AVENDO $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dots$ e SE f RISPETTA LE HP DEL TEO. B:

$C_n(x) := \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$ e $S_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$.

SE g e $f \in C(I)$ POSSO DEFINIRE $\boxed{\langle f, g \rangle \overset{DEF.}{=} \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx}$ CHE HA LE STESSE PROP. DEL PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}^n$

e DEFINISCO ANCHE LA NORMA: $\boxed{\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}}$ e VALE: $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j} \cdot \frac{T}{2}$ e $\langle S_i, S_j \rangle = \delta_{i,j} \cdot \frac{T}{2}$. INOLTRE $\langle C_i, S_i \rangle = 0$

$\langle 1, C_i \rangle = \langle 1, S_i \rangle = 0$

$\|f - g\| = \sqrt{\langle f-g, f-g \rangle}$ = "DISTANZA DI f DA g, e VICEVERSA".

RISPETTO A QUESTA NORMA DEFINIAMO UNA NOZIONE DI CONVERGENZA $f_n \to f$

$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \|f - g\|$ e CIOÈ: "$f_n \overset{\sim}{\to} f$, $n \to \infty$" CHE SIGNIFICA $\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = 0$ CIOÈ $\|f_n - f\|_\sim \to 0$, $n \to \infty$

PER SEMPLICITÀ DEFINISCO $[0,1] = [0,T]$ $T = 2\pi$ CON $S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$

$\|f - S_n(f)\|_\sim^2 = \langle f - S_n(f), f - S_n(f) \rangle = \langle f, f \rangle - 2\langle f, S_n(f) \rangle + \langle S_n(f), S_n(f) \rangle = \langle f, f \rangle - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n^2 + b_n^2\right]$ $\longrightarrow$ SCARTO QUADRATICO

$(f_n)_n$ "SUCCESSIONE DI CAUCHY" $\|f_n - f_m\|_\sim \to 0$ PER $n, m \to \infty$ NON È DETTO CHE $\exists f$ t.c. $\|f_n - f\|_\sim \to 0$, $n \to \infty$

$\hookrightarrow$ RISOLTA TRAMITE L'INTEGRALE DI LEBESGUE.

$f \in C[a,b]$.

$\|f\|_{C[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ $\longrightarrow$ SODDISFA LE PROP. DI NORMA COME in $\mathbb{R}^n$.

VALE PER CONTINUITÀ

$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (DIS. Δ) DIM: $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ e $\max_{x\in[a,b]} |f(x) + g(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$

DISTANZA DI FUNZIONI

$\|f - g\|_{C[a,b]}$ = "DISTANZA DA f e g"

$f_n \longrightarrow f$ SSE $\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, $n \to \infty$ ($=$ A CONV. UNIFORME)

QUINDI SE $\underbrace{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[a,b]}_{\text{TUTTE CONTINUE}}$ e $\|f_n - f_m\| \to 0$; $n, m \to 0$, IL CHE È EQUIVALENTE ALL' $\exists$ DI $f \in [a,b]$ t.c. $\|f_n - f\| \to 0$, $n \to \infty$

APPLICAZIONE TEOREMA

(Pc) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \to$

TEOREMA $\exists$ e UNICITÀ

HP: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ DI FORMA:

1) $\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}$
2) $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
3) $\Omega = \{(x,y) : (x - x_0^2) + (y - y_0^2) < r^2\}$, $r > 0$

SIA $f: \Omega \to \mathbb{R}$

$(x_0, y_0) \in \Omega$

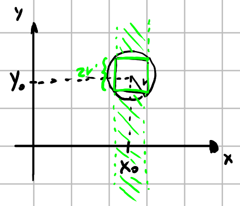
$f \in C(\Omega)$ e t.c. $|f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y - z|$ $\forall (x,y),(x,z) \in \Omega$ $(L > 0)$

TH: (Pc) HA UN'UNICA SOLUZIONE $y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, DOVE $x_0 \in I$ (INTERVALLO)

e $I = [a,b]$ o $I = \mathbb{R}$ SE $\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}$ o $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

DIM: SE DIMOSTRIAMO 1, DIMOSTRIAMO ANCHE 2 e 3.

2) SE $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, POSSIAMO APPLICARLO a $[-R, R] \times \mathbb{R}$, $R > 0$. QUINDI ABBIAMO $\exists$ e UNICITÀ SU $[-R, R] \Rightarrow$ OTTENIAMO $\exists$ e UNICITÀ SU TUTTO $\mathbb{R}$ DATO R ARBITRARIO

3) 

$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \le r', \ |y - y_0| < r'\}$ (QUADRATO)

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \forall (x,y) \in Q \\ f(x, y_0 - r') & \forall (x,y) \ \text{t.c.} \ y < y_0 - r' \\ f(x, y_0 + r') & \forall (x,y) \ \text{t.c.} \ y > y_0 + r' \end{cases}$$

e CONSIDERO $(\tilde{PC}) \begin{cases} y' = \tilde{f}(x,y) \\ y(x_0) = y \end{cases}$ (NOTA: $\tilde{f}(x,y)$ È CONTINUA e SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ SU $[x_0 - r', x_0 + r']$)

$\Rightarrow \exists$ UNICA SOLUZIONE DI $(\tilde{PC})$ SU $[x_0 - r', x_0 + r']$. ESSENDO ESSA $(y = y(x))$ CONTINUA ALLORA $\exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta$

CIOÈ $|y(x) - \underset{y_0}{y(x_0)}| < r'$ $(\varepsilon = r')$

IL CHE VUOL DIRE $\tilde{f}(x,y) = f(x,y) \Rightarrow y$ È UNICA SOLUZIONE IN $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta_0]$ DI (PC)

1) • PASSO 1 : $y = y(x)$ È SOLUZIONE DI (PC) SSE È SOLUZIONE DI:

$$\circledast \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \qquad x \in [a,b]$$

EQ. DI VOLTERRA

DIM: DA PC $\to \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y \end{cases}$ e INTEGRO $\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$

$\hookrightarrow y(x) - y(x_0) \rightsquigarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \dots \to$ VERIFICATA $\circledast$

DIMOSTRO CHE SIA EFFETTIVAMENTE SOLUZIONE

$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow y(x_0) = y_0$. INOLTRE PRENDO DERIVATA DI AMBO I MEMBRI DA $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$:

$$y'(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt\right)' = f(x, y(x))$$

• PASSO 2: DEFINIZIONE DI UNA SUCCESSIONE "APPROSSIMANTE"

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} y_1(x) := y_0 \\ y_2(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt \\ \vdots \\ y_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt \end{cases}$$

TUTTE FUNZIONI $\in C[a,b]$

• PASSO 3: $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È SUCC. DI CAUCHY

DEFINIAMO $M = \max_{x \in [a,b]} |f(x, y_0)|$, PER INDUZIONE: $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{M}{L} \cdot \frac{L^n}{n!} |x - x_0|^n$, $x \in [a,b]$

* GUARDA NOTE

$$|y_n(x) - y_m(x)| = |y_n(x) - y_{n-1}(x) + y_{n-1}(x) + \dots| \le |y_n(x) - y_{n-1}(x)| + \dots + |y_{m+1}(x) - y_m(x)| = \sum_{k=m}^{n} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \le \sum_{k=m}^{n} \frac{M}{L} \underbrace{|x - x_0|^k}_{\le (b-a)^k} \frac{L^k}{k!}$$

$$\le \frac{M}{L} \Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} L^k}_{\downarrow \ e^{(b-a)L}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{(b-a)^k}{k!} L^k}_{\downarrow \ e^{(b-a)L}} \Big]$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

CIOÈ: $\max_{x \in [a,b]} |y_n(x) - y_m(x)| \to 0 \quad n,m \to 0$ CIOÈ $\|y_n - y_m\|_{C[a,b]} \to 0 \quad n,m \to 0 \Leftrightarrow \exists y \in C[a,b]$ t.c. $\|y_n - y\|_{C[a,b]} \to 0$ PER $n \to \infty$

• PASSO 4 : DALLA DEF. DI y_{n+1}

$$\underset{\downarrow \atop y(x)}{y_{n+1}(x)} = \underset{\downarrow \atop y_0}{y_0} + \underset{\downarrow (!) \atop \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt}{\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt}$$

DIMOSTRIAMO LA CONV. DI $\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt$:

$x \ge x_0$, IL CASO $x_0 \ge x$ È SIMILE

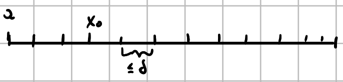
$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_n(t)) - f(t, y(t)))\,dt \right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))|\,dt \le L|y_n(t) - y(t)| \le \int_{x_0}^{x} L \max_{t \in [a,b]} |y_n(t) - y(t)|$$

$$= L \max_{t \in [a,b]} |y_n(t) - y(t)| \cdot \int_{x_0}^{x} 1\,dt$$

$$= L \max_{t \in [a,b]} |y_n(t) - y(t)| \cdot \overbrace{(x - x_0)}^{\le b-a} = L(b-a) \max_{t \in [a,b]} |y_n(t) - y(t)| \to 0, \quad n \to \infty$$

CONCLUSIONE : $y(x)$ SODDISFA $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$

DEVO DIMOSTRARE L'UNICITÀ:



COSTRUISCO UNA PARTIZIONE DI LUNGHEZZA AL PIÙ $\delta > 0$ CON $\delta L < 1$

SUPPONIAMO PER ASSURDO DUE SOLUZIONI $\neq$ DEL (PC), DICIAMO $y_1(x)$, $y_2(x)$.

$$\begin{cases} y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt \\ y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\,dt \end{cases} \longrightarrow |y_1(x) - y_2(x)| = \left| \cancel{y_0} + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt - \cancel{y_0} - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\,dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt - f(t, y_2(t))\,dt \right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\,dt \le L \max_{t \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |y_1(t) - y_2(t)| \cdot \underbrace{\int_{x_0}^{x} 1\,dt}_{\le \delta} \le \delta L \max_{t \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |y_1(t) - y_2(t)|$$

$$\Rightarrow \max_{t \in [x_0-\delta, x_0+\delta]} |y_1(t) - y_2(t)| \le \underbrace{\delta L}_{\le 1} \max_{\dots} |y_1(t) - y_2(t)|$$

SE $\max > 0 \rightarrow 1 \le \delta L < 1$ ASSURDO!

$\max = 0 \rightarrow 0$ DAPPERTUTTO SU OGNI INTERVALLO

<u>ALLORA</u> $y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow$ DEVONO COINCIDERE GLI ESTREMI: $y_1(x_0 + \delta) = y_2(x_0 + \delta) = y_*$

UNICITÀ SU $[x_0 + \delta, x_0 + 2\delta]$?

USIAMO IL FATTO CHE SONO SOLUZIONI DI $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0 + \delta) = y_* \end{cases} \Longleftrightarrow$ EQ. VOLTERRA SODDISFATTA

$$y_1(x) = y_* + \int_{x_0+\delta}^{x} f(t, y_1(t))\,dt$$

$$y_2(x) = y_* + \int_{x_0+\delta}^{x} f(t, y_2(t))\,dt$$

$$\Rightarrow |y_1(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0+\delta}^{x} \underbrace{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))}_{\le L|y_1(t) - y_2(t)|}\,dt \right|$$

$$\le \max_{t \in [x_0+\delta, x_0+2\delta]} |y_1(t) - y_2(t)| \Rightarrow$$ come prima