

① DETERMINARE L'UNICA SOLUZ. DEL (PC)

① $\begin{cases} y' = 2xy^{20} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e I_{\max} su cui $y=y(x)$ solz. È DEFINITA

② det. soluz. $y=y(x)$ (PC) $\begin{cases} y' + x^3 y = -\frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) y^5 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ * DIM. CHE TED. 9 È APPLICABILE

③ $w_1(x) = x$ $w_2(x) = 2|x|$
 • LIN DIP IN $I = (-\infty, 0)$
 • LIN INDIP IN $I = (-\infty, +\infty)$

① RISOGLIO EQ. DIFF. $\Rightarrow \int \frac{y'}{y^{20}} dx = \int 2x dx \Rightarrow \int \frac{y'}{y^{20}} dx = x^2 + c$
 $= -\frac{1}{19 y^{19}} + c = x^2 + c \Rightarrow y^{19} = -\frac{1}{19(x^2 + c)} \Rightarrow y = \sqrt[19]{-\frac{1}{19(x^2 + c)}}$
 $y(0)=1 \Rightarrow \sqrt[19]{-\frac{1}{19c}} = 1 \Rightarrow -\frac{1}{19c} = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{19}$
 $I_{\max} y = \sqrt[19]{-\frac{1}{19(x^2 - \frac{1}{19})}} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{19} \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq \frac{1}{19} \Rightarrow x \neq \pm \sqrt{\frac{1}{19}}$
 $I_{\max} = (-\frac{1}{\sqrt{19}}, +\frac{1}{\sqrt{19}})$

② $\begin{cases} y' + x^3 y = -\frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) y^5 \\ y(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y'}{y^5} + \frac{x^3}{y^4} = -\frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$

$z = y^{-4}$ e $z' = -4y^{-5} \cdot y'$
 $\begin{cases} -\frac{1}{4} z' + x^3 z = -\frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' - 4x^3 z = e^{x^4} \cos(x) \end{cases}$

$z(x) = e^{-p(x)} \left\{ c + \int e^{p(x)} \cdot q(x) dx \right\}$
 $e^{-x^4} \left\{ c + \int e^{x^4} \cdot e^{x^4} \cos(x) dx \right\}$
 $p(x) = \int -4x^3 dx = -x^4 + c$
 $z(x) = c e^{x^4} + e^{x^4} \sin(x)$

$y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{c e^{x^4} + e^{x^4} \sin(x)}}$
 $y(0) = -1 \Rightarrow 1 = \sqrt[4]{\frac{1}{c+0}} = \sqrt[4]{c} \Rightarrow c = 1$
 $y = -\frac{1}{\sqrt[4]{e^{x^4} + e^{x^4} \sin(x)}}$
 $\sin(x) \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi$

③ ~~$\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2|x| \\ 1 & \frac{2|x|}{x} \end{pmatrix} = 2|x| - 2|x| = 0 \quad x \neq 0$~~
 ~~$\det \begin{pmatrix} x & 2|x| \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -2x - 2|x| \rightarrow -2(x+|x|) \neq 0 \quad x \neq 0$~~
 ~~$\det \begin{pmatrix} x & 2|x| \\ 1 & +2 \end{pmatrix} = 2x - 2|x| \rightarrow 2(x-|x|) = 0$~~

③ NON SAPPIAMO CHE w_1 E w_2 SONO SOLUZIONI E w_2 NON È DERIV. IN 0

E OSSERVIAMO CHE PER $I = (-\infty, 0)$ ABBIAMO: $w_1 = x$ $w_2 = -2x$ CIO È
SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SU $(-\infty, 0)$

PER VERIFICARE CHE SONO LIN. INDIP SU \mathbb{R} DEVO VERIFICARE CHE

$$c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

→ $c_1 x + 2c_2 |x| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ E USIAMO $x = \pm 1$ COME CASI ARBITRARI

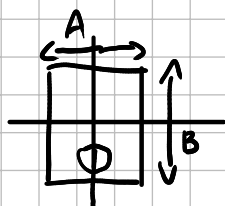
$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \text{ NON POSSO APPLICARE TED. 8}$$

②* $f(x, y) = -x^3 y - \frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) y^5 \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ESSENDO POLINOMIO

? DEVO VERIFICARE L'HP DI LIPSCHITZ → $|f(x, y) - f(x, z)| < L|y - z|$

CON $L > 0$ E $\forall (x, y), (x, z) \in B_r(0, 1)$

INIZIALI DALLE CONDIZIONI INIZIALI



$$\left| -x^3 y - \frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) y^5 + x^3 z + \frac{1}{4} e^{x^4} \cos(x) z^5 \right| < L|y - z|$$

PER DISUG. TRANG. $|x^3(y - z)| + \frac{1}{4} e^{x^4} |\cos(x)| |y^5 - z^5| < L|y - z|$

\swarrow \searrow

LA^3 Le^{A^4}

⇒ $y^5 - z^5 = 5c^4(y - z)$, $c \in (y, z)$ $|y|, |z| < B$
(LAGRANGE, VALOR MEDIO)

⇒ $|y^5 - z^5| \leq 5B^4|y - z|$

RISCRIVO:

$$\underbrace{\left\{ A^3 |y - z| + \frac{1}{4} e^{A^4} \cdot 5B^4 |y - z| \right\}}_{\text{COSTANTE}} < L |y - z|$$

$< \quad L$