• TEOREMA 8:

SIA PER SEMPLICITÀ $K=2$ (ORDINE EQ DIFF.) e $a_1(x)$, $a_0(x) \in C(I)$ $I \subseteq \mathbb{R}$, w_1 e w_2 SIANO SOLUZIONI DI $\overbrace{y''+a_1(x)y'+a_0y}^{\mathcal{L}(y)}=0$

ALLORA w_1 e w_2 SONO LINEARM. INDIPENDENTI SU I SE E SOLO SE:

$$\boxed{\det\underbrace{\begin{pmatrix} w_1(x) & w_2(x) \\ w_1'(x) & w_2'(x) \end{pmatrix}}_{\text{MATRICE WRONSKIANA}} \neq 0 \quad \forall x \in I}$$

• ESEMPIO: VERIFICARE: DATE $w_1(x)=x$ e $w_2(x)=2|x|$

- DIPENDENZA LIN. SU $I=(-\infty,0)$
- INDIP. LIN SU $I=(-\infty,+\infty)$

• TROVARE SOLUZIONE GENERALE (TUTTE LE SOLUZIONI) DI:

$9x^2y''+12xy'-2y=0$ SU $I=(0,+\infty)$

↳ L'EQ. NON È IN FORMA NORMALE ($\mathcal{L}(y)=0$) MA POSSIAMO RICONDURCI A ESSA DIVIDENDO PER $9x^2$

$\overset{K=2}{\Longrightarrow}$ SOLUZIONE GENERALE $y(x)=c_1w_1(x)+c_2w_2(x)$ DOVE w_1, w_2 LIN. INDIP. SU $(0,+\infty)$

- CONSIDERO DUE EQ. DEL TIPO: $y(x)=x^\alpha$ SU $(0,+\infty)$ e CONSIDERO $y'=\alpha x^{\alpha-1}$, $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

SOSTITUENDO:

$$9x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+12x\alpha x^{\alpha-1}-2x^\alpha=0 \quad \forall x \in (0,+\infty) \Rightarrow [9\alpha(\alpha-1)+12\alpha-2]\cancel{x^\alpha}=0 \Rightarrow 9\alpha^2+3\alpha-2=0 \Rightarrow \alpha=\tfrac{1}{3} \text{ e } \alpha=-\tfrac{2}{3}$$

CIOÈ $w_1=x^{\frac{1}{3}}$ e $w_2=x^{-\frac{2}{3}}$ SONO SOLUZIONI SU $(0,+\infty)$

VERIFICO LA LIN. INDIPENDENZA

$$\det\begin{pmatrix} w_1(x) & w_2(x) \\ w_1'(x) & w_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x^{\frac{1}{3}} & x^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix} = -x^{-\frac{4}{3}} \neq 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$$

$\overset{\text{TEO 8}}{\Longrightarrow}$ w_1, w_2 LIN. INDIP. e $\overset{\text{TEO 6}}{\Longrightarrow}$ LA SOL GENERALE È: $y(x)=c_1x^{\frac{1}{3}}+c_2x^{-\frac{2}{3}}$, $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$

• TROVARE UNICA SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} 9x^2y''+12xy'-2y=0 \\ y(1)=1 \\ y'(1)=0 \end{cases} \rightarrow \text{PARTO DALLA SOLUZ. GENERALE } y(x)=c_1x^{\frac{1}{3}}+c_2x^{-\frac{2}{3}} \xRightarrow{\text{UTILIZZO CONDIZ. INIZIALE}} \begin{cases} 1=y(1)=c_1w_1(1)+c_2w_2(1) \\ 0=y'(1)=c_1w_1'(1)+c_2w_2'(1) \end{cases}$$

$$= \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} w_1(1) & w_2(1) \\ w_1'(1) & w_2'(1) \end{pmatrix}}^{\text{DET} \neq 0}}_{=W}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=W^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$