot \det M_j^i \in \mathbb{K},$$

essendo M_j^i il minore complementare di a_j^i in A .

Ad esempio, considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

le matrici

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente una sottomatrice di tipo 2×3 e un minore di ordine 2 estratto da A . Si ha poi:

$$A_3^1 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +(8 + 8 - 8) = 8;$$

$$A_4^3 = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -(18 + 6) = -24.$$

■ **Teorema 3.41. (Teorema di Laplace)** Se $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, per ogni $h \in \mathbb{N}_n$, si ha

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_j^h \cdot A_j^h = \sum_{i=1}^n a_h^i \cdot A_h^i.$$

Dimostrazione. Basta provare la prima uguaglianza, la seconda essendo conseguenza immediata di $\det A = \det({}^t A)$.

Fissato arbitrariamente $h \in \mathbb{N}_n$, sia B_j , per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, la matrice ottenuta da A sostituendo alla h -esima riga di A la n -pla

$$(0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0),$$

in cui l'elemento 1 compare al posto j -esimo. Da

$$(a_1^h, a_2^h, \dots, a_n^h) = a_1^h \cdot (1, 0, \dots, 0) + a_2^h \cdot (0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n^h \cdot (0, \dots, 0, 1),$$

applicando ripetutamente le Proprietà IV' e IV'' alla h -esima riga di A , si ottiene:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_j^h \cdot \det B_j.$$

Non resta dunque da provare che, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, $\det B_j = A_j^h$.

A tale scopo, sia B'_j la matrice ottenuta da B_j scambiando consecutivamente ogni riga, dalla h -esima alla $(n-1)$ -esima, con la sua successiva, e quindi scambiando consecutivamente ogni colonna, dalla j -esima alla $(n-1)$ -esima, con la sua successiva. La matrice B'_j è dunque del tipo seguente:

$$B'_j = \begin{pmatrix} \boxed{M'_j} & \vdots \\ 0 & 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo M'_j il minore M_j^h complementare di a_j^h in A . Si osservi ora che, se \mathfrak{S}'_n indica il sottogruppo di \mathfrak{S}_n costituito dalla permutazioni $p \in \mathfrak{S}_n$ tali che $p(n) = n$, l'applicazione che associa a ogni $p \in \mathfrak{S}'_n$ la sua restrizione a \mathbb{N}_{n-1} definisce una biiezione tra \mathfrak{S}'_n e \mathfrak{S}_{n-1} in cui permutazioni corrispondenti hanno lo stesso segno. Pertanto, posto $B'_j = (\alpha_s^n)$, poiché $\alpha_n^n = 1$ e, per ogni $s \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\alpha_s^n = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \det B'_j &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} \text{sign } p \cdot \alpha_{p(1)}^1 \cdot \dots \cdot \alpha_{p(n-1)}^{n-1} \cdot \alpha_{p(n)}^n = \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}'_n} \text{sign } p \cdot \alpha_{p(1)}^1 \cdot \dots \cdot \alpha_{p(n-1)}^{n-1} \cdot 1 = \\ &= \sum_{p \in \mathfrak{S}_{n-1}} \text{sign } p \cdot \alpha_{p(1)}^1 \cdot \dots \cdot \alpha_{p(n-1)}^{n-1} = \det M'_j = \det M_j^h. \end{aligned}$$

Poiché B'_j è ottenuta da B_j operando $n-h$ scambi di righe e $n-j$ scambi di colonne, dalla Proprietà II del determinante segue che:

$$\begin{aligned} \det B_j &= (-1)^{n-h} \cdot (-1)^{n-j} \cdot \det B'_j = \\ &= (-1)^{2n-(h+j)} \cdot \det B'_j = (-1)^{h+j} \cdot \det M_j^h = A_j^h. \end{aligned}$$

□

La formula

$$\sum_{j=1}^n a_j^h \cdot A_j^h \quad \left(\text{risp. } \sum_{i=1}^n a_h^i \cdot A_h^i \right)$$

è detta *sviluppo di Laplace* di $\det A$ secondo la h -esima riga (risp. colonna).

Sia data, ad esempio, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

dell'Esempio 3.3, di cui si è già calcolato il determinante facendo uso del metodo di Gauss. Lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga dà allora:

$$\begin{aligned}\det A &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 0 - 24 + 0 - 20 = -44,\end{aligned}$$

dove il calcolo dei determinanti di ordine tre è ottenibile ricordando la regola di Sarrus oppure riapplicando il Teorema di Laplace.

► **Osservazione 3.42.** Il Teorema di Laplace “riduce” il calcolo del determinante di una matrice quadrata di ordine n al calcolo di n determinanti di ordine $n - 1$. Si vuole qui sottolineare come il tentativo di “ottimizzare” il calcolo manuale di un determinante passi, di solito, attraverso l'applicazione di trasformazioni elementari nella matrice, unita all'utilizzo mirato del Teorema di Laplace. Una tecnica usuale consiste nell'ottenere, mediante trasformazioni elementari T_1 e T_2 (o T'_2) di riga o di colonna, una matrice avente una linea nulla eccettuato, eventualmente, un elemento e nel calcolare poi il determinante tramite lo sviluppo di Laplace secondo tale linea.

Ad esempio, data ancora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

applicando la trasformazione elementare T_2 di colonna $[\mathbf{a}_2 \leftarrow \mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_4]$, si ottiene

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 2 \\ 2 & -14 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e, sviluppando secondo la prima riga,

$$\det A = \det A' = - \begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & -14 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -44.$$

Si vuole dimostrare che le matrici regolari (cioè invertibili) sono caratterizzate dal fatto di avere determinante non nullo. A tal fine, premettiamo il seguente risultato, noto come *II Teorema di Laplace*:

■ **Proposizione 3.43.** Per ogni matrice $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se $h, k \in \mathbb{N}_n$, $h \neq k$, si ha

$$\sum_{j=1}^n a_j^h \cdot A_j^k = \sum_{i=1}^n a_h^i \cdot A_k^i = 0.$$

Dimostrazione. Sia $B = (b_j^i)$ la matrice ottenuta da A sostituendo alla k -esima riga di A la sua h -esima riga (dove, per ipotesi, $h \neq k$); si ha quindi, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, $b_j^k = a_j^h$ e, per ogni $i \in \mathbb{N}_n - \{k\}$, $b_j^i = a_j^i$.

Per la Proprietà III, $\det B = 0$. D'altra parte, poiché A e B differiscono solo per la k -esima riga, tra i complementi algebrici degli elementi di tale riga sussiste la seguente relazione:

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad B_j^k = A_j^k.$$

Pertanto:

$$\sum_{j=1}^n a_j^h \cdot A_j^k = \sum_{j=1}^n b_j^k \cdot B_j^k = \det B = 0.$$

L'uguaglianza a zero della seconda sommatoria si prova in modo del tutto analogo. \square

► **Osservazione 3.44.** I due teoremi di Laplace (Teorema 3.41 e Proposizione 3.43) possono essere riassunti in un'unica formulazione, nota come *Teorema di Laplace generalizzato*:

$$\forall A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ e } \forall h, k \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{j=1}^n a_j^h \cdot A_j^k = \sum_{i=1}^n a_h^i \cdot A_k^i = (\det A) \cdot \delta_k^h.$$

■ **Teorema 3.45.**

(a) Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è regolare, allora si ha: $\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(b) Se $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è tale che $\det A \neq 0$, allora A è regolare e, posto $A^\# = (A_j^i)$, si ha:

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot {}^t(A^\#).$$

Dimostrazione. (a) Se A è regolare, per il teorema di Binet, si ha:

$$1 = \det I_n = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1}).$$

Ciò prova (a).

(b) Sia $A^\# = (A_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice avente per elementi i complementi algebrici A_j^i di a_j^i in A . Dai due teoremi di Laplace (Teorema 3.41 e Proposizione 3.43) - ovvero dal *Teorema di Laplace generalizzato* contenuto nella Osservazione 3.44 - segue facilmente, attraverso la definizione di prodotto righe per colonne, che:

$$A \cdot {}^t(A^\#) = (\det A) \cdot I_n = {}^t(A^\#) \cdot A.$$

Nel caso in cui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sia tale che $\det A \neq 0$, si ha allora

$$A \cdot (\det A)^{-1} \cdot {}^t(A^\#) = I_n = (\det A)^{-1} \cdot {}^t(A^\#) \cdot A$$

e dunque la tesi. \square

Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

è regolare, in quanto $\det A = 2$.

La matrice dei complementi algebrici degli elementi di A è

$$A^\# = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi si ha

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot {}^t(A^\#) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vuole ora dare, come anticipato nel § 2, una importante caratterizzazione delle matrici ortogonali.

■ **Proposizione 3.46.** *Sia $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le seguenti affermazioni risultano equivalenti:*

- (a) $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K})$;
- (b) per ogni $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\langle \mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j \rangle = \delta^{ij}$;
- (c) per ogni $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Inoltre, nell'ipotesi che una di esse risulti verificata, si ha: $\det A = \pm 1$.

Dimostrazione. Prima di tutto, osserviamo che, poiché il generico elemento b_j^i di $A \cdot {}^tA$ (risp. c_j^i di ${}^tA \cdot A$) è dato da:

$$b_j^i = \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j \rangle \quad (\text{risp. } c_j^i = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle),$$

l'affermazione (b) (risp. (c)) risulta equivalente all'uguaglianza $A \cdot {}^tA = I_n$ (risp. ${}^tA \cdot A = I_n$).

Ora, se $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K})$, allora A è regolare e si ha $A^{-1} = {}^tA$ (Definizione 3.21), cioè $A \cdot {}^tA = I_n = {}^tA \cdot A$. Dunque (a) implica sia (b) che (c).

Supponiamo viceversa che valga (b) (risp. (c)) e quindi che si abbia $A \cdot {}^tA = I_n$ (risp. ${}^tA \cdot A = I_n$). Dal Teorema di Binet e dalla Proposizione 3.37 segue allora:

$$1 = \det I_n = \det(A \cdot {}^tA) = \det A \cdot \det({}^tA) = (\det A)^2$$

$$(\text{risp. } 1 = \det I_n = \det({}^tA \cdot A) = \det({}^tA) \cdot \det A = (\det A)^2).$$

Dunque $\det A = \pm 1$ e, tenuto conto che, come già provato, (a) implica sia (b) che (c), la seconda parte dell'enunciato è completamente dimostrata.

Inoltre, per il Teorema 3.45, A è regolare e la sua inversa A^{-1} è data da:

$$A^{-1} = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1} \cdot (A \cdot {}^tA) = (A^{-1} \cdot A) \cdot {}^tA = I_n \cdot {}^tA = {}^tA$$

$$(\text{risp. } A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} = ({}^tA \cdot A) \cdot A^{-1} = {}^tA \cdot (A \cdot A^{-1}) = {}^tA \cdot I_n = {}^tA).$$

Quindi $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K})$ e pertanto (b) (resp. (c)) implica (a).

□

Si è soliti enunciare l'affermazione (b) (resp. (c)) di Proposizione 3.46 dicendo che *la somma dei quadrati delle componenti di una riga (resp. colonna) è uguale a 1, mentre è nulla la somma dei prodotti delle componenti di ugual indice di due differenti righe (resp. colonne).*

Si verifichi, come esempio, la validità della Proposizione 3.46 in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (Esempio 3.2).

CAPITOLO 4

Spazi e sottospazi vettoriali

1. Spazi vettoriali

Sia \mathbf{V} un insieme e \mathbb{K} un campo (le cui operazioni e i cui relativi elementi neutri saranno indicati rispettivamente con $+$, 0 e \cdot , 1).

◆ **Definizione 4.1.** Diremo *spazio vettoriale* su \mathbb{K} una struttura algebrica $(\mathbb{K}, \mathbf{V}, \oplus, \odot)$, costituita da un campo \mathbb{K} , i cui elementi sono detti *scalari*, da un insieme \mathbf{V} , i cui elementi sono detti *vettori*, da una operazione binaria interna su \mathbf{V} , detta *somma* di vettori,

$$\oplus : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

e da una funzione, detta *prodotto* di uno scalare per un vettore,

$$\odot : \mathbb{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V},$$

soddisfacente i seguenti assiomi:

- (SV1) (\mathbf{V}, \oplus) è un gruppo abeliano;
- (SV2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$,
 - (a) $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{v} = (\alpha \odot \mathbf{v}) \oplus (\beta \odot \mathbf{v})$,
 - (b) $\alpha \odot (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\alpha \odot \mathbf{v}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{w})$,
 - (c) $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{v}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{v}$,
 - (d) $1 \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (risp. su \mathbb{C}) sarà anche detto *spazio vettoriale reale* (risp. *complesso*).

L'insieme \mathbf{V} è detto *sostegno* dello spazio vettoriale.

Per brevità di notazione, *converremo di indicare l'operazione di somma di vettori con lo stesso simbolo $+$ già usato per denotare la somma di elementi in \mathbb{K}* (anziché col simbolo \oplus introdotto nella Definizione 4.1), in quanto la natura degli operandi su cui risultano applicate elimina ogni arbitrarietà interpretativa. Analogamente, *indicheremo l'operazione di prodotto di uno scalare per un vettore col simbolo \cdot già usato per denotare il prodotto di elementi in \mathbb{K}* (anziché col simbolo \odot introdotto nella Definizione 4.1). Inoltre *tale simbolo sarà spesso omissso*.

L'elemento neutro del gruppo abeliano $(\mathbf{V}, +)$ (unico, come provato nella Proposizione 2.3 (i)) è detto *vettore nullo*; esso sarà solitamente indicato con $\mathbf{0}$. Il vettore opposto di un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ (unico come provato nella Proposizione 2.3 (ii)) sarà indicato con $-\mathbf{v}$.

Nel seguito, con abuso di linguaggio e per brevità di notazioni, indicheremo lo spazio vettoriale col solo nome del suo sostegno.

Si osservi, in ogni caso, che *lo stesso insieme V può essere sostegno di differenti spazi vettoriali*, definiti sullo stesso campo \mathbb{K} o anche campi diversi.

La proposizione che segue dà alcune utili proprietà degli spazi vettoriali, che sono conseguenza pressoché immediata degli assiomi.

■ **Proposizione 4.2.** *Sia V uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in V$, si ha:*

- (i) $\alpha v = 0$ se e solo se $\alpha = 0$ oppure $v = 0$;
- (ii) $(-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$;
- (iii) se $\alpha v = \beta v$ e $v \neq 0$, allora $\alpha = \beta$.
- (iv) se $\alpha u = \alpha v$ e $\alpha \neq 0$, allora $u = v$.

Dimostrazione. (i) Per gli assiomi dei campi e degli spazi vettoriali, si ha immediatamente: $v = 1v = (1+0)v = 1v + 0v = v + 0v = 0v + v$. Quindi $0v = v + (-v) = 0$, per ogni $v \in V$.

Da $\alpha v = \alpha(v + 0) = \alpha v + \alpha 0$ segue invece $\alpha 0 = 0$.

Quindi, se $\alpha = 0$ o $v = 0$, allora $\alpha v = 0$.

Viceversa, se $\alpha v = 0$ e $\alpha \neq 0$, allora si ha: $v = 1v = (\alpha^{-1}\alpha)v = \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}0 = 0$. Ciò completa la prova di (i).

(ii) Si ha immediatamente:

$$\alpha v + (-\alpha)v = (\alpha + (-\alpha))v = 0v = 0,$$

$$\alpha v + \alpha(-v) = \alpha(v + (-v)) = \alpha 0 = 0.$$

Ciò prova (ii)

(iii) Se $\alpha v = \beta v$, si ha: $(\alpha + (-\beta))v = \alpha v + (-\beta v) = \beta v + (-\beta v) = 0$. Essendo $v \neq 0$ per ipotesi, questo implica (per (i)) che $\alpha + (-\beta) = 0$ e cioè che $\alpha = \beta$.

La prova di (iv) è del tutto analoga.

□

Esempio 4.1. (Lo spazio dei “vettori applicati”) L'esempio forse più noto di “vettore” è dato da una “freccia” f , cioè da una coppia ordinata (O, P) di punti dello “spazio euclideo elementare” \mathcal{F} , intesi come primo e secondo estremo di un segmento.

Una tale freccia f è comunemente detta un *vettore applicato* in O .

Fissato il “punto di applicazione” O , f è completamente individuato dal punto P . In particolare il vettore $0 = (O, O)$ è detto *vettore nullo* (applicato in O).

I vettori applicati sono particolarmente adatti a rappresentare grandezze fisiche (dette, appunto, “vettoriali”), quali ad esempio, gli spostamenti, le velocità, le accelerazioni, le forze, caratterizzate da una *direzione* (quella della retta OP), da un *verso* (quello da O a P) e da un numero reale $m \geq 0$, detto *modulo* o *norma* o *lunghezza* (la distanza tra O e P).

Si osservi che il vettore nullo 0 è l'unico avente lunghezza 0 e, per convenzione, direzione e verso arbitrari.

Se ora $f_1 = (O, P_1)$ e $f_2 = (O, P_2)$ sono due vettori applicati in O e m_1, m_2 sono le lunghezze di f_1 e f_2 rispettivamente, allora la *somma* $f_1 + f_2$ è, per definizione, il vettore (O, Q) determinato come segue.

- (a) Se \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 hanno la stessa direzione (cioè se O, P_1 e P_2 sono allineati) e verso concorde (cioè se P_1 e P_2 appartengono alla stessa semiretta s_O di origine O), allora Q è il punto di s_O avente distanza da O pari a $m_1 + m_2$.
- (b) Se \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 hanno la stessa direzione, ma verso discorde, allora:
- (b1) se $m_1 = m_2$, allora $Q = O$, cioè $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$;
- (b2) se $m_1 > m_2$ (rispettivamente, se $m_2 > m_1$), allora $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ ha la direzione di \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 , verso concorde con \mathbf{f}_1 (rispettivamente con \mathbf{f}_2) e lunghezza $m_1 - m_2$ (rispettivamente $m_2 - m_1$).
- (c) Se \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 non hanno la stessa direzione (cioè se O, P_1 e P_2 non sono allineati), allora $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ è il vettore (O, Q) "diagonale" del parallelogramma di lati \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 (Figura 4.1).

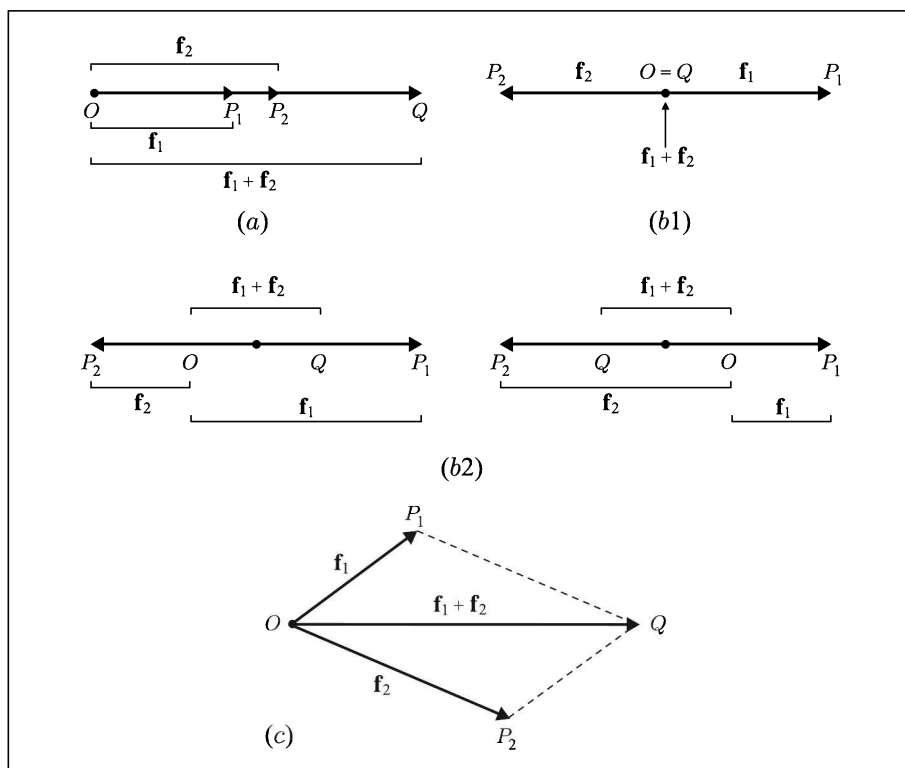


Figura 4.1

Se ora $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{f} = (O, P)$ è un vettore applicato in O , di lunghezza m , allora il vettore $\alpha \cdot \mathbf{f} = (O, Q)$ è definito come segue.

- (1) Se $\alpha = 0$, allora $\alpha \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}$.
- (2) Se $\alpha > 0$, allora $\alpha \cdot \mathbf{f}$ ha stessa direzione, verso concorde con \mathbf{f} e lunghezza αm .
- (3) Se $\alpha < 0$, allora $\alpha \cdot \mathbf{f}$ ha stessa direzione, verso discorde da \mathbf{f} e lunghezza $-\alpha m$.

(Figura 4.2, per $\alpha = \pm 2$).

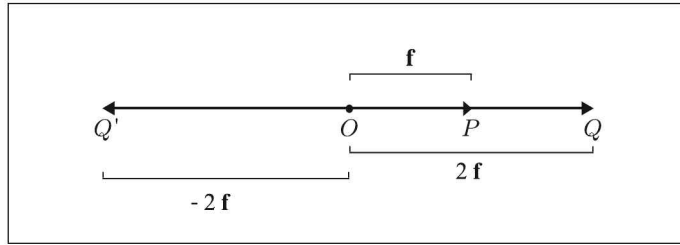


Figura 4.2

Se indichiamo con $\mathcal{F}(O)$ l'insieme dei vettori applicati in O , è facile rendersi conto che la somma prima definita è un'operazione binaria interna su $\mathcal{F}(O)$ e che $(\mathcal{F}(O), +)$ è un gruppo abeliano (solo la proprietà associativa richiede un po' di lavoro); l'elemento neutro del gruppo è il vettore $\mathbf{0} = (O, O)$ e l'opposto del vettore $\mathbf{f} = (O, P)$ è il vettore $-\mathbf{f} = (O, P')$, dove P' è il punto simmetrico di P rispetto a O .

Inoltre il prodotto di un numero reale per un vettore applicato, prima definito, soddisfa le quattro proprietà dell'assioma (SV2) della Definizione 4.1.

In conclusione, la struttura algebrica $(\mathbb{R}, \mathcal{F}(O), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale reale.

Si osservi che gli assiomi della Definizione 4.1 catturano l'essenza "algebrica" dello spazio $\mathcal{F}(O)$, prescindendo tuttavia dalla nozione di "lunghezza" e da tutti i concetti che ne derivano. Tali nozioni saranno riprese nel Capitolo 8, in ambito più generale, dotando gli spazi vettoriali reali di strutture addizionali.

Esempio 4.2. Il più piccolo spazio vettoriale (su un arbitrario campo \mathbb{K}) ha per sostegno un insieme formato da un solo elemento (denotato con $\mathbf{0}$). Si rammenti che, al contrario, ogni campo deve contenere almeno i due elementi distinti 0 e 1 (Osservazione 2.7).

Esempio 4.3. Se $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un campo, allora la quaterna $(\mathbb{K}, \mathbb{K}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale (in questo caso, le operazioni effettivamente coincidono).

Esempio 4.4. Lo spazio vettoriale \mathbb{K}^n delle n -ple di elementi di \mathbb{K} si ottiene considerando le operazioni già definite nel § 5 del Capitolo 2. Tale spazio sarà anche detto lo **spazio vettoriale standard n -dimensionale sul campo \mathbb{K}** .

Esempio 4.5. Lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ delle matrici di tipo $m \times n$, a coefficienti in \mathbb{K} si ottiene considerando le operazioni definite nel § 1 del Capitolo 3.

Si rammenti che, come provato nella Proposizione 3.17, l'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ delle matrici quadrate d'ordine n ha pure una struttura di anello con unità (non commutativo se $n \geq 2$).

2. Sottospazi

◆ **Definizione 4.3.** Sia $(\mathbb{K}, \mathbf{V}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e \mathbf{W} un sottoinsieme non vuoto di \mathbf{V} . Diremo che \mathbf{W} è *linearmente chiuso* se, per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$,

- (i) $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in \mathbf{W}$,
- (ii) $\alpha \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{W}$.

Se \mathbf{W} è linearmente chiuso, allora è possibile restringere opportunamente dominio e codominio delle operazioni definite su \mathbf{V} , in modo da ottenere due applicazioni

$$+_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}, \quad \cdot_{\mathbf{W}} : \mathbb{K} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}.$$

Con abuso di linguaggio, indicheremo spesso ancora con $+$ e \cdot le operazioni sopra definite.

◆ **Definizione 4.4.** Sia $(\mathbb{K}, \mathbf{V}, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e \mathbf{W} un sottoinsieme linearmente chiuso di \mathbf{V} . Diremo che \mathbf{W} è un *sottospazio vettoriale* di \mathbf{V} , se $(\mathbb{K}, \mathbf{W}, +_{\mathbf{W}}, \cdot_{\mathbf{W}})$ è uno spazio vettoriale.

■ **Proposizione 4.5.** Se $(\mathbb{K}, \mathbf{V}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, allora ogni sottoinsieme linearmente chiuso di \mathbf{V} è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} .

Dimostrazione. Supponiamo che \mathbf{W} sia un sottoinsieme linearmente chiuso di \mathbf{V} . Per la proprietà (ii) della Definizione 4.3 e per la Proposizione 4.2 (ii), per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, si ha:

$$-\mathbf{w} = (-1) \cdot \mathbf{w} \in \mathbf{W}.$$

Essendo \mathbf{W} chiuso rispetto alla somma di vettori (proprietà (i)), è immediato verificare che \mathbf{W} è un sottogruppo (abeliano) di $(\mathbf{V}, +)$.

Le proprietà dell'assioma (SV2) della Definizione 4.1 sono banalmente verificate, in quanto $+_{\mathbf{W}}$ e $\cdot_{\mathbf{W}}$ sono restrizioni di operazioni che verificano le medesime proprietà. Ciò prova che $(\mathbb{K}, \mathbf{W}, +_{\mathbf{W}}, \cdot_{\mathbf{W}})$ è uno spazio vettoriale, concludendo così la dimostrazione. □

► **Osservazione 4.6.** Ogni sottospazio vettoriale \mathbf{W} di \mathbf{V} è anche sottogruppo di $(\mathbf{V}, +)$ e pertanto contiene necessariamente il vettore nullo $\mathbf{0}$. Inoltre, $\{\mathbf{0}\}$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di \mathbf{V} .

Se, ad esempio, si pone

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}, \\ \mathbf{W}_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}, \\ \mathbf{W}_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}, \end{aligned}$$

è facile provare che $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$ sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale standard \mathbb{R}^3 . Invece, il sottoinsieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ non è linearmente chiuso e quindi non costituisce un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .

Esempio 4.6. (Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[t]$ dei polinomi) Sia $\mathbb{K}[t]$ l'insieme dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti in \mathbb{K} .

La struttura algebrica $(\mathbb{K}, \mathbb{K}[t], +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, dove $+$ indica la somma di polinomi e \cdot il prodotto di uno scalare per un polinomio definiti nel § 6 del Capitolo 2. Fissato $r > 0$, sia $\mathbb{K}^r[t]$ il sottoinsieme di $\mathbb{K}[t]$ costituito da tutti i polinomi di grado $\leq r$; risulta immediato verificare che $\mathbb{K}^r[t]$ è *linearmente chiuso* e pertanto è un *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{K}[t]$.

Si rammenti infine che $\mathbb{K}[t]$ possiede una struttura addizionale di anello; ciò non vale per $\mathbb{K}^r[t]$, se $r \geq 1$.

3. Sistemi di generatori

Nel presente paragrafo, \mathbf{V} indicherà sempre uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} .

◆ **Definizione 4.7.** Siano $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ una m -pla di vettori appartenenti a \mathbf{V} e $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ una m -pla di scalari ($m \geq 1$). Diremo *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ con coefficienti $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ il vettore

$$\mathbf{v} = \lambda^1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda^m \mathbf{v}_m$$

(spesso indicato con $\sum_{i=1}^m \lambda^i \mathbf{v}_i$).

◆ **Definizione 4.8.** Dato un sottoinsieme $X \neq \emptyset$ di \mathbf{V} , diremo *chiusura lineare* di X il sottoinsieme $\mathbf{L}(X)$ di \mathbf{V} , costituito da tutti e soli i vettori che sono combinazioni lineari di vettori di X . Se $X = \emptyset$, porremo convenzionalmente $\mathbf{L}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

Se $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$ è un insieme finito, scriveremo anche $\mathbf{L}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)$ invece di $\mathbf{L}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\})$.

Evidentemente $X \subseteq \mathbf{L}(X)$ (in quanto $\forall x \in X, 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$). Inoltre:

■ **Proposizione 4.9.** Se $X \subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{L}(X)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di \mathbf{V} contenente X .

Dimostrazione. Se $X = \emptyset$, l'asserto è ovvio. Supponiamo allora $X \neq \emptyset$ e proviamo innanzitutto che $\mathbf{L}(X)$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} . A tale scopo, siano

$$\mathbf{u} = \alpha^1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^m \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{v} = \beta^1 \mathbf{y}_1 + \dots + \beta^n \mathbf{y}_n$$

due vettori di $\mathbf{L}(X)$ (con $\alpha^i, \beta^j \in \mathbb{K}$, $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \in X$, per $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora si ha:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \alpha^1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^m \mathbf{x}_m + \beta^1 \mathbf{y}_1 + \dots + \beta^n \mathbf{y}_n,$$

$$\lambda \mathbf{u} = (\lambda \alpha^1) \mathbf{x}_1 + \dots + (\lambda \alpha^m) \mathbf{x}_m.$$

Pertanto sia $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ che $\lambda \mathbf{u}$ appartengono a $\mathbf{L}(X)$, essendo combinazione lineare di vettori di X . Ciò prova che $\mathbf{L}(X)$ è linearmente chiuso, il che implica, per la Proposizione 4.5, che $\mathbf{L}(X)$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} .

Proviamo ora che, se \mathbf{W} è un sottospazio di \mathbf{V} tale che $X \subseteq \mathbf{W}$, allora si ha anche $\mathbf{L}(X) \subseteq \mathbf{W}$. A tale scopo, sia

$$\mathbf{u} = \alpha^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha^m \mathbf{x}_m \in \mathbf{L}(X)$$

con $\alpha^i \in \mathbb{K}$, $x_i \in X$, per $1 \leq i \leq m$. Del resto $\mathbf{x}_i \in \mathbf{W}$ (in quanto $X \subseteq \mathbf{W}$) e, essendo \mathbf{W} linearmente chiuso, anche $\alpha^i \mathbf{x}_i \in \mathbf{W}$ e, quindi, anche

$$\mathbf{u} = \alpha^1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha^m \mathbf{x}_m \in \mathbf{W}$$

(in quanto somma di vettori di \mathbf{W}). Ciò prova che $\mathbf{L}(X)$ è il più piccolo sottospazio di \mathbf{V} che contiene X , completando così la prova della Proposizione 4.9. \square

► **Osservazione 4.10.** Un sottoinsieme X di \mathbf{V} è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} se e solo se $X = \mathbf{L}(X)$ ovvero, come si usa dire, se X è “chiuso rispetto alle combinazioni lineari”.

♦ **Definizione 4.11.** Sia $X \subseteq \mathbf{V}$. Se $\mathbf{L}(X) = \mathbf{V}$, diremo che X è un *sistema di generatori* per \mathbf{V} o che \mathbf{V} è *generato* da X .

Lo spazio \mathbf{V} sarà poi detto *finitamente generato* se ammette un sistema *finito* di generatori.

Risulta evidente che *ogni spazio vettoriale \mathbf{V} ammette sempre almeno un sistema di generatori X* ; infatti, basta porre $X = \mathbf{V}$. Esistono invece spazi vettoriali che *non sono finitamente generati* (si veda l'Esempio 4.10).

Esempio 4.7. Sia $\mathcal{F}(O)$ lo spazio vettoriale dei vettori applicati in O , descritto nell'Esempio 4.1. Se P_1 è un qualunque punto diverso da O e $\mathbf{f}_1 = (O, P_1)$, allora è facile rendersi conto che $\mathbf{L}(\mathbf{f}_1) = \{\mathbf{f} = (O, P) \mid \mathbf{f} = \lambda \mathbf{f}_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ è costituito da tutti e soli i vettori $\mathbf{f} = (O, P)$ tali che P appartiene alla retta OP_1 . Se ora P_2 è un punto non allineato con O e P_1 , e $\mathbf{f}_2 = (O, P_2)$, allora

$$\mathbf{L}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \{\mathbf{f} = (O, P) \mid \mathbf{f} = \lambda^1 \mathbf{f}_1 + \lambda^2 \mathbf{f}_2, \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}\}$$

è costituito da tutti e soli i vettori $\mathbf{f} = (O, P)$ tali che P appartiene al piano passante per O, P_1 e P_2 . Infine, se P_3 è un punto non complanare con O, P_1 e P_2 , e $\mathbf{f}_3 = (O, P_3)$, allora

$$\mathbf{L}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \{\mathbf{f} = (O, P) \mid \mathbf{f} = \lambda^1 \mathbf{f}_1 + \lambda^2 \mathbf{f}_2 + \lambda^3 \mathbf{f}_3, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{F}(O).$$

Quindi ogni insieme $X \subseteq \mathcal{F}(O)$ contenente $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ è un sistema di generatori per $\mathcal{F}(O)$.

Esempio 4.8. Nello spazio vettoriale standard \mathbb{K}^n (Esempio 4.4), si considerino gli n vettori $\tilde{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, \dots, 0), \tilde{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n = (0, \dots, 0, 1)$. Poiché ogni n -pla $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$ di \mathbb{K}^n è esprimibile come combinazione lineare

$$\sum_{i=1}^n a^i \tilde{\mathbf{e}}_i,$$

si ha che l'insieme $\tilde{B} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$ è un sistema di generatori per \mathbb{K}^n . Lo spazio \mathbb{K}^n è quindi *finitamente generato*.

Esempio 4.9. In completa analogia con l'esempio precedente, si considerino, nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ (Esempio 4.5), le $m \cdot n$ matrici \tilde{E}_j^i , $i \in \mathbb{N}_m$, $j \in \mathbb{N}_n$, il cui generico elemento e_k^h , per ogni $h \in \mathbb{N}_m$, $k \in \mathbb{N}_n$, risulta definito nel modo seguente:

$$e_k^h = \begin{cases} 1 & \text{se } h = i, k = j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché ogni matrice $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ è esprimibile come combinazione lineare

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_j^i \tilde{E}_j^i,$$

si ha che l'insieme $\{\tilde{E}_j^i \mid i \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_n\}$ è un sistema di generatori per $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Lo spazio $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ risulta quindi *finitamente generato*.

Esempio 4.10. Sia $\mathbb{K}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti in \mathbb{K} (Esempio 4.6) e sia $\mathbb{K}^r[t]$ il sottospazio dei polinomi di grado $\leq r$ con $r \in \mathbb{N}_0$. Come già rilevato nell'Osservazione 2.20, ogni polinomio

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i t^i \in \mathbb{K}[t]$$

di grado $r \geq 0$ è esprimibile come combinazione lineare degli $r + 1$ polinomi $t^0 = 1$, $t^1 = t$, t^2 , \dots , t^r , con coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{K}$. Si ha cioè:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_r t^r.$$

Ciò prova che l'insieme $\tilde{X} = \{t^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ è un sistema di generatori (infinito) per $\mathbb{K}[t]$ e che, per ogni $r \geq 0$, l'insieme $\tilde{X}_r = \{1, t, t^2, \dots, t^r\}$ è un sistema di generatori per $\mathbb{K}^r[t]$. Quindi *lo spazio $\mathbb{K}^r[t]$, per ogni $r \in \mathbb{N}_0$, è finitamente generato*. Invece, *lo spazio $\mathbb{K}[t]$ non è finitamente generato*. Infatti, se Y è un qualsiasi sottoinsieme finito di $\mathbb{K}[t]$, detto r il massimo dei gradi dei polinomi appartenenti a Y , per la Proposizione 2.21 (a), (b), si ha $\mathbf{L}(Y) \subseteq \mathbb{K}^r[t]$. Quindi $\mathbb{K}[t]$ non può essere generato da Y .

► **Osservazione 4.12.** Sia X un sistema di generatori per \mathbf{V} e sia \mathbf{v} un generico vettore di \mathbf{V} ; in generale, la “rappresentazione” di \mathbf{v} come combinazione lineare di vettori di X non è unica.

Ad esempio, nello spazio vettoriale standard \mathbb{R}^2 , l'insieme $X = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ è un sistema di generatori per \mathbb{R}^2 , in quanto contiene il sistema di generatori $\tilde{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ dell'Esempio 4.8.

Il vettore $(1, 1)$ può essere espresso, come combinazione lineare dei tre vettori di X negli infiniti modi seguenti:

$$(1, 1) = \alpha(1, 0) + \alpha(0, 1) + (1 - \alpha)(1, 1), \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

La proprietà di lineare indipendenza che verrà introdotta nel prossimo paragrafo costituisce, come si vedrà in seguito, condizione necessaria e sufficiente per un sistema di generatori X di \mathbf{V} affinché la rappresentazione di ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ come combinazione lineare di vettori di X risulti unica.

4. Dipendenza e indipendenza lineare

Nel presente paragrafo, come già nel precedente, \mathbf{V} indicherà sempre uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} .

♦ **Definizione 4.13.** Una n -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di \mathbf{V} sarà detta *linearmente dipendente* se esiste una n -pla $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ di scalari *non tutti nulli*, tale che

$$\lambda^1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda^n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

In caso contrario, e cioè se

$$(\alpha^1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha^n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}) \Rightarrow (\alpha^i = 0, \forall i \in \mathbb{N}_n)$$

la n -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ sarà detta *linearmente indipendente*.

Ad esempio, la coppia $((2, 0, 0), (1, 1, 1))$ di vettori di \mathbb{R}^3 è linearmente indipendente. Infatti,

$$\alpha^1(2, 0, 0) + \alpha^2(1, 1, 1) = (2\alpha^1 + \alpha^2, \alpha^2, \alpha^2) = (0, 0, 0)$$

implica $2\alpha^1 + \alpha^2 = 0$ e $\alpha^2 = 0$, quindi $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$.

Invece

- (a) la coppia $((0, 0, 0), (1, 1, 2))$,
- (b) la terna $((1/2, 1/2, 1/2), (-1, 3, 1), (-1, 3, 1))$,
- (c) la quaterna $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (3, 2, 3))$

sono linearmente dipendenti.

Infatti:

- (a) $3 \cdot (0, 0, 0) + 0 \cdot (1, 1, 2) = (0, 0, 0)$;
- (b) $0 \cdot (1/2, 1/2, 1/2) + 1 \cdot (-1, 3, 1) + (-1) \cdot (-1, 3, 1) = (0, 0, 0)$,
- (c) $1 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1) + 2 \cdot (1, 0, 1) + (-1) \cdot (3, 2, 3) = (0, 0, 0)$.

► **Osservazione 4.14.** Una n -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori è *linearmente dipendente* (risp. *linearmente indipendente*) se e solo se tali sono tutte le n -ple $(\mathbf{v}_{p_1}, \dots, \mathbf{v}_{p_n})$ ottenute permutandone le componenti in tutti modi possibili.

Ciò giustifica la locuzione “*i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti*” (rispettivamente, “*linearmente indipendenti*”), che sarà spesso usata come sinonimo di “*la n -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente dipendente*” (rispettivamente, “*linearmente indipendente*”).

► **Osservazione 4.15.** Nel caso $n = 1$, ogni “1-pla” può identificarsi con un singolo vettore di \mathbf{V} . Anche alla luce dell’osservazione precedente, si ha:

un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ è linearmente dipendente se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Infatti \mathbf{v} è linearmente dipendente se e solo se $\exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, tale che $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè (per la Proposizione 4.2 (i)) se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

La seguente proposizione fornisce un utile criterio per riconoscere n -ple linearmente dipendenti.

■ **Proposizione 4.16.** *Dati n vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$, se m ($m < n$) di essi sono linearmente dipendenti, allora gli n vettori sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che siano linearmente dipendenti, per ipotesi, i primi m vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. Si ha allora

$$\alpha^1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha^m \mathbf{v}_m = \mathbf{0},$$

essendo gli α^j , $1 \leq j \leq m$, non tutti nulli. Ma allora si ha anche

$$\alpha^1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha^m \mathbf{v}_m + 0\mathbf{v}_{m+1} + \dots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

con gli α^j non tutti nulli. □

■ **Corollario 4.17.** *Sia $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una n -pla di vettori di \mathbf{V} ($n \geq 2$).*

- (a) *Se esiste $i \in \mathbb{N}_n$ tale che $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, allora $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente dipendente.*
- (b) *Se esistono $i, j \in \mathbb{N}_n$, $i \neq j$, tali che $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$, allora $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è linearmente dipendente.*

Dimostrazione. (a) È conseguenza immediata della Proposizione 4.16 e dell’Osservazione 4.15.

Per provare (b), basta osservare che, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, la coppia (\mathbf{v}, \mathbf{v}) è sempre linearmente dipendente. □

Le nozioni di lineare dipendenza e indipendenza si estendono facilmente a insiemi, anche infiniti, di vettori.

◆ **Definizione 4.18.** Un sottoinsieme X di \mathbf{V} è detto *linearmente dipendente* se esiste una n -pla linearmente dipendente di vettori *distinti* di X .

In caso contrario, cioè se ogni n -pla di vettori *distinti* di X è linearmente indipendente, allora X è detto a sua volta *linearmente indipendente*.

Pertanto l’insieme vuoto può essere considerato sottoinsieme linearmente indipendente di ogni spazio vettoriale.

► **Osservazione 4.19.** Se $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una n -pla di vettori *distinti* di \mathbf{V} , allora la n -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è *linearmente dipendente (rispettivamente, indipendente)* se e solo se l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è *linearmente dipendente (rispettivamente, indipendente)*. Si osservi però che, se i vettori componenti $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ non sono tutti distinti, allora la proprietà precedente può essere falsa. Ad esempio, se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la coppia (\mathbf{v}, \mathbf{v}) è linearmente dipendente (Corollario 4.17 (b)), mentre l'insieme $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}\}$ è linearmente indipendente.

■ **Teorema 4.20.** *Un sottoinsieme X di \mathbf{V} è linearmente dipendente se e solo se esiste un vettore $\mathbf{x} \in X$ tale che $\mathbf{x} \in \mathbf{L}(X - \{\mathbf{x}\})$. Inoltre, in tal caso, $\mathbf{L}(X) = \mathbf{L}(X - \{\mathbf{x}\})$.*

Dimostrazione. Se $X = \{\mathbf{0}\}$, allora $\mathbf{0} \in \mathbf{L}(\emptyset) = \mathbf{L}(\{\mathbf{0}\} - \{\mathbf{0}\})$. Possiamo quindi assumere $X \neq \{\mathbf{0}\}$. Supponiamo che esista $\mathbf{x} \in X$, tale che

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda^i \mathbf{x}_i,$$

essendo $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ una opportuna m -pla di scalari e $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ una opportuna m -pla di vettori di $X - \{\mathbf{x}\}$, che possiamo supporre *distinti*.

Ne consegue che

$$\lambda^1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda^m \mathbf{x}_m - \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

cioè che la $(m+1)$ -pla $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x})$ di vettori *distinti* di X è linearmente dipendente. Ciò prova che X è linearmente dipendente.

Viceversa, sia X linearmente dipendente. Ciò equivale ad affermare l'esistenza di una n -pla $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ di vettori *distinti* di X , e di una n -pla $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ di scalari *non tutti nulli*, tali che

$$\sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Inoltre, dal momento che $X \neq \{\mathbf{0}\}$, possiamo supporre $n \geq 2$.

Fissiamo ora un indice $j \in \mathbb{N}_n$ tale che $\lambda^j \neq 0$. Si ottiene allora, evidentemente:

$$(\lambda^j)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=1}^n (\lambda^j)^{-1} \lambda^i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Posto, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, $\alpha^i = (\lambda^j)^{-1} \cdot \lambda^i$, dal momento che $\alpha^j = (\lambda^j)^{-1} \cdot \lambda^j = 1$, si ha:

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i \in \mathbb{N}_n - \{j\}} (-\alpha^i) \mathbf{x}_i$$

essendo evidentemente $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n)$ una $(n-1)$ -pla di vettori di $X - \{\mathbf{x}_j\}$. Ciò prova che $\mathbf{x}_j \in \mathbf{L}(X - \{\mathbf{x}_j\})$, completando così la dimostrazione. \square

Ad esempio, l'insieme $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è linearmente dipendente, in quanto si ha: $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \in \mathbf{L}((1, 0), (0, 1))$.

► **Osservazione 4.21.** Dal Teorema 4.20 e dalla Osservazione 4.19 segue, tenuto conto anche del Corollario 4.17 (b), che una coppia $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ di vettori non nulli è linearmente dipendente se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$.

■ **Proposizione 4.22.** Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbf{V} e $\mathbf{v} \in \mathbf{V} - \mathbf{L}(X)$, allora anche $X \cup \{\mathbf{v}\}$ è linearmente indipendente.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che in $X \cup \{\mathbf{v}\}$ esista una h -pla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_h)$ di vettori distinti tale che

$$\sum_{i=1}^h \alpha^i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

con $\alpha^1, \dots, \alpha^h \in \mathbb{K}$ non tutti nulli. Per la lineare indipendenza di X , si ha allora $\mathbf{v} \in \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h\}$; sia, ad esempio, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$. Si ha, in tal caso, $\alpha^1 \neq 0$, perché altrimenti X risulterebbe linearmente dipendente. Pertanto \mathbf{v} è esprimibile come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_h \in X$ e ciò è assurdo in quanto, per ipotesi, $\mathbf{v} \notin \mathbf{L}(X)$.

Quindi, $X \cup \{\mathbf{v}\}$ è linearmente indipendente. □

5. Basi e dimensione

In questo paragrafo, \mathbf{V} indicherà sempre uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} .

♦ **Definizione 4.23.** Si dice *base* di \mathbf{V} un suo sistema di generatori linearmente indipendente.

Si osservi che l'insieme vuoto \emptyset è l'unica base dello spazio vettoriale $\{\mathbf{0}\}$.

■ **Lemma 4.24.** Se \mathbf{W} è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} generato da n vettori distinti, ogni sottoinsieme di \mathbf{W} contenente $m > n$ vettori è linearmente dipendente.

Dimostrazione. Proveremo il lemma usando il principio d'induzione su n .

Se $n = 1$, l'enunciato è evidentemente vero.

Supponiamo allora che il lemma valga per $n = k - 1$.

Sia $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbf{W} = \mathbf{L}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$, con $m > k$. Si ha allora:

$$\text{per ogni } i = 1, \dots, m \quad \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_i^j \mathbf{w}_j.$$

Se, per ogni i , $\alpha_i^k = 0$, allora $X \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k-1})$ e quindi, per l'ipotesi induttiva, X è linearmente dipendente.

In caso contrario, possiamo supporre $\alpha_m^k \neq 0$. Se si pone, per $1 \leq i \leq m - 1$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - (\alpha_m^k)^{-1} \cdot \alpha_i^k \mathbf{x}_m,$$

si ha:

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_i^j \mathbf{w}_j - (\alpha_m^k)^{-1} \cdot \alpha_i^k \left(\sum_{j=1}^k \alpha_m^j \mathbf{w}_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\alpha_i^j - (\alpha_m^k)^{-1} \alpha_i^k \alpha_m^j \right) \mathbf{w}_j \in \mathbf{L}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k-1}).$$

Essendo $m-1 > k-1$, l'ipotesi induttiva prova che $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1}\}$ è linearmente dipendente. Si ha pertanto:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \beta^i \mathbf{y}_i = 0, \quad \text{con } \beta^1, \dots, \beta^{m-1} \text{ non tutti nulli.}$$

Ponendo $\beta^m = -\sum_{i=1}^{m-1} \beta^i (\alpha_m^k)^{-1} \alpha_i^k$, si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{m-1} \beta^i \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^{m-1} \beta^i (\mathbf{x}_i - (\alpha_m^k)^{-1} \alpha_i^k \mathbf{x}_m) = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \beta^i \mathbf{x}_i + \left(-\sum_{i=1}^{m-1} \beta^i (\alpha_m^k)^{-1} \alpha_i^k \right) \mathbf{x}_m = \\ &= \sum_{i=1}^m \beta^i \mathbf{x}_i, \quad \text{con } \beta^1, \dots, \beta^m \text{ non tutti nulli.} \end{aligned}$$

Ciò prova la lineare dipendenza di X . □

■ **Corollario 4.25.** *Se \mathbf{V} ha una base finita costituita da n elementi, allora ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbf{V} contiene al più n vettori.* □

■ **Teorema 4.26.** *Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora:*

- (a) \mathbf{V} ammette almeno una base finita.
- (b) Tutte le basi di \mathbf{V} sono finite e hanno la stessa cardinalità (cioè lo stesso numero di elementi).

Dimostrazione. (a) Sia X un sistema di generatori finito di \mathbf{V} . Se X è linearmente indipendente, allora X è una base (finita) di \mathbf{V} . Se, invece, X è linearmente dipendente, per il Teorema 4.20 si può eliminare un suo vettore lasciando inalterata la sua chiusura lineare. Poiché X è finito, ragionando induttivamente si perviene, attraverso l'eliminazione successiva di opportuni elementi di X , a una base (finita) di \mathbf{V} .

(b) Se B è una base finita di \mathbf{V} allora, per il Corollario 4.25, ogni altra base di \mathbf{V} è finita. Siano B e \bar{B} due basi finite di \mathbf{V} , di cardinalità n e m rispettivamente. Essendo B una base e \bar{B} un sottoinsieme linearmente indipendente, il Corollario 4.25 prova che $m \leq n$. Del resto, invertendo i ruoli di B e \bar{B} , si ottiene $n \leq m$ e quindi $n = m$. □

◆ **Definizione 4.27.** Se \mathbf{V} è uno spazio vettoriale finitamente generato, diremo *dimensione* di \mathbf{V} il numero di elementi di una sua qualunque base B . Se B ha n elementi, diremo quindi che \mathbf{V} ha *dimensione (finita) n* e scriveremo $\dim \mathbf{V} = n$.

Si osservi che $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Esempio 4.7 bis. Nello spazio vettoriale $\mathcal{F}(O)$ dei vettori applicati in O il sistema di generatori $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ costruito nell'Esempio 4.7 è, come è facile verificare, linearmente indipendente e costituisce quindi una base di $\mathcal{F}(O)$. Si ha pertanto:

$$\dim \mathcal{F}(O) = 3.$$

Esempio 4.8 bis. Nello spazio vettoriale standard \mathbb{K}^n , il sistema di generatori $\tilde{B} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$ costruito nell'Esempio 4.8 è, come è facile verificare, linearmente indipendente e costituisce quindi una base di \mathbb{K}^n . Si ha pertanto:

$$\dim \mathbb{K}^n = n.$$

Esempio 4.9 bis. In completa analogia con l'esempio precedente, nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, il sistema di generatori $\{\tilde{E}_j^i \mid i \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_n\}$ costruito nell'Esempio 4.9 è linearmente indipendente e costituisce quindi una base di $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Si ha pertanto:

$$\dim \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = m \cdot n.$$

Esempio 4.10 bis. Per ogni $r \in \mathbb{N}_0$, il sistema di generatori $\tilde{X}_r = \{1, t, t^2, \dots, t^r\}$ del sottospazio vettoriale $\mathbb{K}^r[t]$, è linearmente indipendente e costituisce quindi una base di $\mathbb{K}^r[t]$. Si ha pertanto:

$$\dim \mathbb{K}^r[t] = r + 1.$$

Si noti che $\mathbb{K}[t]$, non essendo finitamente generato, non ammette una base finita.

■ **Teorema 4.28.** *Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale di dimensione finita n . Allora:*

- (a) *ogni sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbf{V} ha cardinalità $h \leq n$ ed è una base di \mathbf{V} se e solo se $h = n$;*
- (b) *ogni sistema di generatori per \mathbf{V} ha cardinalità $k \geq n$ ed è una base di \mathbf{V} se e solo se $k = n$.*

Dimostrazione. Poiché \mathbf{V} ha dimensione finita n , ogni base di \mathbf{V} ha cardinalità n .

(a) Tenuto conto del Corollario 4.25, basta provare che, se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità n , allora X è una base di \mathbf{V} .

A tale scopo, supponiamo, per assurdo, che X non sia un sistema di generatori per \mathbf{V} , cioè $\mathbf{V} - \mathbf{L}(X) \neq \emptyset$. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V} - \mathbf{L}(X)$, allora, per la Proposizione 4.22, $X \cup \{\mathbf{v}\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità $n + 1$ e ciò è impossibile per il Corollario 4.25. Quindi X è una base di \mathbf{V} .

(b) Sia S un sistema di generatori per \mathbf{V} , avente cardinalità k .

Se fosse $k < n$, S conterrebbe una base di \mathbf{V} avente cardinalità $s \leq k < n$ e ciò è assurdo per il Teorema 4.26 (b). Quindi $k \geq n$ e, se S è una base, $k = n$.

Resta da provare che, se $k = n$, allora S è una base. Ciò è ancora conseguenza del Teorema 4.26 (b), dal momento che, se S fosse linearmente dipendente, S conterrebbe una base di \mathbf{V} avente cardinalità $s < n$.

□

■ **Proposizione 4.29.** (Teorema del completamento a una base) *Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale avente dimensione finita n e sia X un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbf{V} , avente cardinalità $h < n$. Allora esiste sempre un sottoinsieme X' di \mathbf{V} avente cardinalità $n - h$ e tale che $X \cup X'$ è una base di \mathbf{V} .*

Dimostrazione. Poiché $h < n$, per il Teorema 4.28 (b), si ha $\mathbf{V} - \mathbf{L}(X) \neq \emptyset$. Esiste quindi $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{V} - \mathbf{L}(X)$ e dunque per la Proposizione 4.22, $X \cup \{\mathbf{v}_1\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità $h + 1$.

Induttivamente, supposto costruito il sottoinsieme $X \cup \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\}$ linearmente indipendente, se $h + j < n$, allora esiste $\mathbf{v}_{j+1} \in \mathbf{V} - \mathbf{L}(X \cup \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\})$ e quindi l'insieme $X \cup \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j+1}\}$ è linearmente indipendente e ha cardinalità $h + j + 1$.

Si costruisce in tal modo, per induzione e in modo non univoco, un insieme $X' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-h}\}$ tale che $X \cup X'$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di cardinalità n . Il Teorema 4.28 (a) prova allora che $X \cup X'$ è una base di \mathbf{V} . □

La base $X \cup X'$ si dice *ottenuta completando X* .

6. Componenti di un vettore

Nel presente paragrafo, \mathbf{V}^n indicherà sempre uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo \mathbb{K} . Supporremo inoltre $n > 0$, cioè $\mathbf{V}^n \neq \{\mathbf{0}\}$.

◆ **Definizione 4.30.** Diremo *base ordinata* di \mathbf{V}^n una n -pla $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di vettori di \mathbf{V}^n , tale che l'insieme $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ sia una base di \mathbf{V}^n .

Si osservi che, per il Teorema 4.28 (a), ogni n -pla linearmente indipendente di vettori di \mathbf{V}^n è una base ordinata.

Evidentemente a ogni base $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ sono associate $n!$ basi ordinate $\mathcal{B}_p = (\mathbf{e}_{p(1)}, \dots, \mathbf{e}_{p(n)})$ (una per ogni permutazione $p \in \mathfrak{S}_n$).

Sia ora $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ una base (ordinata) di \mathbf{V}^n . Essendo $\mathbf{L}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathbf{V}^n$, ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$: esiste pertanto una n -pla (v^1, \dots, v^n) di scalari, tale che

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i.$$

Proveremo ora che, per la lineare indipendenza di \mathcal{B} , la n -pla (v^1, \dots, v^n) è univocamente determinata da \mathbf{v} (e da \mathcal{B}).

■ **Proposizione 4.31.** *Sia $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ una m -pla di vettori linearmente indipendenti di \mathbf{V}^n . Se $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ e (μ^1, \dots, μ^m) sono due m -ple di scalari tali che*

$$(4.1) \quad \sum_{j=1}^m \lambda^j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^m \mu^j \mathbf{e}_j,$$

allora, $\forall j \in \mathbb{N}_m$, $\lambda^j = \mu^j$.

Dimostrazione. Dalla relazione (4.1), sommando ad ambo i membri l'opposto del secondo membro, si ottiene immediatamente:

$$\sum_{j=1}^m (\lambda^j - \mu^j) \mathbf{e}_j = \mathbf{0}.$$

Essendo la m -pla $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ linearmente indipendente, questo implica che, per $1 \leq j \leq m$, $\lambda^j - \mu^j = 0$, e cioè che $\lambda^j = \mu^j$. □

■ **Corollario 4.32.** Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ una base ordinata di \mathbf{V}^n . Allora, per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$, esiste una e una sola n -pla (v^1, \dots, v^n) di scalari, tale che:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i.$$

◆ **Definizione 4.33.** Con le notazioni del Corollario 4.32, diremo che $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{K}^n$ è la n -pla delle componenti o coordinate del vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$, rispetto alla base (ordinata) \mathcal{B} e scriveremo $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (v^1, \dots, v^n)$.

Diremo anche che lo scalare v^i è la i -esima componente o coordinata di \mathbf{v} rispetto alla base (ordinata) \mathcal{B} .

Esempio 4.8 ter. (La base naturale di \mathbb{K}^n). Nello spazio vettoriale standard \mathbb{K}^n , la base ordinata $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$, associata alla base $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$ costruita nell'Esempio 4.8 (e 4.8 bis), è l'unica base di \mathbb{K}^n che gode della seguente proprietà:

$$\forall \mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{K}^n, \quad \mathbf{a} \equiv_{\tilde{\mathcal{B}}} (a^1, \dots, a^n).$$

Per tale motivo, $\tilde{\mathcal{B}}$ sarà detta *base naturale* o *base canonica* di \mathbb{K}^n .

► **Osservazione 4.34.** Se $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ è una base ordinata di \mathbf{V}^n , allora, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, la n -pla delle componenti del vettore \mathbf{e}_i rispetto a \mathcal{B} è l' i -esimo vettore $\tilde{\mathbf{e}}_i$ della base naturale $\tilde{\mathcal{B}}$ di \mathbb{K}^n .

Si ha cioè, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$:

$$\mathbf{e}_i \equiv_{\mathcal{B}} (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0).$$

Esempio 4.11. La coppia $\mathcal{B} = ((2, 1), (0, 4))$ è una base ordinata di \mathbb{R}^2 . Se $\mathbf{a} = (x, y)$ è un generico vettore di \mathbb{R}^2 , si ha $(x, y) = \alpha(2, 1) + \beta(0, 4)$, con $\alpha = \frac{1}{2}x$ e $\beta = \frac{1}{8}(2y - x)$. Dunque

$$\mathbf{a} \equiv_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{8}(2y - x) \right).$$

Ad esempio, se $\mathbf{a} = (1, 0)$, allora $\mathbf{a} \equiv_{\mathcal{B}} (1/2, -1/8)$. Si noti che, in accordo con l'Osservazione 4.34, se $\mathbf{e}_1 = (2, 1)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 4)$, allora si ha $\mathbf{e}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 \equiv_{\mathcal{B}} (0, 1)$.

7. Somma e intersezione di sottospazi

Nel presente paragrafo, \mathbf{V} indicherà sempre uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} , con $\mathbf{V} \neq \{\mathbf{0}\}$.

■ **Proposizione 4.35.** *Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale di dimensione finita n e \mathbf{W} un suo sottospazio vettoriale. Allora \mathbf{W} ha dimensione finita $m \leq n$. Inoltre:*

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{W} &= 0 \text{ se e solo se } \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\} \\ \dim \mathbf{W} &= n \text{ se e solo se } \mathbf{W} = \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Una base di \mathbf{W} è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbf{V} e pertanto contiene al più n elementi (Corollario 4.25).

Se poi $\dim \mathbf{W} = 0$, allora necessariamente $\mathbf{W} = \mathbf{L}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

Se invece $\dim \mathbf{W} = n$, allora \mathbf{W} possiede una base B di cardinalità n . Per il Teorema 4.28 (a), B è anche una base di \mathbf{V} e quindi $\mathbf{W} = \mathbf{L}(B) = \mathbf{V}$. □

■ **Corollario 4.36.** *Se X è un sottoinsieme linearmente indipendente di \mathbf{V} , avente cardinalità h , la chiusura lineare $\mathbf{L}(X)$ è l'unico sottospazio h -dimensionale di \mathbf{V} contenente X .*

Dimostrazione. Infatti X è una base di $\mathbf{L}(X)$ e quindi $\dim \mathbf{L}(X) = h$. Inoltre, se \mathbf{W} è un sottospazio h -dimensionale di \mathbf{V} contenente X , per la Proposizione 4.9 si ha $\mathbf{L}(X) \subseteq \mathbf{W}$; la Proposizione 4.35 prova allora che \mathbf{W} coincide con $\mathbf{L}(X)$. □

Siano ora $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ due sottospazi vettoriali di \mathbf{V} . Risulta evidente che *l'intersezione $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ è ancora un sottospazio vettoriale di \mathbf{V}* ; pertanto $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ contiene sempre almeno il vettore nullo $\mathbf{0}$.

Al contrario, *l'unione $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$ non è, in generale, linearmente chiusa.*

Ad esempio, se $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{W}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, \quad \mathbf{W}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\},$$

allora, $\mathbf{w}_1 = (1, 0) \in \mathbf{W}_1$, $\mathbf{w}_2 = (0, 1) \in \mathbf{W}_2$, ma $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (1, 1) \notin \mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$.

◆ **Definizione 4.37.** Siano $H_1, H_2 \subseteq \mathbf{V}$. Si dice *somma* di H_1 e H_2 il sottoinsieme

$$H_1 + H_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathbf{V} \mid \mathbf{w}_1 \in H_1, \mathbf{w}_2 \in H_2\}.$$

■ **Proposizione 4.38.** *Se \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 sono sottospazi vettoriali di \mathbf{V} , allora:*

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \mathbf{L}(\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2).$$

Pertanto $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di \mathbf{V} contenente $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$; esso è detto “spazio somma” (o “spazio congiungente”) di \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 .

Dimostrazione. È immediato verificare che

$$\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2 \subseteq \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2).$$

Ricordata la Proposizione 4.9, basta quindi provare che $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ è linearmente chiuso, per concludere che

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \mathbf{L}(\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2).$$

A tale scopo, sia $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$; esistono allora $\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1 \in \mathbf{W}_1$ e $\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{W}_2$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Quindi:

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) \in \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2,$$

$$\lambda \mathbf{u} = \lambda(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \lambda \mathbf{u}_1 + \lambda \mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2.$$

Ciò conclude la prova. □

◆ **Definizione 4.39.** Due sottospazi vettoriali \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 di \mathbf{V} sono detti *indipendenti* se $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\mathbf{0}\}$. In tal caso, il loro spazio somma sarà detto *somma diretta* di \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 e indicato con $\mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$. Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$, diremo che \mathbf{V} è *somma diretta* di \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 .

■ **Proposizione 4.40.** Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$, allora ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ determina univocamente una coppia $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2$ tale che $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Dimostrazione. Essendo $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\exists (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Per provare l'unicità di $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, supponiamo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \text{con } \mathbf{u}_1 \in \mathbf{W}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}_2.$$

Se ne deduce che:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Ne consegue che $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, e cioè che $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$. □

■ **Teorema 4.41. (Relazione di Grassmann¹)** Se $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ sono sottospazi vettoriali finitamente generati di \mathbf{V} si ha:

$$\dim \mathbf{W}_1 + \dim \mathbf{W}_2 = \dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) + \dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2).$$

In particolare, se $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\mathbf{0}\}$, allora

$$\dim(\mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2) = \dim \mathbf{W}_1 + \dim \mathbf{W}_2.$$

Dimostrazione. Si ponga $\dim \mathbf{W}_1 = r$, $\dim \mathbf{W}_2 = s$ e $\dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) = h$.

Se $\mathbf{W}_1 \subseteq \mathbf{W}_2$, allora $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_2$; in tal caso la relazione è banalmente vera. Analogo il caso in cui $\mathbf{W}_2 \subseteq \mathbf{W}_1$.

In caso contrario, sia $B_\cap = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h\}$ una base di $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ (se $h = 0$, sia $B_\cap = \emptyset$). Costruiamo ora, usando il Teorema del completamento (Proposizione 4.29), una base $B_1 = B_\cap \cup \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{r-h}\}$ di \mathbf{W}_1 e una base $B_2 = B_\cap \cup \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{s-h}\}$ di \mathbf{W}_2 (se $h = 0$, B_1 e B_2 sono due qualsiasi basi di \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 rispettivamente).

¹Hermann Günther Grassmann: matematico tedesco (Stettino, 1809-1877).

Vogliamo ora provare che

$$B_+ = B_1 \cup B_2 = B_1 \cup \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{r-h}\} \cup \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{s-h}\}$$

è una base di $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$. Questo conclude la prova, in quanto B_+ ha cardinalità

$$h + (r - h) + (s - h) = r + s - h.$$

Evidentemente $B_+ = B_1 \cup B_2$ genera $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$. Resta quindi da dimostrare la lineare indipendenza di B_+

Supponiamo, a tale scopo, che esistano scalari α^i , β^j , γ^k , con $i \in \mathbb{N}_h$, $j \in \mathbb{N}_{r-h}$, $k \in \mathbb{N}_{s-h}$, tali che:

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^h \alpha^i \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{r-h} \beta^j \mathbf{f}_j + \sum_{k=1}^{s-h} \gamma^k \mathbf{g}_k = \mathbf{0}$$

(convenendo che, se $h = 0$, la prima sommatoria di (4.2) non sia presente).

Dalla relazione (4.2), si ottiene:

$$-\sum_{i=1}^h \alpha^i \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{r-h} \beta^j \mathbf{f}_j = \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{s-h} \gamma^k \mathbf{g}_k.$$

Pertanto $\mathbf{w} \in \mathbf{L}(B_1) \cap \mathbf{L}(B_2) = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$.

Poichè $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_1$, si ha

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^h \lambda^i \mathbf{e}_i,$$

per opportuni scalari λ^i , $i \in \mathbb{N}_h$. Quindi:

$$\sum_{i=1}^h \lambda^i \mathbf{e}_i - \sum_{k=1}^{s-h} \gamma^k \mathbf{g}_k = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Per la lineare indipendenza di B_2 segue $\lambda^i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}_h$, e $\gamma^k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}_{s-h}$; quindi, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Dalla relazione (4.2) segue allora

$$\sum_{i=1}^h \alpha^i \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{r-h} \beta^j \mathbf{f}_j = \mathbf{0},$$

che per la lineare indipendenza di B_1 implica $\alpha^i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}_h$, e $\beta^j = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}_{r-h}$. \square

La definizione di “somma” si estende naturalmente al caso di p sottospazi $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p$ di \mathbf{V} . Si pone, come nel caso $p = 2$,

$$\mathbf{W}_1 + \dots + \mathbf{W}_p = \{\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_p \in \mathbf{V} \mid \forall i \in \mathbb{N}_p, \mathbf{w}_i \in \mathbf{W}_i\}$$

e si prova che:

$$\mathbf{W}_1 + \dots + \mathbf{W}_p = \mathbf{L}(\mathbf{W}_1 \cup \dots \cup \mathbf{W}_p).$$

Se poi, $\forall i \in \mathbb{N}_p$,

$$\mathbf{W}_i \cap (\mathbf{W}_1 + \dots + \mathbf{W}_{i-1} + \mathbf{W}_{i+1} + \dots + \mathbf{W}_p) = \{\mathbf{0}\},$$

allora i sottospazi $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p$ sono detti *indipendenti*; la loro somma, indicata con

$$\mathbf{W}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{W}_p,$$

o anche con

$$\bigoplus_{i=1}^p \mathbf{W}_i,$$

è detta *somma diretta*.

Se $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{W}_p$, allora si dice che \mathbf{V} è *somma diretta* dei suoi sottospazi (indipendenti) $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p$.

Come nel caso $p = 2$, se $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{W}_p$, allora ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ determina univocamente una p -pla

$$(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p) \in \mathbf{W}_1 \times \dots \times \mathbf{W}_p,$$

tale che $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_p$.

Si ha inoltre:

■ **Proposizione 4.42.** *Se i sottospazi $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p$ di \mathbf{V} sono indipendenti e hanno tutti dimensione finita, allora anche la loro somma diretta ha dimensione finita e si ha*

$$(4.3) \quad \dim \left(\bigoplus_{i=1}^p \mathbf{W}_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim \mathbf{W}_i.$$

Dimostrazione. Se $p = 2$, la formula (4.3) si riduce alla relazione di Grassmann.

Supponiamo, per induzione, che (4.3) sia vera per i $p - 1$ sottospazi $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_{p-1}$.

Ricordando che

$$\bigoplus_{i=1}^p \mathbf{W}_i = \left(\bigoplus_{j=1}^{p-1} \mathbf{W}_j \right) \oplus \mathbf{W}_p$$

e che, per l'indipendenza dei sottospazi $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_p$,

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{p-1} \mathbf{W}_j \right) \cap \mathbf{W}_p = \{\mathbf{0}\},$$

ancora per la formula di Grassmann e per l'ipotesi induttiva, si ottiene:

$$\begin{aligned} \dim \left(\bigoplus_{i=1}^p \mathbf{W}_i \right) &= \dim \left(\bigoplus_{j=1}^{p-1} \mathbf{W}_j \right) + \dim \mathbf{W}_p = \sum_{j=1}^{p-1} \dim \mathbf{W}_j + \dim \mathbf{W}_p = \\ &= \sum_{i=1}^p \dim \mathbf{W}_i. \end{aligned}$$

□

Trasformazioni lineari

1. Trasformazioni lineari e isomorfismi

In questo paragrafo, i simboli \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{W} indicheranno sempre spazi vettoriali sullo stesso campo \mathbb{K} , mentre con $\mathbf{0}_{\mathbf{U}}$, $\mathbf{0}_{\mathbf{V}}$, $\mathbf{0}_{\mathbf{W}}$ saranno denotati i rispettivi vettori nulli. Indicheremo inoltre, per brevità, con gli stessi simboli le operazioni di somma e prodotto per uno scalare rispettivamente definite nei vari spazi vettoriali considerati, anche se, in generale, tali operazioni risultano distinte.

♦ **Definizione 5.1.** Una applicazione $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ si dice *trasformazione lineare* o *applicazione lineare* di \mathbf{V} in \mathbf{W} se, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$, si ha:

- (1) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$;
- (2) $T(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot T(\mathbf{u})$.

Se gli spazi vettoriali \mathbf{V} e \mathbf{W} coincidono, allora T è detta *operatore lineare* o *endomorfismo* su \mathbf{V} (o di \mathbf{V} in sé). Una trasformazione lineare biunivoca $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ è detta *isomorfismo* di \mathbf{V} in \mathbf{W} ; in tal caso gli spazi \mathbf{V} e \mathbf{W} sono detti *isomorfi*.

Un endomorfismo biiettivo, cioè un isomorfismo di \mathbf{V} in sé, è detto *automorfismo* su \mathbf{V} . Se $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$ e $\mathbf{W} = \mathbb{K}^m$ sono spazi vettoriali standard, allora una trasformazione lineare $\tilde{T} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ è anche detta *trasformazione lineare standard*.

Se $\mathbf{W} = \mathbb{K}$, ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}$ è detta *forma lineare* su \mathbf{V} .

Si noti che $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare se e solo se, per ogni combinazione lineare $\sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \mathbf{v}_i$ di vettori di \mathbf{V} , si ha:

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot T(\mathbf{v}_i).$$

Ad esempio, l'applicazione

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (4x + y, y - x) \end{aligned}$$

è lineare e biettiva ed è dunque un automorfismo sullo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^2 .

Invece l'applicazione

$$\begin{aligned} S : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + 1, x - y) \end{aligned}$$

non è lineare.

Esempio 5.1. Sia $\omega_0 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ l'applicazione definita ponendo, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\omega_0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_\mathbf{W}$. ω_0 è lineare e viene usualmente chiamata *trasformazione lineare nulla*.

Esempio 5.2. L'applicazione identica $\text{Id}_\mathbf{V}$ è un automorfismo su \mathbf{V} .

Esempio 5.3. Sia $\mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti in \mathbb{R} . L'applicazione $D : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$ che associa a ogni polinomio

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

la sua derivata

$$D(p(t)) = p'(t) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}$$

è lineare. D è pertanto un endomorfismo su $\mathbb{R}[t]$, ma non è un automorfismo; infatti, D non è iniettiva poiché, ad esempio, la derivata di tutti i polinomi di grado ≤ 0 è il polinomio nullo.

Esempio 5.4. Sia $\overline{} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'applicazione biunivoca “coniugio” che, a ogni numero complesso $a + ib \in \mathbb{C}$, associa il suo coniugato $\overline{a + ib} = a - ib$.

Si ha, per ogni $a + ib, c + id \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \overline{(a + ib) + (c + id)} &= \overline{a + c + i(b + d)} = a + c - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \\ &= \overline{a + ib} + \overline{c + id}. \end{aligned}$$

Inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\overline{\lambda \cdot (a + ib)} = \overline{\lambda a + i(\lambda b)} = \lambda a - i(\lambda b) = \lambda \cdot (a - ib) = \lambda \cdot \overline{(a + ib)}.$$

Il coniugio è pertanto un automorfismo sullo spazio vettoriale $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, +, \cdot)$, cioè su \mathbb{C} considerato come spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Invece, il coniugio non è un automorfismo sullo spazio vettoriale $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$, pur essendo un isomorfismo del campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ in sé; si ha infatti, per ogni $\alpha + i\beta, a + ib \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \overline{(\alpha + i\beta) \cdot (a + ib)} &= \overline{\alpha a - \beta b + i(\alpha b + \beta a)} = \alpha a - \beta b - i(\alpha b + \beta a) = \\ &= (\alpha - i\beta) \cdot (a - ib) = \overline{(\alpha + i\beta)} \cdot \overline{(a + ib)}; \\ (\alpha + i\beta) \cdot \overline{(a + ib)} &= (\alpha + i\beta) \cdot (a - ib) = \alpha a + \beta b + i(-\alpha b + \beta a). \end{aligned}$$

Esempio 5.5. Sia $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ l'applicazione che associa a ogni matrice quadrata di ordine n la somma degli elementi della sua diagonale principale. Se $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si ha dunque:

$$\text{Tr}(A) = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n.$$

L'applicazione Tr , detta *traccia*, è una trasformazione lineare di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ in \mathbb{K} .

Risulta di immediata verifica la seguente

■ **Proposizione 5.2.** (a) Se $S : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ e $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ sono trasformazioni lineari (risp. isomorfismi), allora anche la loro composizione $T \circ S : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare (risp. un isomorfismo).

(b) Se $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ è un isomorfismo, allora anche l'applicazione inversa $T^{-1} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ è un isomorfismo.

□

◆ **Definizione 5.3.** Sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Sarà detto *nucleo* di T , indicato con $\text{Ker } T$, il sottoinsieme

$$\text{Ker } T = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}\} = T^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbf{W}}) \subseteq \mathbf{V};$$

sarà detto *immagine* di T , indicato con $\text{Im } T$, il sottoinsieme

$$\text{Im } T = T(\mathbf{V}) \subseteq \mathbf{W}.$$

■ **Proposizione 5.4.** Sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare.

- (a) $T(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}$;
- (b) per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$;
- (c) T è iniettiva se e solo se $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}_{\mathbf{V}}\}$;
- (d) T è suriettiva se e solo se $\text{Im } T = \mathbf{W}$.

Dimostrazione.

(a) Si ha $T(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) + T(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = T(\mathbf{0}_{\mathbf{V}} + \mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = T(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}} + T(\mathbf{0}_{\mathbf{V}})$. Sommando $-T(\mathbf{0}_{\mathbf{V}})$ si ottiene subito $T(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}$.

(b) $T(\mathbf{v}) + T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{0}_{\mathbf{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}$. Quindi $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ (per l'unicità dell'opposto).

(c) Se T è iniettiva, ovviamente $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}_{\mathbf{V}}\}$. Supponiamo, viceversa, che $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}_{\mathbf{V}}\}$ e proviamo che T è iniettiva. A tale scopo, siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, tali che $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Ne consegue che $T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathbf{W}}$; pertanto $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \text{Ker } T$, e cioè $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}_{\mathbf{V}}$, che equivale a $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(d) È ovvia. □

■ **Proposizione 5.5.** Sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare.

- (a) Se \mathbf{X} è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} , allora $T(\mathbf{X})$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{W} ; in particolare, $\text{Im } T = T(\mathbf{V})$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{W} .
- (b) Se \mathbf{Y} è un sottospazio vettoriale di \mathbf{W} , allora $T^{-1}(\mathbf{Y})$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} ; in particolare, $\text{Ker } T = T^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbf{W}})$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} .

Dimostrazione. (a) Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T(\mathbf{X})$, esistono $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ tali che $T(\mathbf{x}_1) = \mathbf{w}_1$, $T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{w}_2$. Essendo \mathbf{X} un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} , si ha $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ e, per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot \mathbf{x}_1 \in \mathbf{X}$; dunque $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{x}_1) + T(\mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in T(\mathbf{X})$ e $\alpha \cdot \mathbf{w}_1 = \alpha \cdot T(\mathbf{x}_1) = T(\alpha \cdot \mathbf{x}_1) \in T(\mathbf{X})$.

(b) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T^{-1}(\mathbf{Y})$, si ha $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2) \in \mathbf{Y}$ e dunque, essendo \mathbf{Y} un sottospazio vettoriale di \mathbf{W} , si ha $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) \in \mathbf{Y}$ e, per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$, $T(\alpha \cdot \mathbf{v}_1) = \alpha \cdot T(\mathbf{v}_1) \in \mathbf{Y}$.

Ciò prova che $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in T^{-1}(\mathbf{Y})$, $\alpha \cdot \mathbf{v}_1 \in T^{-1}(\mathbf{Y})$ e dunque che $T^{-1}(\mathbf{Y})$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} . □

■ **Proposizione 5.6.** Sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare.

- (a) Se H è un sistema di generatori per \mathbf{V} , allora $T(H)$ è un sistema di generatori per $\text{Im } T$.

- (b) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ è una k -pla di vettori di \mathbf{V} ($k \in \mathbb{N}$) tale che $(T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_k))$ è linearmente indipendente in \mathbf{W} , allora $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ è linearmente indipendente in \mathbf{V} .
- (c) Se T è iniettiva e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ è una k -pla linearmente indipendente di vettori di \mathbf{V} ($k \in \mathbb{N}$), allora $(T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_k))$ è una k -pla linearmente indipendente di vettori di \mathbf{W} .

Dimostrazione. (a) Supponiamo $\mathbf{V} \neq \{\mathbf{0}_\mathbf{V}\}$, cioè $H \neq \emptyset$. Sia $\mathbf{w} \in \text{Im } T$ e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tale che $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Poiché H è un sistema di generatori per \mathbf{V} , si ha

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^h \alpha^i \cdot \mathbf{u}_i,$$

dove, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, $\mathbf{u}_i \in H$. Allora

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) = T\left(\sum_{i=1}^h \alpha^i \cdot \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^h \alpha^i \cdot T(\mathbf{u}_i).$$

Dunque, ogni $\mathbf{w} \in \text{Im } T$ è esprimibile come combinazione lineare di vettori di $T(H)$. Ciò prova (a).

(b) Supponiamo che si abbia

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_\mathbf{V}.$$

Applicando ad ambo i membri la trasformazione lineare T , si ottiene

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i \cdot T(\mathbf{v}_i) = T(\mathbf{0}_\mathbf{V}) = \mathbf{0}_\mathbf{W}.$$

Poichè, per ipotesi, $(T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_k))$ è linearmente indipendente in \mathbf{W} , segue $\alpha^i = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}_k$. Ciò prova la lineare indipendenza di $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$.

(c) Supponiamo che si abbia

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i \cdot T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}_\mathbf{W}.$$

Da

$$T\left(\sum_{i=1}^k \alpha^i \cdot \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha^i \cdot T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}_\mathbf{W}$$

segue

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i \cdot \mathbf{v}_i \in \text{Ker } T.$$

Poichè, essendo T iniettiva, $\text{Ker } T = \{\mathbf{0}_\mathbf{V}\}$, si ha

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_\mathbf{V}$$

e dunque, per la lineare indipendenza di $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, si ottiene $\alpha^i = 0$, per ogni $i \in \mathbb{N}_k$. Ciò prova la lineare indipendenza di $(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_k))$. □

► **Osservazione 5.7.** Se $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ è una trasformazione lineare, allora T trasforma ogni sottospazio \mathbf{U} di \mathbf{V} di dimensione finita m in un sottospazio di \mathbf{W} avente dimensione $h \leq m$. Se poi T è iniettiva, allora \mathbf{U} e $T(\mathbf{U})$ hanno la stessa dimensione m .

Il seguente teorema prova che ogni trasformazione lineare risulta completamente determinata dalle immagini dei vettori di una qualunque base del suo dominio.

■ **Teorema 5.8. (Teorema fondamentale delle trasformazioni lineari)** *Sia B una base di \mathbf{V} . Per ogni applicazione $\varphi : B \rightarrow \mathbf{W}$, esiste una e una sola trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ tale che $T|_B = \varphi$, essendo $T|_B : B \rightarrow \mathbf{W}$ la restrizione di T a B .*

Dimostrazione. Proveremo, per semplicità, il teorema nel caso in cui \mathbf{V} abbia dimensione finita, anche se l'enunciato ha validità generale.

Poniamo $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

(a) *Esistenza.* Per il Corollario 4.32, ogni vettore di \mathbf{V} è esprimibile in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base B (che possiamo supporre ordinata). Definiamo allora l'applicazione $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ ponendo, per ogni

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha^i \mathbf{e}_i \in \mathbf{V}, \quad T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \varphi(\mathbf{e}_i) \in \mathbf{W}.$$

È facile verificare che T è lineare. Inoltre, per l'Osservazione 4.34, si ha:

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad T(\mathbf{e}_i) = 1 \cdot \varphi(\mathbf{e}_i) = \varphi(\mathbf{e}_i).$$

Dunque $T|_B = \varphi$.

(b) *Unicità.* Supponiamo che $T' : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ sia una trasformazione lineare tale che $T'|_B = \varphi$. Per ogni

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha^i \mathbf{e}_i \in \mathbf{V},$$

si ha allora:

$$T'(\mathbf{u}) = T' \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha^i T'(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \varphi(\mathbf{e}_i) = T(\mathbf{u}).$$

Quindi $T' = T$.

□

Siano, ad esempio, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{W} = \mathbb{R}^3$, \tilde{B} la base naturale di \mathbb{R}^2 e $\varphi : \tilde{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\varphi(1, 0) = (2, -1, 0), \quad \varphi(0, 1) = (3, 1, -1).$$

Allora, per il Teorema fondamentale, esiste ed è unica la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$T(1, 0) = (2, -1, 0), \quad T(0, 1) = (3, 1, -1).$$

Poiché, per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$, si ha:

$$\begin{aligned} T(a, b) &= a \cdot (2, -1, 0) + b \cdot (3, 1, -1) = \\ &= (2a, -a, 0) + (3b, b, -b) = (2a + 3b, -a + b, -b). \end{aligned}$$

■ **Teorema 5.9. (Equazione dimensionale per le trasformazioni lineari)**

Sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se \mathbf{V} ha dimensione finita, allora anche $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$ hanno dimensione finita e si ha:

$$\dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) = \dim \mathbf{V}.$$

Dimostrazione. Sia $\dim \mathbf{V} = n$. Allora $\text{Ker } T$ ha dimensione finita h , con $0 \leq h \leq n$ (Proposizione 4.35), mentre il fatto che $\text{Im } T$ sia finitamente generato è conseguenza immediata della Proposizione 5.6 (a) (o dell'Osservazione 5.7).

Se $h > 0$, sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h\}$ una base di $\text{Ker } T$ e sia $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-h}\}$ un suo completamento a una base di \mathbf{V} ; se invece $h = 0$, allora sia $B = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ una base arbitraria di \mathbf{V} .

Dimostriamo che, in ogni caso, $\{T(\mathbf{f}_1), \dots, T(\mathbf{f}_{n-h})\}$ è una base di $\text{Im } T$ avente cardinalità $n - h$: in tal modo, il teorema resta provato, avendosi $\dim(\text{Im } T) = n - h$. Per la Proposizione 5.6 (a), l'insieme $T(B)$ è un sistema di generatori per $\text{Im } T$.

Ricordando che, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, $\mathbf{e}_i \in \text{Ker } T$ e dunque $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}_\mathbf{W}$, si deduce allora immediatamente che anche l'insieme $\{T(\mathbf{f}_1), \dots, T(\mathbf{f}_{n-h})\}$ è un sistema di generatori per $\text{Im } T$.

Proviamo ora che $(T(\mathbf{f}_1), \dots, T(\mathbf{f}_{n-h}))$ è linearmente indipendente, ponendo

$$\sum_{i=1}^{n-h} \alpha^i \cdot T(\mathbf{f}_i) = \mathbf{0}_\mathbf{W}$$

Dalla linearità di T segue

$$T\left(\sum_{i=1}^{n-h} \alpha^i \cdot \mathbf{f}_i\right) = \mathbf{0}_\mathbf{W}$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{n-h} \alpha^i \cdot \mathbf{f}_i \in \text{Ker } T.$$

Essendo $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h\}$ una base di $\text{Ker } T$, si ha

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n-h} \alpha^i \cdot \mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^h \beta^j \cdot \mathbf{e}_j$$

(dove, nel caso $h = 0$, l'ultimo membro dell'uguaglianza diventa il vettore nullo $\mathbf{0}_\mathbf{V}$) e dunque

$$\sum_{i=1}^{n-h} \alpha^i \cdot \mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^h \beta^j \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{0}_\mathbf{V}.$$

La lineare indipendenza di B prova allora che, per ogni $i \in \mathbb{N}_{n-h}$, $\alpha^i = 0$. Pertanto l'insieme $\{T(\mathbf{f}_1), \dots, T(\mathbf{f}_{n-h})\}$ costituisce una base di $\text{Im } T$ avente cardinalità $n - h$. \square

■ **Corollario 5.10.** *Sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Se $\dim \mathbf{V} = n$, si ha:*

- (a) T è iniettiva $\Leftrightarrow \dim(\text{Ker } T) = 0 \Leftrightarrow \dim(\text{Im } T) = n$;
- (b) T è un isomorfismo $\Leftrightarrow n = \dim(\text{Im } T) = \dim \mathbf{W}$.

Pertanto, se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$, allora:

$$T \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow T \text{ è suriettiva} \Leftrightarrow T \text{ è un isomorfismo.}$$

\square

Esempio 5.6. Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la "proiezione sul piano xy " definita ponendo, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\pi(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Si ha evidentemente $\text{Im } \pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ (il piano xy) e $\text{Ker } \pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ (l'asse z). Poiché, come è facile provare, $\dim(\text{Im } \pi) = 2$ e $\dim(\text{Ker } \pi) = 1$, l'equazione dimensionale risulta verificata. Si osservi che π non è né iniettiva, né suriettiva.

Esempio 5.7. Sia $D : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$ la trasformazione lineare (derivata di un polinomio) dell'Esempio 5.3. Poiché per ogni $r \in \mathbb{N}$ si ha $D(\mathbb{R}^r[t]) = \mathbb{R}^{r-1}[t]$, è possibile considerare la restrizione $D^r : \mathbb{R}^r[t] \rightarrow \mathbb{R}^{r-1}[t]$ di D il cui dominio (risp. codominio) risulta costituito dal sottospazio dei polinomi di grado $\leq r$ (risp. $\leq r - 1$).

Ricordato che (Esempio 4.10 bis) $\dim \mathbb{R}^r[t] = r + 1$, $\dim \mathbb{R}^{r-1}[t] = r$, dall'equazione dimensionale si ottiene:

$$\dim(\text{Ker } D^r) = \dim \mathbb{R}^r[t] - \dim(\text{Im } D^r) = r + 1 - r = 1.$$

In effetti, $\text{Ker } D^r$ è l'insieme $\mathbb{R}^0[t]$ dei polinomi di grado ≤ 0 , isomorfo, come è facile verificare, allo spazio vettoriale standard 1-dimensionale \mathbb{R} . Si osservi inoltre che anche $\text{Ker } D = \mathbb{R}^0[t]$.

Se \mathbf{V} ha dimensione finita n , il Corollario 4.32 (esistenza e unicità delle componenti di un vettore) consente di definire una applicazione $\Phi_{\mathcal{B}}$ di \mathbf{V} in \mathbb{K}^n , associando a ogni vettore di \mathbf{V} la n -pla delle sue componenti rispetto a una fissata base ordinata \mathcal{B} di \mathbf{V} . Si ha inoltre:

■ **Proposizione 5.11.** *Se \mathcal{B} è una base ordinata dello spazio vettoriale n -dimensionale \mathbf{V} su \mathbb{K} , l'applicazione $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$, definita ponendo, per ogni $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (v^1, \dots, v^n) \in \mathbf{V}$, $\Phi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = (v^1, \dots, v^n)$, è un isomorfismo, detto "isomorfismo associato alla base \mathcal{B} ".*

Dimostrazione. La biunivocità e la linearità di $\Phi_{\mathcal{B}}$ sono di facile verifica. \square

► **Osservazione 5.12.** La Proposizione 5.11 prova che ogni spazio vettoriale n -dimensionale \mathbf{V} su \mathbb{K} è isomorfo a \mathbb{K}^n .

Ricordando anche la Proposizione 5.6 (b) e (c), se ne deduce che una m -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ di vettori di \mathbf{V} è linearmente indipendente se e solo se è linearmente indipendente la m -pla $((v_1^1, \dots, v_1^n), \dots, (v_m^1, \dots, v_m^n))$ costituita dalle n -ple delle componenti di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ rispetto a una qualunque base di \mathbf{V} .

■ **Teorema 5.13.** Due spazi vettoriali \mathbf{V} , \mathbf{W} finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Dimostrazione. (a) Se \mathbf{V} e \mathbf{W} sono isomorfi, allora il Corollario 5.10 (b) prova che $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$.

(b) Supponiamo che si abbia $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$. Allora, per l'Osservazione 5.12, \mathbf{V} e \mathbf{W} sono entrambi isomorfi a \mathbb{K}^n e quindi, per la Proposizione 5.2, isomorfi fra loro. \square

2. Matrici associate a una trasformazione lineare

Nel presente paragrafo, i simboli \mathbf{U}^p , \mathbf{V}^n , \mathbf{W}^m indicheranno spazi vettoriali sullo stesso campo \mathbb{K} aventi dimensione finita p , n , m rispettivamente.

◆ **Definizione 5.14.** Sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbf{V}^n . Si dice *matrice delle componenti di una h -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ di vettori di \mathbf{V}^n rispetto a \mathcal{B}* ($h \in \mathbb{N}$) la matrice $H \in \mathcal{M}_{n \times h}(\mathbb{K})$ la cui j -esima colonna, $j \in \mathbb{N}_h$, è la n -pla delle componenti di \mathbf{v}_j rispetto a \mathcal{B} . In particolare, se $h = 1$, si parlerà di *colonna delle componenti di un vettore \mathbf{v} rispetto a \mathcal{B}* .

Ad esempio, se, fissata una base ordinata \mathcal{B} di uno spazio vettoriale \mathbf{V}^2 su \mathbb{R} , si ha:

$$\mathbf{v}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (2, 3), \quad \mathbf{v}_2 \equiv_{\mathcal{B}} (-1, 0), \quad \mathbf{v}_3 \equiv_{\mathcal{B}} (4, -2),$$

allora la matrice delle componenti della terna $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ rispetto a \mathcal{B} è

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}).$$

◆ **Definizione 5.15.** Sia $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^m$ una trasformazione lineare e siano $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, \mathcal{B}' basi ordinate di \mathbf{V}^n e \mathbf{W}^m rispettivamente. Si dice *matrice associata a T relativamente a \mathcal{B} e \mathcal{B}'* la matrice $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ delle componenti della n -pla $(T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n))$ rispetto a \mathcal{B}' .

Nel caso di un endomorfismo T su \mathbf{V}^n , si usa spesso considerare \mathcal{B}' coincidente con \mathcal{B} ; si dice, in tal caso, che la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(T) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è *associata a T relativamente a \mathcal{B}* .

Dalla Osservazione 4.34 segue subito

► **Osservazione 5.16.** *La matrice associata alla applicazione identica $\text{Id}_{\mathbf{V}^n}$ relativamente a una qualunque base ordinata di \mathbf{V}^n è la matrice identica I_n .*

► **Osservazione 5.17.** *Se \mathcal{B} e \mathcal{B}' sono basi ordinate rispettivamente di \mathbf{V}^n e \mathbf{W}^m , l'applicazione che associa a ogni trasformazione lineare $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^m$ la matrice associata a T relativamente a \mathcal{B} e \mathcal{B}' è biunivoca. Infatti, per il Teorema fondamentale delle trasformazioni lineari, per ogni $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, esiste ed è unica la trasformazione lineare $S : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^m$ tale che l'immagine del j -esimo vettore di \mathcal{B} abbia, come m -pla delle componenti rispetto a \mathcal{B}' , la j -esima colonna di A (per $j \in \mathbb{N}_n$).*

Si ha inoltre:

■ **Teorema 5.18.** *Sia $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^m$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ la matrice associata a T relativamente alle basi ordinate \mathcal{B} di \mathbf{V}^n e \mathcal{B}' di \mathbf{W}^m . Se $(x) \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ è la colonna delle componenti di un generico vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ rispetto a \mathcal{B} e $(y) \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ è la colonna delle componenti di $T(\mathbf{v})$ rispetto a \mathcal{B}' , si ha:*

$$(5.1) \quad (y) = A \cdot (x).$$

Dimostrazione. Posto $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\mathcal{B}' = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$, $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (x^1, \dots, x^n)$, $T(\mathbf{v}) \equiv_{\mathcal{B}'} (y^1, \dots, y^m)$, si ha:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad T(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m y^i \cdot \mathbf{f}_i.$$

Posto $A = (a_j^i)$, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$ si ha $T(\mathbf{e}_j) \equiv_{\mathcal{B}'} (a_j^1, \dots, a_j^m)$ e dunque

$$T(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_j^i \cdot \mathbf{f}_i.$$

Per la linearità di T si ha inoltre:

$$T(\mathbf{v}) = T\left(\sum_{j=1}^n x^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x^j \cdot T(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x^j \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_j^i \cdot \mathbf{f}_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x^j \cdot a_j^i\right) \cdot \mathbf{f}_i.$$

Per l'unicità delle componenti rispetto a \mathcal{B}' , da

$$T(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m y^i \cdot \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x^j \cdot a_j^i\right) \cdot \mathbf{f}_i$$

segue

$$(5.2) \quad y^i = \sum_{j=1}^n x^j \cdot a_j^i, \quad i \in \mathbb{N}_m$$

o, equivalentemente,

$$(y) = A \cdot (x)$$

□

Le formule (5.1) e le loro equivalenti (5.2) si dicono *equazioni della trasformazione lineare T relativamente alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}'* ; esse forniscono un metodo per ottenere direttamente le componenti, rispetto a \mathcal{B}' , del trasformato $T(\mathbf{v})$ di un generico elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ in funzione delle componenti di \mathbf{v} rispetto a \mathcal{B} .

Siano, ad esempio, \mathcal{B} la base $((1, 1), (-1, 0))$ di \mathbb{R}^2 , \mathcal{B}' la base $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ di \mathbb{R}^3 e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da:

$$T(1, 1) = (2, -1, 0), \quad T(-1, 0) = (0, 4, -2).$$

Siano poi $\tilde{\mathcal{B}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}'$ le basi naturali rispettivamente di \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Dal momento che

$$T(1, 1) = (2, -1, 0) = 2 \cdot (1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 0, 1),$$

$$T(-1, 0) = (0, 4, -2) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 4 \cdot (0, 1, 0) + (-2) \cdot (0, 0, 1),$$

la matrice associata a T relativamente alle basi \mathcal{B} e $\tilde{\mathcal{B}}'$ è

$$M_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}'}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni di T relativamente a \mathcal{B} e $\tilde{\mathcal{B}}'$ risultano pertanto

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}^1 \\ \tilde{y}^2 \\ \tilde{y}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} \tilde{y}^1 = 2x^1 \\ \tilde{y}^2 = -x^1 + 4x^2 \\ \tilde{y}^3 = -2x^2 \end{cases}$$

Per ottenere la matrice associata a T relativamente a \mathcal{B} e \mathcal{B}' occorre invece determinare le componenti di $T(1, 1)$ e $T(-1, 0)$ rispetto a \mathcal{B}' .

Dal momento che

$$T(1, 1) = (2, -1, 0) = \frac{1}{2} \cdot (1, 1, 0) + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (0, 1, 1) + \frac{3}{2} \cdot (1, 0, 1),$$

$$T(-1, 0) = (0, 4, -2) = 3 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1) + (-3) \cdot (1, 0, 1),$$

si ha

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 1/2 & 3 \\ -3/2 & 1 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

e le equazioni di T relativamente a \mathcal{B} e \mathcal{B}' sono

$$\begin{cases} y^1 = \frac{1}{2}x^1 + 3x^2 \\ y^2 = -\frac{3}{2}x^1 + x^2 \\ y^3 = \frac{3}{2}x^1 - 3x^2. \end{cases}$$

Infine, per determinare la matrice (e le equazioni) associata a T relativamente a $\tilde{\mathcal{B}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}'$, occorre determinare i trasformati dei vettori $\tilde{\mathbf{e}}_1 = (1, 0)$ ed $\tilde{\mathbf{e}}_2 = (0, 1)$.

Poiché $\tilde{\mathbf{e}}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (0, -1)$ ed $\tilde{\mathbf{e}}_2 \equiv_{\mathcal{B}} (1, 1)$, si ha:

$$\begin{aligned} T(\tilde{\mathbf{e}}_1) &= T(0 \cdot (1, 1) + (-1) \cdot (-1, 0)) = 0 \cdot T(1, 1) + (-1) \cdot T(-1, 0) = \\ &= 0 \cdot (2, -1, 0) + (-1) \cdot (0, 4, -2) = (0, -4, 2), \\ T(\tilde{\mathbf{e}}_2) &= T(1 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (-1, 0)) = 1 \cdot T(1, 1) + 1 \cdot T(-1, 0) = \\ &= 1 \cdot (2, -1, 0) + 1 \cdot (0, 4, -2) = (2, 3, -2). \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

e le equazioni di T relativamente a $\tilde{\mathcal{B}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}'$ sono

$$\begin{cases} \tilde{y}^1 = 2\tilde{x}^2 \\ \tilde{y}^2 = -4\tilde{x}^1 + 3\tilde{x}^2 \\ \tilde{y}^3 = 2\tilde{x}^1 - 2\tilde{x}^2. \end{cases}$$

Si determini la matrice associata a T relativamente a $\tilde{\mathcal{B}}$ e \mathcal{B}' .

► **Osservazione 5.19.** Sia, in particolare, $\tilde{T} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ una trasformazione lineare standard e siano $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$, $\tilde{\mathcal{B}}'$ le basi naturali rispettivamente di \mathbb{K}^n e \mathbb{K}^m . Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ è la matrice associata a \tilde{T} relativamente a $\tilde{\mathcal{B}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}'$, la sua j -esima colonna \mathbf{a}_j è il trasformato $\tilde{T}(\tilde{\mathbf{e}}_j)$ del j -esimo vettore di $\tilde{\mathcal{B}}$. Si dice allora che A è la *matrice canonicamente associata* alla trasformazione lineare standard \tilde{T} , sottintendendo le basi (naturali) rispetto a cui risulta ottenuta. In tal caso, infatti, le equazioni di \tilde{T} forniscono direttamente il trasformato $(y^1, \dots, y^m) = \tilde{T}(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{K}^m$ della generica n -pla $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{K}^n$. Si osservi inoltre che, se $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^m$ è una trasformazione lineare e \mathcal{B} , \mathcal{B}' sono basi ordinate rispettivamente di \mathbf{V}^n e \mathbf{W}^m , allora la matrice $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T)$ coincide con la matrice A canonicamente associata alla trasformazione lineare standard

$$\tilde{T}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \Phi_{\mathcal{B}'} \circ T \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$$

($\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $\Phi_{\mathcal{B}'} : \mathbf{W}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ indicano, come d'uso, gli isomorfismi associati rispettivamente a \mathcal{B} e \mathcal{B}').

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}^n & \xrightarrow{T} & \mathbf{W}^m \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \uparrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}'} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{T}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Infatti, se, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, \mathbf{a}_j (risp. \mathbf{b}_j) indica la j -esima colonna di A (risp. di $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T)$), posto $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, si ha:

$$\mathbf{a}_j = \tilde{T}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\tilde{\mathbf{e}}_j) = \Phi_{\mathcal{B}'} \circ T \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\tilde{\mathbf{e}}_j) = \Phi_{\mathcal{B}'} \circ T(\mathbf{e}_j) = \mathbf{b}_j.$$

Il seguente teorema prova la rilevanza che assume l'operazione di prodotto righe per colonne nella teoria delle matrici.

■ **Teorema 5.20.** *Siano $S : \mathbf{U}^p \rightarrow \mathbf{V}^n$, $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^m$ trasformazioni lineari. Fissate le basi ordinate \mathcal{B} , \mathcal{B}' , \mathcal{B}'' rispettivamente di \mathbf{U}^p , \mathbf{V}^n , \mathbf{W}^m e posto*

$$A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(S) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K}), \quad B = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(T) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), \\ C = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(T \circ S) \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K}),$$

si ha:

$$C = B \cdot A.$$

Dimostrazione. Sia \mathbf{u} un generico vettore di \mathbf{U}^p . Posto:

$$\mathbf{u} \equiv_{\mathcal{B}} (x^1, \dots, x^p), \quad S(\mathbf{u}) \equiv_{\mathcal{B}'} (y^1, \dots, y^n), \quad (T \circ S)(\mathbf{u}) \equiv_{\mathcal{B}''} (z^1, \dots, z^m)$$

e posto:

$$(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^p \end{pmatrix}, \quad (y) = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad (z) = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^m \end{pmatrix},$$

si ha:

$$(y) = A \cdot (x) \quad \text{e} \quad (z) = B \cdot (y) = (B \cdot A) \cdot (x).$$

Ciò prova che la matrice C coincide con $B \cdot A$. □

■ **Corollario 5.21.** *Sia $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^n$ un isomorfismo e siano \mathcal{B} , \mathcal{B}' basi ordinate rispettivamente di \mathbf{V}^n e \mathbf{W}^n . La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associata a T relativamente a \mathcal{B} e \mathcal{B}' è regolare e la sua inversa A^{-1} è la matrice associata a $T^{-1} : \mathbf{W}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ relativamente a \mathcal{B}' e \mathcal{B} .*

Dimostrazione. Se infatti A' denota la matrice associata a T^{-1} relativamente a \mathcal{B}' e \mathcal{B} , essendo $T^{-1} \circ T = \text{Id}_{\mathbf{V}^n}$, $T \circ T^{-1} = \text{Id}_{\mathbf{W}^n}$, per l'Osservazione 5.16 e per il Teorema precedente, si ha $A' \cdot A = A \cdot A' = I_n$ e quindi $A' = A^{-1}$. □

Si è già visto che una matrice quadrata A è regolare (cioè invertibile) se e solo se $\det A \neq 0$ (Teorema 3.45). Si ha inoltre:

■ **Proposizione 5.22.** *Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- (1) A è regolare.
- (2) La n -pla costituita dalle colonne di A è linearmente indipendente.
- (3) La n -pla costituita dalle righe di A è linearmente indipendente.
- (4) Ogni trasformazione lineare avente A come matrice associata è un isomorfismo.

Dimostrazione. Proveremo l'equivalenza delle affermazioni secondo lo schema seguente:

$$(3) \Longleftarrow (1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (4)$$

e dimostrando infine che $(4) \Rightarrow (1)$ e che $(3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$, $(1) \Rightarrow (3)$. Infatti, se, per assurdo, le righe o le colonne di A fossero linearmente dipendenti, allora una di esse sarebbe combinazione lineare delle rimanenti e dunque, per la Proprietà V dei determinanti (Capitolo 3), si avrebbe $\det A = 0$.

(2) \Rightarrow (4). Siano \mathbf{V} e \mathbf{W} spazi vettoriali su \mathbb{K} aventi dimensione n . Fissata una base ordinata $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di \mathbf{V} e una base ordinata \mathcal{B}' di \mathbf{W} , sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ la trasformazione lineare avente A come matrice associata relativamente a \mathcal{B} e \mathcal{B}' . In altri termini, si interpreti la j -esima colonna \mathbf{a}_j di A , per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, come la n -pla delle componenti di $T(\mathbf{e}_j)$ rispetto a \mathcal{B}' .

Indicato con $\Phi_{\mathcal{B}'} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'isomorfismo associato a \mathcal{B}' , poiché, per ipotesi, la n -pla $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ è linearmente indipendente in \mathbb{K}^n , la n -pla

$$(\Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}(\mathbf{a}_1), \dots, \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}(\mathbf{a}_n)) = (T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n))$$

è linearmente indipendente in \mathbf{W} . Pertanto, l'insieme $\{T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)\}$, sistema di generatori per $\text{Im } T$ (si veda la Proposizione 5.6(a)), è un sottoinsieme linearmente indipendente costituito da n vettori distinti ed è dunque una base di $\text{Im } T$. Segue che $n = \dim(\text{Im } T) = \dim \mathbf{W}$; per il Corollario 5.10 (b), T è pertanto un isomorfismo.

(4) \Rightarrow (1). È conseguenza immediata del Corollario 5.21.

(3) \Rightarrow (1). Se le righe di A sono linearmente indipendenti, allora le colonne di ${}^t A$ sono linearmente indipendenti. Si ha allora, avendo già provato che (1) è equivalente a (2):

$$\det A = \det({}^t A) \neq 0.$$

Dunque A è regolare.

□

► **Osservazione 5.23.** Dalla Proposizione 5.22 e dal Teorema 4.28 (a) segue che una n -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di vettori di \mathbf{V}^n è una base ordinata di \mathbf{V}^n se e solo se la matrice delle componenti di $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ rispetto a una qualunque base ordinata di \mathbf{V}^n è regolare.

La seguente proposizione fornisce un metodo per trovare le equazioni di una trasformazione lineare definita mediante le immagini di una qualunque base del suo dominio.

■ **Proposizione 5.24.** Sia $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^m$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ la matrice associata a T relativamente alle basi ordinate \mathcal{B} di \mathbf{V}^n e \mathcal{B}' di \mathbf{W}^m . Se $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è la matrice (regolare) delle componenti della base ordinata $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di \mathbf{V}^n rispetto a \mathcal{B} e $Y \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ è la matrice delle componenti di $(T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_n))$ rispetto a \mathcal{B}' , si ha:

$$A = Y \cdot X^{-1}.$$

Dimostrazione. Se, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, X_j (risp. Y_j) denota la j -esima colonna di X (risp. di Y), si ha infatti:

$$Y_j = A \cdot X_j \text{ e dunque } Y = A \cdot X.$$

Dalla regolarità di X , moltiplicando a destra per la sua inversa X^{-1} , segue pertanto $A = Y \cdot X^{-1}$.

□

Se, ad esempio, $\tilde{\mathcal{B}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}'$ sono le basi naturali rispettivamente di \mathbb{R}^2 e di \mathbb{R}^3 e se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è ancora la trasformazione lineare definita da:

$$T(1, 1) = (2, -1, 0) \quad T(-1, 0) = (0, 4, -2),$$

la matrice associata a T relativamente a $\tilde{\mathcal{B}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}'$, determinata in precedenza, si può riottenere, mediante la Proposizione 5.24, nel modo seguente. Se $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0)$, allora, essendo

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

si ha

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque:

$$A = M_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}'}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Rango di una matrice

Nel presente paragrafo, i simboli \mathbf{V}^n , \mathbf{W}^m indicheranno spazi vettoriali sullo stesso campo \mathbb{K} aventi dimensione finita n , m rispettivamente.

◆ **Definizione 5.25.** Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, si dice *rango* o *caratteristica* di A , e si indica con $\varrho(A)$, la dimensione del sottospazio vettoriale $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ di \mathbb{K}^m generato dalle colonne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ di A .

In altre parole, il rango di A è il numero massimo di colonne linearmente indipendenti di A . La proposizione seguente prova che tale numero coincide con il numero massimo di righe linearmente indipendenti di A .

■ **Proposizione 5.26.** Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, si ha:

$$\varrho(A) = \varrho({}^tA).$$

Dimostrazione. Se $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ e $(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m)$ sono rispettivamente la n -pla delle colonne e la m -pla delle righe di A , occorre provare che, posto

$$\varrho(A) = \dim \mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = h, \quad \varrho({}^tA) = \dim \mathbf{L}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m) = k,$$

si ha $h = k$. Poiché, evidentemente, per ogni permutazione $p \in \mathfrak{S}_n$, si ha

$$\dim \mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \dim \mathbf{L}(\mathbf{a}_{p(1)}, \dots, \mathbf{a}_{p(n)}),$$

si può supporre, senza perdere in generalità, che le prime h colonne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_h$ di A siano linearmente indipendenti e che le rimanenti colonne siano combinazioni lineari di $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_h$. Si può pertanto scrivere:

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad \mathbf{a}_j = \sum_{s=1}^h \alpha_j^s \cdot \mathbf{a}_s,$$

dove, per ogni $j \in \mathbb{N}_h$, $\alpha_j^s = \delta_j^s$.

Poiché $\mathbf{a}_j = (a_j^1, \dots, a_j^m)$, si ha quindi:

$$(5.3) \quad \forall i \in \mathbb{N}_m, \forall j \in \mathbb{N}_n, \quad a_j^i = \sum_{s=1}^h \alpha_j^s \cdot a_s^i.$$

Ponendo, per ogni $s \in \mathbb{N}_h$, $\alpha^s = (\alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s) \in \mathbb{K}^n$ (ossia, indicando con $\alpha^1, \dots, \alpha^h$ le righe della matrice dei coefficienti $(\alpha_j^s)_{s \in \mathbb{N}_h, j \in \mathbb{N}_n}$) l'uguaglianza (5.3) risulta equivalente a

$$\forall i \in \mathbb{N}_m, \quad \mathbf{a}^i = (a_1^i, \dots, a_n^i) = \sum_{s=1}^h a_s^i \cdot \alpha^s.$$

Si ha pertanto, per ogni $i \in \mathbb{N}_m$, $\mathbf{a}^i \in \mathbf{L}(\alpha^1, \dots, \alpha^h)$ e dunque:

$$k = \dim \mathbf{L}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m) \leq \dim \mathbf{L}(\alpha^1, \dots, \alpha^h) \leq h.$$

Ripetendo il procedimento, partendo dalla ipotesi che siano le prime k righe di A a essere linearmente indipendenti, si prova analogamente che $h \leq k$ e dunque il teorema. \square

► **Osservazione 5.27.** Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, si ha $\varrho(A) \leq \min\{m, n\}$. Inoltre per la Proposizione 5.22, se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, allora A è regolare se e solo se $\varrho(A) = n$.

► **Osservazione 5.28.** Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ è una matrice ridotta di rango h , nel senso della Definizione 3.23, si ha evidentemente $\varrho(A) = h$, in quanto nessuna delle prime h righe di A può essere combinazione lineare delle successive.

Inoltre, i tre tipi di trasformazioni elementari descritti nella Definizione 3.24 non alterano il rango di una matrice.

■ **Teorema 5.29.** Sia $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^m$ una trasformazione lineare e sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ la matrice associata a T relativamente alle basi ordinate \mathcal{B} , \mathcal{B}' rispettivamente di \mathbf{V}^n e \mathbf{W}^m . Si ha allora:

$$\varrho(A) = \dim(\operatorname{Im} T)$$

Dimostrazione. Se $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, si ha $\operatorname{Im} T = \mathbf{L}(T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n))$ (Proposizione 5.6 (a)). D'altra parte, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, la j -esima colonna \mathbf{a}_j di A è, per definizione, la m -pla delle componenti di $T(\mathbf{e}_j)$ rispetto \mathcal{B}' , cioè l'immagine di $T(\mathbf{e}_j)$ mediante l'isomorfismo $\Phi_{\mathcal{B}'} : \mathbf{W}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ associato a \mathcal{B}' . Pertanto, $\operatorname{Im} T = \mathbf{L}(T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n))$ è isomorfo a $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ e dunque si ha:

$$\dim(\operatorname{Im} T) = \dim \mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \varrho(A)$$

\square

Al fine di pervenire a un risultato estremamente utile per il calcolo del rango di una matrice (Teorema di Kronecker), premettiamo il seguente lemma.

■ **Lemma 5.30.** *Se A' è una sottomatrice di $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, allora $\varrho(A') \leq \varrho(A)$.*

Dimostrazione. Posto $\varrho(A') = k$, siano I, J gli insiemi degli indici rispettivamente di riga e di colonna della sottomatrice $A' \in \mathcal{M}_{r \times s}(\mathbb{K})$ e sia $\bar{I} = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$ tale che le righe di A' aventi come indice gli elementi di \bar{I} risultino linearmente indipendenti. Se $A'' \in \mathcal{M}_{k \times s}(\mathbb{K})$ è la sottomatrice di A' costituita da tali righe, si ha evidentemente $\varrho(A'') = k$. Esiste dunque un insieme $\bar{J} = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq J$ tale che le colonne $\mathbf{c}_{j_1}, \dots, \mathbf{c}_{j_k}$ di A'' aventi come indice gli elementi di \bar{J} risultino linearmente indipendenti.

Sia $B \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{K})$ la sottomatrice di A costituita dalle sue righe $\mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_k}$; le colonne $\mathbf{c}_{j_1}, \dots, \mathbf{c}_{j_k}$ di A'' sono anche colonne di B e dunque si ha $\varrho(B) = k$. Le righe $\mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_k}$ sono pertanto linearmente indipendenti e si ha dunque $\varrho(A) \geq k$. □

◆ **Definizione 5.31.** Sia M un minore (Definizione 3.40) di ordine k estratto dalla matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Si dice *minore orlato* di M un minore di ordine $k+1$ estratto da A avente M come minore.

■ **Proposizione 5.32. (Teorema di Kronecker)** *Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- (1) $\varrho(A) = k$.
- (2) *Esiste in A un minore M di ordine k tale che $\det M \neq 0$ e tutti i minori di A aventi ordine maggiore di k hanno determinante nullo.*
- (3) *Esiste in A un minore M di ordine k tale che $\det M \neq 0$ e tutti i minori di A orlati di M hanno determinante nullo.*

Dimostrazione. (1) \Rightarrow (2). Poiché $\varrho(A) = k$, esistono in A k righe linearmente indipendenti; sia A' la sottomatrice di A costituita da tali righe. Avendosi evidentemente $\varrho(A') = k$, esistono in A' k colonne linearmente indipendenti, sia M la sottomatrice (quadrata) di A' , e dunque di A , costituita da tali colonne. Poiché le colonne del minore M di A sono linearmente indipendenti, per la Proposizione 5.22, si ha $\det M \neq 0$. Inoltre, l'esistenza di un minore di A avente ordine $h > k$ e determinante non nullo implicherebbe, per il Lemma 5.30, $\varrho(A) \geq h > k$, contro l'ipotesi (1).

(2) \Rightarrow (3). È ovvia.

(3) \Rightarrow (1). Proviamo che non può aversi, nella ipotesi (3), né $\varrho(A) < k$, né $\varrho(A) > k$. Infatti, se fosse $\varrho(A) < k$, allora, poiché (1) \Rightarrow (2), ogni minore di ordine maggiore di $\varrho(A)$, in particolare M , avrebbe determinante nullo, contro l'ipotesi $\det M \neq 0$.

Supponiamo invece $\varrho(A) > k$ e supponiamo che $\{i_1, \dots, i_k\}$ (risp. $\{j_1, \dots, j_k\}$) siano gli insiemi degli indici di riga (risp. di colonna) del minore M . Per il Lemma 5.30, le righe $\mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_k}$ di A sono allora linearmente indipendenti. Poiché $\varrho(A) > k$, esiste almeno un ulteriore riga \mathbf{a}^{i_0} di A tale che $(\mathbf{a}^{i_0}, \mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_k})$ risulti linearmente indipendente.

Sia $A' \in \mathcal{M}_{(k+1) \times n}$ la sottomatrice di A costituita dalle righe $\mathbf{a}^{i_0}, \mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_k}$. Evidentemente $\varrho(A') = k+1$; inoltre M è un minore di A' . Per il Lemma 5.30, le colonne $\mathbf{a}'_{j_1}, \dots, \mathbf{a}'_{j_k}$ di A' sono dunque linearmente indipendenti e, poiché $\varrho(A') = k+1$, esiste almeno una ulteriore colonna \mathbf{a}'_{j_0} di A' tale che $(\mathbf{a}'_{j_0}, \mathbf{a}'_{j_1}, \dots, \mathbf{a}'_{j_k})$ risulti linearmente indipendente.

Se M' è la sottomatrice (quadrata) di A' , costituita dalle colonne $\mathbf{a}'_{j_0}, \mathbf{a}'_{j_1}, \dots, \mathbf{a}'_{j_k}$, si ha allora $\varrho(M') = k+1$ e dunque $\det M' \neq 0$. Poiché, per costruzione, M è un minore di M' , si perviene dunque a un minore M' di A , orlato di M , con $\det M' \neq 0$, contro l'ipotesi (3). Pertanto $\varrho(A) = k$. □

Applichiamo, ad esempio, il Teorema di Kronecker al calcolo del rango della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R}).$$

Si ha, intanto, $\varrho(A) \leq 3$; inoltre, poiché il determinante del minore

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non nullo, si ottiene $2 \leq \varrho(A) \leq 3$.

Il calcolo del determinante dei due minori orlati di M dà poi

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

si conclude quindi che $\varrho(A) = 2$.

4. Cambiamenti di base

Nel presente paragrafo, il simbolo \mathbf{V}^n indicherà uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} avente dimensione finita n .

◆ **Definizione 5.33.** Siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi ordinate di \mathbf{V}^n e siano $\Phi_{\mathcal{B}_1}, \Phi_{\mathcal{B}_2} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ gli isomorfismi associati rispettivamente alle basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 .

Si dice *cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2* l'automorfismo $\Phi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \Phi_{\mathcal{B}_2} \circ \Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ su \mathbb{K}^n .

$$\begin{array}{ccc} & \Phi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} & \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^n \\ \Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1} \searrow & & \nearrow \Phi_{\mathcal{B}_2} \\ & \mathbf{V}^n & \end{array}$$

Se $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}_1} (x^1, \dots, x^n)$ e $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}_2} (y^1, \dots, y^n)$, si ha pertanto:

$$(y^1, \dots, y^n) = \Phi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(x^1, \dots, x^n).$$

Il cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 fa dunque corrispondere alla n -pla delle componenti, rispetto a \mathcal{B}_1 , di un vettore \mathbf{v} di \mathbb{V}^n la n -pla delle sue componenti rispetto a \mathcal{B}_2 .

La matrice regolare $E \in GL_n(\mathbb{K})$ associata a $\Phi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ relativamente alla base naturale di \mathbb{K}^n è detta *matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2* .

Pertanto, posto

$$(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad (y) = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

le equazioni del cambiamento di base $\Phi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ (relativamente alla base naturale di \mathbb{K}^n) sono:

$$(y) = E \cdot (x)$$

La seguente proposizione consente di ottenere la matrice E direttamente dalle basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 .

■ Proposizione 5.34. *La matrice E del cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 è la matrice delle componenti di \mathcal{B}_1 rispetto a \mathcal{B}_2 .*

Dimostrazione. Sia $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$ la base naturale di \mathbb{K}^n . Posto $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ ed $E = (a_j^i)$, ricordando che, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, la j -esima colonna \mathbf{a}_j di E è il trasformato di $\tilde{\mathbf{e}}_j$ mediante $\Phi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ (Osservazione 5.19), si ha:

$$\mathbf{a}_j = \Phi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\tilde{\mathbf{e}}_j) = \Phi_{\mathcal{B}_2} \circ \Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\tilde{\mathbf{e}}_j) = \Phi_{\mathcal{B}_2}(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(\tilde{\mathbf{e}}_j)) = \Phi_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{e}_j)$$

o, equivalentemente, $\mathbf{e}_j \equiv_{\mathcal{B}_2} (a_j^1, \dots, a_j^n)$.

□

► **Osservazione 5.35.** *Se E è la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 , allora la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}_2 a \mathcal{B}_1 è $F = E^{-1}$.*

Infatti, si ha evidentemente $\Phi_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \Phi_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}^{-1}$; d'altra parte, da $(y) = E \cdot (x)$ segue subito, moltiplicando a sinistra per E^{-1} , $(x) = E^{-1} \cdot (y)$.

Se, ad esempio, $\mathcal{B}_1 = \tilde{\mathcal{B}}$ è la base naturale di \mathbb{R}^2 e \mathcal{B}_2 è la base $((1, 2), (2, -2))$ di \mathbb{R}^2 , avendosi ovviamente

$$(1, 2) \equiv_{\mathcal{B}_1} (1, 2) \quad \text{e} \quad (2, -2) \equiv_{\mathcal{B}_1} (2, -2)$$

si ha subito che

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

è la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}_2 a \mathcal{B}_1 .

Dunque se (x^1, x^2) e (y^1, y^2) indicano rispettivamente le componenti di uno stesso vettore

di \mathbb{R}^2 rispetto a \mathcal{B}_1 e a \mathcal{B}_2 , si ottiene

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

e, conseguentemente, essendo

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Allo stesso risultato si perviene ricercando direttamente la matrice E del cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 . Infatti, poiché

$$(1, 0) \equiv_{\mathcal{B}_2} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \quad \text{e} \quad (0, 1) \equiv_{\mathcal{B}_2} \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6} \right),$$

si ottiene:

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Dal Teorema 5.20 segue inoltre che, se E è la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 e G è la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}_2 a \mathcal{B}_3 , allora la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_3 è $G \cdot E$.

5. Matrici simili

Sia \mathbb{K} un campo.

◆ **Definizione 5.36.** Diremo che due matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sono *simili*, e scriveremo $A \sim B$, se esiste una matrice regolare $E \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che

$$(5.4) \quad A = E^{-1} \cdot B \cdot E.$$

Ad esempio, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & -4/3 \\ -7/6 & 8/3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

sono simili, in quanto esiste

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}),$$

per cui (5.4) è verificata.

■ **Proposizione 5.37.** La similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza su $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dimostrazione. Se $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ricordando che $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è un gruppo (Teorema 3.19), si ha infatti:

- (R) $A = I_n^{-1} \cdot A \cdot I_n$, dove $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ è la matrice identica d'ordine n (proprietà riflessiva);
- (S) se $A = E^{-1} \cdot B \cdot E$, con $E \in GL_n(\mathbb{K})$, allora $B = (E^{-1})^{-1} \cdot A \cdot E^{-1}$, con $E^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ (proprietà simmetrica);
- (T) se $A = E^{-1} \cdot B \cdot E$ e $B = F^{-1} \cdot C \cdot F$, con $E, F \in GL_n(\mathbb{K})$, allora $A = E^{-1} \cdot F^{-1} \cdot C \cdot F \cdot E = (F \cdot E)^{-1} \cdot C \cdot (F \cdot E)$, con $F \cdot E \in GL_n(\mathbb{K})$ (proprietà transitiva).

□

Sia ora \mathbf{V}^n uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo \mathbb{K} .

■ **Teorema 5.38.** *Due matrici $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sono simili se e solo se esistono un operatore lineare T su \mathbf{V}^n e due basi ordinate $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di \mathbf{V}^n , tali che $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(T)$.*

Dimostrazione. (a) Sia T un operatore lineare su \mathbf{V}^n e siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di \mathbf{V}^n , tali che $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(T)$. Per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$, indicata con (x) (risp. (x')) la colonna delle componenti di \mathbf{v} rispetto a \mathcal{B} (risp. \mathcal{B}') e indicata con (y) (risp. (y')) la colonna delle componenti di $T(\mathbf{v})$ rispetto a \mathcal{B} (risp. \mathcal{B}'), si ha allora (Teorema 5.18):

$$(y) = A \cdot (x), \quad (y') = A' \cdot (x').$$

Se $E \in GL_n(\mathbb{K})$ è la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' , si ha inoltre:

$$(x') = E \cdot (x), \quad (y') = E \cdot (y).$$

Si ottiene quindi:

$$(y) = E^{-1} \cdot (y') = E^{-1} \cdot A' \cdot (x') = E^{-1} \cdot A' \cdot E \cdot (x).$$

Ciò prova che $A = E^{-1} \cdot A' \cdot E$, cioè che A e A' sono simili.

(b) Supponiamo ora che A e A' siano simili, cioè che esista $E = (e_j^i) \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $A = E^{-1} \cdot A' \cdot E$.

Sia $\mathcal{B}' = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ una arbitraria base ordinata di \mathbf{V}^n e sia T l'operatore lineare su \mathbf{V}^n avente A' quale matrice associata, relativamente a \mathcal{B}' .

Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$, se (x') (risp. (y')) è la colonna delle componenti di \mathbf{v} (risp. di $T(\mathbf{v})$) rispetto a \mathcal{B}' , si ha dunque:

$$(y') = A' \cdot (x').$$

Sia \mathcal{B} la n -pla $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di vettori di \mathbf{V}^n definita ponendo, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$,

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n e_j^i \cdot \mathbf{f}_i.$$

La matrice delle componenti di \mathcal{B} rispetto alla base ordinata \mathcal{B}' è quindi la matrice regolare E : pertanto \mathcal{B} è una base ordinata di \mathbf{V}^n (si veda l'Osservazione 5.23).

Indicata con (x) (risp. (y)) la colonna delle componenti di \mathbf{v} (risp. di $T(\mathbf{v})$) rispetto a \mathcal{B} , si ha inoltre:

$$(x') = E \cdot (x), \quad (y') = E \cdot (y).$$

Si ottiene quindi:

$$(y) = E^{-1} \cdot (y') = E^{-1} \cdot A' \cdot (x') = E^{-1} \cdot A' \cdot E \cdot (x) = A \cdot (x).$$

Dunque $M_{\mathcal{B}}(T) = A$. Ciò conclude la prova del Teorema 5.38. \square

Ricordando che, se $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, allora $\varrho(A) = \dim(\text{Im } T)$ (Teorema 5.29), come conseguenza del Teorema 5.38, si ottiene il seguente:

■ **Corollario 5.39.** *Matrici simili hanno lo stesso rango.* \square

Si ha inoltre:

■ **Proposizione 5.40.** *Matrici simili hanno lo stesso determinante.*

Dimostrazione. Se $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sono simili, sia $E \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $A = E^{-1} \cdot A' \cdot E$. Dal Teorema di Binet (Proposizione 3.38) e dal Teorema 3.45 (a) si ricava allora:

$$\begin{aligned} \det A &= \det(E^{-1} \cdot A' \cdot E) = \det(E^{-1}) \cdot \det A' \cdot \det E = \\ &= (\det E)^{-1} \cdot \det A' \cdot \det E = \det A'. \end{aligned}$$

\square

Sia, ad esempio, T l'automorfismo sullo spazio vettoriale \mathbf{V}^2 (su \mathbb{R}), di equazioni:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 - x^2 \\ y^2 = -x^1 + 3x^2 \end{cases}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ di \mathbf{V}^2 . Se $\mathcal{B} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ è un'altra base di \mathbf{V}^2 , con $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, allora la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' è

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

si ha:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = A = E^{-1} A' E = \begin{pmatrix} 4/3 & -4/3 \\ -7/6 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che: $\det A' = \det A = 2$.

Sistemi Lineari

1. Sistemi lineari e loro risolubilità

◆ **Definizione 6.1.** Diremo *sistema lineare di m equazioni in n incognite*, a coefficienti nel campo \mathbb{K} , una coppia $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$, dove $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^m) \in \mathbb{K}^m$.

La matrice A è detta *matrice incompleta* o *matrice dei coefficienti*; la m -pla $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^m) \in \mathbb{K}^m$ e la matrice colonna

$$(b) = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

sono dette rispettivamente *m -pla* e *colonna dei termini noti*.

Se (x^1, \dots, x^n) è una n -pla di *simboli*, detti *incognite*, posto

$$(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

il sistema lineare $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ è, di solito, rappresentato da una delle seguenti scritte equivalenti:

$$(6.1) \quad \begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = b^m \end{cases};$$

$$(6.2) \quad \sum_{j=1}^n a_j^i x^j = b^i, \qquad i \in \mathbb{N}_m;$$

$$(6.3) \quad A \cdot (x) = (b).$$

Per ogni $i \in \mathbb{N}_m$, l'espressione:

$$a_1^i x^1 + \dots + a_n^i x^n = b^i$$

$$\left(\text{o, in forma compatta, } \sum_{j=1}^n a_j^i x^j = b^i \right),$$

è detta i -esima equazione (lineare) del sistema lineare \mathbf{S} . Si dice anche che \mathbf{S} ha equazioni (6.1), (6.2) o (6.3).

Si dice poi *matrice completa* del sistema lineare $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ la matrice $C = (c_k^i) \in \mathcal{M}_{m \times (n+1)}(\mathbb{K})$, le cui $n+1$ colonne $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n, \mathbf{c}_{n+1}$ sono nell'ordine $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$. In altre parole:

$$C = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

Si osservi che la i -esima riga della matrice completa C fornisce i “coefficienti delle incognite” e il “termine noto” della i -esima equazione del sistema \mathbf{S} .

Un *sottosistema di \mathbf{S}* è un sistema lineare le cui equazioni sono un sottoinsieme delle equazioni di \mathbf{S} .

Il sottosistema di \mathbf{S} costituito dalle equazioni di indice i_1, \dots, i_h sarà indicato con $\mathbf{S}(i_1, \dots, i_h)$.

Esempio 6.1. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{Q}) \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = (1, 0, -4) \in \mathbb{Q}^3$$

la coppia $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ è un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite, a coefficienti in \mathbb{Q} , avente A quale matrice incompleta, \mathbf{b} quale terna dei termini noti e

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$$

quale matrice completa.

Indicata con (x, y) la coppia delle incognite, il sistema \mathbf{S} ha equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

o equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Il sottosistema costituito dalla prima e dalla terza equazione di \mathbf{S} è $\mathbf{S}(1, 3) = (\tilde{A}, \tilde{\mathbf{b}})$, dove

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{b}} = (1, -4).$$

Esso ha equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

che possono anche essere espresse come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

♦ **Definizione 6.2.** Se \mathbf{S}' e \mathbf{S}'' sono due sistemi lineari, rispettivamente di h e di k equazioni, nello stesso numero n di incognite, si dice *sistema unione di \mathbf{S}' e \mathbf{S}''* il sistema lineare di $h+k$ equazioni in n incognite $\mathbf{S} = \mathbf{S}' \cup \mathbf{S}''$ tale che $\mathbf{S}(1, \dots, h) = \mathbf{S}'$ e $\mathbf{S}(h+1, \dots, h+k) = \mathbf{S}''$.

Ad esempio, se \mathbf{S}' e \mathbf{S}'' hanno equazioni

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x + 6y = 3 \\ 7x + 8y = 4 \\ 9x + 10y = 5 \end{cases}$$

rispettivamente, allora $\mathbf{S}' \cup \mathbf{S}''$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \\ 5x + 6y = 3 \\ 7x + 8y = 4 \\ 9x + 10y = 5. \end{cases}$$

♦ **Definizione 6.3.** Se $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ è un sistema lineare di m equazioni in n incognite, si dice che una n -pla $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \in \mathbb{K}^n$ è una *soluzione* di \mathbf{S} se, posto

$$(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{pmatrix},$$

si ha: $A \cdot (\bar{\mathbf{x}}) = (\mathbf{b})$, essendo (\mathbf{b}) la colonna dei termini noti.

In altre parole, una n -pla $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ di elementi di \mathbb{K} è una soluzione di \mathbf{S} se e solo se:

$$\forall i \in \mathbb{N}_m, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}^j = b^i,$$

cioè, come si usa dire, se e solo se, *sostituita alla n -pla delle incognite, "soddisfa" tutte le equazioni di \mathbf{S} .*

L'insieme delle soluzioni di \mathbf{S} è anche detto *spazio delle soluzioni* di \mathbf{S} e si indica con $\text{Sol}(\mathbf{S})$.

Si dice poi che \mathbf{S} è *possibile* o *compatibile* (rispettivamente *impossibile* o *incompatibile*) se $\text{Sol}(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ (rispettivamente se $\text{Sol}(\mathbf{S}) = \emptyset$).

In altre parole, \mathbf{S} è *impossibile* se non ammette alcuna soluzione; \mathbf{S} è, invece, *possibile* se ammette almeno una soluzione.

Ad esempio, il sistema \mathbf{S} dell'Esempio 6.1 è impossibile, in quanto, come è facile verificare, $\text{Sol } \mathbf{S} = \emptyset$. Invece il sottosistema $\mathbf{S}(1, 3)$ è possibile e la sua unica soluzione è $(-2/5, 7/5)$.

► **Osservazione 6.4.** Se, per ogni $i \in \mathbb{N}_m$, $\mathbf{S}(i)$ denota il sottosistema di \mathbf{S} la cui unica equazione è la i -esima equazione di \mathbf{S} , si ha evidentemente:

$$\text{Sol } (\mathbf{S}) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}_m} \text{Sol } (\mathbf{S}(i)).$$

Se ne deduce immediatamente che, se $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ è una soluzione del sistema lineare \mathbf{S} , allora $\bar{\mathbf{x}}$ è anche soluzione di tutti i sottosistemi di \mathbf{S} .

pertanto, se $\mathbf{S} = \mathbf{S}' \cup \mathbf{S}''$, allora

$$\text{Sol } (\mathbf{S}) = \text{Sol } (\mathbf{S}') \cap \text{Sol } (\mathbf{S}'').$$

♦ **Definizione 6.5.** Due sistemi lineari \mathbf{S}' e \mathbf{S}'' , nello stesso numero di incognite si dicono *equivalenti* se $\text{Sol } (\mathbf{S}') = \text{Sol } (\mathbf{S}'')$.

Si noti che, permutando le equazioni di un sistema lineare \mathbf{S} , si ottiene un sistema equivalente a \mathbf{S} .

► **Osservazione 6.6.** Lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare:

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n = b$$

è \mathbb{K}^n se $b = 0$, mentre è \emptyset se $b \neq 0$.

Pertanto, se in un sistema \mathbf{S} compare almeno una equazione siffatta, con $b \neq 0$, allora \mathbf{S} è impossibile; se invece, $b = 0$, allora il sottosistema ottenuto da \mathbf{S} “cancellando” tale equazione è equivalente a \mathbf{S} .

Lo studio di un sistema lineare \mathbf{S} pone innanzitutto il seguente problema:

\mathbf{S} è compatibile o incompatibile?

Indicata con C la matrice completa di un sistema lineare arbitrario $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$, di m equazioni in n incognite, il problema della compatibilità di \mathbf{S} è completamente risolto dalla seguente:

■ **Proposizione 6.7. (Teorema di Rouché¹ - Capelli²)** Un sistema lineare \mathbf{S} è possibile se e solo se $\varrho(A) = \varrho(C)$.

Dimostrazione. Avendo C esattamente una colonna in più rispetto ad A , per la definizione di rango, si ha

$$\varrho(C) = \varrho(A) \quad \text{oppure} \quad \varrho(C) = \varrho(A) + 1.$$

¹Eugène Rouché: matematico francese (Soummières, 1832 - Lunel, 1910).

²Alfredo Capelli: matematico italiano (Milano, 1855 - Napoli, 1910).

Inoltre l'uguaglianza $\varrho(C) = \varrho(A)$ vale se e solo se la m -pla \mathbf{b} dei termini noti è combinazione lineare delle colonne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ di A , cioè se e solo se esiste $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j \bar{x}^j = \mathbf{b}.$$

Dunque $\varrho(A) = \varrho(C)$ se e solo se esiste $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^n$ che sia soluzione di \mathbf{S} . □

Nel caso in cui il sistema lineare \mathbf{S} sia compatibile, lo studio prosegue con la sua *risoluzione*, cioè con la determinazione effettiva dello spazio delle soluzioni $\text{Sol}(\mathbf{S})$.

A tal fine, è utile considerare la trasformazione lineare standard $\tilde{T} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, avente A quale matrice associata relativamente alle base naturali di \mathbb{K}^n e \mathbb{K}^m ; tale trasformazione lineare sarà detta, a sua volta, *associata* al sistema lineare \mathbf{S} .

Si osservi infatti che $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \in \mathbb{K}^n$ è soluzione di \mathbf{S} se e solo se $\tilde{T}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{b}$; pertanto, $\text{Sol}(\mathbf{S}) = \tilde{T}^{-1}(\mathbf{b})$ e dunque \mathbf{S} è possibile se e solo se $\mathbf{b} \in \text{Im } \tilde{T}$.

Affronteremo preliminarmente lo studio di una classe di sistemi lineari, per i quali il problema della compatibilità è banale e la struttura dello spazio delle soluzioni particolarmente semplice.

Tale studio ci servirà di supporto per determinare la struttura dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare compatibile arbitrario.

♦ **Definizione 6.8.** Un sistema lineare $\mathbf{S} = (A, \mathbf{0})$, avente la m -pla nulla quale m -pla dei termini noti, è detto *omogeneo*.

Si osservi che *un sistema lineare omogeneo* $\mathbf{S} = (A, \mathbf{0})$ (di m equazioni in n incognite) *è sempre compatibile, in quanto ammette sempre la n -pla nulla* $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ *quale soluzione*.³ Tale soluzione sarà detta *soluzione banale*.

■ **Proposizione 6.9.** *Lo spazio $\text{Sol}(\mathbf{S})$ delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S} = (A, \mathbf{0})$ in n incognite è un sottospazio vettoriale di \mathbb{K}^n di dimensione $n - \varrho(A)$.*

Dimostrazione. Se $\tilde{T} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ è la trasformazione lineare standard associata a \mathbf{S} , allora

$$\text{Sol}(\mathbf{S}) = \tilde{T}^{-1}(\mathbf{0}) = \text{Ker } \tilde{T}.$$

D'altra parte, per il Teorema 5.9, si ha: $\dim(\text{Ker } \tilde{T}) + \dim(\text{Im } \tilde{T}) = n$. Ricordato che $\dim(\text{Im } \tilde{T}) = \varrho(A)$ (Teorema 5.29), si ottiene allora $\dim(\text{Sol}(\mathbf{S})) + \varrho(A) = n$.

Ciò conclude la prova. □

Si usa anche enunciare la Proposizione 6.9 dicendo che \mathbf{S} *ammette esattamente $n - \varrho(A)$ soluzioni linearmente indipendenti e tutte le altre soluzioni sono loro combinazioni lineari*.

³Anche nel caso particolare dei sistemi omogenei, ovviamente, la compatibilità può essere ottenuta attraverso il teorema di Rouché-Capelli: infatti, dal momento che $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, si ha banalmente $\varrho(A) = \varrho(C)$.

► **Osservazione 6.10.** È facile rendersi conto che un sistema lineare \mathbf{S} ammette la soluzione banale se e solo se è omogeneo.

Per la Proposizione 6.9, ciò consente di affermare che $\text{Sol}(\mathbf{S})$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{K}^n se e solo se \mathbf{S} è un sistema lineare omogeneo (in n incognite).

Al fine di determinare la struttura dello spazio delle soluzioni di un generico sistema lineare compatibile, premettiamo la seguente

◆ **Definizione 6.11.** Dato il sistema lineare $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$, si dice *sistema lineare omogeneo associato a \mathbf{S}* il sistema $\mathbf{S}_0 = (A, \mathbf{0})$, ottenuto sostituendo la m -pla nulla alla m -pla \mathbf{b} dei termini noti.

■ **Teorema 6.12.** Se $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ è un sistema lineare compatibile (in n incognite) e $\bar{\mathbf{x}} \in \text{Sol}(\mathbf{S})$, allora si ha che $\text{Sol}(\mathbf{S}) = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^n \mid \tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}} \in \text{Sol}(\mathbf{S}_0)\}$.

Dimostrazione. Se $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^n$, dette (\tilde{x}) e (\bar{x}) le colonne delle componenti di $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{x}}$ rispettivamente, si ha:

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \text{Sol}(\mathbf{S}) \Leftrightarrow A \cdot (\tilde{x}) = (b) = A \cdot (\bar{x}) \Leftrightarrow A \cdot (\tilde{x} - \bar{x}) = (0) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}} \in \text{Sol}(\mathbf{S}_0).$$

□

Si può anche enunciare il Teorema 6.12 affermando che *le soluzioni di un sistema lineare possibile si ottengono sommando a una sua particolare soluzione, arbitrariamente fissata, le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.*

► **Osservazione 6.13.** Se \mathbf{V} è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , l'applicazione $T_{\bar{\mathbf{x}}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, definita ponendo, per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $T_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}$ è una biiezione, detta *traslazione* di ampiezza $\bar{\mathbf{x}}$.

Nel caso particolare $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$, per il Teorema 6.12, se $\bar{\mathbf{x}} \in \text{Sol}(\mathbf{S})$, si ha $T_{\bar{\mathbf{x}}}(\text{Sol}(\mathbf{S}_0)) = \bar{\mathbf{x}} + \text{Sol}(\mathbf{S}_0) = \text{Sol}(\mathbf{S})$. Ciò giustifica la locuzione: *lo spazio delle soluzioni $\text{Sol}(\mathbf{S})$ si ottiene traslando $\text{Sol}(\mathbf{S}_0)$ mediante $\bar{\mathbf{x}}$.*

Si osservi che, di conseguenza, $\text{Sol}(\mathbf{S})$ e $\text{Sol}(\mathbf{S}_0)$ sono in corrispondenza biunivoca.

Ricordando (Proposizione 6.9) che $\text{Sol}(\mathbf{S}_0)$ è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - \varrho(A)$, si usa anche dire che *un sistema lineare possibile \mathbf{S} ammette $\infty^{n-\varrho(A)}$ soluzioni.*

Il rango $\varrho(A)$ della matrice incompleta A (che, per il Teorema di Rouché-Capelli, coincide con il rango $\varrho(C)$ della matrice completa C) sarà anche detta *rango del sistema possibile \mathbf{S} .*

Dalla Osservazione 6.13 si ottiene immediatamente il seguente:

■ **Corollario 6.14.** (a) *Un sistema lineare possibile ammette una e una sola soluzione⁴ se e solo se il numero delle incognite coincide col suo rango.*

(b) *Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore del suo rango.*

□

⁴Un sistema lineare possibile che ammette una sola soluzione è detto *determinato*. In caso contrario esso è detto *indeterminato*.

2. Metodi di risoluzione per sistemi lineari

◆ **Definizione 6.15.** Un sistema lineare $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ si dice *normale* o *di Cramer*⁵ (di ordine n) se la matrice incompleta A è quadrata (di ordine n) e regolare.

Un sistema normale di ordine n ha dunque lo stesso numero n di equazioni e di incognite; inoltre $\det A \neq 0$, ovvero $\varrho(A) = n$.

■ **Proposizione 6.16. (Teorema di Cramer)** *Ogni sistema lineare normale $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ di ordine n ammette una e una sola soluzione $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$. Con le usuali notazioni, si ha inoltre:*

$$(') \quad (\bar{x}) = A^{-1} \cdot (b),$$

('') **(Formula di Leibniz⁶ - Cramer):**

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \bar{x}^i = (\det D_i) \cdot (\det A)^{-1},$$

dove D_i è la matrice ottenuta da A sostituendo alla sua i -esima colonna la colonna dei termini noti.

Dimostrazione. Se $C \in \mathcal{M}_{n \times (n+1)}(\mathbb{K})$ è la matrice completa di \mathbf{S} , si ha evidentemente: $\varrho(C) = \varrho(A) = n$. Il Teorema di Rouché-Capelli e il Corollario 6.14 (a) provano allora la prima parte del Teorema.

Si ha inoltre $A \cdot (\bar{x}) = (b)$. Moltiplicando entrambi i membri di tale uguaglianza a sinistra per l'inversa A^{-1} della matrice (regolare) A , si ottiene (').

Per provare (") si ricordi (Teorema 3.45 (b)) che, se $A^\# = (A_i^j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è la matrice dei complementi algebrici degli elementi di A , si ha

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot {}^t(A^\#).$$

Da $(\bar{x}) = A^{-1} \cdot (b)$ segue allora, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$,

$$\bar{x}^i = \sum_{j=1}^n (\det A)^{-1} A_i^j b^j = \left(\sum_{j=1}^n b^j A_i^j \right) \cdot (\det A)^{-1} = (\det D_i) \cdot (\det A)^{-1},$$

in quanto $\sum_{j=1}^n b^j A_i^j$ è lo sviluppo di Laplace di $\det D_i$ secondo la i -esima colonna. \square

Ad esempio, il sistema \mathbf{S} di equazioni

$$\begin{cases} 3x - y + 7z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ -x + z = -2 \end{cases}$$

è normale, in quanto

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 12.$$

⁵Gabriel Cramer: matematico svizzero (Ginevra, 1704 - Bagnoles, 1752).

⁶Gottfried W. Leibniz: filosofo e matematico tedesco (Lipsia, 1646 - Hannover, 1716).

La sua (unica) soluzione $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ -2 & 10 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ 10/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

ovvero, mediante la formula di Leibniz-Cramer:

$$\bar{x} = \frac{\det D_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6},$$

$$\bar{y} = \frac{\det D_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3},$$

$$\bar{z} = \frac{\det D_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{12} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}.$$

► **Osservazione 6.17.** Se $ax = b$ è una equazione lineare nell'incognita x (a coefficienti in \mathbb{K}), con $a \neq 0$, allora l'unica soluzione è evidentemente data da:

$$\bar{x} = a^{-1} \cdot b$$

dove a^{-1} è l'elemento inverso di a in \mathbb{K} .

La soluzione di un sistema lineare normale fornita dal Teorema di Cramer “imita” tali semplici considerazioni, sostituendo il calcolo matriciale alle operazioni tra elementi di \mathbb{K} .

Sia ora $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ un generico sistema lineare di m equazioni nelle n incognite x^1, \dots, x^n .

Se $k \in \mathbb{N}_m$, si dice che k equazioni di \mathbf{S} sono *linearmente dipendenti* (rispettivamente *indipendenti*) se tali risultano le corrispondenti righe della matrice completa C di \mathbf{S} .

Se E è l'equazione lineare $c_1x^1 + \dots + c_nx^n = d$ (nelle stesse incognite x^1, \dots, x^n), si dice che E è *combinazione lineare delle h equazioni $\mathbf{S}(i_1), \dots, \mathbf{S}(i_h)$ del sistema \mathbf{S} , mediante gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_h \in \mathbb{K}$* , se la $(n+1)$ -pla $(c_1, \dots, c_n, d) \in \mathbb{K}^{n+1}$ è combinazione lineare delle righe della matrice completa C aventi per indici i_1, \dots, i_h , mediante gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_h$.

Scriveremo in tal caso,

$$E = \sum_{r=1}^h \alpha_r \mathbf{S}(i_r)$$

intendendo, dunque, che:

$$d = \sum_{r=1}^h \alpha_r b^{i_r} \quad \text{e} \quad \forall j \in \mathbb{N}_n, \quad c_j = \sum_{r=1}^h \alpha_r a_j^{i_r}.$$

Ad esempio, l'equazione lineare $3x - y + z = 1$ è combinazione lineare delle 2 equazioni del sistema **S**:

$$\begin{cases} 4x + z = 11 \\ 5x + y + z = 21 \end{cases}$$

mediante gli scalari 2, $-1 \in \mathbb{R}$.

◆ **Definizione 6.18.** Un sistema lineare **S** si dice *minimo* se il rango della sua matrice completa C coincide con il numero delle sue equazioni.

In altri termini, **S** è minimo se le sue equazioni sono linearmente indipendenti.

■ **Proposizione 6.19.** Ogni soluzione di un sistema lineare $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ è anche soluzione di tutte le equazioni che sono combinazioni lineari delle equazioni di **S**.

Dimostrazione. È un semplice calcolo. □

■ **Corollario 6.20.** Se un sistema lineare **S** contiene una equazione che è combinazione lineare delle rimanenti, il sottosistema di **S** ottenuto eliminando tale equazione è equivalente a **S**. □

■ **Corollario 6.21.** Dato un sistema lineare **S**, esiste sempre almeno un sistema lineare minimo equivalente a **S**. □

Ad esempio, il sistema lineare **S** di equazioni:

$$\begin{cases} 4x + z = 11 \\ 5x + y + z = 21 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

non è minimo, in quanto la terza equazione è combinazione lineare delle prime due e pertanto $\varrho(C) \leq 2$.

Il sottosistema formato dalla prima e dalla seconda equazione di **S** è minimo ed equivalente a **S**.

◆ **Definizione 6.22.** Si dice che un sistema lineare \mathbf{S}' è ottenuto da **S** mediante una trasformazione elementare di riga di tipo T_1, T_2, T'_2, T_3 se la matrice completa C' di \mathbf{S}' è ottenuta applicando alla matrice completa C di **S** la corrispondente trasformazione elementare di riga (Definizione 3.24).

■ **Corollario 6.23.** *Sia \mathbf{S} un sistema lineare. Il sistema lineare \mathbf{S}' ottenuto da \mathbf{S} mediante una arbitraria trasformazione elementare di riga è equivalente a \mathbf{S} .*

Dimostrazione. L'equivalenza per trasformazioni elementari T_1 (scambio di due equazioni) e T_3 è evidente.

L'equivalenza per trasformazioni elementari T_2 (o T_2') si ottiene applicando la Proposizione 6.19. \square

Descriviamo ora due algoritmi che consentono di determinare lo spazio $\text{Sol}(\mathbf{S})$ delle soluzioni di un generico sistema lineare $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ di m equazioni in n incognite.

Il primo di tali algoritmi fa uso del Teorema di Rouché-Capelli e del Teorema di Cramer; il secondo è basato sulla possibilità di trasformare la matrice completa C di \mathbf{S} in una matrice ridotta o completamente ridotta, mediante trasformazioni elementari di riga (si veda § 3 del Capitolo 3 e, in particolare, il Teorema 3.25).

Algoritmo A

1) Si calcoli il rango $\varrho(A)$ della matrice incompleta A e il rango $\varrho(C)$ della matrice completa C di \mathbf{S} . Per il Teorema di Rouché-Capelli, si ha $\text{Sol}(\mathbf{S}) = \emptyset$ se e solo se $\varrho(A) \neq \varrho(C)$. Supponiamo dunque $\varrho(A) = \varrho(C) = h \leq \min\{m, n\}$.

Se $h = m = n$, allora il sistema \mathbf{S} è normale e la sua unica soluzione è ottenibile mediante il Teorema di Cramer.

2) Si fissi un minore M di A di ordine h , con $\det M \neq 0$. Poichè una permutazione delle equazioni di \mathbf{S} trasforma tale sistema in uno equivalente, si può sempre supporre che l'insieme degli indici di riga di M sia $I = \{1, 2, \dots, h\}$. Esisterà inoltre una permutazione $q \in \mathfrak{S}_n$, tale che l'insieme degli indici di colonna di M sia $J = \{q(1), q(2), \dots, q(h)\}$. Per il Lemma 5.30, le prime h righe di C sono linearmente indipendenti e, poichè $\varrho(C) = h$, le restanti righe sono combinazioni lineari delle prime h . Per il Corollario 6.20, il sottosistema \mathbf{S}' costituito dalle prime h equazioni di \mathbf{S} è minimo ed equivalente a \mathbf{S} .

Si osservi che, se $h = m$, allora \mathbf{S} è già un sistema minimo e pertanto \mathbf{S}' coincide con \mathbf{S} .

3) Posto $x^{q(h+1)} = t^1, \dots, x^{q(n)} = t^{n-h}$, si riscriva il sistema \mathbf{S}' nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{q(1)}^1 x^{q(1)} + \dots + a_{q(h)}^1 x^{q(h)} = b^1 - a_{q(h+1)}^1 t^1 - \dots - a_{q(n)}^1 t^{n-h} \\ \vdots \\ a_{q(1)}^h x^{q(1)} + \dots + a_{q(h)}^h x^{q(h)} = b^h - a_{q(h+1)}^h t^1 - \dots - a_{q(n)}^h t^{n-h}. \end{cases}$$

In altre parole, si interpreti \mathbf{S}' come un sistema lineare *normale* \mathbf{S}'' di ordine h , avente M quale matrice incompleta, nelle h incognite $x^{q(1)}, \dots, x^{q(h)}$, considerando le rimanenti $n - h$ incognite $x^{q(h+1)}, \dots, x^{q(n)}$ di \mathbf{S}' come "parametri indipendenti".

Risolvendo il sistema \mathbf{S}'' , ad esempio con la Formula di Leibniz-Cramer, si ottiene:

$$(6.4) \quad \begin{cases} x^{q(1)} = \alpha_1^1 t^1 + \dots + \alpha_{n-h}^1 t^{n-h} + \beta^1 \\ \vdots \\ x^{q(h)} = \alpha_1^h t^1 + \dots + \alpha_{n-h}^h t^{n-h} + \beta^h \end{cases}$$

essendo, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$ e $j \in \mathbb{N}_{n-h}$, α_j^i e β^i opportuni scalari di \mathbb{K} .

Si osservi che, se $h = n$ allora \mathbf{S}' è normale, coincide con \mathbf{S}'' e la n -pla $(\beta^1, \dots, \beta^n) \in \mathbb{K}^n$ è la sua unica soluzione.

4) Lo spazio $\text{Sol}(\mathbf{S}) = \text{Sol}(\mathbf{S}')$ è dunque costituito da tutte e sole le n -ple $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{K}^n$, in cui $x^{q(h+1)}, \dots, x^{q(n)}$ sono arbitrari scalari t^1, \dots, t^{n-h} di \mathbb{K} , mentre $x^{q(1)}, \dots, x^{q(h)}$ si ottengono come loro funzioni, mediante le formule (6.4).

► **Osservazione 6.24.** L'algoritmo A dipende in maniera essenziale dalla scelta del minore M .

Esempio 6.2. Sia \mathbf{S} il sistema lineare, a coefficienti in \mathbb{R} , di equazioni:

$$\begin{cases} 5x^1 - 2x^2 - 7x^3 - x^4 = 3 \\ 3x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 = 7 \\ x^1 - 4x^3 = -2 \\ 2x^1 - 2x^2 + 5x^3 - x^4 = 9. \end{cases}$$

Dal momento che $\varrho(A) = \varrho(C) = 2$, \mathbf{S} è possibile e ammette ∞^2 soluzioni. Il minore

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

avente $I = \{3, 4\}$ e $J = \{1, 2\}$ quali indici di riga e di colonna ha $\det M = -2 \neq 0$. Pertanto \mathbf{S} è equivalente al sottosistema minimo \mathbf{S}' di equazioni:

$$\begin{cases} x^1 - 4x^3 = -2 \\ 2x^1 - 2x^2 + 5x^3 - x^4 = 9. \end{cases}$$

Posto $x^3 = t^1$, $x^4 = t^2$, il sistema \mathbf{S}' può essere riscritto come segue:

$$\begin{cases} x^1 = -2 + 4t^1 \\ 2x^1 - 2x^2 = 9 - 5t^1 + t^2, \end{cases}$$

che dà:

$$\begin{cases} x^1 = -2 + 4t^1 \\ x^2 = -\frac{13}{2} + \frac{13}{2}t^1 - \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \text{Sol}(\mathbf{S}) &= \left\{ (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid x^1 = -2 + 4t^1, \right. \\ &\quad \left. x^2 = -\frac{13}{2} + \frac{13}{2}t^1 - \frac{1}{2}t^2, x^3 = t^1, x^4 = t^2 \right\}. \end{aligned}$$

Si osservi che lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 associato a \mathbf{S} è il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \text{Sol}(\mathbf{S}_0) &= \left\{ (u^1, u^2, u^3, u^4) \in \mathbb{R}^4 \mid u^1 = 4t^1, \right. \\ &\quad \left. u^2 = \frac{13}{2}t^1 - \frac{1}{2}t^2, u^3 = t^1, u^4 = t^2 \right\}, \end{aligned}$$

avente dimensione 2. Infatti, assegnando alla coppia (t^1, t^2) rispettivamente i valori $(1, 0)$ e $(0, 1)$, si ottiene la base $B = \{(4, 13/2, 1, 0), (0, -1/2, 0, 1)\}$ di \mathbf{U} .

Inoltre una soluzione particolare per \mathbf{S} è $\bar{\mathbf{x}} = (-2, -13/2, 0, 0)$ (ottenuta per $t^1 = t^2 = 0$). Ciò conferma che $\text{Sol } \mathbf{S}$ è ottenuto traslando \mathbf{U} mediante $\bar{\mathbf{x}}$.

Algoritmo B (Procedimento di Gauss-Jordan⁷)

1) Si consideri la matrice completa C di \mathbf{S} e la si muti, mediante una successione di trasformazioni elementari di riga, in una matrice \overline{C} ridotta a gradini.

Per il Corollario 6.23, il sistema lineare $\overline{\mathbf{S}}$ avente \overline{C} quale matrice completa è equivalente a \mathbf{S} . Sia $\varrho(\overline{C}) = h$. Se l' h -esimo elemento speciale c_{jh}^h di \overline{C} appartiene alla sua ultima colonna (cioè alla colonna dei termini noti di $\overline{\mathbf{S}}$), allora la h -esima equazione lineare di $\overline{\mathbf{S}}$ ha tutti i coefficienti delle incognite nulli e il termine noto non nullo. Ciò prova (Osservazione 6.6) che $\overline{\mathbf{S}}$, e dunque \mathbf{S} , è impossibile.

Del resto le ultime $m - h$ righe di \overline{C} sono tutte nulle e pertanto, in tal caso, $\varrho(\overline{A}) = h - 1 \neq h = \varrho(\overline{C})$; l'impossibilità di $\overline{\mathbf{S}}$ è quindi provata anche dal Teorema di Rouché-Capelli.

Supponiamo ora $j_h < n + 1$, cioè che c_{jh}^h non sia un termine noto di $\overline{\mathbf{S}}$.

2) Sia $\overline{C}' \in \mathcal{M}_{h \times (n+1)}(\mathbb{K})$ la sottomatrice di \overline{C} costituita dalle sue prime h righe e sia $\overline{\mathbf{S}}'$ il sistema lineare (minimo) equivalente a $\overline{\mathbf{S}}$ avente \overline{C}' quale matrice completa. Indicata con $\overline{A}' = (\alpha_j^i)$ la matrice incompleta di $\overline{\mathbf{S}}'$ e con (β^i) la colonna dei suoi termini noti, sia $q \in \mathfrak{S}_n$ una permutazione sugli indici di colonna di \overline{A}' tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, $\alpha_{q(i)}^i$ sia l' i -esimo pivot della matrice ridotta \overline{A}' (di rango h). Posto $x^{q(h+1)} = t^1, \dots, x^{q(n)} = t^{n-h}$ è possibile riscrivere il sistema $\overline{\mathbf{S}}'$ nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{q(1)}^1 x^{q(1)} + & \alpha_{q(2)}^1 x^{q(2)} + & \dots & + \alpha_{q(h)}^1 x^{q(h)} = \beta^1 - \alpha_{q(h+1)}^1 t^1 - \dots - \alpha_{q(n)}^1 t^{n-h} \\ & \alpha_{q(2)}^2 x^{q(2)} + & \dots & + \alpha_{q(h)}^2 x^{q(h)} = \beta^2 - \alpha_{q(h+1)}^2 t^1 - \dots - \alpha_{q(n)}^2 t^{n-h} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \alpha_{q(h)}^h x^{q(h)} = \beta^h - \alpha_{q(h+1)}^h t^1 - \dots - \alpha_{q(n)}^h t^{n-h}. \end{array} \right.$$

Infatti, cancellando da \overline{A}' le $n - h$ colonne non contenenti i pivot, si ottiene una matrice triangolare alta.

Lo spazio $\text{Sol}(\overline{\mathbf{S}}') = \text{Sol}(\mathbf{S})$ si ottiene allora proseguendo come indicato nei passi 3 e 4 dell'Algoritmo A.

In alternativa, si può considerare la matrice completamente ridotta \overline{C}'' ottenuta da \overline{C}' mediante trasformazioni elementari di riga. Il sistema lineare minimo $\overline{\mathbf{S}}''$ avente \overline{C}'' quale matrice completa è equivalente a $\overline{\mathbf{S}}'$ (e dunque a \mathbf{S}). Dalla Definizione 3.23 di matrice completamente ridotta segue che il sistema lineare $\overline{\mathbf{S}}''$ assume la forma

⁷Wilhelm Jordan: scienziato geodeta tedesco (Ellwangen, 1842 - Hannover, 1899).

seguinte:

$$\begin{cases} x^{r(1)} & +\lambda_1^1 x^{r(h+1)} + \dots + \lambda_{n-h}^1 x^{r(n)} = \mu^1 \\ x^{r(2)} & +\lambda_1^2 x^{r(h+1)} + \dots + \lambda_{n-h}^2 x^{r(n)} = \mu^2 \\ & \ddots \\ x^{r(h)} & +\lambda_1^h x^{r(h+1)} + \dots + \lambda_{n-h}^h x^{r(n)} = \mu^h \end{cases}$$

essendo $r \in \mathfrak{S}_n$ una opportuna permutazione (applicata alle colonne di \overline{C}'').

Considerando, come in precedenza, le $n-h$ incognite $x^{r(h+1)}, \dots, x^{r(n)}$ di $\overline{\mathbf{S}}''$ come parametri, e posto $x^{r(h+1)} = t^1, \dots, x^{r(n)} = t^{n-h}$, si ottengono subito le seguenti formule, analoghe alle formule (6.4) dell'Algoritmo A:

$$(6.5) \quad \begin{cases} x^{r(1)} = -\lambda_1^1 t^1 - \dots - \lambda_{n-h}^1 t^{n-h} + \mu^1 \\ \vdots \\ x^{r(h)} = -\lambda_1^h t^1 - \dots - \lambda_{n-h}^h t^{n-h} + \mu^h \end{cases}$$

Lo spazio Sol(\mathbf{S}) si ottiene quindi operando come nel passo 4 dell'Algoritmo A.

Esempio 6.3. Sia \mathbf{S} il sistema lineare dell'Esempio 6.2: la sua matrice completa è:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Operando su C mediante trasformazioni elementari di riga di tipo T_2 , si ottiene la matrice ridotta a gradini (di rango due):

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 26 & 2 & 26 \\ 0 & -\frac{5}{5} & \frac{26}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il secondo (e ultimo) elemento speciale di \overline{C} non appartiene all'ultima colonna, il sistema $\overline{\mathbf{S}}$ avente \overline{C} quale matrice completa è possibile. Quindi anche il sistema equivalente \mathbf{S} è possibile.

Per trovarne le soluzioni, si consideri il sistema $\overline{\mathbf{S}}'$ avente come matrice completa la matrice \overline{C}' costituita dalle prime due righe di \overline{C} . Posto $x^3 = t^1, x^4 = t^2$ e scrivendo $\overline{\mathbf{S}}'$ nel modo seguente:

$$\begin{cases} 5x^1 - 2x^2 = 3 + 7t^1 + t^2 \\ -\frac{4}{5}x^2 = \frac{26}{5} - \frac{26}{5}t^1 + \frac{2}{5}t^2, \end{cases}$$

si riottengono facilmente (ricavando, ad esempio, x^2 nella seconda equazione e sostituendo l'espressione ottenuta nella prima equazione):

$$(*) \quad \begin{cases} x^1 = -2 + 4t^1 \\ x^2 = -\frac{13}{2} + \frac{13}{2}t^1 - \frac{1}{2}t^2, \end{cases}$$

da cui

$$\text{Sol}(\mathbf{S}) = \left\{ (-2 + 4t^1, -\frac{13}{2} + \frac{13}{2}t^1 - \frac{1}{2}t^2, t^1, t^2) \in \mathbb{R}^4 \mid t^1, t^2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

In alternativa, si può ottenere da \overline{C}' , mediante una trasformazione elementare di tipo T_2 , seguita da due trasformazioni elementari di tipo T_3 , la matrice completamente ridotta:

$$\overline{C}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

Il sistema lineare $\overline{\mathbf{S}}''$ avente \overline{C}'' quale matrice completa ha equazioni:

$$\begin{cases} x^1 - 4x^3 = -2 \\ x^2 - \frac{13}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 = -\frac{13}{2}. \end{cases}$$

Posto $x^3 = t^1, x^4 = t^2$, si riottengono ancora le uguaglianze (*).

Esempio 6.4. Sia $\mathbf{S} = (A, \mathbf{0})$ un sistema lineare omogeneo minimo di $n-1$ equazioni in n incognite (ovvero: $A \in \mathcal{M}_{(n-1) \times n}(\mathbb{K})$ con $\varrho(A) = n-1$). Allora, detta $M_j \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $j \in \mathbb{N}_n$, la matrice ottenuta cancellando la j -esima colonna di A , una soluzione non nulla del sistema è

$$\bar{\mathbf{x}} = (\det M_1, -\det M_2, \dots, (-1)^{j+1} \det M_j, \dots, (-1)^{n+1} \det M_n)$$

e $\text{Sol}(\mathbf{S}) = L(\bar{\mathbf{x}})$. Infatti, considerata, per $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, la matrice $N^i = (d_j^s) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le cui n righe sono $\mathbf{d}^1 = \mathbf{a}^i, \mathbf{d}^2 = \mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{d}^s = \mathbf{a}^{s-1}, \dots, \mathbf{d}^n = \mathbf{a}^{n-1}$, si ha banalmente $\det N^i = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ (dato che la matrice contiene due righe uguali). Dunque, $\bar{\mathbf{x}}$ è soluzione di \mathbf{S} in quanto, dallo sviluppo di Laplace secondo la prima riga di N^i , si ottiene:

$$\sum_{j=1}^n a_j^i \bar{x}^j = \sum_{j=1}^n a_j^i (-1)^{j+1} \det M_j = \det N^i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}_{n-1}.$$

Il fatto che tale soluzione sia non nulla e che generi $\text{Sol}(\mathbf{S})$ è conseguenza diretta di $\varrho(A) = n-1$.

Esempio 6.5. Il seguente sistema lineare omogeneo di due equazioni in tre incognite è banalmente minimo:

$$\mathbf{S} : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + z = 0. \end{cases}$$

Utilizzando il procedimento descritto nell'Esempio 6.4, si ottiene facilmente una soluzione non nulla:

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, -3, -3).$$

Pertanto:

$$\text{Sol}(\mathbf{S}) = L((1, -3, -3)).$$

Esempio 6.6. Il seguente sistema lineare omogeneo di quattro equazioni in cinque incognite è minimo

$$\mathbf{S} : \begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 - 2x^5 = 0 \\ x^1 + 2x^2 - 3x^3 = 0 \\ x^1 - x^2 + x^4 - x^5 = 0 \\ 3x^2 + x^4 - 4x^5 = 0 \end{cases}$$

essendo

$$\varrho \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = 4.$$

Utilizzando il procedimento descritto nell'Esempio 6.4, si ottiene facilmente una soluzione non nulla:

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (-27, -27, -27, -27, -27).$$

Pertanto:

$$\text{Sol}(\mathbf{S}) = L((1, 1, 1, 1, 1)).$$

3. Rappresentazioni dei sottospazi vettoriali

Nel presente paragrafo, considereremo solo sottospazi di uno spazio vettoriale \mathbf{V}^n di dimensione finita n sul campo \mathbb{K} . \mathcal{B} indicherà una fissata base ordinata di \mathbf{V}^n .

Ci poniamo ora il problema di rappresentare tramite “sistemi di equazioni” i sottospazi di \mathbf{V}^n .

Esistono fondamentalmente due tipi di rappresentazioni: *cartesiane* e *parametriche*.

(I) Rappresentazione cartesiana.

Diremo che un sistema lineare omogeneo $\mathbf{S} = (A, \mathbf{0})$ di m equazioni in n incognite rappresenta un sottospazio vettoriale \mathbf{U}^h di \mathbf{V}^n , relativamente alla base \mathcal{B} , se \mathbf{U}^h coincide con l'insieme

$$\{\mathbf{u} \equiv_{\mathcal{B}} (u^1, \dots, u^n) \in \mathbf{V}^n \mid A \cdot (u) = (0)\},$$

ovvero se l'insieme delle componenti dei vettori di \mathbf{U}^h , rispetto a \mathcal{B} , coincide con $\text{Sol}(\mathbf{S})$. In tal caso, si ha necessariamente $\varrho(A) = n - h$.

Le equazioni $A \cdot (u) = (0)$ del sistema \mathbf{S} si dicono *equazioni cartesiane* o, più semplicemente, *equazioni del sottospazio \mathbf{U}^h (relativamente a \mathcal{B})*.

■ **Teorema 6.25.** *Ogni sottospazio vettoriale h -dimensionale \mathbf{U}^h di \mathbf{V}^n ($0 < h < n$) può essere rappresentato, relativamente a \mathcal{B} , da un sistema lineare omogeneo minimo di $n - h$ equazioni in n incognite.*

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$ una base di \mathbf{U}^h . Se $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (x^1, \dots, x^n)$ è un generico vettore di \mathbf{V}^n e se, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, $\mathbf{u}_i \equiv_{\mathcal{B}} (u_i^1, \dots, u_i^n)$, sia

$$H = \begin{pmatrix} x^1 & u_1^1 & \dots & u_h^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^n & u_1^n & \dots & u_h^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times (h+1)}(\mathbb{K})$$

la matrice delle componenti della $(h+1)$ -pla $(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)$, rispetto a \mathcal{B} .

Si osservi che la lineare indipendenza di $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)$ implica la lineare indipendenza delle ultime h colonne di H . Pertanto, $h \leq \varrho(H) \leq (h+1)$. Inoltre esiste un minore M di H individuato da un opportuno insieme di h indici di riga e dall'insieme $\{2, 3, \dots, h+1\}$ di indici di colonna avente determinante non nullo.

Poiché $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^h = \mathbf{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)$ se e solo se $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{L}((u_1^1, \dots, u_1^n), \dots, (u_h^1, \dots, u_h^n))$, si ha dunque $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^h$ se e solo se $\varrho(H) = h$, ovvero, per il Teorema di Kronecker, se e solo se gli $n - h$ orlati M_{h+1}, \dots, M_n del minore M in H hanno determinante nullo.

Il sistema lineare omogeneo \mathbf{S} di $n - h$ equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} \det M_{h+1} = 0 \\ \det M_{h+2} = 0 \\ \vdots \\ \det M_n = 0 \end{cases}$$

rappresenta dunque \mathbf{U}^h , rispetto alla base \mathcal{B} .

Si osservi che \mathbf{S} è necessariamente un sistema lineare minimo per la Proposizione 6.9, in quanto $\dim(\text{Sol } \mathbf{S}) = \dim \mathbf{U}^h = h$.

□

► **Osservazione 6.26.** La Proposizione 6.9 e l'Osservazione 5.7 permettono di affermare che il Teorema 6.25 è invertibile, nel senso che, fissata una base \mathcal{B} di \mathbf{V}^n , ogni sistema lineare omogeneo \mathbf{S} di m equazioni in n incognite e rango $\varrho(A) = n - h$ rappresenta un sottospazio vettoriale \mathbf{U}^h di \mathbf{V}^n .

Ad esempio, se \mathbf{V}^4 è uno spazio vettoriale di dimensione quattro e \mathcal{B} è una sua fissata base, il sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 associato al sistema lineare \mathbf{S} dell'Esempio 6.2 rappresenta, relativamente a \mathcal{B} , un sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbf{V}^4 di dimensione $h = 4 - \varrho(A) = 4 - 2 = 2$. Ovviamente, anche il sistema lineare omogeneo minimo \mathbf{S}'_0 associato al sistema lineare minimo \mathbf{S}' equivalente a \mathbf{S} costituisce una rappresentazione cartesiana di \mathbf{U} (non ridondante come quella costituita da \mathbf{S}_0).

► **Osservazione 6.27.** La rappresentazione di \mathbf{U}^h (rispetto alla base \mathcal{B}) mediante il sistema lineare \mathbf{S} non è unica, in quanto \mathbf{S} dipende dalla scelta della base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$ di \mathbf{U}^h e dal minore M nella matrice H .

Esempio 6.7. Nello spazio vettoriale \mathbf{V}^4 su \mathbb{R} siano $\mathbf{u}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_2 \equiv_{\mathcal{B}} (-1, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{U}^2 = \mathbf{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Un generico vettore $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (x, y, z, w) \in \mathbf{V}^4$ appartiene a \mathbf{U}^2 se e solo se la matrice:

$$H = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \\ w & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2.

Scelto il minore

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\det M = 1 \neq 0$, basterà imporre che i due orlati di M abbiano determinante nullo. Ciò porta al sistema lineare omogeneo minimo \mathbf{S} di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ w & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - w = 0 \end{cases}$$

che rappresenta \mathbf{U}^2 rispetto a \mathcal{B} .

Scelto invece il minore

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

lo stesso procedimento produce il sistema \mathbf{S}' di equazioni:

$$\begin{cases} x + z - w = 0 \\ 2y - w = 0 \end{cases}$$

equivalente a \mathbf{S} .

Si osservi che si ha anche $\mathbf{U}^2 = \mathbf{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, dove $\mathbf{w}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (0, 1, 2, 2)$ e $\mathbf{w}_2 \equiv_{\mathcal{B}} (2, 1, 0, 2)$.

(II) Rappresentazione parametrica.

Si noti che, come già osservato nella dimostrazione del Teorema 6.25, se il sottospazio \mathbf{U}^h di \mathbf{V}^n è generato dai vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (u_1^1, \dots, u_1^n)$, \dots , $\mathbf{u}_h \equiv_{\mathcal{B}} (u_h^1, \dots, u_h^n)$, allora un vettore generico $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{U}^h$ se e solo se $\mathbf{v} \in \mathbf{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)$; ciò equivale ovviamente alla esistenza di h scalari $t^1, \dots, t^h \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{v} = t^1 \mathbf{u}_1 + \dots + t^h \mathbf{u}_h$. Pertanto, tutti e soli i vettori $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^h$ ammettono, rispetto a \mathcal{B} , componenti (x^1, \dots, x^n) che si ottengono, al variare dei parametri $t^1, \dots, t^h \in \mathbb{K}$, da

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ u_1^n \end{pmatrix} \cdot t^1 + \dots + \begin{pmatrix} u_h^1 \\ \vdots \\ u_h^n \end{pmatrix} \cdot t^h.$$

Le corrispondenti uguaglianze

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_h^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n & \dots & u_h^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^h \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{cases} x^1 = u_1^1 t^1 + \dots + u_h^1 t^h \\ \vdots \\ x^n = u_1^n t^1 + \dots + u_h^n t^h \end{cases} \quad (t^1, t^2, \dots, t^h \in \mathbb{K}),$$

sono dette *equazioni parametriche* di \mathbf{U}^h (relativamente a \mathcal{B}).

Si osservi che, fissata \mathcal{B} , le equazioni parametriche non sono uniche, in quanto dipendono dalla scelta della base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h)$ di \mathbf{U}^h .

Esempio 6.8. Se $\mathbf{U}^2 = \mathbf{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ è ancora il sottospazio di \mathbf{V}^4 , generato dai vettori $\mathbf{u}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (1, 1, 1, 2)$ e $\mathbf{u}_2 \equiv_{\mathcal{B}} (-1, 0, 1, 0)$ (Esempio 6.7), allora le equazioni parametriche di \mathbf{U}^2 sono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = t^1 - t^2 \\ y = t^1 \\ z = t^1 + t^2 \\ w = 2t^1 \end{cases}.$$

Se, invece, si considera $\mathbf{U}^2 = \mathbf{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ con $\mathbf{w}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (0, 1, 2, 2)$ e $\mathbf{w}_2 \equiv_{\mathcal{B}} (2, 1, 0, 2)$, allora si ottiene:

$$\begin{cases} x = 2s^2 \\ y = s^1 + s^2 \\ z = 2s^1 \\ w = 2s^1 + 2s^2. \end{cases}$$

► **Osservazione 6.28.** Se il sottospazio \mathbf{U}^h è rappresentato, rispetto alla base \mathcal{B} di \mathbf{V}^n , dal sistema lineare omogeneo minimo \mathbf{S} , allora per ottenere un sistema di equazioni parametriche di \mathbf{U}^h , basta determinare una base di \mathbf{U}^h (cioè h vettori linearmente indipendenti) e applicare poi il metodo appena descritto.

Viceversa, data una rappresentazione parametrica di \mathbf{U}^h , rispetto alla base \mathcal{B} di \mathbf{V}^n , i coefficienti degli h parametri forniscono le componenti, rispetto a \mathcal{B} , di h vettori (linearmente indipendenti) che generano \mathbf{U}^h ; il metodo descritto nella dimostrazione del Teorema 6.25 produce allora un sistema lineare omogeneo minimo \mathbf{S} che rappresenta \mathbf{U}^h .

Si osservi ancora che gli Algoritmi A e B di risoluzione dei sistemi lineari descritti nel § 2, producono entrambi particolari sistemi di equazioni parametriche per \mathbf{U}^h .

► **Osservazione 6.29.** In generale, ogni scrittura del tipo

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^r \end{pmatrix} \quad (t^1, t^2, \dots, t^r \in \mathbb{K}),$$

con $H \in \mathcal{M}_{n \times r}(\mathbb{K})$, può essere considerato rappresentazione parametrica, rispetto a una fissata base \mathcal{B} di \mathbf{V}^n , di un sottospazio \mathbf{U} di \mathbf{V}^n . La dimensione del sottospazio, però, non coincide necessariamente con il numero di parametri. Si ha infatti:

$$\dim(\mathbf{U}) = \varrho(H),$$

poichè H risulta essere la matrice delle componenti rispetto a \mathcal{B} di un sistema di generatori (non necessariamente base) di \mathbf{U} .

Autovalori ed autovettori

1. Autovalori e autospazi di un operatore lineare

Nel presente paragrafo \mathbf{V} indicherà uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} .
Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e T è un operatore lineare su \mathbf{V} , poniamo:

$$\mathbf{U}_\lambda = \mathbf{U}_\lambda(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid T(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}\}.$$

■ **Proposizione 7.1.** *Per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, \mathbf{U}_λ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} .*

Dimostrazione. È facile verificare che \mathbf{U}_λ è linearmente chiuso. □

◆ **Definizione 7.2.** Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto *autovalore* dell'operatore lineare T su \mathbf{V} se il sottospazio $\mathbf{U}_\lambda(T)$ di \mathbf{V} non si riduce al solo vettore nullo $\mathbf{0}$ di \mathbf{V} .
In tal caso, $\mathbf{U}_\lambda(T)$ è detto *autospazio* di T , relativo all'autovalore λ ; gli elementi di $\mathbf{U}_\lambda(T)$ sono detti *autovettori* di T relativi all'autovalore λ .

In altre parole, $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di T se esiste un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ di \mathbf{V} tale che:

$$(7.1) \quad T(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}.$$

Gli autovettori di T relativi a λ sono tutti e soli i vettori $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ (compreso il vettore nullo $\mathbf{0}$) soddisfacenti (7.1).

Si osservi che, per $\lambda = 0$, si ha $\mathbf{U}_0(T) = \text{Ker } T$.

Pertanto, $0 \in \mathbb{K}$ è un autovalore di T se e solo se T non è iniettivo (Proposizione 5.4 (c)).

Esempio 7.1. Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore lineare definito da $T(x, y) = (x + 8y, 4x + 5y)$.
Il vettore $\mathbf{v} = (-3, 2) \in \mathbb{R}^2$ non è autovettore di T , dato che

$$T(-3, 2) = (13, -2) \quad (\neq \lambda(-3, 2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

Invece, il vettore $\mathbf{v}' = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$ è autovettore di T , dato che

$$T(2, -1) = (-6, 3) = -3(2, -1).$$

Pertanto, $\lambda = -3 \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T , e il relativo autospazio contiene \mathbf{v}' .

Esempio 7.2. Sia $T : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ l'operatore lineare definito da $T(x, y) = (ax, by)$, con $a, b \in \mathbb{K} - \{0\}$, $a \neq b$. Allora gli autovalori di T sono a e b e i relativi autospazi sono:

$$\mathbf{U}_a = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid y = 0\}, \quad \mathbf{U}_b = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid x = 0\}.$$

Esempio 7.3. Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore lineare definito da $T(x, y) = (3x - 2y, 2x - y)$. Lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T se e solo se esiste un vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ tale che

$$\begin{cases} 3x - 2y = \lambda x \\ 2x - y = \lambda y. \end{cases}$$

In altre parole, λ è un autovalore se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} (\lambda - 3)x + 2y = 0 \\ -2x + (\lambda + 1)y = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni diverse da quella banale. Per il Teorema di Cramer ciò avviene se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = 0,$$

cioè se e solo se $\lambda = 1$.

Quindi 1 è l'unico autovalore di T . Il relativo autospazio \mathbf{U}_1 è l'insieme di tutti i vettori $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che:

$$\begin{cases} (1 - 3)x + 2y = 0 \\ -2x + (1 + 1)y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\mathbf{U}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}.$$

Vedremo in seguito che il procedimento sopra illustrato è valido, in generale, per la ricerca degli autovalori (e degli autospazi) di un qualsiasi operatore lineare su uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Esempio 7.4. Esistono anche operatori lineari privi di autovalori. Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è definito da $T(x, y) = (y, -x)$, allora ripetendo il procedimento già visto nell'Esempio 7.3, si ottiene che λ è autovalore di T se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero se e solo se $\lambda^2 + 1 = 0$. Dunque T non ha autovalori (reali).

Esempio 7.5. Sia $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni "lisce" (cioè infinitamente derivabili) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Evidentemente $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} .

Sia ora D l'operatore lineare su $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ che a ogni funzione f associa la sua funzione derivata $Df = f'$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha:

$$D(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Se ne deduce che ogni numero reale λ è un autovalore di D . Si può inoltre provare che l'autospazio \mathbf{U}_λ ha dimensione uno; pertanto $\mathbf{U}_\lambda = \mathbf{L}(e^{\lambda x})$.

■ **Proposizione 7.3.** *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ h autovalori distinti di T e, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, sia $\mathbf{v}_i \in \mathbf{U}_{\lambda_i} - \{\mathbf{0}\}$. Allora i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Applichiamo il Principio d'induzione.

Per $h = 1$ l'affermazione è banalmente vera, essendo $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Supponiamo ora che la Proposizione sia vera per $h - 1$ autovalori e dimostriamone la validità nel caso di h autovalori. A tale scopo supponiamo che si abbia

$$(7.2) \quad \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_h \mathbf{v}_h = \mathbf{0}.$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= T(\mathbf{0}) = T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_h \mathbf{v}_h) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_h T(\mathbf{v}_h) = \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_h \lambda_h \mathbf{v}_h. \end{aligned}$$

Sottraendo a quest'ultimo termine il primo membro della (7.2) moltiplicato per λ_h , si ottiene quindi

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_h) \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{h-1} (\lambda_{h-1} - \lambda_h) \mathbf{v}_{h-1} = \mathbf{0}.$$

Per l'ipotesi induttiva, i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{h-1}$ sono linearmente indipendenti, per cui tutti i coefficienti $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_h), \dots, \alpha_{h-1} (\lambda_{h-1} - \lambda_h)$ devono essere nulli.

Dal momento che, per ipotesi, per ogni $i \in \mathbb{N}_{h-1}$, $\lambda_i \neq \lambda_h$, se ne deduce che $\alpha_1 = \dots = \alpha_{h-1} = 0$. Sostituendo nella (7.2) si ottiene infine $\alpha_h \mathbf{v}_h = \mathbf{0}$, da cui, essendo $\mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}$, segue $\alpha_h = 0$. Ciò prova che i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h$ sono linearmente indipendenti. □

La Proposizione 7.3 viene di solito enunciata brevemente dicendo che *autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti*.

Esempio 7.6. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n numeri reali distinti, interpretati come n autovalori distinti per l'operatore lineare D su $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ dell'Esempio 7.5. Poichè, $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $e^{\lambda_i x}$ è un autovettore non nullo relativo all'autovalore λ_i , dalla Proposizione 7.3 si ricava che le funzioni $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ sono linearmente indipendenti.

■ **Corollario 7.4.** *Gli autospazi relativi a un numero finito di autovalori distinti sono sottospazi indipendenti.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{U}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{U}_{\lambda_h}$ gli autospazi relativi agli autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_h$. Se, per $i \in \mathbb{N}_h$,

$$\mathbf{v}_i \in \mathbf{U}_{\lambda_i} \cap (\mathbf{U}_{\lambda_1} + \dots + \mathbf{U}_{\lambda_{i-1}} + \mathbf{U}_{\lambda_{i+1}} + \dots + \mathbf{U}_{\lambda_h}),$$

si ha

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{v}_{i+1} + \dots + \mathbf{v}_h,$$

dove, per ogni $j \in \mathbb{N}_h$, $\mathbf{v}_j \in \mathbf{U}_{\lambda_j}$. Quindi

$$\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1} + \dots + \mathbf{v}_h = \mathbf{0}$$

e ciò implica, per la Proposizione 7.3, che ogni \mathbf{v}_j (in particolare, \mathbf{v}_i) è il vettore nullo. Pertanto gli autospazi $\mathbf{U}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{U}_{\lambda_h}$ sono sottospazi indipendenti. \square

2. Polinomio caratteristico

Nel presente paragrafo mostreremo che gli autovalori di un operatore lineare T su uno spazio vettoriale \mathbf{V}^n di dimensione finita n (sul campo \mathbb{K}) sono le radici di un polinomio di grado n (a coefficienti in \mathbb{K}), univocamente associato a T .

Le nozioni fondamentali relative alle equazioni algebriche, utilizzate nel seguito del capitolo, sono raccolte nella Appendice A.

■ **Proposizione 7.5.** *Sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbf{V}^n e A la matrice associata a T relativamente a \mathcal{B} .*

(a) *Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, detta (x) la colonna delle componenti di un generico vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ rispetto a \mathcal{B} , il sottospazio $\mathbf{U}_\lambda(T)$ ha equazioni:*

$$(7.3) \quad (\lambda I_n - A) \cdot (x) = (0).$$

Si ha pertanto: $\dim \mathbf{U}_\lambda(T) = n - \varrho(\lambda I_n - A)$.

(b) *Lo scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di T se e solo se $\det(\lambda I_n - A) = 0$. In particolare, $0 \in \mathbb{K}$ è un autovalore di T se e solo se $\det A = 0$.*

Dimostrazione. Si ha $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ se e solo se $A \cdot (x) = \lambda \cdot (x)$, ovvero se e solo se $(\lambda I_n - A) \cdot (x) = (0)$.

Pertanto, le (7.3) sono le equazioni di $\mathbf{U}_\lambda(T)$, relativamente a \mathcal{B} (si veda § 3 del Capitolo 6). Ciò prova (a).

Inoltre, $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di T se e solo se

$$\dim \mathbf{U}_\lambda(T) = n - \varrho(\lambda I_n - A) > 0,$$

cioè se $\varrho(\lambda I_n - A) < n$. Poichè $\lambda I_n - A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ciò accade se e solo se il suo determinante è nullo. Ciò prova (b). \square

Data una matrice $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice:

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - a_1^1 & -a_2^1 & \dots & -a_n^1 \\ -a_1^2 & t - a_2^2 & \dots & -a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1^n & -a_2^n & \dots & t - a_n^n \end{pmatrix}$$

viene comunemente detta *matrice caratteristica* di A .

◆ **Definizione 7.6.** Si dice *polinomio caratteristico* della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il polinomio

$$\Delta_A(t) = \det(tI_n - A) \in \mathbb{K}[t].$$

Si dicono poi *autovalori* di A le radici del suo polinomio caratteristico $\Delta_A(t)$.

► **Osservazione 7.7.** Il polinomio caratteristico di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è un polinomio monico (cioè con coefficiente principale = 1) di grado n , a coefficienti in \mathbb{K} .

Posto:

$$\Delta_A(t) = t^n + \delta_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \delta_0,$$

ricordando che ogni addendo dello sviluppo del determinante contiene quale fattore uno e un solo elemento di ciascuna riga e di ciascuna colonna, si ottiene subito che il coefficiente di grado $n-1$ è:

$$\delta_{n-1} = -(a_1^1 + \cdots + a_n^n) = -\operatorname{Tr}(A),$$

dove $\operatorname{Tr}(A)$ indica la traccia della matrice A (si veda l'Esempio 5.5).

Inoltre il coefficiente di grado zero è

$$\delta_0 = \Delta_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Esempio 7.7. Consideriamo le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

I relativi polinomi caratteristici sono:

$$\Delta_{A_1}(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ -3 & t-3 & 0 \\ -7 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = t(t-2)(t-4);$$

$$\Delta_{A_2}(t) = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & 0 \\ 0 & t-3 & 0 \\ -4 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3)^2;$$

$$\Delta_{A_3}(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & -1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3)^2;$$

$$\Delta_{A_4}(t) = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 0 \\ 5 & t+3 & 0 \\ -7 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t^2+1).$$

Ne consegue che gli autovalori di A_1 sono 0, 2 e 4, gli autovalori di A_2 e di A_3 sono 2 e 3, mentre l'unico autovalore (reale) di A_4 è 2.

Si osservi che la stessa matrice A_4 , considerata in $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, ha tre autovalori (complessi): 2, i e $-i$.

Esempio 7.8. Sia $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici ortogonali di ordine n su \mathbb{R} (Definizione 3.21). Se n è dispari, allora l'unità 1 di \mathbb{R} è autovalore di ogni matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avente determinante uguale a 1.

Da $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$ segue infatti:

$$\begin{aligned}\det(I_n - A) &= \det(A^{-1}) \cdot \det(I_n - A) = \\ &= \det(A^{-1} \cdot (I_n - A)) = \det((A^{-1} \cdot I_n) - (A^{-1} \cdot A)) = \\ &= \det(A^{-1} - I_n) = \det({}^t A - I_n) = \det({}^t({}^t A - I_n)) = \\ &= \det(A - I_n) = (-1)^n \cdot \det(I_n - A) = -\det(I_n - A),\end{aligned}$$

e quindi $2 \cdot \det(I_n - A) = 0$, da cui si ottiene $\det(I_n - A) = 0$.

Ciò prova che 1 è radice del polinomio caratteristico $\Delta_A(t) = \det(tI_n - A)$ di A e pertanto che 1 è un autovalore di A .

Esempio 7.9. Sia $A = (a_{ij}^1) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Il polinomio caratteristico di A è

$$\Delta_A(t) = t^3 - (a_1^1 + a_2^2 + a_3^3)t^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_3^3 & a_1^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3^3 & a_1^3 \\ a_1^1 & a_2^1 \end{vmatrix} \right) t - \det A.$$

Più in generale, se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si può dimostrare che il coefficiente δ_m di grado $m < n$ del polinomio caratteristico di A si ottiene moltiplicando per $(-1)^{n-m}$ la somma dei determinanti di tutti i minori di ordine $n-m$ di A individuati da righe e colonne corrispondenti allo stesso sottoinsieme (di cardinalità $n-m$) di \mathbb{N}_n .

Esempio 7.10. Se $A = (a_{ij}^i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è una matrice triangolare alta o bassa (Definizione 3.16), allora il polinomio caratteristico di A è

$$\Delta_A(t) = (t - a_1^1)(t - a_2^2) \dots (t - a_n^n).$$

■ **Proposizione 7.8.** *Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e, di conseguenza, gli stessi autovalori e la stessa traccia.*

Dimostrazione. Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sono simili, sia $E \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $B = E^{-1} \cdot A \cdot E$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}\Delta_B(t) &= \det(tI_n - B) = \det(tI_n - E^{-1} \cdot A \cdot E) = \\ &= \det(E^{-1} \cdot (tI_n) \cdot E - E^{-1} \cdot A \cdot E) = \\ &= \det(E^{-1} \cdot (tI_n - A) \cdot E) = \\ &= \det(E^{-1}) \cdot \det(tI_n - A) \cdot \det E = \\ &= (\det E)^{-1} \cdot \det E \cdot \det(tI_n - A) = \\ &= \det(tI_n - A) = \Delta_A(t).\end{aligned}$$

□

La Proposizione 7.8 consente di formulare la seguente:

◆ **Definizione 7.9.** Sia T un operatore lineare su \mathbf{V}^n . Si dice *polinomio caratteristico* di T , e si indica con $\Delta_T(t)$, il polinomio caratteristico della matrice $A = M_B(T)$, associata a T relativamente a una qualunque base di \mathbf{V}^n .

Risulta ora immediato il seguente:

■ **Teorema 7.10.** *Gli autovalori di un operatore lineare T su \mathbf{V}^n sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico $\Delta_T(t)$.*

Pertanto, gli autovalori di T coincidono con gli autovalori di una qualunque matrice associata a T .

Dimostrazione. Per la Definizione 7.9 e per la Proposizione 7.5 (b), si ha che $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di T se e solo se $\Delta_T(\lambda) = 0$, cioè se e solo se λ è radice del polinomio $\Delta_T(t)$. □

◆ **Definizione 7.11.** Sia λ un autovalore dell'operatore lineare T di \mathbf{V}^n . Si dice *molteplicità algebrica* $\text{ma}(\lambda)$ di λ la molteplicità di λ quale radice del polinomio caratteristico $\Delta_T(t)$.

Si dice *molteplicità geometrica* $\text{mg}(\lambda)$ di λ la dimensione del relativo autospazio $\mathbf{U}_\lambda(T)$.

Si osservi che, se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è una matrice associata a T , allora la Proposizione 7.5 (a) implica che:

$$\text{mg}(\lambda) = \dim \mathbf{U}_\lambda = n - \varrho(\lambda I_n - A)$$

■ **Proposizione 7.12.** *Per ogni autovalore λ di T , si ha:*

$$1 \leq \text{mg}(\lambda) \leq \text{ma}(\lambda).$$

Dimostrazione. Poichè $\dim \mathbf{U}_\lambda > 0$, si ha $\text{mg}(\lambda) = h \geq 1$. Sia poi $\mathcal{B}_\lambda = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h)$ una base ordinata di \mathbf{U}_λ e $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-h})$ una base ordinata di \mathbf{V}^n ottenuta per completamento della base \mathcal{B}_λ (Proposizione 4.29).

Dal momento che, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, $T(\mathbf{e}_i) = \lambda \mathbf{e}_i$, la matrice A associata a T relativamente a \mathcal{B} sarà del tipo:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cc} \lambda & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & \end{array} \begin{array}{l} B \\ \\ \\ C \end{array} \right)$$

essendo B e C opportuni blocchi di tipo $h \times (n-h)$ e $(n-h) \times (n-h)$ rispettivamente. Il polinomio caratteristico di T sarà dunque

$$\Delta_T(t) = \Delta_A(t) = (t - \lambda)^h p(t),$$

essendo $p(t)$ un opportuno polinomio di grado $n-h$. Se ne deduce che la molteplicità algebrica di λ è $\geq h$. □

► **Osservazione 7.13.** Se $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ sono gli autovalori (distinti) dell'operatore lineare T su \mathbf{V}^n , allora per l'Osservazione A.9 e la Proposizione 7.12 si ha:

$$h \leq \sum_{i=1}^h \text{mg}(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^h \text{ma}(\lambda_i) \leq n.$$

Se il campo \mathbb{K} su cui \mathbf{V}^n è definito è algebricamente chiuso (Definizione A.10), allora il Teorema A.12 implica che

$$\sum_{i=1}^h \text{ma}(\lambda_i) = n$$

Anche in tal caso, però, la somma delle molteplicità geometriche può essere strettamente minore di n (si veda il successivo Esempio 7.7 bis).

Esempio 7.7 bis. Per $r = 1, 2, 3, 4$ sia T_r l'operatore lineare su \mathbb{R}^3 avente la matrice $A_r \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dell'Esempio 7.7 quale matrice associata, rispetto alla base naturale. Per ogni $r \in \mathbb{N}_4$, il polinomio caratteristico e gli autovalori di T_r coincidono con il polinomio caratteristico e con gli autovalori della corrispondente matrice A_r . Calcoliamo ora le molteplicità algebriche e geometriche dei singoli autovalori.

1) T_1 ha tre autovalori distinti: 0, 2 e 4 (ciascuno di molteplicità algebrica 1). Per la Proposizione 7.12, si ha pertanto $\text{mg}(0) = \text{mg}(2) = \text{mg}(4) = 1$.

2) T_2 ha autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ con $\text{ma}(2) = 1$, $\text{ma}(3) = 2$. Si ha inoltre

$$\text{mg}(2) = 1, \text{mg}(3) = 3 - \varrho(3I_3 - A) = 3 - 2 = 1.$$

Si osservi che

$$\sum_i \text{ma}(\lambda_i) = 3, \quad \text{mentre} \quad \sum_i \text{mg}(\lambda_i) = 2.$$

Le stesse relazioni continuano a valere anche considerando T_2 come operatore lineare su \mathbb{C}^3 .

3) T_3 ha autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, con $\text{ma}(2) = 1$, $\text{ma}(3) = 2$. Si ha inoltre

$$\text{mg}(2) = 1, \text{mg}(3) = 3 - \varrho(3I_3 - A) = 3 - 1 = 2.$$

Si osservi che, in questo caso, si ha

$$\sum_i \text{mg}(\lambda_i) = \sum_i \text{ma}(\lambda_i) = 3.$$

4) T_4 ha il solo autovalore reale $\lambda_1 = 2$, con $\text{ma}(2) = \text{mg}(2) = 1$. Si ha pertanto

$$\sum_i \text{mg}(\lambda_i) = \sum_i \text{ma}(\lambda_i) = 1 < 3$$

(si ricordi che, come provato nella Osservazione A.13, \mathbb{R} non è algebricamente chiuso). Gli autovalori di T_4 , considerato come operatore lineare su \mathbb{C}^3 , sono invece 2, i e $-i$. Avendo in questo caso T_4 tre autovalori complessi distinti, se ne deduce che ciascuno ha molteplicità algebrica 1 e molteplicità geometrica 1.

3. Diagonalizzazione di matrici e operatori lineari

Nel presente paragrafo studieremo il problema di determinare le condizioni affinché un dato operatore T su \mathbf{V}^n sia rappresentabile mediante una matrice diagonale o, equivalentemente, affinché una data matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sia simile a una matrice diagonale.

Ricordiamo che per *matrice diagonale* si intende una matrice $\Lambda \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, i cui elementi λ_j^i , con $i \neq j$, sono tutti nulli (Definizione 3.15). Spesso indicheremo con $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ la matrice diagonale avente la n -pla (a_1, \dots, a_n) quale diagonale principale.

◆ **Definizione 7.14.** Si dice *base spettrale* relativa all'operatore lineare T una base B^S di \mathbf{V}^n , formata da autovettori di T .

► **Osservazione 7.15.** Se la matrice $M_B(T)$, associata all'operatore lineare T su \mathbf{V}^n relativamente alla base ordinata B di \mathbf{V}^n , è la matrice diagonale $\Lambda = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, allora B è una base spettrale (ordinata) di \mathbf{V}^n .

Posto $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, si ha infatti:

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad T(\mathbf{e}_i) = a_i \cdot \mathbf{e}_i.$$

In altre parole, \mathbf{e}_i è un autovettore non nullo di T relativo all'autovalore a_i .

Supponiamo viceversa che \mathbf{V}^n ammetta una base spettrale B^S relativa a T e che $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ siano gli autovalori (distinti) di T . Allora è possibile ordinare i vettori di B^S in modo da ottenere una base spettrale ordinata

$$B^S = (\mathbf{e}_1^1, \dots, \mathbf{e}_{r_1}^1, \mathbf{e}_1^2, \dots, \mathbf{e}_{r_2}^2, \dots, \mathbf{e}_1^h, \dots, \mathbf{e}_{r_h}^h)$$

tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, i vettori $\mathbf{e}_1^i, \dots, \mathbf{e}_{r_i}^i$ appartengono all'autospazio \mathbf{U}_{λ_i} relativo a λ_i .

Dal momento che, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$,

$$r_i \leq \dim \mathbf{U}_{\lambda_i} = \text{mg}(\lambda_i)$$

e che

$$\sum_{i=1}^h r_i = n,$$

per l'Osservazione 7.13 si ricava

$$r_i = \text{mg}(\lambda_i) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^h \text{mg}(\lambda_i) = n.$$

Pertanto, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, $(\mathbf{e}_1^i, \dots, \mathbf{e}_{r_i}^i)$ è una base (ordinata) per \mathbf{U}_{λ_i} e la matrice associata a T relativamente alla base spettrale B^S è la matrice diagonale

$$\Lambda = \text{diag} \left(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{(r_1 \text{ volte})}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{(r_2 \text{ volte})}, \dots, \underbrace{\lambda_h, \dots, \lambda_h}_{(r_h \text{ volte})} \right),$$

dove ogni autovalore λ_i è ripetuto $r_i = \text{mg}(\lambda_i)$ volte.

◆ **Definizione 7.16.** Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è detta *diagonalizzabile per similitudine* se esiste una matrice diagonale $\Lambda \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ simile ad A .

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per provare la seguente:

■ Proposizione 7.17. (Teorema spettrale) *Sia A la matrice associata all'operatore lineare $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$, relativamente a una qualunque base \mathcal{B} di \mathbf{V}^n . Siano poi $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ gli autovalori (distinti) di T (o, equivalentemente, di A) e $\mathbf{U}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{U}_{\lambda_h}$ i relativi autospazi. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (a) A è diagonalizzabile per similitudine;
- (b) \mathbf{V}^n ammette una base spettrale relativa a T ¹;
- (c) $\sum_{i=1}^h \text{mg}(\lambda_i) = n$;
- (d) $\mathbf{V}^n = \bigoplus_{i=1}^h \mathbf{U}_{\lambda_i}$.

Dimostrazione. Proveremo l'equivalenza delle affermazioni secondo il seguente schema:

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$$

$(a) \Leftrightarrow (b)$. La dimostrazione si ottiene direttamente dall'Osservazione 7.15, facendo uso della caratterizzazione delle matrici simili come associate allo stesso operatore lineare relativamente a basi diverse (Teorema 5.38).

$(b) \Rightarrow (c)$. La dimostrazione è contenuta nell'Osservazione 7.15.

$(c) \Rightarrow (b)$. Se

$$\sum_{i=1}^h \text{mg}(\lambda_i) = n,$$

posto $r_i = \text{mg}(\lambda_i) = \dim \mathbf{U}_{\lambda_i}$, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, sia $B_{\lambda_i} = \{\mathbf{e}_1^i, \dots, \mathbf{e}_{r_i}^i\}$ una base di \mathbf{U}_{λ_i} . In virtù della Proposizione 7.3, l'insieme di n vettori (non nulli e distinti)

$$B^S = \{\mathbf{e}_1^1, \dots, \mathbf{e}_{r_1}^1, \mathbf{e}_1^2, \dots, \mathbf{e}_{r_2}^2, \dots, \mathbf{e}_1^h, \dots, \mathbf{e}_{r_h}^h\}$$

è linearmente indipendente e costituisce quindi, per il Teorema 4.28 (a), una base (spettrale) di \mathbf{V}^n .

$(c) \Leftrightarrow (d)$. È conseguenza immediata del Corollario 7.4 e della Proposizione 4.42. □

■ Corollario 7.18. *Se l'operatore lineare T su \mathbf{V}^n ammette n autovalori distinti, allora \mathbf{V} ammette una base spettrale relativa a T .*

Dimostrazione. Poichè ogni autovalore ha molteplicità geometrica ≥ 1 , per l'Osservazione 7.13, si ha

$$\sum_{i=1}^n \text{mg}(\lambda_i) = n.$$

□

Esempio 7.7 ter. Verifichiamo se esistono basi spettrali relative agli operatori lineari $T_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'Esempio 7.7 bis.

¹In tal caso T è spesso detto *semplice*.

1) T_1 ha tre autovalori distinti 0, 2, 4 e quindi ammette una base spettrale per il Corollario 7.18; la matrice A_1 è simile alla matrice diagonale

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) T_2 non ammette una base spettrale, in quanto la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori 2 e 3 è $1 + 1 = 2 < 3$. Quindi la matrice A_2 non è diagonalizzabile per similitudine.

3) T_3 ammette una base spettrale, in quanto la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori 2 e 3 è $1 + 2 = 3$. La matrice A_3 è simile alla matrice diagonale

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) T_4 , definito su \mathbb{R}^3 , non ammette una base spettrale, in quanto il suo unico autovalore (reale) 2 ha molteplicità 1. Pertanto A_4 non è diagonalizzabile per similitudine (su \mathbb{R}).

T_4 ammette una base spettrale, se è, invece, definito su \mathbb{C}^3 , in quanto ammette tre autovalori distinti 2, i , $-i$. In tal caso A_4 è simile alla matrice diagonale

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Esempio 7.11. Determiniamo una base spettrale relativa all'operatore lineare T_3 considerato nell'esempio precedente. Ricordando la Proposizione 7.5 (a), poichè la matrice associata a T_3 relativamente alla base naturale di \mathbb{R}^3 è A_3 ,

$$\mathbf{U}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0, y = 0\},$$

$$\mathbf{U}_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}.$$

Basi per \mathbf{U}_2 e \mathbf{U}_3 sono rispettivamente

$$B_2 = \{(1, 0, -1)\} \quad \text{e} \quad B_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Una base spettrale di \mathbb{R}^3 , relativa a T_3 , ordinata come indicato nell'Osservazione 7.15, è quindi:

$$\mathcal{B}^S = ((1, 0, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)).$$

Si osservi che la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B}^S alla base naturale $\tilde{\mathcal{B}}$ di \mathbb{R}^3 è

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha inoltre

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e

$$E^{-1}A_3E = \Lambda_3.$$

Concludiamo il capitolo con il seguente importante risultato, che assicura la diagonalizzabilità per similitudine di tutte le matrici simmetriche reali. La dimostrazione sarà effettuata nella Appendice B (Teorema B.1), utilizzando nozioni che saranno introdotte nel successivo Capitolo 8.

■ **Teorema 7.19.** *Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Allora, esiste una matrice ortogonale $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tale che*

$$E^{-1} \cdot A \cdot E = {}^tE \cdot A \cdot E = D,$$

con D matrice di tipo diagonale.

□

TEST DI VALUTAZIONE - I PARTE

I seguenti quesiti, organizzati in due batterie, ciascuna composta da dieci quiz, possono essere utilizzati dagli studenti come autoverifica di apprendimento relativa alla prima parte del Corso riguardante argomenti di Algebra Lineare.

Per ogni domanda vengono proposte quattro possibili risposte, delle quali una sola è corretta: si consiglia lo studente, al fine di valutare nel modo più completo possibile il proprio livello di comprensione delle tematiche trattate, di non limitarsi alla sola individuazione dell'unica risposta giusta, ma di tentare anche di comprendere i motivi che rendono errate le altre tre risposte.

Volendo attribuire una valutazione in trentesimi alla propria risoluzione di ciascuna batteria di quiz, lo studente potrebbe, ad esempio, attribuire 3 punti ad ogni risposta corretta, sottraendo 1 punto per ogni risposta errata.

Le risposte corrette, insieme a qualche indicazione sulle conoscenze necessarie per un competente approccio ad ogni singolo quesito, sono disponibili come contenuti online extra del testo: si veda <http://textincloud.editrice-esculapio.com>

PRIMO TEST DI AUTOVALUTAZIONE - parte I

1. Per quale dei seguenti polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t il numero 5 è radice di molteplicità due?

- (a) $(t - 5)^2 - (t + 5)^2$
- (b) $(t - 5) \cdot (t^2 - 25)$
- (c) $(t + 1) \cdot (t^2 - 25)$
- (d) $(t - 5)^2 \cdot (t^2 - 25)$

2. Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con \mathbb{K} campo, ammette inversa se e solo se:

- (a) ${}^t A$ ammette inversa
- (b) ogni suo elemento ammette inverso
- (c) non contiene righe o colonne nulle
- (d) è ortogonale

3. Se $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, quale tra le seguenti trasformazioni attuate su A produce una matrice B tale che $\det A = -\det B$?

- (a) sommare alla prima riga di A tutte le righe di A
- (b) sottrarre alla prima riga di A tutte le altre righe di A
- (c) moltiplicare la prima riga di A per -1 e scambiare tra loro le prime due colonne della matrice ottenuta
- (d) effettuare una permutazione di classe dispari sull'insieme delle righe di A

4. Quale tra i seguenti sottoinsiemi X di \mathbb{R}^3 è un suo sottospazio vettoriale?

- (a) $X = \{(1, 1, 1)\}$
- (b) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.
- (c) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 0\}$
- (d) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0, x + 2y + z = 1\}$

5. Se $\dim \mathbf{V} = n$ e $X \subset \mathbf{V}$ ha m elementi, con $m < n$, allora necessariamente:

- (a) X è linearmente dipendente
- (b) X è linearmente indipendente
- (c) X è un sistema di generatori di \mathbf{V}
- (d) X non è un sistema di generatori di \mathbf{V}

6. Sia $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una trasformazione lineare. Allora:

- (a) $\text{Im}(T)$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{W} , con $\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim \mathbf{V}$
- (b) $\text{Ker}(T) = T(0_{\mathbf{V}})$
- (c) se H è un sistema di generatori per \mathbf{V} , allora $T(H)$ è un sistema di generatori per \mathbf{W}
- (d) se $H \subset \mathbf{V}$ è un insieme linearmente indipendente, allora $T(H) \subset \mathbf{W}$ è un insieme linearmente indipendente

7. Dato uno spazio vettoriale V e due sue basi ordinate B e \bar{B} , la matrice del cambiamento di base da B a \bar{B} ha:

- (a) come righe le componenti dei vettori di B rispetto a \bar{B}
- (b) come colonne le componenti dei vettori di B rispetto a \bar{B}
- (c) come righe le componenti dei vettori di \bar{B} rispetto a B
- (d) come colonne le componenti dei vettori di \bar{B} rispetto a B

8. Nell'insieme di tutti i sistemi lineari di 4 equazioni in 5 incognite a coefficienti reali, nei quali il rango della matrice incompleta è 4:

- (a) tutti i sistemi hanno esattamente una soluzione
- (b) ci sono sistemi che hanno esattamente 5 soluzioni
- (c) ci sono sistemi che non hanno soluzioni
- (d) tutti i sistemi hanno infinite soluzioni

9. Sia $A \cdot (x) = (b)$ un sistema di Cramer in n incognite. Allora:

- (a) $\det A = 0$
- (b) il sistema ha esattamente n soluzioni
- (c) l'unica soluzione del sistema è data da $A^{-1} \cdot (b)$
- (d) l'unica soluzione del sistema è data da $(b) \cdot A^{-1}$

10. Siano λ_1 e λ_2 due autovalori distinti di $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ con $\text{ma}(\lambda_1) = 1$ e $\text{ma}(\lambda_2) = 2$. Quale tra le seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- (a) A è diagonalizzabile per similitudine in \mathbb{K}
 - (b) gli autospazi U_{λ_1} e U_{λ_2} sono indipendenti
 - (c) l'autospazio U_{λ_2} ha dimensione due
 - (d) se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la matrice A è diagonalizzabile per similitudine in \mathbb{C} .
-

SECONDO TEST DI AUTOVALUTAZIONE - parte I

1. Quale tra le seguenti affermazioni è (in generale) falsa?

- (a) se $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ è un anello, allora ogni elemento di \mathbb{A} ammette opposto
- (b) se $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ è un anello, allora possono esistere $a, b \in \mathbb{A} - \{0\}$, tali che $a \cdot b = 0$
- (c) se $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un campo, allora ogni elemento di \mathbb{K} ammette inverso
- (d) se $(\mathbb{G}, +)$ è un gruppo, allora ogni elemento di \mathbb{G} ammette opposto

2. Se $A = (a_{ij}^i)$ è una matrice reale $n \times n$, la matrice inversa di A :

- (a) esiste se e solo se A è diversa dalla matrice nulla
- (b) esiste se e solo se gli elementi di A sono tutti diversi da 0
- (c) esiste se e solo se $\det A \neq 0$, e in tal caso il suo generico elemento di posizione (i, j) è $\frac{A_{ji}^j}{\det A}$, dove A_{ji}^j è il complemento algebrico dell'elemento a_{ji}^j di A
- (d) è quella matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qualora esista, per cui $A \cdot B = B \cdot A$ e tale prodotto è la matrice di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ in cui ogni elemento è uguale a 1

3. Nella somma di prodotti che definisce il determinante della matrice $A = (a_{ij}^i) \in \mathcal{M}_6(\mathbb{K})$, il fattore a_1^1 compare:

- (a) 5 volte
- (b) 6 volte
- (c) 6! volte
- (d) 5! volte

4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. Le componenti del vettore $\mathbf{v} = (-1, 2, -1) \in \mathbf{W}$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = ((1, 1, -2), (-2, 1, 1))$ di \mathbf{W} sono:

- (a) $(-1, 2, -1)$
- (b) $(1, 1)$
- (c) $(1, 1, 0)$
- (d) $(1, -1)$

5. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi in t a coefficienti reali, la chiusura lineare dell'insieme $X = \{2, 2t^2, 2t^2 + 2t^4\}$ è:

- (a) l'insieme X stesso
- (b) tutto $\mathbb{R}[t]$
- (c) il sottospazio vettoriale costituito dai polinomi di grado ≤ 4 i cui coefficienti sono interi pari
- (d) il sottospazio vettoriale costituito dai polinomi di grado ≤ 4 i cui coefficienti dei termini di grado dispari sono nulli

6. Siano \mathbf{V}, \mathbf{V}' due spazi vettoriali di dimensione due sul campo \mathbb{K} . Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \mathbf{V}$ è linearmente dipendente e $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\} \subset \mathbf{V}'$ è linearmente indipendente, quante trasformazioni lineari $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ esistono, per cui $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$ e $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$?

- (a) nessuna
- (b) esattamente due
- (c) esattamente una
- (d) infinite

7. Se $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ ha rango 3, allora:

- (a) tutti i minori di ordine 4 di A hanno determinante nullo
- (b) gli unici minori di ordine 4 di A aventi determinante nullo sono gli orlati di un minore di ordine 3 con determinante non nullo
- (c) tutti i minori di ordine 2 di A hanno determinante non nullo
- (d) $\det(A) \neq 0$

8. Sia $\mathbf{S} = (A, \mathbf{b})$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite, e sia C la sua matrice completa. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

- (a) se \mathbf{S} è omogeneo, allora la somma di due soluzioni di \mathbf{S} è una soluzione di \mathbf{S}
- (b) se $\text{Sol}(\mathbf{S})$ è vuoto, allora A deve avere almeno due colonne uguali
- (c) se il numero di equazioni è strettamente maggiore del numero delle incognite, allora \mathbf{S} non può ammettere soluzioni
- (d) se il numero di equazioni è strettamente minore del numero delle incognite, allora A e C non possono avere lo stesso rango

9. Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale \mathbf{V} di dimensione 5, rappresentato dalla matrice A rispetto a una fissata base ordinata. Se 42 NON è un autovalore di T , allora:

- (a) per nessun $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ vale $T(\mathbf{v}) = 42\mathbf{v}$
- (b) $\det(42I_5 - A) \neq 0$
- (c) $\dim(U_{42}(T)) \neq 0$
- (d) il polinomio caratteristico di A è divisibile per $(t - 42)$

10. Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per similitudine in \mathbb{R} se e solo se:

- (a) le colonne di A formano una base spettrale di \mathbb{R}^n
 - (b) la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali è uguale a n
 - (c) A ha tutti gli autovalori distinti
 - (d) A è regolare
-

Spazi vettoriali euclidei

1. Prodotti scalari e norme

In tutto il presente capitolo, il simbolo \mathbf{V} indicherà sempre uno *spazio vettoriale reale*. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha|$ denoterà il valore assoluto di α .

♦ **Definizione 8.1.** Si dice *prodotto scalare* su \mathbf{V} una applicazione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, risultino soddisfatte le seguenti proprietà:

$$(PS1) \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle; \quad \langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle;$$

$$(PS2) \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle;$$

$$(PS3) \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0; \quad (\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{v} = \mathbf{0}).$$

La coppia $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è detta *spazio vettoriale euclideo (reale)*.

Ovviamente, la proprietà (PS1) equivale a richiedere che, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si abbia:

$$(PS\bar{1}) \quad \langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.$$

D'altra parte, in virtù dell'assioma (PS2), la proprietà (PS1) può essere sostituita, nella definizione 8.1, dalla proprietà

$$(PS1') \quad \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle; \quad \langle \alpha \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle,$$

così come la proprietà $(PS\bar{1})$ può essere sostituita dalla proprietà

$$(PS\bar{1}') \quad \langle \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \beta \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle.$$

È poi immediato verificare che, se $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio vettoriale euclideo e $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, si ha:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0;$$

inoltre,

(ND) se $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ è tale che, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0$ (risp. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0$), allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Si usa esprimere il fatto che ogni prodotto scalare gode delle proprietà (PS1)-(PS1') (o, equivalentemente, $(PS\bar{1})$ -($PS\bar{1}'$)), (PS2), (PS3) e (ND) dicendo che *ogni prodotto scalare è bilineare, simmetrico, definito positivo e non degenerare*.

► **Osservazione 8.2.** Sia $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia \mathbf{U} un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} . La restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ è, come è facile verificare, un prodotto scalare sullo spazio vettoriale (reale) \mathbf{U} . In altri termini, *ogni sottospazio vettoriale di \mathbf{V} eredita una struttura di spazio vettoriale euclideo* e viene anche detto, pertanto, *sottospazio vettoriale euclideo di $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$* .

Sia ora $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. Poichè $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo (assioma (PS3)), è possibile introdurre la seguente

◆ **Definizione 8.3.** Sia $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, si dice *lunghezza o norma (euclidea)* di \mathbf{v} il numero reale non negativo

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

L'applicazione

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbf{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\rightarrow \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

si dice *norma indotta dal prodotto scalare*.

Un vettore \mathbf{v} con $\|\mathbf{v}\| = 1$ sarà detto *versore*.

■ **Proposizione 8.4.** Sia $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. La norma indotta dal prodotto scalare gode, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, delle seguenti proprietà:¹

- (a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$; $(\|\mathbf{v}\| = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{v} = \mathbf{0})$
- (b) $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$
- (c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (disuguaglianza di Minkowski²)
- (d) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ (disuguaglianza di Schwarz³)
- (e) $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \pm 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$

Dimostrazione. (a) La proprietà (a) discende banalmente dalla Definizione 8.3 e dall'assioma (PS3).

(b) Per dimostrare la proprietà (b), basta utilizzare la definizione di norma e la bilinearità del prodotto scalare:

$$\|\alpha\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \alpha\mathbf{v}, \alpha\mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

Prima di dimostrare le altre proprietà osserviamo che, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, per la bilinearità e simmetria del prodotto scalare si ha:

$$\begin{aligned} (*) \quad \langle \mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \beta^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \beta^2 \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

(d) Si osservi che, se almeno uno dei vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} è nullo, la disuguaglianza di Schwarz è banalmente verificata; possiamo dunque supporre $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Essendo il prodotto scalare definito positivo, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\langle \mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \rangle \geq 0.$$

¹Si noti che le proprietà (a), (b), (c) della presente Proposizione caratterizzano, in generale, la nozione di *norma* in uno spazio vettoriale reale.

²Hermann Minkowski: matematico lituano (Aleksotas, 1864 - Gottinga, 1909).

³Karl Hermann Schwarz: matematico tedesco (Hermsdorf, 1843 - Berlino, 1921).

Poichè il trinomio in β contenuto nell'ultimo termine della relazione (*) ha il coefficiente del termine di secondo grado sempre positivo, segue:

$$\frac{\Delta}{4} = (< \mathbf{u}, \mathbf{v} >)^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 \leq 0.$$

Tenuto conto che si ha $\|\mathbf{u}\| > 0$, $\|\mathbf{v}\| > 0$, segue subito (d).

(e) Sostituendo $\beta = \pm 1$, la relazione (*) fornisce direttamente la proprietà (e):

$$\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = < \mathbf{u} \pm \mathbf{v}, \mathbf{u} \pm \mathbf{v} > = \|\mathbf{u}\|^2 \pm 2 < \mathbf{u}, \mathbf{v} > + \|\mathbf{v}\|^2.$$

(c) Applicando le proprietà (e) e (d), si ottiene:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2 < \mathbf{u}, \mathbf{v} > + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2 | < \mathbf{u}, \mathbf{v} > | + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2. \end{aligned}$$

Poichè si ha $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \geq 0$, $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq 0$, dalla precedente disuguaglianza tra i loro quadrati segue subito:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

□

Esempio 8.1. (Lo spazio vettoriale euclideo standard n -dimensionale) L'applicazione $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$, $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} > = \sum_{i=1}^n a^i b^i$$

è un prodotto scalare sullo spazio vettoriale standard n -dimensionale \mathbb{R}^n ; esso è detto *prodotto scalare naturale* su \mathbb{R}^n . La coppia $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$ è detta *spazio vettoriale euclideo standard n -dimensionale*.

Si noti che il prodotto scalare naturale su \mathbb{R}^n è un caso particolare del prodotto naturale di due n -ple di un generico \mathbb{K}^n , definito nel § 1 del Capitolo 3 e indicato con lo stesso simbolo $< \cdot, \cdot >$.

La norma indotta (in base alla Definizione 8.3) su \mathbb{R}^n dal prodotto scalare naturale è la applicazione $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita, per ogni $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$, da:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i)^2}$$

Essa viene detta *norma euclidea naturale* su \mathbb{R}^n .

Esempio 8.2. Sia $\mathbb{R}[t]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi nella indeterminata t , a coefficienti in \mathbb{R} . Se

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \quad q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m, \quad n \leq m,$$

l'applicazione $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ che alla coppia $(p(t), q(t))$ associa

$$< p(t), q(t) > = \sum_{i=0}^n a_i b_i$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}[t]$.

Ad esempio, se $p(t) = 1 - t^2$, $q(t) = t + 3t^3$, allora $\langle p(t), q(t) \rangle = 0$.

Evidentemente, per ogni $r \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^r[t], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è un sottospazio vettoriale euclideo di $(\mathbb{R}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Esempio 8.3. Un altro esempio di prodotto scalare, molto importante per le applicazioni, sullo spazio $\mathbb{R}[t]$ si ottiene come segue.

Fissate arbitrariamente una coppia (α, β) di elementi distinti di \mathbb{R} , con $\alpha < \beta$, sia

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p(t), q(t)) \rightarrow \langle p(t), q(t) \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} p(t) \cdot q(t) dt$$

l'applicazione che associa a ogni coppia $(p(t), q(t))$ di polinomi l'integrale definito da α a β del polinomio prodotto $p(t) \cdot q(t)$; le proprietà dell'integrale provano che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}[t]$.

Ad esempio, se $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $p(t) = 1 - t^2$, $q(t) = t + 3t^3$, allora:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 (1 - t^2)(t + 3t^3) dt = \int_0^1 (t + 2t^3 - 3t^5) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Inoltre, se $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$, si ha:

$$\|p(t)\| = \sqrt{\langle p(t), p(t) \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (p(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

Esempio 8.4. Considerazioni analoghe a quelle dell'esempio precedente possono essere fatte sostituendo $\mathbb{R}[t]$ con lo spazio vettoriale $\mathbf{C}^0([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$ delle funzioni continue reali, definite sull'intervallo $[\alpha, \beta] = \{t \in \mathbb{R} / \alpha \leq t \leq \beta\}$, e definendo allo stesso modo il prodotto scalare. Si osservi che, identificando ogni polinomio con la corrispondente funzione polinomiale, lo spazio $(\mathbb{R}[t], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ definito nell'Esempio 8.3 può essere considerato un sottospazio euclideo di $(\mathbf{C}^0([\alpha, \beta]; \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Esempio 8.5. Sia

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longrightarrow \langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t B) \end{aligned}$$

l'applicazione che a ogni coppia (A, B) di matrici di tipo $m \times n$, fa corrispondere la traccia della matrice (quadrata di ordine m) $A \cdot {}^t B$, ovvero la somma degli elementi della sua diagonale principale (Esempio 5.5).

Se $A = (a_j^i)$, $B = (b_j^i)$, $A \cdot {}^t B = (c_k^i)$, allora:

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot {}^t B) = \sum_{i=1}^m c_i^i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_j^i b_j^i.$$

È dunque semplice verificare che l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare sullo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Esempio 8.6. Sia \mathcal{F} lo "spazio euclideo elementare". Fissato un punto $O \in \mathcal{F}$, sia

$$\mathcal{F}(O) = \{(O, P) \mid P \in \mathcal{F}\}$$

il sostegno dello "spazio vettoriale dei vettori applicati", considerato nell'Esempio 4.1; sia poi $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{F}(O) \times \mathcal{F}(O) \rightarrow \mathbb{R}$ la applicazione definita mediante

$$\langle (O, P), (O, Q) \rangle = d(O, P) \cdot d(O, Q) \cdot \cos(\widehat{POQ}),$$

dove $d(O, X)$, per ogni punto X , indica la lunghezza del segmento di estremi O e X . Non è difficile verificare che tale applicazione è un *prodotto scalare* sullo spazio vettoriale reale $\mathcal{F}(O)$; $(\mathcal{F}(O), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ risulta pertanto uno spazio vettoriale euclideo di dimensione tre.

Esempio 8.7. L'applicazione $\prec \cdot, \succ: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $\mathbf{u} = (x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{v} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\prec \mathbf{u}, \mathbf{v} \succ = x^1 y^1 + 2x^2 y^2 - x^1 y^2 - x^2 y^1 + x^3 y^3$$

è un prodotto scalare (non naturale) sullo spazio vettoriale standard \mathbb{R}^3 : infatti, esso gode banalmente delle proprietà (PS1) e (PS2), mentre la proprietà (PS3) si verifica osservando che $\prec \mathbf{u}, \mathbf{u} \succ = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 - 2x^1 x^2 + (x^3)^2 = (x^1 - x^2)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. La coppia $(\mathbb{R}^3, \prec \cdot, \succ)$ è quindi uno spazio vettoriale euclideo di dimensione tre, diverso dallo spazio vettoriale euclideo standard di dimensione tre, ma avente lo stesso sostegno.

Nel seguito del capitolo indicheremo spesso, con abuso di linguaggio e per brevità di notazioni, lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ semplicemente con \mathbf{V} , sottintendendo, come già fatto per le operazioni $+$ e \cdot , il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ che ne completa la struttura.

Denoteremo inoltre con lo stesso simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i prodotti scalari definiti nei vari spazi vettoriali euclidei considerati, anche se, in generale, tali prodotti risulteranno distinti. Analogamente, il simbolo $\|\cdot\|$ indicherà sempre la norma euclidea indotta dal prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su un qualunque spazio vettoriale euclideo.

◆ **Definizione 8.5.** Due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si dicono *ortogonali*, e si scrive $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Si osservi che il vettore nullo $\mathbf{0}$ è ortogonale a ogni altro vettore di \mathbf{V} ed è inoltre l'unico vettore ortogonale a se stesso.

■ **Proposizione 8.6.** Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, si ha:

$$(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0) \Leftrightarrow (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2).$$

Dimostrazione. È conseguenza immediata della Proposizione 8.4(e). □

► **Osservazione 8.7.** Le due implicazioni \Rightarrow e \Leftarrow della precedente proposizione sono note rispettivamente come *Teorema di Pitagora*⁴ e suo inverso.

⁴*Pitagora di Samo*: matematico e filosofo greco (Samo, 580 a.C. - Metaponto, 504 a.C.).

Tenuto conto della Definizione 8.3, si usa enunciare tale risultato dicendo che *due vettori sono ortogonali se e solo se la somma dei quadrati delle loro lunghezze coincide con il quadrato della lunghezza della loro somma*.

♦ **Definizione 8.8.** Siano \mathbf{u}, \mathbf{v} vettori non nulli di \mathbf{V} . Si dice *coseno dell'angolo tra \mathbf{u} e \mathbf{v}* il numero reale

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}.$$

Si osservi che, per la simmetria del prodotto scalare, *il coseno dell'angolo tra due vettori non dipende dall'ordine dei vettori*.

► **Osservazione 8.9.** Dalla disuguaglianza di Schwarz $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ segue subito

$$\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

e quindi

$$-1 \leq \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 1.$$

Supponendo nota la funzione trigonometrica coseno e ricordando che la sua restrizione all'intervallo chiuso $[0, \pi]$ è biunivoca (Esempio 1.5), risulta pertanto naturale definire *misura dell'angolo (convesso) tra \mathbf{u} e \mathbf{v}* il numero reale $\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} \in [0, \pi]$ univocamente determinato dalla condizione

$$\cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Tenuto conto della Definizione 8.8, si ha quindi che *due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} sono ortogonali se e solo se la misura dell'angolo tra \mathbf{u} e \mathbf{v} è $\frac{\pi}{2}$* .

► **Osservazione 8.10.** L'uguaglianza

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\text{Proposizione 8.4(e)})$$

può essere espressa, tenendo conto della Definizione 8.8, nel modo seguente:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

In tale forma, l'uguaglianza è nota come *Teorema di Carnot*⁵.

2. Basi ortonormali

Nel presente paragrafo, il simbolo \mathbf{V} indicherà sempre uno spazio vettoriale euclideo; il simbolo \mathbf{V}^n indicherà invece uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n .

♦ **Definizione 8.11.** Un sottoinsieme X di \mathbf{V} si dice *ortogonale* se, per ogni coppia (\mathbf{u}, \mathbf{v}) di vettori distinti di X , si ha $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Un sottoinsieme ortogonale X di \mathbf{V} si dice *ortonormale* se, per ogni $\mathbf{u} \in X$, si ha $\|\mathbf{u}\| = 1$.

In altre parole, X è *ortonormale* se i suoi vettori sono versori a due a due ortogonali. Si osservi che un sottoinsieme finito $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h\}$ di \mathbf{V} è ortonormale se e solo se, per ogni $i, j \in \mathbb{N}_h$, si ha $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$.

⁵Sadi Carnot: fisico francese (Parigi, 1796 - 1832).

■ **Proposizione 8.12.** *Ogni sottoinsieme ortogonale X di \mathbf{V} non contenente il vettore nullo è linearmente indipendente.*

Dimostrazione. Sia $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_h)$ una h -pla di vettori distinti di X , tale che

$$\sum_{i=1}^h \alpha^i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Per ogni $j \in \mathbb{N}_h$, posto $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle = \beta^j$, si ha allora:

$$0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^h \alpha^i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^h \alpha^i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^h \alpha^i \beta^j \delta_{ij} = \alpha^j \beta^j.$$

Essendo $\beta^j \neq 0$, ciò prova che $\alpha^j = 0$. X è dunque linearmente indipendente. \square

◆ **Definizione 8.13.** Un sottoinsieme B di \mathbf{V} è detto *base ortogonale* (risp. *ortonormale*) di \mathbf{V} se: (i) B è una base di \mathbf{V} ; (ii) B è ortogonale (risp. ortonormale).

Dalla Proposizione 8.12 e dal Teorema 4.28 segue subito il seguente

■ **Corollario 8.14.** *Ogni sottoinsieme ortogonale X di \mathbf{V}^n non contenente il vettore nullo ha cardinalità $h \leq n$. Inoltre, X è una base ortogonale di \mathbf{V}^n se e solo se $h = n$.*

Esempio 8.8. Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n (Esempio 8.1), la base naturale è ortonormale.

Esempio 8.9. Nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^2 , la base (ordinata) $\mathcal{B} = ((1, 1), (2, -2))$ è ortogonale, ma non ortonormale, in quanto

$$\langle (1, 1), (2, -2) \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0$$

ma

$$\|(1, 1)\| = \sqrt{2}, \quad \|(2, -2)\| = 2\sqrt{2}.$$

La base $\bar{\mathcal{B}} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$ è invece ortonormale.

Esempio 8.10. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}[t]$ dell'Esempio 8.2, l'insieme $\{1, t, t^2, \dots, t^r\}$ (Esempio 4.10 bis) è una base ortonormale per il sottospazio $\mathbb{R}^r[t]$, per ogni $r \geq 0$.

Esempio 8.11. Sia $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale euclideo descritto nell'Esempio 8.5. La base $\bar{B} = \{\tilde{E}_j^i \mid i \in \mathbb{N}_m, j \in \mathbb{N}_n\}$ costruita negli Esempi 4.9 e 4.9 bis è ortonormale.

Il seguente risultato prova l'esistenza di basi ortonormali in ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita \mathbf{V}^n ; il procedimento utilizzato nella sua dimostrazione (noto come *procedimento (di ortonormalizzazione) di Gram⁶ - Schmidt⁷*) riveste una

⁶Jorgen Pedersen Gram: matematico danese (Nastrup, 1850 - 1916).

⁷Erhard Schmidt: matematico estone (Dorpat, 1876 - 1959).

notevole importanza, perché consente di ottenere - in modo costruttivo - una base ortonormale di \mathbf{V}^n a partire da una sua qualunque base ordinata.

■ **Proposizione 8.15.** *Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita \mathbf{V}^n ammette una base ortonormale.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una qualunque base ordinata di \mathbf{V}^n . A partire da \mathcal{B} , costruiamo la n -pla $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di \mathbf{V}^n , nel seguente modo induttivo:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} \cdot \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 \rangle}{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} \cdot \mathbf{e}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_n &= \mathbf{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle} \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Poichè, per costruzione, si ha $\mathbf{e}_h \in \mathbf{L}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h\})$ ($h \in \mathbb{N}_n$), è facile verificare che ognuno degli n vettori \mathbf{e}_h ($h \in \mathbb{N}_n$) è non nullo: infatti, $\mathbf{e}_h = \mathbf{0}$ implicherebbe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{L}(\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{h-1}\}) \subseteq \mathbf{L}(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{h-1}\})$, che è ovviamente un assurdo, per la lineare indipendenza di \mathcal{B} .

D'altra parte, il principio di induzione (pag. 8) permette di dimostrare che, per ogni $h \in \mathbb{N}_n$, il vettore \mathbf{e}_h è ortogonale a \mathbf{e}_j , con $j \leq h-1$. Infatti, l'affermazione è banalmente vera nel caso $h=1$, e risulta vera per il generico vettore \mathbf{e}_h , una volta supposta vera per ogni vettore \mathbf{e}_k , con $k \leq h-1$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_h \rangle &= \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_h - \sum_{i=1}^{h-1} \frac{\langle \mathbf{v}_h, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle} \cdot \mathbf{e}_i \rangle = \\ &= \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_h \rangle - \sum_{i=1}^{h-1} \frac{\langle \mathbf{v}_h, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_h \rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_h, \mathbf{e}_j \rangle}{\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Quindi, per il Corollario 8.14, $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ è una base ortogonale di \mathbf{V}^n .

A questo punto, per ottenere una base ortonormale di \mathbf{V}^n basta considerare $\mathcal{B}'' = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$, dove, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$,

$$\mathbf{f}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|}$$

□

Esempio 8.12. Sia $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ la base dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^3 , costituita dai vettori $\mathbf{v}_1 = (2, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 0, 2)$. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (2, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (1, 1, 1) - \frac{\langle (1, 1, 1), (2, 0, 0) \rangle}{\langle (2, 0, 0), (2, 0, 0) \rangle} \cdot (2, 0, 0) = (1, 1, 1) - \frac{2}{4}(2, 0, 0) = (0, 1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= (3, 0, 2) - \frac{\langle (3, 0, 2), (2, 0, 0) \rangle}{\langle (2, 0, 0), (2, 0, 0) \rangle} \cdot (2, 0, 0) - \frac{\langle (3, 0, 2), (0, 1, 1) \rangle}{\langle (0, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle} \cdot (0, 1, 1) = \\ &= (3, 0, 2) - \frac{6}{4}(2, 0, 0) - \frac{2}{2}(0, 1, 1) = (0, -1, 1) \end{aligned}$$

$\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è una *base ortogonale* di \mathbb{R}^3 . Poichè $\|\mathbf{e}_1\| = 2$, $\|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_3\| = \sqrt{2}$, ne consegue che $\mathcal{B}'' = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, dove

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_2\|} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \mathbf{f}_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{\|\mathbf{e}_3\|} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

è una *base ortonormale* di \mathbb{R}^3 .

Esempio 8.13. Se $(\mathbb{R}^3, \prec \cdot, \cdot \succ)$ è lo spazio vettoriale euclideo di dimensione tre definito nell'Esempio 8.7, e se $(\mathbf{v}_1 = (2, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (3, 0, 2))$ è la base di \mathbb{R}^3 già considerata nell'Esempio precedente, applicando il procedimento di Gram-Schmidt, si ottiene:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = (2, 0, 0)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = (1, 1, 1) - \frac{\prec (1, 1, 1), (2, 0, 0) \succ}{\prec (2, 0, 0), (2, 0, 0) \succ} \cdot (2, 0, 0) = (1, 1, 1) - 0 \cdot (2, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_3 &= (3, 0, 2) - \frac{\prec (3, 0, 2), (2, 0, 0) \succ}{\prec (2, 0, 0), (2, 0, 0) \succ} \cdot (2, 0, 0) - \frac{\prec (3, 0, 2), (1, 1, 1) \succ}{\prec (1, 1, 1), (1, 1, 1) \succ} \cdot (1, 1, 1) = \\ &= (3, 0, 2) - \frac{6}{4}(2, 0, 0) - \frac{2}{2}(1, 1, 1) = (-1, -1, 1) \end{aligned}$$

$\bar{\mathcal{B}}' = (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ è quindi una base ortogonale dello spazio vettoriale euclideo (non standard) $(\mathbb{R}^3, \prec \cdot, \cdot \succ)$. Poichè, rispetto al prodotto scalare considerato, i vettori di $\bar{\mathcal{B}}'$ hanno norma $\|\bar{\mathbf{e}}_1\| = 2$, $\|\bar{\mathbf{e}}_2\| = \|\bar{\mathbf{e}}_3\| = \sqrt{2}$, ne consegue che $\bar{\mathcal{B}}'' = (\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3)$, dove

$$\bar{\mathbf{f}}_1 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_1}{\|\bar{\mathbf{e}}_1\|} = (1, 0, 0),$$

$$\bar{\mathbf{f}}_2 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_2}{\|\bar{\mathbf{e}}_2\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \bar{\mathbf{f}}_3 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_3}{\|\bar{\mathbf{e}}_3\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

è una base ortonormale dello spazio vettoriale euclideo (non standard) $(\mathbb{R}^3, \prec \cdot, \cdot \succ)$.

Studiamo ora alcune notevoli proprietà delle basi ortogonali e ortonormali.

■ **Proposizione 8.16.** Se $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ è una base ordinata ortonormale di \mathbf{V}^n e $\mathbf{u} \equiv_{\mathcal{B}} (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (v^1, \dots, v^n)$, si ha:

- (a) $u^i = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{u} \rangle$;
- (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i$;
- (c) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u^i)^2}$;
- (d) $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\sum_{i=1}^n u^i v^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u^i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (v^i)^2}}$.

Dimostrazione. Per verificare le formule (a) e (b), basta osservare che

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n u^j \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{j=1}^n u^j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{j=1}^n u^j \delta_{ij} = u^i$$

e

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \sum_{i=1}^n u^i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n v^j \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u^i v^j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u^i v^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n u^i v^i$$

Le formule (c) e (d) sono invece immediata conseguenza della formula (b) e della definizione di norma euclidea e coseno dell'angolo tra due vettori. \square

■ **Teorema 8.17.** *Sia \mathbf{W}^n uno spazio vettoriale reale n -dimensionale e sia \mathcal{B} una sua qualunque base ordinata. Esiste uno e un solo prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su \mathbf{W}^n rispetto al quale \mathcal{B} risulti ortonormale. Inoltre, se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}^n$ e $\mathbf{u} \equiv_{\mathcal{B}} (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (v^1, \dots, v^n)$, si ha:*

$$(*) \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u^i v^i.$$

Dimostrazione. E' facile verificare che l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbf{W}^n \times \mathbf{W}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da (*) è bilineare, simmetrica e definita positiva ed è quindi un prodotto scalare su \mathbf{W}^n . Posto $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, da (*) segue, in particolare, che, per ogni $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$. Pertanto, \mathcal{B} è ortonormale in $(\mathbf{W}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

L'unicità di tale prodotto scalare è conseguenza immediata della Proposizione 8.16 (b). \square

Esempio 8.14. Il prodotto scalare naturale su \mathbb{R}^n (Esempio 8.1) è l'unico prodotto scalare su \mathbb{R}^n rispetto al quale risulti ortonormale la base naturale di \mathbb{R}^n .

■ **Proposizione 8.18.** *Sia \mathcal{B} una base ordinata ortonormale di \mathbf{V}^n . Una base ordinata \mathcal{B}' di \mathbf{V}^n è ortonormale se e solo se la matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ delle componenti di \mathcal{B}' rispetto a \mathcal{B} è ortogonale.*

Dimostrazione. Ricordando la Definizione 5.14, se $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$, per ogni $j \in \mathbb{N}_n$, si ha $\mathbf{e}'_j \equiv_{\mathcal{B}} (a_j^1, \dots, a_j^n)$, dove $\mathbf{a}_j = (a_j^1, \dots, a_j^n)$ è la j -esima colonna di E . Essendo \mathcal{B} ortogonale, per la Proposizione 8.16 (b), \mathcal{B}' risulta ortonormale se e solo se, per ogni $h, k \in \mathbb{N}_n$, si ha:

$$\sum_{i=1}^n a_h^i a_k^i = \langle \mathbf{e}'_h, \mathbf{e}'_k \rangle = \delta_{hk};$$

per la caratterizzazione delle matrici ortogonali data nella Proposizione 3.46, ciò accade se e solo se $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. \square

3. Trasformazioni ortogonali

Nel presente paragrafo, i simboli \mathbf{V} , \mathbf{W} indicheranno spazi vettoriali euclidei; i simboli \mathbf{V}^n , \mathbf{W}^n indicheranno invece spazi vettoriali euclidei di dimensione finita n .

♦ **Definizione 8.19.** Una trasformazione lineare $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ sarà detta *trasformazione ortogonale* di \mathbf{V} in \mathbf{W} se T conserva il prodotto scalare, ovvero se, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, si ha:

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Due spazi vettoriali euclidei \mathbf{V} e \mathbf{W} si dicono *isomorfi* se esiste una trasformazione ortogonale biunivoca di \mathbf{V} in \mathbf{W} .

Si noti che, come diretta conseguenza della precedente Definizione e delle Definizioni 8.3 e 8.8, *ogni trasformazione ortogonale T conserva anche la norma dei vettori⁸ e il coseno dell'angolo:*

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\| \quad \text{e} \quad \cos(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})) = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Inoltre, *ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ risulta essere iniettiva*, perché il suo nucleo si riduce al solo vettore nullo: infatti, se $\mathbf{v} \in \text{Ker } T$, allora $\|\mathbf{v}\| = \|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{0}\| = 0$, da cui segue $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, per la Proposizione 8.4(a).

In particolare, nel caso di spazi vettoriali euclidei aventi la stessa dimensione finita n , *ogni trasformazione ortogonale $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^n$ risulta essere biunivoca*, in virtù del Corollario 5.10.

Esempio 8.15. Fissato $\phi \in [0, 2\pi[$, l'applicazione lineare $\rho_\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\rho_\phi(x, y) = (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi),$$

è una trasformazione ortogonale sullo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^2 . Infatti:

$$\|\rho_\phi(x, y)\| = \sqrt{(x \cos \phi - y \sin \phi)^2 + (x \sin \phi + y \cos \phi)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|.$$

Si noti che ρ_ϕ “ruota” dell'angolo ϕ il vettore (x, y) intorno all'origine $(0, 0)$.

■ **Proposizione 8.20.** Se $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^n$ è una trasformazione ortogonale, e \mathcal{B} , \mathcal{B}' è una coppia di basi ordinate ortonormali di \mathbf{V}^n e \mathbf{W}^n rispettivamente, allora le equazioni di T relativamente a \mathcal{B} e \mathcal{B}' sono del tipo

$$(y) = A(x), \quad \text{con } A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

⁸In realtà, non è difficile dimostrare che la proprietà di conservare la norma dei vettori equivale, per le trasformazioni lineari, alla condizione di ortogonalità.

Dimostrazione. Per la definizione stessa di trasformazione ortogonale, se $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ è una base ortonormale di \mathbf{V}^n , allora $(T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n))$ è una base ortonormale di \mathbf{W}^n . La matrice A associata a T relativamente a $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ risulta essere pertanto la matrice delle componenti di una base ortonormale (la n -pla $(T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n))$) rispetto alla base ortonormale \mathcal{B}' ; la tesi è dunque una conseguenza diretta della Proposizione 8.18. □

Viceversa, non è difficile verificare che, se una trasformazione lineare $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{W}^n$ ammette, rispetto a una coppia di basi ordinate ortonormali, una matrice associata ortogonale, allora T è una trasformazione ortogonale.

► **Osservazione 8.21.** Sia \mathcal{B} una base ordinata di \mathbf{V}^n e $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'isomorfismo associato a \mathcal{B} (Proposizione 5.11). Si osservi che $\Phi_{\mathcal{B}}$ trasforma \mathcal{B} nella base naturale di \mathbb{R}^n , che risulta ortonormale rispetto al prodotto scalare naturale (Esempio 8.1). Pertanto, se \mathcal{B} è una base ortonormale di \mathbf{V}^n , allora $\Phi_{\mathcal{B}}$ è una trasformazione ortogonale (biunivoca) di \mathbf{V}^n nello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n .

Ne consegue che due spazi vettoriali euclidei di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

4. Complemento ortogonale

Nel presente paragrafo, il simbolo \mathbf{V} indicherà sempre uno spazio vettoriale euclideo; il simbolo \mathbf{V}^n indicherà invece uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n .

◆ **Definizione 8.22.** Se X è un sottoinsieme (non vuoto) di \mathbf{V} , si dice *complemento ortogonale* di X in \mathbf{V} il sottoinsieme

$${}^{\perp}X = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \forall \mathbf{x} \in X, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0\}.$$

In altri termini, ${}^{\perp}X$ è costituito dai vettori di \mathbf{V} ortogonali a tutti i vettori di X . Si noti che, essendo il prodotto scalare non degenerare, si ha

$${}^{\perp}\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad {}^{\perp}\{\mathbf{0}\} = \mathbf{V}.$$

► **Osservazione 8.23.** Se X e Y sono sottoinsiemi di \mathbf{V} , si ha:

- (a) $X \subseteq {}^{\perp}({}^{\perp}X)$;
- (b) $(X \subseteq Y) \Leftrightarrow ({}^{\perp}Y \subseteq {}^{\perp}X)$.

Per provare (a), basta osservare che, se $\mathbf{x} \in X$, allora, per ogni $\mathbf{v} \in {}^{\perp}X$, si ha $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0$ e quindi $\mathbf{x} \in {}^{\perp}({}^{\perp}X)$.

Per provare (b), basta osservare che, se $\mathbf{v} \in {}^{\perp}Y$, allora \mathbf{v} è ortogonale a tutti i vettori di Y e dunque, nell'ipotesi $X \subseteq Y$, a tutti i vettori di X .

■ **Proposizione 8.24.** Sia $\mathbf{U} = \mathbf{L}(X)$ la chiusura lineare di X in \mathbf{V} . Si ha allora:

- (a) ${}^{\perp}X$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} ;
- (b) ${}^{\perp}\mathbf{U} = {}^{\perp}X$;
- (c) $\mathbf{U} \cap {}^{\perp}\mathbf{U} = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione. (a) La proprietà di bilinearità del prodotto scalare (proprietà (PS1)) permette di verificare direttamente che ${}^\perp X$ è linearmente chiuso (e quindi è un sottospazio vettoriale). Infatti, per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in {}^\perp X$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\forall \mathbf{x} \in X, \quad \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle = 0 + 0 = 0;$$

$$\forall \mathbf{x} \in X, \quad \langle \alpha \cdot \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \alpha \cdot 0 = 0.$$

(b) Dalla Osservazione 8.23(b) segue subito che ${}^\perp \mathbf{U} \subseteq {}^\perp X$. Per provare che ${}^\perp X \subseteq {}^\perp \mathbf{U}$, sia $\mathbf{v} \in {}^\perp X$ e sia \mathbf{u} un arbitrario vettore di $\mathbf{U} = \mathbf{L}(X)$; posto $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^h \alpha^i \mathbf{x}_i$, con $\mathbf{x}_i \in X$, si ha allora:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \sum_{i=1}^h \alpha^i \mathbf{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^h \alpha^i \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_i \rangle = 0.$$

Quindi $\mathbf{v} \in {}^\perp \mathbf{U}$.

(c) Essendo \mathbf{U} e ${}^\perp \mathbf{U}$ sottospazi vettoriali, si ha banalmente $\mathbf{0} \in \mathbf{U} \cap {}^\perp \mathbf{U}$. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap {}^\perp \mathbf{U}$, allora, per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, si ha $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$, e quindi in particolare $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Poichè il prodotto scalare è definito positivo, ciò implica $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Pertanto, $\mathbf{U} \cap {}^\perp \mathbf{U} = \{\mathbf{0}\}$. □

► **Osservazione 8.25.** Dalla Proposizione 8.24 (b) segue che un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ è ortogonale a tutti i vettori di un sottospazio vettoriale \mathbf{U} di \mathbf{V} se e solo se è ortogonale a tutti i vettori di un qualsiasi sistema di generatori (in particolare, di una qualunque base) di \mathbf{U} .

■ **Teorema 8.26.** Se \mathbf{U} è un sottospazio vettoriale h -dimensionale di \mathbf{V}^n , si ha:

- (a) $\dim({}^\perp \mathbf{U}) = n - h$;
- (b) $\mathbf{V}^n = \mathbf{U} \oplus {}^\perp \mathbf{U}$;
- (c) $\mathbf{U} = {}^\perp({}^\perp \mathbf{U})$.

Dimostrazione. Data una base ortogonale $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h)$ di \mathbf{U} , tramite il Teorema del completamento a una base (Proposizione 4.29) e il procedimento di Gram-Schmidt, è possibile completare \mathcal{B}_1 a una base ortogonale $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-h})$ di \mathbf{V}^n . Poichè \mathcal{B} è ortogonale, si ha $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-h}) \subseteq {}^\perp \mathcal{B}_1 = {}^\perp \mathbf{U}$; da questo segue $\mathbf{L}(\mathcal{B}_2) \subseteq {}^\perp \mathbf{U}$, per cui $\dim({}^\perp \mathbf{U}) \geq n - h$. Essendo $\mathbf{U} \cap {}^\perp \mathbf{U} = \{\mathbf{0}\}$ (Proposizione 8.24(c)), la relazione di Grassmann (Teorema 4.41) implica $\dim(\mathbf{U} + {}^\perp \mathbf{U}) \geq n$; ciò dimostra che $\mathbf{L}(\mathcal{B}_2) = {}^\perp \mathbf{U}$, e quindi sia la affermazione (a) che la affermazione (b). La affermazione (c) si verifica poi osservando che

$${}^\perp({}^\perp \mathbf{U}) = {}^\perp(\mathbf{L}(\mathcal{B}_2)) = {}^\perp(\mathcal{B}_2) = \mathbf{L}(\mathcal{B}_1) = \mathbf{U}.$$

□

Si noti che la dimostrazione del Teorema 8.26 fornisce un metodo costruttivo per ottenere una base del complemento ortogonale di un generico sottospazio vettoriale di \mathbf{V}^n . Un metodo alternativo è dato dalla seguente

■ **Proposizione 8.27.** *Sia*

$$(*) \quad \begin{cases} a_1^1 u^1 + \dots + a_n^1 u^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{n-h} u^1 + \dots + a_n^{n-h} u^n = 0 \end{cases}$$

un sistema lineare omogeneo minimo, rappresentante il sottospazio vettoriale h -dimensionale \mathbf{U}^h di \mathbf{V}^n , rispetto a una fissata base ortonormale \mathcal{B} di \mathbf{V}^n . Posto, per ogni $i \in \mathbb{N}_{n-h}$, $\mathbf{a}_i \equiv_{\mathcal{B}} (a_1^i, \dots, a_n^i)$ e $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-h}\}$, si ha:

$${}^\perp \mathbf{U}^h = \mathbf{L}(H)$$

Dimostrazione. Un vettore $\bar{\mathbf{u}} \equiv_{\mathcal{B}} (\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ di \mathbf{V}^n appartiene a \mathbf{U}^h se e solo se la n -pla $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ è soluzione del sistema (*). Essendo \mathcal{B} una base ortonormale, per la Proposizione 8.16 (b), ciò equivale a dire che $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}^h$ se e solo se

$$\forall i \in \mathbb{N}_{n-h}, \quad \langle \mathbf{a}_i, \bar{\mathbf{u}} \rangle = a_1^i \bar{u}^1 + \dots + a_n^i \bar{u}^n = 0,$$

cioè se e solo se $\bar{\mathbf{u}} \in {}^\perp H$.

La tesi segue allora dalla Proposizione 8.24 (b) e dal Teorema 8.26 (c):

$$\mathbf{U}^h = {}^\perp H = {}^\perp (\mathbf{L}(H)) \quad \text{e quindi} \quad {}^\perp \mathbf{U}^h = \mathbf{L}(H).$$

□

► **Osservazione 8.28.** Con le notazioni della Proposizione 8.27, poiché le righe $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^{n-h}$ della matrice incompleta del sistema minimo che rappresenta \mathbf{U}^h sono linearmente indipendenti, si conclude che H è una base, non necessariamente ortogonale, di ${}^\perp \mathbf{U}^h$.

La Proposizione seguente permette invece di ottenere una rappresentazione cartesiana del complemento ortogonale ${}^\perp \mathbf{U}^h$, a partire da una qualunque base del sottospazio vettoriale \mathbf{U}^h .

■ **Proposizione 8.29.** *Sia $H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_h\}$ una base del sottospazio vettoriale h -dimensionale \mathbf{U}^h di \mathbf{V}^n , e siano (a_1^i, \dots, a_n^i) le componenti di \mathbf{a}_i , per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, rispetto a una fissata base ortonormale \mathcal{B} di \mathbf{V}^n . Allora, il sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} a_1^1 u^1 + \dots + a_n^1 u^n = 0 \\ \vdots \\ a_1^h u^1 + \dots + a_n^h u^n = 0 \end{cases}$$

rappresenta, rispetto a \mathcal{B} , il complemento ortogonale ${}^\perp \mathbf{U}^h$ di \mathbf{U}^h .

Dimostrazione. La lineare indipendenza degli h vettori di H assicura che il sistema omogeneo è minimo; pertanto, esso rappresenta rispetto a \mathcal{B} un sottospazio vettoriale \mathbf{W} di dimensione $n - h$ di \mathbf{V}^n . Dalla Proposizione 8.27 segue allora immediatamente che ${}^\perp \mathbf{W} = \mathbf{L}(H) = \mathbf{U}^h$, ovvero che $\mathbf{W} = {}^\perp \mathbf{U}^h$.

□

Esempio 8.16. Se U^2 ha, rispetto a una base ortonormale \mathcal{B} di V^3 , equazione

$$3u^1 - u^3 = 0,$$

allora $U^2 = {}^\perp\{\mathbf{a}\}$, dove $\mathbf{a} \equiv_{\mathcal{B}} (3, 0, -1)$; $\{\mathbf{a}\}$ è dunque una base (non ortonormale) di ${}^\perp U^2$.

Esempio 8.17. Sia $U^2 = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ il sottospazio dello spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^4 generato dai vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 0, 1, 0)$. Applicando alla base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ il procedimento di Gram-Schmidt, si ottiene la base ortogonale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ di U^2 , dove

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1), \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} \cdot \mathbf{e}_1 = (2, -1, 1, -1).$$

Posto $\mathbf{w}_1 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 0, 0, 1)$, la quaterna $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ è una base (non ortogonale) di \mathbb{R}^4 . Applicando il procedimento di Gram-Schmidt, si ottiene la base ortogonale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ di \mathbb{R}^4 , dove

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{e}_2 \rangle}{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} \cdot \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7} \right)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{e}_1 \rangle}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle} \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{e}_2 \rangle}{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle} \cdot \mathbf{e}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{f}_1 \rangle}{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle} \cdot \mathbf{f}_1 = \left(0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

Quindi (in virtù della dimostrazione del Teorema 8.26) $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ è una base ortogonale di ${}^\perp U^2$. Si noti che un sistema lineare omogeneo minimo rappresentante U^2 si ottiene imponendo che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} u^1 & 1 & 3 \\ u^2 & 1 & 0 \\ u^3 & 0 & 1 \\ u^4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sia 2. Per il Teorema di Kronecker, il sistema cercato ha equazioni

$$\begin{cases} u^1 - u^2 - 3u^3 = 0 \\ u^2 - u^4 = 0. \end{cases}$$

La Proposizione 8.27 assicura allora che $\{\mathbf{a}_1 = (1, -1, -3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, -1)\}$ è una base per ${}^\perp U^2$. Si osservi che tale base non è ortogonale.

Il procedimento di Gram-Schmidt, applicato ad $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, dà

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, -1, -3, 0), \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{g}_1 \rangle}{\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle} \cdot \mathbf{g}_1 = \left(\frac{1}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{3}{11}, -1 \right);$$

$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ è dunque una (diversa) base ortogonale di ${}^\perp U^2$. Una base ortonormale di ${}^\perp U^2$ si ottiene facilmente dividendo ciascun vettore di $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ (o di $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$) per la sua norma.

5. Matrici di Gram e proiezioni ortogonali

Nel presente paragrafo, il simbolo \mathbf{V}^n indicherà sempre uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$.

◆ **Definizione 8.30.** Si dice *matrice di Gram* della h -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ di vettori di \mathbf{V}^n la matrice

$$G = (g_{ij}) \in \mathcal{M}_h(\mathbb{R})$$

definita ponendo, per ogni $i, j \in \mathbb{N}_h$,

$$g_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Il determinante di G è detto *determinante di Gram* della h -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ e si indica con $\mathcal{G}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$.

Si noti che, per la simmetria del prodotto scalare, ogni matrice di Gram è simmetrica.

► **Osservazione 8.31.** Se $p \in \mathfrak{S}_h$ è una permutazione su \mathbb{N}_h , si ha $\mathcal{G}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h) = \mathcal{G}(\mathbf{v}_{p(1)}, \dots, \mathbf{v}_{p(h)})$.

Infatti, ogni trasposizione produce sulla matrice di Gram contemporaneamente uno scambio di righe e uno di colonne, lasciando quindi invariato il determinante.

► **Osservazione 8.32.** La matrice di Gram della h -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ è la matrice identica (di ordine h) se e solo se l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h\}$ è ortonormale.

■ **Proposizione 8.33.** La matrice di Gram G di una h -pla linearmente indipendente $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ di vettori di \mathbf{V}^n è una matrice regolare (di ordine h), con determinante positivo. Inoltre, per ogni fissata base ortonormale \mathcal{B} (risp. $\bar{\mathcal{B}}$) di \mathbf{V}^n (risp. di $\mathbf{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$), detta $A \in \mathcal{M}_{n \times h}(\mathbb{R})$ (risp. $\bar{A} \in \mathcal{M}_h(\mathbb{R})$) la matrice delle componenti dei vettori $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ rispetto a \mathcal{B} (risp. $\bar{\mathcal{B}}$), si ha

$$G = {}^t A \cdot A = {}^t \bar{A} \cdot \bar{A}$$

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} una fissata base ortonormale di \mathbf{V}^n . Posto $A = (a_s^r)$, si ha, per ogni $s \in \mathbb{N}_h$, $\mathbf{v}_s \equiv_{\mathcal{B}} (a_s^1, \dots, a_s^n)$; quindi, per la Proposizione 8.16(b), se $G = (g_{ij})$, si ottiene:

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_h, \quad g_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{r=1}^n a_i^r a_j^r.$$

Essendo $\mathbf{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$ la i -esima riga di ${}^t A$ ed essendo $\mathbf{a}_j = (a_j^1, \dots, a_j^n)$ la j -esima colonna di A , resta così dimostrato che $G = {}^t A \cdot A$.

Sia ora $\bar{\mathcal{B}}$ una fissata base ortonormale di $\mathbf{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$, e sia \mathcal{B} una base ortonormale di \mathbf{V}^n ottenuta da $\bar{\mathcal{B}}$ tramite il Teorema del completamento a una base e il procedimento di Gram-Schmidt. La matrice A delle componenti dei vettori $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ rispetto a \mathcal{B} ha le ultime $n - h$ righe nulle, mentre la sottomatrice costituita dalle prime h righe coincide con la matrice \bar{A} delle componenti dei vettori $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ rispetto a $\bar{\mathcal{B}}$. Pertanto, resta provato che

$$G = {}^t A \cdot A = {}^t \bar{A} \cdot \bar{A}.$$

La prima parte dell'enunciato segue ora direttamente dal Teorema di Binet, osservando che, per la lineare indipendenza della h -pla $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$, la matrice \bar{A} è regolare (di ordine h):

$$\det G = \det ({}^t \bar{A} \cdot \bar{A}) = (\det \bar{A})^2 > 0.$$

□

► **Osservazione 8.34.** Una verifica diretta prova che, se la h -pla di vettori $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ è linearmente dipendente, allora il determinante di Gram $\mathcal{G}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h)$ è uguale a zero.

Pertanto,

$$\mathcal{G}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h) \text{ è linearmente dipendente.}$$

♦ **Definizione 8.35.** Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, si dice *coefficiente di Fourier*⁹ di \mathbf{v} rispetto a \mathbf{u} il numero reale

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}.$$

Il vettore $\alpha \mathbf{u}$ si dice *proiezione (ortogonale)* di \mathbf{v} su \mathbf{u} .

Si osservi che, se \mathbf{u} è un versore, allora il coefficiente di Fourier di \mathbf{v} rispetto a \mathbf{u} è il prodotto scalare $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

► **Osservazione 8.36.** Il coefficiente di Fourier di \mathbf{v} rispetto a \mathbf{u} è caratterizzato dal fatto di essere l'unico numero reale α tale che $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} + \mathbf{w}$, con \mathbf{w} ortogonale a \mathbf{u} (o, equivalentemente, a $\alpha \mathbf{u}$).

Si ha infatti:

$$0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \alpha \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

se e solo se

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}.$$

Ciò giustifica il termine di proiezione ortogonale di \mathbf{v} su \mathbf{u} assegnato al vettore $\alpha \mathbf{u}$.

Si noti infine come, nel procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, il k -esimo vettore \mathbf{e}_k della base ortogonale \mathcal{B}' costruita a partire dalla base \mathcal{B} di \mathbf{V}^n si ottenga sottraendo al k -esimo vettore di \mathcal{B} le sue proiezioni ortogonali sui vettori \mathbf{e}_j di \mathcal{B}' , per ogni $j < k$.

Sia ora \mathbf{U} un sottospazio vettoriale h -dimensionale (con $1 \leq h \leq n-1$) dello spazio vettoriale euclideo \mathbf{V}^n . In virtù del Teorema 8.26(b) e della Proposizione 4.40, ogni vettore di \mathbf{V}^n si può decomporre in modo univoco nella somma di un vettore di \mathbf{U} e di un vettore di ${}^\perp \mathbf{U}$.

Ciò giustifica la seguente:

⁹ Jean Baptiste Joseph Fourier: matematico francese (Auxerre, 1768 - Parigi, 1830).

◆ **Definizione 8.37.** Dato il sottospazio h -dimensionale \mathbf{U} di \mathbf{V}^n (con $1 \leq h \leq n-1$), si dice *proiezione (ortogonale)* del vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ su \mathbf{U} il vettore $p_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) \in \mathbf{U}$, univocamente determinato dalla condizione

$$\mathbf{v} - p_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) \in {}^{\perp}\mathbf{U}.$$

La applicazione

$$p_{\mathbf{U}} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$$

(la cui immagine coincide con \mathbf{U}) che associa a ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ la sua proiezione ortogonale $p_{\mathbf{U}}(\mathbf{v})$ su \mathbf{U} si dice *proiezione ortogonale* sul sottospazio \mathbf{U} .

■ **Proposizione 8.38.** *La proiezione ortogonale sul sottospazio \mathbf{U} è un operatore lineare su \mathbf{V}^n ; inoltre, fissata una base ortonormale \mathcal{B} di \mathbf{V}^n , e una base $\mathcal{B}_{\mathbf{U}}$ di \mathbf{U} , le equazioni di $p_{\mathbf{U}}$ rispetto a \mathcal{B} sono*

$$(y) = [A \cdot G^{-1} \cdot {}^tA](x),$$

dove $A \in \mathcal{M}_{n \times h}(\mathbb{R})$ è la matrice delle componenti di $\mathcal{B}_{\mathbf{U}}$ rispetto a \mathcal{B} e $G = {}^tA \cdot A$ è la matrice di Gram dei vettori di $\mathcal{B}_{\mathbf{U}}$.

Dimostrazione. Verifichiamo direttamente che, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$, con $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (x)$, il vettore $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^n$ tale che $\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} [A \cdot G^{-1} \cdot {}^tA](x)$ (la cui definizione risulta ben posta in quanto, per la Proposizione 8.33, $G = {}^tA \cdot A \in GL_h(\mathbb{R})$) è la proiezione ortogonale di \mathbf{v} su \mathbf{U} ; ciò dimostra completamente l'enunciato, perché la linearità di $p_{\mathbf{U}}$ discende banalmente dalle equazioni di tipo $(y) = M(x)$ (con $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Il fatto che il vettore $\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} (y)$ appartenga al sottospazio \mathbf{U} deriva dalla relazione

$$(y) = A \cdot [G^{-1} \cdot {}^tA \cdot (x)],$$

con A matrice delle componenti rispetto a \mathcal{B} dei vettori di una base di \mathbf{U} e con $G^{-1} \cdot {}^tA \cdot (x) \in \mathcal{M}_{h \times 1}(\mathbb{R})$ (si ricordino le equazioni parametriche dei sottospazi vettoriali, presentate nel §3 del Capitolo 6).

Rimane quindi da verificare che $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in {}^{\perp}\mathbf{U}$, ovvero che, $\forall \mathbf{u}' \in \mathbf{U}$,

$$\langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u}' \rangle = 0.$$

Utilizzando le equazioni parametriche del sottospazio \mathbf{U} , si ha che $\mathbf{u}' \equiv_{\mathcal{B}} A \cdot (z)$, con $(z) \in \mathcal{M}_{h \times 1}(\mathbb{R})$. Il calcolo del prodotto scalare si può allora effettuare tramite le componenti rispetto alla base ortonormale \mathcal{B} , mediante la Proposizione 8.16(b) (espressa nella forma matriciale $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = {}^t(u) \cdot (v)$):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u}' \rangle &= {}^t(A \cdot (z)) \cdot [(x) - (y)] = \\ &= {}^t(z) \cdot {}^tA \cdot (x) - {}^t(z) \cdot {}^tA \cdot [A \cdot ({}^tA \cdot A)^{-1} \cdot {}^tA \cdot (x)] = \\ &= {}^t(z) \cdot {}^tA \cdot (x) - {}^t(z) \cdot [({}^tA \cdot A) \cdot ({}^tA \cdot A)^{-1}] \cdot {}^tA \cdot (x) = \\ &= {}^t(z) \cdot {}^tA \cdot (x) - {}^t(z) \cdot {}^tA \cdot (x) = 0 \end{aligned}$$

□

► **Osservazione 8.39.** È facile verificare che la matrice M associata all'operatore lineare $p_{\mathbf{U}}$ relativamente alla base ortonormale \mathcal{B} di \mathbf{V}^n è simmetrica e gode della proprietà $M \cdot M = M$.¹⁰

¹⁰Una matrice con tale proprietà è usualmente detta *idempotente*.

► **Osservazione 8.40.** La matrice M associata all'operatore lineare p_U relativamente alla base ortonormale \mathcal{B} di V^n è ovviamente indipendente dalla base \mathcal{B}_U fissata in U , e quindi dalla matrice A delle sue componenti. In particolare, se nel sottospazio U si fissa una base ortonormale $\bar{\mathcal{B}}_U$, allora la matrice di Gram dei vettori di \mathcal{B}_U coincide con la matrice identica I_h (si ricordi la Osservazione 8.32). Pertanto, detta \bar{A} la matrice delle componenti di $\bar{\mathcal{B}}_U$ rispetto a \mathcal{B} , la matrice M associata a p_U rispetto a \mathcal{B} (e, di conseguenza, le equazioni di p_U) possono essere agevolmente calcolate tramite

$$M = \bar{A} \cdot {}^t \bar{A}.$$

► **Osservazione 8.41.** Nel caso $h = 1$, la proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{v} \in V^n$ su U coincide con la proiezione ortogonale del medesimo vettore su qualunque vettore \mathbf{u} tale che $U = L(\mathbf{u})$. Infatti, in questo caso particolare, la matrice A si identifica con la colonna (u) delle componenti del vettore \mathbf{u} rispetto alla base ortonormale fissata \mathcal{B} ; si ha quindi

$$\begin{aligned} (y) &= [(u) \cdot ({}^t(u) \cdot (u))^{-1} \cdot {}^t(u)](x) = (u) \cdot (<\mathbf{u}, \mathbf{u}>)^{-1} \cdot [{}^t(u) \cdot (x)] = \\ &= \frac{<\mathbf{u}, \mathbf{v}>}{<\mathbf{u}, \mathbf{u}>} \cdot (u), \end{aligned}$$

ovvero

$$p_U(\mathbf{v}) = \frac{<\mathbf{u}, \mathbf{v}>}{<\mathbf{u}, \mathbf{u}>} \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u},$$

con α coefficiente di Fourier di \mathbf{v} rispetto a \mathbf{u} .

Esempio 8.18. Fissata in V^3 una base ortonormale \mathcal{B} , per determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (1, 3, 1)$ sul sottospazio $U : x^1 - 4x^2 - x^3 = 0$, è conveniente costruire una base ortonormale $(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2)$ di U : presa ad esempio la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ di U , con $\mathbf{u}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (1, 0, 1)$ e $\mathbf{u}_2 \equiv_{\mathcal{B}} (4, 1, 0)$, il procedimento di ortonormalizzazione di Gram Schmidt produce:

$$\mathbf{u}'_1 \equiv_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \mathbf{u}'_2 \equiv_{\mathcal{B}} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

Le componenti $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}^3)$ rispetto a \mathcal{B} della proiezione ortogonale $p_U(\mathbf{v})$ si ottengono allora dalla matrice \bar{A} delle componenti di $(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{y}^1 \\ \bar{y}^2 \\ \bar{y}^3 \end{pmatrix} &= \bar{A} \cdot {}^t \bar{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 1/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 17/18 & 2/9 & 1/18 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 1/18 & -2/9 & 17/18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ovvero $p_U(\mathbf{v}) \equiv_{\mathcal{B}} \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$.

6. Orientazione di uno spazio vettoriale euclideo

Nel presente paragrafo, il simbolo \mathbf{V}^n indicherà sempre uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$. Il simbolo \mathcal{B} denoterà l'insieme delle basi ordinate di \mathbf{V}^n . Ricordiamo che la matrice del cambiamento di base tra due basi ordinate di \mathcal{B} (Proposizione 5.34) è regolare e ha quindi determinante non nullo.

♦ **Definizione 8.42.** Due basi ordinate $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathcal{B}$ si dicono *concordi*, e si scrive $\mathcal{B} \approx \mathcal{B}'$, (risp. *discordi*) se la matrice $E \in GL_n(\mathbb{R})$ del cambiamento di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' ha determinante positivo (risp. negativo).

Si ha pertanto:

$$(\mathcal{B} \approx \mathcal{B}') \Leftrightarrow (\det E > 0).$$

► **Osservazione 8.43.** Si noti che, se $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ è una base ordinata arbitrariamente fissata di \mathbf{V}^n , allora la base ordinata $\mathcal{B}' = (-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ è una base discorde a \mathcal{B} , in quanto la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' è la matrice diagonale $E = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, con $\det E = -1 < 0$. Inoltre, se $\bar{\mathcal{B}}$ è una qualsiasi base ordinata di \mathbf{V}^n , allora $\bar{\mathcal{B}}$ risulta concorde (risp. discorde) a una e una sola delle due basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' : infatti, detta H (risp. K) la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} a $\bar{\mathcal{B}}$ (risp. da \mathcal{B}' a $\bar{\mathcal{B}}$), per l'Osservazione 5.35 si ha $H = K \cdot E$, e quindi

$$\det H = \det(K \cdot E) = \det(K) \cdot \det(E) = -\det K.$$

♦ **Definizione 8.44.** Si dice *spazio vettoriale euclideo orientato* (di dimensione n) una coppia $(\mathbf{V}^n, \mathcal{B})$, dove \mathbf{V}^n è uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$ e $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$ è una base ordinata di \mathbf{V}^n . Se $(\mathbf{V}^n, \mathcal{B})$ è uno spazio vettoriale euclideo orientato, allora la base \mathcal{B} e tutte le basi ad essa concordi si dicono *basi positive*, mentre tutte le basi discordi con \mathcal{B} si dicono *basi negative*.

In pratica, dunque, *orientare* uno spazio vettoriale euclideo \mathbf{V}^n significa scegliere una sua base ordinata come base positiva (insieme a tutte le basi ad essa concordi). La Osservazione 8.43 permette di affermare che *ogni spazio vettoriale euclideo \mathbf{V}^n può essere orientato in due soli modi possibili*.

► **Osservazione 8.45.** Se $n = 1$, l'insieme \mathcal{B} può essere identificato con l'insieme dei vettori non nulli di \mathbf{V}^1 . In questo caso, quindi, se $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in \mathbf{V}^1 - \{\mathbf{0}\}$, si ha:

$$(\mathbf{e} \approx \mathbf{f}) \Leftrightarrow (\mathbf{f} = \lambda \mathbf{e}, \lambda > 0)$$

Esempio 8.19. Lo spazio vettoriale euclideo standard \mathbb{R}^n si considera *orientato in modo naturale* scegliendo come base positiva la base naturale.

Sia ora $T: \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ un isomorfismo dello spazio vettoriale euclideo orientato \mathbf{V}^n in sé (ovvero, secondo la Definizione 8.19, una trasformazione ortogonale biunivoca di \mathbf{V}^n in sé). Non è difficile verificare che, se T trasforma una base positiva $\bar{\mathcal{B}}$ di \mathbf{V}^n in

una base positiva di \mathbf{V}^n , allora T trasforma ogni base \mathcal{B} di \mathbf{V}^n in una base concorde di \mathbf{V}^n .

Infatti, l'ipotesi assicura che la matrice $\bar{A} = M_{\bar{\mathcal{B}}}(T) \in GL_n(\mathbb{R})$ associata a T rispetto alla base $\bar{\mathcal{B}}$ ha determinante positivo; inoltre, la matrice \bar{A} è simile alla matrice $A = M_{\mathcal{B}}(T) \in GL_n(\mathbb{R})$ associata a T rispetto alla base \mathcal{B} (Teorema 5.38) e dunque \bar{A} e A hanno lo stesso determinante.

Ciò consente di dare la seguente definizione, e contemporaneamente di provare - grazie alle Proposizioni 8.20 e 3.46 - la successiva affermazione.

◆ **Definizione 8.46.** Sia \mathbf{V}^n uno spazio vettoriale euclideo orientato. Si dice che un isomorfismo T di \mathbf{V}^n in sé *conserva l'orientazione* se trasforma basi positive in basi positive; nel caso opposto si dice che T *rovescia l'orientazione*.

■ **Proposizione 8.47.** Sia \mathbf{V}^n uno spazio vettoriale euclideo orientato e T un isomorfismo di \mathbf{V}^n in sé. Allora, T conserva (risp. rovescia) l'orientazione se e solo se, rispetto a una qualunque base ortonormale di \mathbf{V}^n , la matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ associata a T ha $\det A = 1$ (risp. $\det A = -1$). □

► **Osservazione 8.48.** In realtà, è possibile introdurre la nozione di orientazione, in modo del tutto simile a quanto fatto nel presente paragrafo, considerando \mathbf{V}^n come un generico spazio vettoriale reale (e non, necessariamente, come uno spazio vettoriale euclideo). Analogamente, è possibile parlare di isomorfismi di uno spazio vettoriale reale in sé che conservano (risp. rovesciano) l'orientazione, anche nel caso non si tratti di trasformazioni ortogonali, e caratterizzarli attraverso il segno positivo (risp. negativo) del determinante di una qualunque matrice associata.

7. Prodotto vettoriale e prodotto misto

Nel presente paragrafo, $(\mathbf{V}^3, \bar{\mathcal{B}})$ indicherà uno spazio vettoriale euclideo orientato di dimensione tre.

■ **Lemma 8.49.** Dati due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3$, per ogni $k \in \mathbb{R}^+$, esiste uno e un solo vettore $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^3$ tale che:

- (a) \mathbf{w} è ortogonale a \mathbf{u} e a \mathbf{v} ;
- (b) la base ordinata $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ è positiva;
- (c) $\|\mathbf{w}\| = k$.

Dimostrazione. Dal Teorema 8.26 (a) segue che il complemento ortogonale $\mathbf{W} = {}^\perp \mathbf{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ di $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ in \mathbf{V}^3 è un sottospazio vettoriale di dimensione uno. Se $\mathbf{W} = \mathbf{L}(\mathbf{z})$, allora gli unici due vettori soddisfacenti (a) e (c) sono

$$\pm \frac{k}{\|\mathbf{z}\|} \mathbf{z}.$$

Il lemma segue quindi facilmente, osservando che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \frac{k}{\|\mathbf{z}\|} \mathbf{z})$ e $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\frac{k}{\|\mathbf{z}\|} \mathbf{z})$ sono basi discordi di \mathbf{V}^3 . □

◆ **Definizione 8.50.** Dati due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3$, si dice *prodotto vettoriale* di \mathbf{u} per \mathbf{v} il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \in \mathbf{V}^3$ definito come segue:

- (i) se \mathbf{u} e \mathbf{v} sono linearmente dipendenti, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$;
- (ii) se \mathbf{u} e \mathbf{v} sono linearmente indipendenti, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è il vettore univocamente determinato dalle seguenti condizioni:
 - (a) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale a \mathbf{u} e a \mathbf{v} ;
 - (b) la base ordinata $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è positiva;
 - (c) $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, dove si è posto

$$\sin(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{1 - \cos^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})}.$$

■ **Proposizione 8.51.** Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una base ordinata ortonormale positiva di $(\mathbf{V}^3, \mathcal{B})$. Posto $\mathbf{u} \equiv_{\mathcal{B}} (u^1, u^2, u^3)$ e $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (v^1, v^2, v^3)$, si ha:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right).$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right)$$

e proviamo che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w}$.

- (i) Se \mathbf{u} e \mathbf{v} sono linearmente dipendenti, allora (u^1, u^2, u^3) è proporzionale a (v^1, v^2, v^3) , e si ha quindi $\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} (0, 0, 0)$. Pertanto, $\mathbf{w} = \mathbf{0} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
- (ii) Se \mathbf{u} e \mathbf{v} sono linearmente indipendenti, poiché \mathcal{B} è ortonormale, si ha

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = u^1 \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} - u^2 \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} + u^3 \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v^1 \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} - v^2 \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} + v^3 \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ciò prova che \mathbf{w} è ortogonale a \mathbf{u} e a \mathbf{v} .

Si ha poi:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\| &= \sqrt{\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix}^2} = \\ &= \sqrt{((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2)((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2) - (u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3)^2} = \\ &= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2} = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Infine, la matrice del cambiamento di base da $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ a $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è:

$$A = \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} \\ u^2 & v^2 & - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} \\ u^3 & v^3 & \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Lo sviluppo di Laplace di $\det A$ secondo la terza colonna prova che $\det A = \|\mathbf{w}\|^2 > 0$; ciò dimostra che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ è una base positiva.

Si ha pertanto $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. \square

► **Osservazione 8.52.** Se $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è ortonormale positiva, si ha, come caso particolare della Proposizione 8.51:

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

► **Osservazione 8.53.** Si noti che il prodotto vettoriale gode, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}^3$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, delle seguenti proprietà:

- 1) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$;
- 2) $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \wedge \mathbf{w})$;
- 3) $\alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\alpha\mathbf{v})$.

◆ **Definizione 8.54.** Dati tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}^3$, si dice *prodotto misto* della terna $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ di vettori di \mathbf{V}^3 il numero reale $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle$.

■ **Proposizione 8.55.** Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una base ordinata ortonormale positiva di $(\mathbf{V}^3, \mathcal{B})$. Posto $\mathbf{u} \equiv_{\mathcal{B}} (u^1, u^2, u^3)$, $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (v^1, v^2, v^3)$ e $\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} (w^1, w^2, w^3)$, si ha:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}.$$

Dimostrazione. Si ottiene subito ricordando la Proposizione 8.51, la Proposizione 8.16 (b) e sviluppando il determinante secondo la prima colonna, mediante il Teorema di Laplace. \square

► **Osservazione 8.56.** Il prodotto misto è una applicazione di $\mathbf{V}^3 \times \mathbf{V}^3 \times \mathbf{V}^3$ in \mathbb{R} che gode delle seguenti proprietà:

- 1) scambiando fra loro due vettori, il prodotto cambia di segno; pertanto, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}^3$, si ha:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} \rangle;$$

- 2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti.

Esempio 8.20. Ad esempio, se $\mathbf{u} \equiv_{\mathcal{B}} (0, 1, 0)$, $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (1, 3, 0)$, e $\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} (0, 1, 1)$, essendo \mathcal{B} una base ordinata ortonormale positiva, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} &\equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3, -1, 1); \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle &= \langle (0, 1, 0), (3, -1, 1) \rangle = -1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Spazi euclidei

1. Definizioni ed esempi

Nel presente capitolo, il simbolo $\vec{\mathcal{E}}$ indicherà sempre uno spazio vettoriale euclideo $(\vec{\mathcal{E}}, < \cdot, \cdot >)$.

♦ **Definizione 9.1.** Diremo *spazio euclideo* una terna $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$, costituita da uno spazio vettoriale euclideo $\vec{\mathcal{E}}$, da un insieme \mathcal{E} e da una applicazione $\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$, che associa a ogni coppia (P, Q) di elementi di \mathcal{E} il vettore $\pi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$, soddisfacente i seguenti assiomi:

(SE1) $\forall A \in \mathcal{E}, \forall \mathbf{a} \in \vec{\mathcal{E}}$, esiste uno e un solo $X \in \mathcal{E}$, tale che $\overrightarrow{AX} = \mathbf{a}$.

(SE2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (relazione di Chasles¹).

Si noti che dall'assioma (SE1) segue che l'applicazione π è suriettiva.

L'insieme \mathcal{E} è detto *sostegno* dello spazio euclideo $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ e i suoi elementi sono detti *punti*. Un elemento (P, Q) di $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ è detto *segmento orientato*, avente P quale *primo estremo* e Q quale *secondo estremo*. Gli elementi di $\vec{\mathcal{E}}$ sono detti *vettori liberi*; il vettore libero nullo sarà indicato con $\vec{0}$. Se $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ è uno spazio euclideo, diremo spesso, per brevità e con abuso di linguaggio, che \mathcal{E} è uno spazio euclideo, avente $\vec{\mathcal{E}}$ quale spazio dei vettori liberi. Si osservi che, in ogni caso, come già visto per gli spazi vettoriali, lo stesso insieme \mathcal{E} può essere sostegno di differenti spazi euclidei.

Quali conseguenze dirette degli assiomi (SE1) e (SE2), si verificano poi, per ogni spazio euclideo \mathcal{E} e per ogni $Q, R \in \mathcal{E}$, le seguenti proprietà:

- (i) $(\overrightarrow{QR} = \vec{0}) \Leftrightarrow (Q = R)$
- (ii) $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{RQ}$.

♦ **Definizione 9.2.** Uno spazio euclideo \mathcal{E} sarà detto di *dimensione finita* se lo spazio dei vettori liberi $\vec{\mathcal{E}}$ ha dimensione finita. In tal caso porremo $\dim \mathcal{E} = \dim \vec{\mathcal{E}}$.

Uno spazio euclideo di dimensione (finita) n sarà solitamente indicato con \mathcal{E}^n . Se $\dim \mathcal{E} = 0$, allora $\vec{\mathcal{E}} = \{\vec{0}\}$ e dunque - per la precedente proprietà (i) - \mathcal{E}^0 si riduce a un singolo punto.

Se $\dim \mathcal{E} = 1, 2, 3$, allora \mathcal{E} è detto rispettivamente *retta euclidea*, *piano euclideo*, *spazio euclideo ordinario*.

¹Michel Chasles: matematico francese (Èpernon, 1793-1880).

◆ **Definizione 9.3.** Se \mathcal{E} è uno spazio euclideo, diremo che due segmenti orientati (P, Q) e (R, S) sono *equipollenti*, e scriveremo $(P, Q) \equiv (R, S)$, se $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$.

La proposizione seguente ci consente di affermare che *il supporto \mathbf{V} di ogni spazio vettoriale euclideo è anche supporto di uno spazio euclideo* (avente \mathbf{V} stesso quale spazio dei vettori liberi).

■ **Proposizione 9.4.** Se $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio vettoriale euclideo e se si pone $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}$ e

$$\tau : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{vw}} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$$

allora la terna $\mathcal{E}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V}, \mathbf{V}, \tau)$ è uno spazio euclideo.

Lo spazio euclideo $\mathcal{E}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V}, \mathbf{V}, \tau)$ si dice *associato* allo spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

► **Osservazione 9.5.** In realtà, è possibile costruire una teoria analoga a quella esposta nel presente paragrafo, sostituendo lo spazio vettoriale euclideo $\tilde{\mathcal{E}}$ con un generico spazio vettoriale $\tilde{\mathcal{A}}$ su di un campo \mathbb{K} : lo spazio $(\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$ che ne deriva in base alla Definizione 9.1 si dice *spazio affine* su \mathbb{K} . In pratica, quindi, uno spazio euclideo può essere considerato come uno spazio affine su \mathbb{R} , il cui spazio dei vettori liberi è dotato di un prodotto scalare. Si noti che le nozioni introdotte nei successivi § 2, 3, 4, 5 possono essere introdotte, con le dovute modifiche, anche nel caso di uno spazio affine su \mathbb{K} , mentre le nozioni relative ai § 6, 7, 8, 9 necessitano della presenza di un prodotto scalare definito sullo spazio dei vettori liberi, e pertanto possono essere introdotte esclusivamente nell'ambito degli spazi euclidei.

Esempio 9.1. (Lo spazio euclideo elementare) Sia \mathcal{F} lo “spazio euclideo elementare”. Fissato un punto $O \in \mathcal{F}$, sia $(\mathcal{F}(O), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ lo spazio vettoriale euclideo considerato nell'Esempio 8.6, avente come sostegno l'insieme

$$\mathcal{F}(O) = \{(O, P) \mid P \in \mathcal{F}\}$$

e il cui prodotto scalare è definito mediante

$$\langle (O, P), (O, Q) \rangle = d(O, P) \cdot d(O, Q) \cdot \cos(\widehat{POQ})$$

Se $\pi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(O)$ è l'applicazione che a ogni coppia (R, S) associa l'unico vettore applicato in O che ha la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso del segmento orientato (R, S) , allora è immediato verificare che la terna $(\mathcal{F}(O), \mathcal{F}, \pi)$ verifica gli assiomi (SE1) e (SE2); \mathcal{F} risulta pertanto uno spazio euclideo di dimensione tre.

Esempio 9.2. (Lo spazio euclideo standard \mathbb{R}^n) Se, nella Proposizione 9.4, si considera $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, spazio vettoriale euclideo standard n -dimensionale, allora lo spazio euclideo associato sarà detto *spazio euclideo standard di dimensione n* e sarà indicato con $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ o, più semplicemente, ancora con \mathbb{R}^n .

2. Sistemi di riferimento

Nel presente paragrafo, \mathcal{E}^n indicherà sempre uno spazio euclideo di dimensione finita $n > 0$.

♦ **Definizione 9.6.** Diremo *riferimento cartesiano* su \mathcal{E}^n una coppia $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, dove O è un punto di \mathcal{E}^n , detto *origine del riferimento* \mathcal{R} e \vec{B} è una base ordinata ortonormale dello spazio vettoriale euclideo $(\vec{\mathcal{E}}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Dato un punto $P \in \mathcal{E}^n$, si dicono *coordinate cartesiane (non omogenee)* di P , rispetto a $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, le componenti del vettore libero \overrightarrow{OP} rispetto alla base \vec{B} .²

Se $\vec{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $\overrightarrow{OP} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n$, scriveremo $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, x^2, \dots, x^n)$ per indicare la n -pla delle coordinate cartesiane di P , rispetto a \mathcal{R} . Si ha, evidentemente, $O \equiv_{\mathcal{R}} (0, 0, \dots, 0)$.

Si osservi che l'assioma (SE1) implica, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, l'esistenza di un unico punto $P_i \in \mathcal{E}^n$ tale che $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{OP_i}$. Si ha inoltre $P_i \equiv_{\mathcal{R}} (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Esempio 9.3. Sia \mathcal{F} lo spazio euclideo elementare dell'Esempio 9.1. Un riferimento cartesiano su \mathcal{F} è una coppia $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, dove $O \in \mathcal{F}$ e \vec{B} è una base ordinata ortonormale dello spazio vettoriale euclideo $\mathcal{F}(O)$. Pertanto, \vec{B} risulta costituita da una terna (linearmente indipendente) $((O, P_1), (O, P_2), (O, P_3))$ di versori applicati in O a due a due ortogonali.

Esempio 9.4. (Riferimento cartesiano naturale su \mathbb{R}^n) Se \mathbb{R}^n è lo spazio euclideo standard di dimensione n (Esempio 9.2), allora il riferimento cartesiano $\tilde{\mathcal{R}} = (O, \tilde{B})$, dove $O = (0, 0, \dots, 0)$ e $\tilde{B} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$ è la base naturale (ortonormale) dello spazio vettoriale euclideo standard $\tilde{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n$ (Esempio 8.1), è detto *riferimento cartesiano naturale su \mathbb{R}^n* . Se $P = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, allora evidentemente $\overrightarrow{OP} = P - O = x^1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + x^2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + \dots + x^n \tilde{\mathbf{e}}_n$, per cui $P \equiv_{\tilde{\mathcal{R}}} (x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Esempio 9.5. Se \mathbb{R}^2 è il piano euclideo standard, $O' = (-1, 4)$, $\vec{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$, allora $\mathcal{R} = (O', \vec{B})$ è un riferimento cartesiano su \mathbb{R}^2 . Se $P = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, allora

$$\overrightarrow{O'P} = (1, 2) - (-1, 4) = (2, -2) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Pertanto, $P \equiv_{\mathcal{R}} (2\sqrt{2}, 0)$.

²Si noti che sarebbe possibile considerare anche una più generale nozione di *riferimento*, e di *coordinate (non omogenee)* associate, considerando su \mathcal{E}^n una coppia $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$ ove \vec{B} è una qualunque base ordinata di $\vec{\mathcal{E}}^n$. Ovviamente, questa generalizzazione diventa necessaria negli spazi affini, dove non è definita la nozione di base ortonormale (si veda l'Osservazione 9.5). D'altra parte, negli spazi euclidei la scelta di un riferimento *cartesiano* - che verrà fatta da ora in poi nel presente testo - comporta significativi vantaggi, in virtù della Proposizione 8.16.

■ **Proposizione 9.7.** Sia $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^n e siano $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P^1, x_P^2, \dots, x_P^n)$, $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q^1, x_Q^2, \dots, x_Q^n)$ punti di \mathcal{E}^n .

Allora, $\overrightarrow{PQ} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_Q^1 - x_P^1, x_Q^2 - x_P^2, \dots, x_Q^n - x_P^n)$.

Dimostrazione. Posto $\vec{\mathcal{B}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, si ha, per definizione:

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n x_P^i \mathbf{e}_i; \quad \overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^n x_Q^i \mathbf{e}_i.$$

Per la relazione di Chasles si ottiene:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n (x_Q^i - x_P^i) \mathbf{e}_i.$$

Ciò prova l'asserto. □

È poi immediato verificare che, se $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ è un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^n , l'applicazione $\phi_{\mathcal{R}}$ che a ogni punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathcal{E}^n$ associa $\phi_{\mathcal{R}}(P) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ è una biiezione; tale biiezione è detta *sistema di coordinate cartesiane* relativo al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

Supponiamo ora che $\mathcal{R}' = (O', \vec{\mathcal{B}}')$ e $\mathcal{R}'' = (O'', \vec{\mathcal{B}}'')$ siano due riferimenti cartesiani su \mathcal{E}^n . La proposizione seguente permette di ricavare la n -pla delle coordinate cartesiane di un punto $P \in \mathcal{E}^n$ rispetto a \mathcal{R}'' quando sia nota la n -pla delle sue coordinate cartesiane rispetto a \mathcal{R}' .

■ **Proposizione 9.8.** Se $P \equiv_{\mathcal{R}'} (x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $P \equiv_{\mathcal{R}''} (y^1, y^2, \dots, y^n)$, allora si ha

$$(*) \quad (y) = E(x) + (b)$$

dove $E \in O_n(\mathbb{R})$ è la matrice delle componenti della base $\vec{\mathcal{B}}'$ rispetto a $\vec{\mathcal{B}}''$, e $(b) \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ è la colonna delle coordinate cartesiane del punto O' rispetto al riferimento \mathcal{R}'' .

Dimostrazione. Per la relazione di Chasles, si ha:

$$\overrightarrow{O''P} = \overrightarrow{O''O'} + \overrightarrow{O'P}.$$

Questa uguaglianza tra vettori liberi, espressa in termini di componenti rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}''$, diventa:

$$(y) = (b) + (x'),$$

dove (x') denota la colonna delle componenti del vettore libero $\overrightarrow{O'P}$ rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}''$. Poichè la colonna (x) delle coordinate cartesiane del punto P rispetto al riferimento \mathcal{R}' coincide con la colonna delle componenti del vettore libero $\overrightarrow{O'P}$ rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}'$, le equazioni del cambiamento di base da $\vec{\mathcal{B}}'$ a $\vec{\mathcal{B}}''$ sono esattamente

$$(x') = E(x);$$

la tesi segue quindi direttamente, sostituendo questa relazione nella uguaglianza precedente. □

Le equazioni (*) vengono dette *equazioni del cambiamento di riferimento cartesiano da \mathcal{R}' a \mathcal{R}''* .

► **Osservazione 9.9.** Le equazioni del cambiamento di riferimento inverso da \mathcal{R}'' a \mathcal{R}' sono evidentemente

$$(x) = E^{-1}(y) - E^{-1}(b) = E^{-1}(y - b) = {}^t E(y - b),$$

come è facile verificare, moltiplicando a sinistra per $E^{-1} = {}^t E$ (si ricordi che E è ortogonale) le equazioni (*).

Esempio 9.6. Nel piano euclideo standard \mathbb{R}^2 , si considerino il riferimento cartesiano $\mathcal{R}' = (O', \vec{B}')$, dove $O' = (-1, 4)$ e $\vec{B}' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$ (si veda l'Esempio 9.5), e il riferimento cartesiano $\mathcal{R}'' = (O'', \vec{B}'')$, dove $O'' = (0, 0)$ e $\vec{B}'' = ((1, 0), (0, 1))$. La matrice delle componenti di \vec{B}' rispetto a \vec{B}'' è

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

inoltre, $O' \equiv_{\mathcal{R}''} (-1, 4)$. Pertanto, se $P \equiv_{\mathcal{R}'} (x^1, x^2)$ e $P \equiv_{\mathcal{R}''} (y^1, y^2)$, allora le equazioni (*) del cambiamento di riferimento cartesiano da \mathcal{R}' a \mathcal{R}'' sono:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases} y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 - 1 \\ y^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + 4 \end{cases}.$$

Essendo

$$E^{-1} = {}^t E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad E^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

le equazioni del cambiamento di riferimento inverso da \mathcal{R}'' a \mathcal{R}' sono

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y^1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 + \frac{5}{\sqrt{2}} \\ x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Utilizzando tali equazioni, si ha che, se $P \equiv_{\mathcal{R}''} (1, 2)$, allora $P \equiv_{\mathcal{R}'} (2\sqrt{2}, 0)$, come già provato direttamente nell'Esempio 9.5.

3. Sottospazi euclidei

Nel presente paragrafo, il simbolo \mathcal{E} indicherà sempre uno spazio euclideo $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$.

◆ **Definizione 9.10.** Un sottoinsieme \mathcal{H} di \mathcal{E} si dice *sottospazio euclideo* di \mathcal{E} se soddisfa le seguenti proprietà :

- il sottoinsieme

$$\vec{\mathcal{H}} = \{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{E}} \mid P, Q \in \mathcal{H}\} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$$

(detto *giacitura* di \mathcal{H}) è un sottospazio vettoriale di $\vec{\mathcal{E}}$;

- $\forall A \in \mathcal{H}, \forall \mathbf{a} \in \vec{\mathcal{H}}$, il punto X tale che $\overrightarrow{AX} = \mathbf{a}$ (assioma SE1) appartiene ad \mathcal{H} .

Si noti che, se \mathcal{H} è un sottospazio euclideo di \mathcal{E} , la terna $(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi|)$ è a sua volta uno spazio euclideo, avendo indicato con $\pi| : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \vec{\mathcal{H}}$ la restrizione di π ad $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

La Proposizione seguente prova che *ogni sottospazio euclideo è univocamente determinato dalla sua giacitura e da uno qualunque dei suoi punti*.

■ Proposizione 9.11.

- (a) Per ogni punto $P_0 \in \mathcal{E}$ e per ogni sottospazio vettoriale \mathbf{U} di $\vec{\mathcal{E}}$, il sottoinsieme

$$(P_0, \mathbf{U}) = \{Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in \mathbf{U}\}$$

è un sottospazio euclideo di \mathcal{E} , contenente P_0 e avente \mathbf{U} come giacitura.

- (b) Viceversa, se \mathcal{H} è un sottospazio euclideo di \mathcal{E} , per ogni punto $P_0 \in \mathcal{H}$ si ha $\mathcal{H} = (P_0, \vec{\mathcal{H}})$.

Dimostrazione. (a) Innanzitutto, si osservi che, essendo \mathbf{U} un sottospazio vettoriale, $\overrightarrow{P_0P_0} = \vec{0} \in \mathbf{U}$; quindi $P_0 \in (P_0, \mathbf{U})$. Verifichiamo ora che $(P_0, \mathbf{U}) = \{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{E}} \mid P, Q \in (P_0, \mathbf{U})\}$ coincide con \mathbf{U} . Infatti, se $P, Q \in (P_0, \mathbf{U})$, allora $\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0Q} \in \mathbf{U}$; si ha pertanto $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{P_0Q} - \overrightarrow{P_0P} \in \mathbf{U}$, essendo \mathbf{U} linearmente chiuso. Viceversa, se $\mathbf{a} \in \mathbf{U}$, allora esiste ed è unico il punto $R \in \mathcal{E}$ tale che $\overrightarrow{P_0R} = \mathbf{a}$. Ciò prova che $R \in (P_0, \mathbf{U})$; poichè si ha anche $P_0 \in (P_0, \mathbf{U})$, segue $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_0R} \in \{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{E}} \mid P, Q \in (P_0, \mathbf{U})\}$. Dunque, $(P_0, \mathbf{U}) = \mathbf{U}$ è un sottospazio vettoriale di $\vec{\mathcal{E}}$.

Per provare che (P_0, \mathbf{U}) è un sottospazio euclideo, basta quindi dimostrare che, se $A \in (P_0, \mathbf{U})$ e $\mathbf{a} \in \overrightarrow{(P_0, \mathbf{U})}$, allora il punto X tale che $\overrightarrow{AX} = \mathbf{a}$ appartiene a (P_0, \mathbf{U}) . Ma $A \in (P_0, \mathbf{U})$ implica $\overrightarrow{P_0A} \in \mathbf{U}$ e quindi $\overrightarrow{P_0X} = \overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{AX} \in \mathbf{U}$, essendo \mathbf{U} linearmente chiuso. Dunque $X \in (P_0, \mathbf{U})$ e l'affermazione (a) è completamente provata.

(b) Se $P \in (P_0, \vec{\mathcal{H}})$, allora $\overrightarrow{P_0P} \in \vec{\mathcal{H}}$ e dunque anche $P \in \mathcal{H}$: ciò dimostra che $(P_0, \vec{\mathcal{H}}) \subseteq \mathcal{H}$. Viceversa, se $Q \in \mathcal{H}$, allora $\overrightarrow{P_0Q} \in \vec{\mathcal{H}}$ e quindi $Q \in (P_0, \vec{\mathcal{H}})$. Si ha quindi $\mathcal{H} = (P_0, \vec{\mathcal{H}})$.

□

Si noti che *l'intersezione di sottospazi euclidei è ancora un sottospazio euclideo*.

I sottospazi euclidei di dimensione 0 sono i punti di \mathcal{E} , mentre i sottospazi euclidei di dimensione 1 e 2 sono detti rispettivamente *rette* e *piani (euclidei)* di \mathcal{E} . La giacitura di una retta è anche detta *direzione*.

Se \mathcal{E}^n è uno spazio euclideo di dimensione finita n , quale conseguenza immediata della Proposizione 4.35 si ha che *un sottospazio euclideo \mathcal{H} di \mathcal{E}^n ha dimensione finita $h \leq n$; inoltre, $\mathcal{H} = \mathcal{E}^n$ se e solo se $h = n$.*

I sottospazi euclidei di dimensione $n - 1$ sono detti *iperpiani (euclidei)* di \mathcal{E}^n .

► **Osservazione 9.12.** Sia $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo ed $\mathcal{E}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V}, \mathbf{V}, \tau)$ lo spazio euclideo ad esso associato. Se \mathbf{U} è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} e $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, allora

$$(\mathbf{a}, \mathbf{U}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{v} - \mathbf{a} \in \mathbf{U}\} = \mathbf{a} + \mathbf{U}.$$

Quindi, i sottospazi euclidei di $\mathcal{E}(\mathbf{V})$ si ottengono “per traslazione” (si veda l’Osservazione 6.13) dei sottospazi vettoriali di \mathbf{V} .

Introduciamo ora la nozione di *indipendenza affine di punti*, che permette di parlare di *punti che generano un sottospazio euclideo*.

◆ **Definizione 9.13.** Una $(h + 1)$ -pla (P_0, P_1, \dots, P_h) di punti di \mathcal{E} , con $h > 0$, è detta *affinemente indipendente* se la h -pla di vettori liberi $(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h})$ è linearmente indipendente in $\tilde{\mathcal{E}}$. In caso contrario, si dice che (P_0, P_1, \dots, P_h) è *affinemente dipendente*.

E’ facile verificare che, se una $(h + 1)$ -pla di punti è affinemente indipendente, allora risultano affinemente indipendenti anche tutte le $(h + 1)$ -ple da essa ottenute permutandone le componenti in tutti i modi possibili. Ciò giustifica la locuzione “i punti P_0, P_1, \dots, P_h sono affinemente indipendenti (risp. dipendenti)”, che verrà spesso usata come sinonimo di “la $(h + 1)$ -pla (P_0, P_1, \dots, P_h) è affinemente indipendente (risp. dipendente)”.

► **Osservazione 9.14.** Quale immediata conseguenza del Teorema 4.28 (a) e della Definizione 9.13, il massimo numero di punti affinemente indipendenti di uno spazio euclideo di dimensione finita n è $n + 1$.

La proposizione seguente permette di affermare che ogni sottospazio euclideo di dimensione finita h è univocamente determinato da $h + 1$ suoi punti affinemente indipendenti. Ciò fornisce una importante caratterizzazione dei sottospazi degli spazi euclidei di dimensione finita.

■ **Proposizione 9.15.** *Dati $h + 1$ punti affinemente indipendenti P_0, P_1, \dots, P_h di \mathcal{E} , esiste uno e un solo sottospazio euclideo h -dimensionale \mathcal{H}^h di \mathcal{E} che li contiene.*

Dimostrazione. Poichè i punti P_0, P_1, \dots, P_h sono affinemente indipendenti, i vettori liberi $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h}$ sono linearmente indipendenti, e individuano dunque un sottospazio vettoriale h -dimensionale $\mathbf{W}^h = \mathbf{L}(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h})$ di $\tilde{\mathcal{E}}$. Il sottospazio euclideo $\mathcal{H}^h = (P_0, \mathbf{W}^h)$, individuato dal punto P_0 e dal sottospazio vettoriale \mathbf{W}^h , per definizione ha dimensione h e contiene i punti P_0, P_1, \dots, P_h ; inoltre, ogni altro sottospazio euclideo h -dimensionale contenente P_0, P_1, \dots, P_h ha come giacitura \mathbf{W}^h

e quindi coincide con \mathcal{H}^h (si ricordi che ogni sottospazio euclideo è univocamente determinato dalla sua giacitura e da uno qualunque dei suoi punti). \square

Il sottospazio \mathcal{H}^h si dirà *generato dagli* $h + 1$ punti P_0, P_1, \dots, P_h o anche *passante per* P_0, P_1, \dots, P_h .

Concludiamo il paragrafo introducendo la nozione di *parallelismo* tra sottospazi euclidei di uno spazio euclideo \mathcal{E} .

◆ **Definizione 9.16.** Due sottospazi euclidei \mathcal{H}, \mathcal{K} di \mathcal{E} si dicono *paralleli*, e si indica $\mathcal{H} // \mathcal{K}$, se $\vec{\mathcal{H}} \subseteq \vec{\mathcal{K}}$ o $\vec{\mathcal{K}} \subseteq \vec{\mathcal{H}}$.

Si noti che, se \mathcal{H} e \mathcal{K} sono entrambi sottospazi di dimensione finita h , allora $\mathcal{H} // \mathcal{K}$ se e solo se $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{K}}$. Inoltre è bene osservare che, in base alla Definizione 9.16, la nozione di parallelismo non esclude la possibilità che i sottospazi in questione abbiano punti in comune; anzi, è facile verificare che, se $\dim(\mathcal{H}) < \dim(\mathcal{K})$ (risp. $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{K})$), allora $(\mathcal{H} // \mathcal{K} \text{ e } \mathcal{H} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset) \Rightarrow \mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ (risp. $\mathcal{H} = \mathcal{K}$).

In generale, detti *incidenti* (risp. *sghebbi*) due sottospazi euclidei che hanno almeno un punto in comune (risp. che non sono nè paralleli nè incidenti), le possibili mutue posizioni di due sottospazi euclidei \mathcal{H}^h e \mathcal{K}^k di \mathcal{E} (con $h \leq k$) sono:

- (I) *paralleli e incidenti* (nel qual caso $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$)
- (II) *paralleli e disgiunti*
- (III) *incidenti e non paralleli*
- (IV) *sghebbi*

Si noti però che, a seconda delle situazioni, il numero delle mutue posizioni effettivamente possibili può anche essere inferiore a quattro: ad esempio (come si vedrà nei successivi § 1 dei Capitoli 10 e 11), due rette del piano euclideo non possono mai essere sghembe, così come due piani (o una retta e un piano) dello spazio euclideo di dimensione tre.

■ **Teorema 9.17.** *Dati comunque un sottospazio euclideo h -dimensionale \mathcal{H}^h di \mathcal{E} e un punto $P \in \mathcal{E}$, esiste uno e un solo sottospazio euclideo h -dimensionale \mathcal{K}^h di \mathcal{E} , contenente P e parallelo a \mathcal{H}^h .*

Dimostrazione. Basta porre $\mathcal{K}^h = (P, \vec{\mathcal{H}}^h)$. \square

► **Osservazione 9.18.** Per $h = 1$, il Teorema 9.17 è una riformulazione del famoso *postulato delle parallele*, noto anche come V postulato di Euclide, che risulta pertanto, nell'ambito della presente teoria, una conseguenza degli assiomi usati per definire gli spazi euclidei.

Il postulato delle parallele fa parte del sistema di assiomi usato da Euclide negli “Elementi”, al fine di costruire una teoria deduttiva atta a descrivere le proprietà geometriche del “piano” e dello “spazio fisico” in cui viviamo, ormai noti come *piano* e *spazio euclideo*.

Tale postulato apparve immediatamente poco “autoevidente” già ai più antichi commentatori del trattato euclideo, che tentarono invano di dedurlo dagli altri postulati. Allo scopo di provare la verità del V postulato, Saccheri³ ebbe la geniale idea di sostituire tale postulato con la sua negazione, sperando di dedurne una conseguenza

manifestamente assurda. Pur senza giungere in fondo al problema, tale lavoro lasciava intravedere la possibilità di costruire sistemi geometrici coerenti, basati su principi contrari al V postulato stesso: Saccheri fu dunque, suo malgrado, un precursore delle cosiddette “geometrie non euclidee”, che vennero successivamente elaborate - in modo indipendente, non senza reciproche polemiche - da Bolyai⁴, Gauss⁵ e Lobacevskij⁶. In particolare, sostituendo il postulato delle parallele con l'ipotesi che per un punto esterno a una retta data non si possa tracciare alcuna retta (risp. si possa tracciare più di una retta) ad essa parallela, si ottiene la *geometria ellittica* (risp. la *geometria iperbolica*).

4. Rappresentazioni di sottospazi euclidei

Nel presente paragrafo, considereremo solo sottospazi di uno spazio euclideo \mathcal{E}^n di dimensione finita n ; $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ indicherà un fissato riferimento cartesiano su \mathcal{E}^n . In perfetta analogia a quanto fatto per i sottospazi di uno spazio vettoriale \mathbf{V}^n (§ 3 del Capitolo 6), ci poniamo il problema di rappresentare tramite equazioni (sia di tipo cartesiano che di tipo parametrico) i sottospazi euclidei, ovvero di trovare delle “condizioni” sulle coordinate cartesiane dei punti rispetto al riferimento fissato, che siano verificate da tutti e soli i punti che appartengono al sottospazio considerato.

■ **Teorema 9.19.** *Fissato in \mathcal{E}^n un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, ogni sottospazio euclideo h -dimensionale \mathcal{H}^h di \mathcal{E}^n ($0 < h < n$) può essere rappresentato, relativamente a \mathcal{R} , da un sistema lineare minimo \mathbf{S} di $n - h$ equazioni in n incognite; inoltre, il sistema lineare omogeneo \mathbf{S}_0 associato a \mathbf{S} rappresenta, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, la giacitura $\vec{\mathcal{H}}^h$ di \mathcal{H}^h .*

Dimostrazione. Siano $P_0 \equiv_{\mathcal{R}} (x_0^1, \dots, x_0^n), \dots, P_h \equiv_{\mathcal{R}} (x_h^1, \dots, x_h^n)$ $h + 1$ punti affinementemente indipendenti di \mathcal{H}^h . Per definizione, ciò equivale a dire che i vettori liberi

$$\overrightarrow{P_0P_1} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_1^1 - x_0^1, \dots, x_1^n - x_0^n), \dots, \overrightarrow{P_0P_h} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_h^1 - x_0^1, \dots, x_h^n - x_0^n)$$

sono linearmente indipendenti, e costituiscono dunque una base per $\vec{\mathcal{H}}^h$. Un generico punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, \dots, x^n)$ di \mathcal{E}^n appartiene a \mathcal{H}^h se e solo se il vettore libero $\overrightarrow{P_0P} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x^1 - x_0^1, \dots, x^n - x_0^n)$ appartiene a $\vec{\mathcal{H}}^h = \mathbf{L}(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h})$. Ma ciò equivale a richiedere che la $(h + 1)$ -pla $(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h})$ sia linearmente dipendente e cioè che la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 & x_1^1 - x_0^1 & \dots & x_h^1 - x_0^1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x^n - x_0^n & x_1^n - x_0^n & \dots & x_h^n - x_0^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times (h+1)}(\mathbb{R})$$

abbia rango h .

³Fra Girolamo Saccheri: matematico italiano (Sanremo, 1667 - Milano, 1733).

⁴Janos Bolyai: matematico ungherese (Kolzar, 1802 - Marosvarhely, 1860).

⁵Carl Friedrich Gauss: matematico, fisico e astronomo tedesco (Brunswick, 1777 - Gottinga, 1855).

⁶Nikolaj Ivanovic Lobacevskij: matematico russo (Makarev, 1793 - Kazan, 1856).

Poichè le ultime h colonne sono per ipotesi linearmente indipendenti, al loro interno esiste sicuramente un minore \bar{M} di ordine h con determinante non nullo; la condizione che $P \in \mathcal{H}^h$ equivale dunque - per il Teorema di Kronecker - all'annullarsi dei determinanti di tutti gli $n - h$ minori orlati M_{h+1}, \dots, M_n di \bar{M} in M . Si ottiene così un sistema lineare minimo (non più necessariamente omogeneo) di $n - h$ equazioni in n incognite, che rappresenta \mathcal{H}^h :

$$\begin{cases} \det M_{h+1} &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ \det M_n &= 0. \end{cases}$$

È poi immediato verificare, a partire dalla precedente matrice M , che il sistema lineare omogeneo associato coincide con la rappresentazione cartesiana della giacitura $\tilde{\mathcal{H}}^h$ di \mathcal{H}^h , ottenuta a partire dalla sua base $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h}$ (si veda la dimostrazione del Teorema 6.25). \square

Posto $\mathbf{S} = (A, -\mathbf{b})$, si avrà quindi che

$$\mathcal{H}^h = \{P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, \dots, x^n) \mid A \cdot (x) + (b) = (0)\};$$

le equazioni $A \cdot (x) + (b) = (0)$ si diranno *equazioni cartesiane* del sottospazio \mathcal{H}^h (relative a \mathcal{R}).

► **Osservazione 9.20.** Non è difficile verificare che il Teorema 9.19 può essere invertito, ovvero che *ogni sistema lineare possibile di rango $n - h$ in n incognite rappresenta, relativamente a un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, un sottospazio euclideo h -dimensionale \mathcal{H}^h di \mathcal{E}^n .*

Ad esempio, se \mathcal{E}^4 è uno spazio euclideo di dimensione quattro e \mathcal{R} è un suo fissato riferimento cartesiano, il sistema lineare possibile \mathbf{S} dell'Esempio 6.2 rappresenta, relativamente ad \mathcal{R} , un sottospazio euclideo \mathcal{H} di \mathcal{E}^4 di dimensione $h = 4 - \varrho(A) = 4 - 2 = 2$. Ovviamente, anche il sistema lineare minimo \mathbf{S}' equivalente ad \mathbf{S} costituisce una rappresentazione cartesiana di \mathcal{H} (non ridondante come quella costituita da \mathbf{S}).

► **Osservazione 9.21.** Ponendo $h = n - 1$ nel Teorema 9.19, si ottiene in particolare che *ogni iperpiano \mathcal{E}^{n-1} di \mathcal{E}^n può essere rappresentato da una equazione lineare in n incognite (e rango 1):*

$$a_1x^1 + \dots + a_nx^n + b = 0 \quad \text{con} \quad (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Esempio 9.7. Se $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}} = (\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}))$ è un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^n , si dice *i-esimo iperpiano coordinato* relativo a \mathcal{R} ($i \in \mathbb{N}_n$) l'iperpiano euclideo $\pi_i = \pi_i(\mathcal{R})$ di \mathcal{E}^n generato dagli n punti affinementemente indipendenti $O, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n$.

Poichè $O \equiv_{\mathcal{R}} (0, \dots, 0)$ e, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, $P_i \equiv_{\mathcal{R}} (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, l'iperpiano coordinato π_i è rappresentato, relativamente a \mathcal{R} , dalla equazione $x_i = 0$.

Si osservi che l'intersezione degli n iperpiani coordinati è l'origine O di \mathcal{R} .

Notiamo ora che - come già osservato nel corso della dimostrazione del Teorema 9.19 - se il sottospazio euclideo \mathcal{H}^h è generato dai punti affinemente indipendenti $P_0 \equiv_{\mathcal{R}} (x_0^1, \dots, x_0^n)$, $P_1 \equiv_{\mathcal{R}} (x_1^1, \dots, x_1^n)$, \dots , $P_h \equiv_{\mathcal{R}} (x_h^1, \dots, x_h^n)$, allora un punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, \dots, x^n)$ appartiene a \mathcal{H}^h se e soltanto se $\overrightarrow{P_0P} \in \mathbf{L}(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h})$; ciò equivale ovviamente alla esistenza di h scalari $t^1, \dots, t^h \in \mathbb{R}$ tali che $\overrightarrow{P_0P} = t^1 \overrightarrow{P_0P_1} + \dots + t^h \overrightarrow{P_0P_h}$.

Pertanto, tutti e soli i punti $P \in \mathcal{H}^h$ ammettono, rispetto a \mathcal{R} , coordinate (x^1, \dots, x^n) che si ottengono, al variare dei parametri $t^1, \dots, t^h \in \mathbb{R}$, da:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \dots \\ x_0^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^1 - x_0^1 \\ \dots \\ x_1^n - x_0^n \end{pmatrix} \cdot t^1 + \dots + \begin{pmatrix} x_h^1 - x_0^1 \\ \dots \\ x_h^n - x_0^n \end{pmatrix} \cdot t^h.$$

Le corrispondenti uguaglianze

$$\begin{cases} x^1 &= x_0^1 + t^1(x_1^1 - x_0^1) + \cdots + t^h(x_h^1 - x_0^1) \\ \vdots &\vdots \\ x^n &= x_0^n + t^1(x_1^n - x_0^n) + \cdots + t^h(x_h^n - x_0^n) \end{cases} \quad (t^1, \dots, t^h \in \mathbb{R})$$

vengono dette *equazioni parametriche* del sottospazio \mathcal{H}^h (relativamente a \mathcal{R}).

Esempio 9.8. Se $\mathcal{R} = (O, \vec{B} = (\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}))$ è un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^n , si dice *i-esimo asse coordinato*, o *asse \mathbf{x}_i* , relativo a \mathcal{R} ($i \in \mathbb{N}_n$) la retta generata dai due punti O, P_i .

Le equazioni parametriche dell'asse x_i , rispetto a \mathcal{R} , sono:

$$\begin{cases} x^i &= t \\ x^j &= 0 \quad \forall j \neq i \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

► **Osservazione 9.22.** Come già visto per gli spazi vettoriali, le rappresentazioni cartesiane e parametriche dei sottospazi euclidei di \mathcal{E}^n *non sono uniche*.

5. Condizioni di parallelismo

Nel presente paragrafo, il simbolo \mathcal{E}^n indicherà sempre uno spazio euclideo di dimensione finita n .

◆ **Definizione 9.23.** Sia \mathcal{E}^1 una retta euclidea di \mathcal{E}^n e sia $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$ un fissato riferimento cartesiano su \mathcal{E}^n . Se $\mathbf{l} \equiv_{\vec{B}} (l^1, \dots, l^n)$ è un vettore libero *non nullo* della giacitura \mathcal{E}^1 , diremo che $(l^1, \dots, l^n) \in \mathbb{R}^n$ è una *n-pla di coefficienti* (o *numeri* o *parametri*) *direttori* della retta \mathcal{E}^1 , relativi al riferimento \mathcal{R} .

In altre parole, ricordando la Proposizione 9.7, una n -pla di coefficienti direttori della retta \mathcal{E}^1 si ottiene considerando due punti distinti $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P^1, x_P^2, \dots, x_P^n)$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q^1, x_Q^2, \dots, x_Q^n)$ di \mathcal{E}^1 e ponendo

$$\mathbf{l} = \overrightarrow{PQ} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (x_Q^1 - x_P^1, x_Q^2 - x_P^2, \dots, x_Q^n - x_P^n).$$

Si noti che, per definizione, una qualunque n -pla di coefficienti direttori di \mathcal{E}^1 è diversa dalla n -pla nulla.

■ **Proposizione 9.24.** *Sia \mathcal{E}^1 una retta di \mathcal{E}^n e sia $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ un fissato riferimento cartesiano su \mathcal{E}^n . Si ha allora:*

- (a) *Due qualunque n -ple di coefficienti direttori di \mathcal{E}^1 (relative a \mathcal{R}) sono proporzionali.*
- (b) *Se \mathcal{E}^1 ha (rispetto a \mathcal{R}) equazioni parametriche*

$$x^i = x_0^i + l^i \cdot t, \quad i \in \mathbb{N}_n$$

allora la n -pla (l^1, \dots, l^n) dei coefficienti del parametro t è una n -pla di coefficienti direttori di \mathcal{E}^1 (relativi a \mathcal{R}).

- (c) *Se \mathcal{E}^1 ha (rispetto a \mathcal{R}) equazioni cartesiane*

$$A(x) + (b) = (0) \quad \text{con } A \in M_{(n-1) \times n}(\mathbb{R}) \text{ e } \varrho(A) = n - 1,$$

allora ogni soluzione non nulla del sistema omogeneo $A(x) = (0)$ è una n -pla di coefficienti direttori di \mathcal{E}^1 (relativi a \mathcal{R}).

Dimostrazione. (a) Se $\mathbf{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, \dots, l^n)$, $\mathbf{m} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (m^1, \dots, m^n)$ sono due vettori liberi non nulli di $\vec{\mathcal{E}}^1$, allora evidentemente $\mathbf{m} \in \vec{\mathcal{E}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{l})$. Ciò prova che esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che

$$(m^1, \dots, m^n) = \lambda \cdot (l^1, \dots, l^n).$$

(b) Se \mathcal{E}^1 ha - rispetto a \mathcal{R} - equazioni parametriche $x^i = x_0^i + l^i \cdot t$, $i \in \mathbb{N}_n$, i punti $P_0 \equiv_{\mathcal{R}} (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ e $P_1 \equiv_{\mathcal{R}} (l^1 + x_0^1, l^2 + x_0^2, \dots, l^n + x_0^n)$ sono distinti e appartengono a \mathcal{E}^1 . Quindi, il vettore libero $\overrightarrow{P_0 P_1} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, l^2, \dots, l^n)$ appartiene a $\vec{\mathcal{E}}^1$. Ciò prova che (l^1, l^2, \dots, l^n) è una n -pla di coefficienti direttori di \mathcal{E}^1 .

(c) Basta ricordare che il vettore libero $\mathbf{l} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, l^2, \dots, l^n)$ appartiene alla giacitura della retta \mathcal{E}^1 se e solo se (l^1, l^2, \dots, l^n) è soluzione del sistema lineare omogeneo $A \cdot (x) = (0)$ che rappresenta $\vec{\mathcal{E}}^1$ (Teorema 9.19).

□

► **Osservazione 9.25.** Se la retta \mathcal{E}^1 ha (rispetto a \mathcal{R}) equazioni parametriche

$$x^i = x_0^i + l^i \cdot t, \quad i \in \mathbb{N}_n$$

e se nessuno dei coefficienti direttori è nullo, allora, ricavando il parametro t da ciascuna delle n equazioni si ottiene:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{l^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{l^2} = \dots = \frac{x^n - x_0^n}{l^n}$$

che è nota come *equazione frazionaria* della retta \mathcal{E}^1 (rispetto a \mathcal{R}).

■ **Proposizione 9.26.**

- (a) *Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette \mathcal{E}^1 e \mathcal{F}^1 aventi rispettivamente coefficienti direttori (l^1, \dots, l^n) e (m^1, \dots, m^n) siano parallele è che esista $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:*

$$(l^1, \dots, l^n) = \lambda \cdot (m^1, \dots, m^n);$$

- (b) *Condizione necessaria e sufficiente affinché due iperpiani \mathcal{E}^{n-1} e \mathcal{F}^{n-1} aventi rispettivamente equazioni cartesiane*

$$a'_1 x^1 + \dots + a'_n x^n + b' = 0 \quad \text{e} \quad a''_1 x^1 + \dots + a''_n x^n + b'' = 0$$

siano paralleli è che esista $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:

$$(a'_1, \dots, a'_n) = \lambda \cdot (a''_1, \dots, a''_n);$$

- (c) *Condizione necessaria e sufficiente affinché una retta \mathcal{E}^1 avente coefficienti direttori (l^1, \dots, l^n) e un iperpiano \mathcal{F}^{n-1} avente equazione cartesiana $a_1 x^1 + \dots + a_n x^n + b = 0$ siano paralleli è che si abbia:*

$$a_1 l^1 + \dots + a_n l^n = 0.$$

Dimostrazione. (a) Se $\mathbf{l} \equiv_{\vec{\mathcal{E}}} (l^1, \dots, l^n)$ e $\mathbf{m} \equiv_{\vec{\mathcal{F}}} (m^1, \dots, m^n)$, si ha $\vec{\mathcal{E}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{l})$ e $\vec{\mathcal{F}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{m})$. Allora, $\vec{\mathcal{E}}^1 = \vec{\mathcal{F}}^1$ se e solo se $\mathbf{l} = \lambda \mathbf{m}$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$: ciò prova (a).

(b) Poichè le giaciture \mathcal{E}^{n-1} e \mathcal{F}^{n-1} sono rappresentate rispettivamente dalle equazioni lineari omogenee

$$a'_1 x^1 + \dots + a'_n x^n = 0 \quad \text{e} \quad a''_1 x^1 + \dots + a''_n x^n = 0,$$

il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a'_1 x^1 + \dots + a'_n x^n = 0 \\ a''_1 x^1 + \dots + a''_n x^n = 0 \end{cases}$$

rappresenta $\mathcal{E}^{n-1} \cap \mathcal{F}^{n-1}$. La affermazione (b) segue allora osservando che \mathcal{E}^{n-1} e \mathcal{F}^{n-1} sono paralleli se e soltanto se $\mathcal{E}^{n-1} \cap \mathcal{F}^{n-1}$ ha dimensione $n - 1$, ovvero se e soltanto se

$$\varrho \begin{pmatrix} a'_1 & \dots & a'_n \\ a''_1 & \dots & a''_n \end{pmatrix} = 1.$$

(c) Se $\mathbf{l} \equiv_{\vec{\mathcal{E}}} (l^1, \dots, l^n)$, si ha che \mathcal{E}^1 e \mathcal{F}^{n-1} sono paralleli se e solo se $\vec{\mathcal{E}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{l}) \subset \vec{\mathcal{F}}^{n-1}$, ovvero se e soltanto se $\mathbf{l} \in \vec{\mathcal{F}}^{n-1}$. La affermazione (c) segue allora osservando che $\vec{\mathcal{F}}^{n-1}$ è rappresentato dalla equazione omogenea $a_1 x^1 + \dots + a_n x^n = 0$.

□

Esempio 9.9. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^5 , con un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , si considerino le rette r , s e t , dove

$$r : \begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 - 2x^5 = 1 \\ x^1 + 2x^2 - 3x^3 = 0 \\ x^1 - x^2 + x^4 - x^5 = 2 \\ 3x^2 + x^4 - 4x^5 = -1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x^1 = 3 + 2\lambda \\ x^2 = -1 + \lambda \\ x^3 = 4\lambda \\ x^4 = 5 + \lambda \\ x^5 = -2 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e t è generata dai punti $P \equiv_{\mathcal{R}} (0, 2, 3, -1, 5)$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} (2, 4, 5, 1, 7)$. Poichè r (risp. s) (risp. t) hanno coefficienti direttori $(1, 1, 1, 1, 1)$ (risp. $(2, 1, 4, 1, -1)$) (risp. $(1, 1, 1, 1, 1)$), la Proposizione 9.26(a) consente di affermare che r e t sono parallele, mentre s non è parallela né a r né a t .

6. Ortogonalità tra sottospazi

Nel presente paragrafo tratteremo la nozione di ortogonalità tra sottospazi di un medesimo spazio euclideo \mathcal{E}^n (di dimensione finita n , in cui supporremo fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$), restringendo l'attenzione ad alcuni casi particolari, che vengono ritenuti i più significativi (oltre che i più semplici come trattazione).⁷ Si noti che, in dimensione due e tre, i casi considerati nel presente paragrafo coprono tutti i casi possibili.

◆ **Definizione 9.27.** Due rette \mathcal{E}^1 e \mathcal{F}^1 dello spazio euclideo \mathcal{E}^n si dicono *ortogonali*, e si indica $\mathcal{E}^1 \perp \mathcal{F}^1$, se ogni vettore di $\vec{\mathcal{E}}^1$ è ortogonale a tutti i vettori di $\vec{\mathcal{F}}^1$, ovvero se

$$\forall \mathbf{u} \in \vec{\mathcal{E}}^1, \forall \mathbf{v} \in \vec{\mathcal{F}}^1, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

■ **Proposizione 9.28.** Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette \mathcal{E}^1 e \mathcal{F}^1 aventi coefficienti direttori (l^1, \dots, l^n) e (m^1, \dots, m^n) siano ortogonali è che si abbia:

$$l^1 m^1 + \dots + l^n m^n = 0$$

⁷Ripartiamo qui, per completezza, anche la definizione più generale di ortogonalità tra sottospazi euclidei. Due sottospazi \mathcal{E}^h e \mathcal{F}^k dello spazio euclideo \mathcal{E}^n si dicono ortogonali, e si indica $\mathcal{E}^h \perp \mathcal{F}^k$, se:

- i due sottospazi non sono paralleli;
- la giacitura di uno dei due sottospazi contiene (o coincide con) il complemento ortogonale della giacitura dell'altro, nel sottospazio vettoriale $\vec{\mathcal{E}}^h + \vec{\mathcal{F}}^k \subseteq \vec{\mathcal{E}}^n$ (ovvero: nel più piccolo sottospazio vettoriale di $\vec{\mathcal{E}}^n$ contenente entrambe le giaciture).

Si osservi che questa definizione generale coincide con quelle date nei casi particolari trattati.

Dimostrazione. Posto $\mathbf{l} \equiv_{\vec{B}} (l^1, \dots, l^n)$ e $\mathbf{m} \equiv_{\vec{B}} (m^1, \dots, m^n)$, dalla Definizione 9.23 segue che $\vec{\mathcal{E}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{l})$ e $\vec{\mathcal{F}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{m})$. Allora, per ogni $\mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{l} \in \vec{\mathcal{E}}^1$, e per ogni $\mathbf{v} = \mu \cdot \mathbf{m} \in \vec{\mathcal{F}}^1$, si ha:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda \cdot \mathbf{l}, \mu \cdot \mathbf{m} \rangle = \lambda \mu \langle \mathbf{l}, \mathbf{m} \rangle.$$

Pertanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\langle \mathbf{l}, \mathbf{m} \rangle = 0$; la tesi segue dunque banalmente dalla Proposizione 8.16 (b). \square

◆ **Definizione 9.29.** Una retta \mathcal{E}^1 e un iperpiano \mathcal{F}^{n-1} dello spazio euclideo \mathcal{E}^n si dicono *ortogonali*, e si indica $\mathcal{E}^1 \perp \mathcal{F}^{n-1}$, se la giacitura della retta coincide con il complemento ortogonale della giacitura dell'iperpiano.

Si noti che, per il Teorema 8.26, il complemento ortogonale della giacitura dell'iperpiano \mathcal{F}^{n-1} è effettivamente un sottospazio vettoriale unidimensionale di $\vec{\mathcal{E}}^n$ (come la giacitura della retta \mathcal{E}^1), che a volte viene detto “la direzione ortogonale all'iperpiano”; il lemma seguente ci consente di ricavarne direttamente una base, a partire da una qualunque rappresentazione cartesiana di \mathcal{F}^{n-1} .

■ **Lemma 9.30.** Se l'iperpiano \mathcal{F}^{n-1} di \mathcal{E}^n ha, rispetto a $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, equazione cartesiana $a_1x^1 + \dots + a_nx^n + b = 0$, allora il vettore $\mathbf{a} \equiv_{\vec{B}} (a_1, \dots, a_n)$ è una base per il complemento ortogonale della giacitura di \mathcal{F}^{n-1} .

Dimostrazione. Basta ricordare che, per il Teorema 9.19, la equazione omogenea $a_1x^1 + \dots + a_nx^n = 0$ è una rappresentazione cartesiana (rispetto alla base ortonormale \vec{B} di $\vec{\mathcal{E}}^n$) della giacitura $\vec{\mathcal{F}}^{n-1}$ dell'iperpiano \mathcal{F}^{n-1} , e poi applicare la Proposizione 8.27 (nel caso particolare $h = n - 1$). \square

■ **Proposizione 9.31.** Condizione necessaria e sufficiente affinché una retta \mathcal{E}^1 di coefficienti direttori (l^1, \dots, l^n) e un iperpiano \mathcal{F}^{n-1} di equazione cartesiana $a_1x^1 + \dots + a_nx^n + b = 0$ siano ortogonali è che esista $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:

$$(l^1, \dots, l^n) = \lambda \cdot (a_1, \dots, a_n)$$

Dimostrazione. Posto $\mathbf{l} \equiv_{\vec{B}} (l^1, \dots, l^n)$ e $\mathbf{a} \equiv_{\vec{B}} (a_1, \dots, a_n)$, dalla Definizione 9.23 segue che $\vec{\mathcal{E}}^1 = \mathbf{L}(\mathbf{l})$, mentre dal Lemma 9.30 segue che ${}^\perp\vec{\mathcal{F}}^{n-1} = \mathbf{L}(\mathbf{a})$. Allora, $\vec{\mathcal{E}}^1 = {}^\perp\vec{\mathcal{F}}^{n-1}$ (ovvero, per definizione, $\mathcal{E}^1 \perp \mathcal{F}^{n-1}$) se e solo se $\mathbf{l} = \lambda \mathbf{a}$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$: ciò prova ovviamente la tesi. \square

◆ **Definizione 9.32.** Due iperpiani \mathcal{E}^{n-1} e \mathcal{F}^{n-1} dello spazio euclideo \mathcal{E}^n si dicono *ortogonali*, e si indica $\mathcal{E}^{n-1} \perp \mathcal{F}^{n-1}$, se sono ortogonali due qualunque rette ad essi ortogonali.

■ **Proposizione 9.33.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché due iperpiani \mathcal{E}^{n-1} e \mathcal{F}^{n-1} aventi equazioni cartesiane $a'_1x^1 + \dots + a'_nx^n + b' = 0$ e $a''_1x^1 + \dots + a''_nx^n + b'' = 0$ siano ortogonali è che si abbia:*

$$a'_1a''_1 + \dots + a'_na''_n = 0$$

Dimostrazione. In base alla Proposizione 9.31, (a'_1, \dots, a'_n) (risp. (a''_1, \dots, a''_n)) è una n -pla di coefficienti direttori per una qualunque retta r' (risp. r'') ortogonale a \mathcal{E}^{n-1} (risp. a \mathcal{F}^{n-1}). La tesi segue quindi direttamente dalla Proposizione 9.28. \square

Concludiamo il paragrafo introducendo la nozione di orientazione di una retta euclidea e di angolo tra due rette orientate di \mathcal{E}^n .

◆ **Definizione 9.34.** Si dice *retta euclidea orientata* una coppia $(\mathcal{E}^1, \mathbf{l})$, dove \mathcal{E}^1 è una retta dello spazio euclideo \mathcal{E}^n e $\mathbf{l} \in \mathcal{E}^1 - \{\mathbf{0}\}$ è un vettore non nullo della giacitura della retta.⁸ Se $(\mathcal{E}^1, \mathbf{l})$, è una retta orientata, si dice poi *vettore positivo* della giacitura della retta ogni vettore concorde con \mathbf{l} ; inoltre, si dice *n -pla positiva di coefficienti direttori* ogni n -pla costituita dalle componenti - rispetto a un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$ di \mathcal{E}^n - di un vettore positivo di \mathcal{E}^1 .

◆ **Definizione 9.35.** Date due rette orientate $(\mathcal{E}^1, \mathbf{l})$ e $(\mathcal{F}^1, \mathbf{m})$ dello spazio euclideo \mathcal{E}^n , si dice *angolo tra \mathcal{E}^1 e \mathcal{F}^1* , e si denota con $\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1}$, l'angolo $\phi \in [0, \pi]$ tra \mathbf{l} e \mathbf{m} .

Si ha dunque, per definizione,

$$\cos(\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1}) = \cos(\mathbf{l}, \mathbf{m}).$$

Inoltre, poiché i vettori positivi della retta orientata $(\mathcal{E}^1, \mathbf{l})$ sono del tipo $\mathbf{l}' = \lambda \mathbf{l}$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (si veda la Osservazione 8.45), si verifica banalmente che

$$\cos(\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1}) = \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u} \approx \mathbf{l}, \quad \forall \mathbf{v} \approx \mathbf{m}.$$

Si noti che, per definizione, \mathcal{E}^1 e \mathcal{F}^1 sono parallele e concordemente orientate (risp. parallele e discordemente orientate) (risp. ortogonali) se e soltanto se $\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1} = 0$ (risp. $\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1} = \pi$) (risp. $\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1} = \frac{\pi}{2}$).

■ **Proposizione 9.36.** *Se due rette \mathcal{E}^1 e \mathcal{F}^1 hanno coefficienti direttori positivi (l^1, \dots, l^n) e (m^1, \dots, m^n) , allora:*

$$\cos(\widehat{\mathcal{E}^1\mathcal{F}^1}) = \frac{l^1m^1 + \dots + l^nm^n}{\sqrt{(l^1)^2 + \dots + (l^n)^2} \cdot \sqrt{(m^1)^2 + \dots + (m^n)^2}}$$

Dimostrazione. Basta osservare che, in base alla Definizione 9.23, $\mathbf{l} \equiv_{\vec{B}} (l^1, \dots, l^n)$ e $\mathbf{m} \equiv_{\vec{B}} (m^1, \dots, m^n)$ sono due vettori (positivi) di \mathcal{E}^1 e di \mathcal{F}^1 rispettivamente, e poi applicare la Proposizione 8.16 (d) per il calcolo del coseno dell'angolo tra due vettori, tramite le loro componenti rispetto a una base ortonormale. \square

⁸Si noti che orientare una retta equivale a orientare la sua giacitura.

► **Osservazione 9.37.** Supponiamo che, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, l' i -esimo asse coordinato \mathbf{x}_i del riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ sia *canonicamente orientato*, ovvero orientato in modo che l' i -esimo versore della base $\vec{\mathcal{B}}$ sia positivo. Se la retta \mathcal{E}^1 ha - rispetto a \mathcal{R} - coefficienti direttori positivi (l^1, \dots, l^n) , allora

$$\cos(\widehat{\mathcal{E}^1 \mathbf{x}_i}) = \frac{l^i}{\sqrt{(l^1)^2 + \dots + (l^n)^2}}.$$

Si noti che la n -pla costituita dai coseni degli angoli che la retta orientata \mathcal{E}^1 forma con gli n assi coordinati canonicamente orientati

$$(\cos(\widehat{\mathcal{E}^1 \mathbf{x}_1}), \dots, \cos(\widehat{\mathcal{E}^1 \mathbf{x}_n})) = \left(\frac{l^1}{\sqrt{(l^1)^2 + \dots + (l^n)^2}}, \dots, \frac{l^n}{\sqrt{(l^1)^2 + \dots + (l^n)^2}} \right)$$

è una particolare n -pla di coefficienti direttori della retta \mathcal{E}^1 , che individua le componenti - rispetto a $\vec{\mathcal{B}}$ - del versore positivo della giacitura della retta. Ciò giustifica il termine *n -pla di coseni direttori* della retta \mathcal{E}^1 , usato per individuare la n -pla delle componenti di un versore di $\vec{\mathcal{E}}^1$.

7. Distanza euclidea

Nel presente paragrafo, il simbolo \mathcal{E} indicherà sempre uno spazio euclideo. Il simbolo \mathcal{E}^n indicherà uno spazio euclideo di dimensione finita n ; in tal caso, supporremo fissato in \mathcal{E}^n il riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

◆ **Definizione 9.38.** Se $P, Q \in \mathcal{E}$, si dice *distanza (euclidea)* di P da Q il numero reale non negativo

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

► **Osservazione 9.39.** Se i segmenti orientati $(P, Q), (R, S) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ sono equipollenti, cioè se $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ (Definizione 9.3), allora

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{RS}\| = d(R, S).$$

Pertanto, *gli estremi di segmenti orientati equipollenti hanno la stessa distanza*. Si è soliti definire *lunghezza del segmento orientato* (P, Q) la distanza $d(P, Q)$ tra i suoi estremi. Dalle precedenti considerazioni segue allora che *segmenti orientati equipollenti hanno la stessa lunghezza, coincidente con la lunghezza del vettore libero ad essi associato*.

■ **Proposizione 9.40.** Se $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P^1, x_P^2, \dots, x_P^n)$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q^1, x_Q^2, \dots, x_Q^n)$ sono due punti di \mathcal{E}^n , si ha:

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_Q^i - x_P^i)^2}.$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 9.7, si ha $\overrightarrow{PQ} \equiv_{\vec{B}} (x_Q^1 - x_P^1, x_Q^2 - x_P^2, \dots, x_Q^n - x_P^n)$. Poichè \vec{B} è ortonormale in \mathcal{E}^n , dalla Proposizione 8.16 (c) segue subito:

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_Q^i - x_P^i)^2}.$$

□

◆ **Definizione 9.41.** Dati due sottoinsiemi X, Y di \mathcal{E} , si dice *distanza* di X da Y il numero reale non negativo

$$d(X, Y) = \inf\{d(P, Q) \mid P \in X, Q \in Y\}$$

Si osservi che $d(X, Y) = d(Y, X)$ e che, se $X \cap Y \neq \emptyset$, allora $d(X, Y) = 0$. Nel caso in cui $X = \{P\}$, scriveremo $d(P, Y)$, anzichè $d(\{P\}, Y)$. Si dimostra facilmente (tramite il Teorema di Pitagora (Proposizione 8.6)) che, se $X = \{P\}$ e $Y = \mathcal{E}^h$ (sottospazio euclideo di \mathcal{E}^n), allora

$$d(P, \mathcal{E}^h) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in \mathcal{E}^h\} = d(P, P')$$

dove P' indica la *proiezione ortogonale* di P su \mathcal{E}^h , ovvero il punto (unico!) di intersezione tra \mathcal{E}^h e il sottospazio euclideo $(P, {}^\perp \mathcal{E}^h)$ di \mathcal{E}^n , passante per P e avente come giacitura il complemento ortogonale di \mathcal{E}^h .

In particolare, se $h = n - 1$, la distanza tra un punto P e un iperpiano \mathcal{E}^{n-1} si può calcolare direttamente, a partire dalle coordinate di P e da una equazione cartesiana di \mathcal{E}^{n-1} , tramite la seguente:

■ **Proposizione 9.42.** Se un iperpiano \mathcal{E}^{n-1} ha, rispetto a $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, equazione cartesiana $a_1 x^1 + \dots + a_n x^n + b = 0$ e se $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, allora

$$d(P, \mathcal{E}^{n-1}) = \frac{|a_1 \bar{x}^1 + \dots + a_n \bar{x}^n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

Dimostrazione. Sia $P' \equiv_{\mathcal{R}} (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ la proiezione ortogonale di P su \mathcal{E}^{n-1} . Posto $\mathbf{a} \equiv_{\vec{B}} (a_1, \dots, a_n)$, dal Lemma 9.30 segue che $\{\mathbf{a}\}$ è una base di ${}^\perp \mathcal{E}^{n-1}$, e quindi $\overrightarrow{PP'} = \lambda \cdot \mathbf{a}$; pertanto, ricordata la Proposizione 9.7, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, si ha:

$$\tilde{x}^i - \bar{x}^i = \lambda \cdot a_i.$$

Moltiplicando per a_i e sommando per $i \in \mathbb{N}_n$, si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n a_i (\tilde{x}^i - \bar{x}^i) = \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^2 \right).$$

Sommando e sottraendo b nel primo membro di tale uguaglianza, e ricordando che $\sum_{i=1}^n (a_i)^2 = \|\mathbf{a}\|^2$, si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}^i + b - \left(\sum_{i=1}^n a_i \bar{x}^i + b \right) = \lambda \cdot \|\mathbf{a}\|^2,$$

da cui, poiché $P' \equiv_{\mathcal{R}} (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) \in \mathcal{E}^{n-1}$, si ricava:

$$-\left(\sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}^i + b\right) = \lambda \cdot \|\mathbf{a}\|^2, \quad \text{ovvero } \lambda = -\frac{\sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}^i + b}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

A questo punto, essendo $d(P, \mathcal{E}^{n-1}) = d(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \|\lambda \cdot \mathbf{a}\|$, la tesi segue direttamente:

$$d(P, \mathcal{E}^{n-1}) = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\| = \frac{|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}^i + b|}{\|\mathbf{a}\|^2} \cdot \|\mathbf{a}\| = \frac{|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}^i + b|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}^i + b|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2}}.$$

□

8. Simplessi e volumi

Nel presente paragrafo, il simbolo \mathcal{E}^n indicherà sempre uno spazio euclideo di dimensione finita n , in cui supporremo fissato il riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$.

♦ **Definizione 9.43.** Dati $h+1$ punti affinemente indipendenti A_0, A_1, \dots, A_h di \mathcal{E}^n , si dice *h -simpleso di vertici* A_0, A_1, \dots, A_h la chiusura convessa dell'insieme $X = \{A_0, A_1, \dots, A_h\}$, ovvero il più piccolo sottoinsieme convesso⁹ di \mathcal{E}^n , contenente X . Si può provare che l' h -simpleso di vertici A_0, A_1, \dots, A_h coincide con il sottoinsieme di \mathcal{E}^n :

$$\begin{aligned} \langle A_0, A_1, \dots, A_h \rangle &= \{P \in \mathcal{E}^n \mid \overrightarrow{A_0P} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \dots + \lambda_h \overrightarrow{A_0A_h}, \\ &\text{con } \sum_{i=1}^h \lambda_i \leq 1 \text{ e } \lambda_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}_h\}. \end{aligned}$$

Si noti che la nozione di h -simpleso coincide, per $h=2$ e $h=3$, con le usuali nozioni di *triangolo* e *tetraedro*.

♦ **Definizione 9.44.** Dati $h+1$ punti affinemente indipendenti A_0, A_1, \dots, A_h di \mathcal{E}^n , si dice *volume* dell' h -simpleso $\sigma^h = \langle A_0, A_1, \dots, A_h \rangle$ il numero reale positivo¹⁰

$$\mathcal{V}(\sigma^h) = \frac{1}{h!} \cdot \sqrt{\det G},$$

dove

$$G = (g_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}_h}, \quad g_j^i = \langle \overrightarrow{A_0A_i}, \overrightarrow{A_0A_j} \rangle$$

è la matrice di Gram della h -pla di vettori $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_h})$.

⁹Si ricordi che un insieme si dice *convesso* quando, per ogni sua coppia di punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme stesso.

¹⁰Si noti che la Definizione 9.44 presuppone che il determinante della matrice G sia sicuramente positivo, come assicurato dalla Proposizione 8.33 relativa alle proprietà delle matrici di Gram; in alternativa, la dimostrazione di questo fatto può essere agevolmente dedotta dalla dimostrazione della seguente Proposizione 9.45.

Si può verificare facilmente che, per $h = 1$, il volume dell' 1-simplesso $\langle A_0, A_1 \rangle$ coincide con la lunghezza $\|\overrightarrow{A_0 A_1}\|$ del segmento orientato (A_0, A_1) definita nella Osservazione 9.39, ovvero con la distanza $d(A_0, A_1)$. Inoltre, per $h = 2$, il volume del 2-simplesso $\langle A_0, A_1, A_2 \rangle$ coincide con la usuale nozione di *area del triangolo*: infatti, detta H la proiezione ortogonale di A_2 sulla retta r contenente A_0 e A_1 , si ha

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\sigma^2) &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_1} \rangle & \langle \overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2} \rangle \\ \langle \overrightarrow{A_0 A_2}, \overrightarrow{A_0 A_1} \rangle & \langle \overrightarrow{A_0 A_2}, \overrightarrow{A_0 A_2} \rangle \end{pmatrix}} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\|\overrightarrow{A_0 A_1}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{A_0 A_2}\|^2 - \langle \overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2} \rangle^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\|\overrightarrow{A_0 A_1}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{A_0 A_2}\|^2 - \|\overrightarrow{A_0 A_1}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{A_0 A_2}\|^2 \cdot \cos^2(\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2})} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{A_0 A_1}\| \cdot \|\overrightarrow{A_0 A_2}\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2})} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{A_0 A_1}\| \cdot \|\overrightarrow{A_0 A_2}\| \cdot \sin(\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2}) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{A_0 A_1}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2 H}\| = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot d(A_0, A_1) \cdot d(A_2, r).
 \end{aligned}$$

La seguente proposizione consente, una volta fissato un riferimento cartesiano sul sottospazio euclideo h -dimensionale generato dai vertici di un h -simplesso, di effettuare agevolmente il calcolo del volume, utilizzando o le componenti dei vettori $\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_h}$ o direttamente le coordinate dei vertici A_0, A_1, \dots, A_h .

Proposizione 9.45. *Se $\sigma^h = \langle A_0, A_1, \dots, A_h \rangle$ è un h -simplesso di \mathcal{E}^n , sia \mathcal{E}^h il sottospazio euclideo h -dimensionale passante per i vertici A_0, A_1, \dots, A_h e sia \mathcal{R} un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^h . Posto, per ogni $0 \leq i \leq h$, $P_i \equiv_{\mathcal{R}} (x_i^1, \dots, x_i^h)$, si ha:*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\sigma^h) &= \frac{1}{h!} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x_1^1 - x_0^1 & \dots & x_h^1 - x_0^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^h - x_0^h & \dots & x_h^h - x_0^h \end{pmatrix} \right| = \\
 &= \frac{1}{h!} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_h^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^h & x_1^h & \dots & x_h^h \end{pmatrix} \right|.
 \end{aligned}$$

Dimostrazione. Poichè la base $\vec{\mathcal{B}}$ del riferimento cartesiano fissato è ortonormale, si verifica facilmente che (come provato nella Proposizione 8.33)

$$G = {}^t A \cdot A, \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} x_1^1 - x_0^1 & \dots & x_h^1 - x_0^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^h - x_0^h & \dots & x_h^h - x_0^h \end{pmatrix}.$$

Ciò prova - in virtù del Teorema di Binet (Proposizione 3.38) e della Proposizione 3.37 - la prima uguaglianza dell'enunciato. D'altra parte, si può verificare direttamente (sottraendo nella seconda matrice la prima colonna a tutte le successive, e poi applicando il Teorema di Laplace alla prima riga) che:

$$\det \begin{pmatrix} x_1^1 - x_0^1 & \dots & x_h^1 - x_0^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^h - x_0^h & \dots & x_h^h - x_0^h \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_h^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^h & x_1^h & \dots & x_h^h \end{pmatrix}.$$

□

Al fine di definire la nozione di punto medio di un segmento, è necessario innanzitutto verificare che, *dati due punti* $A, B \in \mathcal{E}^n$, *esiste ed è unico il punto* $M \in \mathcal{E}^n$ *tale che* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Infatti, la esistenza è dimostrata prendendo (in virtù dell'assioma SE1) il punto $M \in \mathcal{E}^n$ tale che $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e ricordando la relazione di Chasles:

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}.$$

La unicità segue invece osservando che, se $M' \in \mathcal{E}^n$ è tale che $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{M'B}$, si ha:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{M'A} = \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{M'M}$$

e dunque $M = M'$.

Possiamo dare pertanto la seguente

◆ **Definizione 9.46.** Dati due punti $A, B \in \mathcal{E}^n$, si dice *punto medio* del segmento $\langle A, B \rangle$ l'unico punto $M \in \mathcal{E}^n$ tale che $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

■ **Proposizione 9.47.** Siano $A, B \in \mathcal{E}^n$ due punti di \mathcal{E}^n , con $A \equiv_{\mathcal{R}} (a^1, a^2, \dots, a^n)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (b^1, b^2, \dots, b^n)$. Allora, il punto medio del segmento $\langle A, B \rangle$ è il punto $M \in \langle A, B \rangle$, con

$$M \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{a^1 + b^1}{2}, \frac{a^2 + b^2}{2}, \dots, \frac{a^n + b^n}{2} \right).$$

Dimostrazione. Essendo $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{B}} (b^1 - a^1, b^2 - a^2, \dots, b^n - a^n)$, da $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ segue subito:

$$\overrightarrow{AM} \equiv_{\vec{B}} \left(\frac{b^1 - a^1}{2}, \frac{b^2 - a^2}{2}, \dots, \frac{b^n - a^n}{2} \right).$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \equiv_{\vec{B}} \left(a^1 + \frac{b^1 - a^1}{2}, a^2 + \frac{b^2 - a^2}{2}, \dots, a^n + \frac{b^n - a^n}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{a^1 + b^1}{2}, \frac{a^2 + b^2}{2}, \dots, \frac{a^n + b^n}{2} \right). \end{aligned}$$

□

Il concetto di punto medio di un segmento si generalizza nel concetto di *baricentro* di un h -simpleso.

♦ **Definizione 9.48.** Dato un h -simpleso $\sigma^h = \langle P_0, P_1, \dots, P_h \rangle$ di \mathcal{E}^n , con $P_i \equiv_{\mathcal{R}} (x_i^1, \dots, x_i^n)$ ($0 \leq i \leq h$), si dice *baricentro* di σ^h il punto $H \in \sigma^h$ tale che

$$H \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{\sum_{i=0}^h x_i^1}{h+1}, \dots, \frac{\sum_{i=0}^h x_i^n}{h+1} \right).$$

9. Isometrie

Nel presente capitolo, i simboli $\mathcal{E}^n, \mathcal{F}^n$ indicheranno sempre spazi euclidei della stessa dimensione finita n .

Una applicazione $\alpha : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$ sarà detta *compatibile* se, per ogni $P, Q, R, S \in \mathcal{E}^n$, si ha:

$$(\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}) \Rightarrow (\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} = \overrightarrow{\alpha(R)\alpha(S)}).$$

Se $\alpha : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$ è compatibile, allora resta definita l'applicazione $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^n \rightarrow \vec{\mathcal{F}}^n$ che associa al vettore libero $\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{E}}^n$ il vettore libero $\vec{\alpha}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} \in \vec{\mathcal{F}}^n$.

L'applicazione $\vec{\alpha}$ si dirà *indotta* da α .

♦ **Definizione 9.49.** Una applicazione compatibile $\alpha : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$ sarà detta *isometria* di \mathcal{E}^n in \mathcal{F}^n se l'applicazione indotta $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^n \rightarrow \vec{\mathcal{F}}^n$ è una trasformazione ortogonale (biunivoca)¹¹ di $\vec{\mathcal{E}}^n$ in $\vec{\mathcal{F}}^n$.

► **Osservazione 9.50.** Ogni isometria $\alpha : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$ tra due spazi euclidei \mathcal{E}^n e \mathcal{F}^n è una applicazione biunivoca che conserva le distanze:

$$d(\alpha(P), \alpha(Q)) = d(P, Q) \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}^n.$$

Infatti, per la Definizione 9.38 e per le proprietà delle trasformazioni ortogonali (Definizione 8.19 e successive osservazioni), si ha:

$$d(\alpha(P), \alpha(Q)) = \|\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}\| = \|\vec{\alpha}(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P, Q) \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}^n.$$

La biunivocità è invece conseguenza immediata della analoga proprietà di ogni trasformazione ortogonale tra spazi vettoriali euclidei della stessa dimensione (Definizione 8.19 e successive osservazioni), unita all'assioma (SE1) (Definizione 9.1).

■ **Proposizione 9.51.** Sia $\alpha : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$ una isometria di \mathcal{E}^n in \mathcal{F}^n , e siano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ e $\mathcal{R}' = (O', \vec{\mathcal{B}}')$ due riferimenti cartesiani su \mathcal{E}^n e \mathcal{F}^n rispettivamente. Indicate con:

(x) $\in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ la colonna delle coordinate cartesiane di un generico punto $P \in \mathcal{E}^n$ rispetto a \mathcal{R} ,

¹¹Nel caso in cui l'applicazione indotta $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^n \rightarrow \vec{\mathcal{F}}^n$ sia semplicemente un isomorfismo di spazi vettoriali, allora la applicazione α si dice usualmente *affinità* di \mathcal{E}^n in \mathcal{F}^n . Si noti che la nozione di affinità può essere data anche supponendo che \mathcal{E}^n e \mathcal{F}^n siano due spazi affini della stessa dimensione, e non necessariamente due spazi euclidei (si veda la Osservazione 9.5).

$(y), (b) \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ le colonne delle coordinate cartesiane dei punti $\alpha(P), \alpha(O) \in \mathcal{F}^n$ rispetto a \mathcal{R}' ,
 $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ la matrice (ortogonale) associata alla trasformazione ortogonale indotta $\vec{\alpha} : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$ rispetto alle basi (ortonormali) $\vec{\mathcal{B}}$ e $\vec{\mathcal{B}}'$,
 si ha:

$$(*) \quad (y) = A \cdot (x) + (b).$$

Dimostrazione. Per la relazione di Chasles e per la definizione di trasformazione lineare indotta da una isometria, si ha:

$$\overrightarrow{O'\alpha(P)} = \overrightarrow{O'\alpha(O)} + \overrightarrow{\alpha(O)\alpha(P)} = \overrightarrow{O'\alpha(O)} + \vec{\alpha}(\overrightarrow{OP}).$$

Questa uguaglianza tra vettori liberi, espressa in termini di componenti rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}'$, diventa:

$$(y) = (b) + (x'),$$

dove (x') denota la colonna delle componenti del vettore libero $\vec{\alpha}(\overrightarrow{OP})$ rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}'$. Poichè la colonna (x) delle coordinate cartesiane del punto P rispetto al riferimento \mathcal{R} coincide con la colonna delle componenti del vettore libero \overrightarrow{OP} rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}$, le equazioni della trasformazione ortogonale indotta $\vec{\alpha} : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$ rispetto alle basi (ortonormali) $\vec{\mathcal{B}}$ e $\vec{\mathcal{B}}'$ sono esattamente

$$(x') = A(x), \quad \text{con } A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R});$$

la tesi segue quindi direttamente, sostituendo questa relazione nella uguaglianza precedente. □

Le equazioni (*) vengono dette *equazioni della isometria α , relativamente ai riferimenti cartesiani \mathcal{R} e \mathcal{R}'* ; la matrice ortogonale A si dice *associata a α relativamente a \mathcal{R} e \mathcal{R}'* . Se i due spazi euclidei \mathcal{E}^n e \mathcal{F}^n coincidono, si sceglie usualmente $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$, e la matrice A si dice *associata a α relativamente a \mathcal{R}* ; in tal caso α viene anche detta *isometria di \mathcal{E}^n* .

► **Osservazione 9.52.** Non è difficile verificare che ogni isometria trasforma sottospazi euclidei di dimensione h di \mathcal{E}^n in sottospazi euclidei di dimensione h di \mathcal{F}^n : ciò può essere dedotto dalla definizione di sottospazio euclideo, oppure sostituendo una rappresentazione parametrica del sottospazio $\mathcal{E}^h \subset \mathcal{E}^n$ nelle equazioni (*).

◆ **Definizione 9.53.** Uno spazio euclideo \mathcal{E}^n si dice *orientato* se è orientata, come spazio vettoriale euclideo, la sua giacitura $\vec{\mathcal{E}}^n$ (Definizione 8.44).¹²

◆ **Definizione 9.54.** Una isometria α di uno spazio euclideo orientato \mathcal{E}^n si dice *diretta* (risp. *inversa*) se $\vec{\alpha}$ conserva (risp. rovescia) l'orientazione di $\vec{\mathcal{E}}^n$ (Definizione 8.46).

Dalla Proposizione 9.51, unita alla Proposizione 8.47 che caratterizza le matrici associate alle trasformazioni ortogonali che conservano (risp. rovesciano) l'orientazione, si deduce facilmente la seguente caratterizzazione delle isometrie dirette (risp. inverse):

¹²La presente definizione estende agli spazi euclidei di dimensione arbitraria la definizione di orientazione di una retta euclidea già anticipata nella Definizione 9.34.

■ **Proposizione 9.55.** Sia \mathcal{E}^n uno spazio euclideo orientato e α una isometria di \mathcal{E}^n . Allora, α è una isometria diretta (risp. inversa) se e solo se, rispetto a un qualunque riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ di \mathcal{E}^n , la matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ associata a α ha $\det A = 1$ (risp. $\det A = -1$).

Le definizioni seguenti introducono alcune classi notevoli di isometrie, che saranno di particolare rilievo soprattutto nel caso del piano euclideo e dello spazio euclideo di dimensione tre.

◆ **Definizione 9.56.** Fissato un vettore $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}^n$, si dice *traslazione di ampiezza \mathbf{v}* ¹³ la applicazione $\alpha_{\mathbf{v}} : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ che ad ogni punto $P \in \mathcal{E}^n$ associa l'unico punto P' di \mathcal{E}^n tale che $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{v}$ (si ricordi l'assioma (SE1)).

Fissato in \mathcal{E} un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, si verifica facilmente che, se $\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (a^1, a^2, \dots, a^n)$, allora $\alpha_{\mathbf{v}}$ associa ad ogni punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, x^2, \dots, x^n)$ il punto $\alpha_{\mathbf{v}}(P) \equiv_{\mathcal{R}} (y^1, y^2, \dots, y^n)$ tale che

$$y^i = x^i + a^i \quad \forall i \in \mathbb{N}_n.$$

Ogni traslazione è pertanto una isometria diretta di \mathcal{E}^n , la cui trasformazione lineare indotta è la trasformazione identica di $\vec{\mathcal{E}}^n$.

◆ **Definizione 9.57.** Una isometria diretta α dello spazio euclideo \mathcal{E}^n che lasci fissi tutti i punti di un sottospazio \mathcal{E}^h si dice *rotazione intorno ad \mathcal{E}^h* . Il sottospazio \mathcal{E}^h è detto *spazio di rotazione* di α ; se $h = 0, 1, 2$, allora \mathcal{E}^h è detto *rispettivamente centro, asse, piano di rotazione*.

Esempio 9.10. Nel piano euclideo \mathcal{E}^2 , dotato di un riferimento cartesiano \mathcal{R} , fissiamo $\phi \in [0, 2\pi[$; l'applicazione $\alpha_{\phi} : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ che al generico punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y)$ associa il punto

$$\alpha_{\phi}(P) \equiv_{\mathcal{R}} (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi),$$

è una isometria diretta del piano euclideo, che lascia fissa l'origine O del riferimento \mathcal{R} , ovvero - secondo la Definizione 9.57 - è una rotazione del piano euclideo di centro O . L'isometria α_{ϕ} è usualmente detta *rotazione di ampiezza ϕ* attorno all'origine del riferimento cartesiano. Si noti che la trasformazione lineare indotta da α_{ϕ} è la trasformazione ortogonale ρ_{ϕ} considerata nell'Esempio 8.15.

◆ **Definizione 9.58.** Fissato un punto $C \in \mathcal{E}^n$, per ogni punto $P \in \mathcal{E}^n$, si dice *simmetrico di P rispetto a C* il punto $P' = s_C(P) \in \mathcal{E}^n$ univocamente individuato dalla condizione $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CP'}$. L'applicazione

$$s_C : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$$

$$P \rightarrow s_C(P)$$

è detta *simmetria (centrale) di centro C* .

¹³La nozione di *traslazione* era già stata introdotta, nel caso degli spazi vettoriali, nella Osservazione 6.13.

Dalla Definizione 9.58 segue che il simmetrico di P rispetto a C è l'unico punto P' tale che C risulti il punto medio del segmento $\langle P, P' \rangle$.

Se, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , si ha $C \equiv_{\mathcal{R}} (c^1, c^2, \dots, c^n)$, $P \equiv_{\mathcal{R}} (x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $P' \equiv_{\mathcal{R}} (y^1, y^2, \dots, y^n)$, allora la Proposizione 9.47 implica che, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$, si ha:

$$c^i = \frac{x^i + y^i}{2}.$$

Pertanto, le coordinate del punto simmetrico di un punto dato P rispetto a C possono essere direttamente ottenute dalle coordinate di P e di C , attraverso la relazione:

$$y^i = -x^i + 2c^i, \quad \forall i \in \mathbb{N}_n.$$

La simmetria di centro C risulta pertanto essere una isometria, la cui trasformazione lineare indotta è l'opposto della trasformazione identica di \mathcal{E}^n (ovvero, associa a ogni vettore \mathbf{u} il suo opposto $-\mathbf{u}$). La simmetria centrale di centro $C \in \mathcal{E}^n$ è quindi una isometria diretta per n pari e una isometria inversa per n dispari.

Si noti inoltre che *l'unico punto lasciato fisso da una simmetria centrale è il suo centro C .*

Esempio 9.11. Nel piano euclideo \mathcal{E}^2 , se $C \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2)$, allora il punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y)$ ha come simmetrico rispetto a C il punto $P' \equiv_{\mathcal{R}} (-x + 2, -y + 4)$. Se si desidera determinare la retta r' , simmetrica della retta $r : x + 2y - 1 = 0$ rispetto a C , allora si può procedere nel modo seguente:

- si scelgono due punti $A, B \in r$ (ad esempio, $A \equiv_{\mathcal{R}} (-1, 1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0)$);
- si determinano i due punti simmetrici A', B' di A, B rispetto a C (nel nostro caso, $A' \equiv_{\mathcal{R}} (3, 3)$ e $B' \equiv_{\mathcal{R}} (1, 4)$);
- la retta r' è la retta passante per A' e B' .

Si ottiene dunque: $r' : x + 2y - 9 = 0$.¹⁴

Esempio 9.12. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , se $C \equiv_{\mathcal{R}} (3, 1, 0)$, allora il punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ ha come simmetrico rispetto a C il punto $P' \equiv_{\mathcal{R}} (-x + 6, -y + 2, -z)$. Operando nel modo descritto nell'esempio precedente, è possibile determinare la retta r' ,

simmetrica della retta $r : \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ rispetto a C : scelti $A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 1, 1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (3, 0, 3)$, si ha $A' \equiv_{\mathcal{R}} (5, 1, -1)$ e $B' \equiv_{\mathcal{R}} (3, 2, -3)$, da cui

$$r' : \begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ x - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Analogamente, è possibile determinare il piano π' , simmetrico del piano $\pi : 3x + 2y - z - 6 = 0$ rispetto a C : scelti $R \equiv_{\mathcal{R}} (2, 0, 0)$, $S \equiv_{\mathcal{R}} (0, 3, 0)$ e $T \equiv_{\mathcal{R}} (0, 0, -6)$ ($R, S, T \in \pi$), i loro simmetrici rispetto a C sono $R' \equiv_{\mathcal{R}} (4, 2, 0)$, $S' \equiv_{\mathcal{R}} (6, -1, 0)$ e $T' \equiv_{\mathcal{R}} (6, 2, 6)$, da cui

$$\pi' : 3x + 2y - z - 16 = 0. \quad ^{15}$$

¹⁴Si noti che la retta simmetrica in una simmetria centrale è sempre parallela alla retta data.

¹⁵Si noti che anche il piano simmetrico in una simmetria centrale è sempre parallelo al piano dato.

◆ **Definizione 9.59.** Fissato un iperpiano \mathcal{E}^{n-1} di \mathcal{E}^n , con $n \geq 2$, per ogni punto $P \in \mathcal{E}^n$, sia M la proiezione ortogonale di P su \mathcal{E}^{n-1} . Si dice *simmetrico di P rispetto a \mathcal{E}^{n-1}* il punto $P' = s_{\mathcal{E}^{n-1}}(P) \in \mathcal{E}^n$ univocamente determinato dalla condizione $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$. L'applicazione

$$s_{\mathcal{E}^{n-1}} : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n \\ P \rightarrow s_{\mathcal{E}^{n-1}}(P)$$

è detta *simmetria (ortogonale) rispetto a \mathcal{E}^{n-1}* .

Dalla Definizione 9.59 segue che il simmetrico di P rispetto a \mathcal{E}^{n-1} è l'unico punto P' tale che $M = \mathcal{E}^{n-1} \cap (P, {}^\perp \mathcal{E}^{n-1})$ risulti il punto medio del segmento $\langle P, P' \rangle$. È possibile dimostrare che *ogni simmetria ortogonale rispetto a un iperpiano \mathcal{E}^{n-1} è una isometria dello spazio euclideo \mathcal{E}^n , che lascia fissi tutti e soli i punti dell'iperpiano considerato*. Tale isometria è sempre inversa, per ogni n : infatti, se $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$ è un sistema di riferimento cartesiano di \mathcal{E}^n in cui l'origine O appartiene all'iperpiano \mathcal{E}^{n-1} e i primi $n-1$ vettori della base ordinata (ortonormale) \vec{B} appartengono a \mathcal{E}^{n-1} , le equazioni relativamente a \mathcal{R} della simmetria ortogonale sono:

$$\begin{cases} y^1 &= x^1 \\ \vdots &\vdots \\ y^{n-1} &= x^{n-1} \\ y^n &= -x^n. \end{cases}$$

Si noti infine che ogni simmetria ortogonale è *involutoria*: componendola con se stessa si ottiene infatti banalmente la identità su \mathcal{E}^n .

Esempio 9.13. Consideriamo nel piano euclideo \mathcal{E}^2 la retta r avente, rispetto a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , equazione $r : x - y - 1 = 0$. Per ogni punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y})$, la retta ortogonale a r passante per P ha equazione $t : x + y - \bar{x} - \bar{y} = 0$; allora, le coordinate cartesiane del punto $M = r \cap t$ verificano il sistema $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - \bar{x} - \bar{y} = 0, \end{cases}$

da cui segue $M \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{\bar{x} + \bar{y} + 1}{2}, \frac{\bar{x} + \bar{y} - 1}{2} \right)$. Ricordando la Proposizione 9.47 si ha quindi che il simmetrico di $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y})$, rispetto a r è il punto $P' \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{y} + 1, \bar{x} - 1)$. Se si desidera determinare la retta s' , simmetrica della retta $s : x = 0$ rispetto alla retta r , si può procedere scegliendo, ad esempio, i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (0, 2)$ sulla retta s , e determinando i rispettivi punti simmetrici $A' \equiv_{\mathcal{R}} (2, -1)$ e $B' \equiv_{\mathcal{R}} (3, -1)$ rispetto a r ; pertanto, si ottiene che la retta cercata è

$$s' : y = -1. \quad {}^{16}$$

Esempio 9.14. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , fissato il piano $\pi : x + 2y - 3z - 7 = 0$, cerchiamo il punto simmetrico dell'origine rispetto a π . Poichè la retta ortogonale a π

¹⁶Si noti che la retta simmetrica nella simmetria ortogonale rispetto a r ha la medesima intersezione con r della retta data.

passante per l'origine ha equazioni parametriche

$$t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

il punto di intersezione $M = \pi \cap t$ è individuato dal valore $\lambda = \frac{1}{2}$ del parametro, ovvero $M \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$; mediante la Proposizione 9.47 otteniamo quindi che il simmetrico dell'origine O rispetto a π è il punto $O' \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2, -3)$.

► **Osservazione 9.60.** Si noti che, se $\mathcal{R}' = (O', \vec{\mathcal{B}}')$ e $\mathcal{R}'' = (O'', \vec{\mathcal{B}}'')$ sono due riferimenti cartesiani di uno spazio euclideo n -dimensionale \mathcal{E}^n , le equazioni del cambiamento di riferimento da \mathcal{R}' a \mathcal{R}'' (Proposizione 9.8) rappresentano una isometria dello spazio euclideo standard \mathbb{R}^n . Tale isometria risulta diretta (risp. inversa) se e solo se le basi ortonormali $\vec{\mathcal{B}}'$ e $\vec{\mathcal{B}}''$ sono concordi (risp. discordi).

Concludiamo il paragrafo con un risultato che dimostra come il problema di classificare le isometrie di uno spazio euclideo \mathcal{E}^n abbia la sua chiave di volta nella classificazione delle isometrie dirette.¹⁷

■ **Proposizione 9.61.** *Fissato un iperpiano \mathcal{E}^{n-1} di \mathcal{E}^n , per ogni isometria inversa α di \mathcal{E}^n esiste una ed una sola isometria diretta α^+ di \mathcal{E}^n , tale che:*

$$\alpha = \alpha^+ \circ s_{\mathcal{E}^{n-1}}$$

dove $s_{\mathcal{E}^{n-1}}$ è la simmetria ortogonale rispetto ad \mathcal{E}^{n-1} .

Dimostrazione. Si consideri $\alpha^+ = \alpha \circ s_{\mathcal{E}^{n-1}}$. Poichè $s_{\mathcal{E}^{n-1}}$ è una isometria inversa e il prodotto di due isometrie inverse è evidentemente una isometria diretta, α^+ è una isometria diretta di \mathcal{E}^n . Dal momento che $s_{\mathcal{E}^{n-1}}$ è involutoria, si ha:

$$\alpha = \alpha^+ \circ (s_{\mathcal{E}^{n-1}})^{-1} = \alpha^+ \circ s_{\mathcal{E}^{n-1}}.$$

Inoltre, da $\alpha = \beta \circ s_{\mathcal{E}^{n-1}}$ si deduce subito:

$$\beta = \alpha \circ (s_{\mathcal{E}^{n-1}})^{-1} = \alpha \circ s_{\mathcal{E}^{n-1}} = \alpha^+.$$

La tesi risulta così completamente provata. □

¹⁷Nel caso del piano euclideo, la classificazione delle isometrie dirette (che sono o traslazioni o rotazioni attorno ad un punto) sarà banale conseguenza del teorema completo di classificazione delle isometrie piane: si veda la successiva Proposizione 10.15. Nel caso 3-dimensionale, invece, un risultato classico, noto come Teorema di Mozzi, prova che ogni isometria diretta di \mathcal{E}^3 è una *rototraslazione* (ovvero si ottiene componendo una rotazione attorno a una retta r con una traslazione di ampiezza $\mathbf{v} \in \vec{r}$).

Il piano euclideo

1. I sottospazi del piano euclideo: punti e rette

Nel presente capitolo, il simbolo \mathcal{E}^2 indicherà sempre un piano euclideo.

Ovviamente, i sottospazi di \mathcal{E}^2 possono avere dimensione 0 (i punti di \mathcal{E}^2), 1 (le rette, che sono contemporaneamente iperpiani di \mathcal{E}^2) e 2 (il piano \mathcal{E}^2 stesso).

Fissato in \mathcal{E}^2 un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$, se $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y)$ è un punto di \mathcal{E}^2 , allora le coordinate cartesiane x e y sono dette rispettivamente *ascissa* e *ordinata* di P (relativamente a \mathcal{R}). Le rette coordinate del riferimento \mathcal{R} sono l'*asse x* (individuato dall'origine O e dalla direzione del vettore \mathbf{i}) e l'*asse y* (individuato dall'origine O e dalla direzione del vettore \mathbf{j}) (Figura 10.1).

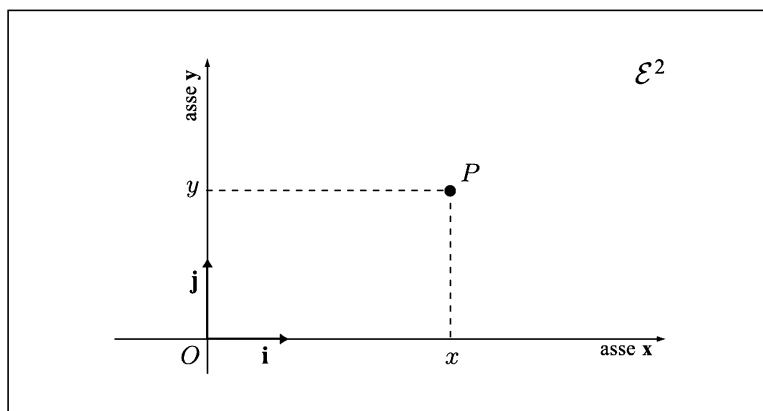


Figura 10.1

Per la Proposizione 9.15 (caso $h = 1$), ogni retta r di \mathcal{E}^2 è univocamente determinata da due qualunque suoi punti distinti $A, B \in r$. Posto $A \equiv_{\mathcal{R}} (x_A, y_A)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B)$, poiché il vettore (non nullo) $\vec{AB} \equiv_{\vec{B}} (x_B - x_A, y_B - y_A)$ genera la giacitura della retta r , un punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y)$ appartiene a r se e soltanto se $\vec{AP} \in \mathbf{L}(\vec{AB})$, ovvero se $(x - x_A, y - y_A) \in \mathbf{L}((x_B - x_A, y_B - y_A))$.

Da questa affermazione si ricavano entrambi i tipi di rappresentazione già visti in generale nel § 4 del Capitolo 9:

- la retta r ha *equazione cartesiana*

$$\det \begin{pmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{pmatrix} = 0$$

che, una volta sviluppata, risulta del tipo

$$ax + by + c = 0, \quad \text{con } (a, b) \neq (0, 0);$$

- la retta r ha *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \end{cases}$$

in cui i coefficienti del parametro reale t sono non entrambi nulli.

Nel caso in cui si abbia contemporaneamente $x_B - x_A \neq 0$ e $y_B - y_A \neq 0$ (ovvero, quando i punti A e B hanno diversa ascissa e diversa ordinata), è possibile ricavare il parametro t dalle equazioni parametriche, ottenendo la cosiddetta *equazione frazionaria* della retta r :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Infine, nel caso in cui $x_B - x_A \neq 0$, la retta r ammette una equazione del tipo

$$y = mx + q$$

con $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$; tale equazione è nota come *equazione esplicita* della retta r (rispetto a y), e gli scalari m e q sono comunemente detti *coefficiente angolare* e *ordinata all'origine* di r .

Esempio 10.1. La retta r passante per i punti (distinti) $A \equiv_{\mathcal{R}} (2, 1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (3, -2)$ ha equazione cartesiana

$$\det \begin{pmatrix} x - 2 & 3 - 2 \\ y - 1 & -2 - 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ovvero} \quad 3x + y - 7 = 0.$$

La retta r ha poi equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$

equazione frazionaria

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-3}$$

ed equazione esplicita

$$y = -3x + 7.$$

La retta s passante per i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (2, 1)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (5, 1)$ ha invece equazione cartesiana

$$\det \begin{pmatrix} x - 2 & 5 - 2 \\ y - 1 & 1 - 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ovvero} \quad y - 1 = 0,$$

equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$ equazione esplicita $y = 1$, ma non ammette equazione frazionaria.

Si noti poi che, data una qualunque delle rappresentazioni della retta r , è possibile ricavare direttamente una coppia (l, m) di coefficienti direttori di r :

- nel caso della rappresentazione cartesiana $ax + by + c = 0$, si ha $(l, m) = (-b, a)$: infatti, $(-b, a)$ è soluzione della equazione omogenea associata (che rappresenta, rispetto alla base \vec{B} , la giacitura della retta).
- nel caso della rappresentazione parametrica, (l, m) coincide con la coppia dei coefficienti del parametro t : infatti, tali coefficienti sono costituiti dalle componenti $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ del vettore libero \overrightarrow{AB} , che genera la giacitura della retta.
- nel caso della rappresentazione frazionaria, (l, m) coincide con la coppia dei denominatori: infatti, tali denominatori sono costituiti dalle componenti $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ del vettore libero \overrightarrow{AB} , che genera la giacitura della retta.
- nel caso della rappresentazione in forma esplicita, una coppia di coefficienti direttori è data da $(1, m)$, dove m è il coefficiente angolare di r : infatti, la equazione esplicita $y = mx + q$ corrisponde alla equazione cartesiana $mx - y + q = 0$, in cui $(-b, a) = (1, m)$.

Da queste osservazioni deduciamo il modo per ottenere le equazioni della retta s parallela a una retta data e passante per un fissato punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y})$:

- se r ha rappresentazione cartesiana $ax + by + c = 0$, allora s ha rappresentazione cartesiana $a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) = 0$;
- se r ha rappresentazione parametrica $\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \end{cases}$, allora s ha rappresentazione parametrica $\begin{cases} x = \bar{x} + l \cdot t \\ y = \bar{y} + m \cdot t \end{cases}$;
- se r ha rappresentazione frazionaria $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$, allora s ha rappresentazione frazionaria $\frac{x - \bar{x}}{l} = \frac{y - \bar{y}}{m}$.
- se r ha equazione esplicita $y = mx + q$, allora s ha equazione esplicita $y = \bar{y} + m(x - \bar{x})$.

Infatti, in tutti i casi considerati, le equazioni scritte individuano una retta s con i medesimi coefficienti direttori di r (e quindi, per la Proposizione 9.26, si ha $s//r$) e risultano verificate dalle coordinate del punto P (e quindi, $P \in s$); il risultato segue pertanto dal Teorema 9.17.

Esempio 10.2. La retta r (risp. s) considerata nell'Esempio 10.1 ha coefficienti direttori $(1, -3)$ (risp. $(1, 0)$) e coefficiente angolare -3 (risp. 0).

La proposizione seguente ci permette di studiare la mutua posizione di due rette di \mathcal{E}^2 , a partire dalle loro equazioni cartesiane.

■ **Proposizione 10.1.** Siano r' e r'' due rette di \mathcal{E}^2 e siano rispettivamente $a'x + b'y + c' = 0$ e $a''x + b''y + c'' = 0$ due loro equazioni cartesiane, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora:

(i) r' e r'' coincidono se e soltanto se

$$\varrho \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 1$$

(ii) r' e r'' sono parallele disgiunte se e soltanto se

$$\varrho \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{e} \quad \varrho \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$$

(iii) r' e r'' sono incidenti in un punto se e soltanto se

$$\varrho \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} = 2 \quad (\text{ovvero: } \det \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix} \neq 0)$$

(iv) r' e r'' non sono mai sghembe.

Dimostrazione. L'intersezione (eventualmente vuota) tra le due rette r' e r'' è ovviamente rappresentata, relativamente al riferimento cartesiano \mathcal{R} , dal sistema lineare

$$\mathbf{S} : \begin{cases} a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0, \end{cases}$$

mentre l'intersezione tra le due giaciture \vec{r}' e \vec{r}'' è rappresentata, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, dal sistema omogeneo associato

$$\mathbf{S}_0 : \begin{cases} a'x + b'y = 0 \\ a''x + b''y = 0. \end{cases}$$

La tesi segue allora facilmente, osservando che:

- (i) se r' e r'' sono coincidenti, $r' \cap r''$ deve contenere tutti i punti di r' (ovvero di r''), e quindi il sistema \mathbf{S} deve essere possibile con ∞^1 soluzioni;
- (ii) se r' e r'' sono parallele disgiunte, deve essere $r' \cap r'' = \emptyset$, mentre $\vec{r}' \cap \vec{r}''$ deve contenere tutti i vettori di \vec{r}' (ovvero di \vec{r}''), e quindi il sistema \mathbf{S} deve essere impossibile, mentre il sistema \mathbf{S}_0 deve avere ∞^1 soluzioni;
- (iii) se r' e r'' sono incidenti in un punto P , deve essere $r' \cap r'' = \{P\}$, quindi il sistema \mathbf{S} deve essere possibile e determinato;
- (iv) r' e r'' non possono essere sghembe, perché tutti i casi che si possono presentare nella discussione dei sistemi \mathbf{S} e \mathbf{S}_0 sono già stati esaminati ai punti precedenti.

□

Esempio 10.3. Nel piano euclideo \mathcal{E}^2 , dotato di un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , si considerino le rette

$$r : 2x - y + 3 = 0, \quad r' : 4x - 2y + 6 = 0, \quad s : 6x - 3y - 2 = 0, \quad t : 3x - 2y + 5 = 0.$$

La Proposizione 10.1 consente di affermare che r e r' coincidono, che r e s sono parallele disgiunte, e che r e t (ovvero s e t) sono incidenti in un punto.

Le seguenti proposizioni mettono a confronto le condizioni di parallelismo e le condizioni di ortogonalità tra due rette di \mathcal{E}^2 , l'una nel caso di rappresentazioni cartesiane, l'altra nel caso di equazioni esplicite; inoltre, ci forniscono le formule dirette per calcolare l'angolo formato da due date rette orientate.

■ **Proposizione 10.2.** *Siano r' e r'' due rette di \mathcal{E}^2 e siano rispettivamente $a'x + b'y + c' = 0$ e $a''x + b''y + c'' = 0$ due loro equazioni cartesiane, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora:*

(i) r' e r'' sono parallele se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che:

$$(a', b') = \lambda \cdot (a'', b'')$$

(ii) r' e r'' sono ortogonali se e soltanto se:

$$a'a'' + b'b'' = 0$$

(iii) se r' e r'' sono orientate in modo che $(-b', a')$ e $(-b'', a'')$ siano coppie di coefficienti direttori positivi, $\widehat{r'r''}$ è il numero reale (compreso tra 0 e π) tale che

$$\cos(\widehat{r'r''}) = \frac{a'a'' + b'b''}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2} \cdot \sqrt{(a'')^2 + (b'')^2}}$$

Dimostrazione. Basta ricordare che $(-b', a')$ e $(-b'', a'')$ sono coppie di coefficienti direttori per r' e r'' , e poi fare uso, rispettivamente, della Prop. 9.26 (a) (ovvero della Prop. 10.1 (i) e (ii)), della Prop. 9.28 e della Prop. 9.36. □

■ **Proposizione 10.3.** *Siano r' e r'' due rette di \mathcal{E}^2 e siano rispettivamente $y = m'x + q'$ e $y = m''x + q''$ due loro equazioni esplicite, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora:*

(i) r' e r'' sono parallele se e soltanto se

$$m' = m''$$

(ii) r' e r'' sono ortogonali se e soltanto se:

$$m' \cdot m'' = -1$$

(iii) se r' e r'' sono orientate in modo che $(1, m')$ e $(1, m'')$ siano coppie di coefficienti direttori positivi, $\widehat{r'r''}$ è il numero reale (compreso tra 0 e π) tale che

$$\cos(\widehat{r'r''}) = \frac{m'm'' + 1}{\sqrt{(m')^2 + 1} \cdot \sqrt{(m'')^2 + 1}}$$

Dimostrazione. Basta ricordare che $(1, m')$ e $(1, m'')$ sono coppie di coefficienti direttori per r' e r'' , e poi fare uso, rispettivamente, della Prop. 9.26 (a) (ovvero della Prop. 10.1 (i) e (ii)), della Prop. 9.28 e della Prop. 9.36. □

Esempio 10.4. Data la retta $r : 3x + y - 7 = 0$ dell'Esempio 10.1, la retta t parallela a r passante per il punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (-1, 4)$ ha equazione

$$t : 3(x + 1) + (y - 4) = 0$$

e la retta t' ortogonale a r passante per il punto $Q \equiv_{\mathcal{R}} (3, 0)$ ha equazione

$$t' : (x - 3) - 3(y - 0) = 0.$$

Considerata poi la retta $s : y = 1$ del medesimo Esempio 10.1, se r e s sono orientate in modo che $(-1, 3)$ e $(-1, 0)$ siano coppie di coefficienti direttori positivi, l'angolo tra r e s è $\phi \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \phi = \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

► **Osservazione 10.4.** Ricordando la Osservazione 9.37, se \mathbf{x} e \mathbf{y} denotano i due assi coordinati del riferimento \mathcal{R} canonicamente orientati (ovvero orientati in modo che i versori \mathbf{i} e \mathbf{j} siano positivi), allora la retta r di equazione esplicita $y = mx + q$, orientata in modo che il vettore di componenti $(1, m)$ (risp. $(-1, -m)$) sia positivo, ha

$$\cos(\widehat{r\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad \cos(\widehat{r\mathbf{y}}) = \sin(\widehat{r\mathbf{x}}) = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

(risp.

$$\cos(\widehat{r\mathbf{x}}) = \frac{-1}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad \cos(\widehat{r\mathbf{y}}) = \sin(\widehat{r\mathbf{x}}) = \frac{-m}{\sqrt{m^2 + 1}})$$

Da questo segue, qualunque sia l'orientazione assegnata a r , che $\text{tg}(\widehat{r\mathbf{x}}) = m$; pertanto, *il coefficiente angolare m della equazione esplicita coincide con la tangente dell'angolo che la retta (arbitrariamente orientata) forma con l'asse \mathbf{x} , canonicamente orientato, del riferimento \mathcal{R} .*

◆ **Definizione 10.5.** Dato un punto $C \in \mathcal{E}^2$, si dice *fascio (proprio) di rette di centro C* l'insieme costituito da tutte e sole le rette di \mathcal{E}^2 che contengono C .

◆ **Definizione 10.6.** Dato un vettore $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}^2$, si dice *fascio (improprio) di rette di direzione \mathbf{v}* l'insieme costituito da tutte e sole le rette di \mathcal{E}^2 che sono parallele alla direzione individuata dal vettore \mathbf{v} .

Il seguente risultato ci fornisce le equazioni di tutte le rette appartenenti a un fissato fascio proprio (risp. improprio), a partire dalla rappresentazione cartesiana di due elementi (risp. un elemento) del fascio stesso.

■ **Proposizione 10.7.**

- (i) Siano r' e r'' due rette non parallele di \mathcal{E}^2 e siano rispettivamente $a'x + b'y + c' = 0$ e $a''x + b''y + c'' = 0$ due loro equazioni cartesiane, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora, detto C il punto di intersezione di r' e r'' , l'equazione

$$\lambda(a'x + b'y + c') + \mu(a''x + b''y + c'') = 0$$

rappresenta, al variare dei parametri reali $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, tutte e sole le rette del fascio (proprio) di centro C .

- (ii) Sia r una retta di \mathcal{E}^2 e sia $ax + by + c = 0$ una sua equazione cartesiana, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora la equazione

$$ax + by + k = 0$$

rappresenta, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, tutte e sole le rette del fascio (improprio) di direzione $\mathbf{v} \in \vec{r}$ (cioè tutte le rette parallele a r).

Dimostrazione. (i) Poichè $\{C\} = r' \cap r''$, le coordinate di C verificano entrambe le equazioni $a'x + b'y + c' = 0$ e $a''x + b''y + c'' = 0$, e quindi verificano anche ogni equazione ottenuta da quelle tramite combinazione lineare. Ciò prova che tutte le rette di equazione

$$\lambda(a'x + b'y + c') + \mu(a''x + b''y + c'') = 0,$$

al variare dei parametri reali $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, appartengono al fascio di centro C .

Viceversa, se s è una retta del fascio di centro C , allora $s \cap (r' \cap r'') = \{C\} = r' \cap r''$; pertanto, l'equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ di s , relativamente al riferimento \mathcal{R} , deve essere combinazione lineare delle due equazioni cartesiane di r' e r'' . Ciò equivale ad affermare che deve esistere una coppia $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$, tale che

$$ax + by + c = \lambda(a'x + b'y + c') + \mu(a''x + b''y + c'').$$

- (ii) E' sufficiente osservare che ogni retta di equazione $ax + by + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, è parallela a r , e che ogni retta parallela a r ha (per la Proposizione 10.2) equazione $(\lambda a)x + (\lambda b)y + d = 0$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $d \in \mathbb{R}$, ovvero

$$ax + by + k = 0, \quad \text{con } k = \frac{d}{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

□

Esempio 10.5. Dato nel piano euclideo \mathcal{E}^2 il punto $C \equiv (1, 2)$, il fascio di rette di centro C può essere rappresentato dall'equazione

$$\lambda(x - 1) + \mu(y - 2) = 0,$$

ottenuto scegliendo le rette r' di equazione $x - 1 = 0$ e r'' di equazione $y - 2 = 0$. Scegliendo, invece, \tilde{r}' di equazione $2x - y = 0$ e \tilde{r}'' di equazione $x + y - 3 = 0$, si ottiene l'equazione

$$\lambda(2x - y) + \mu(x + y - 3) = 0.$$

Il fascio di rette parallele alla retta \tilde{r}'' ha equazione

$$x + y + k = 0.$$

2. Distanze

Nel piano euclideo \mathcal{E}^2 , in cui si suppone di avere fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, la nozione di distanza tra due punti e il relativo metodo di calcolo si specializza nella forma seguente.

■ **Proposizione 10.8.** *Se $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P, y_P)$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q, y_Q)$, allora:*

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Dimostrazione. Basta utilizzare la Definizione 9.38 e la Proposizione 9.40. □

Poichè le rette sono gli iperpiani di \mathcal{E}^2 , il calcolo della distanza tra un punto e una retta si effettua utilizzando, nel caso $n = 2$, la Proposizione 9.42.

■ **Proposizione 10.9.** *Sia r la retta di \mathcal{E}^2 di equazione cartesiana, rispetto a \mathcal{R} , $ax + by + c = 0$ e sia $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y})$. Allora:*

$$d(P, r) = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

Il seguente risultato fornisce il metodo operativo per il calcolo della distanza tra due rette di \mathcal{E}^2 , in funzione della loro reciproca posizione.

■ **Proposizione 10.10.** *Siano r' e r'' due rette di \mathcal{E}^2 .*

- *Se r' e r'' sono incidenti (in particolare, coincidenti), la loro distanza è uguale a zero;*
- *Se r' e r'' sono parallele, la loro distanza uguaglia la distanza tra r'' (risp. r') e un punto qualsiasi di r' (risp. di r''):*

$$d(r', r'') = d(Q, r'') \quad \forall Q \in r' \quad (\text{risp. } d(r', r'') = d(P, r') \quad \forall P \in r'')$$

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è banalmente vera.

Nel caso in cui r' e r'' siano parallele, occorre verificare che la distanza $d(Q, r'')$ è indipendente dalla scelta del punto $Q \in r'$ (analoga dimostrazione sussiste per $d(P, r')$, con $P \in r''$). In virtù della Proposizione 10.2 è possibile supporre che le due rette abbiano - rispetto a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} di \mathcal{E}^2 - equazioni $r' : ax + by + c' = 0$, $r'' : ax + by + c'' = 0$. Allora, posto $Q \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y})$ e ricordato che $Q \in r'$, la tesi segue dalla Proposizione 10.9:

$$d(Q, r'') = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c''|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c' + c''|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

Esempio 10.6. Lo studio delle mutue posizioni tra le rette considerate nell'Esempio 10.3, di equazioni

$r : 2x - y + 3 = 0$, $r' : 4x - 2y + 6 = 0$, $s : 6x - 3y - 2 = 0$, $t : 3x - 2y + 5 = 0$,
assicura che - per la Proposizione 10.10 - si ha:

$$d(r, r') = d(r, t) = d(s, t) = 0.$$

Per calcolare la distanza tra le due rette parallele disgiunte r e s , consideriamo $P \equiv_{\mathcal{R}} (-1, 1) \in r$ e applichiamo la formula fornita dalla Proposizione 10.9:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|6 \cdot (-1) - 3 \cdot (1) - 2|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{\sqrt{45}}$$

In dimensione due, la nozione di volume di un 2-simplesso (ovvero di area di un triangolo) - vista in generale nel § 8 del Capitolo 9 - si specializza nel modo seguente.

◆ **Definizione 10.11.** Dati tre punti non allineati A, B, C di \mathcal{E}^2 , si dice *area* del triangolo di vertici A, B, C il numero reale positivo¹

$$\mathcal{V}(\langle A, B, C \rangle) = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle & \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle & \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle \end{pmatrix}}$$

■ **Proposizione 10.12.** Se $A \equiv_{\mathcal{R}} (x_A, y_A)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B)$, e $C \equiv_{\mathcal{R}} (x_C, y_C)$, allora:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \right|$$

Dimostrazione. È un caso particolare (per $h = 2$) della dimostrazione della Proposizione 9.45. □

Esempio 10.7. Se $A \equiv_{\mathcal{R}} (-1, 1)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (3, 0)$ e $C \equiv_{\mathcal{R}} (2, -2)$, l'area del triangolo ABC è

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 3 - (-1) & 2 - (-1) \\ 0 - 1 & -2 - 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{9}{2}.$$

¹Si noti che la Definizione 10.11 presuppone che il determinante della matrice presente sotto il segno di radice quadrata sia sicuramente positivo, come assicurato dalla Proposizione 8.33 relativa alle proprietà delle matrici di Gram; in alternativa, la dimostrazione di questo fatto può essere agevolmente dedotta dalla dimostrazione della Proposizione 9.45, nel caso $h = 2$.

3. Le isometrie del piano euclideo

Nel presente paragrafo daremo alcune informazioni specifiche riguardo alle isometrie del piano euclideo \mathcal{E}^2 , che specializzano le informazioni già fornite nel paragrafo 9 del Capitolo 9 sulle isometrie di un generico spazio euclideo n -dimensionale.

In base alla Definizione 9.49, una *isometria* del piano euclideo \mathcal{E}^2 è una applicazione compatibile $\alpha : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ tale che l'applicazione indotta $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^2 \rightarrow \vec{\mathcal{E}}^2$ è una trasformazione ortogonale (biunivoca) di $\vec{\mathcal{E}}^2$ in sé.

Per la Proposizione 9.51, poi, ogni isometria α di \mathcal{E}^2 si rappresenta, rispetto a un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, attraverso equazioni di tipo

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

ove (x, y) è la coppia delle coordinate cartesiane di un generico punto $P \in \mathcal{E}^2$ rispetto a \mathcal{R} , (x', y') (risp. (a, b)) è la coppia delle coordinate cartesiane del punto $\alpha(P) \in \mathcal{E}^2$ (risp. $\alpha(O) \in \mathcal{E}^2$) rispetto a \mathcal{R} , e $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ è la matrice (ortogonale) associata alla trasformazione ortogonale indotta $\vec{\alpha} : \vec{\mathcal{E}}^2 \rightarrow \vec{\mathcal{E}}^2$ rispetto alla base (ortonormale) $\vec{\mathcal{B}}$.

Ricordiamo infine (Definizione 9.54) che una isometria α di \mathcal{E}^2 si dice *diretta* (risp. *inversa*) se $\vec{\alpha}$ conserva (risp. rovescia) l'orientazione di $\vec{\mathcal{E}}^2$; per la Proposizione 9.55, l'isometria α di equazioni (*) è diretta (risp. inversa) se e solo se $\det A = 1$ (risp. $\det A = -1$).

◆ **Definizione 10.13.** Le simmetrie (ortogonali) del piano euclideo \mathcal{E}^2 rispetto a una retta r (Definizione 9.59) si dicono anche *riflessioni* di \mathcal{E}^2 .

Come osservato nelle considerazioni successive alla Definizione 9.59, le riflessioni sono isometrie inverse di \mathcal{E}^2 .

◆ **Definizione 10.14.** Si dice *glissoriflessione* una applicazione α di \mathcal{E}^2 in sé ottenuta come composizione di una riflessione s_r rispetto a una retta r di \mathcal{E}^2 con una traslazione $\alpha_{\mathbf{v}}$ di ampiezza un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, con \mathbf{v} “parallelo” a r :

$$\alpha = \alpha_{\mathbf{v}} \circ s_r, \quad \vec{v} \in \vec{r}.$$

Non è difficile verificare che, data la glissoriflessione $\alpha = \alpha_{\mathbf{v}} \circ s_r$, si ha anche $\alpha = s_r \circ \alpha_{\mathbf{v}}$. Inoltre, le glissoriflessioni sono isometrie inverse di \mathcal{E}^2 , che non lasciano fisso alcun punto di \mathcal{E}^2 .

Il seguente classico risultato afferma che, nel piano euclideo \mathcal{E}^2 , tutte le isometrie appartengono a una delle quattro tipologie già descritte: traslazioni, rotazioni (si ricordi l'Esempio 9.10), riflessioni e glissoriflessioni.

■ **Proposizione 10.15. (Teorema di classificazione delle isometrie piane - Chasles, 1831)** Una isometria α del piano euclideo \mathcal{E}^2 contenente punti fissi è una rotazione (attorno al suo unico punto fisso) o una riflessione, a seconda che sia diretta o inversa. Una isometria priva di punti fissi è una traslazione o una glissoriflessione, a seconda che sia diretta o inversa.

Dimostrazione. Per semplicità, proveremo compiutamente l'enunciato soltanto nel caso di una isometria diretta. In tal caso, le equazioni di α , rispetto a un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, sono

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

ove $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, $\det A = +1$. Ricordato l'Esempio 3.2, si ha quindi:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{con } \varphi \in [0, 2\pi[.$$

I punti fissi di α , che si trovano imponendo $x' = x$ e $y' = y$ nelle equazioni precedenti, hanno per coordinate le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (\cos \varphi - 1) \cdot x - \sin \varphi \cdot y + a = 0 \\ \sin \varphi \cdot x + (\cos \varphi - 1) \cdot y + b = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette una e una sola soluzione se e solo se $(\cos \varphi - 1)^2 + (\sin \varphi)^2 \neq 0$, ossia se e solo se $\varphi \neq 0$. In questo caso, quindi, α è una rotazione (di ampiezza φ) attorno a tale punto fisso.

Se invece $\varphi = 0$, le equazioni di α diventano:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

L'isometria α è quindi, in questa ipotesi, la traslazione di ampiezza $\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (a, b)$.

Il caso di α isometria inversa si tratta in modo simile, a partire dalle equazioni corrispondenti ad

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{con } \varphi \in [0, 2\pi[$$

(Esempio 3.2, nel caso di $\det A = -1$), ma ricercando innanzitutto le rette fisse rispetto a α : ciò può essere fatto ricercando i punti su cui α agisce come una traslazione di ampiezza un vettore $\bar{\mathbf{v}}$ (che, se esistono, sono sempre ∞^1 , ovvero sono tutti e soli i punti di una retta \bar{r}). Se $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$, ogni punto della retta \bar{r} è punto fisso per α , e α si dimostra essere la riflessione rispetto a \bar{r} ; se invece $\bar{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$, α risulta essere la glissoriflessione ottenuta componendo la riflessione rispetto a \bar{r} con la traslazione di ampiezza $\bar{\mathbf{v}}$.

□

4. Le coniche come luoghi geometrici

Nel presente paragrafo daremo alcuni cenni relativi alle coniche (non degeneri) del piano euclideo \mathcal{E}^2 , intese come particolari luoghi geometrici. Elementi più dettagliati della teoria delle coniche verranno esposti nel Capitolo 12.

◆ **Definizione 10.16.** Si dice *circonferenza* il luogo geometrico dei punti del piano \mathcal{E}^2 che sono equidistanti da un punto fisso C , detto *centro*. La comune distanza tra il centro e i punti della circonferenza si dice *raggio* della circonferenza.

Fissato in \mathcal{E}^2 un riferimento cartesiano \mathcal{R} , se il centro è $C \equiv_{\mathcal{R}} (\alpha, \beta)$ e il raggio è $r > 0$, allora la circonferenza $\mathcal{C} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, C) = r\}$ ha equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Infatti, $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y) \in \mathcal{C}$ se e soltanto se $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$; sviluppando i calcoli si perviene alla equazione considerata.

In particolare, se si sceglie un riferimento cartesiano \mathcal{R}' avente origine nel centro C , allora la circonferenza di centro C e raggio $r > 0$ assume equazione cartesiana:

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

♦ **Definizione 10.17.** Si dice *ellisse* il luogo geometrico dei punti del piano \mathcal{E}^2 che hanno costante (uguale a $2a > 0$) la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 , detti *fuochi*.

Fissato in \mathcal{E}^2 il riferimento cartesiano $\bar{\mathcal{R}}$ tale che $F_1 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (-c, 0)$ e $F_2 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (c, 0)$ (con $d(F_1, F_2) = 2c < 2a$), allora la ellisse $\mathcal{E} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$ ha equazione cartesiana²:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{dove } b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0.$$

(si veda la Figura 10.2).

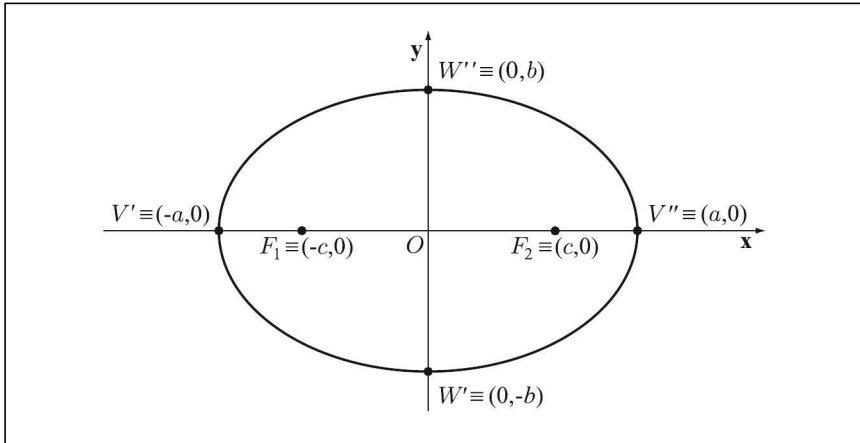


Figura 10.2

Infatti, $P \equiv (x, y) \in \mathcal{E}$ se e soltanto se

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

sviluppando i calcoli (isolando i radicali ed elevando al quadrato due volte), si perviene alla equazione considerata.

²Per analogia, il luogo geometrico rappresentato dalla equazione

$$(1') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

(che risulta vuoto perché la equazione scritta non può essere verificata dalle coordinate di alcun punto del piano euclideo), viene usualmente indicato come *ellisse vuota* (o *immaginaria*) di \mathcal{E}^2 .

Si noti che la circonferenza può essere considerata come una particolare ellisse, in cui i due fuochi coincidono.

♦ **Definizione 10.18.** Si dice *iperbole* il luogo geometrico dei punti del piano \mathcal{E}^2 che hanno costante (uguale a $2a > 0$) la differenza - in valore assoluto - delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 , detti *fuochi*.

Fissato in \mathcal{E}^2 il riferimento cartesiano $\bar{\mathcal{R}}$ tale che $F_1 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (-c, 0)$ e $F_2 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (c, 0)$ (con $d(F_1, F_2) = 2c > 2a$), allora la iperbole $\mathcal{I} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$ ha equazione cartesiana:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{dove } b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$$

(si veda la Figura 10.3).

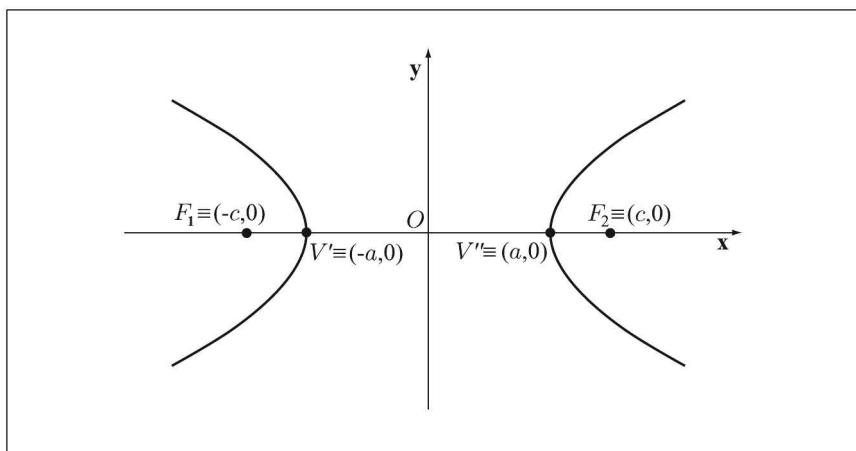


Figura 10.3

Infatti, $P \equiv (x, y) \in \mathcal{I}$ se e soltanto se

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a;$$

sviluppando i calcoli (isolando i radicali ed elevando al quadrato due volte), si perviene alla equazione considerata.

♦ **Definizione 10.19.** Si dice *parabola* il luogo geometrico dei punti del piano \mathcal{E}^2 che sono equidistanti da un punto fisso F , detto *fuoco*, e da una retta fissa δ , detta *direttrice*.

Fissato in \mathcal{E}^2 il riferimento cartesiano $\bar{\mathcal{R}}$ tale che $F \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (0, \frac{p}{2})$ e δ abbia equazione $y = -\frac{p}{2}$ (dove $p = d(F, \delta)$), allora la parabola $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, F) = d(P, \delta)\}$ ha equazione cartesiana:

$$(3) \quad y = \frac{1}{2p} x^2$$

(si veda la Figura 10.4).

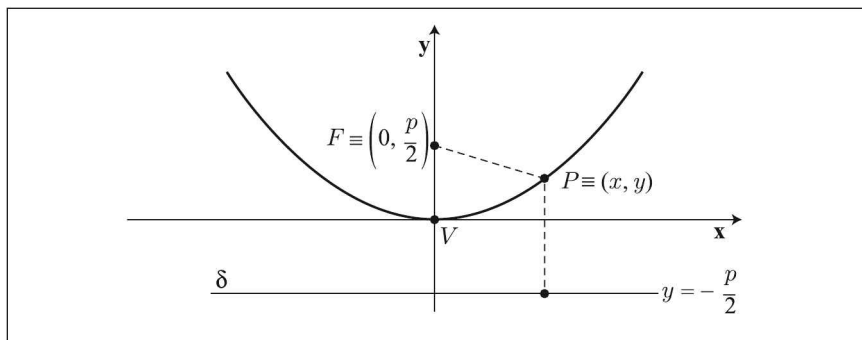


Figura 10.4

Infatti, $P \equiv (x, y) \in \mathcal{P}$ se e soltanto se

$$\sqrt{(x)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|;$$

sviluppando i calcoli (elevando al quadrato ambo i membri), si perviene alla equazione considerata.

In realtà, è possibile provare che, a parte qualche caso particolare facilmente individuabile, ogni equazione algebrica di secondo grado nelle coordinate x e y rappresenta o una ellisse, o una iperbole, o una parabola del piano euclideo \mathcal{E}^2 . Tali curve vengono globalmente indicate con il termine *coniche (non degeneri)* del piano euclideo, poiché esse sono state storicamente considerate e studiate come intersezioni tra un piano e un cono (si veda la Figura 10.5). Le equazioni del tipo (1), (1'), (2), o (3) vengono usualmente dette *equazioni canoniche* delle coniche del piano euclideo.

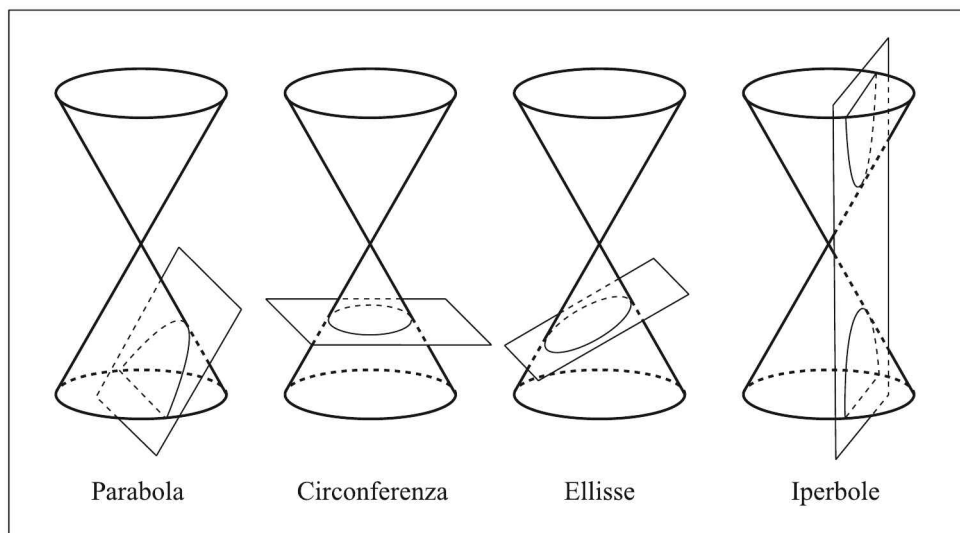


Figura 10.5

■ **Proposizione 10.20.** *Fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$ del piano euclideo \mathcal{E}^2 , si consideri una generica equazione algebrica di secondo grado nelle coordinate x e y :*

$$(4) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

Posto

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad M_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e supposto $\det A \neq 0$,³ allora la equazione (4) rappresenta - rispetto a \mathcal{R} - una conica (non degenera) \mathcal{C} del piano euclideo \mathcal{E}^2 .

In particolare:

- (i) *se $\det M_{00} = 0$, allora \mathcal{C} è una parabola;*
- (ii) *se $\det M_{00} < 0$, allora \mathcal{C} è una iperbole;*
- (iii) *se $\det M_{00} > 0$, allora \mathcal{C} è una ellisse (vuota se e solo se $a_{22} \cdot \det A > 0$).*

La dimostrazione di questo risultato è contenuta nel capitolo 12, dove è esposta una trattazione più esauriente della teoria delle coniche del piano euclideo.

³Se $\det A = 0$, allora la equazione (4) rappresenta - rispetto a \mathcal{R} - o l'unione di due rette, o una sola retta (contata due volte), o un solo punto; poiché anche questi sottoinsiemi di \mathcal{E}^2 si possono ottenere come particolari intersezioni tra un piano e un cono, essi vengono solitamente denominati *coniche degeneri* del piano euclideo \mathcal{E}^2 .

CAPITOLO 11

Lo spazio euclideo

1. I sottospazi dello spazio euclideo: punti, rette e piani

Nel presente capitolo, il simbolo \mathcal{E}^3 indicherà sempre uno spazio euclideo ordinario (ovvero, di dimensione tre).

Ovviamente, i sottospazi di \mathcal{E}^3 possono avere dimensione 0 (i punti di \mathcal{E}^3), 1 (le rette di \mathcal{E}^3), 2 (i piani, che sono gli iperpiani di \mathcal{E}^3) e 3 (lo spazio \mathcal{E}^3 stesso).

Fissato in \mathcal{E}^3 un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$, se $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ è un punto di \mathcal{E}^3 , allora le coordinate cartesiane x , y e z sono dette rispettivamente *ascissa*, *ordinata* e *quota* di P (relativamente a \mathcal{R}). Le rette coordinate del riferimento \mathcal{R} sono l'*asse x* (individuato dall'origine O e dalla direzione del versore \mathbf{i}), l'*asse y* (individuato dall'origine O e dalla direzione del versore \mathbf{j}) e l'*asse z* (individuato dall'origine O e dalla direzione del versore \mathbf{k}), mentre i piani coordinati del riferimento \mathcal{R} sono il *piano xy* (individuato dall'origine O e dai versori \mathbf{i} e \mathbf{j}), il *piano yz* (individuato dall'origine O e dai versori \mathbf{j} e \mathbf{k}) e il *piano xz* (individuato dall'origine O e dai versori \mathbf{i} e \mathbf{k}) (Figura 11.1).

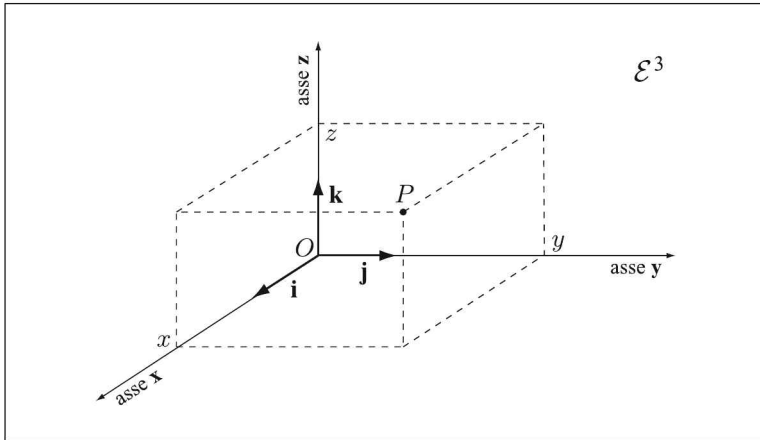


Figura 11.1

Per la Proposizione 9.15 (caso $h = 1$), ogni retta r di \mathcal{E}^3 è univocamente determinata da due qualunque suoi punti distinti $A, B \in r$. Posto $A \equiv_{\mathcal{R}} (x_A, y_A, z_A)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B, z_B)$, poiché il vettore (non nullo) $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{B}} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ genera

la giacitura della retta r , un punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ appartiene a r se e soltanto se $\overrightarrow{AP} \in \mathbf{L}(\overrightarrow{AB})$, ovvero se $(x - x_A, y - y_A, z - z_A) \in \mathbf{L}((x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A))$. Da questa affermazione si ricavano entrambi i tipi di rappresentazione già visti in generale nel § 4 del Capitolo 9:

- la retta r ha *rappresentazione cartesiana*

$$\varrho \begin{pmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A \end{pmatrix} = 1$$

che, una volta sviluppata, risulta del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \varrho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2;$$

- la retta r ha *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \\ z = z_A + (z_B - z_A) \cdot t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

in cui i tre coefficienti del parametro t non sono tutti nulli.

Nel caso in cui si abbia contemporaneamente $x_B - x_A \neq 0$, $y_B - y_A \neq 0$ e $z_B - z_A \neq 0$ (ovvero, quando i punti A e B hanno diversa ascissa, diversa ordinata e diversa quota), è possibile ricavare il parametro t dalle equazioni parametriche, ottenendo la cosiddetta *equazione frazionaria* della retta r :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

Esempio 11.1. Fissato un riferimento cartesiano \mathcal{R} nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2, 3)$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} (2, -1, 0)$ sono affinementemente indipendenti (cioè distinti), in quanto il vettore libero $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{B}} (1, -3, -3)$ è linearmente indipendente (essendo diverso dal vettore nullo). Per ottenere una rappresentazione cartesiana della retta r passante per A e B basta considerare un generico punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ di \mathcal{E}^3 e imporre che $\overrightarrow{AP} \equiv_{\vec{B}} (x - 1, y - 2, z - 3)$ appartenga a $\vec{r} = \mathbf{L}(\overrightarrow{AB})$. Ciò equivale a imporre che

$$\varrho \begin{pmatrix} x - 1 & 1 \\ y - 2 & -3 \\ z - 3 & -3 \end{pmatrix} = 1.$$

Essendo $\det(1) \neq 0$, basterà imporre che entrambi gli orlati del minore considerato abbiano determinante nullo:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ y - 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ z - 3 & -3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Ciò porta al seguente sistema lineare minimo, che rappresenta la retta r :

$$r : \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 3x + z - 6 = 0. \end{cases}$$

La retta r ha poi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ed equazione frazionaria

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-3}.$$

La retta s passante per i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2, 3)$ e $B' \equiv_{\mathcal{R}} (0, 2, 1)$ ha invece equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

ed equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$ ma non ammette equazione

frazionaria (perché i due punti A e B' hanno la stessa ordinata).

Si noti poi che, data una qualunque delle rappresentazioni della retta r , è possibile ricavare direttamente una terna (l, m, n) di coefficienti direttori di r :

- nel caso della rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases},$$

si ha

$$(l, m, n) = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

Ciò deriva direttamente dalla risoluzione del sistema lineare omogeneo associato (che rappresenta, rispetto alla base $\vec{\mathcal{B}}$, la giacitura della retta): si veda l'Esempio 6.4.

- nel caso della rappresentazione parametrica, (l, m, n) coincide con la terna dei coefficienti del parametro t : infatti, tali coefficienti sono costituiti dalle componenti $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ del vettore libero \overrightarrow{AB} , che genera la giacitura della retta.
- nel caso della rappresentazione frazionaria, (l, m, n) coincide con la terna dei denominatori: infatti, tali denominatori sono costituiti dalle componenti $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ del vettore libero \overrightarrow{AB} , che genera la giacitura della retta.

Esempio 11.2. Le rette r e s considerate nell'esempio 11.1 hanno rispettivamente coefficienti direttori $(1, -3, -3)$ e $(-1, 0, -2)$ (o anche $(1, 0, 2)$), come si ricava direttamente dalle componenti dei vettori liberi $\overrightarrow{AB} \in \vec{r}$ e $\overrightarrow{AB'} \in \vec{s}$, o dai coefficienti del parametro nelle equazioni parametriche delle due rette. Nel caso della retta r , i coefficienti direttori si ricavano direttamente anche dai denominatori della equazione frazionaria; d'altra parte, considerando la rappresentazione cartesiana di r , la matrice incompleta è

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, pertanto, i coefficienti direttori di r risultano ancora

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, -3, -3).$$

Analogamente, la matrice incompleta della rappresentazione cartesiana di s è

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, pertanto, i coefficienti direttori di s risultano ancora

$$\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, 0, 2).$$

Si noti che la retta s non ammette rappresentazione frazionaria proprio perché uno dei suoi coefficienti direttori è nullo.

Da queste osservazioni deduciamo il modo per ottenere le equazioni della retta s parallela a una retta r data e passante per un fissato punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

- se r ha rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

allora s ha rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + c(z - \bar{z}) = 0 \\ a'(x - \bar{x}) + b'(y - \bar{y}) + c'(z - \bar{z}) = 0 \end{cases}$$

- se r ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases}$$

allora s ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = \bar{x} + l \cdot t \\ y = \bar{y} + m \cdot t \\ z = \bar{z} + n \cdot t \end{cases}$$

- se r ha rappresentazione frazionaria

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

allora s ha rappresentazione frazionaria

$$\frac{x - \bar{x}}{l} = \frac{y - \bar{y}}{m} = \frac{z - \bar{z}}{n}.$$

Infatti, in tutti i casi considerati, le equazioni scritte individuano una retta s con i medesimi coefficienti direttori di r (e quindi, per la Proposizione 9.24, si ha $s//r$) e risultano verificate dalle coordinate del punto P (e quindi, $P \in s$); il risultato segue pertanto dal Teorema 9.17.

La proposizione seguente ci permette di studiare la mutua posizione di due rette di \mathcal{E}^3 , a partire dalle loro equazioni cartesiane.

■ **Proposizione 11.1.** *Siano r' e r'' due rette di \mathcal{E}^3 e siano rispettivamente*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases}$$

due loro rappresentazioni cartesiane, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

si ha che:

- (i) r' e r'' coincidono se e soltanto se

$$\varrho(B) = 2$$

- (ii) r' e r'' sono parallele disgiunte se e soltanto se

$$\varrho(A) = 2 \quad e \quad \varrho(B) = 3$$

- (iii) r' e r'' sono incidenti in un punto se e soltanto se

$$\varrho(A) = \varrho(B) = 3$$

- (iv) r' e r'' sono sghembe se e soltanto se

$$\varrho(A) = 3 \quad e \quad \varrho(B) = 4$$

Dimostrazione. L'intersezione (eventualmente vuota) tra le due rette r' e r'' è ovviamente rappresentata, relativamente al riferimento cartesiano \mathcal{R} , dal sistema lineare

$$\mathbf{S} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0, \end{cases}$$

mentre l'intersezione tra le due giaciture \vec{r}' e \vec{r}'' è rappresentata, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, dal sistema omogeneo associato \mathbf{S}_0 . La tesi segue allora facilmente, osservando che:

- (i) se r' e r'' sono coincidenti, $r' \cap r''$ deve contenere tutti i punti di r' (ovvero di r''), e quindi il sistema \mathbf{S} deve essere possibile con ∞^1 soluzioni;
- (ii) se r' e r'' sono parallele disgiunte, deve essere $r' \cap r'' = \emptyset$, mentre $\vec{r'} \cap \vec{r''}$ deve contenere tutti i vettori di $\vec{r'}$ (ovvero di $\vec{r''}$), e quindi il sistema \mathbf{S} deve essere impossibile, mentre il sistema \mathbf{S}_0 deve avere ∞^1 soluzioni;
- (iii) se r' e r'' sono incidenti in un punto P , deve essere $r' \cap r'' = \{P\}$, quindi il sistema \mathbf{S} deve essere possibile e determinato;
- (iv) se r' e r'' sono sghembe, deve essere $r' \cap r'' = \emptyset$ e $\vec{r'} \cap \vec{r''} = \{\mathbf{0}\}$, e quindi il sistema \mathbf{S} deve essere impossibile (cioè rango della matrice incompleta diverso dal rango della matrice completa), mentre il sistema \mathbf{S}_0 deve avere solo la soluzione ovvia.

□

Esempio 11.3. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , dotato di un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , si considerino le rette

$$\begin{aligned}
 r : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} & \quad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \\
 s' : \begin{cases} x - z = 3 \\ 2y - 2z = 1 \end{cases} & \quad s'' : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} & \quad s''' : \begin{cases} x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La Proposizione 11.1 consente di affermare che r e s coincidono, che r e s' sono parallele disgiunte, che r e s'' sono incidenti in un punto e che r e s''' sono sghembe.

La seguente proposizione mette a confronto la condizione di parallelismo e la condizione di ortogonalità tra due rette di \mathcal{E}^3 , nel caso in cui siano note due loro terne di coefficienti direttori; inoltre, ci fornisce la formula diretta per calcolare l'angolo formato da due date rette orientate.

■ **Proposizione 11.2.** Siano r' e r'' due rette di \mathcal{E}^3 e siano rispettivamente (l', m', n') e (l'', m'', n'') due loro terne di coefficienti direttori, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora:

- (i) r' e r'' sono parallele se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che

$$(l', m', n') = \lambda \cdot (l'', m'', n'')$$

- (ii) r' e r'' sono ortogonali se e soltanto se

$$l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0$$

- (iii) se r' e r'' sono orientate in modo che (l', m', n') e (l'', m'', n'') siano terne positive di coefficienti direttori, $\widehat{r'r''}$ è il numero reale (compreso tra 0 e π) tale che

$$\cos(\widehat{r'r''}) = \frac{l'l'' + m'm'' + n'n''}{\sqrt{(l')^2 + (m')^2 + (n')^2} \cdot \sqrt{(l'')^2 + (m'')^2 + (n'')^2}}$$

Dimostrazione. Basta specializzare, per $n = 3$, gli enunciati rispettivamente della Prop. 9.26(a), della Prop. 9.28 e della Prop. 9.36.

□

Esempio 11.4. Le rette r, s', s'' e s''' considerate nell'Esempio 11.3 hanno rispettivamente coefficienti direttori $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ e $(0, 0, 1)$, come si ricava facilmente risolvendo i sistemi lineari omogenei associati alle rappresentazioni cartesiane delle quattro rette. La Proposizione 11.2(i) consente di affermare che r e s' sono parallele, mentre la Proposizione 11.2(ii) consente di affermare che r e s'' sono ortogonali. Infine, la Proposizione 11.2(iii) consente di calcolare l'angolo tra le rette r e s''' , supponendo che esse siano orientate in modo che le terne di coefficienti direttori considerate risultino positive:

$$\cos(\widehat{rs''}) = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Passiamo ora a esaminare le rappresentazioni dei piani di \mathcal{E}^3 .

Per la Proposizione 9.15 (caso $h = 2$), ogni piano π di \mathcal{E}^3 è univocamente determinato da tre qualunque suoi punti, distinti e non allineati, $A, B, C \in \pi$. Posto $A \equiv_{\mathcal{R}} (x_A, y_A, z_A)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B, z_B)$ e $C \equiv_{\mathcal{R}} (x_C, y_C, z_C)$, poiché i vettori (non nulli e linearmente indipendenti) $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{B}} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ e $\overrightarrow{AC} \equiv_{\vec{B}} (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$ generano la giacitura del piano π , un punto generico $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ appartiene a π se e soltanto se $\overrightarrow{AP} \in \mathbf{L}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, ovvero se

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) \in \mathbf{L}((x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A), (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)).$$

Da questa affermazione si ricavano entrambi i tipi di rappresentazione già visti in generale nel § 4 del Capitolo 9:

- il piano π ha *equazione cartesiana*

$$\det \begin{pmatrix} x - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = 0$$

che, una volta sviluppata, risulta del tipo

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0);$$

- il piano π ha *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot \lambda + (x_C - x_A) \cdot \mu \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot \lambda + (y_C - y_A) \cdot \mu \\ z = z_A + (z_B - z_A) \cdot \lambda + (z_C - z_A) \cdot \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

in cui

$$\varrho \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \\ z_B - z_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = 2.$$

Esempio 11.5. Fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$ nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , i punti $A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2, 3)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (2, -1, 0)$ e $C \equiv_{\mathcal{R}} (0, 2, 1)$ sono affinementemente indipendenti, in quanto i vettori liberi $\vec{AB} \equiv_{\vec{B}} (1, -3, -3)$ e $\vec{AC} \equiv_{\vec{B}} (-1, 0, -2)$ sono linearmente indipendenti (essendo non proporzionali). Per ottenere una rappresentazione cartesiana del piano π passante per A , B e C basta considerare un generico punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z)$ di \mathcal{E}^3 e imporre che $\vec{AP} \equiv_{\vec{B}} (x-1, y-2, z-3)$ appartenga a $\vec{\pi} = \mathbf{L}(\vec{AB}, \vec{AC})$. Ciò equivale a imporre che

$$\varrho \begin{pmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & -3 & 0 \\ z-3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{ovvero} \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & -3 & 0 \\ z-3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il piano π sarà quindi rappresentato, rispetto a \mathcal{R} , dalla equazione cartesiana

$$6x + 5y - 3z - 7 = 0.$$

La sua rappresentazione parametrica sarà invece

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t - t' \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t - 2t' \end{cases} \quad (t, t' \in \mathbb{R}).$$

Si noti che, nella rappresentazione parametrica del piano π , le due terne di coefficienti dei parametri individuano le componenti, rispetto alla base \vec{B} , di due vettori che generano la giacitura $\vec{\pi}$ del piano, così come la equazione omogenea associata alla rappresentazione cartesiana di π costituisce una rappresentazione cartesiana, rispetto a \vec{B} , della medesima giacitura $\vec{\pi}$ (si veda il Teorema 9.19).

Da queste osservazioni deduciamo il modo per ottenere le equazioni del piano σ parallelo a un piano π dato e passante per un fissato punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

- se π ha rappresentazione cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0,$$

allora σ ha rappresentazione cartesiana

$$a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + c(z - \bar{z}) = 0;$$

- se π ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 \cdot \lambda + v_1 \cdot \mu \\ y = y_0 + u_2 \cdot \lambda + v_2 \cdot \mu \\ z = z_0 + u_3 \cdot \lambda + v_3 \cdot \mu \end{cases},$$

allora σ ha rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = \bar{x} + u_1 \cdot \lambda + v_1 \cdot \mu \\ y = \bar{y} + u_2 \cdot \lambda + v_2 \cdot \mu \\ z = \bar{z} + u_3 \cdot \lambda + v_3 \cdot \mu \end{cases}.$$

Infatti, in entrambi i casi, le equazioni scritte individuano un piano σ con la medesima giacitura di π (e quindi, per definizione, si ha $\sigma // \pi$) e risultano verificate dalle coordinate del punto P (e quindi, $P \in \sigma$); il risultato segue pertanto dal Teorema 9.17.

La proposizione seguente ci permette di studiare la mutua posizione di due piani di \mathcal{E}^3 , a partire dalle loro equazioni cartesiane.

Proposizione 11.3. *Siano π' e π'' due piani di \mathcal{E}^3 e siano rispettivamente $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ due loro equazioni cartesiane, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora:*

(i) π' e π'' coincidono se e soltanto se

$$\varrho \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 1$$

(ii) π' e π'' sono paralleli disgiunti se e soltanto se

$$\varrho \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{e} \quad \varrho \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$$

(iii) π' e π'' sono incidenti in una retta se e soltanto se

$$\varrho \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$$

(iv) π' e π'' non sono mai sghembi, nè incidenti in un punto.

Dimostrazione. L'intersezione (eventualmente vuota) tra i due piani π' e π'' è ovviamente rappresentata, relativamente al riferimento cartesiano \mathcal{R} , dal sistema lineare

$$\mathbf{S}: \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{cases}$$

mentre l'intersezione tra le due giaciture $\vec{\pi}'$ e $\vec{\pi}''$ è rappresentata, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, dal sistema omogeneo associato \mathbf{S}_0 . La tesi segue allora facilmente, osservando che:

- (i) se π' e π'' sono coincidenti, $\pi' \cap \pi''$ deve contenere tutti i punti di π' (ovvero di π''), e quindi il sistema \mathbf{S} deve essere possibile con ∞^2 soluzioni;
- (ii) se π' e π'' sono paralleli disgiunti, deve essere $\pi' \cap \pi'' = \emptyset$, mentre $\vec{\pi}' \cap \vec{\pi}''$ deve contenere tutti i vettori di $\vec{\pi}'$ (ovvero di $\vec{\pi}''$), e quindi il sistema \mathbf{S} deve essere impossibile, mentre il sistema \mathbf{S}_0 deve avere ∞^2 soluzioni;
- (iii) se π' e π'' sono incidenti in una retta r , deve essere $\pi' \cap \pi'' = r$, quindi il sistema \mathbf{S} deve essere possibile con ∞^1 soluzioni;
- (iv) π' e π'' non possono essere nè sghembi nè incidenti in un punto, perché tutti i casi che si possono presentare nella discussione dei sistemi \mathbf{S} e \mathbf{S}_0 sono già stati esaminati ai punti precedenti.

□

► **Osservazione 11.4.** Si noti che, nel caso in cui i due piani π' e π'' siano incidenti in una retta, il sistema costituito dalle due equazioni cartesiane di π' e π'' individua esattamente una rappresentazione cartesiana della retta intersezione $r = \pi' \cap \pi''$. In realtà, ogni rappresentazione cartesiana di una qualunque retta r di \mathcal{E}^3 permette di interpretare la retta stessa come intersezione di due piani *non paralleli* che la contengono.

Esempio 11.6. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , dotato di un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , si considerino i piani

$$\begin{aligned}\pi_1 : 6x + 5y - 3z - 7 &= 0 & \pi_2 : 12x + 10y - 6z - 14 &= 0 \\ \pi_3 : 12x + 10y - 6z - 3 &= 0 & \pi_4 : 2x - 4y + z - 1 &= 0.\end{aligned}$$

La Proposizione 11.3 consente di affermare che π_1 e π_2 coincidono, che π_1 e π_3 sono paralleli disgiunti, e che π_1 e π_4 sono incidenti in una retta.

Le rappresentazioni cartesiane permettono di studiare anche la mutua posizione di una retta e di un piano di \mathcal{E}^3 , come indicato nel seguente risultato.

■ **Proposizione 11.5.** Siano r e π una retta e un piano di \mathcal{E}^3 e siano rispettivamente

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

due loro rappresentazioni cartesiane, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

si ha che:

(i) r è contenuta in π se e soltanto se

$$\varrho(B) = 2;$$

(ii) r e π sono paralleli e disgiunti se e soltanto se

$$\varrho(A) = 2 \quad e \quad \varrho(B) = 3;$$

(iii) r e π sono incidenti in un punto se e soltanto se

$$\varrho(A) = \varrho(B) = 3;$$

(iv) r e π non sono mai sghembi.

Dimostrazione. L'intersezione (eventualmente vuota) tra la retta r e il piano π è ovviamente rappresentata, relativamente al riferimento cartesiano \mathcal{R} , dal sistema lineare

$$\mathbf{S} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{cases}$$

mentre l'intersezione tra le due giaciture $\vec{\pi}'$ e $\vec{\pi}''$ è rappresentata, relativamente alla base $\vec{\mathcal{B}}$, dal sistema omogeneo associato \mathbf{S}_0 . La tesi segue allora facilmente, osservando che:

- (i) se r è contenuta in π , $r \cap \pi$ deve contenere tutti i punti di r , e quindi il sistema \mathbf{S} deve essere possibile con ∞^1 soluzioni (si osservi che $\varrho(A) \geq 2$);
- (ii) se r e π sono paralleli disgiunti, deve essere $r \cap \pi = \emptyset$, mentre $\vec{r} \cap \vec{\pi}$ deve contenere tutti i vettori di \vec{r} , e quindi il sistema \mathbf{S} deve essere impossibile, mentre il sistema \mathbf{S}_0 deve avere ∞^1 soluzioni;
- (iii) se r e π sono incidenti in un punto P , deve essere $r \cap \pi = \{P\}$, quindi il sistema \mathbf{S} deve essere possibile e determinato (ovvero, deve essere un sistema di Cramer);
- (iv) r e π non possono essere sghembi, perché tutti i casi che si possono presentare nella discussione dei sistemi \mathbf{S} e \mathbf{S}_0 sono già stati esaminati ai punti precedenti.

□

Esempio 11.7. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , dotato di un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , si considerino il piano

$$\pi : x - y - 1 = 0$$

e le rette s , s' , s'' considerate nell'Esempio 11.3. La Proposizione 11.5 consente di affermare che s è contenuta in π , che s' e π sono paralleli disgiunti, e che π e s'' sono incidenti in un punto.

Nello spazio euclideo, è possibile introdurre, accanto alla nozione di angolo tra due rette orientate (la cui ampiezza può essere calcolata mediante la Prop. 11.2 (iii)), anche la nozione di angolo tra due piani e la nozione di angolo tra una retta e un piano.

◆ **Definizione 11.6.** Si dice *piano orientato* di \mathcal{E}^3 una coppia (π, λ) , dove π è un piano di \mathcal{E}^3 e $\lambda \in {}^\perp \vec{\pi}$ è un vettore libero non nullo ortogonale a π . Se (π, λ) è un piano orientato, si dicono *positivi* tutti i vettori liberi $\mu \in {}^\perp \vec{\pi}$ concordi con λ ; inoltre, si dice *positiva* ogni equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ di π tale che il vettore libero $\mathbf{a} \equiv (a, b, c)$ sia positivo.

◆ **Definizione 11.7.** Dati due piani orientati (π', λ') e (π'', λ'') di \mathcal{E}^3 , si dice *angolo tra π' e π''* , e si denota con $\widehat{\pi' \pi''}$, l'angolo $\phi \in [0, \pi]$ tra λ' e λ'' .

Si ha dunque, per definizione,

$$\cos(\widehat{\pi' \pi''}) = \cos(\lambda', \lambda'').$$

◆ **Definizione 11.8.** Dati un piano orientato (π, λ) e una retta orientata (r, \mathbf{l}) di \mathcal{E}^3 , si dice *angolo tra π e r* , e si denota con $\widehat{\pi r}$, il numero reale $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avente per seno il coseno dell'angolo tra λ e \mathbf{l} :

$$\text{sen}(\widehat{\pi r}) = \cos(\lambda, \mathbf{l})$$

Le seguenti proposizioni mettono a confronto le condizioni di parallelismo e di ortogonalità e forniscono la formula diretta per calcolare l'ampiezza dell'angolo compreso, l'una nel caso di due piani, l'altra nel caso di una retta e di un piano.

■ **Proposizione 11.9.** *Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , in cui è fissato un riferimento cartesiano \mathcal{R} , siano π' e π'' due piani aventi rispettivamente equazioni cartesiane $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$.*

Allora:

- (i) π' e π'' sono paralleli se e soltanto se esiste $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che

$$(a', b', c') = \rho \cdot (a'', b'', c'');$$

- (ii) π' e π'' sono ortogonali se e soltanto se

$$a' \cdot a'' + b' \cdot b'' + c' \cdot c'' = 0$$

- (iii) se π' e π'' sono orientati in modo che $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ siano equazioni positive, $\widehat{\pi'\pi''}$ è il numero reale $\phi \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos(\widehat{\pi'\pi''}) = \frac{a' \cdot a'' + b' \cdot b'' + c' \cdot c''}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2 + (c')^2} \cdot \sqrt{(a'')^2 + (b'')^2 + (c'')^2}}$$

Dimostrazione. (i) Basta ricordare, come già osservato nel corso della dimostrazione della Proposizione 11.3, che π' e π'' sono paralleli se e soltanto se $\vec{\pi'} \cap \vec{\pi''}$ ha dimensione due, ovvero se e soltanto se la matrice $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ ha rango uno.

(ii) La seconda affermazione è un caso particolare della Proposizione 9.33.

(iii) L'ultima affermazione discende direttamente dalla Definizione 11.7, ricordando che - in virtù del Lemma 9.30 - i vettori $\mathbf{a}' \equiv (a', b', c')$ e $\mathbf{a}'' \equiv (a'', b'', c'')$ sono vettori positivi ortogonali rispettivamente a π' e π'' .

□

■ **Proposizione 11.10.** *Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , in cui è fissato un riferimento cartesiano \mathcal{R} , siano r una retta avente coefficienti direttori (l, m, n) e π un piano avente equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$.*

Allora:

- (i) r e π sono paralleli se e soltanto se

$$a \cdot l + b \cdot m + c \cdot n = 0;$$

- (ii) r e π sono ortogonali se e soltanto se esiste $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che

$$(l, m, n) = \rho \cdot (a, b, c);$$

- (ii) se r è orientata in modo che (l, m, n) sia una terna positiva di coefficienti direttori e π è orientato in modo che $ax + by + cz + d = 0$ sia una equazione positiva, $\widehat{r\pi}$ è il numero reale $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\sin(\widehat{r\pi}) = \frac{a \cdot l + b \cdot m + c \cdot n}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Dimostrazione. (i) Per definizione, r e π sono paralleli se e soltanto se $\vec{r} \subset \vec{\pi}$; poiché $\mathbf{v} \equiv (l, m, n)$ genera \vec{r} , ciò equivale a richiedere $\mathbf{v} \in \vec{\pi}$, che corrisponde esattamente alla condizione $a \cdot l + b \cdot m + c \cdot n = 0$.

(ii) La seconda affermazione è un caso particolare della Proposizione 9.31.

(iii) L'ultima affermazione discende direttamente dalla Definizione 11.8, ricordando che $\mathbf{v} \equiv (l, m, n)$ è un vettore positivo di \vec{r} e che - in virtù del Lemma 9.30 - il vettore $\mathbf{a} \equiv (a, b, c)$ è un vettore positivo ortogonale a π .

□

Esempio 11.8. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , dotato di un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , si considerino i piani

$$\sigma : x - 2y + z - 1 = 0 \quad \sigma' : x - 2y + z + 5 = 0$$

$$\sigma'' : 3x + y - z - 4 = 0 \quad \sigma''' : x + y - 1 = 0$$

e le rette s' , s'' e s''' considerate nell'Esempio 11.3. La Proposizione 11.9 consente di affermare che σ e σ' sono paralleli, che σ e σ'' sono ortogonali, e che (supponendo che i piani siano orientati in modo che le equazioni scritte risultino positive) l'angolo tra σ e σ''' è tale che

$$\cos(\widehat{\sigma\sigma''}) = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Analogamente, la Proposizione 11.10 consente di affermare che σ e s' sono paralleli, che σ e s'' sono ortogonali, e che (supponendo anche che la retta s''' sia orientata in modo che la terna di coefficienti direttori $(0, 0, 1)$ risulti positiva) l'angolo tra σ e s''' è tale che

$$\sin(\widehat{\sigma s''}) = \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

◆ **Definizione 11.11.** Data una retta r di \mathcal{E}^3 , si dice *fascio (proprio) di piani di asse* r l'insieme costituito da tutti e soli i piani di \mathcal{E}^3 che contengono r .

◆ **Definizione 11.12.** Dato un sottospazio vettoriale bidimensionale \mathbf{U} di $\vec{\mathcal{E}}^3$, si dice *fascio (improprio) di piani paralleli di giacitura* \mathbf{U} l'insieme costituito da tutti e soli i piani di \mathcal{E}^3 aventi \mathbf{U} come giacitura.

Il seguente risultato ci fornisce le equazioni di tutti i piani appartenenti a un fissato fascio proprio (risp. improprio), a partire dalla rappresentazione cartesiana di due elementi (risp. un elemento) del fascio stesso.

■ **Proposizione 11.13.**

- (i) Siano π' e π'' due piani non paralleli di \mathcal{E}^3 e siano rispettivamente $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ due loro equazioni cartesiane,

relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora, detta r la retta intersezione di π' e π'' , la equazione

$$\lambda(a'x + b'y + c'z + d') + \mu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0$$

rappresenta, al variare dei parametri reali $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, tutti e soli i piani del fascio (proprio) di asse r .

- (ii) Sia π un piano di \mathcal{E}^3 e sia $ax + by + cz + d = 0$ una sua equazione cartesiana, relativamente a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora, la equazione

$$ax + by + cz + k = 0$$

rappresenta, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, tutti e soli i piani del fascio (improprio) di giacitura $\vec{\pi}$ (cioè tutti i piani paralleli a π).

Dimostrazione. (i) Poichè $r = \pi' \cap \pi''$, le coordinate di un qualunque punto $P \in r$ verificano entrambe le equazioni $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, e quindi verificano anche ogni equazione ottenuta da quelle tramite combinazione lineare. Ciò prova che tutti i piani di equazione

$$\lambda(a'x + b'y + c'z + d') + \mu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0,$$

al variare dei parametri reali $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, appartengono al fascio di asse r .

Viceversa, se σ è un piano del fascio di asse r , allora $\sigma \cap (\pi' \cap \pi'') = r = \pi' \cap \pi''$; pertanto, l'equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ di σ , relativamente al riferimento \mathcal{R} , deve essere combinazione lineare delle due equazioni cartesiane di π' e π'' . Ciò equivale ad affermare che deve esistere una coppia $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$, tale che

$$ax + by + cz + d = \lambda(a'x + b'y + c'z + d') + \mu(a''x + b''y + c''z + d'').$$

- (ii) E' sufficiente osservare che ogni piano di equazione $ax + by + cz + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, è parallelo a π , e che ogni piano parallelo a π ha (per la Proposizione 11.3) equazione $(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z + e = 0$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ed $e \in \mathbb{R}$, ovvero

$$ax + by + cz + k = 0, \quad \text{con } k = \frac{e}{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

□

Esempio 11.9. Data nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases},$$

l'equazione del fascio di piani di asse la retta r è:

$$\lambda(3x - y + z - 1) + \mu(x - z) = 0.$$

Il fascio di piani paralleli al piano di equazione

$$3x - y + z - 1 = 0$$

ha invece equazione

$$3x - y + z + k = 0.$$

◆ **Definizione 11.14.** Dato un punto $C \in \mathcal{E}^3$, si dice *stella (propria) di piani di centro C* (risp. *stella (propria) di rette di centro C*) l'insieme costituito da tutti e soli i piani (risp. le rette) di \mathcal{E}^3 che contengono C .

◆ **Definizione 11.15.** Dato un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathcal{E}^3$, si dice *stella (impropria) di piani di direzione \mathbf{v}* (risp. *stella (impropria) di rette di direzione \mathbf{v}*) l'insieme costituito da tutti e soli i piani (risp. le rette) di \mathcal{E}^3 che sono paralleli alla direzione individuata dal vettore \mathbf{v} .

2. Distanze

Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , in cui si suppone di avere fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, la nozione di distanza tra due punti e il relativo metodo di calcolo si specializza nella forma seguente.

■ **Proposizione 11.16.** Se $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_P, y_P, z_P)$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} (x_Q, y_Q, z_Q)$, allora:

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

Dimostrazione. Basta utilizzare la Definizione 9.38 e la Proposizione 9.40. □

◆ **Definizione 11.17.** Si dice *sfera* il luogo geometrico dei punti dello spazio \mathcal{E}^3 che sono equidistanti da un punto fisso C , detto *centro*. La comune distanza tra il centro e i punti della sfera si dice *raggio* della sfera.

Fissato in \mathcal{E}^3 un riferimento cartesiano \mathcal{R} , se il centro è $C \equiv_{\mathcal{R}} (\alpha, \beta, \gamma)$ e il raggio è $r > 0$, allora la sfera $\mathbb{S} = \{P \in \mathcal{E}^3 \mid d(P, C) = r\}$ ha equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0$$

Infatti, $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z) \in \mathbb{S}$ se e soltanto se $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$; sviluppando i calcoli si perviene alla equazione considerata.

In particolare, se si sceglie un riferimento cartesiano \mathcal{R}' avente origine nel centro C , allora la sfera di centro C e raggio $r > 0$ assume equazione cartesiana:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = r^2$$

Poichè i piani sono gli iperpiani di \mathcal{E}^3 , il calcolo della distanza tra un punto e un piano si effettua utilizzando, nel caso $n = 3$, la Proposizione 9.42.

■ **Proposizione 11.18.** Sia π il piano di \mathcal{E}^3 di equazione cartesiana, rispetto a \mathcal{R} , $ax + by + cz + d = 0$ e sia $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Allora:

$$d(P, \pi) = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

□

Esempio 11.10. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , dotato di un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , la distanza del punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2, 3)$ dal piano $\pi : 3x + 2y - z + 3 = 0$, si calcola direttamente tramite la formula fornita dalla Proposizione 11.18:

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Il calcolo della distanza tra un punto e una retta si effettua invece utilizzando la proiezione ortogonale del punto sulla retta, come indicato nel § 7 del Capitolo 9 (caso $n = 3$ e $h = 1$).

■ **Proposizione 11.19.** Sia r una retta di \mathcal{E}^3 avente coefficienti direttori (l, m, n) e sia $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Allora:

$$d(P, r) = d(P, P')$$

dove il punto P' (proiezione ortogonale di P su r) si ottiene intersecando r con il piano ortogonale a r passante per P , che ha equazione cartesiana

$$l(x - \bar{x}) + m(y - \bar{y}) + n(z - \bar{z}) = 0.$$

Dimostrazione. Occorre verificare che $d(P, P') = \min\{d(P, X) \mid X \in r\}$. Poichè, per ogni $X \in r$, si ha $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'X}$, con $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{P'X}$, il Teorema di Pitagora (Proposizione 8.6) implica $\|\overrightarrow{PX}\|^2 = \|\overrightarrow{PP'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'X}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PP'}\|^2$; ciò assicura appunto che $d(P, P') \leq d(P, X)$, per ogni $X \in r$. \square

Esempio 11.11. Per calcolare la distanza del punto $A \equiv (1, 1, -4)$ dalla retta

$$r : \begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ z + 6 = 0 \end{cases}$$

occorre determinare il piano π ortogonale a r e contenente A ; poichè $(2, -1, 0)$ è una terna di coefficienti direttori di r , π ha equazione:

$$\pi : 2(x - 1) - 1(y - 1) + 0(z + 4) = 0, \quad \text{ovvero} \quad 2x - y - 1 = 0.$$

La proiezione ortogonale A' di A su r ha coordinate che verificano il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ z + 6 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad A' \equiv (2, 3, -6)$$

Per la Proposizione 11.19 si ha quindi che:

$$d(A, r) = d(A, A') = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (-6+4)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

I seguenti risultati forniscono i metodi operativi per il calcolo della distanza tra due piani, tra una retta e un piano e tra due rette di \mathcal{E}^3 , in funzione della loro reciproca posizione.

■ **Proposizione 11.20.** *Siano π' e π'' due piani di \mathcal{E}^3 .*

- *Se π' e π'' sono incidenti (in particolare, coincidenti), la loro distanza è uguale a zero;*
- *Se π' e π'' sono paralleli, la loro distanza uguaglia la distanza tra π'' e un punto qualsiasi di π' :¹*

$$d(\pi', \pi'') = d(Q, \pi''), \quad \forall Q \in \pi'$$

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è banalmente vera, poiché, se esiste un punto $\bar{P} \in \pi' \cap \pi''$, si ha $d(\pi', \pi'') = d(\bar{P}, \bar{P}) = 0$.

Nel caso in cui π' e π'' siano paralleli, occorre verificare che la distanza $d(Q, \pi'')$ è indipendente dalla scelta del punto $Q \in \pi'$. In virtù della Proposizione 11.9 è possibile supporre che i due piani abbiano - rispetto a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} di \mathcal{E}^3 - equazioni $\pi' : ax + by + cz + d' = 0$, $\pi'' : ax + by + cz + d'' = 0$. Allora, posto $Q \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, e ricordato che $Q \in \pi'$, per la Proposizione 11.18 si ottiene:

$$d(Q, \pi'') = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d''|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-d' + d''|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

che prova la tesi. □

■ **Proposizione 11.21.** *Siano r e π una retta e un piano di \mathcal{E}^3 .*

- *Se r è contenuta in π , o se r e π sono incidenti in un punto, la loro distanza è uguale a zero;*
- *Se r e π sono paralleli, la loro distanza uguaglia la distanza tra π e un punto qualsiasi di r :²*

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) \quad \forall P \in r$$

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è banalmente vera, poiché - sia nel caso in cui r è contenuta in π che nel caso in cui r e π sono incidenti - esiste un punto $\bar{P} \in r \cap \pi$, e quindi $d(r, \pi) = d(\bar{P}, \bar{P}) = 0$.

Nel caso in cui r e π siano paralleli, occorre verificare che la distanza $d(P, \pi)$ è indipendente dalla scelta del punto $P \in r$. Se il piano π ha - rispetto a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} di \mathcal{E}^3 - equazione $\pi : ax + by + cz + d = 0$, allora la retta r ha coefficienti direttori (l, m, n) tali che $al + bm + cn = 0$ (si ricordi la Proposizione 11.10); inoltre, posto $P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, per ogni altro punto $X \in r$ si ha $X \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x} + \rho l, \bar{y} + \rho m, \bar{z} + \rho n)$, con $\rho \in \mathbb{R}$. Per la Proposizione 11.18 si ottiene allora che:

$$\begin{aligned} d(X, \pi) &= \frac{|a(\bar{x} + \rho l) + b(\bar{y} + \rho m) + c(\bar{z} + \rho n) + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d + \rho \cdot (al + bm + cn)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = d(P, \pi), \end{aligned}$$

che prova la tesi. □

¹È evidente che i ruoli di π' e π'' possono essere scambiati.

²Si osservi che, in questo caso - a differenza delle Proposizioni 11.20 e 11.22 - i ruoli di r e π non possono essere scambiati.

■ **Proposizione 11.22.** *Siano r' e r'' due rette di \mathcal{E}^3 .*

- *Se r' e r'' sono incidenti (in particolare, coincidenti), la loro distanza è uguale a zero;*
- *Se r' e r'' sono parallele, la loro distanza uguaglia la distanza tra r'' e un punto qualsiasi di r' .³*

$$d(r', r'') = d(Q, r'') \quad \forall Q \in r'$$

- *Se r' e r'' sono sghembe, la loro distanza uguaglia la distanza tra r' e il piano π parallelo a r' e contenente r'' .⁴*

$$d(r', r'') = d(r', \pi) = d(Q, \pi) \quad \forall Q \in r'$$

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è banalmente vera.

La seconda parte dell'enunciato è una conseguenza diretta della Proposizione 10.10, perché due rette parallele sono sempre complanari.

Dimostriamo infine che, nel caso in cui r' e r'' sono sghembe, allora $d(r', r'') = d(Q, \pi)$, $\forall Q \in r'$ (si veda la Figura 11.2).

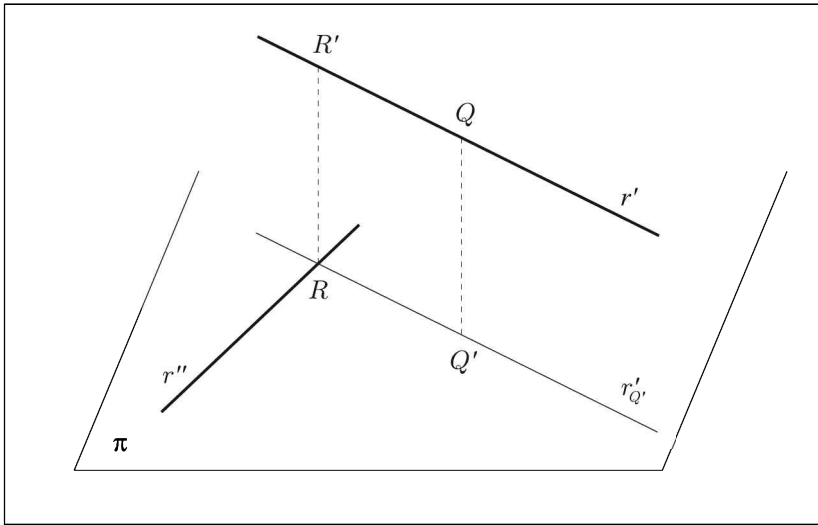


Figura 11.2

Poichè $r'' \subset \pi$, si ha ovviamente $d(r', r'') \geq d(r', \pi)$; d'altra parte, essendo π parallelo a r' , la Proposizione 11.21 implica $d(r', \pi) = d(Q, Q')$, $\forall Q \in r'$ (dove Q' denota la proiezione ortogonale di Q su π). Ora, fissato $Q \in r'$, sia $r'_{Q'}$ la retta parallela a r' e passante per Q' . Poichè $r'_{Q'}$ e r'' sono ovviamente non parallele (essendo sghembe r' e r'') e sono entrambe contenute in π , esiste $R \in r'_{Q'} \cap r''$. Essendo $r'_{Q'}$ e r' due rette parallele, la seconda parte dell'enunciato assicura che $d(Q, Q') = d(R, R')$

³È evidente che i ruoli di r' e r'' possono essere scambiati.

⁴È evidente che anche in questo caso i ruoli di r' e r'' possono essere scambiati.

($= d(r'_{Q'}, r')$), dove R' è la proiezione ortogonale di R su r' . A questo punto, avendo trovato $R \in r''$ e $R' \in r'$ tali che

$$d(r', r'') \leq d(R', R) = d(Q, Q') = d(r', \pi) \leq d(r', r''),$$

resta dimostrato che $d(r', r'') = d(r', \pi)$, da cui segue la tesi. \square

Nel caso di due rette sghembe r' e r'' di \mathcal{E}^3 , il seguente risultato permette di ricavare, oltre alla distanza $d(r', r'')$, anche i punti $H \in r'$ e $K \in r''$ che realizzano tale distanza.

■ Proposizione 11.23. *Siano r' e r'' due rette sghembe di \mathcal{E}^3 . Allora, esiste una e una sola retta t ortogonale e incidente sia a r' che a r'' ; inoltre, posto $H = r' \cap t$ e $K = r'' \cap t$, si ha che*

$$d(r', r'') = d(H, K)$$

Dimostrazione. (cenno) Se $\mathbf{l}' \in \vec{r}'$ e $\mathbf{l}'' \in \vec{r}''$ sono due vettori (non nulli) che generano le giaciture delle rette, la ipotesi che r' e r'' siano sghembe implica $\dim(\mathbf{L}(\mathbf{l}', \mathbf{l}'')) = 2$, e quindi $\dim({}^\perp \mathbf{L}(\mathbf{l}', \mathbf{l}'')) = 1$ (per il Teorema 8.26). Scelto un vettore non nullo $\mathbf{m} \in {}^\perp \mathbf{L}(\mathbf{l}', \mathbf{l}'')$, la retta t si ottiene come intersezione tra il piano π' , appartenente al fascio di piani di asse r' e parallelo a \mathbf{m} , e il piano π'' , appartenente al fascio di piani di asse r'' e parallelo a \mathbf{m} . \square

Esempio 11.12. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , le rette

$$r : \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

sono sghembe (come si può facilmente verificare, utilizzando la Proposizione 11.1).

Per calcolare la distanza tra r e s tramite la Proposizione 11.22, determiniamo il piano π parallelo a r e contenente s . Poichè esso appartiene al fascio di piani di asse s , avrà equazione del tipo

$$\lambda(y - z + 1) + \mu(x - z) = 0;$$

inoltre, essendo parallelo a r (che ha coefficienti direttori $(2, 2, 1)$), dovrà essere verificata la condizione

$$\lambda(2 - 1) + \mu(2 - 1) = 0, \quad \text{ovvero} \quad \lambda + \mu = 0.$$

Il piano π ha quindi equazione cartesiana $x - y - 1 = 0$. Scelto il punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (5, 2, 1) \in r$, la distanza tra r e s risulta:

$$d(r, s) = d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|5 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2}.$$

Per calcolare invece la distanza tra r e s tramite la Proposizione 11.23, determiniamo le componenti di un vettore non nullo $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (l, m, n)$ ortogonale sia a r che a s ; poichè r e

s hanno rispettivamente coefficienti direttori $(2, 2, 1)$ e $(1, 1, 1)$, deve essere

$$\begin{cases} 2l + 2m + n = 0 \\ l + m + n = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad (l, m, n) = \rho \cdot (1, -1, 0).$$

L'equazione del piano α contenente r e parallelo al vettore \mathbf{v} è

$$x + y - 4z - 3 = 0,$$

mentre l'equazione del piano β contenente s e parallelo al vettore \mathbf{v} è

$$x + y - 2z + 1 = 0.$$

La retta $t = \alpha \cap \beta$ (ortogonale e incidente sia a r che ad s), interseca r nel punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (-1, -4, -2)$ e s nel punto $Q \equiv_{\mathcal{S}} (-2, -3, -2)$; pertanto, si ha che:

$$d(r, s) = d(P, Q) = \sqrt{(-2+1)^2 + (-3+4)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{2}.$$

In dimensione tre, la nozione di volume di un h -simpleso - vista in generale nel § 8 del Capitolo 9 - si specializza nelle seguenti nozioni di area di un triangolo e di volume di un tetraedro.⁵

◆ **Definizione 11.24.** Dati tre punti non allineati A, B, C di \mathcal{E}^3 , si dice *area del triangolo* di vertici A, B, C il numero reale positivo

$$\mathcal{V}(\langle A, B, C \rangle) = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle & \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle & \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle \end{pmatrix}}.$$

◆ **Definizione 11.25.** Dati quattro punti non complanari A, B, C e D di \mathcal{E}^3 , si dice *volume del tetraedro* di vertici A, B, C e D il numero reale positivo

$$\mathcal{V}(\langle A, B, C, D \rangle) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle & \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle & \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle \\ \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle & \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle & \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle \\ \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle & \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle & \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD} \rangle \end{pmatrix}}.$$

⁵Si noti che le Definizioni 11.24 e 11.25 presuppongono che i determinanti delle matrici presenti sotto il segno di radice quadrata siano sicuramente positivi, come assicurato dalla Proposizione 8.33 relativa alle proprietà delle matrici di Gram; in alternativa, la dimostrazione di questo fatto può essere agevolmente dedotta dalla dimostrazione della Proposizione 9.45, nei casi $h = 2$ e $h = 3$ rispettivamente.

■ **Proposizione 11.26.** Se $A \equiv_{\mathcal{R}} (x_A, y_A, z_A)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (x_B, y_B, z_B)$, $C \equiv_{\mathcal{R}} (x_C, y_C, z_C)$, $D \equiv_{\mathcal{R}} (x_D, y_D, z_D)$, allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\langle A, B, C, D \rangle) &= \frac{1}{6} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A & x_D - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A & y_D - y_A \\ z_B - z_A & z_C - z_A & z_D - z_A \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

Dimostrazione. È un caso particolare (per $h = 3$) della Proposizione 9.45. □

Esempio 11.13. Siano $A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 1, -4)$, $B \equiv_{\mathcal{R}} (0, 4, -6)$, $C \equiv_{\mathcal{R}} (4, 2, -6)$, $D \equiv_{\mathcal{R}} (1, 3, -4)$ quattro punti di \mathcal{E}^3 (dove $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$ è un fissato riferimento cartesiano). Poichè $\overrightarrow{AB} \equiv_{\vec{B}} (-1, 3, -2)$, $\overrightarrow{AC} \equiv_{\vec{B}} (3, 1, -2)$, $\overrightarrow{AD} \equiv_{\vec{B}} (0, 2, 0)$ e

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

i quattro punti sono affinementemente indipendenti.

Il volume del tetraedro $\sigma^3 = \langle A, B, C, D \rangle$ è, per definizione:

$$\mathcal{V}(\sigma^3) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\det \begin{pmatrix} 14 & 4 & 6 \\ 4 & 14 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{256} = \frac{8}{3}.$$

Per la Proposizione 11.26, si ha anche:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\sigma^3) &= \frac{1}{6} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & -6 & -6 & -4 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-16| = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

L'area del triangolo $\sigma^2 = \langle A, B, C \rangle$ è per definizione:

$$\mathcal{V}(\sigma^2) = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180} = 3\sqrt{5}.$$

Si noti che, in alternativa, l'area del triangolo σ^2 può anche essere calcolata tramite la classica formula

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(A, r) \cdot d(B, C),$$

dove r denota la retta contenente B e C ; poiché r ha equazione cartesiana

$$r : \begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ z + 6 = 0 \end{cases},$$

si ha $d(A, r) = 3$ (si veda l'Esempio 11.11), e quindi risulta:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot d(B, C) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Elementi di teoria delle coniche e delle quadriche

1. Ampliamento proiettivo di uno spazio euclideo

Nel presente paragrafo, \mathcal{E}^n indicherà uno spazio euclideo di dimensione finita $n > 0$, su cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$.

♦ **Definizione 12.1.** Si dice *ampliamento proiettivo* (o *completamento proiettivo*) dello spazio euclideo \mathcal{E}^n l'insieme

$$\mathcal{P}^n = \mathcal{E}^n \cup \mathcal{E}_\infty^{n-1},$$

dove \mathcal{E}_∞^{n-1} , detto *iperpiano improprio* di \mathcal{E}^n , è l'insieme delle direzioni delle rette di \mathcal{E}^n (ovvero, i sottospazi vettoriali di dimensione uno della giacitura $\vec{\mathcal{E}}^n$).

Gli elementi di \mathcal{E}^n (ovvero, i punti dello spazio euclideo originario) si dicono *punti propri* dell'ampliamento proiettivo, mentre gli elementi di \mathcal{E}_∞^{n-1} si dicono *punti impropri* dell'ampliamento proiettivo.

Con abuso di linguaggio, quando risulterà chiaro che lo spazio euclideo \mathcal{E}^n è stato completato con l'aggiunta del suo iperpiano improprio, si parlerà più semplicemente di *punti propri* e *punti impropri* di \mathcal{E}^n .

► **Osservazione 12.2.** Si noti che, per definizione di iperpiano improprio, a ogni retta di \mathcal{E}^n risulta associato un punto improprio di \mathcal{E}^n , e che rette parallele individuano lo stesso punto improprio. Inoltre, poiché ogni vettore libero non nullo genera un sottospazio vettoriale di dimensione uno di $\vec{\mathcal{E}}^n$, si può dire che *ogni vettore libero non nullo \mathbf{v} individua un punto improprio di \mathcal{E}^n* , che corrisponde alla giacitura di tutte le rette parallele a \mathbf{v} (ovvero, tutte le rette r di \mathcal{E}^2 tali che $\mathbf{v} \in \vec{r}$).

♦ **Definizione 12.3.** Dato un punto proprio $P \equiv_{\mathcal{R}} (y^1, y^2, \dots, y^n)$, si dice $(n+1)$ -pla di *coordinate omogenee* di P rispetto a \mathcal{R} ogni $(n+1)$ -pla (x_0, x_1, \dots, x_n) tale che:

$$\frac{x_1}{x_0} = y^1, \frac{x_2}{x_0} = y^2, \dots, \frac{x_n}{x_0} = y^n.$$

Dato un punto improprio P_∞ individuato dalla direzione del vettore $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{E}}^n - \{\vec{0}\}$, con $\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (l^1, l^2, \dots, l^n)$, si dice $(n+1)$ -pla di *coordinate omogenee* di P_∞ rispetto a \mathcal{R} ogni $(n+1)$ -pla (x_0, x_1, \dots, x_n) tale che:

$$x_0 = 0 \text{ ed esiste } \rho \in \mathbb{R} - \{0\}, \text{ per cui } (x_1, \dots, x_n) = \rho \cdot (l^1, \dots, l^n).$$

Sia per i punti propri che per i punti impropri di \mathcal{E}^n , scriveremo

$$P \equiv_{\mathcal{R}} [x_0, x_1, \dots, x_n]$$

per indicare che la $(n+1)$ -pla (x_0, x_1, \dots, x_n) è una $(n+1)$ -pla di coordinate omogenee del punto P .

► **Osservazione 12.4.** Si noti che, per la Definizione 12.3, la $(n+1)$ -pla di coordinate omogenee di un punto (proprio o improprio) di \mathcal{E}^n è individuata a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, e che nessun punto di $\mathcal{P}^n = \mathcal{E}^n \cup \mathcal{E}_\infty^{n-1}$ ammette la $(n+1)$ -pla nulla quale $(n+1)$ -pla di coordinate omogenee.

► **Osservazione 12.5.** Date due $(n+1)$ -ple non nulle $(x_0, x_1, \dots, x_n), (x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ di numeri reali, poniamo

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, (x'_0, \dots, x'_n) = \lambda \cdot (x_0, \dots, x_n).$$

La relazione \sim è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$, come è facile verificare (si veda il § 4 del Capitolo 1). L'insieme quoziente $(\mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}) / \sim$, usualmente indicato con \mathbb{RP}^n , è detto *spazio proiettivo reale standard n -dimensionale*. Un punto di \mathbb{RP}^n è dunque una classe $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ¹ di proporzionalità di $(n+1)$ -ple non nulle di numeri reali.

Ogni fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} di \mathcal{E}^n induce quindi una biiezione $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{P}^n = \mathcal{E}^n \cup \mathcal{E}_\infty^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^n$, che a ogni punto P di \mathcal{P}^n associa la classe $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ delle $(n+1)$ -ple (tra loro proporzionali) delle coordinate omogenee di P rispetto a \mathcal{R} . Infatti, una qualunque $(n+1)$ -pla non nulla (x_0, x_1, \dots, x_n) di numeri reali, a meno di proporzionalità, individua uno e un solo punto P di $\mathcal{P}^n = \mathcal{E}^n \cup \mathcal{E}_\infty^{n-1}$ che ammette (x_0, x_1, \dots, x_n) come sua $(n+1)$ -pla di coordinate omogenee rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} :

- se $x_0 \neq 0$, allora P è il punto proprio di coordinate cartesiane $\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$;
- se $x_0 = 0$, allora P è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore di componenti (x_1, \dots, x_n) .

► **Osservazione 12.6.** Si noti che i sottospazi euclidei paralleli di \mathcal{E}^n risultano incidenti nel completamento proiettivo dello spazio euclideo \mathcal{E}^n ; infatti, se \mathcal{E}^h ed \mathcal{E}^k sono sottospazi paralleli, con $h \leq k$, allora - per definizione - l'insieme \mathcal{E}_∞^{h-1} dei punti impropri di \mathcal{E}^h è contenuto nell'insieme \mathcal{E}_∞^{k-1} dei punti impropri di \mathcal{E}^k .

Fissiamo ora l'attenzione sui casi $n = 2$ e $n = 3$.

Caso $n = 2$. Sia \mathcal{E}^2 un piano euclideo, su cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, e sia $\mathcal{P}^2 = \mathcal{E}^2 \cup r_\infty$ il suo completamento proiettivo, dove r_∞ - la *retta impropria* di \mathcal{E}^2 - indica l'insieme delle direzioni delle rette di \mathcal{E}^2 (ovvero, i sottospazi vettoriali di dimensione uno di $\vec{\mathcal{E}}^2$).

Denotata usualmente con (x, y) la coppia delle coordinate cartesiane dei punti (propri) di \mathcal{E}^2 rispetto a \mathcal{R} , indichiamo con $[x_0, x_1, x_2]$ la terna (a meno di proporzionalità) delle coordinate omogenee dei punti (propri e impropri) di \mathcal{E}^2 rispetto a \mathcal{R} . Ricordando il fatto che un punto $P \equiv_{\mathcal{R}} [x_0, x_1, x_2]$ è improprio se e soltanto se $x_0 = 0$, è immediato verificare la validità della seguente proposizione, relativa alla rappresentazione cartesiana delle rette nel completamento proiettivo del piano euclideo.

¹Scriviamo $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, anziché $[(x_0, x_1, \dots, x_n)]$, per indicare la classe rappresentata dalla $(n+1)$ -pla (x_0, x_1, \dots, x_n) , rispetto alla relazione \sim .

■ **Proposizione 12.7.** *Data una retta (propria) r di \mathcal{E}^2 avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, equazione cartesiana $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, si ha che:*

- *nel completamento proiettivo di \mathcal{E}^2 , la retta r è rappresentata - in coordinate omogenee rispetto a \mathcal{R} - dalla equazione omogenea*

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0;$$

- *l'unico punto improprio di r è $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, b, -a]$.*

Viceversa, data una equazione lineare omogenea

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0, \quad \text{con } (a, b) \neq (0, 0),$$

l'insieme delle soluzioni diverse dalla ovvia fornisce le coordinate omogenee, rispetto a \mathcal{R} , dei punti (propri e impropri) di una retta (propria) r di \mathcal{E}^2 .

Inoltre, l'equazione $x_0 = 0$ rappresenta - in coordinate omogenee rispetto a \mathcal{R} - la retta impropria di \mathcal{E}^2 .

□

Con le medesime notazioni, si prova facilmente anche come ottenere una rappresentazione cartesiana o parametrica di una retta nel completamento proiettivo del piano euclideo, a partire da due qualunque suoi punti distinti.

■ **Proposizione 12.8.** *Dati due punti distinti (propri o impropri) P e Q di \mathcal{E}^2 aventi, rispetto a un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, coordinate omogenee $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2]$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} [z_0, z_1, z_2]$, la retta r di \mathcal{E}^2 passante per P e Q è rappresentata:*

- (a) *dalla equazione cartesiana (omogenea)*

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0;$$

- (b) *dalle equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x_0 = \lambda y_0 + \mu z_0 \\ x_1 = \lambda y_1 + \mu z_1 \\ x_2 = \lambda y_2 + \mu z_2 \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

□

Si noti che la retta r di cui alla Proposizione precedente è la retta impropria se e solo se P e Q sono entrambi punti impropri di \mathcal{E}^2 .

Esempio 12.1. Nel completamento proiettivo di \mathcal{E}^2 , la retta r passante per i punti (propri) $A \equiv_{\mathcal{R}} [1, 2, 1]$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} [1, 3, -2]$ (si veda l'Esempio 10.1) ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 2 & 3 \\ x_2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ovvero} \quad 3x_1 + x_2 - 7x_0 = 0$$

ed equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = 2\lambda + 3\mu \\ x_2 = \lambda - 2\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Mettendo a sistema l'equazione cartesiana di r con l'equazione $x_0 = 0$ della retta impropria, si ottiene l'unico punto improprio di r :

$$P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, -3].$$

Si noti che $(1, -3)$, soluzione non nulla dell'equazione omogenea $3x_1 + x_2 = 0$, è una coppia di coefficienti direttori di r .

► **Osservazione 12.9.** La Proposizione 10.1 può essere facilmente dimostrata nell'ampliamento proiettivo di \mathcal{E}^2 , considerando il sistema lineare omogeneo

$$\mathbf{S}'_0 : \begin{cases} a'x_1 + b'x_2 + c'x_0 = 0 \\ a''x_1 + b''x_2 + c''x_0 = 0, \end{cases}$$

che rappresenta l'intersezione - propria e impropria - tra le due rette r' e r'' (si ricordi l'Osservazione 12.6). Infatti, se le rette sono distinte - ovvero se il rango della matrice di \mathbf{S}'_0 è uguale a due -, il sistema ammette come soluzioni non nulle ∞^1 terne proporzionali e quindi $r' \cap r''$ è costituita da un unico punto P avente come coordinate omogenee una qualsiasi di tali terne. In particolare, P è improprio - cioè r' e r'' sono parallele - se e solo se $\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0$ (si ricordi l'Esempio 6.4 relativo alle soluzioni dei sistemi lineari omogenei minimi di $n - 1$ equazioni in n incognite); si noti che, in tal caso, le coordinate (x_1, x_2) del punto improprio comune P sono una coppia di coefficienti direttori di r' e r'' .

Esempio 12.2. Per verificare la mutua posizione tra le rette r e s di \mathcal{E}^2 dell'Esempio 10.3, si consideri il sistema lineare omogeneo delle loro equazioni cartesiane in coordinate omogenee:

$$\mathbf{S}'_0 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_0 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_0 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni non nulle proporzionali alla terna $(0, 1, 2)$. Ciò prova che, nel completamento proiettivo di \mathcal{E}^2 , $r \cap s$ è costituita dal punto improprio $P \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, 2]$: pertanto, in \mathcal{E}^2 r ed s sono parallele (disgiunte), con coefficienti direttori $(1, 2)$.

► **Osservazione 12.10.** Le nozioni esposte in questo paragrafo chiariscono il significato del termine *fascio improprio di rette* di \mathcal{E}^2 (si veda la Definizione 10.6), usato per indicare l'insieme delle rette parallele alla direzione individuata da un fissato vettore \mathbf{v} : esso è costituito da tutte e sole le rette di \mathcal{E}^2 che contengono il punto improprio individuato dal vettore \mathbf{v} , così come il fascio proprio di rette di centro $C \in \mathcal{E}^2$ denota l'insieme di tutte e sole le rette di \mathcal{E}^2 contenenti il punto (proprio) C .

Caso $n = 3$.

Sia \mathcal{E}^3 uno spazio euclideo di dimensione tre, su cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, e sia $\mathcal{P}^3 = \mathcal{E}^3 \cup \pi_\infty$ il suo completamento proiettivo, dove π_∞ - il *piano improprio* di \mathcal{E}^3 - indica l'insieme delle direzioni delle rette di \mathcal{E}^3 (ovvero, i sottospazi vettoriali di dimensione uno di $\vec{\mathcal{E}}^3$).

Denotata usualmente con (x, y, z) la terna delle coordinate cartesiane dei punti (propri) di \mathcal{E}^3 rispetto a \mathcal{R} , indichiamo con $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ la quaterna (a meno di proporzionalità) delle coordinate omogenee dei punti (propri e impropri) di \mathcal{E}^3 rispetto a \mathcal{R} . Ricordando il fatto che un punto $P \equiv_{\mathcal{R}} [x_0, x_1, x_2, x_3]$ è improprio se e soltanto se $x_0 = 0$, è immediato verificare la validità delle due proposizioni seguenti, relative alla rappresentazione cartesiana dei piani e delle rette nel completamento proiettivo dello spazio euclideo.

■ **Proposizione 12.11.** *Sia π un piano (proprio) di \mathcal{E}^3 avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, equazione cartesiana (*) $ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Nel completamento proiettivo di \mathcal{E}^3 il piano π è rappresentato - in coordinate omogenee rispetto a \mathcal{R} - dalla equazione omogenea*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0.$$

Viceversa, data una equazione lineare omogenea

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0, \quad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0),$$

l'insieme delle soluzioni diverse dalla ovvia fornisce le coordinate omogenee, rispetto a \mathcal{R} , dei punti (propri e impropri) del piano (proprio) π di \mathcal{E}^3 , di equazione cartesiana ().*

Inoltre, $x_0 = 0$ rappresenta - in coordinate omogenee rispetto a \mathcal{R} - il piano improprio di \mathcal{E}^3 .

□

■ **Proposizione 12.12.** *Data una retta (propria) r di \mathcal{E}^3 avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, rappresentazione cartesiana*

$$(**) \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con } \varrho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2,$$

si ha che:

- *nel completamento proiettivo di \mathcal{E}^3 , la retta r è rappresentata - in coordinate omogenee rispetto a \mathcal{R} - dal sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_0 = 0 \end{cases}$$

- l'unico punto improprio di r è $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, l, m, n]$, con (l, m, n) terna di coefficienti direttori della retta r .

Viceversa, data un sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{con } \varrho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2,$$

l'insieme delle soluzioni diverse dalla ovvia fornisce le coordinate omogenee, rispetto a \mathcal{R} , dei punti (propri e impropri) della retta (propria) r di \mathcal{E}^3 di equazione (**).

Inoltre, il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0),$$

rappresenta - in coordinate omogenee rispetto a \mathcal{R} - la retta impropria del piano (proprio) π di \mathcal{E}^3 di equazione $ax + by + cz + d = 0$ (o di ogni piano ad esso parallelo). \square

Con le medesime notazioni, si prova facilmente anche come ottenere una rappresentazione cartesiana o parametrica di una retta (risp. di un piano) nel completamento proiettivo dello spazio euclideo tridimensionale, a partire da due (risp. tre) qualunque suoi punti distinti (risp. non allineati).

■ **Proposizione 12.13.** *Dati tre punti non allineati (propri o impropri) P, Q e R di \mathcal{E}^3 aventi, rispetto a un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, coordinate omogenee $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2, y_3]$, $Q \equiv_{\mathcal{R}} [z_0, z_1, z_2, z_3]$ e $R \equiv_{\mathcal{R}} [t_0, t_1, t_2, t_3]$, il piano π di \mathcal{E}^3 passante per P, Q e R è rappresentato:*

(a) dalla equazione cartesiana (omogenea)

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0;$$

(b) dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_0 = \lambda y_0 + \mu z_0 + \nu t_0 \\ x_1 = \lambda y_1 + \mu z_1 + \nu t_1 \\ x_2 = \lambda y_2 + \mu z_2 + \nu t_2 \\ x_3 = \lambda y_3 + \mu z_3 + \nu t_3 \end{cases} \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}.$$

\square

Si noti che il piano π di cui alla Proposizione precedente è il piano improprio se e solo se P, Q e R sono tre punti impropri di \mathcal{E}^3 .

Esempio 12.3. Nel completamento proiettivo di \mathcal{E}^3 , il piano π passante per i punti (propri) $A \equiv_{\mathcal{R}} [1, 1, 2, 3]$, $B \equiv_{\mathcal{R}} [1, 2, -1, 0]$ e $C \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, 2, 1]$ (si veda l'Esempio 11.5)

ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 2 & 0 \\ x_2 & 2 & -1 & 2 \\ x_3 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ovvero} \quad 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 7x_0 = 0$$

ed equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 &= \lambda + \mu + \nu \\ x_1 &= \lambda + 2\mu \\ x_2 &= 2\lambda - \mu + 2\nu \\ x_3 &= 3\lambda + \nu \end{cases} \quad (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}.$$

■ **Proposizione 12.14.** *Dati due punti distinti (propri o impropri) P e Q di \mathcal{E}^3 aventi, rispetto a un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, coordinate omogenee $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2, y_3]$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} [z_0, z_1, z_2, z_3]$, la retta r di \mathcal{E}^3 passante per P e Q è rappresentata:*

(a) dalle equazioni cartesiane (omogenee) ottenute imponendo

$$\varrho \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 2;$$

(b) dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_0 &= \lambda y_0 + \mu z_0 \\ x_1 &= \lambda y_1 + \mu z_1 \\ x_2 &= \lambda y_2 + \mu z_2 \\ x_3 &= \lambda y_3 + \mu z_3 \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

□

Si noti che la retta r di cui alla Proposizione precedente è una retta impropria del completamento proiettivo dello spazio \mathcal{E}^3 se e solo se P e Q sono entrambi punti impropri di \mathcal{E}^3 .

Esempio 12.4. Nel completamento proiettivo di \mathcal{E}^3 , la retta r passante per i punti (propri) $A \equiv_{\mathcal{R}} [1, 1, 2, 3]$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} [1, 2, -1, 0]$ (si veda l'Esempio 11.1) si ottiene imponendo:

$$\varrho \begin{pmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & 2 & -1 \\ x_3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Essendo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, basterà annullare i determinanti dei due minori orlati, ottenendo così la rappresentazione cartesiana (in coordinate omogenee):

$$r : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_0 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - 6x_0 = 0. \end{cases}$$

Mettendo a sistema l'equazione cartesiana di r con l'equazione $x_0 = 0$ del piano improprio, si ottiene l'unico punto improprio di r :

$$P_\infty \equiv \mathcal{R} [0, 1, -3, -3].$$

Si noti che $(1, -3, -3)$, soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

è una terna di coefficienti direttori di r .

La retta r ha inoltre equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = \lambda + 2\mu \\ x_2 = 2\lambda - \mu \\ x_3 = 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

► **Osservazione 12.15.** La Proposizione 11.1 (così come le successive Proposizioni 11.3 e 11.5) può essere facilmente dimostrata nell'ampliamento proiettivo \mathcal{P}^3 di \mathcal{E}^3 , considerando il sistema lineare omogeneo

$$\mathbf{S}'_0 : \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_0 = 0 \\ a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 + d''x_0 = 0, \\ a'''x_1 + b'''x_2 + c'''x_3 + d'''x_0 = 0, \end{cases}$$

che rappresenta l'intersezione - propria e impropria, ed eventualmente vuota - tra le due rette r' e r'' (si ricordi l'Osservazione 12.6). Detta B la matrice di \mathbf{S}'_0 , le possibili posizioni reciproche tra r' e r'' sono riassunte nel seguente schema:

$\varrho(B)$	$\dim(\text{Sol}(\mathbf{S}'_0))$	$r' \cap r''$ in \mathcal{P}^3	posizione reciproca in \mathcal{E}^3
2	2	una retta	coincidenti
3	1	un punto	incidenti o parallele
4	0	\emptyset	sghembe

Si osservi che, nel caso $\varrho(B) = 3$, l'intersezione $r' \cap r''$ nel completamento proiettivo di \mathcal{E}^3 è costituita da un unico punto P avente come coordinate omogenee una qualunque

quaterna non nulla soluzione di \mathbf{S}'_0 . In particolare, P è improprio - cioè r' e r'' sono parallele - se e solo se

$$\varrho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 2,$$

poichè la coordinata x_0 di P è data dal determinante di un minore di ordine tre estratto da tale matrice (si ricordi l'Esempio 6.4). Si noti che, in tal caso, le coordinate (x_1, x_2, x_3) del punto improprio comune P sono una terna di coefficienti direttori di r' e r'' .

Esempio 12.5. Per verificare la mutua posizione tra le rette r ed s' di \mathcal{E}^3 dell'Esempio 11.3, si consideri il sistema lineare omogeneo unione delle loro equazioni cartesiane in coordinate omogenee:

$$\mathbf{S}'_0 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_0 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - 3x_0 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_0 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni non nulle proporzionali alla quaterna $(0, 1, 1, 1)$. Ciò prova che, nel completamento proiettivo di \mathcal{E}^3 , $r \cap s'$ è costituita dal punto improprio $P \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, 1, 1]$: pertanto, in \mathcal{E}^3 r ed s' sono parallele (disgiunte), con coefficienti direttori $(1, 1, 1)$.

► **Osservazione 12.16.** Le nozioni esposte in questo paragrafo chiariscono il significato del termine *fascio improprio di piani* di \mathcal{E}^3 (si veda la Definizione 11.12), usato per indicare l'insieme dei piani aventi per giacitura un fissato sottospazio vettoriale bidimensionale \mathbf{U} di \mathcal{E}^3 : esso è costituito da tutti e soli i piani di \mathcal{E}^3 che contengono la (comune) retta impropria di tutti i piani paralleli a \mathbf{U} , così come il fascio proprio di piani di asse una data retta (propria) r di \mathcal{E}^3 denota l'insieme di tutti e soli i piani di \mathcal{E}^3 contenenti r .

Analogamente, la *stella impropria di piani* (risp. *stella impropria di rette*) di direzione un fissato vettore non nullo \mathbf{v} di \mathcal{E}^3 , essendo l'insieme dei piani (risp. delle rette) di \mathcal{E}^3 che sono paralleli alla direzione individuata dal vettore \mathbf{v} (si veda la Definizione 11.15), è costituito da tutti e soli i piani (risp. tutte e sole le rette) che contengono il punto improprio individuato dal vettore \mathbf{v} , così come la stella propria di piani (risp. di rette) di centro $C \in \mathcal{E}^3$ denota l'insieme di tutti e soli i piani (risp. tutte e sole le rette) di \mathcal{E}^3 contenenti il punto (proprio) C .

2. Le coniche del piano euclideo

Sia \mathcal{E}^2 un piano euclideo, in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$.

♦ **Definizione 12.17.** Considerata una generica equazione algebrica di secondo grado nelle coordinate x e y :

$$(*) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ per ogni $i, j \in \{0, 1, 2\}$, diremo che tale equazione rappresenta, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , una *conica* del piano euclideo \mathcal{E}^2 . Inoltre, diremo che due equazioni $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$ e $a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{01}x + 2a'_{02}y + a'_{00} = 0$ rappresentano, rispetto a \mathcal{R} , la *stessa conica* di \mathcal{E}^2 se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $a'_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad \forall i, j \in \{0, 1, 2\}$.

Si noti che, in base alla Definizione 12.17, ogni conica \mathcal{C} di \mathcal{E}^2 è rappresentata - rispetto a \mathcal{R} - da infinite equazioni algebriche di secondo grado, tutte proporzionali tra di loro; usualmente, si dice che *l'equazione di \mathcal{C} rispetto a \mathcal{R} è definita a meno di un coefficiente di proporzionalità* (non nullo).

♦ **Definizione 12.18.** Data una conica \mathcal{C} di \mathcal{E}^2 di equazione (*), si dice *supporto proprio* (o *immagine propria*) di \mathcal{C} l'insieme $\mathcal{I}_P(\mathcal{C})$ dei punti del piano le cui coordinate - rispetto a \mathcal{R} - verificano una (e quindi tutte) le equazioni di \mathcal{C} :

$$\mathcal{I}_P(\mathcal{C}) = \{P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}, \bar{y}) \mid a_{11}\bar{x}^2 + a_{22}\bar{y}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} + 2a_{01}\bar{x} + 2a_{02}\bar{y} + a_{00} = 0\}.$$

E' importante osservare che - a differenza di quanto si potrebbe intuitivamente supporre - l'immagine propria $\mathcal{I}_P(\mathcal{C})$ *non è in generale sufficiente a individuare la conica \mathcal{C}* : ad esempio,

$$\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 = -1 \quad \mathcal{C}_2: x^2 + y^2 = -2 \quad \mathcal{C}_3: 3x^2 + 5y^2 = -1$$

rappresentano, rispetto a \mathcal{R} , tre coniche diverse, ma ciascuna di esse ha immagine propria vuota:

$$\mathcal{I}_P(\mathcal{C}_1) = \mathcal{I}_P(\mathcal{C}_2) = \mathcal{I}_P(\mathcal{C}_3) = \emptyset.$$

Se si suppone di ampliare proiettivamente il piano euclideo \mathcal{E}^2 , denotando con $[x_0, x_1, x_2]$ una terna di coordinate cartesiane omogenee dei suoi punti (propri e impropri) rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , allora l'equazione (*) origina, in coordinate omogenee, la seguente *equazione omogenea della conica \mathcal{C}* :

$$(**) \quad a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}(x_0)^2 = 0,$$

che si può scrivere sinteticamente nella forma

$$\sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_ix_j = 0.$$

♦ **Definizione 12.19.** Data una conica \mathcal{C} di \mathcal{E}^2 di equazione omogenea (**), si dice *supporto improprio* (o *immagine impropria*) di \mathcal{C} l'insieme $\mathcal{I}_{\infty}(\mathcal{C})$ dei punti impropri

dell'ampliamento proiettivo di \mathcal{E}^2 le cui coordinate cartesiane omogenee - rispetto a \mathcal{R} - verificano una (e quindi tutte) le equazioni omogenee di \mathcal{C} :

$$\mathcal{I}_\infty(\mathcal{C}) = \{P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, \bar{x}_1, \bar{x}_2] \mid a_{11}(\bar{x}_1)^2 + a_{22}(\bar{x}_2)^2 + 2a_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2 = 0\}.$$

Si dice poi *supporto* (o *immagine*) di \mathcal{C} l'insieme

$$\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \mathcal{I}_P(\mathcal{C}) \cup \mathcal{I}_\infty(\mathcal{C}).$$

Nel seguito, con abuso di linguaggio e per semplicità di notazioni, identificheremo spesso la conica \mathcal{C} con il suo supporto.

◆ **Definizione 12.20.** Data una conica \mathcal{C} di \mathcal{E}^2 di equazione (*) (o di equazione omogenea (**)), si dice *matrice associata a \mathcal{C}* (o *discriminante di \mathcal{C}*) rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} la matrice simmetrica²

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$

Tramite la matrice associata a \mathcal{C} , è possibile scrivere in forma matriciale le equazioni (*) e (**) di \mathcal{C} :

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{o, più sinteticamente, } {}^t(u) \cdot A \cdot (u) = 0);$$

$$(**) \quad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{o, più sinteticamente, } {}^t(x) \cdot A \cdot (x) = 0).$$

Vediamo ora come cambia la matrice associata a una conica (e quindi, anche la sua equazione e la sua equazione omogenea) al variare del sistema di riferimento fissato.

■ **Proposizione 12.21.** Sia \mathcal{C} una conica di \mathcal{E}^2 avente, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , matrice associata $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Se \mathcal{R}' è un altro riferimento cartesiano su \mathcal{E}^2 , e

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad E = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}),$$

sono le equazioni del cambiamento di riferimento da \mathcal{R} a \mathcal{R}' , allora la conica \mathcal{C} ha, rispetto a \mathcal{R}' , matrice associata A' tale che

$$A = {}^t\bar{E} \cdot A' \cdot \bar{E}, \quad \text{con} \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^1 & e_1^1 & e_2^1 \\ b^2 & e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

²Si noti che anche la matrice associata a \mathcal{C} , come l'equazione e l'equazione omogenea, risulta definita a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo.

Dimostrazione. Sostituendo le equazioni del cambiamento di riferimento cartesiano da \mathcal{R} a \mathcal{R}' , scritte come

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \bar{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad (u') = \bar{E} \cdot (u),$$

nella forma matriciale della equazione (*) di \mathcal{C} rispetto a \mathcal{R}' ,

$${}^t(u') \cdot A' \cdot (u') = 0,$$

si ottiene l'equazione

$${}^t(u) \cdot {}^t\bar{E} \cdot A' \cdot \bar{E} \cdot (u) = 0$$

che, confrontata con la forma matriciale dell'equazione (*) di \mathcal{C} rispetto a \mathcal{R} , ${}^t(u) \cdot A \cdot (u) = 0$, prova la tesi. □

► **Osservazione 12.22.** Con le notazioni della Proposizione 12.21, ricordando il teorema di Binet (Proposizione 3.38), si ha $\det A = \det A'$. Infatti, dalla ortogonalità di E segue $\det \bar{E} = \det E = \pm 1$ e quindi $\det A = (\det \bar{E})^2 \cdot \det A' = \det A'$. Si ricordi tuttavia che anche la matrice A' associata a \mathcal{C} rispetto a \mathcal{R}' risulta definita a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo.

► **Osservazione 12.23.** Se interpretiamo il discriminante A di una conica \mathcal{C} , rispetto a un riferimento cartesiano \mathcal{R} , come la matrice (simmetrica) associata a una forma quadratica q su \mathbb{R}^3 rispetto alla base canonica (si veda l'Appendice B), l'equazione omogenea di \mathcal{C} ha come primo membro $q(\mathbf{x}) = {}^t(x) \cdot A \cdot (x)$, il valore che q assume su un generico vettore $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ di \mathbb{R}^3 .

Un diverso discriminante di \mathcal{C} , relativo a \mathcal{R} , dà evidentemente luogo a una forma quadratica proporzionale a q . Se, invece, si considera un diverso riferimento \mathcal{R}' , come si è visto, il relativo discriminante di \mathcal{C} è, a meno di proporzionalità, una matrice A' congruente ad A (si veda il § 3 della Appendice B).

Tali considerazioni inducono a ritenere che l'ambiente più opportuno per definire le coniche sia l'ampliamento proiettivo del piano euclideo e che, in tale contesto, una conica sia individuata da una classe di proporzionalità di forme quadratiche.

Dalla Proposizione 12.21 si deduce la

■ **Proposizione 12.24.** *Tutti i discriminanti di una stessa conica \mathcal{C} hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. Se due matrici sono associate a \mathcal{C} rispetto allo stesso riferimento cartesiano, allora sono proporzionali (e quindi hanno banalmente lo stesso rango). Se invece due matrici A e A' sono associate a \mathcal{C} rispetto a differenti riferimenti cartesiani, allora per la Proposizione 12.21 si ha $A = {}^t\bar{E} \cdot A' \cdot \bar{E}$ con $\bar{E} \in GL_3(\mathbb{R})$. L'affermazione segue allora osservando che, in generale, per ogni campo \mathbb{K} , se $F \in GL_n(\mathbb{K})$, allora $\varrho(A \cdot F) = \varrho(F \cdot A) = \varrho(A)$, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

Per *rango* $\varrho(\mathcal{C})$ di \mathcal{C} si intenderà il rango di un suo qualsiasi discriminante.

♦ **Definizione 12.25.** Una conica \mathcal{C} di \mathcal{E}^2 si dice *non specializzata* o *non degenerare* se $\varrho(\mathcal{C}) = 3$. In caso contrario, si dice che \mathcal{C} è una *conica specializzata* o *degenerare* di \mathcal{E}^2 . Quindi, se A è un discriminante di \mathcal{C} , si ha che \mathcal{C} è degenerare se e solo se $\det A = 0$.

► **Osservazione 12.26.** Non è difficile verificare che noti sottoinsiemi del piano euclideo (in particolare: rette e unioni di due rette) risultano essere il supporto di opportune coniche degeneri:

- se r è una retta di \mathcal{E}^2 avente equazione omogenea $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$ rispetto a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , allora

$$(ax_1 + bx_2 + cx_0)^2 = 0$$

è la equazione di una conica degenerare \mathcal{C} di \mathcal{E}^2 , il cui supporto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ è costituito da tutti e soli i punti della retta r (che si dice “*contata due volte*”);

- se r e s sono due rette distinte di \mathcal{E}^2 aventi rispettivamente equazioni omogenee $a'x_1 + b'x_2 + c'x_0 = 0$ e $a''x_1 + b''x_2 + c''x_0 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , allora

$$(a'x_1 + b'x_2 + c'x_0) \cdot (a''x_1 + b''x_2 + c''x_0) = 0$$

è la equazione di una conica degenerare \mathcal{C} di \mathcal{E}^2 , il cui supporto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ è costituito da tutti e soli i punti delle rette r e s .

In realtà (come già anticipato nella nota 3 di pag.207) tali sottoinsiemi, uniti ai singoli punti di \mathcal{E}^2 , esauriscono tutti i possibili supporti di una conica degenerare del piano euclideo. È infatti possibile dimostrare che, se \mathcal{C} è una conica degenerare di \mathcal{E}^2 , allora è verificata una (e una sola) delle seguenti affermazioni:

- esiste una retta (propria o impropria) r di \mathcal{E}^2 tale che $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = r$;
- esistono due rette distinte r e s di \mathcal{E}^2 (di cui una eventualmente coincidente con la retta impropria), tali che $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = r \cup s$;
- esiste un punto (proprio o improprio) P di \mathcal{E}^2 tale che $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \{P\}$.

Nel primo caso si ha $\varrho(\mathcal{C}) = 1$, mentre nel secondo e nel terzo caso si ha $\varrho(\mathcal{C}) = 2$.

Le coniche si suddividono innanzitutto in *reali*, se $\mathcal{I}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$, e *vuote* (o *immaginarie*), se $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \emptyset$. Si osservi che una conica degenerare è sempre reale.

Detto A un discriminante di \mathcal{C} , si noti che \mathcal{C} è reale se e solo se la matrice A è *non definita* (Definizione B.13); quindi, per distinguere le coniche reali da quelle immaginarie si può utilizzare il Criterio di Sylvester (Proposizione B.15). In alternativa, si può attendere la Proposizione 12.46.

Una diversa classificazione delle coniche non degeneri si effettua esaminandone l'intersezione con la retta impropria r_∞ di \mathcal{E}^2 .

■ **Proposizione 12.27.** Se \mathcal{C} è una conica di \mathcal{E}^2 e r è una retta (propria o impropria) di \mathcal{E}^2 non contenuta nel supporto di \mathcal{C} , allora l'intersezione di r con \mathcal{C} è costituita da uno dei seguenti sottoinsiemi di \mathcal{E}^2 :

- due punti distinti;
- un solo punto;
- l'insieme vuoto.

Inoltre, se \mathcal{C} è non degenera, allora il supporto di \mathcal{C} non contiene rette.

Dimostrazione. (i) Se r è una retta propria, si può supporre che r sia l'asse x di un riferimento cartesiano \mathcal{R} , ovvero la retta di equazione omogenea $x_2 = 0$. Se A è un discriminante di \mathcal{C} rispetto a \mathcal{R} , allora i punti di intersezione di r con \mathcal{C} hanno coordinate cartesiane omogenee $[x_0, x_1, 0]$ che verificano l'equazione di secondo grado:

$$(\#) \quad a_{11}(x_1)^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{00}(x_0)^2 = 0.$$

Poichè r non è contenuta in \mathcal{C} , l'equazione $(\#)$ non può essere identicamente soddisfatta (cioè i coefficienti a_{00}, a_{01}, a_{11} non possono essere tutti nulli). Se $a_{11} = a_{00} = 0$, l'equazione $(\#)$ diventa $2a_{01}x_0x_1 = 0$, da cui segue immediatamente che l'intersezione è costituita da un punto proprio e un punto improprio di \mathcal{E}^2 ; in tutti gli altri casi, supponendo di ricavare una incognita in funzione dell'altra, l'equazione $(\#)$ ammette due, una o zero soluzioni reali a seconda che $\frac{\Delta}{4} = (a_{01})^2 - a_{00} \cdot a_{11}$ sia rispettivamente positivo, nullo o negativo.

(ii) Se r è la retta impropria r_∞ di equazione omogenea $x_0 = 0$ rispetto a un qualunque riferimento cartesiano \mathcal{R} , e A è un discriminante di \mathcal{C} rispetto a \mathcal{R} , allora i punti di intersezione di r_∞ con \mathcal{C} hanno coordinate cartesiane omogenee $[0, x_1, x_2]$ che verificano l'equazione di secondo grado:

$$(\#\#) \quad a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2 = 0.$$

Ragionando in modo analogo a quanto fatto in (i), si ha che l'equazione $(\#\#)$ ammette due, una o zero soluzioni reali, a seconda che $\frac{\Delta}{4} = (a_{12})^2 - a_{11} \cdot a_{22}$ sia rispettivamente positivo, nullo o negativo (anche nel caso particolare $a_{11} = a_{22} = 0$).

(iii) Infine, se il supporto di \mathcal{C} contiene la retta propria (risp. impropria) r , allora i coefficienti a_{00}, a_{01}, a_{11} nell'equazione $(\#)$ (risp. i coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{22} nell'equazione $(\#\#)$) devono essere tutti nulli e dunque si ha $\det A = 0$.

□

◆ **Definizione 12.28.** Sia \mathcal{C} una conica di \mathcal{E}^2 e r una retta (propria o impropria) di \mathcal{E}^2 . Si dice che:

- (a) r è *tangente* a \mathcal{C} se l'intersezione di r con \mathcal{C} è costituita da un solo punto oppure se r è contenuta nel supporto di \mathcal{C} ;
- (b) r è *secante* \mathcal{C} se l'intersezione di r con \mathcal{C} è costituita da due punti distinti;
- (c) r è *esterna* a \mathcal{C} se l'intersezione di r con \mathcal{C} è vuota.

Ricordando che (il supporto di) una conica non degenera non contiene rette (Proposizione 12.27), si ottiene la seguente classificazione delle coniche non degeneri di \mathcal{E}^2 .

◆ **Definizione 12.29.** Una conica non degenera \mathcal{C} di \mathcal{E}^2 si dice:

- (a) *parabola* se r_∞ è tangente a \mathcal{C} , ovvero se il supporto improprio di \mathcal{C} si riduce a un solo punto (improprio);
- (b) *iperbole* se r_∞ è secante \mathcal{C} , ovvero se il supporto improprio di \mathcal{C} è costituito da due punti (impropri) distinti;

(c) *ellisse* se r_∞ è esterna a \mathcal{C} , ovvero se il supporto improprio di \mathcal{C} è vuoto.³

La seguente proposizione fornisce le semplici condizioni algebriche su A_{00} (il complemento algebrico dell'elemento a_{00} nella matrice A) per distinguere parabole, iperboli ed ellissi.

■ **Proposizione 12.30.** *Sia \mathcal{C} una conica non degenera di \mathcal{E}^2 e sia A (con $\det A \neq 0$) un suo discriminante rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} . Allora, si ha che:*

- (a) \mathcal{C} è una parabola se e soltanto se $A_{00} = 0$;
- (b) \mathcal{C} è una iperbole se e soltanto se $A_{00} < 0$;
- (c) \mathcal{C} è una ellisse se e soltanto se $A_{00} > 0$.

Dimostrazione. Ricordando il punto (ii) della dimostrazione della Proposizione 12.27, si ha che r_∞ è tangente, secante o esterna a \mathcal{C} a seconda che $\frac{\Delta}{4} = (a_{12})^2 - a_{11} \cdot a_{22}$ sia rispettivamente nullo, positivo o negativo. La tesi segue quindi immediatamente, osservando che

$$-\frac{\Delta}{4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{00}.$$

□

Esempio 12.6. Consideriamo, nel piano euclideo \mathcal{E}^2 , dotato di un riferimento cartesiano \mathcal{R} , le coniche aventi le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : \quad & 3x^2 + 8xy - 3y^2 + 2 = 0 & \mathcal{C}_2 : \quad & x^2 - 2xy + 3y^2 + 10x + 7 = 0 \\ \mathcal{C}_3 : \quad & x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y + 2 = 0 & \mathcal{C}_4 : \quad & x^2 + xy - 2y^2 - x + y = 0 \end{aligned}$$

Un discriminante di \mathcal{C}_1 , rispetto a \mathcal{R} , è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

poiché $\det A_1 = -50 \neq 0$, la conica \mathcal{C}_1 è non degenera. In particolare, essendo $A_{00} = -25 < 0$, la conica \mathcal{C}_1 risulta essere una iperbole.

Un discriminante di \mathcal{C}_2 , rispetto a \mathcal{R} , è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

poiché $\det A_2 = -61 \neq 0$, la conica \mathcal{C}_2 è non degenera. In particolare, essendo $A_{00} = 2 > 0$, la conica \mathcal{C}_2 risulta essere una ellisse.

³Si noti che le parabole e le iperboli sono sempre coniche reali, avendo $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{C}) \neq \emptyset$, mentre le ellissi possono essere reali o immaginarie.

Un discriminante di \mathcal{C}_3 , rispetto a \mathcal{R} , è

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

poiché $\det A_3 = -1 \neq 0$, la conica \mathcal{C}_3 è non degenere. In particolare, essendo $A_{00} = 0$, la conica \mathcal{C}_3 risulta essere una parabola.

Un discriminante di \mathcal{C}_4 , rispetto a \mathcal{R} , è

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix};$$

poiché $\det A_4 = 0$, la conica \mathcal{C}_4 è una conica degenere.

► **Osservazione 12.31.** Si ricordi che, se $A \in GL_3(\mathbb{R})$, il sistema lineare normale $A \cdot (y) = (0)$ ammette come soluzione solo la terna nulla. Pertanto, se \mathcal{C} è una conica non degenere di \mathcal{E}^2 , A è un suo discriminante rispetto a \mathcal{R} e $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2]$ è un punto (proprio o improprio) di \mathcal{E}^2 , l'uguaglianza

$$\begin{aligned} (\%) \quad (x_0 \quad x_1 \quad x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= (a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + a_{02}y_2) \cdot x_0 + (a_{01}y_0 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2) \cdot x_1 + \\ &+ (a_{02}y_0 + a_{12}y_1 + a_{22}y_2) \cdot x_2 = 0 \end{aligned}$$

costituisce un'equazione lineare omogenea in cui i coefficienti delle incognite x_0, x_1, x_2 non sono tutti nulli e rappresenta quindi una retta di \mathcal{E}^2 . Inoltre, la generica retta di equazione $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$ coincide con la retta di equazione (%) se e solo se la terna (y_0, y_1, y_2) soddisfa la condizione

$$A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \text{ con } \rho \neq 0.$$

Tale condizione, fissato $\rho \neq 0$, costituisce un sistema lineare normale e ammette dunque una e una sola soluzione (non nulla); inoltre, al variare di $\rho \neq 0$, si ottengono come soluzioni terne proporzionali.

L'Osservazione 12.31 consente di dare la seguente

◆ **Definizione 12.32.** Sia \mathcal{C} una conica non degenere di \mathcal{E}^2 , avente A come matrice associata rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} . Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2]$ è un punto (proprio o improprio) di \mathcal{E}^2 , si dice *retta polare* π_P di P rispetto alla conica la retta (propria o impropria) di equazione omogenea

$$(x_0 \quad x_1 \quad x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Per l'Osservazione 12.31, l'applicazione π che a P associa π_P è una biiezione tra i punti del completamento proiettivo \mathcal{P}^2 del piano euclideo e le sue rette. In altri termini, per ogni retta r (propria o impropria) di \mathcal{E}^2 , esiste uno e un solo punto P (proprio o improprio), la cui retta polare sia r . Tale punto è detto *polo* di r . Si osservi che $P \in \pi_P$ se e solo se $P \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$.

Esempio 12.7. Rispetto alla conica \mathcal{C}_1 considerata nell'Esempio 12.6, la retta polare del punto $P \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, 1]$ ha, rispetto a \mathcal{R} , equazione omogenea:

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

cioè $2x_0 + 4x_1 - 3x_2 = 0$.

Se r è la retta avente, rispetto a \mathcal{R} , equazione omogenea $4x_0 + x_1 - 7x_2 = 0$, le coordinate omogenee del suo polo Q , rispetto alla conica \mathcal{C}_1 , possono essere ottenute mediante il procedimento descritto nell'Osservazione 12.31. Posto infatti

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix},$$

e scegliendo, come valore non nullo di ρ , $\rho = 1$, si ottiene come soluzione del sistema lineare normale (usando ad esempio le formule di Leibniz-Cramer):

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -7 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\det A_1} = \frac{-100}{-50} = 2$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix}}{\det A_1} = \frac{50}{-50} = -1$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix}}{\det A_1} = \frac{-50}{-50} = 1.$$

Il polo di r è dunque il punto $Q \equiv_{\mathcal{R}} [2, -1, 1]$.

■ **Proposizione 12.33.** Sia \mathcal{C} una conica non degenera del piano euclideo, e siano P, Q due punti di \mathcal{E}^2 . Si ha che:

- $Q \in \pi_P$ se e solo se $P \in \pi_Q$. (**Legge di reciprocità**)
- Se P è un punto del supporto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$, allora la retta polare π_P di P rispetto a \mathcal{C} è l'unica retta tangente alla conica in P .

Dimostrazione. Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2]$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} [z_0, z_1, z_2]$, allora si ha che:

$$(Q \in \pi_P \Leftrightarrow {}^t(z) \cdot A \cdot (y) = 0) \quad \text{e} \quad (P \in \pi_Q \Leftrightarrow {}^t(y) \cdot A \cdot (z) = 0).$$

La Legge di reciprocità segue quindi dalla simmetria della matrice A .

Supponiamo ora che $P \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$; la retta r per P e per un secondo punto $Q \neq P$ risulta tangente alla conica in P se e solo se P è l'unico punto di intersezione tra r e $\mathcal{I}(\mathcal{C})$. Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2]$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} [z_0, z_1, z_2]$, allora tutti e soli i punti della retta r hanno, rispetto a \mathcal{R} , coordinate cartesiane omogenee $[\lambda y_0 + \mu z_0, \lambda y_1 + \mu z_1, \lambda y_2 + \mu z_2]$, al variare dei parametri reali (non entrambi nulli) λ, μ (Proposizione 12.8); i punti di intersezione tra r e $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ corrispondono dunque alle soluzioni della equazione di secondo grado

$${}^t(\lambda y + \mu z) \cdot A \cdot (\lambda y + \mu z) = 0,$$

che equivale a

$$\lambda^2 {}^t(y) \cdot A \cdot (y) + 2\lambda\mu {}^t(z) \cdot A \cdot (y) + \mu^2 {}^t(z) \cdot A \cdot (z) = 0.$$

La ipotesi $P \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$ assicura che il coefficiente di λ^2 è sempre nullo; quindi, la equazione ammette una sola soluzione (corrispondente alla coppia $(\lambda, \mu) = (1, 0)$, ovvero al punto di tangenza P) se e soltanto se anche il coefficiente di $\lambda\mu$ si annulla. Ciò implica che r è tangente alla conica se e soltanto se

$${}^t(z) \cdot A \cdot (y) = 0,$$

cioè se e soltanto se il punto Q appartiene alla polare π_P di P .

□

► **Osservazione 12.34.** Si noti che, se P non appartiene al supporto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$, allora la retta polare π_P di P rispetto a \mathcal{C} può essere o secante o esterna a \mathcal{C} (se π_P fosse tangente a \mathcal{C} in un punto \bar{P} , per la Proposizione 12.33 sarebbe anche la retta polare di \bar{P} , che è assurdo essendo π una biiezione).

Nel primo caso, π_P interseca $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ esattamente nei punti di contatto tra la conica e le due rette tangenti alla conica passanti per P (si veda la Figura 12.1).

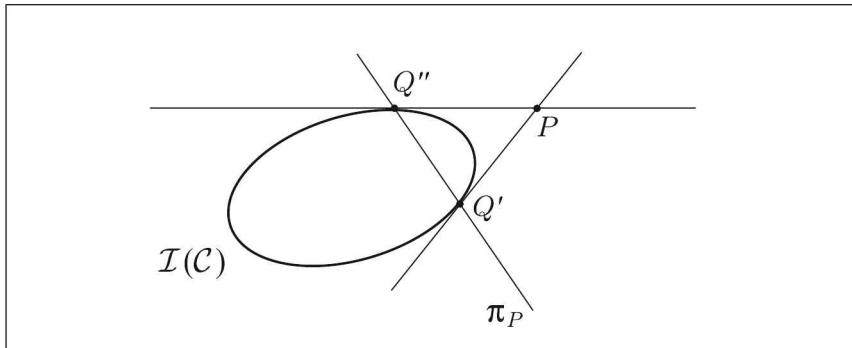


Figura 12.1

Infatti, se $Q \in \pi_P \cap \mathcal{I}(\mathcal{C})$, per la Legge di reciprocità si ha che $P \in \pi_Q$, che - per la Proposizione 12.33 - è la retta tangente in Q alla conica; ciò prova che la retta passante per P e Q è tangente alla conica. D'altra parte, se r è una retta passante

per P e tangente alla conica in un punto $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$, allora r è la retta polare di Q ; per la Legge di reciprocità segue quindi che Q appartiene alla retta π_P polare di P .

Esempio 12.8. Come visto nell'Esempio 12.7 la retta polare π_P del punto $P \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, 1]$ rispetto alla conica \mathcal{C}_1 considerata nell'Esempio 12.6 ha, relativamente a \mathcal{R} , equazione omogenea $2x_0 + 4x_1 - 3x_2 = 0$, mentre la retta polare π_Q del punto $Q \equiv_{\mathcal{R}} [2, -1, 1]$ ha, relativamente a \mathcal{R} , equazione omogenea $4x_0 + x_1 - 7x_2 = 0$.

Si noti che si ha $P \notin \pi_P$, mentre $Q \in \pi_Q$; infatti, $P \notin \mathcal{I}(\mathcal{C}_1)$, mentre $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{C}_1)$ (in accordo con la Proposizione 12.33).

Si verifichi che la retta polare di un punto arbitrario di π_P (risp. di π_Q) passa per P (risp. per Q).

◆ **Definizione 12.35.** Sia \mathcal{C} una conica non degenera di \mathcal{E}^2 . Si dice *diametro* di \mathcal{C} ogni retta propria che sia retta polare di un punto improprio di \mathcal{E}^2 .

Si dice *centro* di \mathcal{C} il polo C della retta impropria r_∞ .

Come ovvia conseguenza della Proposizione 12.33 (Legge di reciprocità), si ha che *tutti i diametri contengono il centro di \mathcal{C} e costituiscono un fascio (proprio o improprio) di rette.*

■ **Proposizione 12.36.** Sia \mathcal{C} una conica non degenera di \mathcal{E}^2 avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$, discriminante $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Allora:

$$C \equiv_{\mathcal{R}} [A_{00}, A_{01}, A_{02}] = \left[\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{12} \end{vmatrix} \right].$$

Dimostrazione. Basta verificare che la retta polare del punto $C \equiv_{\mathcal{R}} [A_{00}, A_{01}, A_{02}]$ coincide con la retta impropria. Per definizione di retta polare, la equazione omogenea di π_C si ottiene da:

$$\pi_C : (x_0 \ x_1 \ x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} A_{00} \\ A_{01} \\ A_{02} \end{pmatrix} = 0;$$

sviluppando il prodotto tra la matrice A e la matrice colonna delle coordinate di C , e utilizzando il Teorema di Laplace generalizzato (Osservazione 3.44), tale equazione diventa:

$$\pi_C : (\det A) \cdot x_0 = 0.$$

Poichè si è supposto \mathcal{C} non degenera, sicuramente si ha $\det A \neq 0$; pertanto, π_C coincide effettivamente con la retta impropria di \mathcal{E}^2 .

□

Si osservi che, come conseguenza delle Proposizioni 12.30 e 12.36, si ha che:

- se \mathcal{C} è una parabola, il suo centro è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore

$$\mathbf{v} \equiv_{\vec{B}} (A_{01}, A_{02}),$$

e i suoi diametri sono tutti paralleli a \mathbf{v} ;

- se \mathcal{C} è una iperbole o una ellisse, il suo centro è il punto proprio di coordinate cartesiane

$$C \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{A_{01}}{A_{00}}, \frac{A_{02}}{A_{00}} \right).$$

Le coniche aventi centro proprio (cioè le iperboli e le ellissi) sono usualmente dette *coniche a centro*.

Esempio 12.9. Nel caso dell'iperbole \mathcal{C}_1 considerata nell'Esempio 12.6, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_1 \equiv_{\mathcal{R}} [-25, 0, 0]$, cioè è il punto proprio di coordinate cartesiane

$$C_1 \equiv_{\mathcal{R}} (0, 0) \quad (\text{origine del riferimento } \mathcal{R}).$$

Nel caso dell'ellisse \mathcal{C}_2 considerata nell'Esempio 12.6, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_2 \equiv_{\mathcal{R}} [2, -15, -5]$, cioè è il punto proprio di coordinate cartesiane

$$C_2 \equiv_{\mathcal{R}} \left(-\frac{15}{2}, -\frac{5}{2} \right).$$

Nel caso della parabola \mathcal{C}_3 considerata nell'Esempio 12.6, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_3 \equiv_{\mathcal{R}} [0, 2, -1]$, cioè è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore

$$\mathbf{v} \equiv_{\vec{B}} (2, -1).$$

◆ **Definizione 12.37.** Sia \mathcal{C} una conica non degenera di \mathcal{E}^2 . Si dice *asintoto* di \mathcal{C} ogni retta propria tangente a \mathcal{C} in un suo punto improprio.

Si noti che, per la Definizione 12.29, *le uniche coniche di \mathcal{E}^2 che ammettono asintoti sono le iperboli*: infatti, il supporto improprio delle ellissi è vuoto, mentre l'unico punto improprio delle parabole (che coincide con il centro) ammette come retta tangente la retta impropria.

Ogni iperbole ammette *due asintoti*, che si ottengono facilmente come rette polari dei due punti impropri dell'iperbole. D'altra parte, gli asintoti di una iperbole sono particolari diametri (perché rette polari di punti impropri), e perciò contengono il centro della iperbole; pertanto, noto il centro C e i punti impropri P_∞ e Q_∞ dell'iperbole, gli asintoti coincidono con le rette CP_∞ e CQ_∞ .

◆ **Definizione 12.38.** Si dice *iperbole equilatera* una iperbole del piano euclideo \mathcal{E}^2 avente per asintoti due rette ortogonali.

Non è difficile verificare, ricavando direttamente dalla equazione omogenea le coordinate dei punti impropri e imponendo la condizione di ortogonalità tra le direzioni da essi individuate, che le iperboli equilatera sono caratterizzate da una semplice condizione algebrica su qualunque matrice ad esse associata:

■ **Proposizione 12.39.** *Sia C una iperbole di \mathcal{E}^2 avente, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , matrice associata $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. L'iperbole C è equilatera se e soltanto se*

$$a_{11} + a_{22} = 0.$$

□

Esempio 12.10. Nel caso della iperbole C_1 considerata nell'Esempio 12.6, il supporto improprio ha equazione

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 3x_2^2 + 8x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

per cui i punti impropri di C_1 sono $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, -3, 1]$ e $Q_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, 3]$. Poichè il centro C di C_1 coincide con l'origine del riferimento \mathcal{R} , gli asintoti sono le due rette CP_∞ , di equazione $x + 3y = 0$, e CQ_∞ , di equazione $3x - y = 0$. Si verifichi che esse coincidono con le polari π_{P_∞} e π_{Q_∞} rispettivamente.

Si noti inoltre che i due asintoti di C_1 risultano tra loro ortogonali: la equazione della iperbole C_1 verifica infatti la condizione della Proposizione 12.39, che caratterizza le iperboli equilatera.

◆ **Definizione 12.40.** Sia C una conica non degenera di \mathcal{E}^2 . Si dice *asse* di C ogni diametro π_{P_∞} di C che sia ortogonale alla direzione individuata dal suo polo P_∞ . Si dice *vertice* di C ogni punto di intersezione del supporto proprio $\mathcal{I}_P(C)$ con un asse di C .

Si noti che gli assi di C , essendo particolari diametri, contengono sempre il centro di C .

La seguente proposizione fornisce il metodo operativo per trovare gli assi (e quindi i vertici) di una conica.

■ **Proposizione 12.41.** *Sia C una conica non degenera di \mathcal{E}^2 avente, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , matrice associata $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$; sia M_{00} il minore complementare dell'elemento a_{00} in A . Gli assi di C sono le rette polari dei punti impropri di \mathcal{E}^2 individuati dalle direzioni degli autovettori di M_{00} , relativi ad autovalori non nulli.*

In altre parole, la Proposizione 12.41 afferma che un punto $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, l, m]$ è polo di un asse di C se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che

$$(+)\quad M_{00} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}.$$

Si noti che, poichè $M_{00} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, essa ammette sempre due autovalori, eventualmente coincidenti, con somma delle molteplicità geometriche uguale a due (Teorema 7.19).

Dimostrazione. In base alla Definizione 12.32, la retta polare di un generico punto improprio $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, l, m]$ del piano euclideo \mathcal{E}^2 ha, relativamente a \mathcal{R} , equazione

$$(a_{01}l + a_{02}m) \cdot x_0 + (a_{11}l + a_{12}m) \cdot x_1 + (a_{12}l + a_{22}m) \cdot x_2 = 0$$

e pertanto i coefficienti direttori di una retta ortogonale ad essa sono proporzionali a $(a_{11}l + a_{12}m, a_{12}l + a_{22}m)$. Quindi, la direzione individuata da P_∞ è ortogonale a π_{P_∞} se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che

$$(a_{11}l + a_{12}m, a_{12}l + a_{22}m) = \lambda \cdot (l, m),$$

ovvero se e solo se vale la condizione (+).

□

Dalla Legge di reciprocità segue facilmente che *la retta tangente a una conica \mathcal{C} in un suo vertice V è ortogonale all'asse contenente V* : infatti, detto π_{P_∞} l'asse contenente V , la Legge di reciprocità (Proposizione 12.33) assicura che $P_\infty \in \pi_V$, e quindi che la polare di V (ovvero la tangente in V a \mathcal{C}) ha la direzione ortogonale all'asse (che è individuata, per definizione di asse, dal suo polo P_∞).

Come conseguenza delle Proposizioni 12.36 e 12.41, si ottiene poi il seguente risultato, relativo alla esistenza di assi per i vari tipi di coniche non degeneri.

■ **Proposizione 12.42.** *Sia \mathcal{C} una conica non degenera di \mathcal{E}^2 .*

- *Se \mathcal{C} è una conica a centro, esistono sempre (almeno⁴) due assi di \mathcal{C} , tra loro ortogonali, che si intersecano nel centro di \mathcal{C} ;*
- *se \mathcal{C} è una parabola, essa ammette un solo asse e un solo vertice.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 12.41, ogni classe di proporzionalità di autovettori della matrice $M_{00} \in \mathbb{S}_2(\mathbb{R})$, relativi a un autovalore non nullo, individua un asse della conica \mathcal{C} .

• Nel caso che \mathcal{C} sia una conica a centro, la matrice M_{00} non può ammettere l'autovalore nullo (essendo $\det M_{00} \neq 0$).

Se M_{00} ha una coppia di autovalori distinti (non nulli), allora esistono esattamente due punti impropri $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$ le cui rette polari $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ sono gli unici due assi di \mathcal{C} . Inoltre, poiché il punto improprio Q_∞ di $\pi_{P_{1\infty}}$ individua la direzione ortogonale a $P_{1\infty}$, la sua retta polare π_{Q_∞} , per la legge di reciprocità, contiene $P_{1\infty}$. Dunque, π_{Q_∞} (che è una retta propria in quanto polare di un punto improprio rispetto a una conica a centro) ha direzione ortogonale al suo polo Q_∞ e coincide quindi con l'altro asse $\pi_{P_{2\infty}}$ di \mathcal{C} : ciò prova che i due assi sono tra loro ortogonali.

Se invece M_{00} ha un solo autovalore (non nullo) di molteplicità due, allora gli autovettori di M_{00} ad esso associati individuano tutti i punti impropri di \mathcal{E}^2 ; tutti i diametri risultano quindi essere assi di \mathcal{C} .

In ogni caso, gli assi si intersecano ovviamente nel centro della conica, perché il centro appartiene a ogni diametro (e quindi, a ogni asse) di \mathcal{C} .

• Nel caso che \mathcal{C} sia una parabola, la matrice M_{00} (avendo $\det M_{00} = 0$) ammette sicuramente l'autovalore nullo, con molteplicità uno (perché, se tale molteplicità fosse due, la matrice A non potrebbe essere regolare); esiste pertanto un unico autovalore $\bar{\lambda}$ non nullo, e il punto improprio P_∞ , individuato dagli autovettori di M_{00} , tutti tra loro proporzionali, relativi a $\bar{\lambda}$, determina l'unico asse π_{P_∞} di \mathcal{C} . Infine, poiché l'asse π_{P_∞} è una retta propria contenente il centro (improprio) della parabola \mathcal{C} , esso non

⁴L'unica conica non vuota che ammette più di due assi è la circonferenza, per la quale tutti i diametri risultano essere assi: si veda anche la successiva Proposizione 12.48.

può essere tangente a \mathcal{C} ; pertanto, l'asse interseca il supporto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ in un ulteriore punto proprio V , che risulta essere l'unico vertice della parabola. \square

Esempio 12.11. Nel caso della iperbole \mathcal{C}_1 considerata nell'Esempio 12.6, gli autovalori della matrice M_{00} sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -5$, che si ottengono risolvendo la equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} t-3 & -4 \\ -4 & t+3 \end{pmatrix} = t^2 - 25 = 0.$$

Gli autovettori relativi all'autovalore λ_1 sono i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad l - 2m = 0;$$

gli autovettori relativi all'autovalore λ_2 sono invece i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad 2l + m = 0.$$

I poli degli assi di \mathcal{C}_1 sono dunque i punti impropri $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 2, 1]$ e $P_{2\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, -2]$; gli assi di \mathcal{C}_1 sono allora le rette $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}} : 2x + y = 0 \quad \pi_{P_{2\infty}} : x - 2y = 0.$$

Esempio 12.12. Nel caso della ellisse \mathcal{C}_2 considerata nell'Esempio 12.6, gli autovalori della matrice M_{00} sono $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$, che si ottengono risolvendo la equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & t-3 \end{pmatrix} = t^2 - 4t + 2 = 0.$$

Gli autovettori relativi all'autovalore λ_1 sono i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad (\sqrt{2}+1)l + m = 0;$$

gli autovettori relativi all'autovalore λ_2 sono invece i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}+1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad (-\sqrt{2}+1)l + m = 0.$$

I poli degli assi di \mathcal{C}_2 sono dunque i punti impropri $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1 - \sqrt{2}, 1]$ e $P_{2\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1 + \sqrt{2}, 1]$; gli assi di \mathcal{C}_2 sono allora le rette $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}} : -\sqrt{2}x + (2 + \sqrt{2})y + 5 - 5\sqrt{2} = 0 \quad \pi_{P_{2\infty}} : \sqrt{2}x + (2 - \sqrt{2})y + 5 + 5\sqrt{2} = 0.$$

Esempio 12.13. Nel caso della parabola \mathcal{C}_3 considerata nell'Esempio 12.6, l'unico autovalore non nullo della matrice M_{00} è $\bar{\lambda} = 5$, essendo

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-4 \end{pmatrix} = t^2 - 5t.$$

Gli autovettori relativi a tale autovalore $\bar{\lambda}$ sono i vettori (l, m) tali che

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad 2l - m = 0.$$

Il polo dell'(unico) asse di \mathcal{C}_3 è dunque il punto improprio $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, 2]$; l'asse di \mathcal{C}_3 è allora la retta π_{P_∞} di equazione:

$$\pi_{P_\infty} : 5x + 10y - 2 = 0.$$

Si noti che, in alternativa, la direzione del punto improprio P_∞ può essere determinata come la direzione ortogonale al centro (improprio) $C_3 \equiv_{\mathcal{R}} [0, 2, -1]$ della parabola \mathcal{C}_3 : infatti, l'asse di \mathcal{C}_3 , essendo un particolare diametro, risulta necessariamente parallelo alla direzione individuata dal centro.

3. Riduzione a forma canonica delle coniche

Nel presente paragrafo, \mathcal{C} denoterà sempre una conica del piano euclideo \mathcal{E}^2 , dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$.

Le proprietà del centro, degli assi e dei vertici, ottenute nel paragrafo precedente, permettono, nei vari tipi di coniche non degeneri, di potere scegliere sempre un riferimento cartesiano rispetto al quale l'equazione della conica risulta particolarmente semplice. Infatti, la proposizione seguente afferma che, fissato opportunamente il riferimento, la matrice associata è o di tipo diagonale o di tipo “anti-diagonale” (ovvero, i suoi unici elementi non nulli appartengono alla diagonale secondaria).

■ **Proposizione 12.43.** *Sia \mathcal{C} una conica non degeneri di \mathcal{E}^2 .*

- (i) *Se \mathcal{C} è una conica a centro, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine \bar{O} coincidente con il centro di \mathcal{C} , e assi coordinati $\bar{\mathbf{X}}$ e $\bar{\mathbf{Y}}$ coincidenti con una coppia di assi, tra loro ortogonali, di \mathcal{C} . Allora, la matrice associata a \mathcal{C} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo diagonale.*
- (ii) *Se \mathcal{C} è una parabola, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine \bar{O} coincidente con il vertice V di \mathcal{C} , asse $\bar{\mathbf{Y}}$ coincidente con l'asse di \mathcal{C} e asse $\bar{\mathbf{X}}$ coincidente con la tangente in V a \mathcal{C} . Allora, la matrice associata a \mathcal{C} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo “anti-diagonale”.*

Dimostrazione. Sia $\bar{A} = (\bar{a}_{ij}) \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ il discriminante di \mathcal{C} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$.

(i) Se \mathcal{C} è una conica a centro, l'asse $\bar{\mathbf{X}}$ (avente equazione $x_2 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$) è un asse della conica e quindi deve coincidere con la retta polare della sua direzione ortogonale $P_\infty^{\bar{\mathbf{X}}} \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0, 0, 1]$ (avente equazione $\bar{a}_{02}x_0 + \bar{a}_{12}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$); pertanto si ha $\bar{a}_{02} = \bar{a}_{12} = 0$. Analogamente, l'asse $\bar{\mathbf{Y}}$ (avente equazione $x_1 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$) deve coincidere con la retta polare della sua direzione ortogonale $P_\infty^{\bar{\mathbf{Y}}} \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0, 1, 0]$ (avente equazione $\bar{a}_{01}x_0 + \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$); pertanto si ha $\bar{a}_{01} = \bar{a}_{12} = 0$. Dunque la matrice \bar{A} è di tipo diagonale.

(ii) Se \mathcal{C} è una parabola, l'asse $\bar{\mathbf{X}}$ (avente equazione $x_2 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$) deve coincidere con la polare del vertice $V \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [1, 0, 0]$ (avente equazione $\bar{a}_{00}x_0 + \bar{a}_{01}x_1 + \bar{a}_{02}x_2 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$); pertanto si ha $\bar{a}_{00} = \bar{a}_{01} = 0$. L'asse $\bar{\mathbf{Y}}$ (avente equazione $x_1 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$) coincide con l'unico asse della parabola, cioè con la retta polare della sua direzione ortogonale $P_\infty^{\bar{\mathbf{Y}}} \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0, 1, 0]$ (avente equazione $\bar{a}_{01}x_0 + \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$); si ha quindi $\bar{a}_{01} = \bar{a}_{12} = 0$. Infine, poiché il centro $C_\infty \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [\bar{A}_{00}, \bar{A}_{01}, \bar{A}_{02}]$

della parabola è il punto improprio dell'asse \mathbf{Y} (avente coordinate omogenee $[0,0,1]$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$), si ha $\bar{A}_{00} = \bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} = 0$, con $\bar{A}_{02} = -\bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{02} \neq 0$, da cui segue $\bar{a}_{22} = 0$.

□

La proposizione seguente fornisce il metodo operativo per ottenere, a partire da una qualunque matrice associata alla conica non degenera \mathcal{C} , una matrice di tipo diagonale o “anti-diagonale” associata a \mathcal{C} .

■ **Proposizione 12.44.** *Sia \mathcal{C} una conica non degenera di \mathcal{E}^2 e sia A un suo discriminante, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} .*

- (i) *Se \mathcal{C} è una conica a centro, allora una matrice di tipo diagonale associata a \mathcal{C} è*

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono i due autovalori (eventualmente coincidenti) del minore M_{00} di A e $d \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D = \det A$.

- (ii) *Se \mathcal{C} è una parabola, allora una matrice di tipo “anti-diagonale” associata a \mathcal{C} è*

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & \lambda & 0 \\ d' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'unico autovalore non nullo del minore M_{00} di A e $d' \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D' = \det A$.

Dimostrazione. In virtù della Proposizione 12.21, il discriminante \bar{A} di \mathcal{C} rispetto al riferimento $\bar{\mathcal{R}}$ individuato nella Proposizione 12.43 (di tipo diagonale nel caso (i), di tipo “anti-diagonale” nel caso (ii)) è tale che

$$A = {}^t\bar{E} \cdot \bar{A} \cdot \bar{E}, \quad \text{con} \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^1 & e_1^1 & e_2^1 \\ b^2 & e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad E = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$$

e, per l'Osservazione 12.22, si ha:

$$\det A = \det \bar{A}.$$

D'altra parte, se M_{00} (risp. \bar{M}_{00}) denota il minore complementare dell'elemento a_{00} (risp. \bar{a}_{00}) in A (risp. in \bar{A}), si ha:

$$M_{00} = {}^tE \cdot \bar{M}_{00} \cdot E, \quad \text{con} \quad E \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}).$$

Essendo ${}^tE = E^{-1}$, ne consegue che M_{00} e \bar{M}_{00} sono simili, ovvero che \bar{M}_{00} contiene, sulla sua diagonale principale, esattamente gli autovalori di M_{00} .

□

Come conseguenza delle Proposizioni 12.43 e 12.44, si ottengono le cosiddette *equazioni canoniche* delle coniche non degeneri di \mathcal{E}^2 (che, nel caso di coniche reali, coincidono con quelle del § 4 del Capitolo 10, ottenute intendendo parabola, ellisse e iperbole come particolari luoghi geometrici del piano):

■ **Proposizione 12.45.** *Sia C una conica non degenera di \mathcal{E}^2 e sia A una sua matrice associata, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} .*

- (a) *Se C è una parabola, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^2 rispetto al quale C assume equazione*

$$Y = \frac{1}{2p}X^2 \quad \text{con } p \in \mathbb{R}^+;$$

- (b) *Se C è una iperbole, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^2 rispetto al quale C assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+;$$

- (c) *Se C è una ellisse reale, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^2 rispetto al quale C assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b;$$

- (d) *Se C è una conica vuota, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^2 rispetto al quale C assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b.$$

Dimostrazione. Se C è una parabola, l'equazione indotta dalla matrice “antidiagonale” D' risulta $\lambda X^2 + 2d'Y = 0$. Pertanto, moltiplicando per $(-2d')^{-1}$ e cambiando eventualmente orientazione all'asse \mathbf{Y} del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$, la equazione di C rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ assume la forma del caso (a) (ovvero l'equazione canonica della parabola, intesa come particolare luogo geometrico del piano: si veda la formula (3) del § 4 del Capitolo 10), dove $p = \left| -\frac{d'}{\lambda} \right|$.

Nel caso delle coniche a centro, moltiplicando per $(-d)^{-1}$, la equazione indotta dalla matrice diagonale D risulta

$$\frac{\lambda_1}{-d} \cdot X^2 + \frac{\lambda_2}{-d} \cdot Y^2 = 1.$$

Allora:

- se λ_1 e λ_2 hanno segno opposto, la conica è una iperbole (essendo $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = A_{00} < 0$) e, scambiando eventualmente tra loro l'asse \mathbf{X} e l'asse \mathbf{Y} , la equazione assume la forma del caso (b) (ovvero l'equazione canonica della iperbole, intesa come particolare luogo geometrico del piano: si veda la formula (2) del § 4 del Capitolo 10);
- se λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno, allora la conica è una ellisse (essendo $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = A_{00} > 0$). Inoltre, se λ_1 e λ_2 hanno segno concorde con $-d$, l'equazione assume la forma del caso (c) (ovvero l'equazione canonica della ellisse, intesa come particolare luogo geometrico del piano: si veda la formula (1) del § 4 del Capitolo 10); pertanto, l'ellisse è reale. Se invece λ_1 e λ_2 hanno entrambi segno discorde con $-d$, l'equazione assume la forma del caso (d), e l'ellisse è vuota. Si noti che in entrambi i casi, per avere $a \geq b$, occorre eventualmente scambiare tra loro l'asse \mathbf{X} e l'asse \mathbf{Y} .

□

Si noti che, nel caso della ellisse, il segno di d coincide con il segno di $\det A$ (infatti, per la Proposizione 12.44(i), si ha $\det A = d \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 = d \cdot A_{00}$); quindi, *una conica C è una ellisse reale (risp. una ellisse vuota) se e soltanto se, in qualunque matrice A associata a C , il minore M_{00} ammette due autovalori, entrambi di segno discorde (risp. concorde) con $\det A$.*

In realtà, esiste un criterio alternativo per riconoscere le coniche a supporto vuoto, anche senza determinare gli autovalori del minore M_{00} :

■ **Proposizione 12.46.** *Una conica C di \mathcal{E}^2 ha supporto vuoto se e solo se, in qualunque matrice A associata a C , si ha $A_{00} > 0$ e $a_{22} \cdot \det A > 0$ (o, equivalentemente, $a_{11} \cdot \det A > 0$).*

Dimostrazione. È sufficiente provare che le condizioni scritte sono equivalenti a richiedere che λ_1, λ_2 (autovalori del minore M_{00}) siano entrambi di segno concorde con $\det A$. In effetti, essendo $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det M_{00} = A_{00}$, λ_1 e λ_2 sono concordi se e solo se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = A_{00} > 0$ (cioè C è un'ellisse) e, in tal caso, da $A_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2 > 0$ segue che anche a_{11} e a_{22} sono concordi. Da $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ (uguaglianza delle tracce di due matrici simili: si veda la Proposizione 7.8), si deduce perciò che, nel caso in cui C sia una ellisse, $a_{11}, a_{22}, \lambda_1$ e λ_2 sono tutti concordi. La tesi risulta così provata. □

► **Osservazione 12.47.** La Proposizione 12.46 è diretta conseguenza del Criterio di Sylvester dimostrato in Appendice B (Proposizione B.15 con relativa nota). Infatti, ricordando l'Osservazione 12.23, il supporto di una conica è vuoto se e solo se la sua matrice associata è definita (positiva o negativa).

Si noti poi che la equazione canonica di una conica C ha i coefficienti di X^2 e di Y^2 coincidenti se e solo se, in qualunque matrice A associata a C , il minore M_{00} ammette due autovalori coincidenti; ciò permette di ottenere la seguente caratterizzazione delle circonferenze all'interno delle coniche del piano euclideo:

■ **Proposizione 12.48.** *Una conica C di \mathcal{E}^2 è una circonferenza se e soltanto se, in una qualunque matrice associata A , si ha*

$$M_{00} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \lambda \cdot \det A < 0.$$

□

Esempio 12.14. In base alla Proposizione 12.44 (caso (i)), una matrice di tipo diagonale associata alla iperbole C_1 considerata nell'Esempio 12.6 è

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

con $\det D = -25d = \det A_1 = -50$, da cui segue $d = 2$.

Allora, una equazione canonica di \mathcal{C}_1 è

$$-5X^2 + 5Y^2 + 2 = 0, \quad \text{ovvero} \quad \frac{X^2}{\frac{2}{5}} - \frac{Y^2}{\frac{2}{5}} = 1.$$

Esempio 12.15. In base alla Proposizione 12.44 (caso (ii)), una matrice di tipo anti-diagonale associata alla parabola \mathcal{C}_3 considerata nell'Esempio 12.6 è

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & 5 & 0 \\ d' & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\det D' = -5d'^2 = \det A_3 = -1$, da cui segue $d' = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$. Allora, una equazione canonica di \mathcal{C}_3 è

$$5X^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}Y = 0, \quad \text{ovvero} \quad Y = \frac{5\sqrt{5}}{2}X^2.$$

Le equazioni canoniche delle coniche non degeneri permettono di ricavare facilmente alcune proprietà del supporto proprio che, essendo indipendenti dal riferimento scelto, possono essere formulate in termini generali. Per la nozione di *fuoco* di una conica non degeneri reale, si veda il § 4 del Capitolo 10.

■ Proposizione 12.49. *Sia \mathcal{C} una conica non degeneri di \mathcal{E}^2 . Allora, ogni asse di \mathcal{C} è asse di simmetria⁵ per il supporto proprio $\mathcal{I}_P(\mathcal{C})$.*

Inoltre:

- se \mathcal{C} è una conica a centro, il centro C è centro di simmetria per il supporto proprio $\mathcal{I}_P(\mathcal{C})$;
- se \mathcal{C} è una ellisse reale, ogni asse di \mathcal{C} contiene due vertici, e i fuochi di \mathcal{C} appartengono all'asse in cui la distanza tra i vertici è maggiore (detto asse maggiore o asse focale);
- se \mathcal{C} è una iperbole, un asse di \mathcal{C} (detto asse trasverso o asse focale) contiene due vertici, mentre l'altro asse (detto asse non trasverso) non interseca $\mathcal{I}(\mathcal{C})$; i fuochi di \mathcal{C} appartengono all'asse trasverso.

□

È evidente poi che, per quanto già visto nel § 4 del Capitolo 10, le equazioni canoniche delle coniche non degeneri permettono di ricavare facilmente le coordinate dei fuochi e, nel caso della parabola, la equazione della direttrice δ .

■ Proposizione 12.50. *Sia \mathcal{C} una conica non degeneri di \mathcal{E}^2 e sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano in cui \mathcal{C} assume equazione canonica. Allora:*

- se \mathcal{C} è una parabola di equazione canonica $Y = \frac{1}{2p}X^2$, con $p > 0$, si ha:

$$F \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} \left(0, \frac{p}{2}\right), \quad \delta : Y = -\frac{p}{2};$$

⁵Ciò significa che per ogni asse r di \mathcal{C} e per ogni punto $P \in \mathcal{I}_P(\mathcal{C})$, anche $P' \in \mathcal{I}_P(\mathcal{C})$, ove $P' = s_r(P)$ indica il simmetrico di P rispetto alla retta r (Definizione 9.59).

- se \mathcal{C} è una ellisse (reale) di equazione canonica $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, con $a \geq b$, si ha:

$$F_1 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} \left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0 \right) \quad F_2 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} \left(+\sqrt{a^2 - b^2}, 0 \right);$$

- se \mathcal{C} è una iperbole di equazione canonica $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, si ha:

$$F_1 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} \left(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0 \right) \quad F_2 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} \left(+\sqrt{a^2 + b^2}, 0 \right).$$

□

Poichè le distanze tra i punti notevoli del supporto di una conica (non vuota) non dipendono dal riferimento cartesiano scelto, è possibile risalire, attraverso la Proposizione 12.50, alle coordinate dei fuochi (e, nel caso della parabola, alla equazione della direttrice) rispetto a qualunque sistema di riferimento.

Il procedimento si svolge nei seguenti passi, a partire dalla equazione della conica non degenera \mathcal{C} rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} :

- 1) Se \mathcal{C} è una conica a centro (risp. una parabola), si determinino, rispetto a \mathcal{R} , le coordinate del centro C (risp. del vertice V) e l'equazione dell'asse focale (risp. dell'asse) \bar{r} di \mathcal{C} ;
- 2) si determini l'equazione canonica di \mathcal{C} e si calcoli la distanza $c = d(C, F_2)$ (risp. $\frac{p}{2} = d(V, F)$);
- 3) si scriva, rispetto a \mathcal{R} , l'equazione della circonferenza di centro C (risp. V) e raggio c (risp. $\frac{p}{2}$), e si determinino le sue intersezioni H_1 e H_2 con l'asse \bar{r} .

A questo punto:

- Se \mathcal{C} è una conica a centro, H_1 e H_2 sono esattamente i due fuochi di \mathcal{C} .
- Se \mathcal{C} è una parabola, i due punti H_1 ed H_2 sono uno il fuoco F di \mathcal{C} , e l'altro l'intersezione H tra l'asse \bar{r} e la direttrice δ di \mathcal{C} : per distinguerli, basta osservare che la retta ortogonale a \bar{r} passante per F (risp. per H) ha due intersezioni distinte con $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ (risp. non interseca $\mathcal{I}(\mathcal{C})$).

Si noti infine che, nel caso delle iperboli equilatera, esiste una ulteriore scelta del sistema di riferimento, che porta a una equazione di forma particolarmente semplice:

■ **Proposizione 12.51.** *Sia \mathcal{C} una iperbole equilatera di \mathcal{E}^2 . Se $\tilde{\mathcal{R}} = (\tilde{O}, \tilde{\mathcal{B}})$ è il riferimento cartesiano avente origine nel centro di \mathcal{C} e avente assi coordinati coincidenti con gli asintoti (tra loro ortogonali) di \mathcal{C} , allora la equazione di \mathcal{C} rispetto a $\tilde{\mathcal{R}}$ risulta del tipo*

$$\tilde{X}\tilde{Y} = k, \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

□

La equazione descritta nella Proposizione 12.51 viene usualmente detta *equazione canonica riferita agli asintoti* della iperbole equilatera \mathcal{C} , e può essere facilmente ottenuta a partire da una qualunque equazione associata a \mathcal{C} , osservando che, se r_1 e r_2 sono gli asintoti della iperbole equilatera \mathcal{C} , allora $d(P, r_1) \cdot d(P, r_2) = |k|$, per ogni punto $P \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$.

4. Fasci di coniche

Nel presente paragrafo, considereremo sempre coniche del piano euclideo \mathcal{E}^2 , dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$.

◆ **Definizione 12.52.** Date due coniche distinte (degeneri o non degeneri) \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 del piano euclideo \mathcal{E}^2 , aventi rispettivamente equazioni omogenee

$$\mathcal{C}_1 : \sum_{i,j=0}^2 a'_{ij} x_i x_j = 0 \qquad \mathcal{C}_2 : \sum_{i,j=0}^2 a''_{ij} x_i x_j = 0$$

rispetto a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , si dice *fascio di coniche* individuato da \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 l'insieme $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ di coniche aventi, rispetto a \mathcal{R} , equazioni omogenee

$$\lambda \left(\sum_{i,j=0}^2 a'_{ij} x_i x_j \right) + \mu \left(\sum_{i,j=0}^2 a''_{ij} x_i x_j \right) = 0, \quad \text{con } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{0, 0\}.$$

Si noti che il fascio $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ contiene infinite coniche (al variare degli scalari λ e μ), ma che coppie (λ, μ) proporzionali individuano la stessa conica. Ad esempio, ogni coppia $(0, \mu)$ (con $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$) individua la conica $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. Inoltre, se \mathcal{C}_3 e \mathcal{C}_4 sono due coniche distinte del fascio $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, si ha che $\mathcal{F}(\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4) = \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$.

■ **Proposizione 12.53.** Sia $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ un fascio di coniche del piano euclideo \mathcal{E}^2 . Per ogni punto $P \notin \mathcal{I}(\mathcal{C}_1) \cap \mathcal{I}(\mathcal{C}_2)$, esiste una e una sola conica $\mathcal{C} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$, tale che $P \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$.

Dimostrazione. È sufficiente osservare che, sostituendo le coordinate cartesiane omogenee di P nella equazione omogenea del fascio, i coefficienti dei parametri λ e μ non possono essere contemporaneamente nulli (perché $P \notin \mathcal{I}(\mathcal{C}_1) \cap \mathcal{I}(\mathcal{C}_2)$); quindi, i parametri λ e μ devono verificare una equazione lineare omogenea di rango uno, le cui soluzioni (che sono ∞^1 , tutte multiple di una qualunque fissata non nulla) individuano tutte la medesima conica. □

Le seguenti osservazioni consentono di scrivere con facilità l'equazione di un fascio di coniche individuato da particolari condizioni. Per semplicità, indicheremo con XY la retta (eventualmente impropria) del piano euclideo \mathcal{E}^2 passante per i punti distinti (propri o impropri) $X, Y \in \mathcal{E}^2$.

Fasci del I tipo. *L'insieme delle coniche passanti per quattro punti distinti $A, B, C, D \in \mathcal{E}^2$, a tre a tre non allineati, è un fascio di coniche \mathcal{F}_1 di \mathcal{E}^2 .*

Inoltre, se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sono due delle tre coniche degeneri, il cui supporto è rispettivamente costituito da

$$AB \cup CD, \quad AC \cup BD, \quad AD \cup BC,$$

allora $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ (Figura 12.2).

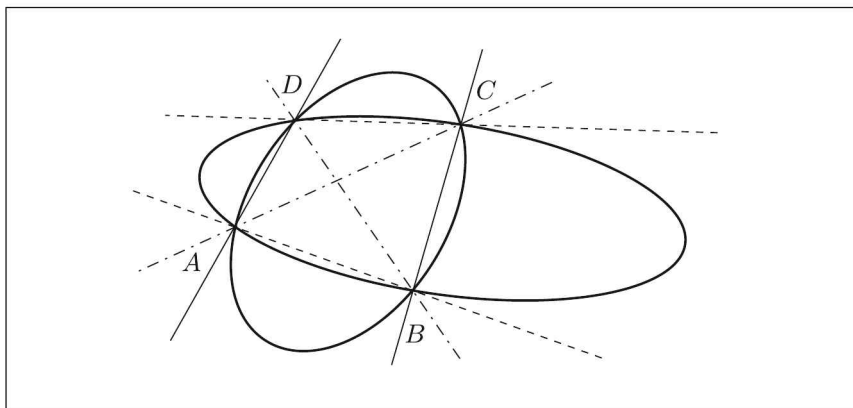


Figura 12.2

Esempio 12.16. Nel completamento proiettivo del piano euclideo \mathcal{E}^2 - in cui è fissato un riferimento cartesiano \mathcal{R} - siano dati, ad esempio, i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} [1, 1, 0], \quad B \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, 1], \quad C \equiv_{\mathcal{R}} [1, -1, 0], \quad D \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, -1].$$

Una volta verificato che tali punti sono a tre a tre non allineati, si considerino la conica (degenere) \mathcal{C}_1 di equazione omogenea

$$(x_0 + x_1 + x_2)(-x_0 + x_1 + x_2) = 0,$$

il cui supporto è costituito da $CD \cup AB$, e la conica (degenere) \mathcal{C}_2 di equazione omogenea

$$x_1 x_2 = 0,$$

il cui supporto è costituito da $BD \cup AC$.

Il fascio \mathcal{F}_1 costituito dalle coniche passanti per A, B, C, D ha quindi equazione omogenea:

$$\mathcal{F}_1: \lambda(x_0 + x_1 + x_2)(-x_0 + x_1 + x_2) + \mu x_1 x_2 = 0.$$

Fasce del II tipo. *L'insieme delle coniche passanti per tre punti distinti A, B, C , non allineati, di \mathcal{E}^2 e aventi quale tangente in A una fissata retta r , è un fascio di coniche \mathcal{F}_2 di \mathcal{E}^2 .*

Inoltre, se \mathcal{C}_1 (risp. \mathcal{C}_2) è la conica degenere il cui supporto è costituito da $AB \cup AC$ (risp. $r \cup BC$), allora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ (Figura 12.3).

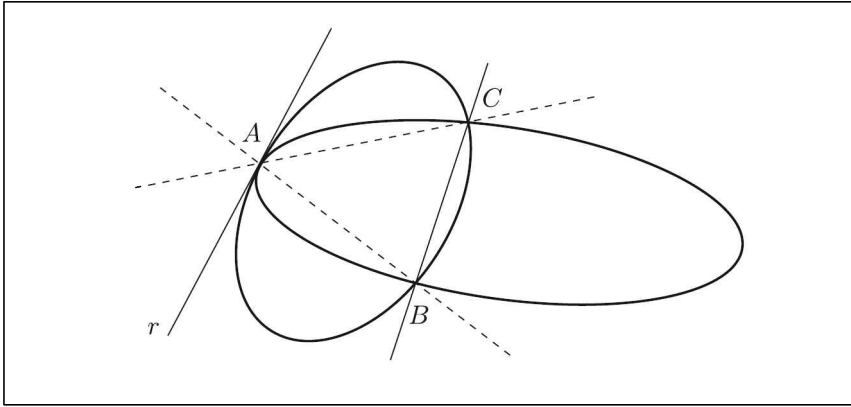


Figura 12.3

Esempio 12.17. Nel completamento proiettivo del piano euclideo \mathcal{E}^2 - in cui è fissato un riferimento cartesiano \mathcal{R} - siano dati, ad esempio, i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} [1, 1, 0], \quad B \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, 1], \quad C \equiv_{\mathcal{R}} [1, -1, 0]$$

e la retta $r : x_0 - x_1 = 0$.

Una volta verificato che A, B, C non sono allineati e che $A \in r$, si considerino la conica (degenere) \mathcal{C}_1 di equazione omogenea

$$x_2(-x_0 + x_1 + x_2) = 0,$$

il cui supporto è costituito da $AC \cup AB$, e la conica (degenere) \mathcal{C}_2 di equazione omogenea

$$(x_0 - x_1)(x_0 + x_1 - x_2) = 0,$$

il cui supporto è costituito da $r \cup BC$.

Il fascio \mathcal{F}_2 costituito dalle coniche passanti per A, B, C e tangenti in A a r ha quindi equazione omogenea:

$$\mathcal{F}_2 : \lambda x_2(-x_0 + x_1 + x_2) + \mu(x_0 - x_1)(x_0 + x_1 - x_2) = 0.$$

Fasci del III tipo. *L'insieme delle coniche passanti per due punti distinti $A, B \in \mathcal{E}^2$, e aventi quale tangente in A una fissata retta r e quale tangente in B una fissata retta s (con $r \neq s$), è un fascio di coniche \mathcal{F}_3 di \mathcal{E}^2 .*

Inoltre, se \mathcal{C}_1 (risp. \mathcal{C}_2) è la conica degenere il cui supporto è costituito dalla retta AB "contata due volte" (risp. da $r \cup s$), allora $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ (Figura 12.4).

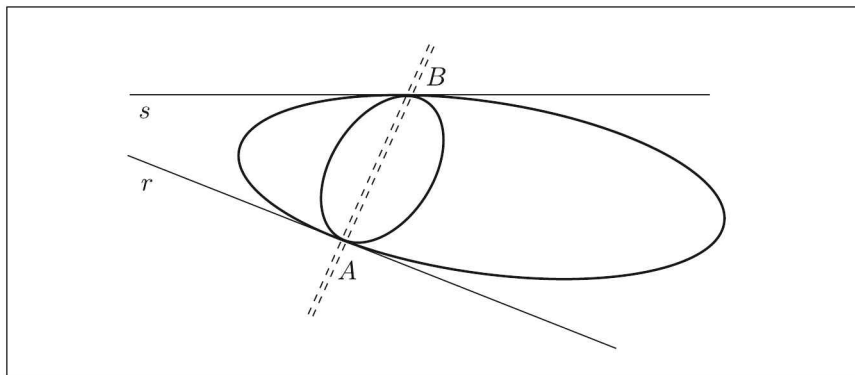


Figura 12.4

Esempio 12.18. Nel completamento proiettivo del piano euclideo \mathcal{E}^2 - in cui è fissato un riferimento cartesiano \mathcal{R} - siano dati, ad esempio, i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} [1, 1, 0], \quad B \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, 1]$$

e le rette

$$r : x_0 - x_1 = 0, \quad s : x_0 - x_2 = 0.$$

Una volta verificato che $A \in r$ e $B \in s$, si considerino la conica (degenere) \mathcal{C}_1 di equazione omogenea

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 0,$$

il cui supporto è costituito da $r \cup s$, e la conica (degenere) \mathcal{C}_2 di equazione omogenea

$$(-x_0 + x_1 + x_2)^2 = 0,$$

il cui supporto coincide con la retta AB (contata due volte).

Il fascio \mathcal{F}_3 costituito dalle coniche passanti per A, B e tangenti in A a r e in B a s ha quindi equazione omogenea:

$$\mathcal{F}_3 : \lambda(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + \mu(-x_0 + x_1 + x_2)^2 = 0.$$

5. Le quadriche dello spazio euclideo

Nel presente paragrafo, estenderemo alla dimensione tre i concetti e i risultati esposti nel § 2 per la dimensione due. Supponiamo dunque che \mathcal{E}^3 sia uno spazio euclideo di dimensione tre, in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$.

♦ **Definizione 12.54.** Considerata una generica equazione algebrica di secondo grado nelle coordinate x, y e z :

$$(*) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ per ogni $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, diremo che tale equazione rappresenta, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , una *quadrica* dello spazio euclideo \mathcal{E}^3 .

Inoltre, diremo che due equazioni $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0$ e $a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{13}xz + 2a'_{23}yz + 2a'_{01}x + 2a'_{02}y + 2a'_{03}z + a'_{00} = 0$ rappresentano, rispetto a \mathcal{R} , la *stessa quadrica* di \mathcal{E}^3 se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $a'_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad \forall i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Si noti che, in base alla Definizione 12.54, ogni quadrica \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 è rappresentata - rispetto a \mathcal{R} - da infinite equazioni algebriche di secondo grado, tutte proporzionali tra di loro; usualmente, si dice che *l'equazione di \mathcal{Q} rispetto a \mathcal{R} è definita a meno di un coefficiente di proporzionalità (non nullo)*.

Le quadriche sono dunque il corrispondente tridimensionale delle coniche del piano euclideo \mathcal{E}^2 . Pertanto, possono essere estese alle quadriche molte delle definizioni date per le coniche nel § 2.

♦ **Definizione 12.55.** Data una quadrica \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 di equazione (*), si dice *supporto proprio* (o *immagine propria*) di \mathcal{Q} l'insieme $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$ dei punti dello spazio \mathcal{E}^3 le cui coordinate - rispetto a \mathcal{R} - verificano una (e quindi tutte) le equazioni di \mathcal{Q} :

$$\mathcal{I}_P(\mathcal{Q}) = \{P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y, z) \mid a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0\}.$$

Si noti che, come per le coniche, l'immagine $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$ non è in generale sufficiente a individuare la quadrica \mathcal{Q} .

Se si suppone di ampliare proiettivamente lo spazio euclideo \mathcal{E}^3 , denotando con $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ una quaterna di coordinate cartesiane omogenee dei suoi punti (propri e impropri) rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , allora la equazione (*) origina, in coordinate omogenee, la *equazione omogenea della quadrica \mathcal{Q}* , che si può scrivere sinteticamente come:

$$(**) \quad \sum_{i,j=0}^3 a_{ij}x_i x_j = 0.$$

♦ **Definizione 12.56.** Data una quadrica \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 di equazione omogenea (**), si dice *supporto improprio* (o *immagine impropria*) di \mathcal{Q} l'insieme $\mathcal{I}_{\infty}(\mathcal{Q})$ dei punti impropri dell'ampliamento proiettivo di \mathcal{E}^3 le cui coordinate cartesiane omogenee - rispetto a \mathcal{R} - verificano una (e quindi tutte) le equazioni omogenee di \mathcal{Q} :

$$\mathcal{I}_{\infty}(\mathcal{Q}) = \{P_{\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, x_1, x_2, x_3] \mid a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + a_{33}(x_3)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0\}.$$

Si dice poi *supporto* (o *immagine*) di \mathcal{Q} l'insieme

$$\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \mathcal{I}_P(\mathcal{Q}) \cup \mathcal{I}_{\infty}(\mathcal{Q}).$$

Nel seguito, con abuso di linguaggio e per semplicità di notazioni, identificheremo spesso la quadrica \mathcal{Q} con il suo supporto.

♦ **Definizione 12.57.** Data una quadrica \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 di equazione (*) (o di equazione omogenea (**)), si dice *matrice associata* a \mathcal{Q} (o *discriminante* di \mathcal{Q}) rispetto al

referimento cartesiano \mathcal{R} la matrice simmetrica⁶

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$$

Tramite la matrice associata a \mathcal{Q} , è possibile scrivere in forma matriciale le equazioni (*) e (**) di \mathcal{Q} :

$$(*) \quad (1 \ x \ y \ z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{o, più sinteticamente, } {}^t(u) \cdot A \cdot (u) = 0);$$

$$(**) \quad (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{o, più sinteticamente, } {}^t(x) \cdot A \cdot (x) = 0).$$

La proposizione seguente ci permette di sapere, in perfetta analogia a quanto visto per le coniche, come cambia la matrice associata a una quadrica (e quindi, anche la sua equazione e la sua equazione omogenea) al variare del sistema di riferimento fissato.

■ **Proposizione 12.58.** *Sia \mathcal{Q} una quadrica di \mathcal{E}^3 avente, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , matrice associata $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$. Se \mathcal{R}' è un altro riferimento cartesiano su \mathcal{E}^3 , e*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad E = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}),$$

sono le equazioni del cambiamento di riferimento da \mathcal{R} a \mathcal{R}' , allora la quadrica \mathcal{Q} ha, rispetto a \mathcal{R}' , matrice associata A' tale che

$$A = {}^t\bar{E} \cdot A' \cdot \bar{E}, \quad \text{con} \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b^1 & e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ b^2 & e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ b^3 & e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Si procede in modo perfettamente analogo a quanto fatto per dimostrare la Proposizione 12.21

□

► **Osservazione 12.59.** Con le notazioni della Proposizione 12.58 e in totale analogia con l'Osservazione 12.22, dalla ortogonalità di E segue $\det A = \det A'$. Si ricordi tuttavia che anche la matrice A' associata a \mathcal{Q} rispetto a \mathcal{R}' risulta definita a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo.

⁶Si noti che anche la matrice associata a \mathcal{Q} , come l'equazione e l'equazione omogenea, risulta definita a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo.

► **Osservazione 12.60.** Anche per le quadriche, come per le coniche, possono essere fatte le considerazioni riportate nella Osservazione 12.23, semplicemente sostituendo \mathbb{R}^3 con \mathbb{R}^4 . Pertanto, l'ambiente più opportuno per definire le quadriche appare essere l'ampliamento proiettivo dello spazio euclideo e, in tale contesto, una quadrica risulta individuata da una classe di proporzionalità di forme quadratiche.

Dalla Proposizione 12.58 si deduce la seguente proposizione, la cui dimostrazione è perfettamente analoga a quella della Proposizione 12.24.

■ **Proposizione 12.61.** *Tutti i discriminanti di una stessa quadrica \mathcal{Q} hanno lo stesso rango.* □

Per rango $\varrho(\mathcal{Q})$ di \mathcal{Q} si intenderà il rango di un suo qualsiasi discriminante.

◆ **Definizione 12.62.** Una quadrica \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 si dice *non specializzata* o *non degenera* se $\varrho(\mathcal{Q}) = 4$. In caso contrario, si dice che \mathcal{Q} è una *quadrica specializzata* o *degenera* di \mathcal{E}^3 . Le quadriche di rango 1 o 2 sono anche dette *riducibili*.

Quindi, se A è un discriminante di \mathcal{Q} , si ha che \mathcal{Q} è degenera se e solo se $\det A = 0$.

► **Osservazione 12.63.** Non è difficile verificare che noti sottoinsiemi dello spazio euclideo (in particolare: piani e unioni di due piani) risultano essere il supporto di opportune quadriche riducibili:

- se π è un piano di \mathcal{E}^3 avente equazione omogenea $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0$ rispetto a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , allora

$$(ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0)^2 = 0$$

è la equazione di una quadrica riducibile \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 , il cui supporto $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ è costituito da tutti e soli i punti del piano π (che si dice “*contato due volte*”);

- se π e π' sono due piani distinti di \mathcal{E}^3 aventi rispettivamente equazioni omogenee $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_0 = 0$ e $a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 + d''x_0 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , allora

$$(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_0) \cdot (a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 + d''x_0) = 0$$

è la equazione di una quadrica riducibile \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 , il cui supporto $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ è costituito da tutti e soli i punti dei piani π e π' .

In realtà tali sottoinsiemi, uniti alle singole rette di \mathcal{E}^3 , esauriscono tutti i possibili supporti di una quadrica riducibile dello spazio euclideo. È infatti possibile dimostrare che, se \mathcal{Q} è una quadrica riducibile di \mathcal{E}^3 , allora è verificata una (e una sola) delle seguenti affermazioni:

- esiste un piano (proprio o improprio) π di \mathcal{E}^3 tale che $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \pi$;
- esistono due piani distinti π e π' di \mathcal{E}^3 (di cui uno eventualmente coincidente con il piano improprio), tali che $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \pi \cup \pi'$;
- esiste una retta (propria o impropria) $r \subset \mathcal{E}^3$ tale che $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = r$.

Nel primo caso si ha $\varrho(\mathcal{Q}) = 1$, mentre nel secondo e nel terzo caso si ha $\varrho(\mathcal{Q}) = 2$.

Se invece \mathcal{Q} è una quadrica di \mathcal{E}^3 avente rango 3, allora è verificata una (e una sola) delle seguenti affermazioni:

- $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ è una unione di rette, dette *generatrici* di \mathcal{Q} , passanti per un punto V (proprio o improprio) detto *vertice* di \mathcal{Q} ;
- esiste un punto (proprio o improprio) $V \in \mathcal{E}^3$, detto *vertice* di \mathcal{Q} , tale che $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \{V\}$.

Le quadriche degeneri di \mathcal{E}^3 aventi rango 3 sono dette *coni* (risp. *cilindri*) se il vertice è proprio (risp. improprio). Si ricordi, in questo contesto, la genesi storica del termine “coniche” attribuito alle curve di un piano euclideo che risultano dall’intersezione di tale piano con un cono (§4 del Capitolo 10, Figura 10.5).

Le quadriche si suddividono innanzitutto in *reali*, se $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$, e *vuote* (o *immaginarie*), se $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \emptyset$. Si osservi che una quadrica degenera è sempre reale.

Come per le coniche di \mathcal{E}^2 , per distinguere le quadriche reali da quelle immaginarie si può osservare che \mathcal{Q} è reale se e solo se un suo qualunque discriminante A è *non definito* (Definizione B.13) e applicare quindi il Criterio di Sylvester (Proposizione B.15). In alternativa, si può attendere la Proposizione 12.86.

Esaminiamo ora le intersezioni di $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ con rette e piani di \mathcal{E}^3 .

■ **Proposizione 12.64.** *Se \mathcal{Q} è una quadrica di \mathcal{E}^3 e r è una retta (propria o impropria) di \mathcal{E}^3 non contenuta nel supporto di \mathcal{Q} , allora l’intersezione di r con \mathcal{Q} è costituita da uno dei seguenti sottoinsiemi di \mathcal{E}^3 :*

- due punti distinti;
- un solo punto;
- l’insieme vuoto.

Dimostrazione. Se r è una retta propria, si può supporre che r sia l’asse x di un riferimento cartesiano \mathcal{R} , ovvero la retta rappresentata dalle equazioni omogenee $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Se A è un discriminante di \mathcal{Q} rispetto a \mathcal{R} , allora i punti di intersezione di r con \mathcal{Q} hanno coordinate cartesiane omogenee $[x_0, x_1, 0, 0]$ che verificano l’equazione di secondo grado:

$$(\#) \quad a_{11}(x_1)^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{00}(x_0)^2 = 0.$$

Poichè r non è contenuta in \mathcal{Q} , l’equazione $(\#)$ non può essere identicamente soddisfatta (cioè i coefficienti a_{00}, a_{01}, a_{11} non possono essere tutti nulli): dunque, supponendo di ricavare una incognita in funzione dell’altra, l’equazione $(\#)$ ammette due, una o zero soluzioni reali a seconda che $\frac{\Delta}{4} = (a_{01})^2 - a_{00} \cdot a_{11}$ sia rispettivamente positivo, nullo o negativo. Un analogo ragionamento prova l’enunciato nel caso in cui r sia una retta impropria, scegliendo il riferimento cartesiano \mathcal{R} in modo che r sia rappresentata dalle equazioni omogenee $x_0 = 0$ e $x_3 = 0$.

□

◆ **Definizione 12.65.** Sia \mathcal{Q} una quadrica di \mathcal{E}^3 e r una retta di \mathcal{E}^3 . Si dice che:

- r è *tangente* a \mathcal{Q} se l’intersezione di r con \mathcal{Q} è costituita da un solo punto oppure se r è contenuta nel supporto di \mathcal{Q} ;
- r è *secante* \mathcal{Q} se l’intersezione di r con \mathcal{Q} è costituita da due punti distinti;
- r è *esterna* a \mathcal{Q} se l’intersezione di r con \mathcal{Q} è vuota.

► **Osservazione 12.66.** Data una quadrica \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 , l'intersezione del supporto di \mathcal{Q} con un qualsiasi piano (proprio o improprio) π di \mathcal{E}^3 è il supporto di una conica di π , che sarà indicata con $\mathcal{Q} \cap \pi$. In particolare, il supporto improprio $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{Q})$ è supporto della conica $\mathcal{Q}_\infty = \mathcal{Q} \cap \pi_\infty$, intersezione di \mathcal{Q} con il piano improprio π_∞ di \mathcal{E}^3 ; \mathcal{Q}_∞ sarà detta anche *conica impropria* o *conica all'infinito* di \mathcal{Q} .

Se π è un piano proprio, la proprietà può essere facilmente verificata scegliendo il riferimento \mathcal{R} in modo che l'equazione di π sia $x_3 = 0$; se infatti A è un qualunque discriminante di \mathcal{Q} rispetto a \mathcal{R} , il supporto di $\mathcal{Q} \cap \pi$ è costituito dai punti di \mathcal{E}^3 le cui coordinate cartesiane omogenee $[x_0, x_1, x_2, 0]$ soddisfano l'equazione di secondo grado omogenea:

$$(**) \quad a_{11}(x_1)^2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}(x_0)^2 = 0.$$

Se invece π è il piano improprio π_∞ , avente equazione $x_0 = 0$ rispetto a un qualunque riferimento cartesiano di \mathcal{E}^3 , un analogo ragionamento prova che il supporto improprio $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{Q})$ è supporto della conica impropria di \mathcal{Q} , il cui discriminante è costituito dal minore complementare M_{00} dell'elemento a_{00} nella matrice A .

◆ **Definizione 12.67.** Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 e π un piano di \mathcal{E}^3 . Si dice che:

- (a) π è *tangente* a \mathcal{Q} se $\mathcal{Q} \cap \pi$ è una conica degenera;
- (b) π è *secante* \mathcal{Q} se $\mathcal{Q} \cap \pi$ è una conica non degenera reale;
- (c) π è *esterno* a \mathcal{Q} se $\mathcal{Q} \cap \pi$ è una conica (non degenera) vuota.

► **Osservazione 12.68.** Se il piano π è tangente a \mathcal{Q} , allora la conica (degenera) intersezione $\mathcal{Q} \cap \pi$ ha rango 2: il suo supporto è pertanto costituito da un solo punto o dalla unione di due rette distinte.

Infatti, con le notazioni dell'Osservazione 12.66, un discriminante di $\mathcal{Q} \cap \pi$ è un minore di ordine tre del discriminante A di \mathcal{Q} . Poichè \mathcal{Q} è non degenera, si ha $\varrho(A) = 4$; d'altra parte, se M è un minore di ordine $n - 1$ in una matrice A di ordine n , si ha

$$\varrho(M) \geq \varrho(A) - 2.$$

Dunque la conica $\mathcal{Q} \cap \pi$ ha rango 2.

► **Osservazione 12.69.** Si ricordi che, se $A \in GL_4(\mathbb{R})$, il sistema lineare normale $A \cdot (y) = (0)$ ammette come soluzione solo la quaterna nulla. Pertanto, se \mathcal{Q} è una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 , A è un suo discriminante rispetto a \mathcal{R} e $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2, y_3]$ è un punto (proprio o improprio) di \mathcal{E}^3 , l'uguaglianza

$$(\%) \quad (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

costituisce un'equazione lineare omogenea in cui i coefficienti delle incognite x_0, x_1, x_2, x_3 non sono tutti nulli e rappresenta quindi un piano di \mathcal{E}^3 . Inoltre, il generico piano di equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0$ coincide con il piano di equazione $(\%)$ se e

solo se la quaterna (y_0, y_1, y_2, y_3) soddisfa la condizione

$$A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ con } \rho \neq 0.$$

Tale condizione, fissato $\rho \neq 0$, costituisce un sistema lineare normale e ammette dunque una e una sola soluzione (non nulla); inoltre, al variare di $\rho \neq 0$, si ottengono come soluzioni quaterne proporzionali.

L'Osservazione 12.69 consente di dare la seguente:

♦ **Definizione 12.70.** Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 , avente A come matrice associata rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} . Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2, y_3]$ è un punto (proprio o improprio) di \mathcal{E}^3 , si dice *piano polare* π_P di P rispetto alla quadrica il piano (proprio o improprio) di equazione omogenea

$$(x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Per l'Osservazione 12.69, l'applicazione π che a P associa π_P è una biiezione tra i punti del completamento proiettivo \mathcal{P}^3 dello spazio euclideo e i suoi piani. In altri termini, *per ogni piano π (proprio o improprio) di \mathcal{E}^3 , esiste uno e un solo punto P (proprio o improprio), il cui piano polare sia π* . Tale punto è detto *polo* di π .

Si osservi che $P \in \pi_P$ se e solo se $P \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$.

Esempio 12.19. Consideriamo, nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , dotato di un riferimento cartesiano \mathcal{R} , la quadrica avente equazione:

$$\mathcal{Q}_1: x^2 - 8y^2 + 8yz - 2z^2 + 2z = 0.$$

Un discriminante di \mathcal{Q}_1 , rispetto a \mathcal{R} , è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

poiché $\det A_1 = 8 \neq 0$, la quadrica \mathcal{Q}_1 è non degenera. Rispetto a \mathcal{Q}_1 , il piano polare del punto $P \equiv_{\mathcal{R}} [1, 1, 0, 1]$ ha, relativamente a \mathcal{R} , equazione omogenea

$$(x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{cioè} \quad x_0 + x_1 + 4x_2 - x_3 = 0.$$

Se π è il piano avente, rispetto a \mathcal{R} , equazione omogenea $x_3 = 0$, le coordinate omogenee del suo polo P' , rispetto alla quadrica \mathcal{Q}_1 , possono essere ottenute mediante il

procedimento descritto nell'Osservazione 12.69. Posto infatti

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e scegliendo, come valore non nullo di ρ , $\rho = 1$, si ottiene come soluzione del sistema lineare normale (usando ad esempio le formule di Leibniz-Cramer):

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Il polo di π è dunque il punto $P' \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, 0, 0]$.

Si noti che si ha $P \notin \pi_P$, mentre $P' \in \pi_{P'}$; infatti, $P \notin \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1)$, mentre $P' \in \mathcal{I}(\mathcal{Q}_1)$.

■ **Proposizione 12.71.** *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera dello spazio euclideo, e siano P, Q due punti di \mathcal{E}^3 . Si ha che:*

- $Q \in \pi_P$ se e solo se $P \in \pi_Q$. (**Legge di reciprocità**)
- Se P è un punto del supporto $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$, allora il piano polare π_P di P rispetto a \mathcal{Q} è costituito da tutti e soli i punti P' di \mathcal{E}^3 tali che la retta per P e P' è tangente a \mathcal{Q} in P .

Dimostrazione. Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2, y_3]$ e $Q \equiv_{\mathcal{R}} [z_0, z_1, z_2, z_3]$, allora si ha che:

$$(Q \in \pi_P \Leftrightarrow {}^t(z) \cdot A \cdot (y) = 0) \quad \text{e} \quad (P \in \pi_Q \Leftrightarrow {}^t(y) \cdot A \cdot (z) = 0).$$

La Legge di reciprocità segue quindi dalla simmetria della matrice A .

Supponiamo ora che $P \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$; la retta r per P e per un secondo punto $P' \neq P$ risulta tangente alla quadrica in P se e solo se P è l'unico punto di intersezione tra r e $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$, oppure r è tutta contenuta in $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$. Se $P \equiv_{\mathcal{R}} [y_0, y_1, y_2, y_3]$ e $P' \equiv_{\mathcal{R}} [z_0, z_1, z_2, z_3]$, allora tutti e soli i punti della retta r hanno, rispetto a \mathcal{R} , coordinate cartesiane omogenee $[\lambda y_0 + \mu z_0, \lambda y_1 + \mu z_1, \lambda y_2 + \mu z_2, \lambda y_3 + \mu z_3]$, al variare dei parametri reali (non entrambi nulli) λ, μ (Proposizione 12.14); i punti di intersezione tra r e $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ corrispondono dunque alle soluzioni della equazione di secondo grado

$${}^t(\lambda y + \mu z) \cdot A \cdot (\lambda y + \mu z) = 0,$$

che equivale a

$$\lambda^2 {}^t(y) \cdot A \cdot (y) + 2\lambda\mu {}^t(z) \cdot A \cdot (y) + \mu^2 {}^t(z) \cdot A \cdot (z) = 0.$$

La ipotesi $P \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$ assicura che il coefficiente di λ^2 è sempre nullo. Se l'equazione ha anche gli altri due coefficienti nulli, allora è soddisfatta per ogni coppia (λ, μ) , e dunque r è contenuta in $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$; in caso contrario, l'equazione ammette una sola soluzione (corrispondente alla coppia $(\lambda, \mu) = (1, 0)$, ovvero al punto di tangenza P) se e soltanto se anche il coefficiente di $\lambda\mu$ si annulla. Ciò implica che r è tangente alla quadrica se e soltanto se

$${}^t(z) \cdot A \cdot (y) = 0,$$

cioè se e soltanto se il punto P' appartiene al piano polare π_P di P .

□

► **Osservazione 12.72.** Il piano polare π_P di un punto P del supporto $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ è l'unico piano tangente a \mathcal{Q} passante per P . Infatti, per la Proposizione 12.71, il supporto della conica intersezione $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ è costituito dal solo punto P o da un'unione di rette: dunque $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ è degenere e π_P è un piano tangente a \mathcal{Q} (Definizione 12.67(a)). Se poi π' è un piano tangente a \mathcal{Q} passante per P , allora la conica intersezione $\mathcal{Q} \cap \pi'$ è costituita da un solo punto o dall'unione di due rette r e s (Osservazione 12.68). Sia dunque P' un punto di π' diverso da P : se $P' \in r \cup s$ la retta PP' è contenuta in $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$, altrimenti PP' interseca $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ nel solo punto P , ed è dunque, in ogni caso, tangente a \mathcal{Q} in P . Quindi $\pi' = \pi_P$ (Proposizione 12.71).

► **Osservazione 12.73.** Si noti che, se P non appartiene al supporto $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$, allora il piano polare π_P di P rispetto a \mathcal{Q} interseca $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ nei punti di contatto tra la quadrica e le (eventuali) rette tangenti alla quadrica passanti per P .

Le quadriche reali possono essere suddivise in base alla seguente

◆ **Definizione 12.74.** Un punto $P \in \mathcal{I}(\mathcal{Q})$ è detto:

- *iperbolico* se il supporto della conica $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ è formato da due rette distinte la cui intersezione è P ;
- *ellittico* se il supporto della conica $\mathcal{Q} \cap \pi_P$ è costituito dal solo punto P .

■ **Lemma 12.75.** Se una quadrica non degenere \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 ha almeno un punto ellittico (risp. iperbolico), allora tutti i punti di \mathcal{Q} sono di tipo ellittico (risp. iperbolico).

Dimostrazione. Supponiamo che \mathcal{Q} ammetta un punto P di tipo ellittico e un punto Q di tipo iperbolico. Da ciò si ricava che $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \cap \pi_P = \{P\}$, mentre $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \cap \pi_Q = r \cup s$, essendo r e s due rette distinte, aventi Q quale intersezione.

Poichè $Q \notin \pi_P$, ne consegue che $(r \cup s) \cap \pi_P = (r \cap \pi_P) \cup (s \cap \pi_P)$ è costituito da almeno due punti. Pertanto $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \cap \pi_P$ non può ridursi al solo punto P , contro l'ipotesi che P sia di tipo ellittico. □

Come conseguenza del Lemma 12.75, le quadriche reali risultano suddivise in *iperboliche* o *doppiamente rigate* (in cui ogni punto è iperbolico) e in *ellittiche* o *non rigate* (in cui ogni punto è ellittico).

Proveremo in seguito (Proposizione 12.87) che il segno del determinante di qualunque matrice associata alla quadrica \mathcal{Q} permette di distinguere direttamente a quale di queste due classi appartenga \mathcal{Q} .

Una diversa classificazione delle quadriche non degeneri di \mathcal{E}^3 si effettua - come per le coniche - in base al loro comportamento rispetto al piano improprio π_∞ di \mathcal{E}^3 .

◆ **Definizione 12.76.** Una quadrica non degenere \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 si dice:

- (a) *paraboloide* se π_∞ è tangente a \mathcal{Q} , ovvero se la conica impropria \mathcal{Q}_∞ è una conica degenere (del piano improprio);
- (b) *ellissoide* se π_∞ è esterno a \mathcal{Q} , ovvero se la conica impropria \mathcal{Q}_∞ è una conica non degenere ma vuota (del piano improprio);

- (c) *iperboloide* se π_∞ è secante \mathcal{Q} , ovvero se la conica impropria \mathcal{Q}_∞ è una conica non degenera e non vuota (del piano improprio).⁷

La seguente proposizione fornisce le condizioni algebriche su A_{00} (il complemento algebrico dell'elemento a_{00} nella matrice A) per distinguere paraboloidi, ellissoidi e iperboloidi.

■ **Proposizione 12.77.** *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 avente, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , matrice associata $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ (con $\det A \neq 0$). Si ha che:*

- (a) \mathcal{Q} è un *paraboloide* se e soltanto se $A_{00} = 0$;
- (b) \mathcal{Q} è un *ellissoide* se e soltanto se A_{00} è diverso da zero e concorde con a_{33} , e il suo minore $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ ha determinante positivo;
- (c) \mathcal{Q} è un *iperboloide* se e soltanto se $A_{00} \neq 0$, ma non verifica contemporaneamente le ulteriori due condizioni richieste al punto (b).

Dimostrazione. Basta osservare che M_{00} è il discriminante della conica impropria $\mathcal{Q} \cap \pi_\infty$, e ricordare le condizioni che caratterizzano le matrici delle coniche degeneri (cioè il fatto di avere determinante nullo, in base alla Definizione 12.25) e quelle delle coniche vuote (si veda la Proposizione 12.46).

□

Esempio 12.20. Consideriamo, nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , dotato di un riferimento cartesiano \mathcal{R} , le quadriche aventi le seguenti equazioni:

$$\mathcal{Q}_1 : x^2 - 8y^2 + 8yz - 2z^2 + 2z = 0$$

$$\mathcal{Q}_2 : x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 - 6y - 6z + 1 = 0$$

$$\mathcal{Q}_3 : x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 6z + 1 = 0$$

$$\mathcal{Q}_4 : x^2 + 16y^2 + 4z^2 + 8xy + 4z + 2 = 0$$

Come già verificato nell'Esempio 12.19, la quadrica \mathcal{Q}_1 è non degenera (perché $\det A_1 = 8 \neq 0$). In particolare, essendo

$$A_{00} = \det M_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

la quadrica \mathcal{Q}_1 risulta essere un paraboloide.

Un discriminante di \mathcal{Q}_2 , rispetto a \mathcal{R} , è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

⁷Si noti che i paraboloidi e gli iperboloidi sono sempre quadriche reali, e si suddividono nelle due sottoclassi "ellittici" e "iperbolici", mentre gli ellissoidi possono essere reali (se $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$) o immaginari (se $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \emptyset$).

poiché $\det A_2 = -15 \neq 0$, la quadrica \mathcal{Q}_2 è non degenera. In particolare, essendo $\det M_{00} = 3 > 0$, $a_{33} = 2 > 0$ e $\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$, la quadrica \mathcal{Q}_2 risulta essere un ellissoide.

Un discriminante di \mathcal{Q}_3 , rispetto a \mathcal{R} , è

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

poiché $\det A_3 = 24 \neq 0$, la quadrica \mathcal{Q}_3 è non degenera. In particolare, essendo $\det M_{00} = -3 < 0$ e $a_{33} = 1 > 0$, la quadrica \mathcal{Q}_3 risulta essere un iperboloide.

Un discriminante di \mathcal{Q}_4 , rispetto a \mathcal{R} , è

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

poiché $\det A_4 = 0$, la quadrica \mathcal{Q}_4 è una quadrica degenera (o specializzata).

◆ **Definizione 12.78.** Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 .

Si dice *piano diametrale* di \mathcal{Q} ogni piano proprio che sia piano polare di un punto improprio di \mathcal{E}^3 .

Si dice *centro* di \mathcal{Q} il polo del piano improprio π_∞ .

Come ovvia conseguenza della Proposizione 12.71 (Legge di reciprocità), si ha che *tutti i piani diametrali contengono il centro di \mathcal{Q}* .

■ **Proposizione 12.79.** Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 avente, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , matrice associata $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$. Il centro di \mathcal{Q} è il punto C avente come quaterna di coordinate omogenee la quaterna dei complementi algebrici della prima riga di A :

$$C \equiv_{\mathcal{R}} [A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}].$$

Dimostrazione. Si procede in modo perfettamente analogo a quanto fatto per dimostrare la Proposizione 12.36. □

Si osservi che, come conseguenza delle Proposizioni 12.77 e 12.79, si ha che:

- se \mathcal{Q} è un paraboloide, il suo centro è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore

$$\mathbf{v} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (A_{01}, A_{02}, A_{03}),$$

e i suoi piani diametrali sono tutti paralleli a \mathbf{v} ;

- se \mathcal{Q} è un iperboloide o un ellissoide, il suo centro è il punto proprio di coordinate cartesiane

$$C \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{A_{01}}{A_{00}}, \frac{A_{02}}{A_{00}}, \frac{A_{03}}{A_{00}} \right).$$

Le quadriche aventi centro proprio (cioè iperboloidi ed ellissoidi) sono usualmente dette *quadriche a centro*.

Esempio 12.21. Nel caso del paraboloide \mathcal{Q}_1 considerato nell'Esempio 12.20, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_1 \equiv_{\mathcal{R}} [0, 0, 4, 8]$, cioè è il punto improprio individuato dalla direzione del vettore

$$\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{G}} (0, 1, 2).$$

Nel caso dell'ellissoide \mathcal{Q}_2 considerato nell'Esempio 12.20, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_2 \equiv_{\mathcal{R}} [3, 0, 3, 3]$, cioè è il punto proprio di coordinate cartesiane

$$C_2 \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 1).$$

Nel caso dell'iperboloide \mathcal{Q}_3 considerato nell'Esempio 12.20, il centro risulta avere coordinate omogenee $C_3 \equiv_{\mathcal{R}} [-3, 0, 0, 9]$, cioè è il punto proprio di coordinate cartesiane

$$C_3 \equiv_{\mathcal{R}} (0, 0, -3).$$

♦ **Definizione 12.80.** Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 . Si dice *piano principale* di \mathcal{Q} ogni piano diametrale π_{P_∞} di \mathcal{Q} che sia ortogonale alla direzione individuata dal suo polo P_∞ .

Si dice *asse* di \mathcal{Q} ogni retta di \mathcal{E}^3 che sia intersezione di due piani principali di \mathcal{Q} .⁸

Si dice *vertice* di \mathcal{Q} ogni punto di intersezione del supporto proprio $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$ con un asse di \mathcal{Q} .

Si noti che i piani principali di \mathcal{Q} , essendo particolari piani diametrali, contengono sempre il centro di \mathcal{Q} ; di conseguenza, anche gli assi di \mathcal{Q} contengono il centro di \mathcal{Q} .

La seguente proposizione fornisce il metodo operativo per trovare i piani principali (e quindi gli assi e i vertici) di una quadrica.

■ **Proposizione 12.81.** Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 avente, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} , matrice associata $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$; sia M_{00} il minore complementare dell'elemento a_{00} in A . I piani principali di \mathcal{Q} sono i piani polari dei punti impropri di \mathcal{E}^3 individuati dalle direzioni degli autovettori di M_{00} , relativi ad autovalori non nulli.

⁸Poichè due piani principali $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ non possono essere paralleli (dovendo essere rispettivamente ortogonali ai due punti impropri distinti $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$), gli assi di una quadrica sono rette proprie di \mathcal{E}^3 .

Dimostrazione. Si procede in modo perfettamente analogo a quanto fatto per dimostrare la Proposizione 12.41. □

Si noti che, poiché $M_{00} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, essa ammette sempre tre autovalori, eventualmente coincidenti, con somma delle molteplicità geometriche uguale a tre (Teorema 7.19).

Inoltre, dalla Legge di reciprocità segue facilmente che *il piano tangente a una quadrica \mathcal{Q} in un suo vertice V è ortogonale all'asse contenente V* : infatti, detto $r = \pi_{P_{1\infty}} \cap \pi_{P_{2\infty}}$ l'asse contenente V (con $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ piani principali per \mathcal{Q}), la Legge di reciprocità assicura che $P_{1\infty}, P_{2\infty} \in \pi_V$, e quindi che il piano polare di V (ovvero il piano tangente in V a \mathcal{Q}) contiene nella sua giacitura le direzioni dei punti impropri $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$ (che, per definizione di piano principale, sono ortogonali alla direzione dell'asse).

Come conseguenza delle Proposizioni 12.77 e 12.81, si ottiene poi il seguente risultato, relativo alla esistenza di piani principali e di assi per i vari tipi di quadriche non degeneri.

■ **Proposizione 12.82.** *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 .*

- *Se \mathcal{Q} è una quadrica a centro, esistono sempre almeno tre assi (risp. tre piani principali) di \mathcal{Q} , a due a due ortogonali, che si intersecano nel centro di \mathcal{Q} ;*
- *se \mathcal{Q} è un paraboloide, esso ammette almeno due piani principali tra loro ortogonali, un solo asse e un solo vertice.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 12.81, ogni classe di proporzionalità di autovettori della matrice $M_{00} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, relativi a un autovalore non nullo, individua un piano principale della quadrica \mathcal{Q} .

• Nel caso che \mathcal{Q} sia una quadrica a centro, la matrice M_{00} non può ammettere l'autovalore nullo (essendo $\det M_{00} \neq 0$).

Se M_{00} ha una terna di autovalori distinti (non nulli), allora esistono esattamente tre punti impropri $P_{1\infty}$, $P_{2\infty}$ e $P_{3\infty}$ i cui piani polari $\pi_{P_{1\infty}}$, $\pi_{P_{2\infty}}$ e $\pi_{P_{3\infty}}$ sono gli unici piani principali di \mathcal{Q} . Inoltre, scelta arbitrariamente una coppia di tali punti impropri, ad esempio $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$, l'intersezione dei rispettivi piani polari $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ è un asse a di \mathcal{Q} : il piano polare del suo punto improprio A_∞ , per la Legge di reciprocità, contiene $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$ (aventi ciascuno direzione ortogonale ad A_∞) e quindi, essendo un piano proprio ortogonale alla direzione del suo polo, coincide con il terzo piano principale $\pi_{P_{3\infty}}$. Ciò prova che i tre piani principali sono a due a due ortogonali e che la quadrica \mathcal{Q} ha esattamente tre assi, a due a due ortogonali.

Supponiamo invece che M_{00} abbia due autovalori distinti λ_1 e λ_2 , con λ_1 di molteplicità due. Se $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$ sono i punti impropri individuati da una coppia di autovettori indipendenti relativi a λ_1 , e $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ sono i loro piani polari (principali), allora ogni altro autovettore relativo a λ_1 determina un piano polare (principale) appartenente al fascio di piani di asse $a = \pi_{P_{1\infty}} \cap \pi_{P_{2\infty}}$ (Definizione 11.11 e Proposizione 11.13). Inoltre, il piano polare del suo punto improprio A_∞ , per la Legge di reciprocità, contiene $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$ e quindi, essendo un piano proprio ortogonale alla direzione del suo polo, coincide con l'unico piano principale $\pi_{P_{3\infty}}$ individuato dagli autovettori

(tra loro proporzionali) relativi a λ_2 . Scegliendo una coppia π', π'' di piani (principali) ortogonali nel fascio di asse a , i piani π', π'' e $\pi_{P_{3\infty}}$ costituiscono una terna di piani principali di \mathcal{Q} a due a due ortogonali, le cui intersezioni forniscono una terna di assi di \mathcal{Q} , a due a due ortogonali.

Se infine M_{00} ha un unico autovalore di molteplicità tre, allora gli autovettori di M_{00} ad esso associati individuano tutti i punti impropri di \mathcal{E}^3 : tutti i piani diametrali risultano quindi essere principali e tutte le rette per il centro sono assi di \mathcal{Q} .

• Nel caso che \mathcal{Q} sia un paraboloide, la matrice M_{00} (avendo $\det M_{00} = 0$) ammette sicuramente l'autovalore nullo, con molteplicità uno (perché, se tale molteplicità fosse maggiore di uno, la matrice A non potrebbe essere regolare).

Se M_{00} ammette due autovalori non nulli distinti, allora esistono esattamente due punti impropri $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$ i cui piani polari $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ sono gli unici piani principali di \mathcal{Q} . Inoltre, il centro improprio C_∞ di \mathcal{Q} appartiene al piano $\pi_{P_{1\infty}}$ (risp. $\pi_{P_{2\infty}}$), per cui è ortogonale alla direzione ortogonale $P_{1\infty}$ (risp. $P_{2\infty}$). Detta \bar{P}_∞ la direzione ortogonale a C_∞ su $\pi_{P_{1\infty}}$, il suo piano polare $\pi_{\bar{P}_\infty}$, oltre a contenere C_∞ , contiene $P_{1\infty}$ (per la Legge di reciprocità) ed è dunque ortogonale al suo polo. \bar{P}_∞ coincide quindi con $P_{2\infty}$ e i due piani principali sono ortogonali: la loro intersezione è l'unico asse del paraboloide.

Se invece M_{00} ammette un unico autovalore non nullo di molteplicità due, allora gli autovettori di M_{00} ad esso associati individuano un fascio di piani principali, il cui asse è l'unico asse di \mathcal{Q} .

In ogni caso, quindi, un paraboloide ha un solo asse e almeno una coppia di piani principali tra loro ortogonali. Infine, poiché l'asse è una retta propria contenente il centro (improprio) di \mathcal{Q} , esso non può essere tangente a \mathcal{Q} (apparterrebbe, in tal caso, al piano improprio); pertanto, l'asse interseca il supporto $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ in un ulteriore punto proprio V , che risulta essere l'unico vertice del paraboloide.

□

► **Osservazione 12.83.** Dalla dimostrazione della Proposizione 12.82 segue che una quadrica a centro (risp. un paraboloide) \mathcal{Q} ammette più di tre (risp. più di due) piani principali se e soltanto se, in ogni matrice A associata a \mathcal{Q} , il minore M_{00} ha autovalori di molteplicità maggiore di uno. In particolare, la presenza di un autovalore di M_{00} di molteplicità due (risp. tre) implica l'esistenza di una retta r , detta *asse di rotazione* per \mathcal{Q} (risp. di un punto C , coincidente con il centro della quadrica⁹), con la proprietà che tutti i piani contenenti r (risp. C) sono piani principali per \mathcal{Q} ; in questo caso la quadrica \mathcal{Q} si dice *quadrica di rotazione*, perché ogni rotazione¹⁰ attorno all'asse di rotazione (risp. attorno al centro) trasforma $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ in sé.

⁹In questo caso particolare (se il supporto di \mathcal{Q} non è vuoto) la quadrica \mathcal{Q} risulta essere una sfera (Definizione 11.17): si veda anche la successiva Proposizione 12.91.

¹⁰Si ricordi la Definizione 9.57.

Esempio 12.22. Nel caso del paraboloide \mathcal{Q}_1 considerato nell'Esempio 12.20, gli autovalori non nulli della matrice M_{00} sono $\bar{\lambda}_1 = -10$ e $\bar{\lambda}_2 = 1$, essendo

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t+8 & -4 \\ 0 & -4 & t+2 \end{pmatrix} = t(t-1)(t+10).$$

Gli autovettori relativi a $\bar{\lambda}_1 = -10$ sono i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} l = 0 \\ m + 2n = 0; \end{cases}$$

gli autovettori relativi a $\bar{\lambda}_2 = 1$ sono invece i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} m = 0 \\ n = 0. \end{cases}$$

I poli dei piani principali di \mathcal{Q}_1 sono dunque i punti impropri $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 0, -2, 1]$ e $P_{2\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, 0, 0]$; i piani principali di \mathcal{Q}_1 sono allora i piani $\pi_{P_{1\infty}}$ e $\pi_{P_{2\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}} : 20y - 10z + 1 = 0 \quad \pi_{P_{2\infty}} : x = 0.$$

L'(unico) asse del paraboloide \mathcal{Q}_1 è dunque la retta $r = \pi_{P_{1\infty}} \cap \pi_{P_{2\infty}}$ di equazione

$$\begin{cases} 20y - 10z + 1 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

e il vertice (unico) di \mathcal{Q}_1 è il punto $V = r \cap \mathcal{I}_P(\mathcal{Q}_1)$, di coordinate cartesiane

$$V \equiv_{\mathcal{R}} \left(0, -\frac{9}{200}, \frac{1}{100} \right).$$

Esempio 12.23. Nel caso dell'ellissoide \mathcal{Q}_2 considerato nell'Esempio 12.20, gli autovalori della matrice M_{00} sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, che si ottengono risolvendo la equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & -1 \\ 0 & -1 & t-2 \end{pmatrix} = (t-3)(t-1)^2 = 0.$$

Gli autovettori relativi all'autovalore λ_1 sono i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} l = 0 \\ m - n = 0; \end{cases}$$

gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda_2 = \lambda_3$ sono invece i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad m + n = 0.$$

Sono dunque poli di piani principali di \mathcal{Q}_2 il punto improprio $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 0, 1, 1]$ e tutti i punti impropri del tipo $P_{\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, l, m, -m]$, al variare di $l, m \in \mathbb{R}$, con $(l, m) \neq (0, 0)$; sono quindi piani principali di \mathcal{Q}_2 il piano $\pi_{P_{1\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}} : y + z - 2 = 0$$

e tutti i piani $\pi_{P_{\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{\infty}} : lx + m(y - z) = 0, \quad l, m \in \mathbb{R}, (l, m) \neq (0, 0)$$

ovvero tutti i piani del fascio di piani di asse

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad (\text{asse di rotazione per } \mathcal{Q}_2).$$

Esempio 12.24. Nel caso dell'iperboloide \mathcal{Q}_3 considerato nell'Esempio 12.20, gli autovalori della matrice M_{00} sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$, che si ottengono risolvendo la equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} t-1 & 2 & 0 \\ 2 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)(t+1)(t-3) = 0.$$

Gli autovettori relativi all'autovalore λ_1 sono i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} l = 0 \\ m = 0; \end{cases}$$

gli autovettori relativi all'autovalore λ_2 sono i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} l + m = 0 \\ n = 0; \end{cases}$$

gli autovettori relativi all'autovalore λ_3 sono infine i vettori (l, m, n) tali che

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} l - m = 0 \\ n = 0. \end{cases}$$

I poli dei piani principali di \mathcal{Q}_3 sono dunque i punti impropri $P_{1\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 0, 0, 1]$, $P_{2\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, -1, 0]$ e $P_{3\infty} \equiv_{\mathcal{R}} [0, 1, 1, 0]$; i piani principali di \mathcal{Q}_3 sono allora i piani $\pi_{P_{1\infty}}$, $\pi_{P_{2\infty}}$ e $\pi_{P_{3\infty}}$ di equazione:

$$\pi_{P_{1\infty}} : z + 3 = 0 \quad \pi_{P_{2\infty}} : x - y = 0 \quad \pi_{P_{3\infty}} : x + y = 0.$$

Gli assi di \mathcal{Q}_3 sono, evidentemente, le tre rette $r = \pi_{P_{1\infty}} \cap \pi_{P_{2\infty}}$, $s = \pi_{P_{1\infty}} \cap \pi_{P_{3\infty}}$ e $t = \pi_{P_{2\infty}} \cap \pi_{P_{3\infty}}$ di equazioni:

$$r : \begin{cases} z + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} z + 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

6. Riduzione a forma canonica delle quadriche

Nel presente paragrafo, \mathcal{Q} denoterà sempre una quadrica non degenerare dello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , dotato di un fissato riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \bar{\mathcal{B}})$.

Le proprietà del centro, degli assi e dei vertici, ottenute nel paragrafo precedente, permettono, nei vari tipi di quadriche non degeneri, di potere scegliere sempre un riferimento cartesiano rispetto al quale l'equazione della quadrica risulta particolarmente semplice. Infatti, la proposizione seguente afferma che, fissato opportunamente il riferimento, la matrice associata è o di tipo diagonale o di tipo "semi-diagonale" (ovvero, una matrice $D' = (d'_{i,j}) \in \mathcal{S}_4$ in cui gli unici elementi non nulli sono d'_{11} , d'_{22} e $d'_{03} = d'_{30}$).

■ **Proposizione 12.84.** *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenerare di \mathcal{E}^3 .*

- (i) *Se \mathcal{Q} è una quadrica a centro, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine \bar{O} coincidente con il centro di \mathcal{Q} , e assi coordinati \mathbf{X} , \mathbf{Y} e \mathbf{Z} coincidenti con una terna di assi, tra loro ortogonali, di \mathcal{Q} . Allora, la matrice associata a \mathcal{Q} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo diagonale.*
- (ii) *Se \mathcal{Q} è un paraboloide, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine \bar{O} coincidente con il vertice V di \mathcal{Q} , piano coordinato \mathbf{XY} coincidente con il piano tangente nel vertice a \mathcal{Q} , e piani coordinati \mathbf{XZ} e \mathbf{YZ} coincidenti con due piani principali, tra loro ortogonali, di \mathcal{Q} . Allora, la matrice associata a \mathcal{Q} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo "semi-diagonale".*

Dimostrazione. Sia $\bar{A} = (\bar{a}_{ij}) \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ il discriminante di \mathcal{Q} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$.

(i) Se \mathcal{Q} è una quadrica a centro, i piani coordinati \mathbf{YZ} , \mathbf{XZ} , \mathbf{XY} di $\bar{\mathcal{R}}$ (aventi rispettivamente equazione $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$) sono piani principali della quadrica, e quindi devono coincidere con i piani polari delle loro direzione ortogonali $P_\infty^X \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0, 1, 0, 0]$, $P_\infty^Y \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0, 0, 1, 0]$, $P_\infty^Z \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0, 0, 0, 1]$, aventi rispettivamente equazione $\bar{a}_{01}x_0 + \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 = 0$, $\bar{a}_{02}x_0 + \bar{a}_{12}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 = 0$, $\bar{a}_{03}x_0 + \bar{a}_{13}x_1 + \bar{a}_{23}x_2 + \bar{a}_{33}x_3 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$. Ciò implica che la matrice \bar{A} è di tipo diagonale.

(ii) Se \mathcal{Q} è un paraboloide, i piani coordinati \mathbf{YZ} e \mathbf{XZ} di $\bar{\mathcal{R}}$ (aventi rispettivamente equazione $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$) sono piani principali della quadrica, e quindi devono coincidere con i piani polari delle loro direzione ortogonali $P_\infty^X \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0, 1, 0, 0]$ e $P_\infty^Y \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0, 0, 1, 0]$, aventi rispettivamente equazione $\bar{a}_{01}x_0 + \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 = 0$ e $\bar{a}_{02}x_0 + \bar{a}_{12}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$, mentre il piano coordinato \mathbf{XY} di $\bar{\mathcal{R}}$ (avente equazione $x_3 = 0$ rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$) deve coincidere con il piano polare del vertice $V \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [1, 0, 0, 0]$, avente equazione $\bar{a}_{00}x_0 + \bar{a}_{01}x_1 + \bar{a}_{02}x_2 + \bar{a}_{03}x_3 = 0$. Pertanto si ha:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{03} \\ 0 & \bar{a}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{22} & 0 \\ \bar{a}_{03} & 0 & 0 & \bar{a}_{33} \end{pmatrix}.$$

Infine, poiché il centro del paraboloide è il punto improprio dell'asse Z , $P_\infty^Z \equiv \bar{\mathcal{R}} [0, 0, 0, 1]$, da $\bar{A}_{00} = \bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} \cdot \bar{a}_{33} = 0$ e $\bar{A}_{03} = -\bar{a}_{11} \cdot \bar{a}_{22} \cdot \bar{a}_{03} \neq 0$ segue $\bar{a}_{33} = 0$; ciò prova che la matrice \bar{A} è di tipo semi-diagonale. \square

La proposizione seguente fornisce il metodo operativo per ottenere, a partire da una qualunque matrice associata alla quadrica non degenera \mathcal{Q} , una matrice di tipo diagonale o semi-diagonale associata a \mathcal{Q} .

■ **Proposizione 12.85.** *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 e sia A un suo discriminante, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} .*

- (i) *Se \mathcal{Q} è una quadrica a centro, allora una matrice di tipo diagonale associata a \mathcal{Q} è*

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sono i tre autovalori (non necessariamente distinti) del minore M_{00} di A e $d \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D = \det A$.

- (ii) *Se \mathcal{Q} è un paraboloide, allora una matrice di tipo "semi-diagonale" associata a \mathcal{Q} è*

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d' \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ d' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono i due autovalori non nulli (eventualmente coincidenti) del minore M_{00} di A e $d' \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D' = \det A$.

Dimostrazione. Si procede, in modo perfettamente analogo a quanto fatto per dimostrare la analoga Proposizione 12.44, utilizzando le Proposizioni 12.58 e 12.84 e l'Osservazione 12.59 (in sostituzione delle Proposizioni 12.21 e 12.43 e dell'Osservazione 12.22). \square

Come conseguenza delle Proposizioni 12.84 e 12.85, si ottengono le cosiddette *equazioni canoniche* delle quadriche non degeneri di \mathcal{E}^3 :

■ **Proposizione 12.86.** *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 e sia A una sua matrice associata, rispetto al riferimento cartesiano \mathcal{R} .*

- (a₁) *Se \mathcal{Q} è un paraboloide e $\det A < 0$, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^3 rispetto al quale \mathcal{Q} assume equazione*

$$Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+, a \geq b;$$

- (a₂) Se \mathcal{Q} è un paraboloide e $\det A > 0$, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^3 rispetto al quale \mathcal{Q} assume equazione

$$Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+;$$

- (b₁) Se \mathcal{Q} è un iperboloide e $\det A < 0$, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^3 rispetto al quale \mathcal{Q} assume equazione

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b;$$

- (b₂) Se \mathcal{Q} è un iperboloide e $\det A > 0$, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^3 rispetto al quale \mathcal{Q} assume equazione

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b;$$

- (c₁) Se \mathcal{Q} è un ellissoide e $\det A < 0$, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^3 rispetto al quale \mathcal{Q} assume equazione

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b \geq c;$$

- (c₂) Se \mathcal{Q} è un ellissoide e $\det A > 0$, allora esiste un riferimento cartesiano su \mathcal{E}^3 rispetto al quale \mathcal{Q} assume equazione

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b \geq c.$$

Dimostrazione. Nel caso del paraboloide, innanzitutto si osservi (tramite la matrice semi-diagonale D' associata) che λ_1, λ_2 sono concordi (risp. discordi) se e solo se $\det A < 0$ (risp. $\det A > 0$).

Si noti inoltre che, moltiplicando per $(-2d')^{-1}$, la equazione di \mathcal{Q} indotta dalla matrice semi-diagonale D' (rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$) assume la forma:

$$Z = \frac{\lambda_1}{-2d'} \cdot X^2 + \frac{\lambda_2}{-2d'} \cdot Y^2.$$

Ciò prova che, scambiando eventualmente tra loro l'asse \mathbf{X} e l'asse \mathbf{Y} e cambiando eventualmente orientazione all'asse \mathbf{Z} del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$, la equazione di \mathcal{Q} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ assume esattamente la forma del caso (a₁) se λ_1, λ_2 sono concordi (ovvero se $\det A < 0$), e la forma del caso (a₂) se λ_1, λ_2 sono discordi (ovvero se $\det A > 0$).

Nel caso delle quadriche a centro, innanzitutto si osservi (applicando alla matrice diagonale D associata il criterio contenuto nella Proposizione 12.77) che gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ di M_{00} sono tutti dello stesso segno (risp. sono non tutti dello stesso segno) se e solo se \mathcal{Q} è un ellissoide (risp. un iperboloide).

Si noti inoltre che, moltiplicando per $d^{-1} = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{\det A}$, la equazione di \mathcal{Q} indotta dalla matrice diagonale D (rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$) assume la forma:

$$\frac{(\lambda_1)^2 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{\det A} \cdot X^2 + \frac{(\lambda_2)^2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3}{\det A} \cdot Y^2 + \frac{(\lambda_3)^2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{\det A} \cdot Z^2 = -1.$$

Ciò prova che, scambiando eventualmente tra loro gli assi del riferimento $\bar{\mathcal{R}}$:

- se \mathcal{Q} è un iperboloide (ovvero se λ_1, λ_2 e λ_3 non hanno tutti lo stesso segno) e $\det A < 0$, la equazione di \mathcal{Q} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ assume esattamente la forma del caso (b_1) ;
- se \mathcal{Q} è un iperboloide (ovvero se λ_1, λ_2 e λ_3 non hanno tutti lo stesso segno) e $\det A > 0$, la equazione di \mathcal{Q} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ assume esattamente la forma del caso (b_2) ;
- se \mathcal{Q} è un ellissoide (ovvero se λ_1, λ_2 e λ_3 hanno tutti lo stesso segno) e $\det A < 0$, la equazione di \mathcal{Q} rispetto a $\bar{\mathcal{R}}$ assume esattamente la forma del caso (c_1) ;
- se \mathcal{Q} è un ellissoide (ovvero se λ_1, λ_2 e λ_3 hanno tutti lo stesso segno) e $\det A > 0$, la equazione di \mathcal{Q} rispetto a $\bar{\mathcal{S}}$ assume esattamente la forma del caso (c_2) , che corrisponde chiaramente a una quadrica a supporto vuoto.

□

Le proprietà delle equazioni canoniche permettono di provare la seguente

■ **Proposizione 12.87.** *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 e sia A un suo discriminante, relativo al riferimento cartesiano \mathcal{R} .*

- Se $\det A < 0$, allora \mathcal{Q} è una quadrica reale di tipo ellittico;
- se $\det A > 0$, allora \mathcal{Q} è o una quadrica immaginaria o una quadrica reale di tipo iperbolico.

Dimostrazione. Se $\det A < 0$, allora \mathcal{Q} ha equazione canonica di tipo (a_1) , (b_1) o (c_1) (si veda la Proposizione 12.86). Nel caso (a_1) , l'intersezione di $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ con il piano $Z = -1$ è vuota. Nel caso (b_1) , l'intersezione di $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ con il piano $Z = 0$ è vuota. Nel caso (c_1) , l'intersezione di $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ con il piano $Z = 2c$ è vuota. Pertanto, in tutti e tre i casi, $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ non contiene rette e, di conseguenza, tutti i suoi punti sono ellittici.

Se invece $\det A > 0$, allora \mathcal{Q} ha equazione canonica di tipo (a_2) , (b_2) o (c_2) (si veda la Proposizione 12.86). Nel caso (c_2) , come già rilevato, $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) = \emptyset$. Nel caso (a_2) , il punto $P \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [1, 0, 0, 0]$ è iperbolico, come è facile verificare considerando $\mathcal{I}(\mathcal{Q}) \cap \pi_P$. Analogamente, nel caso (b_2) , il punto $Q \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} [0, a, 0, c]$ è iperbolico. Il Lemma 12.75 assicura quindi che, in entrambi i casi, tutti i punti di \mathcal{Q} sono iperbolici.

□

Quale corollario delle Proposizioni 12.86 e 12.87, si ha il seguente:

■ **Teorema 12.88. (Classificazione delle quadriche non degeneri di \mathcal{E}^3)** *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degenera di \mathcal{E}^3 . Allora \mathcal{Q} appartiene a una e una sola delle seguenti classi:*

- (a_1) *paraboloidi ellittici (o non rigati);*
- (a_2) *paraboloidi iperbolici (o doppiamente rigati o a sella);*
- (b_1) *iperboloidi ellittici (o non rigati o a due falde);*
- (b_2) *iperboloidi iperbolici (o doppiamente rigati o a una falda);*
- (c_1) *ellissoidi reali;*
- (c_2) *ellissoidi immaginari (o vuoti).*

□

Lo schema riportato in Figura 12.5 riassume il metodo di classificazione, a partire da una qualunque matrice A associata alla quadrica \mathcal{Q} , mentre le Figure 12.6, 12.7, 12.8, 12.9 e 12.10 forniscono una rappresentazione del supporto (non vuoto) di tali quadriche, rispetto al riferimento in cui esse assumono equazione canonica.

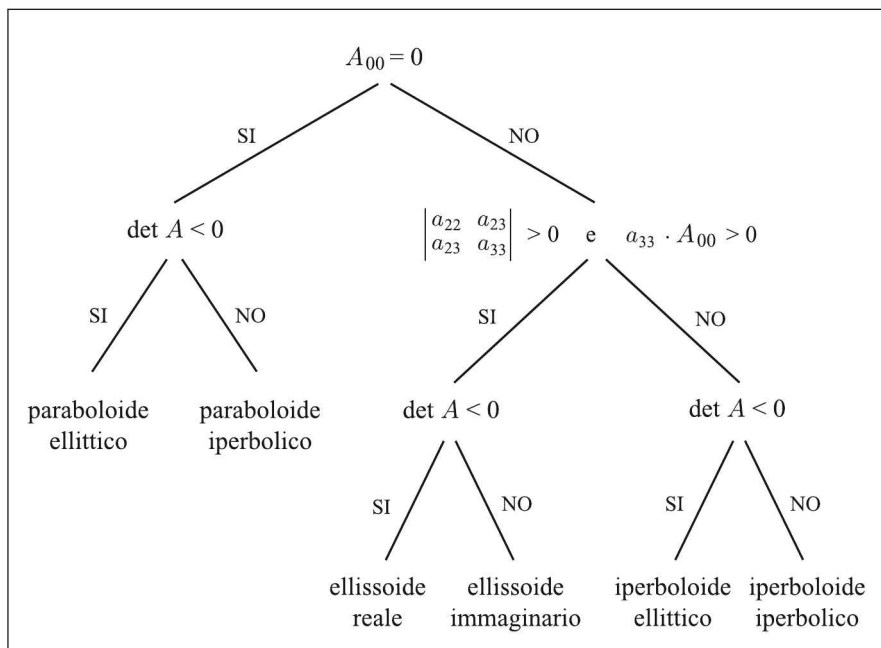


Figura 12.5

(Algoritmo di classificazione per le quadriche non degeneri di \mathcal{E}^3)

► **Osservazione 12.89.** Le condizioni se $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$ e $a_{33} \cdot A_{00} > 0$, che consentono di distinguere gli ellissoidi dagli iperboloidi, e l'ulteriore condizione $\det A > 0$ che, unitamente alle precedenti, identifica gli ellissoidi immaginari sono dirette conseguenze del Criterio di Sylvester dimostrato in Appendice B (Proposizione B.15 e relativa nota). Infatti, ricordando le Osservazioni 12.23 e 12.60, il supporto di una conica (o di una quadrica) è vuoto se e solo se la sua matrice associata è definita (positiva o negativa).

Esempio 12.25. In base alla Proposizione 12.86 - o all'algoritmo di classificazione riassunto in Figura 12.5 -, il paraboloide \mathcal{Q}_1 considerato nell'Esempio 12.20 è a punti iperbolici (essendo $\det A_1 = 8 > 0$). Per la Proposizione 12.85 (caso (ii)), una matrice di tipo semi-diagonale associata a \mathcal{Q}_1 è

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d' \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\det D' = 10d'^2 = \det A_1 = 8$, da cui segue $d' = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$. Allora, una equazione canonica di Q_1 è

$$-10X^2 + Y^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}Z = 0, \quad \text{ovvero} \quad Z = \frac{X^2}{\frac{2\sqrt{5}}{25}} - \frac{Y^2}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}.$$

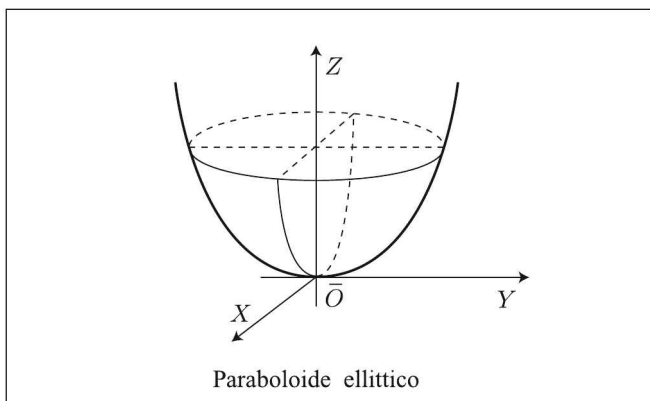


Figura 12.6

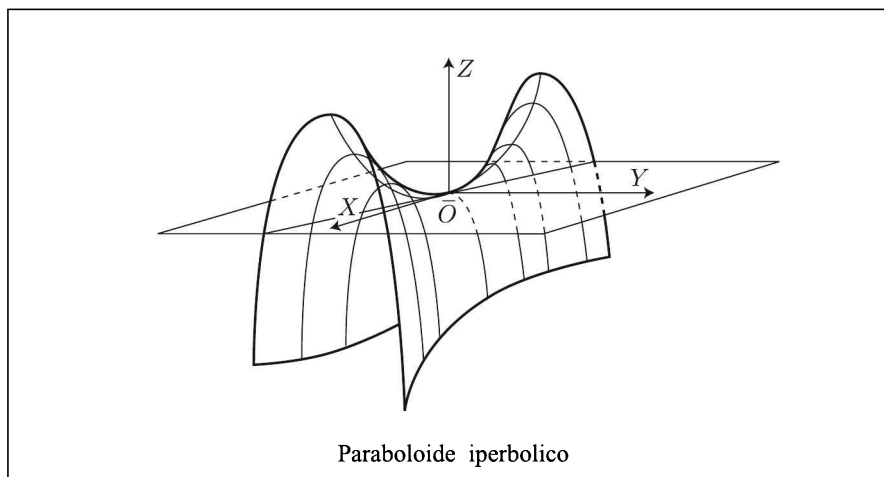


Figura 12.7

Esempio 12.26. In base alla Proposizione 12.86 - o all'algoritmo di classificazione riassunto in Figura 12.5 -, l'ellissoide Q_2 considerato nell'Esempio 12.20 è non vuoto (essendo $\det A_2 = -15 < 0$).

Per la Proposizione 12.85 (caso (i)), una matrice di tipo diagonale associata a Q_2 è

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

con $\det D = 3d = \det A_2 = -15$, da cui segue $d = -5$. Allora, una equazione canonica di Q_2 è

$$X^2 + Y^2 + 3Z^2 - 5 = 0, \quad \text{ovvero} \quad \frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{5} + \frac{Z^2}{\frac{5}{3}} = 1.$$

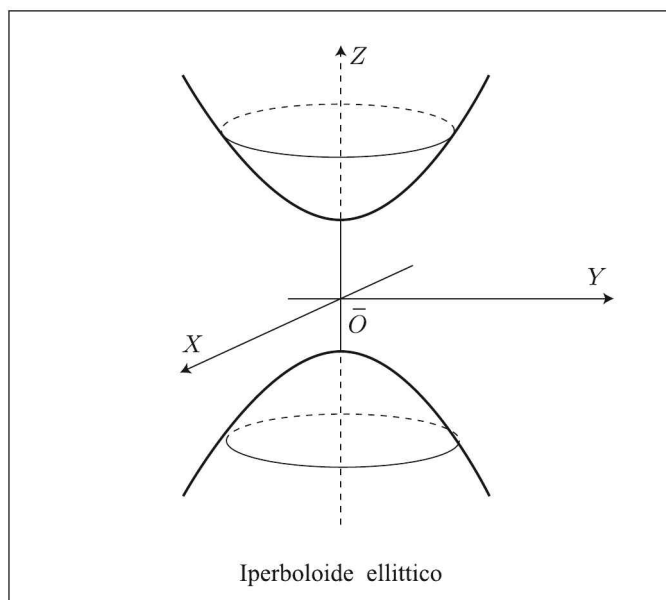


Figura 12.8

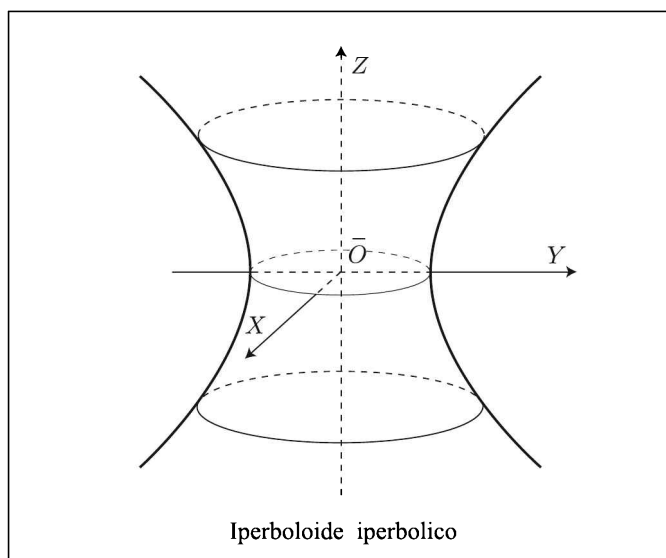


Figura 12.9

Esempio 12.27. In base alla Proposizione 12.86 - o all'algoritmo di classificazione riassunto in Figura 12.5 -, l'iperboloide \mathcal{Q}_3 considerato nell'Esempio 12.20 è a punti iperbolici (essendo $\det A_3 = 24 > 0$).

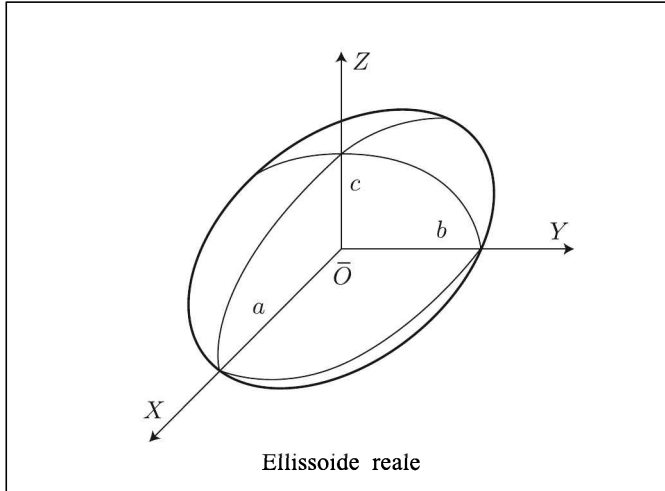


Figura 12.10

Per la Proposizione 12.85 (caso (i)), una matrice di tipo diagonale associata a \mathcal{Q}_3 è

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con $\det D = -3d = \det A_3 = 24$, da cui segue $d = -8$.

Allora, una equazione canonica di \mathcal{Q}_3 è

$$X^2 + 3Y^2 - Z^2 - 8 = 0, \quad \text{ovvero} \quad \frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{\frac{8}{3}} - \frac{Z^2}{8} = 1.$$

Le equazioni canoniche delle quadriche non degeneri e non vuote permettono di ricavare facilmente alcune proprietà del supporto che, essendo indipendenti dal riferimento scelto, possono essere formulate in termini generali.

■ **Proposizione 12.90.** *Sia \mathcal{Q} una quadrica non degeneri di \mathcal{E}^3 . Allora, ogni piano principale di \mathcal{Q} è piano di simmetria¹¹ per il supporto proprio $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$.*

Inoltre:

- se \mathcal{Q} è una quadrica a centro, il centro C è centro di simmetria per il supporto proprio $\mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$;

¹¹Ciò significa che per ogni piano principale π di \mathcal{Q} e per ogni punto $P \in \mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$, anche $P' \in \mathcal{I}_P(\mathcal{Q})$, ove $P' = s_\pi(P)$ indica il simmetrico di P rispetto al piano π (Definizione 9.59).

- se \mathcal{Q} è un iperboloide ellittico, un asse di \mathcal{Q} contiene due vertici, mentre gli altri due assi non intersecano $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$;
- se \mathcal{Q} è un iperboloide iperbolico, due assi di \mathcal{Q} contengono due vertici ciascuno, mentre l'altro asse non interseca $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$;
- se \mathcal{Q} è un ellissoide reale, ogni asse di \mathcal{Q} contiene due vertici.

□

Inoltre, dalle equazioni canoniche delle quadriche non degeneri è possibile visualizzare facilmente la eventuale presenza di assi di rotazione (ovvero, di autovalori di molteplicità maggiore di uno per il minore M_{00} di qualunque matrice associata):

- un paraboloide ellittico risulta di rotazione attorno al suo (unico) asse se e soltanto se, nella sua equazione canonica, si ha $a = b$;
- un paraboloide iperbolico non può mai essere di rotazione;
- un iperboloide ellittico risulta di rotazione attorno al suo asse contenente i vertici se e soltanto se, nella sua equazione canonica, si ha $a = b$;
- un iperboloide iperbolico risulta di rotazione attorno al suo asse non contenente vertici se e soltanto se, nella sua equazione canonica, si ha $a = b$;
- un ellissoide (reale o immaginario) risulta di rotazione attorno a un suo asse se e soltanto se, nella sua equazione canonica, si ha o $a = b$, o $b = c$.

Si noti infine che la equazione canonica di un ellissoide reale \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 ha i coefficienti di X^2 , di Y^2 e di Z^2 coincidenti (e quindi, il suo supporto è costituito da tutti e soli i punti equidistanti dal centro di \mathcal{Q}) se e solo se, in qualunque matrice A associata a \mathcal{Q} , il minore M_{00} ammette tre autovalori coincidenti; ciò permette di ottenere la seguente caratterizzazione delle sfere all'interno delle quadriche dello spazio euclideo.

■ Proposizione 12.91. *Una quadrica \mathcal{Q} di \mathcal{E}^3 è una sfera se e soltanto se, in una qualunque matrice associata A , si ha*

$$\det A < 0 \quad e \quad M_{00} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

□

La sfera risulta quindi l'unica quadrica non vuota di rotazione attorno al suo centro.

TEST DI VALUTAZIONE - II PARTE

I seguenti quesiti, organizzati in due batterie ciascuna composta da dieci quiz, possono essere utilizzati dagli studenti come autoverifica di apprendimento relativa alla seconda parte del Corso riguardante argomenti di Geometria Euclidea, comprensiva di elementi di teoria delle Coniche e delle Quadriche sviluppata negli Ampliamenti Proiettivi degli Spazi Euclidei.

Per ogni domanda vengono proposte quattro possibili risposte, delle quali una sola è corretta: si consiglia lo studente, al fine di valutare nel modo più completo possibile il proprio livello di comprensione delle tematiche trattate, di non limitarsi alla sola individuazione dell'unica risposta giusta, ma di tentare anche di comprendere i motivi che rendono errate le altre tre risposte.

Volendo attribuire una valutazione in trentesimi alla propria risoluzione di ciascuna batteria di quiz, lo studente potrebbe, ad esempio, attribuire 3 punti ad ogni risposta corretta, sottraendo 1 punto per ogni risposta errata.

Le risposte corrette, insieme a qualche indicazione sulle conoscenze necessarie per un competente approccio ad ogni singolo quesito, sono disponibili come contenuti online extra del testo: si veda <http://textincloud.editrice-esculapio.com>

PRIMO TEST DI AUTOVALUTAZIONE - parte II

1. In \mathbb{R}^n , con il prodotto scalare naturale, ogni insieme ortonormale:

- (a) non contiene il vettore nullo
- (b) ha cardinalità n
- (c) è sottoinsieme della base naturale
- (d) è linearmente dipendente

2. Si consideri, al variare del parametro reale k , la applicazione α_k del piano euclideo \mathcal{E}^2 in sè che al punto $P \equiv (x, y)$ associa il punto $P' \equiv (kx + 3, (k^2 - 1)x + y)$. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- (a) per $k = 1$, α_k è una isometria diretta; per $k = -1$, α_k è una isometria inversa
- (b) per $k = 1$, α_k è una traslazione
- (c) α_k è una isometria, per ogni $k \in \mathbb{R} - \{0\}$
- (d) per $k = -1$, α_k è una riflessione

3. In uno spazio euclideo \mathcal{E}^5 , in cui è fissato un riferimento cartesiano, sia H il sottospazio di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x^1 = 3t_1 - 2t_2 \\ x^2 = 3 \\ x^3 = t_1 + 2t_2 \\ x^4 = t_1 + t_2 \\ x^5 = 5 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Allora:

- (a) H contiene i punti di coordinate $(3, 0, 1, 1, 0)$ e $(-2, 0, 2, 1, 0)$
- (b) la giacitura \vec{H} di H ha dimensione tre
- (c) il vettore libero di componenti $(0, 3, 0, 0, 5)$ appartiene alla giacitura \vec{H} di H
- (d) la giacitura \vec{H} di H contiene i vettori liberi di componenti $(3, 0, 1, 1, 0)$ e $(-2, 0, 2, 1, 0)$

4. In uno spazio euclideo di dimensione n , quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) un sottospazio euclideo di dimensione h contiene al più h punti distinti affinementemente indipendenti
- (b) $n + 1$ punti distinti sono sempre affinementemente indipendenti
- (c) qualsiasi sottospazio euclideo di dimensione h può essere rappresentato da un sistema lineare di $n - h$ equazioni in n incognite
- (d) qualsiasi sottospazio euclideo di dimensione h può essere rappresentato da un sistema di equazioni parametriche dipendente da $n - h$ parametri

5. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , il sistema $\begin{cases} x - z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ rappresenta:

- (a) una retta parallela al piano di equazione $y = 0$

- (b) l'insieme vuoto
- (c) l'asse y del riferimento
- (d) il piano xz del riferimento

6. In uno spazio euclideo di dimensione 3, dotato di un fissato riferimento cartesiano, quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) i piani di equazioni cartesiane $x = 0$ e $y = x$ sono tra loro ortogonali
- (b) l'equazione cartesiana $2x + y = 0$ rappresenta una retta parallela all'asse coordinato z
- (c) per tre punti distinti passa uno e un solo piano
- (d) la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ e il piano di equazione cartesiana $x + y + z - 1 = 0$ sono ortogonali

7. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , rispetto a un fissato riferimento cartesiano \mathcal{R} , sia r la retta di equazione

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-3} = z+2.$$

Allora:

- (a) il punto improprio della retta è il punto $P_\infty \equiv_{\mathcal{R}} [0, -2, 3, -1]$
- (b) r ammette lo stesso punto improprio della retta passante per $A \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, -3, 1]$ e $B \equiv_{\mathcal{R}} [2, 1, 0, 1]$
- (c) r è parallela al piano π di equazione omogenea $4x_0 + 2x_1 - 3x_2 + x_3$
- (d) il punto $Q \equiv_{\mathcal{R}} [1, 0, -1, -2]$ appartiene ad r

8. Rispetto alla conica $2x^2 + 2y^2 + 2x + 1 = 0$, la retta $3x - 4y + 1 = 0$ ha come polo:

- (a) il punto $P \equiv (0, 2)$
- (b) il punto $P \equiv (-2, 2)$
- (c) il punto $P \equiv (2, -2)$
- (d) il punto $P \equiv [0, -2, 2]$

9. Si dice asse di una conica \mathcal{C} :

- (a) ogni retta propria che sia polare rispetto a \mathcal{C} di un punto improprio
- (b) ogni diametro che sia ortogonale alla direzione individuata dal suo polo
- (c) ogni retta propria che sia ortogonale alla direzione individuata dal suo punto all'infinito
- (d) ogni retta propria che passa per il centro di \mathcal{C}

10. Se nell'equazione $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ i coefficienti a e b sono positivi mentre c è negativo, allora la quadrica rappresentata è:

- (a) un iperboloide ellittico
 - (b) un ellissoide reale
 - (c) un ellissoide immaginario
 - (d) un iperboloide iperbolico
-

SECONDO TEST DI AUTOVALUTAZIONE - parte II

1. Sia \mathcal{B} una base ordinata ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo \mathbf{V}^3 . Se $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ con $\mathbf{u}_1 \equiv_{\mathcal{B}} (1, 1, -3)$ e $\mathbf{u}_2 \equiv_{\mathcal{B}} (-1, 1, -2)$, allora il complemento ortogonale ${}^{\perp}\mathbf{U}$:

- (a) ha, rispetto a \mathcal{B} , rappresentazione cartesiana $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$
- (b) ha, rispetto a \mathcal{B} , rappresentazione cartesiana $x + 5y + 2z = 0$
- (c) ha dimensione due
- (d) ha una base costituita dal vettore $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (0, 2, -5)$

2. In uno spazio euclideo \mathcal{E}^4 , in cui è fissato un riferimento cartesiano \mathcal{R} , qual è la dimensione del sottospazio euclideo generato dai punti di coordinate cartesiane $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(-1, 0, 0, 1)$ rispetto a \mathcal{R} ?

- (a) quattro
- (b) tre
- (c) due
- (d) uno

3. In uno spazio euclideo di dimensione n , con $n \geq 3$, sia \mathcal{H} l'iperpiano di equazione $a_1x^1 + \dots + a_nx^n = b$, rispetto a un fissato riferimento cartesiano. Quale delle seguenti affermazioni è falsa, riguardo a un qualunque vettore libero \mathbf{v} di \mathcal{H} ?

- (a) \mathbf{v} appartiene a $\vec{\mathcal{H}}$
- (b) \mathbf{v} ha come n -pla di componenti la differenza delle n -ple di coordinate di due punti distinti di \mathcal{H}
- (c) \mathbf{v} ha come n -pla di componenti una soluzione della equazione $a_1x^1 + \dots + a_nx^n = 0$
- (d) \mathbf{v} ha come n -pla di componenti una n -pla proporzionale a (a_1, \dots, a_n)

4. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , una retta r ed un piano π sono paralleli se e solo se:

- (a) il sistema formato dalle equazioni di r e dalla equazione di π ha matrice incompleta di rango 3 e matrice completa di rango 4
- (b) il sistema formato dalle equazioni di r e dalla equazione di π è di Cramer
- (c) data l'equazione $ax + by + cz + d = 0$ di π , la terna (l, m, n) di coefficienti direttori di r è proporzionale alla terna (a, b, c)
- (d) data l'equazione $ax + by + cz + d = 0$ di π e la terna (l, m, n) di coefficienti direttori di r , vale $al + bm + cn = 0$

5. Nello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , quale dei seguenti sistemi rappresenta un sottospazio parallelo all'asse coordinato x ?

- (a) $\begin{cases} x + z = 5 \\ y - z = 1 \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} x = 5 \\ y = \alpha + 1 \\ z = \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

- (c) $x + y - z = 6$
 (d) $y - z = 1$

6. Quale dei seguenti sottospazi dello spazio euclideo \mathcal{E}^3 , rappresentati rispetto a un fissato riferimento cartesiano, ha $\vec{v} \equiv (6, -5, 7)$ come vettore libero?

- (a) $5x + 6y + 7 = 0$
 (b) $5x + 6y + 7z - 49 = 0$
 (c) $7x - 5z - 49 = 0$
 (d) $\begin{cases} 7x - 6y = 49 \\ 7y - 5z = 5 \end{cases}$

7. Nel piano euclideo \mathcal{E}^2 , rispetto a un fissato riferimento cartesiano, quale delle seguenti equazioni rappresenta una ellisse (reale o vuota) per ogni valore del parametro $k \in \mathbb{R}$?

- (a) $x^2 + 3k^2y^2 = 1$
 (b) $x^2 + 3ky^2 = -1$
 (c) $x^2 - 3y^2 = k^2$
 (d) $x^2 - 3ky^2 = -1$

8. Date le due matrici simmetriche reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix},$$

quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- (a) A e B sono discriminanti di coniche a centro reali
 (b) A e B sono discriminanti della stessa conica rispetto a due sistemi di riferimento diversi
 (c) A è il discriminante di una iperbole
 (d) B è il discriminante di una conica, a cui la retta impropria è esterna

9. In uno spazio euclideo \mathcal{E}^3 , rispetto a un fissato riferimento cartesiano, l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ rappresenta:

- (a) una sfera
 (b) una quadrica degenera
 (c) un iperboloide iperbolico
 (d) un paraboloido ellittico

10. Sia $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ una matrice associata alla quadrica \mathcal{Q} . Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- (a) se $\varrho(A) < 4$, allora la quadrica \mathcal{Q} è degenera
 (b) se \mathcal{Q} è un paraboloido, allora il minore M_{00} complementare di a_{00} in A ha determinante nullo
 (c) se \mathcal{Q} è un iperboloide, allora il minore M_{00} complementare di a_{00} in A ha determinante maggiore di zero
 (d) se \mathcal{Q} è una quadrica non degenera, allora il minore M_{00} complementare di a_{00} in A ha almeno un autovalore diverso da zero
-

APPENDICE A

Equazioni algebriche

1. Radici di un polinomio

Sia \mathbb{K} un campo e sia $\mathbb{K}[t]$ l'anello dei polinomi nella indeterminata t , a coefficienti in \mathbb{K} (§ 6 del Capitolo 2).

■ **Teorema A.1. (Algoritmo euclideo della divisione)** *Dati $f(t), g(t) \in \mathbb{K}[t]$, con $g(t) \neq \mathbf{0}$, esiste una e una sola coppia $(q(t), r(t)) \in \mathbb{K}[t] \times \mathbb{K}[t]$ tale che:*

- (i) $f(t) = g(t) \cdot q(t) + r(t)$;
- (ii) $\text{gr}(r(t)) < \text{gr}(g(t))$.

Dimostrazione. Supponiamo $f(t) = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0$, $g(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$, con $\text{gr}(f(t)) = m$, $\text{gr}(g(t)) = n \geq 0$.

Esistenza. Se $m < n$ (in particolare, se $f(t) = \mathbf{0}$), basta porre $q(t) = \mathbf{0}$, $r(t) = f(t)$. Supponiamo allora $m \geq n \geq 0$ e dimostriamo l'esistenza della coppia $(q(t), r(t))$ applicando il Principio d'induzione (§ 1 del Capitolo 1) sul grado m di $f(t)$.

Se $m = 0$, allora $f(t) = a_0$ e $g(t) = b_0 \neq 0$, basta allora porre $q(t) = a_0 b_0^{-1}$, $r(t) = \mathbf{0}$. Se $m = 1$, allora $f(t) = a_1 t + a_0$. Se $g(t) = b_0 \neq 0$ (risp. $g(t) = b_1 t + b_0$, con $b_1 \neq 0$) basta scegliere $q(t) = a_1 b_0^{-1} t + a_0 b_0^{-1}$, $r(t) = \mathbf{0}$ (risp. $q(t) = a_1 b_1^{-1}$, $r(t) = a_0 - a_1 b_0 b_1^{-1}$).

Supponiamo ora provata l'esistenza della coppia $(q(t), r(t))$ per tutti i gradi $k < m$. Il coefficiente di t^m nel polinomio

$$p(t) = f(t) - (a_m t^{m-n})(b_n^{-1} \cdot g(t))$$

è $a_m - a_m b_n^{-1} b_n = 0$; quindi $\text{gr}(p(t)) < m$. Per l'ipotesi induttiva, si ha dunque:

$$p(t) = g(t) \cdot s(t) + r(t), \quad \text{con } \text{gr}(r(t)) < n.$$

Posto $q(t) = s(t) + a_m b_n^{-1} t^{m-n}$, si ha allora:

$$\begin{aligned} f(t) &= p(t) + (a_m b_n^{-1} t^{m-n})g(t) = \\ &= g(t) \cdot s(t) + r(t) + (a_m b_n^{-1} t^{m-n})g(t) = \\ &= g(t)(s(t) + a_m b_n^{-1} t^{m-n}) + r(t) = \\ &= g(t) \cdot q(t) + r(t), \quad \text{con } \text{gr}(r(t)) < n, \end{aligned}$$

come richiesto.

Unicità. Supponiamo

$$f(t) = g(t) \cdot q(t) + r(t) = g(t) \cdot q'(t) + r'(t),$$

con $\text{gr}(r(t))$, $\text{gr}(r'(t)) < \text{gr}(g(t))$. Si ha allora:

$$g(t)(q(t) - q'(t)) = r'(t) - r(t), \quad \text{con } \text{gr}(r'(t) - r(t)) < \text{gr}(g(t)).$$

Per la Proposizione 2.21 (c), ciò implica $q(t) - q'(t) = \mathbf{0}$.

Quindi $q(t) = q'(t)$, $r(t) = r'(t)$.

□

Con le notazioni del precedente Teorema, i polinomi $q(t)$ e $r(t)$ sono rispettivamente detti *quoziente* e *resto* della divisione di $f(t)$ per $g(t)$.

Esempio A.1. Il seguente schema:

$$\begin{array}{r|l}
 3t^4 - 2t^3 - t^2 + t - 3 & t^2 - t + 2 \\
 \hline
 -(3t^4 - 3t^3 + 6t^2) & 3t^2 + t - 6 \\
 \hline
 \parallel & t^3 - 7t^2 + t - 3 \\
 & -(t^3 - t^2 + 2t) \\
 \hline
 \parallel & -6t^2 - t - 3 \\
 & -(-6t^2 + 6t - 12) \\
 \hline
 \parallel & -7t + 9
 \end{array}$$

illustra l'algoritmo euclideo per la determinazione del quoziente $q(t) = 3t^2 + t - 6$ e del resto $r(t) = -7t + 9$ della divisione di $f(t) = 3t^4 - 2t^3 - t^2 + t - 3$ per $g(t) = t^2 - t + 2$. Si noti la completa analogia con l'algoritmo euclideo per il calcolo del quoziente e del resto della divisione in \mathbb{N} tra due numeri naturali.

◆ **Definizione A.2.** Se $f(t), g(t) \in \mathbb{K}[t]$, con $g(t) \neq \mathbf{0}$, si dice che $f(t)$ è *divisibile* per $g(t)$ se il resto della divisione di $f(t)$ per $g(t)$ è il polinomio nullo $\mathbf{0}$.

Si dice anche, in tal caso, che $f(t)$ è un *multiplo* di $g(t)$ o che $g(t)$ è un *divisore* di $f(t)$.

Ad esempio, i polinomi $t - 1$, $(t - 1)^2$, $t^2 + 2t + 3$, $(t - 1)(t^2 + 2t + 3) \in \mathbb{R}[t]$ sono tutti divisori del polinomio $t^4 - 4t + 3 \in \mathbb{R}[t]$. Si ha infatti:

$$t^4 - 4t + 3 = (t - 1)(t - 1)(t^2 + 2t + 3).$$

► **Osservazione A.3.** Ogni polinomio $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ è divisibile per se stesso e per ogni polinomio di grado zero (cioè per ogni elemento non nullo di \mathbb{K}); inoltre, se $f(t)$ è divisibile per $g(t) \neq \mathbf{0}$, allora, per ogni $a \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$, $f(t)$ è divisibile per $a \cdot g(t)$. Per tale motivo, per ogni $a \in \mathbb{K}^*$, i polinomi a , $a \cdot f(t) \in \mathbb{K}[t]$ sono detti *divisori banali* di $f(t)$.

◆ **Definizione A.4.** Un polinomio $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ di grado $n \geq 1$ si dice *irriducibile* (su \mathbb{K}) se è privo di divisori non banali.

In altre parole, $f(t) \in \mathbb{K}[t]$, con $\text{gr}(f(t)) \geq 1$, è irriducibile se $f(t) = g_1(t) \cdot g_2(t)$ implica $\text{gr}(g_1(t)) = 0$ oppure $\text{gr}(g_2(t)) = 0$.

Si osservi che *i polinomi di primo grado sono tutti irriducibili*.

Ad esempio, il polinomio

$$t^4 - 4t + 3 = (t - 1)^2(t^2 + 2t + 3) \in \mathbb{R}[t]$$

non è irriducibile.

Invece, come si proverà in seguito (Corollario A.16), $t^2 + 2t + 3 \in \mathbb{R}[t]$ è un polinomio di secondo grado irriducibile (su \mathbb{R}).

◆ **Definizione A.5.** Si dice *radice* o *zero* del polinomio $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ ogni elemento $\alpha \in \mathbb{K}$, tale che

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

La scrittura

$$(A.1) \quad a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 = 0$$

viene detta *equazione algebrica* associata a $p(t)$; il grado e i coefficienti di $p(t)$ sono anche detti grado e coefficienti dell'equazione algebrica associata.

Si usa anche dire che $\alpha \in \mathbb{K}$ è una radice di $p(t)$ se e solo se, sostituita alla indeterminata t , “soddisfa” l'equazione (A.1).

► **Osservazione A.6.** Ogni polinomio di grado 0 non ammette radici, mentre ogni elemento di \mathbb{K} è radice del polinomio nullo.

Ogni polinomio di primo grado $p(t) = a_1 t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$ ammette come unica radice $\alpha = -a_1^{-1} a_0$. Quest'ultimo risultato, di immediata verifica, è una riformulazione dell'Osservazione 6.17, una volta rilevato che le equazioni algebriche di primo grado coincidono con le equazioni lineari in un'unica incognita (Definizione 6.1).

■ **Proposizione A.7. (Teorema di Ruffini¹)** Un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ è radice del polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ se e solo se $p(t)$ è divisibile per $(t - \alpha)$.

Dimostrazione. Per il Teorema A.1, esiste una e una sola coppia $(q(t), r(t)) \in \mathbb{K}[t] \times \mathbb{K}[t]$ tale che:

$$p(t) = (t - \alpha)q(t) + r(t), \quad \text{con } \text{gr}(r(t)) < 1.$$

Pertanto, il polinomio $r(t)$ è identificabile con un elemento $r \in \mathbb{K}$ (Osservazione 2.19); si può quindi scrivere:

$$p(t) = (t - \alpha)q(t) + r.$$

Supponiamo ora che α sia una radice di $p(t)$. Si ha allora

$$0 = p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r = 0 \cdot q(\alpha) + r = r$$

¹Paolo Ruffini: matematico e medico italiano (Valentano di Roma, 1765 - Modena, 1822).

e quindi $p(t) = (t - \alpha)q(t)$. Ciò prova che $p(t)$ è divisibile per $(t - \alpha)$.

Viceversa, se $p(t)$ è divisibile per $(t - \alpha)$, si ha $r = 0$ e quindi $p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0 \cdot q(\alpha) = 0$.

□

Si osservi che dal Teorema di Ruffini segue subito che *un polinomio irriducibile di grado $n > 1$ non ammette radici*.

◆ **Definizione A.8.** Un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ si dice *radice di molteplicità $s \in \mathbb{N}$* del polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ se

$$p(t) = (t - \alpha)^s \cdot q(t), \quad \text{con } q(\alpha) \neq 0.$$

Se $s = 1, 2, 3$, si dice rispettivamente che α è *radice semplice, doppia, tripla* di $p(t)$; se $s > 1$, si parla, genericamente, di *radice multipla*.

Si osservi che, tenuto conto del Teorema di Ruffini, α è *radice di molteplicità s* di $p(t)$ se e solo se $p(t)$ è divisibile per $(t - \alpha)^s$, ma non per $(t - \alpha)^{s+1}$.

Ad esempio, l'unità 1 di \mathbb{R} è radice del polinomio $p(t) = t^4 - 4t + 3 \in \mathbb{R}[t]$; infatti si ha:

$$p(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0.$$

D'altra parte, il risultato è conseguenza diretta del Teorema di Ruffini, avendosi, come già rilevato:

$$p(t) = (t - 1)^2(t^2 + 2t + 3).$$

Poichè, posto $q(t) = t^2 + 2t + 3 \in \mathbb{R}[t]$, si ha:

$$q(1) = 1 + 2 + 3 = 6 \neq 0,$$

tale uguaglianza prova inoltre che 1 è radice doppia del polinomio $p(t)$.

► **Osservazione A.9.** Se σ denota la somma delle molteplicità delle radici di un polinomio $p(t)$ di grado $n \geq 0$, si ha $\sigma \leq n$.

Infatti in caso contrario, per il Teorema di Ruffini, $p(t)$ sarebbe prodotto di almeno $\sigma > n$ polinomi di primo grado e quindi avrebbe grado maggiore di n .

◆ **Definizione A.10.** Un campo si dice *algebricamente chiuso* se ogni polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ di grado $n > 0$ ammette almeno una radice.

► **Osservazione A.11.** Dal Teorema di Ruffini segue subito che *gli unici polinomi irriducibili su un campo algebricamente chiuso sono i polinomi di primo grado*.

■ **Teorema A.12.** Sia \mathbb{K} algebricamente chiuso. Se $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ ha grado $n > 0$, allora la somma σ delle molteplicità delle radici di $p(t)$ è n .
Pertanto, $p(t)$ è prodotto di n polinomi di primo grado.

Dimostrazione. Applichiamo il Principio d'induzione sul grado n di $p(t)$.

Se $n = 1$, il risultato è evidente.

Supponiamo il Teorema dimostrato per tutti i polinomi di grado $< n$. Poichè \mathbb{K} è algebricamente chiuso, $p(t)$ ammette almeno una radice $\alpha \in \mathbb{K}$ e quindi, per il Teorema di Ruffini, si ha:

$$p(t) = (t - \alpha) \cdot q(t), \quad \text{con } \text{gr}(q(t)) = n - 1.$$

Poichè, per l'ipotesi induttiva, la somma delle molteplicità delle radici di $q(t)$ è $n - 1$, si ha allora:

$$\sigma = 1 + (n - 1) = n.$$

□

2. Equazioni algebriche a coefficienti reali o complessi

Nel presente paragrafo, riguardante i polinomi a coefficienti nel campo \mathbb{R} dei numeri reali o nel campo \mathbb{C} dei numeri complessi (Esempi 2.3, 2.3 bis, 2.8), \mathbb{R} sarà sempre identificato con il sottocampo $\tilde{\mathbb{R}} = \{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid b = 0\}$ di \mathbb{C} .

Si ricordi (Esempio 5.4) che l'applicazione coniugio, che associa a ogni numero complesso $z = a + ib$ il suo coniugato $\bar{z} = a - ib$, è un isomorfismo del campo \mathbb{C} in sé e si osservi che \mathbb{R} (o, più propriamente, $\tilde{\mathbb{R}}$) è il sottocampo di \mathbb{C} costituito dagli elementi z autoconiugati, cioè tali che $\bar{z} = z$.

► **Osservazione A.13.** Sia $p(t) = at^2 + bt + c$ un polinomio di secondo grado a coefficienti in \mathbb{R} e sia $\Delta = b^2 - 4ac$ il suo discriminante. È noto che:

- (i) se $\Delta > 0$, allora $p(t)$ ammette le due radici reali distinte $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- (ii) se $\Delta = 0$, allora $p(t)$ ammette la radice reale $-\frac{b}{2a}$;
- (iii) se $\Delta < 0$, allora $p(t)$ non ammette radici reali; tuttavia, pensato $p(t)$ come polinomio a coefficienti in \mathbb{C} , esso ammette le due radici complesse coniugate $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Il caso (iii) prova che il campo \mathbb{R} dei numeri reali non è algebricamente chiuso.

È possibile dimostrare invece (si veda, ad esempio: S. Mac Lane, G. Birkhoff, *Algebra*, Mursia, Milano 1975) il seguente importante risultato:

■ **Proposizione A.14. (Teorema fondamentale dell'algebra)** Il campo \mathbb{C} dei numeri complessi è algebricamente chiuso².

Valgono quindi, per il campo \mathbb{C} , l'Osservazione A.11 e il Teorema A.12.

■ **Teorema A.15.** Se $z \in \mathbb{C}$ è radice del polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t] \subseteq \mathbb{C}[t]$, allora anche il coniugato $\bar{z} \in \mathbb{C}$ di z è radice di $p(t)$.

²Più precisamente, \mathbb{C} è il più piccolo campo algebricamente chiuso contenente \mathbb{R} quale sottocampo. Si usa esprimere tale proprietà dicendo che \mathbb{C} è la chiusura algebrica di \mathbb{R} .

Dimostrazione. Essendo z radice di $p(t)$, si ha $p(z) = 0$ e quindi anche $\overline{p(z)} = 0$. Posto

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0,$$

per ogni $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ha $a_i \in \mathbb{R}$ e dunque $\bar{a}_i = a_i$. Dal momento che il coniugio è un isomorfismo del campo \mathbb{C} in sé, si ha allora:

$$0 = \overline{p(z)} = \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = \bar{a}_n \bar{z}^n + \cdots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 = a_n \bar{z}^n + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = p(\bar{z}).$$

Ciò prova che anche \bar{z} è radice di $p(t)$. □

■ **Corollario A.16.** *Gli unici polinomi irriducibili di $\mathbb{R}[t]$ sono i polinomi di primo grado e i polinomi di secondo grado aventi discriminante negativo.*

Pertanto, se $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha grado $n > 0$, allora:

- (a) *$p(t)$ è prodotto di polinomi di primo grado e/o polinomi di secondo grado aventi discriminante negativo;*
- (b) *se n è dispari, $p(t)$ ammette almeno una radice reale.*

Dimostrazione. Se $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ è irriducibile e ha grado $n > 1$, allora $f(t)$ non ammette radici reali.

Per il Teorema fondamentale dell'algebra, $f(t)$ ammette almeno una radice complessa $z = a + ib$, con $b \neq 0$, e quindi, per il Teorema A.15, anche la radice $\bar{z} = a - ib$. Pertanto, $f(t)$ è divisibile per il polinomio di secondo grado

$$g(t) = (t - z)(t - \bar{z}) = (t - a - ib)(t - a + ib) = t^2 - 2at + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[t],$$

avente discriminante $\Delta = -4b^2 < 0$.

Si ha quindi, essendo $f(t)$ irriducibile:

$$f(t) = c \cdot g(t), \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Ciò prova la prima parte dell'enunciato, di cui le affermazioni (a) (b) sono immediata conseguenza. □

Ad esempio, poiché il discriminante del polinomio $q(t) = t^2 + 2t + 3 \in \mathbb{R}[t]$ è $\Delta = -8 < 0$, dal Corollario A.16 segue che $q(t)$ è irriducibile (su \mathbb{R}). Invece, pensato $q(t)$ come polinomio a coefficienti in \mathbb{C} , si ottiene, per l'Osservazione A.13 (iii), che $q(t)$ ammette le radici complesse coniugate $-1 \pm i\sqrt{2}$.

Si ha pertanto che il polinomio $q(t)$ è "scomponibile" in $\mathbb{C}[t]$ nel seguente prodotto di polinomi di primo grado:

$$q(t) = (t + 1 - i\sqrt{2})(t + 1 + i\sqrt{2}).$$

Dato un polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$, $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, con $a_0 \neq 0$, si assegni a ogni eventuale coefficiente nullo un segno + o - in modo arbitrario. Ogni coppia di

coefficienti consecutivi (a_i, a_{i+1}) si chiamerà *permanenza* (risp. *variazione*) se i due coefficienti hanno lo stesso segno (risp. segno opposto).

■ **Teorema A.17. (Teorema di Harriot³-Cartesio)** *Il numero di permanenze (risp. variazioni) del polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ supera di un numero pari, positivo o nullo la somma delle molteplicità delle radici negative (risp. positive) di $p(t)$.*

Ad esempio, il polinomio

$$p(t) = 3\sqrt{2} - 3t - \sqrt{2}t^2 + t^3 \in \mathbb{R}[t],$$

avendo successione dei coefficienti $(3\sqrt{2}, -3, -\sqrt{2}, 1)$, ha 2 variazioni e una permanenza; quindi, avrà sicuramente una radice negativa e zero o due radici positive.

Per il polinomio

$$q(t) = -6 - t^2 + t^4 \in \mathbb{R}[t],$$

la successione di coefficienti può essere considerata $(-6, +0, -1, +0, +1)$ (avendo assegnato arbitrariamente segno $+$ a entrambi i coefficienti nulli), che presenta tre variazioni e una permanenza; quindi, $q(t)$ ammette una radice negativa e una o tre radici positive. Si noti che, per quanto riguarda il polinomio $q(t)$, una diversa assegnazione dei segni ai coefficienti nulli avrebbe cambiato il conteggio. Ad esempio, considerando la successione $(-6, -0, -1, +0, +1)$, otterremmo tre permanenze e una variazione, facendoci prevedere una radice positiva e una o tre radici negative. Dal confronto con la deduzione precedente possiamo ricavare che sicuramente $q(t)$ ammette esattamente una radice positiva e una radice negativa, mentre le altre due (contate una volta come negative e una volta come positive) sono in realtà complesse coniugate.

► **Osservazione A.18.** Il problema della determinazione di procedimenti generali per trovare tutte le radici di un qualsiasi polinomio di grado n a coefficienti in \mathbb{R} (o in \mathbb{C}), facendo uso unicamente delle operazioni elementari e della estrazione di radice (noto come problema della *risolubilità per radicali* di una equazione algebrica), ha influenzato, per molti secoli, lo sviluppo delle ricerche di “algebra”.

Mentre la formula risolutiva per le equazioni algebriche di secondo grado è sicuramente nota ai matematici dell’antica Grecia, solo intorno al 1500 sono state trovate formule generali di risoluzione “per radicali” di equazioni algebriche di grado tre (formule di Tartaglia⁴-Cardano⁵) e quattro (formule di Ferrari⁶).

Il problema fu poi completamente risolto, sia pure in senso negativo, nella prima metà del secolo scorso, grazie all’opera di Ruffini, Abel e Galois⁷, che provarono l’impossibilità di determinare procedimenti generali di risoluzione “per radicali” delle equazioni algebriche di grado ≥ 5 (a coefficienti in \mathbb{R} o in \mathbb{C}).

Il problema della effettiva ricerca delle radici di un polinomio di grado n si presenta quindi, in generale, di non semplice soluzione.

³Thomas Harriot: astronomo, etnografo e matematico inglese (Oxford, 1560-1621).

⁴Niccolò Fontana, detto Tartaglia: matematico italiano (Brescia, 1499 circa - Venezia, 1557).

⁵Gerolamo Cardano: matematico, medico e filosofo italiano (Pavia, 1501 - Roma, 1576).

⁶Lodovico Ferrari: matematico italiano (Bologna, 1522-1565).

⁷Evariste Galois: matematico francese (Bourg-La-Reine, 1811 - Parigi, 1832).

Il seguente risultato permette di determinare le eventuali radici razionali di un polinomio a coefficienti interi.

■ **Teorema A.19.** *Sia $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$. Le eventuali radici razionali di $f(t)$ sono della forma $\frac{p}{q}$, dove p è un intero divisore di a_0 e q è un intero divisore di a_n .*

Ad esempio, se

$$f(t) = 15 - 2t - 61t^2 + 8t^3 + 4t^4,$$

le eventuali radici razionali di $f(t)$ appartengono alla lista:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm 5, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{4}, \pm 15, \pm \frac{15}{2}, \pm \frac{15}{4}.$$

Una verifica diretta permette di affermare che, tra questi "candidati", sono radici $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $+3$ e -5 ; essendo tante quanto il grado di $f(t)$, queste sono dunque tutte (e sole) le radici di $f(t)$.

Se invece

$$g(t) = 6 - 9t - 8t^2 + 3t^3 + 2t^4,$$

le eventuali radici razionali di $g(t)$ appartengono alla lista:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 6.$$

Una verifica diretta permette di affermare che, tra questi "candidati", sono radici solo $+\frac{1}{2}$ e -2 ; tramite il Teorema di Ruffini (Proposizione A.7) si ottiene poi

$$g(t) = (t - \frac{1}{2})(t + 2)(2t^2 - 6),$$

da cui si ricavano le ulteriori radici (irrazionali reali): $\pm\sqrt{3}$.

APPENDICE B

Forme bilineari e quadratiche

1. Matrici simmetriche

Nel presente paragrafo, \mathbf{V}^n indicherà sempre uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n ; il simbolo $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ denoterà invece l'insieme delle matrici simmetriche reali sul campo \mathbb{R} dei numeri reali.

■ **Teorema B.1.** *Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale e sia $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ l'operatore lineare¹ associato ad A rispetto a una base ordinata ortonormale \mathcal{B} di \mathbf{V}^n . Allora, T ammette una base spettrale ortonormale.*

► **Osservazione B.2.** Il Teorema B.1 è equivalente al Teorema 7.19 di diagonalizzazione delle matrici simmetriche per similitudine, mediante una matrice ortogonale. Infatti $\tilde{\mathcal{B}}$ è una base spettrale per T se e solo se $M_{\tilde{\mathcal{B}}}(T) = \Lambda$ è diagonale (Osservazione 7.15). Pertanto $\tilde{\mathcal{B}}$ è una base spettrale ortonormale se e solo se esiste una matrice ortogonale $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, cambiamento di base da $\tilde{\mathcal{B}}$ a \mathcal{B} , tale che

$$E^{-1} \cdot A \cdot E = {}^t E \cdot A \cdot E = \Lambda.$$

Dimostrazione del Teorema B.1.

Passo I - Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ gli “autovalori complessi” di A (o di T), ovvero le radici (complesse) del polinomio caratteristico $\Delta_A(t) = \Delta_T(t) = t \cdot I_n - A$. Mostriamo innanzitutto che gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ sono reali.

Per ogni $i = 1, \dots, h$, se \mathbf{u}_i è un autovettore non nullo relativo all'autovalore λ_i e (u_i) è la colonna delle sue componenti rispetto alla base ortonormale fissata \mathcal{B} , vale ovviamente la relazione: (1) $A(u_i) = \lambda_i(u_i)$.

Applicando il coniugio² a entrambi i membri della relazione (1) (e osservando che $\bar{A} = A$, poiché $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$), si ottiene: (2) $A(\bar{u}_i) = \bar{\lambda}_i(\bar{u}_i)$.

Moltiplicando a sinistra la (1) per ${}^t(\bar{u}_i)$ e la (2) per ${}^t(u_i)$, si ottengono poi le relazioni:

¹Si noti che se un operatore $T : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ ammette come matrice associata, rispetto a una fissata base (ordinata) ortonormale, una matrice simmetrica A , allora ogni matrice associata a T rispetto a una base ortonormale risulta simmetrica: infatti, se $A' = E^{-1}AE = {}^tEAE$, con $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ e $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, allora ${}^tA' = {}^t({}^tEAE) = {}^tE{}^tAE = {}^tEAE = A'$. Gli operatori associati - rispetto a basi ortonormali - a matrici simmetriche vengono usualmente detti *operatori simmetrici*, e sono caratterizzati dalla seguente proprietà:

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{v}) \rangle, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^n.$$

² $\bar{\alpha}$ denota il complesso coniugato del numero complesso α , mentre \bar{A} indica la matrice coniugata di A , ovvero la matrice avente per elementi i coniugati degli elementi di A .

$$(1') \quad {}^t(\bar{u}_i)A(u_i) = \lambda_i {}^t(\bar{u}_i)(u_i); \quad (2') \quad {}^t(u_i)A(\bar{u}_i) = \bar{\lambda}_i {}^t(u_i)(\bar{u}_i).$$

Trasponendo (1') si ottiene la relazione (1'') ${}^t(u_i)A(\bar{u}_i) = \lambda_i {}^t(u_i)(\bar{u}_i)$; infine, sottraendo membro a membro le relazioni (1'') e (2'), si ottiene $(\lambda_i - \bar{\lambda}_i) \cdot {}^t(u_i)(\bar{u}_i) = 0$. Poichè ${}^t(u_i)(\bar{u}_i)$ è sicuramente non nullo (essendo $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$), ne consegue $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, ovvero $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Passo II - Mostriamo ora, per induzione sulla dimensione n dello spazio vettoriale \mathbf{V}^n (ovvero sull'ordine della matrice A), che T ammette una base spettrale ortonormale. Se $n = 1$, il risultato è banalmente vero. Supponiamo quindi che il Teorema sia vero per ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione $k-1$ e dimostriamolo per ogni spazio vettoriale di dimensione k ($k \geq 2$). A tale scopo, sia λ_1 un autovalore (reale) di T e \mathbf{u}_1 un autovettore non nullo di \mathbf{U}_{λ_1} . Si completi ora \mathbf{u}_1 a una base $\bar{\mathcal{B}}' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k)$ di \mathbf{V}^k ; il procedimento di Gram-Schmidt (Proposizione 8.15) applicato a $\bar{\mathcal{B}}'$ produce una base ortonormale $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k)$, in cui $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}$ è ancora un autovettore di \mathbf{U}_{λ_1} . Il sottospazio ${}^\perp\{\mathbf{e}_1\} = \mathbf{L}(\mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k)$ ha dimensione $k-1$; inoltre, l'operatore T si può restringere a tale sottospazio e la matrice associata è ancora simmetrica (si veda la nota 1). Per l'ipotesi induttiva, esiste quindi una base spettrale ortonormale $(\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ di ${}^\perp\{\mathbf{e}_1\}$ (relativa alla restrizione di T). La k -pla $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ è dunque una base spettrale ortonormale di \mathbf{V}^k (relativa all'operatore T). □

2. Forme bilineari, quadratiche e matrici simmetriche associate

Nel seguito, \mathbf{V} (risp. \mathbf{V}^n) indicherà uno spazio vettoriale (risp. uno spazio vettoriale di dimensione n) sul campo \mathbb{R} dei numeri reali.³

◆ **Definizione B.3.** Una applicazione $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *forma bilineare su \mathbf{V}* se, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}); \\ \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}); \\ \varphi(\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \varphi(\mathbf{v}, \lambda \mathbf{w}) = \lambda \cdot \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Una forma bilineare φ è detta *simmetrica* se, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

Si osservi che a ogni forma bilineare φ si può associare una forma bilineare simmetrica φ_s , ponendo, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \varphi_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}))$.

◆ **Definizione B.4.** Una applicazione $q : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *forma quadratica su \mathbf{V}* se esiste una forma bilineare simmetrica $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, si abbia:

$$q(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

■ **Proposizione B.5.** Una applicazione $q : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma quadratica se e solo se:

³La maggior parte delle considerazioni valgono anche in un qualunque campo \mathbb{K} di caratteristica $\neq 2$ (si veda la Definizione 2.8).

- (i) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad q(\lambda \mathbf{v}) = \lambda^2 \cdot q(\mathbf{v});$
(ii) *l'applicazione ϕ definita ponendo, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$,*

$$\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v}))$$

è una forma bilineare (simmetrica).

Dimostrazione. Se q soddisfa le condizioni (i) e (ii), allora $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{v} + \mathbf{v}) - q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{v})) = \frac{1}{2}(q(2\mathbf{v}) - 2q(\mathbf{v})) = \frac{1}{2}(4q(\mathbf{v}) - 2q(\mathbf{v})) = q(\mathbf{v})$. Quindi q è una forma quadratica.

Viceversa, se q è una forma quadratica, allora $q(\lambda \mathbf{v}) = \varphi(\lambda \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v}) = \lambda^2 \cdot \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda^2 q(\mathbf{v})$; inoltre, $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v})) = \frac{1}{2}(\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u})) = \varphi_s(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. La proposizione è così dimostrata. \square

La forma bilineare simmetrica ϕ e la forma quadratica q si diranno *associate*. Diremo anche che ϕ è la *forma polare* di q .

Sia ora $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ una base di \mathbf{V}^n . Data una forma quadratica $q : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (e la sua forma polare $\phi : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$), indicheremo con $Q_{\mathcal{B}}(q)$ (o con $Q_{\mathcal{B}}(\phi)$) la matrice simmetrica $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ in cui

$$a_{ij} = \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j);$$

A è anche detta *matrice di Gram* della forma quadratica q o della forma bilineare ϕ . Si osservi che se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ e se (x) , (y) indicano rispettivamente le colonne delle componenti di \mathbf{u} e \mathbf{v} rispetto alla base \mathcal{B} , allora si ha:

$$\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^t(y)A(x) = {}^t(x)A(y); \quad q(\mathbf{u}) = {}^t(x)A(x).$$

Ad esempio, se $n = 2$ e $Q_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, allora:

$$\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_2;$$

$$q(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1 x_2 + 3x_2^2.$$

3. Congruenza di matrici simmetriche

◆ **Definizione B.6.** Due matrici simmetriche $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sono dette *congruenti* se esiste una matrice regolare $E \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$$A' = {}^t E A E.$$

Si noti che la congruenza è una relazione di equivalenza su $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

■ **Proposizione B.7.** $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sono congruenti se e solo se esistono una forma quadratica $q : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di \mathbf{V}^n , tali che $A = Q_{\mathcal{B}}(q)$, $A' = Q_{\mathcal{B}'}(q)$.

Dimostrazione. Sia $q : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica e siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi ordinate di \mathbf{V}^n , tali che $A = Q_{\mathcal{B}}(q)$, $A' = Q_{\mathcal{B}'}(q)$. Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$, indicate con (x) e (x') le colonne delle componenti di \mathbf{v} rispetto a \mathcal{B} e \mathcal{B}' , si ha:

$$q(\mathbf{v}) = {}^t(x) \cdot A \cdot (x) = {}^t(x') \cdot A' \cdot (x').$$

Se $E \in GL_n(\mathbb{R})$ è la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' (Definizione 5.33), si ha inoltre:

$$(x') = E \cdot (x).$$

Si ottiene quindi

$$q(\mathbf{v}) = {}^t(x') \cdot A' \cdot (x') = {}^t(E \cdot (x)) \cdot A' \cdot (E \cdot (x)) = {}^t(x) \cdot ({}^tE \cdot A' \cdot E) \cdot (x);$$

ciò dimostra che $A = {}^tE \cdot A' \cdot E$, cioè che A e A' sono congruenti.

Il viceversa si prova in modo analogo, invertendo il procedimento. □

■ Proposizione B.8. *Matrici congruenti hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. E' sufficiente osservare che, se $F \in GL_n(\mathbb{R})$, allora $\varrho(A \cdot F) = \varrho(F \cdot A) = \varrho(A)$, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

La Proposizione B.8 consente di definire *rango* $\varrho(q)$ di una forma quadratica q il rango di una qualsiasi matrice simmetrica associata a q .

Una base $\tilde{\mathcal{B}}$ di \mathbf{V}^n è detta *diagonalizzante* per la forma quadratica $q : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se la matrice $Q_{\tilde{\mathcal{B}}}(q)$ è diagonale.

Una matrice simmetrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ è detta *diagonalizzabile per congruenza* se è congruente a una matrice diagonale.

Evidentemente, q ammette una base diagonalizzante se e solo se $A = Q_{\mathcal{B}}(q)$ è diagonalizzabile per congruenza.

■ Teorema B.9. *Ogni matrice simmetrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per congruenza.*

Dimostrazione. Per il Teorema B.1, per ogni matrice simmetrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ esiste una matrice ortogonale $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tale che $E^{-1} \cdot A \cdot E = {}^tE \cdot A \cdot E$ è diagonale. Pertanto, lo stesso teorema dimostra contemporaneamente che A è diagonalizzabile per congruenza. □

► **Osservazione B.10.** Se \mathbf{V}^n è uno spazio vettoriale euclideo, lo stesso Teorema B.1 assicura che q ammette una base diagonalizzante ortonormale. Infatti, se \mathcal{B} è una base ortonormale di \mathbf{V}^n e $A = Q_{\mathcal{B}}(q)$, il Teorema B.1 assicura l'esistenza di una matrice ortogonale E , per cui ${}^tE \cdot A \cdot E = \Lambda$ è diagonale. La base $\tilde{\mathcal{B}}$ tale che $Q_{\tilde{\mathcal{B}}}(q) = \Lambda$ è la base ortonormale diagonalizzante cercata.

4. Forme canoniche

Data una matrice simmetrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, si dice *indice (di positività)* $\sigma_+(A)$ di A la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori positivi di A . Si dice invece *sigla o indice di negatività* $\sigma_-(A)$ di A la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori negativi di A . Evidentemente, $\sigma_+(A) + \sigma_-(A) = \varrho(A)$.

La coppia $\sigma(A) = (\sigma_+(A), \sigma_-(A))$ è detta *segnatura* di A .⁴

■ **Teorema B.11.** *Se $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ha segnatura (p, q) , allora A è congruente alla matrice diagonale*

$$D_{p,q} = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p-q}).$$

Dimostrazione. Per il Teorema B.1, esiste una matrice ortogonale $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tale che ${}^t E \cdot A \cdot E = \Lambda$ è diagonale, e Λ ha sulla diagonale gli autovalori di A , ciascuno contato con la sua molteplicità (algebrica e geometrica). La matrice Λ sarà quindi del tipo $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}, 0, \dots, 0)$, con $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq p$, e $\lambda_j < 0$, $p+1 \leq j \leq p+q$.

La matrice $F = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{p+q}|}}, 1, \dots, 1)$ è regolare e si ha

$${}^t F \cdot \Lambda \cdot F = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p-q}).$$

□

Vale inoltre il seguente importante risultato:

■ **Teorema B.12. (Principio d'inerzia di Sylvester⁵)** *Due matrici simmetriche $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.*

Dimostrazione. Supponiamo che A e A' siano congruenti; allora, per la Proposizione B.8, A e A' hanno lo stesso rango ϱ .

Sia ora (p, q) (risp. (p', q')) la segnatura di A (risp. di A'), con $p + q = p' + q' = \varrho$. Sia poi $D_{p,q}$ (risp. $D_{p',q'}$) la forma diagonale di A (risp. di A') individuata nel Teorema B.11; poiché A e A' sono congruenti, anche $D_{p,q}$ e $D_{p',q'}$ sono congruenti. Esiste pertanto una forma quadratica q e due basi ordinate $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ di \mathbf{V}^n tali che $D_{p,q} = Q_{\mathcal{B}}(q)$, $D_{p',q'} = Q_{\mathcal{B}'}(q)$.

Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$, posto $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}} (x^1, \dots, x^n)$, $\mathbf{v} \equiv_{\mathcal{B}'} (y^1, \dots, y^n)$, si ha allora:

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^p (x^i)^2 - \sum_{j=1}^q (x^{p+j})^2 = \sum_{h=1}^{p'} (y^h)^2 - \sum_{k=1}^{q'} (y^{p'+k})^2.$$

⁴Si noti che la segnatura della matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ può essere calcolata direttamente dal polinomio caratteristico $\Delta_A(t)$ mediante il Teorema A.17 di Harriot-Cartesio, in virtù del fatto che tutte le radici di $\Delta_A(t)$ sono reali (si veda la dimostrazione del Teorema B.1, Passo I).

⁵James Joseph Sylvester: matematico inglese (Londra, 1814-1897).

Supponendo $p \geq p'$, si considerino i sottospazi $\mathbf{U}^p = \mathbf{L}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ e $\mathbf{W}^{n-p'} = \mathbf{L}(\mathbf{e}'_{p'+1}, \dots, \mathbf{e}'_n)$ di \mathbf{V}^n . Se $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^p \cap \mathbf{W}^{n-p'}$, allora:

$$0 \leq \sum_{i=1}^p (x^i)^2 = q(\mathbf{v}) = -\sum_{k=1}^{q'} (y^{p'+k})^2 \leq 0,$$

e quindi $x^1 = \dots = x^p = 0$.

D'altra parte, da $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^p$ segue $x^{p+1} = \dots = x^n = 0$. Si ha pertanto $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e dunque $\mathbf{U}^p \cap \mathbf{W}^{n-p'} = \{\mathbf{0}\}$.

Per la relazione di Grassmann, ricordando che si è supposto $p \geq p'$, si ha:

$$n \leq n + (p - p') = p + (n - p') = \dim(\mathbf{U}^p \oplus \mathbf{W}^{n-p'}) \leq n$$

e quindi $p = p'$.

Ciò prova che A e A' hanno la stessa segnatura.

Viceversa, se A e A' hanno la stessa segnatura (p, q) , allora A e A' hanno la medesima forma diagonale $D_{p,q}$ e pertanto sono tra loro congruenti. □

5. Forme e matrici definite

◆ **Definizione B.13.** Una forma quadratica $q : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e la sua forma polare $\phi : \mathbf{V}^n \times \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono dette:

- *definite positive* se, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$,

$$q(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad \text{e} \quad ((q(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{v} = \mathbf{0}));^6$$

- *definite negative* se, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$,

$$q(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0 \quad \text{e} \quad ((q(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{v} = \mathbf{0})).$$

Inoltre, q e ϕ sono dette *non definite* se non sono nè definite positive nè definite negative.

Una matrice simmetrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ è detta *definita positiva* (risp. *negativa*) se è associata a una forma quadratica q definita positiva (risp. negativa), relativamente a una base \mathcal{B} di \mathbf{V}^n .

Risulta evidente che q è *definita positiva* (risp. *negativa*) se e solo se la sua segnatura è $(n, 0)$ (risp. $(0, n)$). Quindi, una matrice simmetrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ è *definita positiva* (risp. *negativa*) se e solo se A è congruente alla matrice identica I_n (risp. alla matrice $-I_n$).

⁶Per definizione, il concetto di forma bilineare simmetrica definita positiva coincide con quello di prodotto scalare (si veda la Definizione 8.1).

Vale inoltre il seguente

■ **Lemma B.14.** *Una matrice simmetrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se esiste una matrice regolare $F \in GL_n(\mathbb{R})$, tale che*

$$A = {}^tF \cdot F.$$

Dimostrazione. A è definita positiva se e solo se esiste $F \in GL_n(\mathbb{R})$, tale che $A = {}^tF \cdot I_n \cdot F = {}^tF \cdot F$. □

Il seguente risultato fornisce un utile algoritmo per verificare se una matrice (e, dunque, una forma quadratica) è definita positiva o negativa.

■ **Proposizione B.15. (Criterio di Sylvester)** *Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale e, per ogni $k \in \mathbb{N}_n$, sia M_k il minore di A formato dalle prime k righe e dalle prime k colonne.⁷*

(a) A è definita positiva se e solo se,

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \det M_k > 0;$$

(b) A è definita negativa se e solo se,

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \det M_k \begin{cases} < 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ > 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

Dimostrazione. (a) Sia $q : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica associata ad A , relativamente alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di \mathbf{V}^n . Se A , e quindi q , è definita positiva, allora è definita positiva anche la forma quadratica q' , restrizione di q al sottospazio $\mathbf{L}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$. La matrice associata a q' , relativamente alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$, è M_k . Pertanto, per il Lemma B.14, $\exists F \in GL_k(\mathbb{R})$, tale che $M_k = {}^tF \cdot F$. Ne consegue che $\det M_k = \det({}^tF \cdot F) = \det({}^tF) \cdot \det F = (\det F)^2 > 0$.

Supponiamo, viceversa, che $\forall k \in \mathbb{N}_n, \det M_k > 0$. Un calcolo diretto prova che, in tal caso, A è congruente alla matrice diagonale

$$\Lambda = \text{diag}(|M_1|, |M_1| \cdot |M_2|, \dots, |M_{n-1}| \cdot |M_n|).$$

Il Principio d'inerzia di Sylvester (Teorema B.12) implica allora che $\sigma(A) = (n, 0)$, cioè che A è definita positiva. Ciò conclude la prova di (a).

(b) Basta osservare che A è definita negativa se e solo se $-A$ è definita positiva, e ricordare (a). □

⁷Il criterio rimane valido anche sostituendo al minore M_k , $\forall k \in \mathbb{N}_n$, il minore \tilde{M}_k formato dalle ultime k righe e dalle ultime k colonne di A .

Esempio B.1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ è definita positiva, in quanto

si ha:

$$\det M_1 = 5 > 0, \quad \det M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 14 > 0, \quad \det M_3 = \det A = 9 > 0.$$

La matrice $A' = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ è invece definita negativa, in quanto si ha:

$$\det M'_1 = -5 < 0, \quad \det M'_2 = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 14 > 0, \quad \det M'_3 = \det A' = -9 < 0.$$

Infine, la matrice $A'' = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ non è nè definita positiva nè definita negativa, in quanto si ha:

$$\det M''_1 = -5 < 0, \quad \det M''_2 = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16 < 0, \quad \det M''_3 = \det A'' = 21 > 0.$$

Indice analitico

- algebra di Boole, 30
- Algoritmo euclideo della divisione*, 295
- anello, 23
 - commutativo, 23
 - unitario, 23
- angolo
 - tra due piani, 219
 - tra due rette, 180
 - tra due vettori, 146
 - tra un piano e una retta, 219
- applicazione, 12
 - biiettiva, 13
 - identica, 14
 - iniettiva, 13
 - invertibile, 14
 - lineare, 81
 - suriettiva, 13
- asintoto di una conica, 250
- asse
 - di una conica, 251
 - di una quadrica, 274
- automorfismo, 81
- autospazio, 123
- autovalore, 123
- autovettore, 123
- baricentro, 186
- base, 72
 - naturale di \mathbb{K}^n , 76
 - ordinata, 75
 - ortogonale, 147
 - ortonormale, 147
 - spettrale, 131
- biiezione, 13
- cambiamento di base, 97
- campo, 23
- caratteristica di un anello (o di un campo), 24
- cardinalità di un insieme, 18
- centro
 - di una conica, 249
 - di una quadrica, 273
- chiusura lineare, 66
- circonferenza, 203
- classe di equivalenza, 15
- classe resto, 17
- codominio, 12
- coefficiente di Fourier, 157
- coefficienti direttori di una retta, 175
- combinazione lineare
 - di n -ple, 28
 - di vettori, 66
 - di matrici, 35
- complemento algebrico, 55
- complemento ortogonale, 152
- componenti di un vettore, 76
- composizione, 14
- conica
 - degenerare, 243
 - non degenerare, 243
 - non specializzata, 243
 - specializzata, 243
- connettivi logici, 7
- controimmagine, 13
- coordinate
 - cartesiane, 167
 - omogenee, 231
- coppia, 11
 - conformabile, 36
 - in inversione, 45
- Criterio di Sylvester*, 309
- determinante di Gram, 156
- determinante di una matrice quadrata, 48
- diagonale
 - principale, 38
 - secondaria, 38
- diametro di una conica, 249
- differenza tra insiemi, 10
- dimensione
 - di uno spazio euclideo, 165
 - di uno spazio vettoriale, 73

discriminante

- di una conica, 241
- di una quadrica, 264

distanza euclidea, 181

divisibilità di polinomi, 296

dominio, 12

elementi speciali, 42

ellisse, 204

ellissoide, 271

- immaginario, 282
- reale, 282

endomorfismo, 81

equazione algebrica, 297

Equazione dimensionale per le trasformazioni lineari, 86

equazione frazionaria di una retta, 194

equazioni cartesiane

- dei sottospazi euclidei, 174
- dei sottospazi vettoriali, 118

equazioni parametriche

- dei sottospazi euclidei, 175
- dei sottospazi vettoriali, 120

fascio

- di coniche, 260
- di piani, 221
- di rette, 198

forma

- bilineare, 304
- bilineare simmetrica, 304
- quadratica, 304
 - definita negativa, 308
 - definita positiva, 308

Formula di Leibniz - Cramer, 109

funzione, 12

fuoco

- di una ellisse, 204
- di una iperbole, 205
- di una parabola, 205

giacitura di uno spazio euclideo, 170

grado di un polinomio, 29

gruppo, 22

- abeliano (o commutativo), 22
- additivo, 22
- lineare, 40
- moltiplicativo, 22

gruppoide, 21

identità, 14

immagine, 12

- di una trasformazione lineare, 83
- inversa, 13

indice

- di colonna, 33

- di riga, 33

indice di una matrice simmetrica, 307

insieme

- complementare, 10
- delle parti, 9
- finito, 18
- numerabile, 18
- quoziente, 16
- soggiacente, 22

insiemi

- disgiunti, 10
- equipotenti, 18

intersezione di insiemi, 10

iperbole, 205

- equilatera, 250

iperboloide, 272

- ellittico, 282
- iperbolico, 282

iperpiano improprio, 231

isometria, 186

isomorfismo

- di gruppi (o anelli o campi), 26
- di insiemi, 13
- di spazi vettoriali, 81

Legge di annullamento del prodotto, 25

Legge di reciprocità, 247

Leggi di De Morgan, 11

mappa, 12

matrice, 33

- definita negativa, 308
- associata a una trasformazione lineare, 88
- completamente ridotta, 42
- definita positiva, 308
- delle componenti, 88
- diagonale, 38
- diagonalizzabile
 - per similitudine, 131
- identica, 38
- ortogonale, 40
- prodotto, 34
- quadrata, 33
 - triangolare alta, 39
 - triangolare bassa, 39
- regolare, 40
- ridotta (a gradini), 41
- semi-diagonale, 279
- somma, 34
- trasposta, 34
- simmetrica, 34

matrice di Gram, 156

matrici

- simili, 99
- simmetriche congruenti, 305

Metodo di Gauss, 54

- minore, 55
 - orlato, 96
 - complementare, 55
- molteplicità
 - algebrica di un autovalore, 129
 - di una radice, 298
 - geometrica di un autovalore, 129
- monomio, 28
- n-pla
 - delle componenti di un vettore, 76
 - linearmente dipendente, 69
 - linearmente indipendente, 69
- norma euclidea, 142
- nucleo di una trasformazione lineare, 83
- numero cardinale, 18
 - transfinito, 18
- omomorfismo
 - di anelli, 26
 - di gruppi, 26
- operatore lineare, 81
- operazione binaria, 19
 - interna, 19
- parabola, 205
- paraboloide, 271
 - ellittico, 282
 - iperbolico, 282
- partizione, 16
- permutazione, 13, 45
- piano diametrale di una quadrica, 273
- piano polare, 269
- piano principale di una quadrica, 274
- pivot, 42
- polinomio, 28
 - caratteristico, 126, 128
 - irriducibile, 297
 - nullo, 29
- potenza del continuo, 18
- Principio d'induzione*, 8
- Principio d'inerzia di Sylvester*, 307
- prodotto
 - cartesiano, 11
 - di applicazioni, 14
 - di uno scalare per un vettore, 61
 - misto, 163
 - naturale di n -ple, 36
 - righe per colonne, 36
 - scalare, 141
 - vettoriale, 162
- proiezione ortogonale, 157
- punti
 - affinemente indipendenti, 171
 - impropri, 231
 - propri, 231
- punto medio, 185
- quadrica, 263
 - degenerare, 266
 - di rotazione, 276
 - doppiamente rigata, 271
 - ellittica, 271
 - iperbolica, 271
 - non degenerare, 266
 - non rigata, 271
 - non specializzata, 266
 - riducibile, 266
 - specializzata, 266
- radice
 - di un polinomio, 297
 - multipla, 298
- rango, 42
 - di una quadrica, 266
 - di una conica, 242
 - di una matrice, 94
- relazione, 12, 15
 - di equivalenza, 15
 - inversa, 12
 - riflessiva, 15
 - simmetrica, 15
 - transitiva, 15
- Relazione di Grassmann*, 78
- retta polare, 246
- ricoprimento, 16
- riferimento cartesiano, 167
- rotazione, 188
- scalare, 61
- scambio di indici, 46
- segnatura di una matrice simmetrica, 307
- segno di una permutazione, 46
- sfera, 223, 287
- sigla di una matrice simmetrica, 307
- Simboli di Kronecker, 38
- simboli logici, 7
- simmetria
 - centrale, 188
 - ortogonale, 190
- simpleso, 183
- sistema
 - lineare, 103
 - minimo, 111
 - normale (o di Cramer), 109
 - omogeneo, 107
 - unione, 105
- sistema di generatori, 67
- sistemi lineari
 - equivalenti, 106
- somma
 - di sottoinsiemi, 77

- di vettori, 61
- diretta, 78
- sostegno di uno spazio vettoriale, 61
- sostituzione, 13, 45
- sottoanello, 26
- sottocampo, 26
- sottogruppo, 26
- sottoinsieme
 - linearmente chiuso, 65
 - linearmente dipendente, 69
 - linearmente indipendente, 69
- sottomatrice, 55
- sottospazi euclidei, 170
 - ortogonali, 178
 - paralleli, 172
 - sghembi, 172
- sottospazi vettoriali, 65
 - indipendenti, 78
- spazi vettoriali
 - isomorfi, 81
- spazio
 - delle soluzioni, 105
 - euclideo, 165
 - somma (o congiungente), 77
 - vettoriale, 61
 - finitamente generato, 67
 - vettoriale euclideo, 141
 - vettoriale euclideo orientato, 160
- stella
 - di piani, 223
 - di rette, 223
- struttura algebrica, 21
- supporto
 - improprio, 240
 - proprio, 240
- Sviluppo di Laplace*, 56

- Teorema del completamento a una base*, 75
- Teorema di Binet*, 53
- Teorema di Cramer*, 109
- Teorema di Harriot-Cartesio*, 301
- Teorema di Kronecker*, 96
- Teorema di Laplace*, 54
- Teorema di Rouchè - Capelli*, 106
- Teorema di Ruffini*, 297
- Teorema fondamentale dell'algebra*, 299
- Teorema fondamentale delle trasformazioni lineari*, 85
- Teorema spettrale*, 132
- trasformato, 12
- trasformazione
 - lineare, 81
 - standard, 81
 - ortogonale, 151
- trasformazioni elementari, 42
- traslazione, 108, 188
- trasposizione, 46
- unione di insiemi, 10
- versore, 142
- vertice
 - di una conica, 251
 - di una quadrica, 274
- vettore, 61
 - applicato, 62
- vettori
 - ortogonali, 145
- volume di un simpleso, 183
- zero di un polinomio, 297

Finito di stampare nel
Settembre 2016 da
L.I.P.E. Litografia Persicetana
San Giovanni in Persiceto (BO)