ESEMPI:

(PC) $\begin{cases} y' + \frac{2}{x} y = \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x^2} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

(I) TROVARE SOLUZIONE GENERALE SU $I = (0, +\infty)$

(II) TROVARE UNICA SOLUZIONE DEL PC

I Eq. DEL TIPO $y' + p(x) y = q(x)$, $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

DISCONTINUE IN 0. $(0, +\infty)$ È L'INTERVALLO MASSIMALE CON π

$p, q \in C(I) \rightarrow$ APPLICO TEOREMA 2

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left\{ C + \int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx \right\}$$

- $\int p(x) dx = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| = \ln x^2 \quad \forall x \in I$

$e^{\ln x^2} = x^2 \quad \forall x \in I$

$$\int e^{\int p(x) dx} = \int \cancel{x^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cancel{x^2}} dx = \frac{-\cos(4x)}{4}$$

QUINDI $y(x) = x^{-2} \left(C - \frac{\cos 4x}{4} \right)$ USO LA CONDIZ. INIZIALE PER RESTRINGERE LE SOLUZIONI

$$y(\pi) = \pi^{-2} \left(C - \frac{\cos 4\pi}{4} \right) = C - \frac{1}{4} = 0 \qquad C = \frac{1}{4}$$

SOLUZIONE FINALE: $y(x) = x^{-2} \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 4\pi}{4} \right)$

ESEMPIO:

(PC) $\begin{cases} y' + xy = x \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow$ FORMA DEL TIPO $y' + p(x) y = q(x)$

$\int p(x) dx = \frac{x^2}{2}$

$\int e^{\frac{x^2}{2}}$

$$y(x) = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} \left\{ C + \int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x \, dx \right\} = e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{ C + e^{\frac{x^2}{2}} \right\} = C e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$$

CONDIZ. INIZ.

$y(0) = C(1) + 1 = 0 \qquad C = -1$ SOLUZ. FINALE: $\boxed{y = 1}$

ESEMPIO

$y' + 4xy = 8x$, $I = \mathbb{R}$

TEOREMA 2 APPLICABILE

$e^{\int p(x)dx} = e^{2\int 2x dx} = e^{2x^2}$

$\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) = \int e^{2x^2} \cdot 8x = 2e^{2x^2}$

$\Rightarrow \underline{e^{-2x^2}\{c + 2e^{2x^2}\}} = 2 + ce^{-2x^2}$

- QUESTO METODO È APPLICABILE ANCHE CON COEFF DI $y' \neq 1$

PC $\begin{cases} x^2y' + x^3y = \sin x \\ y(-1) = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ PONGO $I = (-\infty, 0)$ e DIVIDO PER x^2

$p, q \in C(I)$

EQUAZIONE DI BERNOULLI e RICATTI:

↳ METODO PER SOLUZIONE GENERALE:

EQ. IN FORMA: $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$ $\alpha = 1$ NOTO, $\alpha = 0$ NOTO

$p, q \in C(I)$ (COME NEL TEOREMA 2)

e ASSUMIAMO ANCHE CHE $y(x) \neq 0$ $\forall x \in I$

RISOLVO NON LINEARMENTE (DIVIDO PER y^{α}):

$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$ e INTRODUCO $z := y^{1-\alpha}$ e $z' := (1-\alpha)y^{1-\alpha-1} \cdot y'$

PERCHÈ COMPOSTA $= (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$

e RISCRIVO IN MANIERA EQUIVALENTE:

$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x)$ CIOÈ $z' + p(x)(1-\alpha)z = q(x)(1-\alpha)$ RISOLUBILE CON TEOREMA 2

QUINDI $z(x) = e^{-\int p(x)dx} \dots$ e POI TROVO y CHE È $z = y^{1-\alpha}$

ESEMPIO:

PC $\begin{cases} y' + p(x)y = q(x)y^3 \\ y(x_0) = y_0 > 0 \end{cases}$ $\alpha = 3$ (EQ. BERNOULLI) PER IPOTESI

TROVARE SOLUZIONI

DEFINIAMO $z = y^{-2}$

METODO $\Rightarrow$ TROVIAMO LA z, e POI LA y $\left(y = \pm\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ SE $y_0 < 0$, NON COMPATIBILE

EQUAZIONE DI RICCATI:

$$* \quad y' = r(x) + p(x)y + q(x)y^2 \qquad r, p, q \in C(I)$$

- ASSUMIAMO DI CONOSCERE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE → DICIAMO y_0, CIOÈ $y_0' = *$

STRATEGIA: FUNZIONE AUSILIARIA $z \Rightarrow y(x) = y_0(x) + \underbrace{\frac{1}{z(x)}}$ CONSIDERO COME RESTO (O "SCARTO") E TRASFORMO PER z

QUINDI DERIVO TUTTO: $y' = y_0' - \frac{1}{z^2} \cdot z'$ E SOSTITUISCO:

$$\cancel{y_0'} - \frac{z'}{z^2} = \cancel{r(x)} + p(x)\left[\cancel{y_0(x)} + \frac{1}{z(x)}\right] + q(x)\left[\cancel{y_0^2(x)} + \frac{2y_0(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right]$$ PERCHÈ y_0 È SOLUZIONE

$$= \frac{z'}{z^2} + \frac{p(x)}{z} + \frac{2q(x)y_0(x)}{z} + \frac{q(x)}{z^2} = 0$$, MOLTIP. PER z^2

$$= z' + (2q(x)y(x))z = -q(x)z$$ FORMA APPLICABILE CON TEO. 2 SU $z(x)$

E TROVO y CON $y(x) = y_0(x) + 1/z(x)$

ESEMPIO: (EQ. BERNOULLI)

TROVARE UNICA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY IN UN INTORNO DI $x_0 = 0$

$$PC \begin{cases} y' = \frac{2x}{x^2+1}y + xy^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ VISTO CHE $y \in C(I)$, $y(x) \neq 0$ IN UN INTERVALLO t.c. $x_0 = 0 \in I$

$\forall x \in I$ DIVIDO PER y^3

$$y^{-3}(x)y'(x) - \frac{2x}{x^2+1}y^{-2}(x) - x = 0$$ E USO $z = (y(x))^{1-\alpha} = (y(x))^{-2}$

$$z' = -2(y(x))^{-3}y'(x)$$

$$\frac{z'}{-2} - \frac{2x}{x^2+1}z - x = 0 \quad \text{CHE È} \quad z' + \frac{4x}{x^2+1}z = -2x$$ TEOREMA 2

$p(x)$ $q(x)$

$$\int p(x)dx = \int \frac{4x}{x^2+1} = 2\ln|x^2+1| \qquad \text{e} \qquad \int e^{2\ln|x^2+1|} \cdot q(x) = \int (x^2+1)^2 \cdot -2x$$

$$= -\frac{(x^2+1)^3}{3}$$

$$z = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left(c - \frac{(x^2+1)^3}{3}\right) \quad \text{e} \quad z = (y(x))^{-2} \quad \text{MA} \quad y(0) = 1$$

$$1 = z(0) = \frac{1}{(0+1)^2}\left(c - \frac{(0+1)^3}{3}\right) \Rightarrow c = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad z(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left(\frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3}\right)$$

$$\text{e} \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(x^2+1)^2}\left(\frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3}\right)}}$$