PER SPIEGARE GLI ALTRI COEFFICIENTI:

SO CHE • $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx = \int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \neq m$

- $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) dx = 0$
- $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) dx = 0$
- $\int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) dx = 0$

e PER $n = m$

- $\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = \frac{T}{2}$
- $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) = 0$
- $\int_0^T \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = \frac{T}{2}$

GIUSTIFICAZIONI:

DALLE FORMULE DI VERNER:

- $\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
- $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
- $\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$

APPLICAZIONI

$$\int_0^T \cos\Big(\underbrace{\frac{2\pi n x}{T}}_{\alpha}\Big)\cos\Big(\underbrace{\frac{2\pi m x}{T}}_{\beta}\Big) = \frac{1}{2}\int_0^T\left[\cos\left(\frac{2(n-m)\pi x}{T}\right) + \cos\frac{2(n+m)\pi x}{T}\right]dx \overset{\text{DAL CALCOLO DELLA PRIMITIVA}}{=} 0$$

$$\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx \overset{\text{BISEZIONE}}{=} \frac{1}{2}\int_0^T\left(1+\cos\left(\frac{4\pi n x}{T}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{T}{4n\pi}\operatorname{sen}\frac{4\pi n x}{T}\right]\Big|_{x=0}^{x=T} = \frac{T}{2}$$

DIM FORMULE DI EULERO - FOURIER

V SPAZIO VETTORIALE DI DIM. k. ES: $\mathbb{R}^k$ e $e_1, \dots, e_k$ BASE CANONICA

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases}1 \\ 0\end{cases} \quad \text{(DELTA DI KRONECKER).}$$

AVENDO $\langle v, e_i\rangle = \langle \overset{\text{COMB. LIN. DELLA BASE}}{\sum_{n=1}^k c_n e_n}, e_i\rangle = \sum_{n=1}^k c_n \underbrace{\langle e_n, e_i\rangle}_{\delta_{ni}} = \sum_{n=1}^k c_n \delta_{ni} = c_i$

NE DERIVA LA RAPPRESENTAZIONE DI UNA f IN TERMINI DI UNA BASE:

$1 \qquad \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)_{n\geq 1} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)_{n \geq 1}$ e IL PRODOTTO SCALARE È DATO DA:

$\langle f, g\rangle = \int_0^T f(x)\, g(x)\, dx$ (STESSE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{R}^k$)

MOLTIPLICHIAMO $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dots$ PER $\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)$. SAPENDO CHE ~ CONV. UNIFORMEMENTE a $f(x)$, e CONSIDERO LE SOMME PARZIALI S_n DI $f(x)$:

VALE: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,T)} |f(x) - S_n(x)| = 0$. $\longrightarrow$ IMPLICA CHE $\cos\frac{2\pi m x}{T}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\dots\right]$ CONVERGE UNIF. a $\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\cdot f(x)$

e • IMPLICA $\left|f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) - S_n(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\right| \leq \left|\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\right| \cdot |f(x) - S_n(x)| \leq |f(x) - S_n(x)| \Rightarrow \sup_{x\in[0,T)}\left|f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) - S_n(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\right|$

$\leq \sup_{x\in[0,T)} |f(x) - S_n(x)| \to 0, \ n \to \infty$. COME CONV. UNIF.

$a_m = ? \quad \to \langle f, \overbrace{\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)}^{g(x)}\rangle = \int_0^T f(x)\overbrace{\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)}^{g(x)} dx \overset{\text{POSSO SCAMBIARE } \int \text{ CON } \sum \text{ PER CONV. UNIF.}}{=} \overbrace{\int_0^T \frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx}^{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx}_{\delta_{n,m}\cdot\frac{T}{2}} + b_n \underbrace{\int_0^T \operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{T}\cos\frac{2\pi m x}{T}dx}_{=0}\Big)$

(TUTTI NULLI SE NON IN $n=m$)

E QUINDI RIMANE SOLO: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{n,m}\frac{T}{2} = a_m \frac{T}{2} \Rightarrow \boxed{a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi m x}{T}dx}$ (b_m STESSA COSA)

RIFLESSIONE SU HP DI CONV. UNIFORME:

$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,T)} |f(x) - S_n(x)| = 0$. PER ES: CON $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ $\exists h_0(\varepsilon_0)$ $\exists h > h_0$. $\sup|f(x) - S_h(x)| < 10^{-3}$. POSSIAMO "TRONCARE" LA SERIE A UNA PRECISIONE DI 10^{-3}

$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{h}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k x}{T}\right)\right) \quad h > h_0(\varepsilon_0)$ DATO CHE $\forall x \in [0,T)$ ABBIAMO $|f(x) - S_h(x)| < 10^{-3} \ \forall_{h > h_0}$

• HP: f SIA CONTINUA CHE LIMITATA in $[0, T) \Rightarrow a_n$ e b_n HANNO SENSO COME INTEGRALI DI RIEMANN. MA NON È SCONTATO CHE $f(x) \overset{*}{=} \frac{a_0}{2} + \sum \dots$

PER VERIFICARE $*$ CI SOFFERMIAMO SU ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI

- **MONOTONA A TRATTI:**

DEF: $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ f È DETTA MONOTONA A TRATTI SE $\exists$ UNA PARTIZIONE $P = \{x_0 = a, \dots x_n = b\}$ di $[a,b)$ t.c. f è MONOTONA $\forall$ INTERVALLO $[x_{i-1}, x_i)$ $i = 1, \dots, n$.
f è MONOTONA SU $\mathbb{R}$ SE LO È SU OGNI INTERVALLO $[a,b)$.

NOTA: SE f È MONOTONA A TRATTI SU $[a,b]$ e LIMITATA, ALLORA f HA SOLO PUNTI DI DISCONUITÀ DI PRIMA SPECIE, CIOÈ:

$\exists f_+(c) = \lim_{x \to c^+} f(x) \in \mathbb{R}$

$\exists f_-(c) = \lim_{x \to c^-} f(x) \in \mathbb{R}$

↳ CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONV. UNIF. DELLA SERIE DI FOURIER

TEO. FUNZ. MONOTONE e SERIE DI FOURIER (A)

HP: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ PERIODICA, PERIODO T, MONOTONA A TRATTI e LIMITATA.

TH: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$ CONVERGE PUNT. SU $\mathbb{R}$. IN PARTICOLARE CONVERGE a $f(x)$ $\forall x$ CON $f(x)$ CONTINUA, e CONVERGE a $\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2}$ $\forall x$ DOVE $f(x)$ È DISCONTINUA.

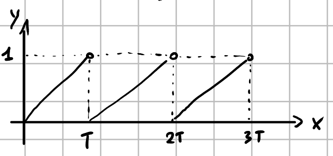
TEO. (B)

HP: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, PERIODICA, CONTINUA SU $\mathbb{R}$, DERIVABILE SU $[0,T)$ TRANNE AL PIÙ UN NUMERO FINITO DI PUNTI DI $[0,T)$ DOVE $\exists D^{\pm} f(x) = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}$.

TH: LA SERIE DI FOURIER È UNIF. CONV. a f SU $\mathbb{R}$.

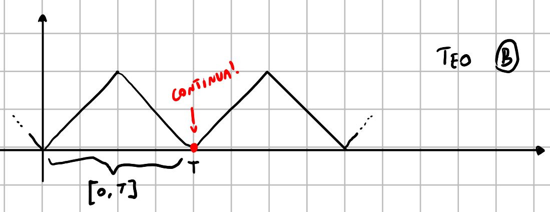
ES: TEOREMA (A) APPLICABILE

$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dots \quad \forall x \notin \mathbb{Z}$, $\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dots \quad \forall x \in \mathbb{Z}$



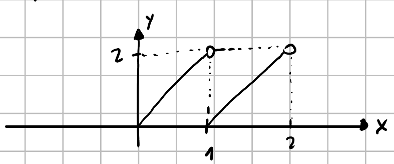
TEO (A)

- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon, x)$ t.c. $\forall n \geq n_0$ VALE CHE $|g(x) - S_n| < \varepsilon$ DOVE: $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin \mathbb{Z} \\ \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$



TEO (B)

ES: $f(x) = 2x$ NELL' INTERVALLO $[0,1)$ $\Rightarrow T = 2x$



TEO (B) NON APPLICABILE, $f(x)$ È DISCONTINUA SU $\mathbb{R}$. TUTTAVIA È MONOTONA A TRATTI e LIMITATA → TEO. A APPLICABILE

CALCOLO COEFF. FOURIER

$$a_0 = 2\int_0^1 2x \, dx = 2$$

$$a_n = 2\int_0^1 2x \cos\left(\frac{2\pi n x}{1}\right) dx \overset{\text{PER PARTI}}{=} \left(\frac{2x \operatorname{sen}(2\pi n x)}{\pi n} + \frac{\cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2}\right)_{x=0}^{x=1} = 0$$

$$b_n = 2\int_0^1 2x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{1}\right) dx \overset{\text{PER PARTI}}{=} \left(\frac{-2x\cos(2\pi n x)}{\pi n} + \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{\pi^2 n^2}\right)_{x=0}^{x=1} = \frac{-2\overbrace{\cos(2\pi n)}^{1}}{\pi n} = -\frac{2}{\pi n}$$

⇒ LA SERIE DI FOURIER ASSOCIATA a f È: $1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\operatorname{sen}(2\pi n x)\right)$. DAL TEO (A) ABBIAMO CHE $\underset{\text{PROLUNGAMENTO PERIODICO DI}}{\boxed{2x}} = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}(2\pi n x)$ $\underset{\text{PUNTI DI CONTINUITÀ}}{\forall x \notin \mathbb{Z}}$

→ $1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}(2\pi n x) = \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ (DISCONTINUITÀ)

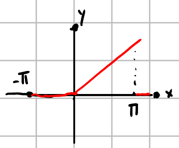
OSS: APPLICARE M-TEST DI WEIERSTRASS ALLA SERIE APPENA TROVATA:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} = M_n \quad \text{MA} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{DIVERGE.}$$

SE DENOTIAMO CON $g(x)$ IL PROLUNGAMENTO PERIODICO DI $2x$, POSSIAMO DIMOSTRARE CHE:

1- $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(2\pi n x)$ NON PUÒ CONV. UNIF. A $g(x)$, POICHÈ QUEST'ULTIMA È DISCONTINUA (MENTRE FOURIER È UNA SERIE DI f CONTINUE)

ES: SIA f IL PROLUNGAMENTO PERIODICO DELLA FUNZ $y=0$, $x \in (-\pi, 0]$ E $y = x$, $x \in (0, \pi]$



$T = 2\pi$. DISCONTINUITÀ IN $x = \underbrace{(2k+1)\pi}^{\text{DISPARI}}$, $k \in \mathbb{Z}$. MONOTONA A TRATTI E LIMITATA

① CALCOLA COEFF. DI FOURIER (E LA SERIE)
② STABILIRE PER QUALI PUNTI LA SERIE DI FOURIER CONVERGE E A CHE COSA

SOLUZ: APPLICABILE TEO. Ⓐ:

② $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \ldots \quad \forall x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ | PERIODO $T = 2\pi$

$\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \ldots \quad \forall x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

SOLITAMENTE PER TRATTARE PERIODO $= 2\pi$, DI SOLITO SI LAVORA SU $[-\pi, \pi)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \overset{\text{PER PARTI}}{=} \frac{1}{\pi}\Bigg[\underbrace{\frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}}_{n\to\infty \Rightarrow 0} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\,dx\Bigg] \to \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} \to \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi n^2}[\cos n\pi - 1] = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2}, & n \text{ DISPARI} \\ 0, & n \text{ PARI}\end{cases} \to a_n = -\frac{2}{\pi(2n-1)^2}$$

SOLO I DISPARI

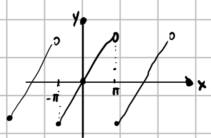
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \overset{\text{PARTI}}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}\right] = \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot -\frac{\cancel{\pi}\cos(n\pi)}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n \text{ PARI} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ DISPARI}\end{cases} \to b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

SPEZZO IN BASE A FUNZ.

$$\to a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_0^{\pi} x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{2}$$

① ⇒ SERIE DI FOURIER: $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)$

ES: f → PROLUNGAMENTO PERIODICO DI $y = x$, $x \in [-\pi, \pi)$



① CALCOLO SERIE FURRY
② STABILIRE PER QUALI PUNTI $x \in \mathbb{R}$ f CONVERGE E A COSA

SOLZ: TEO. Ⓐ APPLICABILE (PROL. DELLA FUNZ. È MONOTONA E LIMITATA)

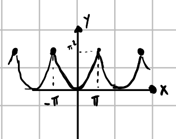
② → $\begin{cases} 0 \text{ (MEDIA)} & \forall x = (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \ldots & \forall x \neq (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z}\end{cases}$

①

- $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$
- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx \overset{\text{PER PARTI}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos(nx)}{n} + \cancel{\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}(nx)}\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{-\cancel{\pi}\overbrace{\cos(-\pi n)}^{=\cos(\pi n)}}{n} - \frac{1}{\cancel{\pi}}\frac{\cancel{\pi}\cos(n\pi)}{n} = -\frac{2}{n}\cos(nx) \begin{cases} -\frac{2}{n}, & n \text{ PARI} \\ \frac{2}{n}, & n \text{ DISPARI}\end{cases} \Rightarrow b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

SERIE: $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)$

ES: f PROLUNGAMENTO PERIODICO DI $y = x^2$, $x \in [-\pi, \pi)$, $T = 2\pi$



FUNZ. CONTINUA, ∃ DERIVATA OVUNQUE TRANNE IN $x = (2k+1)\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$D^+ f(x) = -2\pi \in \mathbb{R}$
$D^- f(x) = +2\pi \in \mathbb{R}$

TEO. B APPLICABILE

① SERIE FOURIER

② CONVERGENZA

② PER TEO. Ⓑ LA SERIE DI FOURIER CONVERGE UNIF. A f.

① • $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{2}{3}\pi^2 \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}$

$\overset{\text{PARTI}}{=} \frac{x(-\cos(nx))}{n^2}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n^2} = -\frac{x\cos(nx)}{n^2}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$

• $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx \overset{\text{PARTI}}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cancel{2}x\operatorname{sen}x}{n}dx\right] = \left(\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{n}\operatorname{sen}(nx) - 2\left[\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\pi n^3} - \frac{x\cos(nx)}{\pi n^2}\right]\right)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \left[\left(\frac{2x\cos nx}{n^2\pi}\right) + \cancel{\left(\frac{x^2}{\pi n} - \frac{2}{\pi n^3}\right)\operatorname{sen}(nx)}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}$

$= \frac{4\cancel{\pi}\cos(n\pi)}{n^2\cancel{\pi}} = \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) = (-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}$

• $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\operatorname{sen}(nx)dx \overset{\text{PARTI}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\frac{2x\operatorname{sen}nx}{n^2} - \frac{(n^2x^2-2)\cos(nx)}{n^3}\right)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$

SERIE: $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$