ESERCIZI. CALCOLARE, SE $\exists$, I LIMITI

1) $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

2) $\lim_{x,y\to 0,0} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$

SOLUZ. VALE PER ENTRAMBE $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=0,\ x\neq 0\}$ $\quad f|_B(x,y)=0$
QUINDI SE I LIMITI $\exists$, SONO $=0$.

1) DEFINISCO $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0,\ x=y^3\}$. $f|_D(x,y)=\frac{y^6}{y^6+y^6}=\frac{1}{2}\neq 0$ NON ESISTE

2) NOTIAMO CHE SECONDO LA DEF. DI LIMITE $\lim_{x,y\to 0,0} f(x,y)=0$ È EQ. A $\lim_{x,y\to 0,0} |f(x,y)|=0$.

POSSO USARE $0\le |f(x,y)| \to 0\le \frac{|xy^3|}{x^2+y^4} = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^4}}}_{\le 1}\cdot\frac{|y^3|}{\sqrt{x^2+y^4}}\ g(x,y) = \underbrace{\frac{y^2}{\sqrt{y^4+x^2}}}_{\le 1}\cdot|y| \Rightarrow 0\le|f(x,y)|\le|y|\le\sqrt{y^2+x^2}\to 0$ CIOÈ $\lim_{x,y\to 0,0}|f(x,y)|=0$
$\iff \lim_{x,y\to 0,0} f(x,y)=0$

CONTINUITÀ DI FUNZIONI:

SIA $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, $p\in A$, DICIAMO CHE f È CONTINUA IN p SE $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.c. $\|f(x)-f(p)\|<\varepsilon\ \ \forall x\in A$ t.c. $\|x-p\|<\delta$

TEOREMA:
HP: SE $p\in A_{cc}(A)$, $f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$
TH: f È CONTINUA IN $p \iff \lim_{x\to p} f(x)=f(p)$

- POSSO USARLO DEFINENDO $\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$ E ORA È CONTINUA

INSIEME APERTO E INSIEME CHIUSO

$A\in\mathbb{R}^n$, $A\neq\emptyset$, $x_0\in\mathbb{R}^n$

- x_0 È UN PUNTO INTERNO DI A SE $\exists r>0$, t.c. $B(x_0,r)\subseteq A$
- x_0 È UN PUNTO DI FRONTIERA DI A SE $\forall r>0:\ \begin{cases}B(x_0,r)\cap A\neq\emptyset\\ B(x_0,r)\cap A^c\neq\emptyset\end{cases}$
- x_0 È UN PUNTO DELLA CHIUSURA DI A SE $\forall r>0$ SI HA $B(x_0,r)\cap A\neq 0$

$\to$ SEGUE CHE $\mathring{A}\subseteq A\subseteq\bar{A}$
E SI VERIFICA:
$\bar{A}=\mathring{A}\cup F_r(A)$
$\bar{A}=A\cup A_{cc}(A)$

DEFINIZIONE:
- $A\subseteq\mathbb{R}^n$ È APERTO SE $A=\mathring{A}$
- $A\subseteq\mathbb{R}^n$ È CHIUSO SE $A=\bar{A}$

PROPOSIZIONE: A È APERTO $\iff$ A^c È CHIUSO
A È CHIUSO $\iff$ A^c È APERTO

ESEMPIO: $B(x_0,r)\subset\mathbb{R}^n$ È APERTO: "$\{x\in\mathbb{R}^n: \|x-x_0\|<r\}$"
" CHIUSO: "$\{x\in\mathbb{R}^n: \|x-x_0\|\le r\}$"

PROPOSIZIONE: SIA $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ CONTINUA E $c\in\mathbb{R}$
ALLORA: $A=\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)<c\}$ È APERTO
$B=\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)\le c\}$ È CHIUSO

DIM: SIA $x\in A$, APPLICO LA DEF. DI CONTINUITÀ: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ t.c. $\forall y$ t.c. $\|y-x\|<\delta$ VALE $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
ED EQUIVALENTEMENTE $f(x)-\varepsilon<f(y)<f(x)+\varepsilon$. SCELGO $\varepsilon<c-f(x)$, QUINDI $\forall y$ t.c. $\|y-x\|<\delta$ VALE
$f(y)<f(x)+\varepsilon\le f(x)+c-f(x)=c \to f(y)<c\ \ \forall y$ t.c. $\|x-y\|<\delta$ CIOÈ $\forall y\in B(x,\delta)$ CIOÈ $B(x,\delta)\subseteq A$. HO TROVATO UNA BOLLA TUTTA CONTENUTA IN A

VISTO CHE x È ARBITRARIO E INTERNO, $\mathring{A}=A$.

DIM B È UGUALE.

ALTRI ESEMPI:

$-\infty < a \le b < +\infty$ $\quad f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$A = \{x\in\mathbb{R}^n : a < f(x) < b\}$ APERTO

$B = \{x\in\mathbb{R}^n : a \le f(x) \le b\}$ CHIUSO

→ IN GENERALE C, D APERTI $\to C\cup D$ È APERTO, $C\cap D$ È CHIUSO

C, D CHIUSO $\to C\cup D$ È CHIUSO, $C\cap D$ È CHIUSO

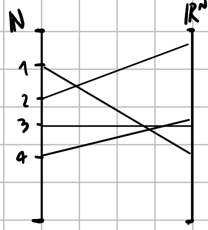
• **INSIEMI LIMITATI:**

SIA $A\subset\mathbb{R}^n$, $A\neq\emptyset$. DICIAMO A LIMITATO SE $A\subseteq B(0,R)$, $R>0$ ABBASTANZA GRANDE.

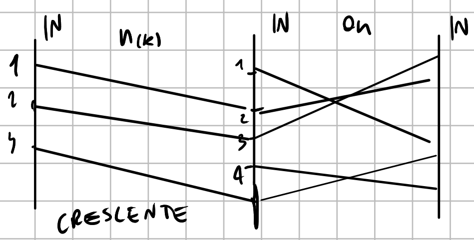
• **SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}^n$:**

DEF: $a_n : n\in\mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ ES: $a_n = (2^{-n}, \frac{1}{n}, 1)$

DEF: DATA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (INSIEME DEI PUNTI DELLA SUCC) $\subset\mathbb{R}^n$ CONVERGE A $\ell\in\mathbb{R}^n$ SE $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0>0$ t.c. $\forall n>n_0\ \|a_n-\ell\|<\varepsilon$



SIA $n(k)$ UNA FUNZIONE CRESCENTE da $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ CIOÈ $n(k+1)>n(k)$ ALLORA $a_{n_k} := a_{n(k)}$



UNA SOTTOSUCCESSIONE È UNA SUCCESSIONE COSTRUITA DALL'ORIGINALE CON DEI FILTRI

ES: $a_n = (2^{-n}, \frac{1}{n}, 1)$ e $n(k)=k^2 \Rightarrow a_{n_k} = (2^{-k^2}, \frac{1}{k^2}, 1)$ $\quad a_{n_k}$ È SOTTOSUCC. DI $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

COMPATTEZZA:

DEF: SIA $K\subset\mathbb{R}^n$. K È COMPATTO SE DA OGNI FAMIGLIA DI APERTI $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ t.c. $K\subset\bigcup_{\alpha\in A}O_\alpha$ ("COPERTURA APERTA DI K") È POSSIBILE ESTRARRE UNA "SOTTOCOPERTURA FINITA" $O_1, O_2 \dots O_N \subset \{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ t.c. $K\subset\bigcup_{i=1}^{N} O_i$

TEOREMA DI HEINE-BORL

HP: $K\subset\mathbb{R}^n$

TH K È COMPATTO $\Longleftrightarrow$ CHIUSO e LIMITATO

COROLLARIO I: $K\subset\mathbb{R}^n$ COMPATTO. ALLORA OGNI SOTTOINSIEME K_∞ INFINITO DI K HA ALMENO UN PUNTO DI K CHE È DI ACCUM. PER K_∞

DIM:

SE NESSUN PUNTO DI K È DI ACCUMULAZIONE PER K_∞ $\forall x\in K$ È IL CENTRO DI UNA BOLLA $B(x,r_x)$ CONTENENTE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞ (x SE $x\in K_\infty$). ALLORA $K\subset\bigcup_{x\in K}B(x,r_x)$ e ALLO STESSO TEMPO NON È POSSIBILE ESTRARRE UNA SOTTOCOPERTURA FINITA (DATO CHE K_∞ È UN INSIEME INFINITO e CIASCUN $B(x,r_x)$ CONTIENE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞).

COROLLARIO II: OGNI SOTTOINSIEME INFINITO e LIMITATO DI $\mathbb{R}^n$ HA ALMENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE

DIM:

SIA K_∞ TALE INSIEME: DATO CHE È LIMITATO: $K_\infty \subset \overline{B(0,R)}$. DEFINISCO $K=\overline{B(0,R)}$

e VISTO CHE K È COMPATTO APPLICO COROLLARIO I e $\exists$ PUNTO DI ACC. DI K_∞

COROLLARIO III: K_∞ SOTTOIN. ∞ DI $\mathbb{R}^n$ e LIMITATO ($\exists$ PUNTO AC. y), ALLORA $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset K_\infty$ t.c. $\lim_{n\to\infty} x_n = y$

DIM:

DATO $y\in Acc(K_\infty) \Rightarrow \forall r>0,\ B(y,r)\setminus\{y\}\cap K_\infty\neq\emptyset$. PER FINI DIMOSTRATIVI, PRENDO $r=\frac{1}{n} \Rightarrow x_n\in B(y,\frac{1}{n})\setminus\{y\}\cap K_\infty$

e INOLTRE $\|x_n-y\|<\frac{1}{n}$ (EQUIVALENTE A $x_n\in B(y,\frac{1}{n})$) CIOÈ $\lim_{n\to\infty}x_n=y$

TEOREMA DI BOLZANO - WEIESTRASS:

OGNI SUCCESSIONE $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ LIMITATA HA UNA SOTTO SUCC. CONVERGENTE

DIM: $E \overset{\text{DEF.}}{=} (x_n)_n \in \mathbb{N}$

- SE E È FINITO

RIGUARA!

- SE E È INFINITO

$\forall r > 0 \quad \exists x_r \in E\,(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $\|x_r - y\| < r$ e $B(y,r) \setminus \{y\} \wedge E \neq 0$,
ALLORA POSSO USARE $r > 0$ PRENDENDO $\|x_{n_1} - y\| < 1$ e $n_2 > n_1$ t.c. $\|x_{n_2} - y\| < \frac{1}{2}$ e IN GENERALE $n_k > n_{k-1} > \dots > n_1$
x_{n_k} t.c. $\|x_{n_k} - y\| < \frac{1}{k}$ CIOÈ $\lim_{k \to \infty} x_k = y$

TEOREMA DI WEIESTRASS

$A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, COMPATTO. SIA $f: A \to \mathbb{R}$ CONTINUA SU A. <u>ALLORA</u>, ESISTONO $x, y \in A$ t.c. $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$ $\forall z \in A$
(x È UN PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO, y DI MAX ASSOLUTO).

PROPOSIZIONE: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$, <u>ALLORA</u>, $\exists$ DUE SUCCESSIONI $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ t.c.
- $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \inf f(A)$
- $\lim_{k \to \infty} f(y_k) = \sup f(A)$

DOVE $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È SUCCESSIONE MINIMIZZANTE e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È MASSIMIZZANTE

DIM (PER $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- SE $\sup f(A) = +\infty \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists y_k \in A$ t.c. $f(y_k) > k \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(y_k) = +\infty = \sup f(A)$
- SE $\overbrace{\sup f(A)}^{=\ell} < \infty$. PER DEF DI SUPERIORE: • $f(y) \leq \ell \quad \forall y \in A$ • $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists y_k \in A$ t.c. $\ell - \frac{1}{k} < f(y_k)$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists y_k \in A$ t.c. $\ell - \frac{1}{k} < f(y_k) \leq \ell$ e PER TEO. CONFRONTO $\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(y_k) = \ell$