TEOREMA:

HP: $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \le l_n$ $\forall x \in I$, $l_n \in \mathbb{R}$ (f_n funzioni limitate).

TH: 1- se $f_n \to f$ uniformemente, allora anche f è limitata: $\exists\, l \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \le l$ $\forall x \in I$

2- se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ conv. unif. su I, posto $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, allora anche f è limitata

DIM:

1. → dalla conv. unif: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0$ vale $|f_n(x) - f_n| < \varepsilon$ $\forall x \in I$.

Posto $\varepsilon = 1$, vale $|f_{n_0+1}(x) - f(x)| < 1$ ⊛.

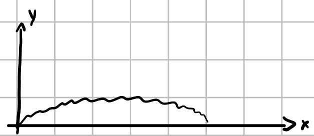
Allora: $|f(x)| = |f(x) - f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+1}(x)| \overset{\text{dis. triang.}}{\le} |f(x) - f_{n_0+1}(x)| + |f_{n_0+1}(x)| \le 1 + l_{n_0+1}$ $\forall x \in I$. → f è limitata □

2. → . . . .

SERIE DI FOURIER

Serve per risolvere eq. alle derivate parziali

Es: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$, $y = y(x,t)$
↳ incognita



Eq. "corda vibrante"

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} & (✱) \\ y(0,t) = y(l,t) = 0 & \\ y(x,0) = p(x) & \forall x \in [0,1] \\ \frac{\partial y}{\partial x}(x,0) = v(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases} \quad (✱)$$

Cerco soluzione di ⊛: $y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ (ansatz). Proviamo quindi a sostituire in ⊛

$X''(x)\,T(t) = \frac{1}{c^2} X(x)\, T''(t)$, supponendo $X(x) \ne 0$, $T(t) \ne 0$:

$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)}$ $\forall x, t$ e in particolare con $x = x_0$: $\overbrace{\frac{X''(x_0)}{X(x_0)}}^{\text{costante}} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}}_{\text{anch'essa quindi costante}}$ $\forall t$ costante $= -\lambda$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda \Rightarrow T''(t) + c^2\lambda T(t) = 0 \end{cases}$$
Eq. diff. ordinarie

Per la soluz totale (anche ✱) ⇒ serie di Fourier:

Es: $y'' + k^2 y = 0$, $k > 0$ ⇒ soluz. generale è: $y(x) = A\cos(kt) + B\,\mathrm{sen}(kt)$, il cui periodo è $\frac{2\pi}{k}$.

Considero $g(t) = \cos(kt)$

$g\left(t + \frac{2\pi}{k}\right) = \cos\left(k\left(t + \frac{2\pi}{k}\right)\right) = \cos(kt + 2\pi) = \cos(kt) = g(t)$. Il seno è analogo. Ho: T (periodo) $= \frac{2\pi}{k}$; ω (frequenza) $= T^{-1} = \frac{k}{2\pi}$

Serie di Fourier → rappresenta funzione periodica di periodo T come:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)}$$
con a_0, a_n, b_n opportuni

- $\frac{a}{2}$ ha periodo arbitrario
- $\cos\frac{2\pi x}{T}$ e $\mathrm{sen}\frac{2\pi x}{T}$ hanno periodo T
- $\cos\frac{2\pi n x}{T}$ e $\mathrm{sen}\frac{2\pi n x}{T}$ hanno periodo $\frac{T}{n} < T$

hanno periodo T $\forall n \ge 1$

TEOREMA DI EULERO - FOURIER:

HP: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)$ CONV. UNIF. SU $[0, T)$ A f

TH:
$$\boxed{\begin{aligned} &\bullet\ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx \qquad n = \overset{?}{0}, 1, 2, \ldots \\ &\bullet\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}}$$

FORMULE DI EULERO - FOURIER

DIM:

MEMBRO DI DESTRA CONTIENE SOLO FUNZ CONTINUE e LIMITATE + CONVERGE UNIF $\Rightarrow f$ È CONTINUA e LIMITATA

CON $n=0 \rightarrow a_0 \overset{?}{=} \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx$. PER DIMOSTRARLO, INTEGRIAMO SCAMBIANDO $\int_a^b$ CON $\sum_{0=0}^{b}$:

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_0^T \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^T \ldots}_{=0\ \forall n\geq 1} \iff \int_0^T f(x)\,dx = T\cdot\frac{a_0}{2} \longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \text{"MEDIA DI } f(x)\text{"} \Rightarrow m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \boxed{m \leq \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx \leq M}$$

↳ PERCHÈ AREA POSITIVA = AREA NEGATIVA