

TEOREMA 8:

SIA PER SEMPLICITÀ $k=2$ (ORDINE ED. DIFF.) e $q_1(x), q_0(x) \in C(I)$ $I \subseteq \mathbb{R}$, W_1 e W_2 SIANO SOLUZIONI DI $\overbrace{y'' + q_1(x)y' + q_0(x)y}^{L(y)} = 0$

ALLORA W_1 e W_2 SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SU I SE E SOLO SE:

$$\det \begin{pmatrix} W_1(x) & W_2(x) \\ W_1'(x) & W_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I$$

MATRICE WRONSKIANA

• ESEMPIO: VERIFICARE: DATE $W_1(x) = x$ e $W_2(x) = 2|x|$

• DIPENDENZA LIN. SU $I = (-\infty, 0)$

• INDIP. LIN. SU $I = (-\infty, +\infty)$

guarda file esercizi 03

• TROVARE SOLUZIONE GENERALE (TUTTE LE SOLUZIONI) DI:

$$9x^2 y'' + 12x y' - 2y = 0 \quad \text{su } I = (0, +\infty)$$

↳ L'EQ. NON È IN FORMA NORMALE ($L(y) = 0$) MA POSSIAMO RICONDURCI A ESSA DIVIDENDO PER $9x^2$

\Rightarrow SOLUZIONE GENERALE $y(x) = C_1 W_1(x) + C_2 W_2(x)$ DOVE W_1, W_2 LIN. INDIP. SU $(0, +\infty)$

- CONSIDERO DUE ED. DEL TIPO: $y(x) = x^d$ su $(0, +\infty)$ e CONSIDERO $y' = dx^{d-1}$, $y'' = d(d-1)x^{d-2}$

$$Sx^2 d(d-1)x^{d-2} + 12x dx^{d-1} - 2x^d = 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow [3d(d-1) + 12d - 2]x^d = 0 \Rightarrow 3d^2 + 9d - 2 = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{3} \text{ e } d = -\frac{2}{3}$$

CIOÈ $W_1 = x^{\frac{1}{3}}$ e $W_2 = x^{-\frac{2}{3}}$ SONO SOLUZIONI SU $(0, +\infty)$

VERIFICO LA LIN. INDIPENDENZA

$$\det \begin{pmatrix} W_1(x) & W_2(x) \\ W_1'(x) & W_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x^{\frac{1}{3}} & x^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix} = -x^{-\frac{4}{3}} \neq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

\Rightarrow W_1, W_2 LIN. INDIP. e \Rightarrow LA SOL. GENERALE È: $y(x) = C_1 x^{\frac{1}{3}} + C_2 x^{-\frac{2}{3}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

• TROVARE UNICA SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} 9x^2 y'' + 12x y' - 2y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

PARO DALLA SOL. GENERALE

UTILizzo
CONDIZ.
INIZIALI

$$\begin{cases} 1 = y(1) = C_1 W_1(1) + C_2 W_2(1) \\ 0 = y'(1) = C_1 W_1'(1) + C_2 W_2'(1) \end{cases}$$

DET $\neq 0$

$$= \begin{pmatrix} W_1(1) & W_2(1) \\ W_1'(1) & W_2'(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= W$