CALCOLO DIFFERENZIALE

NORMA e PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}^N$

- $x := (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $x, y \in \mathbb{R}^N$ (VETTORI N-DIMENSIONALI)
  - SOMMA : $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_N+y_N)$
  - PROD. PER SCALARE : $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  - PROD. SCALARE : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$ (IL RISULTATO $\in \mathbb{R}$)

PROPOSIZIONI RELATIVE AL PRODOTTO SCALARE:

- LINEARITÀ (A SX) : $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^N$
- SIMMETRIA : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$
- POSITIVITÀ : $\langle x, x \rangle \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

DIMOSTRAZIONE LINEARITÀ:

$\langle ax + by, z \rangle = \sum_{j=1}^{N} (a x_j + b y_j) z_j = \sum_{j=1}^{N} a x_j z_j + \sum_{j=1}^{N} b y_j z_j = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$ $\square$ (STESSA DIM PER LINEARITÀ A DX)

NORMA DI VETTORE:

$x, y \in \mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ PROPRIETÀ:
1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (COME PROD. SCALARE)
2. $\|a x\| = |a| \cdot \|x\|$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ → DIM CON LA DISUG. DI CAUCHY-SCHWARZ ($|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$)

PER DIM DELLE GUARDARE GEO

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^N$

DATO $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, DEFINIAMO $r > 0$

$B(\bar{x}, r) := \{ y \in \mathbb{R}^N : \|\bar{x} - y\| < r \}$ (BOLLA CENTRATA IN $\bar{x}$ e DI RAGGIO r)

NOZIONE DI INTORNO:

SIA $\bar{x} \in U \in \mathbb{R}^N$. DICIAMO CHE U È INTORNO DI $\bar{x}$ SE ESISTE $r > 0$ t.c. $B(\bar{x}, r) \subseteq U$. ANCHE $B(\bar{x}, r)$ È INTORNO DI r)

PUNTI INTERNI, ESTERNI e DI FRONTIERA

$A \subseteq \mathbb{R}^N$, $A \neq \emptyset$

- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO INTERNO DI A ($x \in \mathring{A}$, $\mathring{A}$ = INSIEME PUNTI INTERNI DI A)
  SE $\exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subseteq A$
- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO ESTERNO DI A ($x \in A^c$, COMPLEMENTARE DI A)
  SE $\exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \cap A = \emptyset$
- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO DI FRONTIERA DI A ($x \in \partial A$ ($F_r(A)$))

$\forall r > 0$ SI HA CHE $\begin{cases} B(x,r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

AFFERMAZIONE: $\mathring{A} = \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R \}$

DIMOSTRIAMO CHE $\forall x \in \mathbb{R}^N$ t.c. $\|x\| < R$ È UN PUNTO INTERNO : SIA x t.c. $\|x\| < R$

DEFINIAMO $r := R - \|x\|$ e DIMOST. CHE $B(x, r) \subseteq \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R \}$

PRENDO UN GENERICO $y \in B(x,r) \rightarrow \|y\| = \|y - x + x\| \overset{\text{DISUG. TRIANG.}}{\leq} \underbrace{\|y-x\|}_{< r} + \|x\| \leq r + \|x\| = R - \cancel{\|x\|} + \cancel{\|x\|} \Rightarrow \|y\| < R$

PUNTI DI ACCUMULAZIONE, CHIUSURA e ISOLATI

- x È PUNTO **ACCUMULAZIONE** DI A SE $\forall r>0$ SI HA CHE $B(x,r)\setminus\{x\}\cap A\neq\emptyset$
e SCRIVIAMO $x\in Acc(A)$ (INSIEME DEI PUNTI DI ACC. DI A)(x PUÒ NON APPARTENERE AD A)

- x È UN PUNTO DELLA **CHIUSURA** DI A SE $(x\in\bar{A})$, $\forall r>0$ SI HA CHE $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$ $\left(A\subseteq\bar{A}\ (\text{CHIUSURA DI } A)\right)$

- $x\in A$ È PUNTO **ISOLATO** SE $\exists r>0$ t.c. $B(x,r)\cap A=\{x\}$ (SOLO x). NOTA: $\bar{A}=\mathring{A}\cup\partial A$

POSSIAMO VERIFICARE, SE $\|x\|=R$

$$\forall r>0\begin{cases}B(x,r)\cap A\neq 0 & ① \\ B(x,r)\cap A^c\neq 0 & ②\end{cases}.$$

PROVIAMO LA 2: RICORDO $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$ $\forall a\in\mathbb{R}$

SELEZIONO $a=\dfrac{R+\frac{r}{2}}{R}$ ($r>0$ ARBITRARIO), INOLTRE $y=ax$ CON $\|x\|=R$

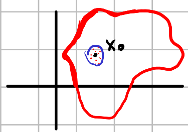
DIMOSTRO $y\in B(x,r)\cap A^c$: $\|y\|=\|ax\|=|a|\cdot\|x\|=\dfrac{R+\frac{r}{2}}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R}=R+\frac{r}{2}>r \Rightarrow \underline{y\in A^c}$

INOLTRE: $\|x-y\|<r \rightarrow \|x-y\|=\|x-ax\|=\|(1-a)\cdot x\|=|1-a|\cdot\|x\|=\left|1-\dfrac{R+\frac{r}{2}}{R}\right|\cdot R=\left|\dfrac{\cancel{R}-\cancel{R}+\frac{r}{2}}{\cancel{R}}\right|\cdot\cancel{R}\ \frac{r}{2}<r$. $y\in B(x,r)$

NOTA: x ARBITRARIO t.c. $\|x\|=R$ e r ARBITRARIO

LIMITE e CONTINUITÀ

$A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^k$, $n,k\in\mathbb{N}$, $x_0\in Acc(A)$, $l\in\mathbb{R}^k$



POSSO AVVICINARMI ARBITRARIAMENTE A x_0, CON BOLLE CONTENENTI PUNTI $\in A$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)=l \text{ SE } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|f(x)-l\|<\varepsilon\quad\forall x\in A-\{x_0\} \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{AVENDO } x_0\in A,\ f \text{ È CONTINUA IN } x_0 \text{ SE:} \\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon\quad\forall x \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta\end{array}}$$

PROPOSIZIONE: SIA $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^k$ $(k>1)$ CIOÈ $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_k(x)\end{pmatrix}$

1) $x_0\in Acc(A)$ SIA $l=\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_k\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^k$

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)=l \iff \begin{cases}\lim_{x\to x_0}f_1(x)=l_1\\ \vdots\\ \lim_{x\to x_0}f_k(x)=l_k\end{cases}$

2) $x_0\in A$, f È CONTINUA IN $x_0 \iff$

- $\begin{cases}f_1(x) \text{ È CONTINUA IN } x_0\\ \vdots\\ f_k(x) \text{ È CONTINUA IN } x_0\end{cases}$

DIM 1 ASSUMO $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)=l \Rightarrow \boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \text{ t.c. } \|f(x)-l\|<\varepsilon\ \forall x\in A-\{x_0\} \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta}$ DEFINIZIONE

CIOÈ $|f_i(x)-l_i|\leq\sqrt{(f_1(x)-l_1)^2+\ldots+(f_k(x)-l_k)^2}<\varepsilon$ $\forall i=1,\ldots,k$ CIOÈ: $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f_i(x)=l_i$

e D'ALTRA PARTE $\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_i>0 \text{ t.c. } |f_i(x)-l_i|<\varepsilon\ \forall x \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta_i \text{ CON } x\in A-\{x_0\}}$

DEFINISCO $\delta:=\min\{\delta_1,\ldots,\delta_k\}$

$\|f(x)-l\|\ \sqrt{(f_1(x)-l_1)^2+\ldots+(f_k(x)-l_k)^2}<\sqrt{\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^2}=\sqrt{k}\cdot\varepsilon$ $\forall x\in A-\{x_0\}$ t.c. $\|x-x_0\|<\delta$ $\square$

DIM 2 È UGUALE

PROPRIETÀ DEI LIMITI

PROPOSIZIONE: $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in A_{cc}(A)$.

HP: $l, m \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

ALLORA

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$

2) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$

3) $m \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

PROPRIETÀ CONTINUITÀ (f e g CONTINUE IN x_0)

i) $f + g$
ii) $f \cdot g$
iii) $g(x) \neq 0 \to \frac{f}{g}$

CONTINUE

PROPOSIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq \mathbb{R}^K$, $N, K, M \in \mathbb{N}$

SIA: $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}^M$ e SIA $x_0 \in A$ e PONIAMO $y_0 := f(x_0)$. SE f È CONTINUA IN x_0 e $g(x)$ IN y_0

ALLORA: $g \circ f$ È CONTINUA IN x_0

PROPOSIZ: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in A_{cc}(A)$, SIA $f: A \to \mathbb{R}^K$

$\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = l \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = m \end{cases}$ $\boxed{l = m}$ UNICITÀ LIMITE

TEOREMA DEL CONFRONTO:

HP: • $A \subseteq \mathbb{R}^N$, e $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ CON $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
• $x_0 \in A_{cc}(A)$, $l \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

$\boxed{\text{ALLORA } \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l}$

Restrizione di f su B

DATO $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq A$, $f: A \to \mathbb{R}^K$

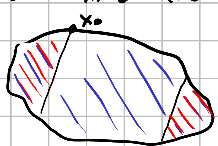
DEFINIAMO $f|_B : B \to \mathbb{R}^K$ COME

$f|_B(x) = f(x) \quad \forall x \in B$ "RESTRIZIONE DI f SU B"

PROPOSIZIONE:

HP: $x_0 \in A_{cc}(A)$, $l \in \mathbb{R}^K$. SUPPONIAMO CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. SIA $x_0 \in A_{cc}(B)$

TH: $\lim_{x \to x_0} f|_B(x) = l$



CONTINUITÀ DI FUNZIONI:

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$, $p \in A$, DICIAMO CHE f È CONTINUA IN p SE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\|f(x) - f(p)\| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ t.c. $\|x - p\| < \delta$

TEOREMA:

$\boxed{\begin{array}{l} \text{HP: } \ast \ p \in A_{cc}(A),\ f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K \\ \text{TH: } f \text{ È CONTINUA IN } p \iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p) \end{array}}$

INSIEME APERTO E INSIEME CHIUSO

$A \in \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- x_0 è un punto INTERNO di A se $\exists r>0$, t.c. $B(x_0, r) \subseteq A$
- x_0 è un punto di FRONTIERA di A se $\forall r>0$: $\begin{cases} B(x_0,r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x_0,r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$
- x_0 è un punto DELLA CHIUSURA di A se $\forall r>0$ si ha $B(x_0,r) \cap A \neq \emptyset$

$\rightarrow$ SEGUE CHE $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$ e si verifica:

$\bar{A} = \mathring{A} \cup F_r(A)$

$\bar{A} = A \cup A_{cc}(A)$

DEFINIZIONE:
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è APERTO se $A = \mathring{A}$
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è CHIUSO se $A = \bar{A}$

PROPOSIZIONE: A è APERTO $\Leftrightarrow$ A^c è CHIUSO
A è CHIUSO $\Leftrightarrow$ A^c è APERTO

PROPOSIZIONE: SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA e $c \in \mathbb{R}$

ALLORA: $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\}$ è APERTO
$B = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ è CHIUSO

DIM: SIA $x \in A$, APPLICO LA DEF. DI CONTINUITÀ: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ t.c. $\forall y$ t.c. $\|y-x\|<\delta$ VALE $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
ed EQUIVALENTEMENTE $f(x)-\varepsilon < f(y) < f(x)+\varepsilon$. SCELGO $\varepsilon < c - f(x)$, QUINDI $\forall y$ t.c. $\|y-x\|<\delta$ VALE
$f(y) < f(x)+\varepsilon \leq f(x)+c-f(x) = c$ $\rightarrow$ $f(y)<c$ $\forall y$ t.c. $\|x-y\|<\delta$ CIOÈ $\forall y \in B(x,\delta)$ CIOÈ $B(x,\delta) \subseteq A$. HO TROVATO UNA BOLLA TUTTA CONTENUTA IN A

VISTO CHE x È ARBITRARIO E INTERNO, $\mathring{A} = A$.

DIM B È UGUALE.

CASI NOTEVOLI

$-\infty \leq a \leq L \leq +\infty$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$A = \{x \in \mathbb{R}^n : a < f(x) < b\}$ APERTO
$B = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq f(x) \leq b\}$ CHIUSO

$\rightarrow$ IN GENERALE C, D APERTI $\rightarrow$ $C \cup D$ È APERTO, $C \cap D$ È CHIUSO
C, D CHIUSO $\rightarrow$ $C \cup D$ È CHIUSO, $C \cap D$ È CHIUSO

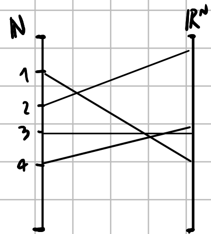
- INSIEMI LIMITATI:

SIA $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. DICIAMO A LIMITATO SE $A \subseteq B(0,R)$, $R>0$ ABBASTANZA GRANDE.

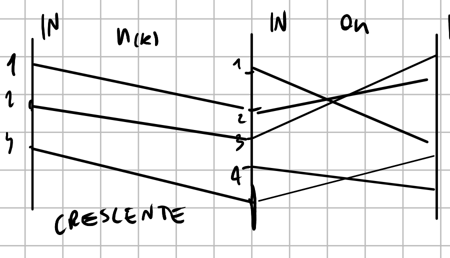
SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}^N$

DEF: $a_n : n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ ES: $a_n = (2^{-n}, \frac{1}{n}, 1)$

DEF: DATA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (INSIEME DEI PUNTI DELLA SUCC) $\subset \mathbb{R}^n$ CONVERGE A $l \in \mathbb{R}^n$ SE $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0>0$ t.c. $\forall n>n_0$ $\|a_n - l\| < \varepsilon$



SIA $n(k)$ UNA FUNZIONE CRESCENTE da $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ CIOÈ $n(k+1) > n(k)$ ALLORA $a_{n_k} := a_{n(k)}$



UNA SOTTOSUCCESSIONE È UNA SUCCESSIONE COSTRUITA DALL'ORIGINALE CON DEI FILTRI

COMPATTEZZA:

DEF: SIA $K \subset \mathbb{R}^n$. K È COMPATTO SE DA OGNI FAMIGLIA DI APERTI $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ t.c. $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ ("COPERTURA APERTA DI K")
È POSSIBILE ESTRARRE UNA "SOTTOCOPERTURA FINITA" $O_1, O_2 \dots O_N \subset \{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ t.c. $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} O_i$

TEOREMA DI HEINE-BOREL

HP: $K \subset \mathbb{R}^n$

TH K È COMPATTO $\iff$ CHIUSO E LIMITATO

COROLLARIO I: $K \subset \mathbb{R}^n$ COMPATTO. ALLORA OGNI SOTTOINSIEME K_∞ INFINITO DI K HA ALMENO UN PUNTO DI K CHE È DI ACCUM. PER K_∞

DIM:

SE NESSUN PUNTO DI K È DI ACCUMULAZIONE PER K_∞ $\forall x \in K$ È IL CENTRO DI UNA BOLLA $B(x, r_x)$ CONTENENTE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞ (x SE $x \in K_\infty$). ALLORA $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ E ALLO STESSO TEMPO NON È POSSIBILE ESTRARRE UNA SOTTOCOPERTURA FINITA (DATO CHE K_∞ È UN INSIEME INFINITO E CIASCUN $B(x, r_x)$ CONTIENE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞).

COROLLARIO II: OGNI SOTTOINSIEME INFINITO E LIMITATO DI $\mathbb{R}^n$ HA ALMENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE

DIM:

SIA K_∞ TALE INSIEME: DATO CHE È LIMITATO: $K_\infty \subset \overline{B(0,R)}$. DEFINISCO $K = \overline{B(0,R)}$
E VISTO CHE K È COMPATTO APPLICO COROLLARIO I E $\exists$ PUNTO DI ACC. DI K_∞

COROLLARIO III: K_∞ SOTTOIN. ∞ DI $\mathbb{R}^n$ E LIMITATO ($\exists$ PUNTO ACC. y), ALLORA $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_\infty$ t.c. $\lim_{n \to \infty} x_n = y$

DIM:

DATO $y \in Acc(K_\infty) \Rightarrow \forall r > 0$, $B(y,r) \setminus \{y\} \cap K_\infty \neq \emptyset$. PER FINI DIMOSTRATIVI, PRENDO $r = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \in B(y, \frac{1}{n}) \setminus \{y\} \cap K_\infty$
E INOLTRE $\|x_n - y\| < \frac{1}{n}$ (EQUIVALENTE A $x_n \in B(y, \frac{1}{n})$) CIOÈ $\lim_{n \to \infty} x_n = y$

TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS:

OGNI SUCCESSIONE $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ LIMITATA HA UNA SOTTOSUCC. CONVERGENTE

DIM:

DEFINIAMO $E \overset{def}{=} (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ SOTTOSUCCESSIONE E ABBIAMO DUE POSSIBILI CASI:

1. E FINITA: $\exists$ UN ELEMENTO CHE SI RIPETE ∞ VOLTE, CIOÈ È CONVERGENTE

2. E INFINITA: $\Rightarrow \exists y \in Acc(E)$, $\forall r > 0$ $\exists x_r \in E$ t.c. $\|x_r - y\| < r$ (COME DIRE $x_r \in B(y,r) - \{y\} \cap E$)

SFRUTTO L'ARBITRARIETÀ DI r: QUINDI PRENDO x_{n_1} t.c. $\|x_{n_1} - y\| < 1$
E $n_2 > n_1$ x_{n_2} t.c. $\|x_{n_2} - y\| < \frac{1}{2}$

E A CASCATA $n_k > n_{k-1} > \dots > n_1$

QUINDI x_{n_k} t.c. $\|x_{n_k} - y\| < \frac{1}{k}$ •

E • È UNA SCRITTURA EQUIVALENTE A: $\boxed{\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = y, \text{ CIOÈ CONVERGE}}$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

$A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, COMPATTO. SIA $f: A \to \mathbb{R}$ CONTINUA SU A. ALLORA, ESISTONO $x, y \in A$ t.c. $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$ $\forall z \in A$ (x È UN PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO, y DI MAX ASSOLUTO).

PROPOSIZIONE: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$, ALLORA, $\exists$ DUE SUCCESSIONI $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ t.c.
- $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \inf f(A)$
- $\lim_{k \to \infty} f(y_k) = \sup f(A)$

DOVE $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È SUCCESSIONE MINIMIZZANTE e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È MASSIMIZZANTE

DIM (PER $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- SE $\sup f(A) = +\infty \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists y_k \in A$ t.c. $f(y_k) > k \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(y_k) = +\infty = \sup f(A)$
- SE $\underbrace{\sup f(A)}_{= l} < \infty$. PER DEF DI SUPERIORE: • $f(y) \leq l$ $\forall y \in A$ • $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists y_k \in A$ t.c. $l - \frac{1}{k} < f(y_k)$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists y_k \in A$ t.c. $l - \frac{1}{k} < f(y_k) \leq l$ e PER TEO. CONFRONTO $\to \lim_{k \to \infty} f(y_k) = l$

RAPPORTO TRA LIMITI DI SUCCESSIONI E SOTTOSUCCESSIONI

OSSERVAZIONE: SAPENDO $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ e $\lim_{n \to \infty} x_n = l \in \mathbb{R}^n$ ALLORA OGNI SUCC. $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ HA COME LIMITE $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = l$

INFATTI: SE $\lim_{n \to \infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N_0$ $\|x_n - l\| < \varepsilon$ (DEF. LIMITE)

ALLORA SE $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ POSSO AVERE $K_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_k > n_0$ $\forall k > k_0$. ALLORA $\forall k > k_0$ DICO $\|x_{n_k} - l\| < \varepsilon$

↳ DEF. DI SOTTOSUCCESSIONE

- **CARATTERIZZAZIONE DI LIM USANDO LE SUCCESSIONI**

USANDO $r > 0$ ARBITRARIO NELLE DEF. DI $\bar{A}$, $Fr(A)$, $Acc(A)$ e SCEGLIENDO UNA SUCC. $r_n \to 0^+$, $r_n > 0$ $(n \to \infty)$ POSSIAMO CARATTERIZZARE:

- $x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in A$, $x_n \to x_0$
- $x_0 \in Fr(A) \Leftrightarrow \exists$ DUE SUCCESSIONI $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in A$, $y_n \in A^c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ t.c. $\begin{cases} \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \\ \lim_{n \to \infty} y_n = x_0 \end{cases}$
- $x_0 \in Acc(A) \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in A - \{x_0\}$ e t.c. $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}^k$:

1) $x_0 \in Acc(A)$, $l \in \mathbb{R}^k$ ALLORA $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l & \text{PER OGNI SUCC.} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{x_0\} \text{ t.c.} \\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \end{cases}$

2) SE $x_0 \in Acc(A) \cap A$ ALLORA
↳ f È CONTINUA IN $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) & \forall \text{ succ. } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \\ \text{t.c. } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI WEIESTRASS:

DIMOSTRIAMO CHE $\exists y \in A$ t.c. $f(z) \le f(y)$ $\forall z \in A$ (PER x È IDENTICA)

IN VIRTÙ DELLE PRECEDENTI PROPOSIZIONI, $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.c. $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \sup f(A)$ "SUCC. MASSIMIZZANTE"

A LIMITATO $\exists$ $B(0,R)$ CON $R>0$ GRANDE ABBASTANZA $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(0,R)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ È LIMITATA.

USIAMO IL TEO. DI BOLZANO-WEIESTRASS: $\exists$ UNA SOTTOSUCC. $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$ PER QUALCHE $y \in \mathbb{R}^n$

CIOÈ $y \in Acc(A)$, MA VISTO CHE $A = \bar{A}$ (CHIUSO) ALLORA $y \in Acc(A) \subseteq A \Rightarrow y \in A$

PER CONCLUDERE, USANDO LA CONTINUITÀ: $f(y) \overset{\text{continuità}}{=} \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) \overset{\text{sottosucc.}}{=} \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \sup f(A)$

$\Rightarrow f(y) = \sup f(A)$ CIOÈ $\sup f(A) = \max f(A)$
$\Rightarrow \forall z \in A,\ f(z) \le f(y) \to$ DALLA DEF. DI SUP. $\square$

NE SEGUE... $f(A)$ È UN INTERVALLO, NEL CASO $f: A \to \mathbb{R}$ CON $A \subseteq \mathbb{R}^n$ OPPORTUNO.

OSSERVAZIONE: SE A È COMPATTO e f È CONTINUA, PER TEO. DI WEIESTRASS $\left(\begin{matrix} a = f(x) \\ b = f(y)\end{matrix}\right)$ $\Rightarrow a \le f(z) \le b$ $\forall z \in A$

INSIEME CONNESSO:

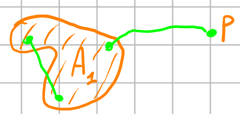
SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. DICIAMO A CONNESSO (PER ARCHI) SE PER OGNI $x,y \in A$ $\exists\ \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$, $\gamma(t) \in A$ $\forall t \in [a,b]$ e γ CONTINUA

NOTAZIONE: DATI $x, y \in \mathbb{R}^n$ CHIAMIAMO SEGMENTO DI ESTREMI x e y: $[x,y] = \{ty + (1-t)x,\ t \in [0,1]\}$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, A SI DICE CONVESSO SE $\forall x,y \in A$, SI HA $[x,y] \subset A$

PROPOSIZIONE: A CONVESSO $\Rightarrow$ CONNESSO, A STELLATO $\Rightarrow$ CONNESSO

ES:



- $A = A_1 \cup \{P\}$, NÉ CONNESSO NÉ CONVESSO
- A_1 È CONNESSO, NON CONVESSO
- A È LIMITATO
- $\bar{A} = \bar{A}_1 \cup \{P\}$
- $P \in \bar{A}$, MA $P \notin Acc(A)$ (P È PUNTO ISOLATO)

GENERALIZZAZIONE PROPRIETÀ VALORI INTERMEDI

OSS: $I \subseteq \mathbb{R}$ È INTERVALLO $\Leftrightarrow$ $x, y \in I$, $x < y \Rightarrow t \in I$ $\forall t$ t.c. $x < t < y$

TEOREMA: HP: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, CONNESSO. SIA $f: A \to \mathbb{R}$. ALLORA $f(A)$ È INTERVALLO

DIM: SIANO $a, b \in f(A) \Rightarrow \exists\ x, y \in A$ t.c. $f(x) = a$ e $f(y) = b$ SUPPONIAMO CHE $a < b$ DIMOSTRIAMO CHE $\forall c \in \mathbb{R}$ t.c. $a < c < b$ $\exists z \in A$ t.c. $f(z) = c$ STRATEGIA DIMOSTRATIVA

A CONVESSO e $x, y \in A \Rightarrow \exists \gamma: [0,1] \to A$ t.c. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $\gamma(t) \in A$ $\forall t \in [0,1]$ e CONTINUA su $[0,1]$

DEFINISCO $g(t) \overset{def}{=} f(\gamma(t))$ su $[0,1]$ CHE È CONTINUA (COMPOSIZ. DI f CONTINUE)

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(0) = f(\gamma(0)) = f(x) = a$, $g(1) = f(\gamma(1)) = f(y) = b$.

APPLICHIAMO a g LE PROP DEI VALORI INTERMEDI: $\exists \bar{t} \in [0,1]$ t.c. $c = \underbrace{f(\gamma(\bar{t}))}_{g(\bar{t})}$ e LA DIM È COMPLETA CON $z = \gamma(\bar{t})$.

QUINDI SE f È CONTINUA e A È SIA COMPATTO CHE CONNESSO ALLORA ($f: A \to \mathbb{R}$) ABBIAMO CHE $f(A) = [a,b]$ DOVE $a = \sup f(A) = \max f(A)$
$b = \inf f(B) = \min f(B)$

DERIVATA DIREZIONALE

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ (PUNTO INTERNO) $f: A \to \mathbb{R}$, CON $v \in \mathbb{R}^n$ FISSATO

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}. \qquad x_0 + tv \in B(x_0, r) \text{ PER } t \text{ PICCOLO}$$

(r OPPORTUNO)

PRENDIAMO $r > 0$ t.c. $B(x_0, r) \subseteq A$ (SI PUÒ FARE PERCHÈ $x_0 \in \mathring{A}$). SE $|t| \leq \frac{r}{\|v\|}$, $v \neq (0,0,\dots,0)$ V. NULLO **ALLORA**

$x_0 + tv \in B(x_0, r)$ PERCHÈ $\|x_0 - (x_0 + tv)\| = \|tv\| = |t| \cdot \|v\| < r \Rightarrow |t| < \frac{r}{\|v\|}$

ALLORA DEFINISCO $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ "DERIVATA DIREZIONALE DI f NEL PUNTO x_0 LUNGO LA DIREZIONE v"

SE $v = (0, \dots, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} 0$$

TEOREMA DI FERMAT

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ $f: A \to \mathbb{R}$, SIA $x_0 \in \mathring{A}$ UN PUNTO DI MAX, MIN LOCALE PER f SE:

- MIN: $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U_{x_0}$
- $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in U_{x_0}$

$\Big\}$ U_{x_0} INTORNO DI x_0 E $U_{x_0} \subset A$

E $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ $\exists$ $(v \neq \underline{0}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE:

DEFINISCO $g(t) \overset{DEF}{=} f(x_0 + tv)$ NOTA: $|t| < \frac{r}{\|v\|} \Rightarrow x_0 + tv \in B(x_0, r) \subseteq A \leftarrow x_0 \in \mathring{A}$

r DEVE ESSERE SCELTO OPPORTUNAMENTE

SE x_0 È MAX LOCALE DI $f(x)$, ALLORA $t=0$ È MAX LOCALE PER g: $g(t) \leq g(0)$ $\forall t$ IN UN INTERVALLO OPPORTUNO DI $0 \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$

E DAL TEO. DI FERMAT A UNA VARIABILE: $0 = g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \overset{\text{PER DEF}}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ $\square$

DERIVATE PARZIALI:

CONSIDERIAMO I VETTORI DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$: $e_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ E DEF. DERIV. DIREZ. $v = e_j$

(1 J-ESIMA)

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + e_j) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0)_1 + (x_0)_2 + \dots + (x_0)_j + t + \dots (x_0)_n) - f(x_0)}{t}$$

CHE CORRISPONDE A DERIVARE f IN SENSO ORDINARIO RISPETTO ALLA VARIABILE x_j LASCIANDO TUTTE LE ALTRE VARIABILI "COSTANTI"

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \rightarrow$ DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A x_j, NEL PUNTO x_0

$\nabla f \rightarrow$ GRADIENTE DI f $:= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

TEOREMA DI SCHWARTZ:

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO. SIA $f: \Omega \to \mathbb{R}$ E t.c. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ E $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ CONTINUE

TH: LE DUE DERIVATE SONO UGUALI

DIFFERENZIABILITÀ PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$

f è DERIVABILE IN $x_0 \iff \exists \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \in \mathbb{R}$

$\iff \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$

$\iff \exists A \in \mathbb{R}$ t.c.

⊛ $\underline{f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)}$, $x \to x_0$ DOVE $\frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \to 0$, $x \to x_0$, $A = f'(x_0)$

↳ DIFFERENZIABILITÀ: LA FUNZIONE $\varphi: h \to Ah$: $\varphi(h) = Ah$ È LINEARE ED È CHIAMATA DIFFERENZIALE DI f IN x_0 : $\varphi = df(x_0)$

⊛ $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$, $x \to x_0$. DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ SONO EQUIVALENTI CON UNA VARIABILE

↳ IMPLICA CONTINUITÀ

✱ DEF: DATA APPLICAZIONE LINEARE $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$ DICIAMO CHE T È LINEARE SE:
- $T(\mu + v) = T(\mu) + T(v) \quad \forall \mu, v \in \mathbb{R}^n$
- $T(\lambda \mu) = \lambda T(\mu) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}^n$

TEOREMA ALGEBRA LINEARE

HP: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARE
TH: $\exists$ A MATRICE $m \times n$ t.c. $T(\mu) = A \cdot \mu \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^n$

CASO $n \in \mathbb{N}$, $m = 1$: $T(\mu) = A\mu = \langle A, \mu \rangle$ (PROD. SCALARE)

DEFINIZIONE DIFFERENZIABILITÀ:

SIA $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω APERTO. f È DIFFERENZIABILE IN $x_0 \in \Omega$ SE $\exists T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LINEARE t.c.:

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + o(\|h\|), \ h \to 0^{*}, \quad \text{DOVE } \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \to 0, \ h \to 0}$$

✱ RISCRIVIBILE COME: $\exists A \in \mathbb{R}^n$ t.c.: $f(x_0+h) = f(x_0) + \langle A, h \rangle + o(\|h\|)$, $h \to 0$

TERMINOLOGIA: T "DIFFERENZIALE DI f NEL PUNTO x_0". PONIAMO $df_{x_0} := T$

TEOREMA ($\exists$, CONTINUITÀ E VALORE DEL DIFFERENZIALE IN UN PUNTO)

HP: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω APERTO, $x_0 \in \Omega$. SE f È DIFFERENZIABILE IN x_0:
TH:
- f È CONTINUA IN x_0
- $\forall v \in \mathbb{R}^n \ \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(v)$ (ESISTONO DERIVATE DIREZIONALI, E SONO UGUALI AL DIFF. IN QUEL PUNTO)
- $df_{x_0}(h) = \underbrace{\langle \nabla f(x_0), h \rangle}_{\text{PROD. SCALARE IN } \mathbb{R}^n} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$

CONSIDERO $n=3$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|v\| \cos(\theta)$. IL GRADIENTE È LA DIREZIONE DI MASSIMA CRESCITA $(\overset{\text{THETA}}{\theta} = 0)$ DELLA f.
SE PER SEMPLICITÀ $\|v\| = 1$, $\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| \leq \|\nabla f(x_0)\|$ È UN IDENTITÀ PER $\theta = 0$

$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{\langle A, h \rangle}_{df_{x_0}(h)} + o(\|h\|)$, $h \to 0$

↗ RELAZIONE CAUCHY-SCHWARZ

NOTO CHE $|\langle A, h \rangle| \leq \|A\| \cdot \|h\| \to 0$, CIOÈ $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ → CIOÈ CONTINUA

PER DEF: $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ DOBBIAMO DIM. LA SUA $\exists$

$= \lim_{t \to 0} \frac{T(\cancel{t}v)}{\cancel{t}} + \frac{o(\|tv\|)}{t} = T(v) = A \cdot v$

PER LINEARITÀ

MATRICE (VETTORE) CHE RAPP. T

$\|v\| \cdot \frac{o(\|tv\|)}{\|v\| \cdot t} = \|v\| \cdot \frac{o(\|tv\|)}{\pm \|tv\|} \to 0$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i v_i \iff \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i v_i$$

NEL CASO $v = e_i$ (BASE CANONICA), OTTENGO $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0) = A_j$, CIOÈ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ (DERIVATA PARZIALE)

CRITERIO DI DIFFERENZIABILITÀ:

$f \in C^1 \implies$ DIFFERENZIABILITÀ DI $f \Rightarrow f$ CONTINUA

$\hookrightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle$

TEOREMA (DIFFERENZIABILITÀ DI f):

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω APERTO, $f: \Omega \to \mathbb{R}$. SE $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ (CIOÈ $\exists$ DERIVATE PARZIALI IN Ω E SONO CONTINUE)

TH: f È DIFFERENZIABILE $\forall$ PUNTO $\in \Omega$. $\forall x_0 \in \Omega$: $df_{x_0}(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.

DIM:

$n=2$ (PER $n \in \mathbb{N}$ È SIMILE). SIA $(x_0, y_0) \in \Omega$. LA TH PUÒ ESSERE RISCRITTA COME:

$$f(x_0+h, y_0+k) \overset{?}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \quad \text{CON } h,k \text{ t.c. } (x_0+h, y_0+k) \in \Omega$$

$\neq$ DAL VALORE DELL'ENUNCIATO

NOTIAMO CHE:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \pm f(x_0, y_0+k) = \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)}_{I} + \underbrace{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}_{II}$$

APPLICHIAMO TEO. MEDIA LAGRANGE:

$$\begin{cases} \exists x_h \in [x_0, x_0+h],\ h>0 & \exists y_k \in [y_0, y_0+k],\ k>0 \\ \exists x_h \in [x_0+h, x_0],\ h<0 & \exists y_k \in [y_0+k, y_0],\ k<0 \end{cases} \text{ t.c. } I + II = \frac{\partial f}{\partial x}(x_h, y_0+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_k)k$$

LA TH È EQUIVALENTE A: $\dfrac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{?} 0$

(DIMOSTRARE PER I PUNTI INTERMEDI È UGUALE A x_0, y_0)

$$\left| \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} f(x_h, y_0+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_k)k - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \right\} \right|$$

(METTO VAL ASS. PERCHÈ $\lim_{x\to 0}|x|$ E $\lim_{x\to 0} x$ SONO $=$)

$$\overset{\text{DISU. TRIAN.}}{\leq} \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right|}_{\to 0 \ (h,k)\to(0,0)} + \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right|}_{\to 0 \ (h,k)\to(0,0)}$$

GRAZIE AL FATTO CHE $x_h \to x_0$, $h \to 0$; $y_k \to y_0$, $k \to 0$ (x_h, y_k COLLASSANO SU x_0, y_0)

TEOREMA (DERIVABILITÀ DI FUNZIONI COMPOSTE)

HP: SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, DIFFERENZIABILE IN A E $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, φ DERIVABILE IN $\mathbb{R}^n$

SIA $\underbrace{\varphi([a,b])}_{\text{IMMAGINE}} \subseteq A$. ($\exists f \circ \varphi$).

TH: f COMPOSTA $f \circ \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE SU $[a,b]$ E $(f \circ \varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$, DOVE $\varphi'(t) := (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))$

DIM:

SIA $t_0 \in [a,b]$. PER HP f DIFF. IN $x_0 = \varphi(t_0)$

(*) $f(y) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle + o(\|y - x_0\|)$. INOLTRE φ È DERIVABILE IN t_0:

$\varphi(t_0+h) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \cdot h + o(h)$, $h \to 0$. PONGO $y = \varphi(t_0+h)$ in (*):

$f(\varphi(t_0+h)) = f(\varphi(t_0)) + \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi(t_0+h) - \varphi(t_0) \rangle + o(\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|)$

E INOLTRE L'ENUNCIATO È EQUIVALENTE A: $\exists \lim_{h\to 0} \dfrac{(f\circ\varphi)(t_0+h) - (f\circ\varphi)(t_0)}{h} = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) \rangle$

DALLE CONSID. INIZIALI:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\circ\varphi)(t_0+h) - (f\circ\varphi)(t_0)}{h} = \left\langle \nabla f(\varphi(t_0)), \frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} \right\rangle + \boxed{\frac{o(\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|)}{h}}$$

$$\underbrace{\frac{o(\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|)}{\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|}}_{=0} \cdot \underbrace{\frac{\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|}{h}}_{\text{LIMITATA } (\|\varphi'(t_0)\|)} = 0$$

CONCLUSIONE

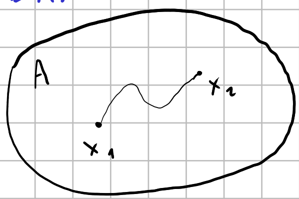
$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ\varphi)(t_0+h) - (f\circ\varphi)(t_0)}{h} = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) \rangle \quad \square$$

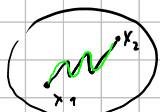
TEOREMA (SE UNA f HA DIFFERENZIALE NULLO, È COSTANTE)

HP: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO e CONNESSO (PER ARCHI), $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE, TALE CHE $\nabla f(x) = (0, \dots, 0)$ $\forall x \in A$

TH: f COSTANTE

DIM:





DIMOSTRIAMO IL TEO. PRENDENDO φ DIFFERENZIABILE $\varphi: [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$

"SMUSSAMENTO" NEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DELLA DERIVATA

QUINDI CONSIDERO $\varphi(a) = x_1$ e $\varphi(b) = x_2$, φ DERIVABILE IN $[a,b]$.

CONSIDERO $f\circ\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. È DERIVABILE PER TEO. PRECEDENTE: $(f\circ\varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \overset{\text{PER HP}}{=} 0$

DA ANALISI I, $f\circ\varphi$ È COSTANTE, IN PARTICOLARE $(f\circ\varphi)(a) = (f\circ\varphi)(b) \iff f(x_1) = f(x_2)$ CON x_1 e x_2 ARBITRARI

Piani tangenti

DEF: $\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

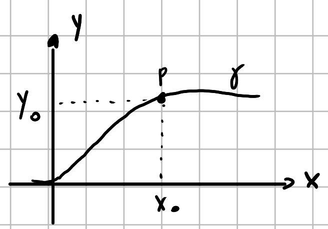
$\varphi(x,y) := (x, y, f(x,y)) \in G_f$ (GRAFICO DI f)

↳ MAPPA DI $f(x)$ SU UN PIANO 3D

OSS: LA CORRISPONDENZA $\varphi: \Omega \to G_f$ È BIUNIVOCA: FISSATO $P \in G_f$ $\exists (x_0, y_0) \in \Omega$ t.c. $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

DEF: IL PIANO TANGENTE A UNA f IN P È L'INSIEME DEI VETTORI TANGENTI A QUEL PUNTO.

CONSIDERO UNA CURVA $\gamma: (-\delta, \delta) \ni t \longrightarrow (x(t), y(t)) \in \Omega$.



QUINDI $(x_0, y_0) = \gamma(0) \to$ ALL'ISTANTE 0 PASSA PER x_0, y_0

SIMILE AL MODELLO CINEMATICO

CIOÈ $(x_0, y_0) = \varphi^{-1}(P)$ (CON P FISSATO) $\to$ SIAMO SICURI $\exists$ PER BIUNIVOCITÀ.

A QUESTO PUNTO CONSIDERO UN ULTERIORE CURVA $\varphi(\gamma(t)): (-\delta, \delta) \to G_f$ e $\varphi(\gamma(t)) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ CON $t \in (-\delta, \delta)$. AL VARIARE DI t CREIAMO UN CAMMINO SU G_f DOVE CON $t=0$, $\varphi(\gamma(0)) = P$.

OSS: SE $\gamma(t)$ È REGOLARE (CIOÈ $\gamma \in C^1(-\delta, \delta)$ t.c. $\gamma'(t) \neq 0$) ALLORA ANCHE $\varphi(\gamma(t))$ È REGOLARE

MATRICE JACOPIANA:

DATA $\varphi(x,y) := (\underset{\varphi_1}{x}, \underset{\varphi_2}{y}, \underset{\varphi_3}{f(x,y)})$

$$\boxed{J_p(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(x,y) \\ \nabla\varphi_2(x,y) \\ \nabla\varphi_3(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}}$$

DOVE $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

LA MATRICE J_p HA RANGO 2 $\left(c_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + c_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \iff c_1 = c_2 = 0 \right)$

CERCHIAMO QUINDI $\varphi'(\gamma(t))$, CHE È REGOLARE E PER IL TEO. DERIVAZIONE COMPOSTA:

$\varphi'(\gamma(t)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\gamma(t))y'(t) \neq \underline{0}$ (CON $t \in (-\delta, \delta)$ SE $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq \underline{0}$)

E IN PARTICOLARE $\varphi'(\gamma(0))$, CON $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ E $\varphi(x_0,y_0) = (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \to \varphi'(\gamma(0)) = \varphi'(x_0,y_0)$
CHE È ESPRIMIBILE COME COMB. LINEARE DI $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\gamma(0))$ E $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\gamma(0))$.

INOLTRE VALE IL VICEVERSA: SE $\exists$ $w = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) + \mu \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)$, POSSO DEFINIRE.

UNA CURVA REGOLARE PASSANTE PER P, IL CUI VETTORE TANGENTE PER $t=0$ È w: $p(t) := \varphi(\lambda t + x_0, \mu t + y_0)$
E $p(0) = \varphi(x_0,y_0) = P$. INOLTRE $p'(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\lambda t + x_0, \mu t + y_0)\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\lambda t + x_0, \mu t + y_0)$

QUINDI DEFINIAMO LO SPAZIO TANGENTE AL PUNTO $p \in G_f$ L'INSIEME DELLE COMB. LINEARI DI $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)$ E $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)$

DEFINIAMO VERSORE NORMALE AL PIANO TANGENTE A G_f IN P:

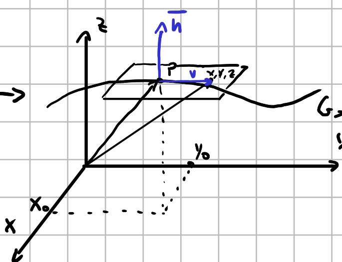
$$\boxed{\bar{n} := \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)}{\| \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0) \|}}$$

DOVE $\bar{a} \wedge \bar{b}$ $(\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3) = \det\begin{pmatrix} \bar{e}_1, & \bar{e}_2, & \bar{e}_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{pmatrix}$ CON $\bar{e}$ BASE CANONICA E $\bar{a} \wedge \bar{b}$ ORTOGONALE A $\bar{a}$ E $\bar{b}$

IN $\mathbb{R}^3 \to \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ E $\frac{\partial\varphi}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

$\bar{n} = \left(\frac{-f_x(x_0,y_0)}{\sqrt{1 + f_x^2(x_0,y_0) + f_y^2(x_0,y_0)}}, \frac{-f_y(x_0,y_0)}{\cdots}, \frac{1}{\cdots} \right)$

GRAFICAMENTE $\longrightarrow$



(x,y,z) GENERICI $\in$ PIANO TANG.

DA QUESTA RELAZIONE RICAVIAMO CHE: $V = (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0,y_0))$ È $\perp$ A $\bar{n}$: $\langle V, \bar{n} \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$

E DA CUI LA FORMULA DEL PIANO TANGENTE: $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$

STUDIO DI ESTREMI LOCALI

DERIVATA DI ORDINE SUPERIORE:

DATA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad i = 1, \dots, n$

DICIAMO f È DERIVABILE 2 VOLTE RISPETTO A x_j SE:

$\exists$ $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ E PONIAMO $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}$

TEOREMA DI SCHWARZ:

HP: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, $\underline{f \in C^2(A)}$ ($\exists$ DERIVATE SECONDE E SONO CONTINUE SU A)

TH: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\quad \forall i \neq j \quad i,j = 1, \dots, n$

MATRICE HESSIANA:

HP: $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$

TH: LA MATRICE HESSIANA DI f IN $x_0 \in A$ È: $Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1, \partial x_2}, & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0), & \dots \\ \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix} \longrightarrow$

- SIMMETRICA PER TEO. SCHWARZ
- TUTTI GLI AUTOVALORI SONO REALI

(SOLUZ. DI $\det(Hf(x_0) - \lambda I_n) = 0$)

MATRICE QUADRATICA ASSOCIATA

DATA UNA MATRICE $H = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ASSOCIO UNA FUNZIONE $q_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (FORMA QUADRATICA ASSOCIATA AD H)

$$\boxed{h \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Hh, h \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j}$$

- POSITIVA : $q_H(h) > 0$ $\quad \forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- NEGATIVA : $q_H(h) < 0$
- INDEFINITA : $\exists h_1, h_2$ t.c. $q(h_1) < 0 < q(h_2)$

TEOREMA (CORRISPONDENZA AUTOVALORI - q_H)

HP: H SIMMETRICA, q_H FORMA QUADRATICA

TH:
1) q_H POSITIVA $\iff$ TUTTI AUTOV. POSITIVI
2) NEGATIVA $\iff$ NEGATIVI
3) INDEFINITA $\iff$ $\exists \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

UN "MINORE PRINCIPALE" È UN MINORE OTTENUTO CANCELLANDO RIGHE e COLONNE DELLO STESSO INDICE

- q_H POSITIVA: TUTTI I MINORI PRINCIPALI SONO $\oplus$
- NEGATIVA : MINORI PRINCIPALI DI INDICE PARI SONO $\oplus$, I DISPARI $\ominus$
- INDEFINITA: $\det(H) \neq 0$ e $\exists$ MINORE PRINCIPALE DI ORDINE PARI NEGATIVO

DEFINIZIONE MAX e MIN LOCALE

DATA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

x_0 È MAX SE: $\exists r > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\quad \forall x \in B(x_0, r) \cap A$

MIN SE: $f(x) \geq f(x_0)$

e PER TEO FERMAT: SE $x_0 \in \mathring{A}$, $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$. NON VALE IL VICEVERSA.

STUDIO PUNTI CRITICI CON MATRICE HESSIANA

- (x_0, y_0) È UN **PUNTO CRITICO** SE: $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ (A DIMENSIONE n, CON IL GRADIENTE NULLO)
- UN PUNTO CRITICO, SE NON È NÉ DI MASSIMO NÉ DI MINIMO È DETTO **DI SELLA**.

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR DEL SECONDO ORDINE)

HP: $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, $f \in C^2(A)$.

$$\boxed{\text{TH: } f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2}\langle Hh, h\rangle + o(\|h\|^2)}$$

CON $\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \to 0$ $(\|h\| \to 0)$ e H MATRICE HESSIANA.

PER A APERTO, SAPPIAMO CHE $\exists\, B(x_0, r) \subset A$ CIOÈ $\| x_0 - (x_0 + h)\| < r \to \|h\| < r$

DIM:

SIA $B(x_0, r) \subset A$ CONVESSO, ALLORA $x \in B(x_0, r) \Rightarrow \underbrace{[x, x_0]}_{\text{SEGMENTO CHE CONGIUNGE } x_0 \text{ e } x} \subset B(x_0, r) \subset A$

"PARAMETRIZZO" QUESTO SEGMENTO USANDO $\varphi : [0, \|x - x_0\|] \to A \subset \mathbb{R}^n$

DEFINITA COME: $\varphi(t) := x_0 + \frac{t(x-x_0)}{\|x-x_0\|}$ CON $\varphi'(t) := \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$ COSTANTE RISPETTO A t

$\varphi(0) = x_0$ e $\varphi(\|x-x_0\|) = \cancel{x_0} + \frac{x-x_0}{\cancel{\|x-x_0\|}}\cancel{\|x-x_0\|} = x$

USIAMO UNA FUNZ. AUSILIARIA:

$g(t) := f(\varphi(t))$, $g : [0, \|x-x_0\|] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, $\varphi \in C^2$ CON $\Rightarrow f(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t) \in C^2([0, \|x-x_0\|])$

e DA TAYLOR PER UNA VARIABILE:

$\underline{g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2)}$, $t \to 0$

CON $g(0) = f(\overbrace{\varphi(0)}^{x_0}) = f(x_0)$

$\underset{\text{DAL TEO DER. COMPOSTA}}{g'(t) =} \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$, $\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} = k$ $= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) k_i$

$g''(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))\, x_i\right) \overset{\text{PERCHÉ DERIVAZ. È LINEARE}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))\, x_i \overset{\text{DERIV. COMPOS.}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\varphi(t))\, k_j k_i$

CASO $g''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overbrace{\varphi(0)}^{x_0})\, k_j k_i$

RITORNANDO ALLA FORMULA DI TAYLOR: $g(t) = f(\varphi(t)) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2)$

$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), k\rangle t + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) t^2 + o(t^2)$

PONGO $t = \|x - x_0\| \to g(\|x - x_0\|) = f(\varphi(\|x-x_0\|)) = f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), \frac{x-x_0}{\cancel{\|x-x_0\|}} \rangle \cancel{\|x-x_0\|} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \overbrace{\frac{(x-x_0)_i}{\cancel{\|x-x_0\|}}}^{k_i} \overbrace{\frac{(x-x_0)_j}{\cancel{\|x-x_0\|}}}^{k_j} \overbrace{\cancel{\|x-x_0\|}^2}^{t^2}$

$+ o(\|x-x_0\|^2)$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x-x_0), x-x_0\rangle + o(\|x-x_0\|)^2$ $\square$ (DA $h = x - x_0$)

TEOREMA MAX/MIN $\leftrightarrow$ MATRICE HESSIANA

HP: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω APERTO, $f \in C^2(\Omega)$. $z_0 \in \Omega$ t.c. $\nabla f(z_0) = \underline{0}$

TH: ① $Hf(z_0)$ È DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow$ z_0 MINIMO LOCALE
NEGATIVA $\Rightarrow$ MASSIMO LOCALE
INDEFINITA $\Rightarrow$ SELLA

DIMOSTRAZIONE:
DA TAYLOR (SECONDO ORDINE)

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \langle \cancel{\nabla f(z_0)}, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(z_0)h, h\rangle + o(\|h\|^2), \quad \|h\| \to 0$$

GIUSTIFICO ①

$f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{1}{2}\langle Hf(z_0)h, h\rangle + o(\|h\|^2)$. PONIAMO $z_0 \in \Omega$, APERTO (CIOÈ: $\exists B(z_0, r) \subset \Omega$)
$x \in B \iff x = z_0 + h \in B(z_0, r)$, CIOÈ: $\|z_0 - (z_0+h)\| = \|h\| < r$. QUINDI $\exists r > 0$ t.c. $\|h\| < r \Rightarrow z_0 + h \in \Omega$

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} \overbrace{\langle Hf(z_0) \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle}^{q_{Hf(z_0)}\left(\frac{h}{\|h\|}\right)} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|} \right)$$

$\frac{h}{\|h\|} \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ COMPATTO, SAPPIAMO CHE $q_{Hf(z_0)}$ È CONTINUA, QUINDI VALE IL TEO. DI WEIERSTRASS:

$\exists x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ t.c. $q_{Hf(z_0)}(x_0) = \min_{h: \|h\|=1} q_{Hf(z_0)}(h) = m > 0 \Rightarrow f(z_0+h) - f(z_0) \geq \|h\|^2 \left\{ \frac{m}{2} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|} \right\}$ ⊛ ALLORA POSSO TROVARE $c > 0$ t.c.

SE $\|h\| < c$ ALLORA $\left| \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right| \leq \frac{m}{2} \iff -\frac{m}{2} \leq \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \leq \frac{m}{2}$ *

USO * IN ⊛: $f(z_0+h) - f(z_0) \geq \|h\|^2 \left\{ \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \right\} = 0 \quad \forall h$ t.c. $\|h\| < c \Rightarrow f(z_0+h) \geq f(z_0)$ □

- CASO DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

TEOREMA (max/min e relazione con matriche Hessiana in R²)

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e $f \in C^2(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ t.c. $\nabla f(z_0) = \underline{0}$. $Hf(z_0)$ MATRICE HESSIANA.

TH: ① $\det(Hf(z_0)) > 0 \Rightarrow z_0$ È ESTREMANTE LOCALE, MINIMO RELATIVO SE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0) > 0$ e MAX RELATIVO $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0) < 0$
② $< 0 \Rightarrow z_0$ NON È ESTREMANTE.

DIM:
DATA $f \in C^2(\Omega)$ ALLORA $Hf(x_0)$ È SIMMETRICA $\Rightarrow$ AUTOVALORI $m, M \in \mathbb{R}$ (SOLUZIONI DI $P(\lambda) = 0$ CON $P(\lambda) = \det(Hf(z_0) - \lambda I_{2\times 2})$)

CIOÈ: $\det \begin{pmatrix} f_{xx}(z_0) - \lambda & f_{xy}(z_0) \\ f_{xy}(z_0) & f_{yy}(z_0) - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$,
TENIAMO IN CONTO CHE IL POL. CARATT. È: $P(\lambda) = (\lambda - m)(\lambda - M) = \lambda^2 - (m+M)\lambda + mM$

ABBIAMO LE RELAZIONI $\overbrace{f_{xx} + f_{yy}}^{①} = m + M$. $\det Hf(z_0) = \overbrace{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}^{②} = mM$

SE ② $< 0 \to m$ e M SEGNO DISCORDE $\to H$ INDEFINITA
② $> 0 \to m$ e M SEGNO CONCORDE $\to H$ POSITIVA o NEGATIVA. È IMPLICATO ANCHE $f_{xx} \cdot f_{yy} > 0$.

DALLA RELAZIONE $f_{xx} + f_{yy} = m + M$ ABBIAMO CHE PER $f_{xx} > 0$ LA FORMA QUADRATICA ASSOCIATA È DEF. POSITIVA
$f_{xx} < 0$ NEGATIVA

ESTREMANTI VINCOLATI:

ES: $f(x,y)=e^{x+y}$ RISTRETTA a $\overline{B(0,1)}=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

PER WEIERSTRASS: $\exists \underset{\text{MIN}}{(x_m,y_m)}, \underset{\text{MAX}}{(x_M,y_M)} \in \overline{B(0,1)}$ t.c. $f(x_m,y_m)\le f(x,y)\le f(x_M,y_M)$

SE SONO INTERNI, $\nabla f=0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\underset{\neq 0}{e^{x+y}}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ CHE NON SARÀ MAI $=0$

QUINDI SONO SUI BORDI: $\partial B(0,1)=\{(x,y): \underbrace{x^2+y^2-1=0}_{f(x,y)=0}\}$.

↳ RIDUCIAMO IL PROBLEMA A UNA MASSIMIZZAZIONE e MINIMIZZAZIONE VINCOLATA:

- $f(x_m,y_m)=\min f(x,y)=\min f(x,y)$
- $f(x_M,y_M)=\max\limits_{(x,y)\in\partial B(0,1)} f(x,y)=\max\limits_{(x,y):\, f(x,y)=0} f(x,y)$

TEOREMA FUNZIONE IMPLICITÀ:

PERCHÈ? MOLTI LUOGHI GEOMETRICI SONO ESPRIMIBILI COME EQUAZIONI CON $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

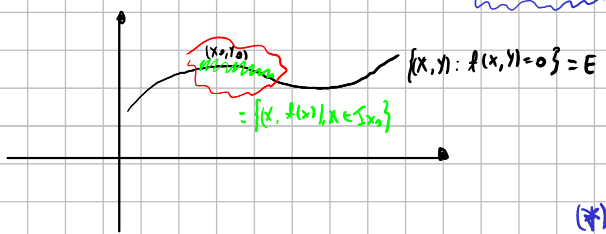
e ci CHIEDIAMO: $\exists$ UN INTORNO DI $(x_0,y_0)\in E$ $\ U_{x_0,y_0}\subset\mathbb{R}^2$, t.c. $E\cap U_{(x_0,y_0)}\overset{?}{=}G_h=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=h(x),\ x\in I_{x_0}\}$

ES: SE $E=\{(x,y): x^2+y^2-1=0\}$ DOVE (x,y) CON $y>0$ SI PUÒ SCRIVERE $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\ x\in I_{x_0}$, CON $y>0$ COINCIDE CON: $\{(x,\sqrt{1-x^2}),\ x\in(-1,1)\}=G_h$. DOBBIAMO RISOLVERE L'EQUAZIONE ESPRIMENDOLA IN FUNZIONE DELL'ALTRA

HP: $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ APERTO, $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $f\in C^1(\Omega)$. $(x_0,y_0)\in\Omega$ t.c. $f(x_0,y_0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

TH: $\exists$ INTORNI U_{x_0} DI x_0 e V_{y_0} DI y_0 $\ U_{x_0}\times V_{y_0}\subseteq\Omega$ t.c.
$\forall x\in U_{x_0}$ $\exists$, UNICO $y=f(x)$ t.c. $f(x,y)=0$, $y_0=f(x_0)$ e $\{(x,y)\in\Omega : f(x,y)=0\}\cap \overset{\text{INTORNO DI }(x_0,y_0)}{U_{x_0}\times V_{y_0}}=\{(x,f(x)),\ x\in U_{x_0}\}$

VISTO CHE $f\in C^1(\Omega)$ $\exists\ \to\ f'(x)=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,f(x))}$, $x\in I_{x_0}$ $\ \overset{=}{\rightarrow}\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,f(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,f(x))\cdot f'(x)=0$ $\ (*)$



CIOÈ $\gamma(x)=(x,f(x))$ È UNA CURVA DI $E\cap U_{(x_0,y_0)}$

$\gamma'(x)=(1,f'(x))$

$(*)\Rightarrow (1,f'(x))\perp\nabla f(x,f(x))$

DIM: (NON LO CHIEDE ALL'ORALE)

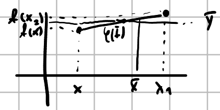
DATO $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$, HA UN SEGNO. $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ $\boxed{I^{\delta}_{x_0}}$ $\boxed{I^{\gamma}_{y_0}}$

$f \in C^1(\Omega)$ POSSO SUPPORRE $f_y(x,y) > 0$ SU $[x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\gamma, y_0+\gamma]$. ALLORA $y \longmapsto f(x_0,y)$ È CRESCENTE ALLORA

DATO CHE $f(x_0,y_0)=0$ ALLORA $\begin{cases} f(x_0,y_0-\gamma)<0 \\ f(x_0,y_0+\gamma)>0 \end{cases} \overset{\text{PER CONTINUITÀ}}{\Longrightarrow} \begin{cases} f(x,y_0-\gamma)<0 \\ f(x,y_0+\gamma)>0 \end{cases}$ $\forall x \in \begin{matrix} I^{\delta_1}_{x_0} \\ I^{\delta_2}_{x_0} \end{matrix} \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$ ALLORA DEFINISCO $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ e ① e ② VALGONO ASSIEME

QUINDI $\forall x \in I^{\delta}_{x_0}$ $\exists!$ $y = f(x) \in I^{\gamma}_{y_0}$ t.c. $f(x,y)=0$. PONGO $U_{x_0} = I^{\delta}_{x_0}$ e $V_{y_0} = I^{\gamma}_{y_0}$, E $y_0 = f(x_0)$ DATO CHE È L'UNICO t.c. $f(x_0,y_0)=0$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE f È CONTINUA SU U_{x_0}. PRENDIAMO x_1 e $x \in U_{x_0}$ e SIA $\begin{matrix} y = f(x) \\ y_1 = f(x_1) \end{matrix}$ e



$\varphi(\bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y})$

PARAMETRIZZANDO IL SEGMENTO CON $\varphi(t) = (x, f(x)) + t(x_1-x, f(x_1)-f(x))$

QUINDI USIAMO $g(t) = F(\varphi(t))$, $t \in [0,1]$. A $g(t)$ APPLICHIAMO IL TEO. DEL VALORE MEDIO DI LAGRANGE:

$g(b)-g(a) = g'(\bar{t})(b-a)$ $\bar{t} \in (a,b)$. $(a,b) = (0,1)$. $\rightarrow$ $g(1)-g(0) = g'(\bar{t})$, $\bar{t} \in (0,1)$

TROVO $\varphi'(t) = (x_1-x, f(x_1)-f(x))$, $\forall t$

RISCRIVO USANDO f

$g(1)-g(0) = f(x_1, \underset{0}{f(x_1)}) - f(x, \underset{0}{f(x)})$, $g'(1) = 0$ CIOÈ: $\frac{d}{dt} f(\varphi(t))\Big|_{t=\bar{t}} = 0$

DAL TEO. DERIVAZ. COMPOSTA:

$\frac{d}{dt} f(\varphi(t))\Big|_{t=\bar{t}} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})(x_1-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})(f(x_1)-f(x)) = 0$ CIOÈ $f(x)-f(x_1) = -\frac{f_x(\bar{x},\bar{y})}{f_y(\bar{x},\bar{y})}(x-x_1)$

e $|f(x)-f(x_1)| \leq C|x-x_1|$ DOVE $\left|\frac{f_x(\bar{x},\bar{y})}{f_y(\bar{x},\bar{y})}\right| \leq C$ $\Rightarrow$ $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = -\frac{f_x(\bar{x},\bar{y})}{f_y(\bar{x},\bar{y})}$

$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$, CONTINUITÀ.

COMPOSIZ. f CONTINUE $\Rightarrow f'$ È CONTINUA

PER $x_1 \to x$, f CONTINUA, ABBIAMO $(\bar{x},\bar{y}) \to (x, f(x))$ e $f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = -\lim_{(\bar{x},\bar{y}) \to (x,f(x))} \frac{f_x(\bar{x},\bar{y})}{f_y(\bar{x},\bar{y})} = -\frac{f_x(x,f(x))}{f_y(x,f(x))}$

DEFINIZIONE:

SIA $E = \{x \in f(x) = 0\}$ x_m È UN PUNTO DI MASSIMO CONDIZIONATO PER f CON VINCOLO $f(x)=0$ SE $\exists\, U \subset \mathbb{R}^2$ INTORNO DI x_m t.c. $f(x) \leq f(x_m)$ $\forall x \in E \cap U$

TEOREMA: REGOLA DEL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE:

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO, $f, F: \Omega \to \mathbb{R}$, $f, F \in C^1(\Omega)$. $(x_0,y_0) \in \Omega$ MAX o MIN VINCOLATO $(f(x,y)=0)$. INOLTRE $\nabla F(x_0,y_0) \neq 0$

TH: $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.c. (x_0, y_0, z_0) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \\ F(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$

DIM: $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. PER TEO. FUNZIONE IMPLICITA, IN I_{x_0} L'INSIEME $E = \{(x,y) \in \Omega : F(x,y) = 0\}$ COINCIDE $h \in C^1$ DI 1 VARIABILE $(y=h(x))$

DALLO STESSO TEOREMA: $h'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$ $\Longleftrightarrow$ $F_x(x_0,y_0) + h'(x_0)F_y(x_0,y_0) = 0$ Ⓐ

DATO CHE (x_0,y_0) È ESTREMANTE VINCOLATO PER F ALLORA x_0 È "LIBERO" PER $f(x,h(x))$ = RESTRIZIONE LOCALE DI f AD E)

ALLORA APPLICO FERMAT $x \longmapsto f(x,h(x)) \Rightarrow f'(x_0, h(x_0)) = 0$ $\Rightarrow$ DERIVATA DI FUNZ. COMPOSTA

$0 = f'(x_0, \underbrace{h(x_0)}_{y_0}) = f_x(x_0,h(x_0)) + f_y(x_0,h(x_0))$ Ⓑ

A+B = $\nabla f(x_0,y_0)$ e $\nabla F(x_0,y_0)$ ORTOGONALI A $(1, h'(x_0))$ $\Longrightarrow$ MULTIPLI L'UNO DELL'ALTRO: $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda_0 \nabla F(x_0,y_0)$ $\square$