LEZIONE 2

$|A|$ = CARDINALITÀ DI A (numero di elementi)

SPAZIO DI PROBABILITÀ UNIFORME

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$\hookrightarrow$ 1 $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$

2 $P(A \vee B) = \frac{|A \vee B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} =$

$= P(A) + P(B)$ SE DISGIUNTI

UN EVENTO ELEMENTARE HA CARDINALITÀ $= 1$

ES: POSS DI AVERE $\{1,2\}$ NEL DADO

$$\frac{|\{1,2\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

ES: MESE DI NASCITA RANDOM

$\Omega = \{\text{jan}, \dots, \text{dec}\}$

- POSSO USARE MESI EQUIPROBABILI ...

  JAN $= 1/12$, ... , DEC $= \frac{1}{12}$

- MIGLIORO e USO I GIORNI

  jan $= 31/365$, ... , dec $= \frac{31}{365}$

- AGGIUNGO ANNI BISESTILI

CONTROLLO SE VALGONO I POSTULATI:

$\boxed{1} = P(\Omega) = 1 = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = P(gen) + \ldots + P(dec) = \frac{31}{365} + \ldots + \frac{31}{365} = 1$

$\boxed{2} = P(A \vee B) = P(A) + P(B)$ SE $A \wedge B = \emptyset$

$P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$

$P(A \vee B) = \sum_{w \in A \vee B} P(\{w\}) = \sum_{w \in A} P(\{w\}) + \sum_{w \in B} P(\{w\})$

LEGGI DI DE MORGAN

$(E \vee F)^c = E^c \wedge F^c$

$(A^c \wedge B^c) = (A \vee B)^c$

ES.

$P(A) = 1/3$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A \vee B) = 3/4$

$P(A^c \vee B^c) = ? = \frac{11}{12}$

• REGOLA ADDIZIONE

$P(A^c) + P(B^c) - \boxed{P(A^c \wedge B^c)} \rightarrow P((A \vee B)^c) = 1 - P(A \vee B) = 1 - 3/4 = 1/4$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$

SPAZIO CAMPIONARIO INFINITO

ESEMPIO: PROB. DI TROVARE 6 PER LA PRIMA VOLTA AL TERZO LANCIO

SPAZIO CAMPIONARIO:

$\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad \omega_i \in \{1, \dots, 6\}\}$ TRIPLETTE DI LANCI

$\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$

$\underbrace{\boxed{\frac{5}{6}} \cdot \boxed{\frac{5}{6}}}_{\text{SENZA 6}} \cdot \boxed{\frac{1}{6}} \rightarrow 6 \quad = \quad \frac{25}{6^3}$

IN GENERALE...

$P(\{\omega\}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{\omega - 1} \cdot \frac{1}{6}$

DEVO VERIFICARE $P(\Omega) = 1$ ✓

$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{n\}) = 1$ SU TUTTI I NATURALI ≥ 1

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \cancel{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{\cancel{\frac{1}{6}}} = \boxed{1} \checkmark$$

$k = n - 1$ (PER APPLICARE GEOMETRICA)

SPAZIO DI PROBABILITÀ DISCRETO NON NECESSARIAMENTE FINITO

DEFINIZIONE QUASI UGUALE, CONTROLLA SLIDE

(L'HO PERSA AL MOMENTO)

SPAZIO DI PROBABILITÀ NON DISCRETO

LO SPAZIO DEGLI EVENTI DEVE ESSERE UNA σ ALGEBRA SE SODDISFA

Σ = FAMIGLIA DI SOTTOINSIEMI DI Ω

Σ È UNA σ ALGEBRA SE:

1. $\Omega, \phi \in \Sigma$
2. $A \in \Sigma$ SSE $A^c \in \Sigma$ (CHIUSURA RISP. A SUCC. NUMERABILI)
3. $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ SSE $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$ (CHIUSURA RISP. ALL'UNIONE)

LEGGI DI DE-MORGAN RIVISITATE

- $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$
- $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$

COROLLARIO DI σ ALGEBRA

4. CHIUSURA RISPETTO A INTERSEZIONI

DIMOSTRABILE DALLA PROP. 2 e 3 + USANDO DE-MORGAN

ESEMPIO:

ORA DI PRIMO ARRIVO DI UNA TELEFONATA

$\Omega = [0, +\infty)$ $\qquad$ $A = [0, 5]$

$N \subseteq \Omega$

SE CONSIDERO SPAZIO EVENTI COME TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω, NON È POSSIBILE DEF. UNA FUNZ. DI PROB.

$\rightarrow$ DA QUI NASCE σ SIGMA ALGEBRA.