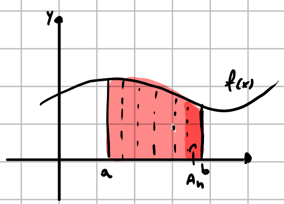
SUCCESSIONI e SERIE DI FUNZIONI

DEFINIAMO $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad f_n: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ TUTTE FUNZIONI DEFINITE IN UN INTERVALLO I

ESPRESSIONI DEL TIPO $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ (*), PER OGNI FISSATO $x \in I$ LA (*) È UNA SERIE $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. ASSEGNO $\forall x$ UNA f_n



OSS: $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{k} f_n(x)}_{S_k} = \lim_{k\to\infty} S_k(x)$ CON $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI (PRIME K FUNZIONI)

CI SONO VARI TIPI DI CONVERGENZA PER $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

DATA $f_n: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e DEFINIAMO COSA VUOL DIRE $\exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$

$(f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty)$

SI DICE CHE $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE PUNTUALMENTE IN I ALLA FUNZIONE f SE $\forall x \in I$ FISSATO $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

NOTA

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ SIGNIFICA CHE (FISSATO $x \in I$):

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (n_0 = \overset{\text{DIPENDE DA } \varepsilon \text{ e } x}{n_0(\varepsilon, x)})$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. IN ALTRE PAROLE: $a_n := f_n(x)$ $\quad l = f(x)$ $\quad \exists \lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

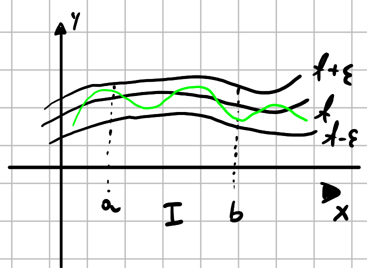
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > n_0$ t.c. $|a_n - l| < \varepsilon$

CONVERGENZA UNIFORME:

DATA SUCC. DI FUNZIONI $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE a $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ PER I SE: $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0 = \underbrace{n_0(\varepsilon)}_{\boxed{\text{INDIP. DA } x}}$ t.c. $\forall n > n_0$ VALE $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in I$

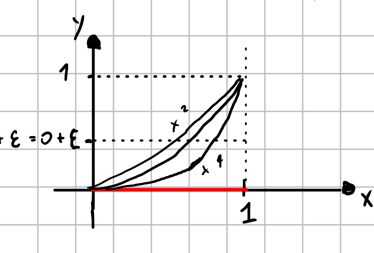
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA CONVERGENZA UNIFORME

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONV. UNIFORMEMENTE a f SU I LA DISUGUAGLIANZA $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ $\quad x \in I, \forall n > n_0$



f_n GENERALE, UNIFORME NELL'INTERVALLO CIOÈ $\forall \varepsilon > 0, \forall n > n_0$ TUTTE LE f_n SONO COMPRESE IN QUESTA FASCIA DI SPESSORE 2ε

NEL CASO $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1)$ $\quad f \equiv 0$



→ ESCONO DALLA FASCIA INDIVIDUATA DA $f \equiv 0$ e $f + \varepsilon$ $\quad$ NON converge unif.

TEOREMA: Definizione convergenza uniforme

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$. ALLORA f_n CONVERGE UNIFORM. A f SU I SE E SOLO SE $\lim_{n\to\infty} \overbrace{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|}^{a_n} = 0$

DIM:

- SE $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n \geq n_0$ VALE $|a_n - 0| < \varepsilon \to a_n < \varepsilon \to \underbrace{}_{\text{PERCHÉ } a_n \text{ È IL SUP}} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n < \varepsilon$. $\to$ CIOÈ VALE CONVERGENZA UNIFORME DI f_n SU I $\square$

- ASSUMIAMO IL CONTRARIO: f_n SIA CONV. UNIF. A f SU I: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0$ VALE $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$
$\Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n > n_0 \ \to \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ $\square$

OSS: CONVERGENZA UNIFORME IMPLICA QUELLA PUNTUALE
$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = a_n \to 0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \to 0 \ \forall x \Rightarrow$ CONV. PUNTUALE

TEOREMA (CONTINUITÀ LIMITE UNIFORME DI f CONTINUE

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCC. DI f CONTINUE SU $I \subseteq \mathbb{R}$, UNIF. CONV. SU I A f
TH: f È CONTINUA

DIM:

FISSO $x_0 \in I$. CONSIDERO $|f(x) - f(x_0)| \to 0 \quad x \to x_0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + \underbrace{f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0)}_{\exists \text{ ARBITRARIO}} + f(x_0)| \underbrace{\leq}_{\text{DIS. TRIA}} \boxed{\mathrm{I}_n} |f(x) - f_n(x)| + \overset{\mathrm{II}_n}{|f_n(x) - f_n(x_0)|} + \overset{\mathrm{III}_n}{|f_n(x_0) - f(x_0)|}$$

DALLA CONV. UNIF. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\boxed{\mathrm{I}_n} < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall n > n_0$. PER PRENDERE UN n_0 PIÙ GRANDE, $\forall n > n_0$ ABBIAMO $\boxed{\mathrm{III}_n < \frac{\varepsilon}{3}}$
DALLA CONTINUITÀ DELLE f_n, $\exists \delta > 0$ t.c. SE $|x - x_0| < \delta$ ABBIAMO $\boxed{\mathrm{II}_n < \frac{\varepsilon}{3}}$ CIOÈ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. SE $|x - x_0| < \delta$ ALLORA $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\square$

TEOREMA (PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE)

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCC. DI FUNZ. CONTINUE SU $[a,b]$. UNIF. CONV. SU $[a,b]$ A f.

TH: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \right)$

DIM:

DAL TEO. PRECEDENTE, f È CONTINUA SU $[a,b] \Rightarrow f$ (E f_n) LIMITATA GRAZIE A WEIERSTRASS

$\Rightarrow \int_a^b f_n(x)\,dx$ E $\int_a^b f(x)\,dx$ SONO DEFINITI. $\quad b-a \Rightarrow$ PER SEMPLIFICARE LA DIMOSTRAZIONE

$\exists \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0$ VALE $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (CONV. DATA DALLE IPOTESI) ALLORA

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)} = \varepsilon \quad \forall n > n_0 \ \square$$

TEOREMA Scambio segno di derivata con limite

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCC. DI FUNZ., $f \in C^1[a,b]$ ($\exists$ E CONTINUA f' SU $[a,b]$) $f_n \to f$ PUNTUALMENTE. f'_n UNIF. CONV. SU $[a,b]$ A UNA FUNZIONE φ CONTINUA.

TH: $f' = \varphi$ (f È DERIVABILE E COINCIDE CON φ)
$\hookrightarrow$ EQUIVALENTE: $\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n$

DIM:

$\forall x \in [a,b]$: $\lim_{n\to\infty} \int_a^x f'_n(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f'_n(t)\,dt = \int_a^x \varphi(t)\,dt$

TEO. FOND. CALCOLO INT.

$= \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)]$

$\Downarrow$ HP. DI CONV. PUNTUALE

$f(x) - f(a)$

CIOÈ $f(x) - f(a) = \int_a^x \overset{\text{CONTINUA}}{\varphi(t)}\,dt \Rightarrow f(x)$ È DERIVABILE PERCHÉ $\int_a^x \varphi(t)\,dt$ LO È E $(f(x) - f(a))' = \left(\int_a^x \varphi(t)\,dt\right)' \Rightarrow f'(x) = \varphi(x) \ \square \quad \forall x \in [a,b]$

TEOREMA (CRITERIO DI CAUCHY)

CONDIZIONE NECC. e SUFF. AFFINCHÈ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, SIA UNIF. CONV. A UNA FUNZ. $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ È CHE:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=\varepsilon(n_0)\ \text{t.c.}\ \boxed{\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\quad\forall n,m>n_0}$$

RICHIAMO SULLE SUCC. NUMERICHE:

DATA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ CONVERGENTE AD $a\in\mathbb{R}$: $\exists\lim_{n\to\infty}a_n=a$ ALLORA VALE LA PROPRIETÀ DI CAUCHY:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \text{t.c.}\ \forall n,m>n_0\ \text{VALE: } \boxed{|a_n-a_m|<\varepsilon}:$$

$|a_n-a_m|=|a_n-a+a-a_m|\leq|a_n-a|+|a_m+a|$ e $\lim_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)$ t.c. $\left.\begin{array}{l}\forall n>n_0: |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\\ \forall n>n_0: |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon): \forall n,m>n_0$ VALE: $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ □

- ANCHE IL RECIPROCO È VERO

UNA SUCC. CHE GODE DI QUESTA PROPRIETÀ VIENE CHIAMATA "DI CAUCHY"

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLA CONV. UNIFORME

HP: DATA a_n SUCC. DI CAUCHY (GUARDA PROPRIETÀ SOPRA)

TH: a_n È CONVERGENTE ($\exists\lim_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$)

DIM:

- SE $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE UNIF. SU $I\subseteq\mathbb{R}$ a f, ALLORA $|f_n(x)-f_m(x)|=|f_n(x)-f(x)+f(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f_m(x)-f(x)|\Rightarrow$

$\Rightarrow\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)|\leq\sup_{x\in I}(|f_n(x)-f(x)|+|f_m(x)-f(x)|)$ $\boxed{\text{IN QUANTO } \sup_{x\in I}(f(x)+g(x))\leq\sup_{x\in I}f(x)+\sup_{x\in I}g(x)}$

$\Rightarrow\leq\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|+\sup_{x\in I}|f_m(x)-f(x)|$

DALLA CONV. UNIFORME $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n>n_0: \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall m>m_0: \sup_{x\in I}|f_m(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

- ORA DIM. CHE LA PROP. DI CAUCHY IMPLICA LA CONVERGENZA UNIFORME

$\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n,m>n_0$ VALE: $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ e OSSERVIAMO: $|f_n(\bar{x})-f_m(\bar{x})|\leq\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ $\forall n,m>n_0(\varepsilon)$.

PONENDO $m\to\infty$

$|f_n(\bar{x})-f(\bar{x})|<\varepsilon$ $\forall n>n_0(\varepsilon)$, $\forall\bar{x}$ FISSATO $\in I$ $\iff$ CONV. UNIFORME (PRIMA DEFINIZIONE).

MA $f(x)=?$

$|f_n(\bar{x})-f_m(\bar{x})|\leq\sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ $\forall n,m>n_0$ $\Rightarrow$ ALLORA $a_n=f_n(\bar{x})$ È UNA SUCC. DI CAUCHY $\Rightarrow\exists\underbrace{a=f(\bar{x})}_{\text{DIPENDENZA DI } a \text{ DA } \bar{x}}$ t.c. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$

SERIE DI FUNZIONI

CONSIDERIAMO UNA SUCC. DI FUNZ. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. CONSIDERIAMO $\forall x\in I$ FISSATO L'ESPRESSIONE

$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\ \text{"SERIE DI FUNZIONI"}}$, CHE DIPENDE DA x $\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\lim_{k\to\infty}\overbrace{\underbrace{\sum_{n=1}^{k}f_n(x)}_{S_k(x)}}^{\text{SOMME PARZIALI}}$. $\Rightarrow f(x)=\lim_{n\to\infty}S_k(x)$

DEF: SE, $\forall x\in I$ FISSATO, $\exists\lim_{n\to\infty}S_n(x)$, ALLORA LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE IN I. PONGO $f(x):=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ e DICO CHE CONVERGE UNIF. SU I SE $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE UNIF. A f SU I.

TEOREMA: Scambio integrale-limite nelle serie

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ CONVERGE UNIF. A $f(x)$

TH: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx}_{S}=\underbrace{\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,dx}_{D}$

$S=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_a^b f_n(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_a^b\overbrace{(\sum_{n=1}^{k}f_n(x))}^{S_k}dx=\lim_{k\to\infty}\int_a^b S_k(x)\,dx\overset{\text{DALLA HP}}{=}\int_a^b\lim_{k\to\infty}S_k(x)\,dx$

TEOREMA: Scambio derivata-limite nelle serie

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C'[a,b]$ t.c. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE PUNTUAL. SU $[a,b]$ A UNA FUNZ. $f(x)$ E t.c. $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ SIA UNIF. CONVERG. SU $[a,b]$

TH: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \forall x \in [a,b]$. ($\exists f'(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ È DERIVABILE E COINCIDONO)

TEOREMA (WEIERSTRASS M-TEST)

HP: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ VALE: $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in I$ E $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. ALLORA LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ È UNIF. CONVERGENTE SU I.

DIM:

DATO $x \in I$, PER HP SO CHE: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \Rightarrow$ DAL TEO. CONFRONTO QUESTO IMPLICA CHE CONVERGE.

(RICORDA: SE $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ CONVERGE, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE TOTALMENTE)

PONIAMO $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ E DIMOSTRIAMO LA CONV. UNIFORME CIOÈ CHE $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (SUCC. DELLE SOMME PARZIALI) CONVERGE UNIFORMEMENTE A I SU f.

ABBIAMO $|f(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k$

$\Leftrightarrow |f(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \Rightarrow \sup_{x\in I} |f(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f(x) - S_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k\right) = 0.$

$\rightarrow$ PER DEF, S_k CONVERGE UNIF. QUINDI ANCHE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE. □

TEOREMA: rapporto limitatezza - continuità uniforme

HP: $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq l_n \quad \forall x \in I, l_n \in \mathbb{R}$ (f_n FUNZIONI LIMITATE).

TH: 1- SE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE, ALLORA ANCHE f È LIMITATA: $\exists l \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq l \quad \forall x \in I$

2- SE $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ CONV. UNIF. SU I, POSTO $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, ALLORA ANCHE f È LIMITATA

DIM:

1. $\rightarrow$ DALLA CONV. UNIF: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0$ VALE $|f_n(x) - f_n| < \varepsilon \quad \forall x \in I$.

POSTO $\varepsilon = 1$, VALE $|f_{n_0+1}(x) - f(x)| < 1$ ⊛.

ALLORA: $|f(x)| = |f(x) - f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+1}(x)| \overset{\text{DIS. TRIANG.}}{\leq} |f(x) - f_{n_0+1}(x)| + |f_{n_0+1}(x)| \leq 1 + l_{n_0+1} \quad \forall x \in I. \rightarrow f$ È LIMITATA □

2. $\rightarrow$ PER FINI DIMOSTRATIVI, PONGO $\varepsilon = 1$. DALLA CONVERGENZA DELLA SERIE HO: ($\exists n_0$ t.c. $\forall n > n_0$) $|f(x) - S_n(x)| < 1$ E $|f(x) - S_{n_0+1}(x)| < 1$.

PONENDO $|f(x)| = |f(x) - S_{n_0+1}(x) + S_{n_0+1}(x)| \overset{\text{DIS. D}}{\leq} |f(x) - S_{n_0+1}(x)| + |S_{n_0+1}(x)| \leq 1 + L$ □

L = SOMMA DEI LIMITI DELLE SUCC. PARZIALI (DALLE HP SONO TUTTE LIMITATE)

SERIE DI FOURIER

SERVE PER RISOLVERE EQ. ALLE DERIVATE PARZIALI

SERIE DI FOURIER → RAPPRESENTA FUNZIONE PERIODICA DI PERIODO T COME:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)}$$ CON a_0, a_n, b_n OPPORTUNI

- $\frac{a}{2}$ HA PERIODO ARBITRARIO
- $\cos\frac{2\pi x}{T}$ E $\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T}$ HANNO PERIODO T
- $\cos\frac{2\pi n x}{T}$ E $\operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{T}$ HANNO PERIODO $\frac{T}{n} < T$

HANNO PERIODO T $\forall n > 1$

TEOREMA DI EULERO - FOURIER:

HP: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)$ CONV. UNIF. SU $[0,T)$ A f

TH: $\boxed{\begin{aligned} &\bullet\ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx \qquad n = 0,1,2,\dots \\ &\bullet\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx \qquad n = 1,2,3,\dots \end{aligned}}$ FORMULE DI EULERO - FOURIER

DIM:

MEMBRO DI DESTRA CONTIENE SOLO FUNZ CONTINUE e LIMITATE + CONVERGE UNIF $\Rightarrow f$ È CONTINUA e LIMITATA

CON $n=0 \to a_0 \overset{?}{=} \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx$. PER DIMOSTRARLO, INTEGRIAMO SCAMBIANO $\int_a^b$ CON $\sum_{n=0}^{b}$:

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_0^T \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^T \dots}_{=0\ \forall n\geq 1} \iff \int_0^T f(x)\,dx = T\cdot\frac{a_0}{2}$$

↳ PERCHÈ AREA POSITIVA = AREA NEGATIVA

PER SPIEGARE GLI ALTRI COEFFICIENTI:

SO CHE $\bullet \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx = \int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \neq m$
- $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx = 0$
- $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx = 0$
- $\int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx = 0$

e PER $n = m$
- $\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = \frac{T}{2}$
- $\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) = 0$
- $\int_0^T \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = T/2$

GIUSTIFICAZIONI:

DALLE FORMULE DI VERNER:
- $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
- $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$

APPLICAZIONI

$$\int_0^T \cos\Big(\overset{\alpha}{\frac{2\pi n x}{T}}\Big)\cos\Big(\overset{\beta}{\frac{2\pi m x}{T}}\Big) = \frac{1}{2}\int_0^T\left[\cos\left(\frac{2(n-m)\pi x}{T}\right) + \cos\frac{2(n+m)\pi x}{T}\right]dx \overset{\text{DAL CALCOLO DELLA PRIMITIVA}}{=} 0$$

$$\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx \overset{\text{BISEZIONE}}{=} \frac{1}{2}\int_0^T\left(1+\cos\left(\frac{4\pi n x}{T}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{T}{4n\pi}\operatorname{sen}\frac{4\pi n x}{T}\right]\Big|_{x=0}^{x=T} = \frac{T}{2}$$

DIM FORMULE DI EULERO - FOURIER

V SPAZIO VETTORIALE DI DIM. k. ES: $\mathbb{R}^k$ e $e_1, \dots, e_k$ BASE CANONICA

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases}1\\0\end{cases} \quad \text{(DELTA DI KRONECKER)}.$$

AVENDO $\langle v, e_i\rangle = \langle \overset{\text{COMB. LIN. DELLA BASE}}{\sum_{n=1}^{k} c_n e_n}, e_i\rangle = \sum_{n=1}^{k} c_n \underbrace{\langle e_n, e_i\rangle}_{\delta_{ni}} = \sum_{n=1}^{k} c_n\,\delta_{ni} = c_i$

NE DERIVA LA RAPPRESENTAZIONE DI UNA f IN TERMINI DI UNA BASE:

$1 \quad \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)_{n\geq 1} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)_{n\geq 1}$ e IL PRODOTTO SCALARE È DATO DA:

$\langle f, g\rangle = \int_0^T f(x)\,g(x)\,dx$ (STESSE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{R}^k$)

MOLTIPLICHIAMO $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\dots$ PER $\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)$. SAPENDO CHE ~~~ CONV. UNIFORMEMENTE a $f(x)$, e CONSIDERO LE SOMME PARZIALI S_n DI $f(x)$:

VALE: $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,T)}|f(x) - S_n(x)| = 0$. $\longrightarrow$ IMPLICA CHE $\cos\frac{2\pi m x}{T}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\dots\right]$ CONVERGE UNIF. a $\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\cdot f(x)$

e IMPLICA $\left|f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) - S_n(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\right| \leq \left|\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\right|\cdot|f(x) - S_n(x)| \leq |f(x) - S_n(x)| \Rightarrow \sup_{x\in[0,T)}\left|f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) - S_n(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)\right|$
$\leq \sup_{x\in[0,T)}|f(x) - S_n(x)| \to 0,\ n\to\infty$. COME CONV. UNIF.

$a_m = ? \to \langle f, \overbrace{\cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)}^{g(x)}\rangle = \int_0^T f(x)\overbrace{\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)}^{g(x)}dx \overset{\text{POSSO SCAMBIARE } \int \text{ CON } \sum \text{ PER CONV. UNIF.}}{=} \overbrace{\int_0^T \frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx}^{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx}_{\delta_{n,m}\cdot\frac{T}{2}\ \text{(TUTTI NULLI SE NON IN } n=m)} + b_n \underbrace{\int_0^T \operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{T}\cos\frac{2\pi m x}{T}dx}_{=0}$

E QUINDI RIMANE SOLO: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{n,m} \frac{T}{2} = a_m \frac{T}{2} \Rightarrow \boxed{a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi m x}{T}dx}$ (b_m STESSA COSA) $\square$

RIFLESSIONE SU HP DI CONV. UNIFORME:

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,T]} |f(x)-S_n(x)| = 0$. PER ES: CON $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ $\exists n_0(\varepsilon_0)$ $\exists n > n_0$. $\sup |f(x)-S_n(x)| < 10^{-3}$. POSSIAMO "TRONCARE" LA SERIE A UNA PRECISIONE DI 10^{-3}

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k x}{T}\right)\right)$$

$n > n_0(\varepsilon_0)$ DATO CHE $\forall x \in [0,T)$ ABBIAMO $|f(x)-S_n(x)| < 10^{-3}$ $\forall_{n>n_0}$

- HP: f SIA CONTINUA CHE LIMITATA in $[0,T)$ $\Rightarrow$ a_n e b_n HANNO SENSO COME INTEGRALI DI RIEMANN. MA NON È SCONTATO CHE $f(x) \overset{*}{=} \frac{a_0}{2} + \sum \dots$

PER VERIFICARE $*$ CI SOFFERMIAMO SU ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI

- MONOTONA A TRATTI:

DEF: $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ f È DETTA MONOTONA A TRATTI SE $\exists$ UNA PARTIZIONE $P = \{x_0 = a, \dots x_n = b\}$ di $[a,b)$ t.c. f è MONOTONA $\forall$ INTERVALLO $[x_{i-1}, x_i)$ $i = 1,\dots,n$.
f È MONOTONA SU $\mathbb{R}$ SE LO È SU OGNI INTERVALLO $[a,b)$.

NOTA: SE f È MONOTONA A TRATTI SU $[a,b]$ e LIMITATA, ALLORA f HA SOLO PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE, CIOÈ:

$\exists f_+(c) = \lim_{x\to c^+} f(x) \in \mathbb{R}$

$\exists f_-(c) = \lim_{x\to c^-} f(x) \in \mathbb{R}$

↳ CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONV. UNIF. DELLA SERIE DI FOURIER

TEO. FUNZ. MONOTONE e SERIE DI FOURIER (A)

HP: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ PERIODICA, PERIODO T, MONOTONA A TRATTI e LIMITATA.

TH: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$ CONVERGE PUNT. SU $\mathbb{R}$. IN PARTICOLARE CONVERGE a $f(x)$ $\forall x$ CON $f(x)$ CONTINUA, e CONVERGE a $\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2}$ $\forall x$ DOVE $f(x)$ È DISCONTINUA.

TEO. (B)

HP: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, PERIODICA, CONTINUA su $\mathbb{R}$, DERIVABILE SU $[0,T)$ TRANNE AL PIÙ UN NUMERO FINITO DI PUNTI DI $[0,T)$ DOVE $\exists D^{\pm} f(x) = \lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in \mathbb{R}$.

TH: LA SERIE DI FOURIER È UNIF. CONV. a f SU $\mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE: FUNZIONI "SIMMETRICHE" PER ES, $T = 2\pi$.

- SIA f DISPARI : $f(x) = -f(-x)$, ALLORA $a_n = 0$ $\forall n$
  PARI : $f(x) = f(-x)$, ALLORA $b_n = 0$ $\forall n$

GIUSTIFICO IL CASO DISPARI:

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \xrightarrow{x=-t} -\int_{-\pi}^{0} \overbrace{-f(t)}^{=f(-t)}\cos(nt)\,dt + \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = -\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt + \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$$

ANALOGO PER FUNZIONI PARI

SERIE DI FOURIER COMPLESSA (o COMPATTA)

ES: $T = 2\pi$ e RICHIAMO FORMULA EULERO : $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta) \\ e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta) = \cos(\theta) - i\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$ X e Y $\rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$

USO QUESTE RELAZIONI CON $\theta = nx$:

$$\Rightarrow a_n \cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx) = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)}_{c_n} e^{inx} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + ib_n)}_{c_{-n}} e^{-inx}$$ e $c_0 = \frac{a_0}{2}$

OTTENGO: $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx) = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}}, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

$$\hookrightarrow = c_0 + c_{-1} e^{-ix} + c_1 e^{ix} + c_{-2} e^{-2ix} + c_2 e^{2ix}$$