• ESEMPIO TEO. UNICITÀ E ESISTENZA LOCALE

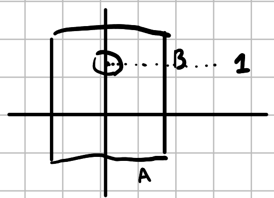
$f(x,y)$ CONTINUA, MA $\nexists\ [a,b]$ INFINITO t.c. HP LIPSCHITZ VERIFICATA

$\nexists L>0$ t.c. $\left|\frac{2x}{x^2+1}y + xy^3 - \frac{2x}{x^2+1}z - xz^3\right| \le L|y-z|$

① IPOTIZZIAMO PER ASSURDO CHE VALGA L'HP. DI LIPSCHITZ (PER CAPIRE CHE NON SI PUÒ APPLIC. IL TEO. 3)
PER $x=0$ RISULTA UN ESPRESS. NULLA, PER $z=0$ E $\bar{x}\neq 0$:

$\left|\frac{2\bar{x}}{\bar{x}^2+1}y + \bar{x}y^3\right| \le L|y| \Rightarrow |y|\left|\frac{2\bar{x}}{\bar{x}^2+1} + \bar{x}y^2\right| \le L|y| \Rightarrow \left|\frac{2\bar{x}}{\bar{x}^2+1} + \bar{x}y^2\right| \le L$ FALSA PER VALORI GRANDI DI y: TEO. 3 NON APPLICABILE

② $f\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ ALLORA VERIFICHIAMO SOLO L'HP DI LIPSCHITZ LOCALE



$R_{A,B} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<A,\ |y|<B\}$

$A,B>0$ e $(0,1)\in R_{A,B}$

$|f(x,y)-f(x,z)| \le L|y-z| \quad \forall (x,y),(x,z)\in R_{A,B} \Rightarrow$

$\left|\frac{2x}{x^2+1}y + xy^3 - \frac{2x}{x^2+1}z - xz^3\right| \overset{\text{DISUG. TRIANG.}}{\le} \left|\frac{2x}{x^2+1}y - \frac{2x}{x^2+1}z\right| + |xy^3 - xz^3| = \underbrace{\frac{2|x|}{x^2+1}}_{\text{CONSIDERO COME } 1}|y-z| + |x||y^3-z^3|$

$\frac{2|x|}{x^2+1} \le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$; $|x| < A$

PER STUDIARE $|y^3-z^3|$ USO TEO. VALORE MEDIO (LAGRANGE): $g(x)\in C([a,b])$ E DERIV. SU (a,b)

$g(b)-g(a) = g'(c)(b-a) \Rightarrow |g(b)-g(a)| = |g'(c)|\cdot|b-a|$

QUINDI PONGO $g(y)=y^3$

$|y^3-z^3| = 3c^2|y-z| \le 3B^2|y-z|$ $\quad c\in(y,z)$

$\Rightarrow |f(x,y)-f(x,z)| \le \underbrace{(1+3AB^2)}_{L}|y-z|$ $\forall (x,y),(x,z)\in R_{A,B}$ QUINDI $\exists$ SLZ. UNICA SU I CONTENENTE $x_0=0$

• ESEMPIO

$$\text{PC}\begin{cases} y' = 2x+1-2x^3+4x^2y-2xy^2 \\ y(0)=2 \end{cases}$$

① TEO. 4 APPLICABILE?
② TEO. 3 NON È APP. SU ALCUN I CONTENENTE $(0,2)$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

• ES NEWTON: $F = m y''(t)$ — MASSA; OSC. AL TEMPO t

• ES. OSCILL. ARMONICO $y'' + \frac{k}{m}y = 0$

$y'' + w^2 y = 0$

STRUTTURA GENERALE:

$y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)})$

↳ VARIABILE INDIPENDENTE

DEFINIZIONE: SIA $f: \Omega \subseteq \underset{x\in}{\mathbb{R}} \times \underset{y,y',\dots,y^{(k-1)}}{\mathbb{R}^k} \to \mathbb{R}$ E DICIAMO CHE y È SOLUZIONE DI * SU I SE:

- y È DERIVABILE SU I FINO ALL'ORDINE k
- $(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \in \Omega \quad \forall x\in I$
- $y^{(k)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$ (VERIFICARE CHE L'EQ. SIA VERIFICATA) SU UN QUALCHE I

$$\text{PC}\begin{cases} y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1} \end{cases}$$

→ CONDIZ. INIZIALI DEL PC $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ NOTI

ESEMPIO: TROVARE $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c. $y(x) = ax^2 + bx + c$ È SOLUZ. DI

$$y'' + y' + 2y = x^2 + x - 3 \quad \text{su } I = \mathbb{R}$$

ABBIAMO $y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$ E SOSTITUISCO: $2a + 2ax + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + x - 3 \quad \forall x \in I = \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2ax^2 + (2a + 2b)x + 2a + 2c + b = x^2 + x - 3$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 1 \\ 2a + 2c + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ QUINDI $y = \frac{x^2}{2} - 2$ È UNICA SOLUZIONE

EQ. DIFF. "LINEARI" DI ORDINE SUPERIORE:

CIOÈ GENERALIZZAZIONE DI: $\underbrace{y' + p(x)y}_{\mathcal{L}(y)} = q(x)$

! RICORDARE PROP. LINEARITÀ !

$$\boxed{\text{QUINDI: } \quad y^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x) y^{(i)} = b(x)}$$

$a_i(x)$: COEFF. DERIVATA i-ESIMA

$a_i, b \in C(I)$ CON $I \subseteq \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{L}(y_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(y_2)$

E $\mathcal{L}(y) = 0$ È NOTA COME $\boxed{\text{EQ. OMOGENEA}}$ (ASSOCIATA A $\mathcal{L}(y) = b(x)$)

TEOREMA 5, ESISTENZA E UNICITÀ, GENERALIZZAZIONE DEL TEO. 2

SIA $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $a_i(x), b(x) \in C(I)$

ALLORA $\text{PC}\begin{cases} y^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x) y^{(i)} = b(x) \\ y(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_k \end{cases}$ $\Rightarrow$ HA UN'UNICA SOLUZIONE $y = y(x)$ SU I

INDIPENDENZA LINEARE: DEFINIZIONE:

SIANO DATE K FUNZIONI $V_1(x) \dots V_k(x)$ DEFINITE SU $I \subseteq \mathbb{R}$ E SONO LINEARM. INDIPENDENTI SE:

$C_1 V_1(x) + \dots + C_k V_k(x) = 0 \quad \forall x \in I$ E $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$

TEOREMA 6:

$a_i(x)$, $i = 0, \dots, (k-1)$ f CONTINUE SU I

E DEFINIAMO $S = \{\text{INSIEME SOLUZIONI SU } I \text{ DI } \mathcal{L}(y) = 0\}$

1. S È SPAZIO VETTORIALE
2. $\dim(S) = k$ (ORDINE EQ. DIFF.) $\Rightarrow$ È POSS. SELEZIONARE K SOLUZIONI DI $\mathcal{L}(y) = 0$, LIN. INDIPENDENTI SU I, $w_1, \dots w_k$ t.c. OGNI ALTRA SOLUZIONE $y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DI $\mathcal{L}(y) = 0$ SI SCRIVE COME:
   - $y(x) = C_1 w_1(x) + \dots + C_k w_k(x) \quad \forall x \in I$ PER OPPORTUNI COEFF. $C_1 \dots C_k \in \mathbb{R}$
     → SOL. GENERALE $\mathcal{L}(y) = 0$ SU I (CIOÈ ESPRESSA COME COMBINAZ. LINEARE)

CENNO ALLA DIM:

S SODDISFA GLI ASSIOMI DEGLI SPAZI VETTORIALI, IN PARTICOLARE y_1 E $y_2 \in S$ ALLORA $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in S \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, INFATTI

$\underbrace{\mathcal{L}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{=0} = \alpha_1 \underbrace{\mathcal{L}(y_1)}_{0} + \alpha_2 \underbrace{\mathcal{L}(y_2)}_{0} = 0$

TEOREMA 7:

HP: $a_i(x)$, $b(x) \in C(I)$

TH: SLZ. GENERALE $\mathcal{L}(y) = b(x)$ (SU I) È: $\boxed{y(x) = y_*(x) + c_1 w_1(x) + \dots + c_k w_k(x)}$

DOVE y_* È UNA SLZ. PARTICOLARE DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ E DOVE $w_1, \dots, w_k$ SONO K SOLUZIONI LINEARMENTE INDIP. DI $\mathcal{L}(y) = 0$

ES: $\underbrace{y'' + y' + 2y}_{\mathcal{L}(y)} = \underbrace{x^2 + x - 3}_{b(x)}$ e $y(x) = y_*(x) + c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

SOLUZ. LINEARMENTE INDIPENDENTI DI: $y'' + y' + 2y = 0$

DIM TEOREMA 7

$$\mathcal{L}(y_* + c_1 w_1 + \dots + c_k w_k) = \mathcal{L}(y_*) + c_1 \overset{=0}{\mathcal{L}(w_1)} + \dots + c_k \overset{=0}{\mathcal{L}(w_k)} = \mathcal{L}(y_*) = b(x)$$

PRENDO UNA SOLUZIONE DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ ARBITRARIA: $y = y(x)$

$\mathcal{L}(y - y_*) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y_*) = b(x) - b(x) = 0 \quad \forall x$ CIOÈ $\mathcal{L}(y - y_0) = 0 \Longleftrightarrow y - y_0 \in S \xRightarrow{\text{TEO. 6}} y - y_0 = c_1 w_1 + \dots + c_k w_k$

DOVE w_i LIN. INDIPENDENTI CIOÈ: $y = y_* + c_1 w_1 + \dots + c_k w_k$

h BRACCIOLO: ~ 15 cm
w " ": ~ 11,5 cm