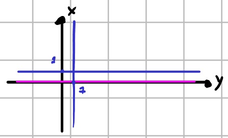
∃ DERIVATA PARZIALE IN x_0 NON GARANTISCE LA CONTINUITÀ. LA "DIFFERENZIABILITÀ" AIUTA A CAPIRE QUESTA CORRELAZIONE

DIM CON ESEMPIO: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,0) \lor (0,y) \\ 0, & \text{ALTROVE} \end{cases} \longrightarrow$$



ANALIZZANDO LA DERIVABILITÀ IN $(0,0)$:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$

→ ENTRAMBE ESISTONO, TUTTAVIA LA f NON È CONTINUA IN $(0,0)$

ANALIZZO LA RESTRIZIONE ALLA RETTA $y=x$: $f\big|_{\substack{(x,y)\\ y=x}} = f(x,x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \to \lim_{x\to 0} f(x,x) = 0 \neq f(0,0) = 1$

*DEF: DATA APPLICAZIONE LINEARE $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n,m \in \mathbb{N}$ DICIAMO CHE T È LINEARE SE:

- $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^n$
- $T(\lambda u) = \lambda T(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n$

TEOREMA ALGEBRA LINEARE

HP: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARE

TH: $\exists$ A MATRICE $m \times n$ t.c. $T(u) = A \cdot u \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$

CASO $n \in \mathbb{N}$, $m=1$: $T(u) = Au = \langle A, u \rangle$ (PROD. SCALARE)

DEFINIZIONE DIFFERENZIABILITÀ:

SIA $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω APERTO. f È DIFFERENZIABILE IN $x_0 \in \Omega$ SE $\exists T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LINEARE t.c.:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + T(h) + o(\|h\|),\ h\to 0^{*}, \quad \text{DOVE } \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \to 0,\ h \to 0}$$

* RISCRIVIBILE COME: $\exists A \in \mathbb{R}^n$ t.c.: $f(x_0+h) = f(x_0) + \langle A, h \rangle + o(\|h\|)$, $h \to 0$

TERMINOLOGIA: T "DIFFERENZIALE DI f NEL PUNTO x_0". PONIAMO $df_{x_0} := T$

TEOREMA

HP: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω APERTO, $x_0 \in \Omega$. SE f È DIFFERENZIABILE IN x_0:

TH:
- f È CONTINUA IN x_0
- $\forall v \in \mathbb{R}^n \ \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(v)$ (ESISTONO DERIVATE DIREZIONALI, E SONO UGUALI AL DIFF. IN QUEL PUNTO)
- $df_{x_0}(h) = \underbrace{\langle \nabla f(x_0), h \rangle}_{\text{PROD. SCALARE IN } \mathbb{R}^n} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$

CONSIDERO $n=3$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|v\| \cos(\theta)$. IL GRADIENTE È LA DIREZIONE DI MASSIMA CRESCITA ($\overset{\text{THETA}}{\theta} = 0$) DELLA f.

SE PER SEMPLICITÀ $\|v\| = 1$, $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| \leq \|\nabla f(x_0)\|$ È UN IDENTITÀ PER $\theta = 0$

$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{\langle A, h \rangle}_{df_{x_0}(h)} + o(\|h\|)$, $h \to 0$

→ RELAZIONE CAUCHY-SCHWARZ

NOTO CHE $|\langle A, h \rangle| \leq \|A\| \cdot \|h\| \to 0$, CIOÈ $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ → CIOÈ CONTINUA

PER DEF: $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$. DOBBIAMO DIM. LA SUA $\exists$

PER LINEARITÀ

$= \lim_{t\to 0} \frac{T(\cancel{t}v)}{\cancel{t}} + \frac{o(\|tv\|)}{t} = T(v) = Av$ MATRICE (VETTORE) CHE RAPP. T

$\|v\| \cdot \frac{o(\|tv\|)}{\|v\| \cdot t} = \|v\| \cdot \frac{o(\|tv\|)}{\pm \|tv\|} \to 0$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i v_i \iff \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i v_i$$

NEL CASO $v = e_j$ (BASE CANONICA), OTTENGO $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0) = A_j$, CIOÈ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ (DERIVATA PARZIALE)

CRITERIO DI DIFFERENZIABILITÀ:

$f \in C^1 \implies$ DIFFERENZIABILITÀ DI $f \Rightarrow f$ CONTINUA

$\hookrightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle$

TEOREMA:

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω APERTO, $f: \Omega \to \mathbb{R}$. SE $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ (CIOÈ $\exists$ DERIVATE PARZIALI DI f $\forall$ PUNTO E SONO CONTINUE)

TH: f È DIFFERENZIABILE $\forall$ PUNTO $\in \Omega$. $\forall x_0 \in \Omega$: $df_{x_0}(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

DIM:

$n=2$ (PER $n \in \mathbb{N}$ È SIMILE). SIA $(x_0, y_0) \in \Omega$. LA TH PUÒ ESSERE RISCRITTA COME:

$$f(x_0+h, y_0+k) \stackrel{?}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \quad \text{CON } h,k \text{ t.c. } (x_0+h, y_0+k) \in \Omega$$

$\neq$ DAL VALORE DELL'ENUNCIATO

NOTIAMO CHE:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \pm f(x_0, y_0+k) = \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)}_{I} + \underbrace{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}_{II}$$

APPLICHIAMO TEO. MEDIA LAGRANGE:

$$\begin{cases} \exists x_h \in [x_0, x_0+h],\ h>0 & \exists y_k \in [y_0, y_0+k],\ k>0 \\ \exists x_h \in [x_0+h, x_0],\ h<0 & \exists y_k \in [y_0+k, y_0],\ k<0 \end{cases} \text{ t.c. } I + II = \frac{\partial f}{\partial x}(x_h, y_0+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_k)k$$

LA TH È EQUIVALENTE A:

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{?} 0$$

(DIMOSTRARE PER I PUNTI INTERMEDI È UGUALE A x_0, y_0)

$$\left| \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} f(x_h, y_0+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_k)k - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \right\} \right|$$

(METTO VAL ASS. PERCHÈ $\lim_{x\to 0}|x|$ E $\lim_{x\to 0} x$ SONO $=$)

DISU. TRIAN.

$$\leq \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right|}_{\to 0 \ (h,k)\to(0,0)} + \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right|}_{\to 0 \ (h,k)\to(0,0)}$$

GRAZIE AL FATTO CHE $x_h \to x_0$, $h \to 0$; $y_k \to y_0$, $k \to 0$ (x_h, y_k COLLASSANO SU x_0, y_0)

TEOREMA:

HP: SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, DIFFERENZIABILE IN A E $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, φ DERIVABILE IN $\mathbb{R}^n$

SIA $\underbrace{\varphi([a,b])}_{\text{IMMAGINE}} \subseteq A$. ($\exists f \circ \varphi$).

TH: f COMPOSTA $f \circ \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE SU $[a,b]$ E $(f \circ \varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$, DOVE $\varphi'(t) := (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))$

DIM:

SIA $t_0 \in [a,b]$. PER HP f DIFF. IN $x_0 = \varphi(t_0)$

(*) $f(y) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle + o(\|y - x_0\|)$. INOLTRE φ È DERIVABILE IN t_0:

$\varphi(t_0+h) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \cdot h + o(h)$, $h \to 0$. PONGO $y = \varphi(t_0+h)$ IN (*):

$$f(\varphi(t_0+h)) = f(\varphi(t_0)) + \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi(t_0+h) - \varphi(t_0) \rangle + o(\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|)$$

E INOLTRE L'ENUNCIATO È EQUIVALENTE A: $\exists \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ\varphi)(t_0+h) - (f\circ\varphi)(t_0)}{h} = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) \rangle$

DALLE CONSID. INIZIALI:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f\circ\varphi)(t_0+h) - (f\circ\varphi)(t_0)}{h} = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} \rangle + \boxed{\frac{o(\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|)}{h}}$$

$$\underbrace{\frac{o(\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|)}{\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|}}_{=0} \cdot \underbrace{\frac{\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|}{h}}_{\text{LIMITATA } (\|\varphi'(t_0)\|)} = 0$$

CONCLUSIONE

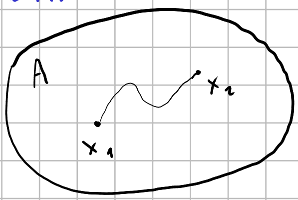
$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ\varphi)(t_0+h)-(f\circ\varphi)(t_0)}{h} = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0)\rangle \quad \square$$

TEOREMA

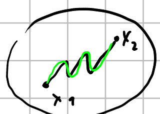
HP: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO E CONNESSO (PER ARCHI), $f: A\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE E TALE CHE $\nabla f(x) = (0,\dots,0)$ $\forall x\in A$

TH: f COSTANTE

DIM:



DIMOSTRIAMO IL TEO. PRENDENDO φ DIFFERENZIABILE $\varphi: [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$



"SMUSSAMENTO" NEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DELLA DERIVATA

QUINDI CONSIDERO $\varphi(a) = x_1$ E $\varphi(b) = x_2$, φ DERIVABILE IN $[a,b]$.

CONSIDERO $f\circ\varphi: [a,b]\to\mathbb{R}$. È DERIVABILE PER TEO. PRECEDENTE: $(f\circ\varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \overset{\text{PER HP}}{=} 0$

DA ANALISI I, $f\circ\varphi$ È COSTANTE, IN PARTICOLARE $(f\circ\varphi)(a) = (f\circ\varphi)(b) \iff f(x_1) = f(x_2)$ CON x_1 E x_2 ARBITRARI