

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

- SONO EQUAZIONI FUNZIONALI E DIPENDE DALLA FUNZIONE INCOGNITA E DALLE RELATIVE DERIVATE

## FORMA GENERALE:

$$E(y, y', \dots, y^{(k)}, t) = 0, \quad t \in I$$

↑                      ↑                      ↑                      ↑

FUNZIONE      DERIVATA K-ESIMA      VARIABILE INDIPENDENTE      SOTTOINSIEME DI  $\mathbb{R}$

→ ESPRESSIONE CHE CONTIENE  $y = y(t)$

ALTRE NOTAZIONI ...

$$y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$$

## COS' È UNA SOLUZIONE?

TROVARE UNA FUNZIONE  $y = y(t)$  t.c.

$$E(y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t), t) = 0 \quad \forall t \in I$$

"ORDINARE" PER DISTINGUERLE DA EQ. DIFF. ALLE DERIVATE PARZIALI

## ESEMPI:

(I)  $y'' + y = 0$  È UGUALE A  $y''(x) + y(x) = 0$   
 $y''(t) + y(t) = 0$

(II)  $y'' + y = \cos(t)$  È UGUALE A  $y''(t) + y(t) = \cos(t)$

SIA  $(I)$  CHE  $(II)$  SONO EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE

L'ORDINE È L'ORDINE MASSIMO DELLE DERIVATE COINVOLTE NELL'EQUAZIONE

LA STRUTTURA È SEMPRE DEL TIPO:

$$E(y, y', y'', t) = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{NELLA } (II) \text{ LA } t \text{ È} \\ \text{ESPLICITA} \end{array} \right)$$

NOTIAMO CHE

$$\begin{cases} y_1 = \cos(t) \\ y_2 = \sin(t) \end{cases} \text{ SONO SOLUZ. DI } (I) \text{ CON } I = \mathbb{R}$$

$$\text{PERCHÉ } y_1'(t) = -\sin t \quad \text{e} \quad y_1''(t) = -\cos(t)$$

e SOSTITUISCO:

$$y_1''(t) + y_1(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0, \text{ VERO } \forall t \in \mathbb{R}$$

STESSA COSA CON  $y_2$

MENTRE PER IL CASO  $(II)$ , NON SONO SOLUZIONI...  
 $-\cos(t) + \cos(t) \neq \cos(t) \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

NON TUTTE LE EQ. DIFF. HANNO SOLUZIONI

ESEMPIO

$$(y')^2 + 1 = 0 \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

NON HA SOLUZIONI PERCHÉ NON C'È UNA FUNZ.  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  CHE SODDISFA L'EQUAZIONE

DOMANDE DA FARE SULLE SOLUZIONI:

- ESISTENZA
- UNICITÀ
- MOLTIPLICITÀ
- SOLUZIONI ESPLICITE (SVOLGIMENTO e RICERCA)

## ESEMPIO (MALTHUS)

$$y' = ky$$

$k \in \mathbb{R}$  SE NON SPECIFICATO

Δ PRIMO ORDINE

Δ VARIABLE INDIP. NON SPECIFICATA, SOLITAMENTE "t"

$$y'(t) = k y(t)$$

MOLTIPLICO PER  $e^{-kt}$  E SPOSTO A SINISTRA

$$y' e^{-kt} - k y e^{-kt} = 0 \quad \text{E QUESTO È COME DIRE:}$$

$$\frac{d}{dt} (y e^{-kt}) = 0$$

MA SAPPIAMO CHE FUNZ. COST. HANNO DERIVATA NULLA, QUINDI

$$y(t) = \underline{C} \cdot e^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall C \text{ SONO TUTTE SOLUZ.}$$

$$\underbrace{(C e^{-kt})'}_{y'} = k \underbrace{C e^{-kt}}_y \quad \forall t \in I \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

ABBIA MO TROVATO CHE  $y = C \cdot e^{-kt}$  È UNA ESPRESS.  
CHE INGLUBA TUTTE LE SOLUZIONI POSSIBILI.

ESISTE UN MODO PER SELEZIONARE UNA SOL. PARTICOLARE

SI  $\Rightarrow$  PROBLEMA AI VALORI INIZIALI  
" " " DI CAUCHY

ESEMPIO

$$(PC) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ED. DIFFERENZIALE

CONDIZIONE INIZIALE

DEFINIZIONE ALTERNATIVA DELLA  $\&$  ESPONENZIALE

SOLUZIONE: CASO  $k=1$  DELL'ESEMPIO DI MALTHUS

$$\text{SOL. GENERALE } y(t) = C e^t, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$1 = y(0) = C e^0 = C \Rightarrow C = 1 \quad \text{QUINDI}$$

$y(t) = e^t$  È L'UNICA SOLUZ. AL PROBLEMA DI CAUCHY

CONCLUDENDO

$y = e^x$  è l'unica funz. derivabile i.c.  $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

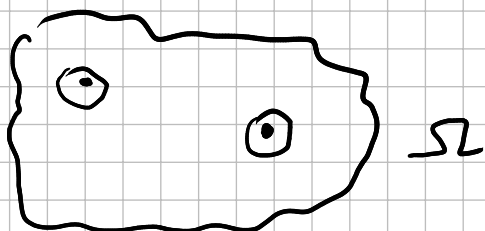
QUESTI PROBLEMI DI ORDINE 1 SONO CASI PARTICOLARI DEL TIPO

$(1) y' = f(x, y) \Rightarrow$  EQ. DI 1 ORDINE IN FORMA NORMALE  
\*  $\uparrow$  VARIABLE INDIPEND.  $\uparrow$  FUNZ. INCOGNITA PER COEFF. DI  $y'$  HO 1 \*

DEFINIZIONE DI SOLUZIONE:

SIA  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  "APERTO"

APERTO =  $\forall x \in \Omega \exists$  un DISCO CENTRATO IN  $x$  TUTTO CONTENUTO IN  $\Omega$ ,  $D_x \subset \mathbb{R}$



UNA FUNZ  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  è UNA SOLUZ. DI  $y' = f(x, y)$

su  $I$  SE:

-  $y$  È DERIVABILE SU  $I$

-  $(x, y(x)) \in \Omega$ ,  $\forall x \in I$

-  $y'(x) = f(x, y(x))$ ,  $\forall x \in I$

SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  È UN PUNTO NOTO NEL PROBLEMA

SIA QUINDI  $(x_0, y_0) \in \Omega$ ,  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 DIAMMO CHE  $y = y(x)$  È SOLUZIONE DI (PC) SE:  
 -  $y = y(x)$  SODDISFA  $y' = f(x, y)$  SU QUALCHE INTERVALLO  
 -  $x_0 \in I$   
 -  $y(x_0) = y_0$

SE  $f$  SODDISFA  
ALCUNE IPOTESI

ESISTE ED È UNICA  
 LA SOLUZIONE DI (PC)  
 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

## TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE CALCOLO INTEGRALE RIVISITATO

SIA  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , CONTINUA IN  $[a, b]$

ALLORA:

$$y(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0, \quad \forall x \in [a, b] \quad \boxed{=} \Rightarrow \text{DEFINIZIONE}$$

È L'UNICA SOLUZIONE DEL PC

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DIM:

①

$$\underbrace{\left( \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0 \right)'}_{y(x_0)} = f(x) \quad \checkmark$$

SOLUZIONE.

MA ANCHE  $y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt + y_0 \Rightarrow y(x_0) = y_0$

$\frac{1}{x_0} \quad 1$   
 $\ominus$

## ② UNICITÀ

SUPPONIAMO

$$\begin{cases} y_1' = f(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} y_2' = f(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SOTTRAENDO OTTENGO

$$\begin{cases} (y_1 - y_2)' = f(x) - f(x) = 0 \\ (y_1 - y_2)(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{pongo } m = y_1 - y_2 \quad \begin{cases} m' = 0 \\ m(x_0) = 0 \end{cases}$$

QUINDI  $m(x) = c$  ( $m' = 0$  CIOÈ COSTANTE)

e  $m(x) = 0$  QUINDI  $c = 0$   $\forall x \in [a, b]$

CIOÈ

$$\boxed{y_1 = y_2}$$