

## ● ESERCIZIO BERNOULLI

PC  $\begin{cases} y' = y(1 + e^{-2x} \cos(3x) y^2) \\ y(0) = -1 \end{cases}$

RISCRIVO NELLA  
FORMA DELL'ED. DI  
BERNOULLI

$y' - y = e^{-2x} \cos(3x) y^3$   
 $y(0) = 1$

DIVIDO PER  
 $y^3$  E CONTINUO  
I CALCOLI

$y=0 \Rightarrow 0' \cdot 0 = 0$  ✓  
MA NON SOLVE. PC

$y \neq 0$  \*

\*  $\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} = e^{-2x} \cos(3x) \Rightarrow z(x) = \frac{1}{y(x)^2}$  e  $z' = \frac{(y') \cdot \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3} \cdot y'}{y^4} \cdot y' = -\frac{2y \cdot y'}{y^4} = -\frac{2y'}{y^3}$  e SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE ORIGINALE

$-\frac{z'}{2} - z = e^{-2x} \cos(3x) \Rightarrow z' + 2z = -2e^{-2x} \cos(3x)$

APPLICO LA FORMULA RISOLUTIVA:  $z(x) = e^{\int 2 dx} \cdot (C + \int e^{-\int 2 dx} \cdot q(x) dx)$

•  $\int p(x) dx = \int 2 dx = 2x + C$   $p(x) = 2x$  ( $C=0$ )

•  $z(x) = e^{-2x} (C + \int e^{2x} \cdot (-2e^{-2x} \cos(3x)) dx) = e^{-2x} (C - 2 \int \cos(3x) dx) = e^{-2x} (C - \frac{2}{3} \sin(3x))$

$\frac{1}{y^2} = e^{-2x} (C - \frac{2}{3} \sin(3x)) \Rightarrow y^2 = \frac{e^{2x}}{C - \frac{2}{3} \sin(3x)} \Rightarrow y(x) = \pm \frac{e^x}{\sqrt{C - \frac{2}{3} \sin(3x)}}$

INTEGRALE GENERALE: (SOL. ED)  $\Rightarrow y = \pm \frac{e^x}{\sqrt{C - \frac{2}{3} \sin(3x)}} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{ \sin(3x) < \frac{3}{2}C \}$  se  $C > \frac{3}{2}$  SEMPRE VERIFICA  $\sin(3x) < 1$

RISOLVENDO PC  $\Rightarrow \pm \frac{e^0}{\sqrt{C - \frac{2}{3}}} = -1$

$\frac{1}{\sqrt{C}} = -1$  IMPOSS!  $-\frac{1}{\sqrt{C}} = -1 \Rightarrow C = 1$

$y(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{1 - \frac{2}{3} \sin(3x)}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

SE  $y(0) = -\sqrt{3}$   
 $-\frac{1}{\sqrt{C}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

QUINDI  $y(x) = -\frac{e^x}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sin(3x)}} \quad \forall x$  t.c.  $\sin(3x) < \frac{1}{2}$   
cioè:  $x \in (-\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{6}\pi)$

## ● EQUAZIONE DI RICCATI:

PC  $\begin{cases} y' - y^2 + 2xy - y = x^2 - x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

① TROVO UNA SOLUZIONE (PARTICOLARE DELL'ED)

PROVO UNA COSTANTE  $y_0 = A \Rightarrow A' - A^2 + 2xA - A = x^2 - x + 1$   
 $-A^2 + 2xA - A = x^2 - x + 1$   $\nexists A=A$  CHE SODDISFA L'IDENTITÀ  $\Rightarrow$  NO SOL. IDENTITÀ

PROVO QUINDI UN POLINOMIO DI GRADO 1:  $y_0(x) = Ax + B \Rightarrow (Ax+B)' - (Ax+B)^2 + 2x(Ax+B) - (Ax+B) = x^2 - x + 1$

$= A - A^2 x^2 - B^2 - 2ABx + 2Ax^2 + 2Bx - Ax - B = x^2 - x + 1$

$\begin{cases} -2AB + 2B - A = -1 \\ A - B^2 - B = 1 \\ -A^2 + 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A-1)^2 = 0 \Rightarrow A=1 \\ 1 - B^2 - B = 1 \Rightarrow B(B+1) = 0 \Rightarrow B=0, B=-1 \\ -1 + 2 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$  HO 2 SOLU. PARTICOLARI:  $y_0(x) = Ax + B \Rightarrow \begin{cases} y_0(x) = x \\ y_0(x) = x - 1 \end{cases}$

② CAMBIO VARIABILE CON  $y = y_0 + \frac{1}{z}$   $\Rightarrow y(x) = x + \frac{1}{z(x)}$  e SOSTITUISCO:

$(x + \frac{1}{z(x)})' - (x + \frac{1}{z(x)})^2 + 2x(x + \frac{1}{z(x)}) - (x + \frac{1}{z(x)}) = x^2 - x + 1$

$1 - \frac{1}{z^2} \cdot z' - x^2 - \frac{2x}{z} - \frac{1}{z^2} + 2x^2 + \frac{2x}{z} - x - \frac{1}{z} = x^2 - x + 1 \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow z' - 1 - z = 0 \Rightarrow z' - z = 1$

RISOLVO CON TEOREMA 2

$\int p(x) = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

$z(x) = e^{-x} \cdot (C + \int e^x \cdot 1 dx) = Ce^{-x} - 1$  poi ponendo  $y(x) = x + \frac{1}{z} \Rightarrow x + \frac{1}{Ce^{-x} - 1}$  ponendo  $y(0) = 1 \Rightarrow 0 + \frac{1}{C-1} = 1 \Rightarrow 1 = C-1$   
 $C = 2$

SOLU:  $y(x) = x + \frac{1}{2e^{-x} - 1}$   $x \neq \ln(2)$  e INTERVALLO MASSIMALE  $(-\infty, \ln(2))$