

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

- SONO EQUAZIONI FUNZIONALI E DIPENDE DALLA FUNZIONE INCOGNITA E DALLE RELATIVE DERIVATE

FORMA GENERALE:

$$E(y, y', \dots, y^{(k)}, t) = 0, \quad t \in I$$

↑ ↑ ↑ ↑

FUNZIONE DERIVATA K-ESIMA VARIABILE INDIPENDENTE SOTTOINSIEME DI \mathbb{R}

→ ESPRESSIONE CHE CONTIENE $y = y(t)$

ALTRE NOTAZIONI ...

$$y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$$

COS' È UNA SOLUZIONE?

TROVARE UNA FUNZIONE $y = y(t)$ t.c.

$$E(y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t), t) = 0 \quad \forall t \in I$$

"ORDINARE" PER DISTINGUERLE DA EQ. DIFF. ALLE DERIVATE PARZIALI

ESEMPI:

(I) $y'' + y = 0$ È UGUALE A $y''(x) + y(x) = 0$
 $y''(t) + y(t) = 0$

(II) $y'' + y = \cos(t)$ È UGUALE A $y''(t) + y(t) = \cos(t)$

SIA (I) CHE (II) SONO EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE

L'ORDINE È L'ORDINE MASSIMO DELLE DERIVATE COINVOLTE NELL'EQUAZIONE

LA STRUTTURA È SEMPRE DEL TIPO:

$$E(y, y', y'', t) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{NELLA } (II) \text{ LA } t \text{ È} \\ \text{ESPLICITA} \end{array} \right)$$

NOTIAMO CHE

$$\begin{cases} y_1 = \cos(t) \\ y_2 = \sin(t) \end{cases} \text{ SONO SOLUZ. DI } (I) \text{ CON } I = \mathbb{R}$$

$$\text{PERCHÉ } y_1'(t) = -\sin t \quad \text{e} \quad y_1''(t) = -\cos(t)$$

e SOSTITUISCO:

$$y_1''(t) + y_1(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0, \text{ VERO } \forall t \in \mathbb{R}$$

STESSA COSA CON y_2

MENTRE PER IL CASO (II) , NON SONO SOLUZIONI...
 $-\cos(t) + \cos(t) \neq \cos(t) \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

NON TUTTE LE EQ. DIFF. HANNO SOLUZIONI

ESEMPIO

$$(y')^2 + 1 = 0 \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

NON HA SOLUZIONI PERCHÉ NON C'È UNA FUNZ. $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ CHE SODDISFA L'EQUAZIONE

DOMANDE DA FARE SULLE SOLUZIONI:

- ESISTENZA
- UNICITÀ
- MOLTIPLICITÀ
- SOLUZIONI ESPLICITE (SVOLGIMENTO e RICERCA)

ESEMPIO (MALTHUS)

$$y' = ky$$

$k \in \mathbb{R}$ SE NON SPECIFICATO

Δ PRIMO ORDINE

Δ VARIABLE INDIP. NON SPECIFICATA, SOLITAMENTE "t"

$$y'(t) = k y(t)$$

MOLTIPLICO PER e^{-kt} E SPOSTO A SINISTRA

$$y' e^{-kt} - k y e^{-kt} = 0 \quad \text{E QUESTO È COME DIRE:}$$

$$\frac{d}{dt} (y e^{-kt}) = 0$$

MA SAPPIAMO CHE FUNZ. COST. HANNO DERIVATA NULLA, QUINDI

$$y(t) = \underline{C} \cdot e^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall C \text{ SONO TUTTE SOLUZ.}$$

$$\underbrace{(C e^{-kt})'}_{y'} = k \underbrace{C e^{-kt}}_y \quad \forall t \in I \in \mathbb{R}$$

ABBIA MO TROVATO CHE $y = C \cdot e^{-kt}$ È UNA ESPRESS.
CHE INGLUBA TUTTE LE SOLUZIONI POSSIBILI.

ESISTE UN MODO PER SELEZIONARE UNA SOL. PARTICOLARE

SI \Rightarrow PROBLEMA AI VALORI INIZIALI
" " " DI CAUCHY

ESEMPIO

$$(PC) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ED. DIFFERENZIALE

CONDIZIONE INIZIALE

DEFINIZIONE ALTERNATIVA DELLA $\&$ ESPONENZIALE

SOLUZIONE: CASO $k=1$ DELL'ESEMPIO DI MALTHUS

$$\text{SOL. GENERALE } y(t) = C e^t, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$1 = y(0) = C e^0 = C \Rightarrow C = 1 \quad \text{QUINDI}$$

$y(t) = e^t$ È L'UNICA SOLUZ. AL PROBLEMA DI CAUCHY

CONCLUDENDO

$y = e^x$ è l'unica funz. derivabile i.c. $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

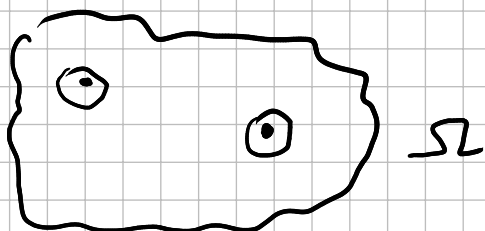
QUESTI PROBLEMI DI ORDINE 1 SONO CASI PARTICOLARI DEL TIPO

$(1) y' = f(x, y) \Rightarrow$ EQ. DI 1 ORDINE IN FORMA NORMALE
* \uparrow \uparrow
VARIABLE INDIPEND. FUNZ. INCOGNITA
PER COEFF. DI y' HO 1 *

DEFINIZIONE DI SOLUZIONE:

SIA $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Ω "APERTO"

APERTO = $\forall x \in \Omega \exists$ un disco centrato in x tutto contenuto in Ω , $D_x \subset \mathbb{R}^2$



UNA FUNZ $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluz. di $y' = f(x, y)$

su I se:

- y è DERIVABILE su I

- $(x, y(x)) \in \Omega$, $\forall x \in I$

- $y'(x) = f(x, y(x))$, $\forall x \in I$

SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è un punto noto nel problema

SIA QUINDI $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 DIAMMO CHE $y = y(x)$ È SOLUZIONE DI (PC) SE:
 - $y = y(x)$ SODDISFA $y' = f(x, y)$ SU QUALCHE INTERVALLO
 - $x_0 \in I$
 - $y(x_0) = y_0$

SE f SODDISFA
ALCUNE IPOTESI

ESISTE ED È UNICA
 LA SOLUZIONE DI (PC)
 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE CALCOLO INTEGRALE RIVISITATO

SIA $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$, CONTINUA IN $[a, b]$

ALLORA:

$$y(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0, \quad \forall x \in [a, b] \quad \boxed{=} \Rightarrow \text{DEFINIZIONE}$$

È L'UNICA ^② SOLUZIONE ^① DEL PC

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DIM:

①

$$\underbrace{\left(\int_{x_0}^x f(t) dt + y_0 \right)'}_{y(x_0)} = f(x) \quad \checkmark$$

SOLUZIONE.

MA ANCHE $y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt + y_0 \Rightarrow y(x_0) = y_0$

$\frac{1}{x_0} \quad 1$
 \ominus

② UNICITÀ

SUPPONIAMO

$$\begin{cases} y_1' = f(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} y_2' = f(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SOTTRAENDO OTTENGO

$$\begin{cases} (y_1 - y_2)' = f(x) - f(x) = 0 \\ (y_1 - y_2)(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{pongo } m = y_1 - y_2 \quad \begin{cases} m' = 0 \\ m(x_0) = 0 \end{cases}$$

QUINDI $m(x) = c$ ($m' = 0$ CIOÈ COSTANTE)
 e $m(x) = 0$ QUINDI $c = 0$ $\forall x \in [a, b]$

CIOÈ

$$\boxed{y_1 = y_2}$$