

ESEMP1:

$$(PC) \begin{cases} y' + \frac{2}{x}y = \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x^2} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

① TROVARE SOLUZIONE GENERALE SU $I = (0, +\infty)$

② TROVARE UNICA SOLUZIONE DEL PC

I EA. DEL TIPO $y' + p(x)y = q(x)$, $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
 DISCONTINUA IN 0. $(0, +\infty)$ È L'INTERVALLO MASSIMALE GN π
 $p, q \in C(I) \rightarrow$ APPLICO TEOREMA 2

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left\{ C + \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx \right\}$$

$$-\int p(x)dx = -\int \frac{2}{x} dx = -2 \ln|x| = -\ln x^2 \quad \forall x \in I$$

$$e^{\ln x^2} = x^2 \quad \forall x \in I$$

$$\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx = \int x^2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 4x}{x^2} dx = -\frac{\cos(4x)}{4}$$

QUINDI $y(x) = x^{-2} \left(C - \frac{\cos 4x}{4} \right)$ USO LA CONDIZ. INIZIALE PER
 RISTRINGERE LE SOLUZIONI

$$y(\pi) = \pi^{-2} \left(C - \frac{\cos 4\pi}{4} \right) = C - \frac{1}{4} = 0 \quad C = \frac{1}{4}$$

SOLUZIONE FINALE: $y(x) = x^{-2} \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 4x}{4} \right)$

ESEMP10:

$$(PC) \begin{cases} y' + xy = x \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{FORMA DEL TIPO } y' + p(x)y = q(x)$$

$$\int p(x)dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} \quad y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left\{ C + \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x dx \right\} = e^{\frac{x^2}{2}} \left\{ C + e^{-\frac{x^2}{2}} \right\} = C e^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

CONDIZ. INIZ.

$$y(0) = C(1) + 1 = 0 \quad C = -1 \quad \text{SOLUT. FINALE: } \underline{\underline{y = 1}}$$

ESEMPIO

$$y' + 4xy = 8x, \quad I = \mathbb{R}$$

TEOREMA 2 APPLICABILE

$$e^{\int p(x) dx} = e^{\int 4x dx} = e^{2x^2}$$

$$\int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) = \int e^{2x^2} \cdot 8x = 2e^{2x^2}$$

$$\Rightarrow \underline{e^{-2x^2} \{ C + 2e^{2x^2} \}} = 2 + Ce^{-2x^2}$$

• QUESTO METODO È APPLICABILE ANCHE CON COEFF di $y' \neq 1$

$$\textcircled{PC} \begin{cases} x^2 y' + x^3 y = \sin x \\ y|_{-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{PONGO } I = (-\infty, 0) \text{ e DIVIDO PER } x^2 \\ p, q \in C(I)$$

EQUAZIONE DI BERNOULLI E RICATTI:

↳ METODO PER SOLUZIONE GENERALE:

EQ. IN FORMA: $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ $\alpha = 1$ NOTO, $\alpha = 0$ NOTO
 $p, q \in C(I)$ (COME NEL TEOREMA 2)

e ASSUMIAMO ANCHE CHE $y(x) \neq 0 \forall x \in I$

RISOLVO NON LINEARMENTE (DIVIDO PER y^α):

$$y' y^{-\alpha} + p(x) y^{1-\alpha} = q(x) \quad \text{e} \quad \text{INTRODUCO } z := y^{1-\alpha} \quad \text{e} \quad z' := (1-\alpha) y^{1-\alpha-1} \cdot y' \\ \text{PERCHÉ COSTA} \\ = (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$$

e RISCOVO IN MANIERA EQUIVALENTE:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x) \quad \text{CIÒ È } z' + p(x)(1-\alpha)z = q(x)(1-\alpha) \quad \text{RISOLUBILE CON TEOREMA 2}$$

$$\text{QUINDI } z(x) = e^{-\int (1-\alpha)p(x) dx} \dots \text{ e POI TROVO } y \text{ CHE È } z = y^{1-\alpha}$$

ESEMPIO:

$$\textcircled{PC} \begin{cases} y' + p(x)y = q(x)y^3 \\ y(x_0) = y_0 > 0 \end{cases} \quad \alpha = 3 \text{ (EQ. BERNOULLI)} \quad \text{PER IPOTESI}$$

TROVARE SOLUZIONI

DEFINIAMO $z = y^{-2}$

METODO \Rightarrow TROVIAMO LA z , e POI LA y ($y = \pm \frac{1}{\sqrt{z}}$) SE $y, < 0$, NON COMPATIBILE

EQUAZIONE DI RICCATI:

$$* \underline{y' = r(x) + p(x)y + q(x)y^2} \quad r, p, q \in C(I)$$

- ASSUMIAMO DI CONOSCERE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE \rightarrow DICIAMO y_0 , CIOÈ $y_0' = *$

STRATEGIA: FUNZIONE AUSILIARIA $z \Rightarrow y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$ CONSIDERO COME RESTO E TRASFORMO PER z (o "SCARTO")

QUINDI DERIVO TUTTO: $y' = y_0' - \frac{1}{z^2} \cdot z'$ E SOSTITUISCO:

$$y_0' - \frac{z'}{z^2} = r(x) + p(x) \left[y_0(x) + \frac{1}{z(x)} \right] + q(x) \left[y_0^2(x) + \frac{2y_0(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)} \right] \text{ PERCHÈ } y_0 \text{ È SOLUZIONE}$$

$$= \frac{z'}{z^2} + \frac{p(x)}{z} + \frac{2q(x)y_0(x)}{z} + \frac{q(x)}{z^2} = 0, \text{ MOLTIPL. PER } z^2$$

$$= z' + (2q(x)y_0(x) + p(x))z = -q(x)z \quad \text{FORMA APPLICABILE CON TED. 2 SU } z(x)$$

$$\text{E TROVO } y \text{ CON } y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$$

ESEMPIO: (E2. BERNOULLI)

TROVARE UNICA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY IN UN INTORNO DI $x_0 = 0$

$$\textcircled{1} \begin{cases} y' = \frac{2x}{x^2+1} y + xy^3 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{VISTO CHE } y \in C(I), y(x) \neq 0 \text{ IN UN INTERVALLO I.C. } x_0 = 0 \in I$$

$\forall x \in I$ DIVIDO PER y^3

$$y^{-3}(x) y'(x) - \frac{2x}{x^2+1} y^{-2}(x) - x = 0 \quad \text{E USO } z = (y(x))^{1-3} = (y(x))^{-2}$$

$$z' = -2(y(x))^{-3} y'(x)$$

$$\frac{z'}{-2} - \frac{2x}{x^2+1} z - x = 0 \quad \text{CHE È } z' + \underbrace{\frac{4x}{x^2+1}}_{p(x)} z = \underbrace{-2x}_{q(x)} \quad \text{TEOREMA 2}$$

$$\int p(x) dx = \int \frac{4x}{x^2+1} = 2 \ln |x^2+1|$$

$$= \int e^{2 \ln |x^2+1|} \cdot q(x) = \int (x^2+1)^2 \cdot (-2x) = -\frac{(x^2+1)^3}{3}$$

$$z = \frac{1}{(x^2+1)^2} \left(C - \frac{(x^2+1)^3}{3} \right) \quad \text{E } z = (y(x))^{-2} \quad \text{MA } y(0) = 1$$

$$1 = z(0) = \frac{1}{(0^2+1)^2} \left(C - \frac{(0^2+1)^3}{3} \right) \Rightarrow C = \frac{4}{3} \quad \text{E } z(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \left(\frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3} \right)$$

$$\text{E } y = \pm \frac{1}{\sqrt{z}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(x^2+1)^2} \left(\frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3} \right)}}$$