STUDIO PUNTI CRITICI CON MATRICE HESSIANA

- (x_0, y_0) È UN **PUNTO CRITICO** SE: $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ (A DIMENSIONE n, CON IL GRADIENTE NULLO)
- UN PUNTO CRITICO, SE NON È NÉ DI MASSIMO NÉ DI MINIMO È DETTO **DI SELLA**.

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR DEL SECONDO ORDINE)

HP: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, $f \in C^2(A)$.

$$\boxed{\text{TH: } f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2}\langle Hh, h\rangle + o(\|h\|^2)}$$

CON $\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \to 0$ $(\|h\| \to 0)$ E H MATRICE HESSIANA.

PER A APERTO, SAPPIAMO CHE $\exists B(x_0, r) \subset A$ CIOÈ $\| x_0 - (x_0 + h\| < r \to \|h\| < r$

DIM:

SIA $B(x_0, r) \subset A$ CONVESSO, ALLORA $x \in B(x_0, r) \Rightarrow \underbrace{[x, x_0]}_{\text{SEGMENTO CHE CONGIUNGE } x_0 \text{ E } x} \subset B(x_0, r) \subset A$

"PARAMETRIZZO" QUESTO SEGMENTO USANDO $\varphi: [0, \|x - x_0\|] \to A \subset \mathbb{R}^n$

DEFINITA COME: $\varphi(t) := x_0 + \frac{t(x-x_0)}{\|x-x_0\|}$ CON $\varphi'(t) := \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$ COSTANTE RISPETTO A t

$\varphi(0) = x_0$ E $\varphi(\|x-x_0\|) = \cancel{x_0} + \frac{x-x_0}{\cancel{\|x-x_0\|}}\cancel{\|x-x_0\|} = x$

USIAMO UNA FUNZ. AUSILIARIA:

$g(t) := f(\varphi(t))$, $g: [0, \|x-x_0\|] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, $\varphi \in C^2$ CON $\Rightarrow f(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t) \in C^2([0, \|x-x_0\|])$

E DA TAYLOR PER UNA VARIABILE:

$\underline{g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2)}$, $t \to 0$

CON $g(0) = f(\overbrace{\varphi(0)}^{x_0}) = f(x_0)$

$g'(t) \overset{\text{DAL TEO DER. COMPOSTA}}{=} \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle$, $\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} = k$ $= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))k_i$

$g''(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))k_i\right) \overset{\text{PERCHÉ DERIVAZ. È LINEARE}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))k_i \overset{\text{DERIV. COMPOS.}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\varphi(t))k_j k_i$

CASO $g''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overbrace{\varphi(0)}^{x_0})k_j k_i$

RITORNANDO ALLA FORMULA DI TAYLOR: $g(t) = f(\varphi(t)) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2)$

$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), k\rangle t + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0)t^2 + o(t^2)$

PONGO $t = \|x-x_0\| \to g(\|x-x_0\|) = f(\varphi(\|x-x_0\|)) = f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), \frac{x-x_0}{\cancel{\|x-x_0\|}}\rangle \cancel{\|x-x_0\|} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\underbrace{\frac{(x-x_0)_i}{\cancel{\|x-x_0\|}}}_{k_i}\underbrace{\frac{(x-x_0)_j}{\cancel{\|x-x_0\|}}}_{k_j}\underbrace{\cancel{\|x-x_0\|}^2}_{t^2}$

$+ o(\|x-x_0\|^2)$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x-x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x-x_0), x-x_0\rangle + o(\|x-x_0\|)^2$ □ (DA $h = x - x_0$)

TEOREMA MAX/MIN ↔ MATRICE HESSIANA

HP: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω APERTO, $f \in C^2(\Omega)$. $z_0 \in \Omega$ t.c. $\nabla f(z_0) = 0$

TH: ① $Hf(z_0)$ È DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow z_0$ MINIMO LOCALE

NEGATIVA $\Rightarrow$ MASSIMO LOCALE

INDEFINITA $\Rightarrow$ SELLA

DIMOSTRAZIONE:

DA TAYLOR (SECONDO ORDINE)

$f(z_0 + h) = f(z_0) + \langle \cancel{\nabla f(z_0)}, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(z_0)h, h\rangle + o(\|h\|^2)$, $\|h\| \to 0$

GIUSTIFICO ①

$f(z_0+h)-f(z_0)=\frac{1}{2}\langle Hf(z_0)h,h\rangle + o(\|h\|^2)$. PONIAMO $z_0\in\Omega$, APERTO (CIOÈ: $\exists\, B(z_0,r)\subset\Omega$)

$x\in B \iff x=z_0+h\in B(z_0,r)$, CIOÈ: $\|z_0-(z_0+h)\|=\|h\|<r$. QUINDI $\exists\, r>0$ t.c. $\|h\|<r \Rightarrow z_0+h\in\Omega$

$$f(z_0+h)-f(z_0)=\|h\|^2\left(\frac{1}{2}\overbrace{\left\langle Hf(z_0)\frac{h}{\|h\|},\frac{h}{\|h\|}\right\rangle}^{q_{Hf(z_0)}\left(\frac{h}{\|h\|}\right)}+\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|}\right)$$

$\frac{h}{\|h\|}\in\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$ COMPATTO, SAPPIAMO CHE $q_{Hf(z_0)}$ È CONTINUA, QUINDI VALE IL TEO. DI WEIERSTRASS:

$\exists\, x_0\in\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$ t.c. $q_{Hf(z_0)}(x_0)=\min\limits_{h:\|h\|=1} q_{Hf(z_0)}(h)=m>0 \Rightarrow f(z_0+h)-f(z_0)\geq\|h\|^2\left\{\frac{m}{2}+\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|}\right\}$ (*) ALLORA POSSO TROVARE $c>0$ t.c.

SE $\|h\|<c$ ALLORA $\left|\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}\right|\leq\frac{m}{2} \iff -\frac{m}{2}\leq\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}\leq\frac{m}{2}$ *

USO * IN (*): $f(z_0+h)-f(z_0)\geq\|h\|^2\left\{\frac{m}{2}-\frac{m}{2}\right\}=0$ $\forall h$ t.c. $\|h\|<c \Rightarrow f(z_0+h)\geq f(z_0)$ □

- CASO DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

TEOREMA:

HP: $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ e $f\in C^2(\Omega)$ e $z_0\in\Omega$ t.c. $\nabla f(z_0)=\underline{0}$. $Hf(z_0)$ MATRICE HESSIANA.

TH: ① $\det(Hf(z_0))>0 \Rightarrow z_0$ È ESTREMANTE LOCALE, MINIMO RELATIVO SE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0)>0$ e MINIMO RELATIVO $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0)<0$

② $<0 \Rightarrow z_0$ NON È ESTREMANTE.

DIM:

DATA $f\in C^2(\Omega)$ ALLORA $Hf(x_0)$ È SIMMETRICA $\Rightarrow$ AUTOVALORI $m,M\in\mathbb{R}$ (SOLUZIONI DI $P(\lambda)=0$ CON $P(\lambda)=\det(Hf(z_0)-\lambda I_{2\times 2})$)

CIOÈ: $\det\begin{pmatrix} f_{xx}(z_0)-\lambda & f_{xy}(z_0)\\ f_{xy}(z_0) & f_{yy}(z_0)-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-(f_{xx}+f_{yy})\lambda+f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$,

TENIAMO IN CONTO CHE IL POL. CARATT. È: $P(\lambda)=(\lambda-m)(\lambda-M)=\lambda^2-(m+M)\lambda+mM$

ABBIAMO LE RELAZIONI $\overbrace{f_{xx}+f_{yy}}^{①}=m+M$. $\det Hf(z_0)=\overbrace{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}^{②}=mM$

SE ② <0 $\Rightarrow$ m e M SEGNO DISCORDE $\to$ H INDEFINITA

② >0 $\to$ m e M SEGNO CONCORDE $\to$ H POSITIVA o NEGATIVA. È IMPLICATO ANCHE $f_{xx}\cdot f_{yy}>0$.

DALLA RELAZIONE $f_{xx}+f_{yy}=m+M$ ABBIAMO CHE PER $f_{xx}>0$ LA FORMA QUADRATICA ASSOCIATA È DEF. POSITIVA
$f_{xx}<0$ NEGATIVA

ES: $f(x,y)=x^3+x^2y^2-3x$. RICERCA PUNTI CRITICI

SOLUZ: $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+2xy^2-3=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y=0 \Rightarrow x=0, y=0$

$y=0 \to x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$(-1,0)$ e $(1,0)$

$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}6x+2y^2 & 4xy\\ 4xy & 2x^2\end{pmatrix}$, $Hf(-1,0)=\begin{pmatrix}-6&0\\0&2\end{pmatrix}$ $\det=-12$, $Hf(1,0)=\begin{pmatrix}6&0\\0&2\end{pmatrix}$ $\det=12$

DAL TEO. $(-1,0)$ NON È ESTREMANTE, $(1,0)$ È DI MINIMO ($f_{xx}=6>0$)

ES: $f(x,y)=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\cos(x+y)$ IN $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ t.c. $|x|<\pi, |y|<\pi\}$. TROVARE PUNTI CRITICI

SOLUZIONE:

- $f(x,y)\in C^\infty(Q)$.

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos x-\cancel{\operatorname{sen}(x+y)}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos y-\cancel{\operatorname{sen}(x+y)}=0\end{array}\right\}$ (È UN SISTEMA) $\to \begin{cases}\cos(x)=\cos(y)\\ \cos x=\operatorname{sen}(x+y)\end{cases}$ e RISOLVO: I CASO: $\begin{cases}x=-y\\ \cos(x)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\mp\frac{\pi}{2}\\ x=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$

II CASO $\begin{cases}x=y\\ \cos(y)=\operatorname{sen}(2x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=y\\ \cos x=2\operatorname{sen}x\cos x\end{cases} \to \begin{cases}x=y\\ \cos x(1-2\operatorname{sen}x)=0\end{cases}$

$\to \operatorname{sen}x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi$. $\Rightarrow$ 4 PUNTI TOTALI: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right),\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi\right)$

$\cos(x)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}$

CALCOLIAMO $Hf(x,y)=\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}x-\cos(x+y) & -\cos(x+y)\\ -\cos(x+y) & -\operatorname{sen}y-\cos(x+y)\end{pmatrix}$ CON $\det=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y+(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y)\cos(x+y)$

$\det Hf\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = \det Hf\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \det Hf\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1 \longrightarrow$ PUNTI DI SELLA

$\det Hf\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = 3 \rightarrow f_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = 2 \longrightarrow$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO

$\det Hf\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} \rightarrow f_{xx}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = -1 \rightarrow$ PUNTO DI MAX RELATIVO

$\det Hf\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right) = \frac{3}{4} \rightarrow f_{xx}\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right) = -1 \rightarrow$ MAX