

EQUAZIONI A COEFF. COSTANTI (e RELAZIONI CON I COMPLESSI)

CONSIDERIAMO L'ORDINE 2: $y'' + p_1 y' + p_0 y = b(x)$ $b \in C(I)$
 $p_1, p_0 \in \mathbb{R}$ CONTINUE

CON SOLUZ: $y(x) = y_*(x) + c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

PRENDIAMO $y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$ e ASSOCIO A ESSA UN CERTO POLINOMIO Φ

$$\Phi = x^2 + p_1 x + p_0 \quad (\text{POLINOMIO CARATTERISTICO})$$

CON $\Phi = 0$ EQUAZIONE CARATTERISTICA $\rightarrow \Delta = p_1^2 - 4p_0$ (DISCRIMINANTE)

e STUDIAMO I CASI DEL DISCRIMINANTE

$$\textcircled{1} \Delta > 0 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{p_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\textcircled{2} \Delta = 0 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{p_1}{2}$$

$$\textcircled{3} \Delta < 0 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{p_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

TEOREMA 9: ($\mathcal{L}(y) = 0$ e $k=2$)

LA SOLUZIONE GENERALE DI $y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$ $p_1, p_0 \in \mathbb{R}$ È DATA DA: $y(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$,
 DOVE:

$\Delta > 0 \Rightarrow w_1 = e^{\lambda_1 x}$	$w_2 = e^{\lambda_2 x}$	(RADICI REALI DI Φ)
$\Delta = 0 \Rightarrow w_1 = e^{\lambda x}$	$w_2 = x e^{\lambda x}$	(λ È LA RADICE $\in \mathbb{R}$ UNICA DI Φ)
$\Delta < 0 \Rightarrow w_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$	$w_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$	($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ RADICI $\in \mathbb{C}$ DI Φ)

\rightarrow PER LA GENERALIZZAZIONE, GUARDA LEZIONE 9 (MOLTO PIÙ UTILE)

QUESTE FUNZIONI SONO LIN. INDIPENDENTI SU \mathbb{R} .

● ESEMPIO: OSCILLATORE ARMONICO: $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega > 0$

● EQ. DI ORDINE 2 ($k=2$)

● $p_1 = 0$, $p_0 = \omega^2$, STRUTTURA $\mathcal{L}(y) = 0$

\hookrightarrow DA TEOREMA 6 $\Rightarrow y(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$ CON $\Phi = x^2 + \omega^2 = 0$ $\left(\frac{x}{\omega}\right)^2 = -1 \Rightarrow \frac{x}{\omega} = \pm i \Rightarrow x = \pm i\omega \rightarrow \alpha=0, \beta=\omega$

DA TED 9:

$$w_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) = \cos(\omega x) \Rightarrow y(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$$

$$w_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x) = \sin(\omega x)$$

● RISOLVERE IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{QUI LA SOLUZ. SAREBBE } y(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{cases} = 1$$

● CAMBIATO A 1 PER RENDERE ES. INTERESTANTE

1. TROVARE SOLUZ. GENERALE

2. TROVARE c_1 e c_2 CON LE C.I.

1. $p_1 = -2$, $p_0 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ $x=+1$ UNICA RAD (Δ=0)

APPLICO TED 9

$$w_1 = e^{1 \cdot x} \quad w_2 = x e^{1 \cdot x} \Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

2. $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y'(x) = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + 0 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \end{cases}$

$$y(x) = x e^x \quad (\text{SOLUZIONE UNICA PER TEOREMA 5})$$

● TROVARE SOLUZ. GENERALE

$$y(x) = y_*(x) + c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) \quad * = \frac{x^2}{2} - 2 \quad (\text{DA ESERCIZIO FATTO PRECEDENTEMENTE})$$

CERCHIAMO QUINDI w_1 e w_2 , USANDO IL TEOREMA 9:

$$\Phi(x) = x^2 + x + 2, \quad \Delta = -7 < 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$w_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right)$$

$$w_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right)$$

$$\text{CONCLUDENDO, } y(x) = \frac{x^2}{2} - 2 + c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

GIUSTIFICAZIONE TEOREMA 3

FUNZIONE GENERALE $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, cioè $f(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

QUINDI CONSIDERO $f'(x) := \alpha'(x) + i\beta'(x)$ α, β DERIVABILI

RICHIAMO L'IDENTITÀ DI EULERO: $e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$
 $e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)) = \left(\frac{e^a \cos(b)}{\operatorname{Re}} + i \frac{e^a \sin(b)}{\operatorname{Im}} \right)$

• PROCEDO AL CALCOLO DI $(e^{\lambda x})'$:

$$e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{-x} [\cos(bx) + i\sin(bx)]$$

$$(e^{\lambda x})' = (e^{\lambda x})' (\cos(bx) + i\sin(bx)) + e^{\lambda x} (\cos(bx) + i\sin(bx))'$$

$$= 2e^{\lambda x} \cdot e^{ibx} + e^{\lambda x} (-b\sin(bx) + bi\cos(bx))$$

$$= 2e^{\lambda x} + e^{\lambda x} (bi(\cos(bx) + i\sin(bx)))$$

$$2e^{\lambda x} + ibe^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

DIM TEOREMA 3

CONSIDERO $y'' + a_1 y' + a_0 = 0$, SOLUZIONI DEL TIPO $y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, SOSTITUIAMO NELL'EQ:

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0, \text{ CERCHIAMO SOLUZIONI COMPLESSE}$$

$$\Rightarrow e^{\lambda x} \cdot e^{\lambda x} (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0 \cdot e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \Rightarrow \Phi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \text{ È RADICE} \quad \text{ANALIZZO I 3 CASI:}$$

• $\Delta > 0 \Rightarrow 2$ SOLUZIONI REALI $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow w_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $w_2 = e^{\lambda_2 x}$

• $\Delta = 0 \Rightarrow 1$ SOLUZIONE DATA DA $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow w_1 = e^{\lambda x}$

L'ALTRA SOLUZIONE È NELLA FORMA $y = c(x)e^{\lambda x}$ PER UNA $c(x)$. SAPPIAMO CHE $\lambda = -\frac{a_1}{2}$, CIOÈ $\Phi(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$

$$\text{ABBIAMO } y'(x) = e^{\lambda x} (\lambda c(x) + c'(x)) \text{ e } y''(x) = e^{\lambda x} (\lambda^2 c(x) + 2\lambda c'(x) + c''(x))$$

SOSTITUISCO $y(x) = c(x)e^{\lambda x}$ NELL'EQ. $y'' + a_1 y' + a_0 = 0$:

$$e^{\lambda x} [(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) c(x) + (2\lambda + a_1) c'(x) + c''(x)] = 0 \Rightarrow c''(x) = 0 \Leftrightarrow c'(x) = c_2 \xrightarrow{\text{INTEGRO}} c(x) = c_1 x + c_2$$

$$\text{CIOÈ: } y(x) = (c_1 x + c_2) e^{\lambda x} \text{ PER } c_2 = 0 \Rightarrow w_2 = e^{\lambda x}$$

$$\text{PER } c_1 = 0, c_2 = 1 \Rightarrow w_2 = x e^{\lambda x}$$

• $\Delta < 0 \Rightarrow$ HO COME RADICI $-\frac{a_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ CON $\lambda = a + ib$ e $\bar{\lambda} = a - ib$ RADICI DISTINTE

$\Rightarrow v_1 = e^{\lambda x}$ e $v_2 = e^{\bar{\lambda} x}$ (FUNZIONI COMPLESSE). PER AVERE SOLUZIONI, SELEZIONO OPPORTUNE COMB. LIN. REALI

$$w_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 \text{ e } w_2 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2. \text{ NOTO CHE } \mathcal{L}(y) = 0 \text{ È LINEARE } v_1, v_2 \text{ SOLUZIONI} \rightarrow w_1, w_2 \text{ SOLUZIONI}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\lambda x} \cos(Bx) = e^{\lambda x} \sin(Bx)$$

LA GIUSTIFICAZIONE:

$$w_2 = \frac{1}{2} e^{(a+ib)x} + \frac{1}{2} e^{(a-ib)x} = \frac{1}{2} e^{ax} [\cos(Bx) + i\sin(Bx) + \cos(-Bx) + i\sin(-Bx)] = \frac{1}{2} e^{ax} [2\cos(Bx)] = e^{ax} \cos(Bx)$$

• SOLUZIONI A EQ. DI K=2 NON OMOGENEE.

$y'' + a_1 y' + a_0 = b(x)$ DOVE $b(x)$ HA UNA FORMA PARTICOLARE

IMPORTANTE PREMessa LEGATA ALLA LINEARITÀ:

STRUTTURA: $\mathcal{L}(y) = b(x)$. ES: $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ e SE SONO IN GRADO DI TROVARE y_1, y_2 t.c. $\mathcal{L}(y_1) = b_1(x)$ e $\mathcal{L}(y_2) = b_2(x)$

* SOLUZIONI PARTICOLARI. ALLORA $y_h = y_1 + y_2$ È SOLUZIONE DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$: $\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2) = b_1(x) + b_2(x) = b(x)$

CERCHIAMO UNA SOLUZIONE CON $b(x)$:

$$b(x) = P_r(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin(Bx) \text{ e } b(x) = P_r(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos(Bx) \text{ CON } P_r \text{ POLINOMIO DI GRADO } r, a, B \in \mathbb{R}$$

TEOREMA 10:

SIANO $a, B \in \mathbb{R}$ e P_r POLIN. DI GRADO r

TRA LE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI FORMA $y'' + a_1 y' + a_0 y = P_r(x) e^{ax} \sin(Bx)$ VI È UNA SOLUZIONE

$$y_p(x) = x^h e^{ax} \{P_r^*(x) \sin(Bx) + Q_r^*(x) \cos(Bx)\}$$

CON P_r^* e Q_r^* POLINOMI DI GRADO r e $h=0$ SE $a+ib$ NON È RADICE DI Φ
 $h=1$ SE $\Delta > 0$ e $a+ib$ È RADICE DI Φ
 $h=2$ SE $\Delta = 0$ e $a+ib = a$ È RADICE DI Φ ($\in \mathbb{R}$)

● **ESEMPIO** $y'' + y' + 2y = x^2 + x - 3$, con $y_* = \frac{x^2}{2} - 2$ (DA $y_* = ax^2 + bx + c$)

OSSERVIAMO CHE y_* È ANCHE INDICATA DAL TEOREMA 10:

$$b(x) = x^2 + x - 3 = \underbrace{P_2(x)}_1 e^{\underbrace{0 \cdot x}_1} \cdot \underbrace{\cos(0 \cdot x)}_1 \quad e^{0x} \text{ CON } \alpha=0 \quad \cos(\beta x) \text{ CON } \beta=0 \quad \text{E POSSO APPLICARE LA FORMULA:}$$

$h=?$ → SCRIVO $\alpha + i\beta$. È RADICE DI Φ ? $\Phi(x) = x^2 + x - 2$, $\Phi(0) = -2$ NON È RADICE, $h=0$

$$y_* = \underbrace{x^h}_1 \underbrace{e^{\alpha x}}_1 \left\{ \underbrace{P_2^*(x)}_1 \underbrace{\cos(\beta x)}_1 + \underbrace{Q_2^*(x)}_0 \underbrace{\sin(\beta x)}_0 \right\} = P_2^*(x) \quad (\text{POLINOMIO DI 2° GRADO CON COEFF. DA DETERMINARE})$$

● **ESEMPIO**: TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI: $2y'' - 3y' + y = 3e^{2x}$ (SU $I \in \mathbb{R}$)

$$= y'' - \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}e^{2x} \quad \text{CON SOL: } y(x) = \underbrace{y_*(x)}_{\text{TEO. 10}} + \underbrace{C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)}_{\text{TEO. 3}}$$

① DETERMINO w_1 E w_2

$$\Phi(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} \quad \text{E ED. CARATT. } \Phi(\lambda) = 0. \quad \Delta > 0 \quad \text{CON } \lambda = \frac{+\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} \begin{matrix} 1 \\ 1/2 \end{matrix} \in \mathbb{R}$$

TEO 3: $w_1 = e^x$ E $w_2 = e^{x/2}$ QUINDI $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{x/2}$ È SOL. GENERALE

② TROVO y_* ? [2.1] VERIFICO CHE TEO. 10 SIA APPLICABILE $b(x) = \frac{3}{2}e^{2x} \cdot \underbrace{1}_{\substack{P_0(x) \\ \alpha=2}} \cdot \underbrace{1}_{\cos(0 \cdot x)}$ E $h=0$ (2 DA $\frac{\alpha}{2} + i\frac{\beta}{2} = 2$ (2 NON È RADICE) $\Phi(2) = +1$)

$$y_* = 1 \cdot e^{2x} \left\{ P_0^*(x) \cdot 1 + Q_0^*(x) \sin(0 \cdot x) \right\} = e^{2x}$$

RES: $y(x) = e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{x/2} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

ALTRO ES

$$y'' - \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}e^{2x} + 1 \Rightarrow y'' - \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}y = 1 \quad \text{CON } y=c \text{ (CONSTANTE) TROVO } c=2 \quad \text{E } y_* = y_2 + y_1 = e^{2x} + 2$$