

• EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

▲ FORMA GENERALE:

$$E(y, y', \dots, y^{(k)}, t) = 0 \quad t \in I$$

↳ VARIABILE INDIPENDENTE

ALTRE NOTAZIONI, PER FUNZIONI DERIVATE

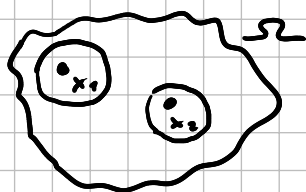
$$y' = \frac{dy}{dt} \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$$

• UNA SOLUZIONE È UNA y CHE SODDISFA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

DEFINIZIONE RIGOROSA:

SIA $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Ω "APERTO"

APERTO = $\forall x \in \Omega$, ESISTE UN DISCO CENTRATO IN x TUTTO CONTENUTO IN Ω
 $D_x \subset \Omega$



UNA $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ È SOLUZ. SE

- y È DERIVABILE SU I
- $(x, y(x)) \in \Omega$, $\forall x \in I$
- $y'(x) = f(x, y)$ $\forall x \in I$

• L'ORDINE È L'ORDINE MASSIMO DELLE DERIVATE COINVOLTE NELL'EQUAZIONE

• NON TUTTE LE EQ. DIFFERENZIALI HANNO SOLUZIONE IN GENERALE CI DOBBIAMO CHIEDERE (SULLA SOLUZIONE):

- ESISTENZA
- UNICITA'
- MOLTIPLICITA'
- SOLUZIONI ESPLICITE (CIOÈ SVOLGIMENTO & RICERCA)

• ESEMPIO NOTEVOLE: MALTHUS ($y' = ky$)

- HA SOLUZIONE $y = C \cdot e^{kt}$ (TROVATA MOLTIPL. PER e^{-kt})
- QUESTA y INGLOBA TUTTE LE SOLUZIONI POSSIBILI

► PROBLEMA DI CAUCHY

SELEZIONA UNA SOLUZIONE PARTICOLARE CON UNA CONDIZIONE INIZIALE

ES:
$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \text{EQ. DIFF.} \\ y(0) = 1 & \text{CONDIZ. INIZIALE} \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f(x, y) & (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) = y_0 & \text{NOTI} \end{cases}$$

UNA CERTA y È SOLUZIONE SE:

- $y = y(x)$ soddisfa $y' = f(x, y)$ su QUALCHE INTERVALLO
- $x_0 \in I$
- $y(x_0) = y_0$

► EQ. DIFFERENZIALE DI PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

(1) $y' = f(x, y)$ COEFF. y' SEMPRE 1

\downarrow \searrow
 VARIABILE FUNZ.
 INDIPENDENTE INCOGNITA

► TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE RIVISITATO

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{CONTINUA}$

$y(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0, \quad \forall x \in [a, b]$

È SOLUZIONE UNICA DEL PC

- DIM IMMEDIATA: $\left(\int_{x_0}^x f(t) dt + y_0 \right)' = y'(x) = f(x) \quad (\checkmark)$

$\wedge \quad y(x_0) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(t) dt}_0 + y_0 \Rightarrow y(x_0) = y_0$

- DIM UNICITÀ

SUPPONGO $\begin{cases} y_1' = f(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} y_2' = f(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$

SOTTRAGGO

$\begin{cases} (y_1 - y_2)' = f(x) - f(x) = 0 \\ (y_2 - y_1)(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases} \quad \wedge \quad M = y_1 - y_2 \Rightarrow \begin{cases} M' = 0 \\ M(x_0) = 0 \end{cases}$

CIOÈ:

$M(x) = \underline{C} \quad \begin{cases} M' = 0 & \text{solo con } f \text{ costante} \\ \text{QUINDI } \underline{C} = 0 & \forall x \in [a, b] \end{cases}$

CIOÈ $y_1 = y_2$

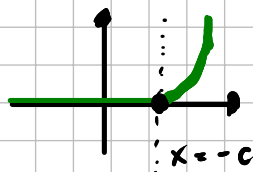
• UN PC PUO' AVERE INFINITE SOLUZIONI (ES: PEANO) $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

QUESTO HA SOLUZIONE BANALE $y = 0$

MA ANCHE $y(x) = (x+c)^3$

PEANO RISOLVE CONSIDERANDO $y(-c) = 0$ CON $c < 0$

$$y_c(x) = \begin{cases} (x+c)^3 & x > -c \\ 0 & x \leq -c \end{cases}$$



• QUESTO È UN ES DI EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = a(x)b(x), \quad b(y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

e INTEGRANDO $\int \frac{y'(x)}{b(y(x))} dx = \int a(x) dx$ e PER SOSTITUZIONE

$$\int \frac{dy}{b(y)}$$

• EQ. LINEARI DEL PRIMO ORDINE A COEFF. VARIABILI

FORMA GENERALE: $y' + p(x)y = q(x)$ $p(x), q(x) \in C(I)$

$C(I) \Rightarrow$ CLASSE DI f CONTINUE IN I

OPPURE: $y' = \underbrace{q(x) - p(x)y}_{f(x,y)}$ o $\mathcal{I}y = q(x)$ dove $\mathcal{I}y := y' + p(x)y$

• PROPRIETA' DI LINEARITA'

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, y_1, y_2$ DERIVABILI su I e $\mathcal{I}y = \mathcal{I}(y)$:

$$\mathcal{I}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{I}y_1 + \beta \mathcal{I}y_2$$

DIM:

$$\mathcal{I}(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha y_1' + \beta y_2' + \alpha p(x)y_1 + \beta p(x)y_2$$

$$\begin{aligned} \text{-RACCOLGO } \alpha \text{ e } \beta &\Rightarrow \alpha(y_1' + p(x)y_1) + \beta(y_2' + p(x)y_2) \\ &= \alpha \mathcal{I}(y_1) + \beta \mathcal{I}(y_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

• TEOREMA DELLE EQ. DI PRIMO ORDINE LINEARI

UNA EQ. IN FORMA $y' + p(x)y = q(x)$ È

(A) $y(x) = e^{-\int p(x)} \left\{ c + \int e^{\int p(x)} \cdot q(x) dx \right\}$

DOVE $\int p(x)$ RAPPRESENTA UNA GENERICA PRIMITIVA (CON c "INGLOBATA")

(B) IL PC
 $\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x_0 \in I$ HA SOLUZIONE UNICA GRAZIE ALLA CONDIZ. INIZIALE (CIOÈ TROVA LA c)

DIM (B)

PONGO $Q(x) = \int e^{\int p(x)} \cdot q(x) dx$ e QUINDI: $y_0 = y(x_0) = e^{-\int p(x)} \{c + Q(x)\}$
 e $c = y_0 e^{\int p(x)} - Q(x_0)$

UNICITÀ:

$$\begin{cases} y_1' + p(x)y_1 = q(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2' + p(x)y_2 = q(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

• SOTTRAGGO

$$\begin{cases} y_1' - y_2' + p(x)(y_1 - y_2) = q(x) - q(x) = 0 \\ y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

e pongo $M = y_1 - y_2$

$$\begin{cases} M' + p(x)M = 0 \\ M(x_0) = 0 \end{cases}$$

CHE È UN CASO DEL PC DI (A), QUINDI RISOLVO CON FORMULA

$$M(x) = e^{-\int p(x)} \left\{ c + e^{\int p(x)} \cdot 0 \right\} = c e^{-\int p(x)}$$

e VISTO CHE $M(x_0) = 0$ (e L'ESPOENZIALE NON SI ANNULLA) ALLORA $c = 0$

e $M(x) = 0 \quad \forall x \in I$ CIOÈ $y_1 = y_2$ ✓

DIM (A)

CON IL "METODO DEL FATTORE INTEGRANTE"

PONGO $M(x) = \exp \int p(x) dx > 0$

$$M'(x) = \exp \int p(x) dx \cdot p(x) = M(x) \cdot p(x) \quad (\text{DERIVATA ESPONENZIALE})$$

• MOLTIPLICO PER $M(x)$

$$y' M(x) + \underbrace{p(x)} \cdot \underbrace{y M(x)} = q(x) M(x)$$

CIOÈ $y' M(x) + M'(x) y = q(x) M(x)$

$(y(x) M(x))' = q(x) M(x)$ e INTEGRANDO

$y(x) = \frac{\int q(x) M(x) dx}{M(x)}$ ✓

● EQUAZIONE DI BERNOULLI:

RISOLVE LE EQUAZIONI DI TIPO: $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$, $p(x), q(x) \in C(I)$

$\alpha = 1$ e 0 SONO GIÀ NOTI e ASSUMO $y(x) \neq 0 \forall x \in I$

DIVIDO PER y^α

$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$ e PONGO $z := y^{1-\alpha}$ e $z' := (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$

RISCRIVENDO CON z ... $\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x) \Rightarrow z' + p(x)(1-\alpha)z = q(x)(1-\alpha)$

RISOLVIBILE CON TEOREMA DELLE EQ. DI 1 ORDINE LINEARI (TES. 2)

● EQUAZIONE DI RICCATI:

$y' = r(x) + p(x)y + q(x)y^2$ * $r, p, q \in C(I)$ e CONSCIAMO PER HP $y_0 = *$

RISOLUZIONE

USO $z(x)$ COME $\Rightarrow y(x) = y_0(x) + \boxed{\frac{1}{z(x)}}$ SAREBBE IL "RESTO" e DERIVO:

$y' = y' - \frac{1}{z^2} \cdot z'$ e SOSTITUISCO NELLA FORMULA INIZIALE

$\Rightarrow \cancel{y_0'} - \frac{z'}{z^2} = r(x) + p(x) \left(\cancel{y_0(x)} + \frac{1}{z(x)} \right) + q(x) \left(\cancel{y_0^2(x)} + \frac{2y_0(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)} \right)$ PERCHÉ y_0 È SOLUZIONE

$= -\frac{z'}{z^2} = \frac{p(x)}{z(x)} + \frac{2y_0(x)q(x)}{z(x)} + \frac{p(x)}{z^2(x)} = 0$ (NOTENUTTO PER $z(x)$) $\Rightarrow \underline{z' + 2q(x)y_0(x) - z = -r(x)z}$

FORMA APPLICABILE AL TES. 2 SU z , e TROVO y CON $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$

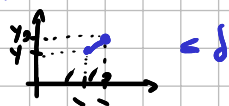
● CONTINUITÀ DI UNA $f(x, y)$

UNA $f(x, y)$ È CONTINUA IN (x_0, y_0) SE:

- $(x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (DOMINIO FUNZIONE)

- $\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ CIOÈ $\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in \Omega$ t.c. $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$

* DISTANZA TRA 2 PUNTI



● ESEMPI DI f CONTINUE

- SE $f(x, y) := g(x)$ (e $g(x) \in C(I) \Rightarrow f(x, y) \in C(I \times \mathbb{R})$)

- $+$, $-$, \cdot DI f CONTINUE SONO CONTINUE

- IL QUOT. DI f CONTINUE È CONTINUO $\forall (x, y) \in \Omega - \{\text{DENOM} = 0\}$

- I POLINOMI SONO f CONTINUE SU $\Omega = \mathbb{R}^2$

- LE f RAZIONALI SONO CONTINUE SUL LORO DOMINIO

- SE $g(x) \in C(I)$ e $f(x, y) \in C(x, g(x))$, ALLORA $f(x, y)$ È CONTINUA SU I

- $f(x, y) \in C(U \subseteq \Omega)$ e $g(x) \in C(\text{CODOM. DI } f)$ ALLORA $g(f(x, y)) \in C(U \subseteq \mathbb{R}^2)$

● TEOREMA DI PEANO (\exists SOLUZIONI PC)

HP: DATO UN GENERALE (PC) e $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f(x) \in C(\Omega)$ e Ω "APERTO" ($\forall x, y \exists$ DISCO CONTENUTO IN Ω)

ALLORA $\exists y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA SU QUALCHE I CONTENENTE x_0 , SOLUZIONE DEL (PC)

● TEO. 3: \exists e UNICITA' GLOBALE SU (PC)

SIA $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}$ (ma ANCHE $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$):

- $(x_0, y_0) \in \Omega$
- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i.c. $f \in C(\Omega)$
- $L > 0$ i.c. $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z| \quad \forall (x, y), (x, z) \in \Omega \Rightarrow$ IPOTESI DI LIPSCHITZ

ALLORA \exists y_0 È UNICA LA SOLUZ. DEL (PC) PER $I = [a, b]$ (o \mathbb{R} se $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

● TEO. 4: \exists e UNICITA' LOCALE

DATA B_r "BOLLA APERTA CENTRATA IN (x_0, y_0) e DI RAGGIO $r \Rightarrow B_r(x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ i.c. } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r \right\}$

• $f \in C(B_r)$

DISTANZA PUNTO (x, y) DAL CENTRO E RAGGIO

ALLORA IL PC HA SOLUZIONE UNICA DEFINITA SU I (CONTENENTE x_0) $\subset \mathbb{R}$

È POSSIBILE DIMOSTRARE IL TEO. 2 USANDO IL TEOREMA 3:

DA $y' = q(x) - p(x)y = f(x, y)$ e $\bullet \in C(I, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ CONSIDERO $[a, b] \subseteq I$ e $f \in C(\Omega)$

$\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}$
 $x_0 \in$

IMONGO C'HP DI LIPSCHITZ:

$|q(x) - p(x)y - q(x) + p(x)z| \leq L|y - z| \Rightarrow |-p(x)y + p(x)z| \leq L|y - z| \Rightarrow |p(x)| \cdot |y - z| \leq L|y - z|$

\Rightarrow PONGO $L = \max(p(x))$ IN $[a, b]$ (CHE ESISTE PER WEIERSTRASS) e QUINDI LA DISQ. È VERIF.

e SE HO UNICITA' e ESISTENZA SU $[a, b]$ ARBITRARIO, LA HO SU I

● EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

- STRUTTURA GENERALE: $f^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)})$

DATO IL SEGUENTE (PC) y È UNA SOLUZIONE SU I SE: (CON $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

(PC) $\begin{cases} y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y^{(1)}(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1} \end{cases}$

• y È DERIVABILE SU I

• $(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I$

• $y^{(k)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$ SU QUALCHE I (CIOÈ SE VERIFICA L'EQ. DIFF.)

● EQ. DIFF. "LINEARI" DI ORDINE SUPERIORE

SONO SOLO GENERALIZZAZIONI DELLA FORMA $y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow \mathcal{L}(y) = q(x)$

CIOÈ: $y^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x) y^{(i)} = b(x)$ CON $a, b \in C(I) \quad I \subseteq \mathbb{R}$

NOTA: $\mathcal{L}(y) = 0$ È DETTA EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA A $\mathcal{L}(y) = q(x)$

• TEOREMA 5, \exists e UNICITÀ SOLUZIONI (PC)

AVENDO $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$: (PC) $\begin{cases} \text{eq. diff.} \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_k \end{cases}$ HA SOLUZIONE e QUESTA $y = y(x)$ È UNICA su I

• INDIPENDENZA LINEARE DI FUNZIONI

DATE K FUNZIONI v_1, \dots, v_K DEFINITE SU I , SONO LIN. INDIPENDENTI SE:

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_K v_K = 0 \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow C_1 = C_2 = \dots = 0$$

• TEOREMA 6, SOLUZIONI DI EQUAZIONI CON COEFF. LIN. INDIPENDENTI

DATA UNA ED. DI ORDINE K , AVENDO $a_i, i=0, \dots, K-1 \in C(I)$

e $S = \{ \text{SPAZIO SOLUZIONI DI } \mathcal{L}(y)=0 \text{ su } I \}$

1. S È SPAZIO VETTORIALE

2. $\dim(S) = K \Rightarrow$ È POSSIBILE SELEZIONARE K SOLUZIONI DI $\mathcal{L}(y)=0$ su I , w_1, w_2, \dots, w_K t.c.

OGNI SOLUZIONE $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ SI SCRIVE COME:

$$y(x) = C_1 w_1(x) + \dots + C_K w_K(x) \quad \forall x \in I, \quad C_1, C_2, \dots, C_K \in \mathbb{R}$$

\hookrightarrow SOLUZIONE GENERALE ESPRESSA COME COMBINAZIONE LINEARE

CENNO ALLA DIM:

S SODDISFA GLI ASSIOMI DEGLI SPAZI VETT., IN PARTICOLARE $y_1, y_2 \in S \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in S$ $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
MA ANCHE

$$\hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{L}(y_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(y_2) = 0$$

• TEOREMA 7: SOLUZIONI ED. LINEARI

DATI $a_i(x)$ e $b(x) \in C(I)$

ALLORA LA SOLUZIONE GENERALE DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ È:

$$y(x) = y_*(x) + C_1 w_1(x) + \dots + C_K w_K(x)$$

DOVE y_* È UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ e w_1, \dots, w_K SONO LIN. INDIP. ($C_1 \dots C_K \in \mathbb{R}$)

• DIM:

PER PROP. LINEARITÀ: $\mathcal{L}(y_* + C_1 w_1 + \dots + C_K w_K) = \mathcal{L}(y_*) + C_1 \mathcal{L}(w_1) + \dots + C_K \mathcal{L}(w_K) = \mathcal{L}(y_*) = b(x)$

PRENDO UNA SOLUZ. DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ $y = y(x)$ ARBITRARIA

e TRUO CHE: $\mathcal{L}(y - y_*) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y_*) = b(x) - b(x) = 0 \quad \forall x$ CIOÈ $\mathcal{L}(y - y_*) = 0$, $y - y_* \in S$, PER TEO. 6 \Rightarrow
 $\Rightarrow y - y_* = C_1 w_1 + \dots + C_K w_K$ DOVE w_i LIN. INDIP. CIOÈ: $y = y_* + C_1 w_1 + \dots + C_K w_K$

• TED 8: MATRICE WRONSKIANA

SIA $K=2$ (ORDINE ED. DIFF) e $a_1(x), a_2(x) \in C(I)$ e INFINE w_1, w_2 SOLUZIONI DI $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$
ALLORA w_1, w_2 SONO LIN. INDIPENDENTI su I SE E SOLO SE:

$$\det \begin{pmatrix} w_1(x) & w_2(x) \\ w_1'(x) & w_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I \quad A = \text{MATRICE WRONSKIANA}$$