

## • EQ. 2 GRADO CON $\Delta < 0$

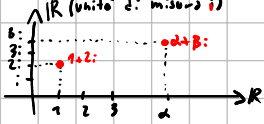
$$\Delta < 0 \Rightarrow (2ax+b)^2 = -1 \cdot (-\Delta) \Leftrightarrow \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 = -1 \quad \text{CHE SI PUO' SCRIVERE COME } X^2 = -1 \quad \left(\text{NON HA SIGNIFICATO IN } \mathbb{R}\right)$$

DIAMO SIGNIFICATO A  $X^2 = -1$  TRAMITE I NUMERI COMPLESSI ( $\mathbb{C}$ ) E ASSEGNA  $X = \pm i$  DOVE  $i^2 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) = -1$

"i" È DETTA UNITÀ IMMAGINARIA E VALE  $\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \pm i \Rightarrow X = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \beta$  CIOÈ  $X = \alpha + \beta i$

## DEFINIAMO $\mathbb{C}$ (NUMERI COMPLESSI) COME

$\{(d, \beta), d, \beta \in \mathbb{R}\} = \{d + i\beta, d, \beta \in \mathbb{R}\}$  CIOÈ COPPIE DI ELEMENTI DI  $\mathbb{R}^2$  E LE LORO OPERAZIONI

$d, \beta \in \mathbb{R}$  ALLORA  $z = (d, \beta) = d + i\beta$   PIANO  $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$  NOTO COME PIANO DI ARGAND-GAUSS

**TERMINOLOGIA:** SE  $z \in \mathbb{C}$  RAPPRESENTATO COME  $z = (d, \beta) = d + i\beta, d, \beta \in \mathbb{R}$ .  $d = \text{Re}(z)$  "PARTE REALE DI  $z$ "  
 $\beta = \text{Im}(z)$  "PARTE IMMAGINARIA DI  $z$ "

- i PUNTI  $\beta = 0$  CORRISPONDONO A  $\mathbb{R}$
- i PUNTI  $d = 0$  CORRISPONDONO AI NUMERI IMMAGINARI, INCATI  $i = 0 + i \cdot 1 = (0, 1) \Rightarrow i$  È IMMAGINARIO

### • DEFINIZIONE SOMMA

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \begin{matrix} z_1 = d_1 + i\beta_1 \\ z_2 = d_2 + i\beta_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} d_1, \beta_1 \in \mathbb{R} \\ d_2, \beta_2 \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \rightarrow \text{PROVIAMO: } \boxed{z_1 + z_2} = d_1 + i\beta_1 + d_2 + i\beta_2 = d_1 + d_2 + i(\beta_1 + \beta_2) = \boxed{(d_1 + d_2, \beta_1 + \beta_2)}$$

↳ LO PRENDO COME DEF. DI SOMMA

### • DEFINIZIONE PRODOTTO

PARTIAMO DA  $i^2 = -1 = (-1, 0)$ .  $\boxed{z_1 \cdot z_2} = (d_1 + i\beta_1)(d_2 + i\beta_2) = d_1 d_2 + i\beta_1 d_2 + d_1 \beta_2 - \beta_1 \beta_2 = d_1 d_2 - \beta_1 \beta_2 + i(\beta_1 d_2 + d_1 \beta_2) = \boxed{(d_1 d_2 - \beta_1 \beta_2, \beta_1 d_2 + d_1 \beta_2)}$

↳ LI PRENDO COME DEF. DI PRODOTTO

NOTA: SIA PRODOTTO CHE SOMMA SONO COMMUTATIVI

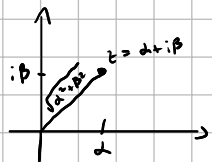
E DALLA DEF DI SOMMA E PRODOTTO POSSO DEFINIRE  $z = d + i\beta = (d, 0) + (0, 1) \cdot (\beta, 0) = (d, \beta)$  (COME  $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R}$ )

### • ELEMENTI NEUTRI:

- $(0, 0)$  SOMMA
- $(0, 1)$  PRODOTTO \*

\* CERCO DI DIMOSTRARE:  $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$  CIOÈ  $z^{-1} = x + iy$  t.c.  $(d + i\beta)(x + iy) = (1, 0)$

RISCRIVO  $\alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x - \beta y = 1 \\ \alpha y + \beta x = 0 \end{cases}$  E HA UN'UNICA SOL.  $\begin{cases} x = \frac{d}{d^2 + \beta^2} \\ y = -\frac{\beta}{d^2 + \beta^2} \end{cases}$



PRODOTTO TRA  $z = d + i\beta$  E  $\bar{z} = d - i\beta$  "COMPLESSO CONIUGATO DI  $z$ "  
 $z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = (d + i\beta)(d - i\beta) = d^2 + \beta^2 = |z|^2$  DOVE  $|z| = \sqrt{d^2 + \beta^2}$  "MODULO DI  $z$ "

OPERAZIONE DI "CONIUGATO"

$$z = d + i\beta \Rightarrow \bar{z} = d - i\beta \Rightarrow \bar{\bar{z}} = d + i\beta = z \quad \bar{\bar{z}} = z \quad \text{OPERAZIONE INVOLUTIVA}$$

### • DEFINIZIONE RAPPORTO

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (d_1 + i\beta_1) \cdot \left( \frac{d_2}{d_2^2 + \beta_2^2} - i \frac{\beta_2}{d_2^2 + \beta_2^2} \right) = \frac{d_1 + i\beta_1}{d_2 + i\beta_2} = \frac{d_1 + i\beta_1}{d_2 + i\beta_2} \cdot \frac{d_2 - i\beta_2}{d_2 - i\beta_2} \rightarrow \frac{d_1 d_2 + \beta_1 \beta_2 + i(\beta_1 d_2 - d_1 \beta_2)}{d_2^2 + \beta_2^2}$$

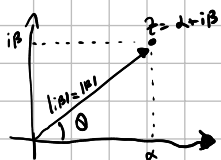
### • ALCUNE PROPRIETÀ:

- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

### PROPRIETÀ DEL MODULO:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z| \quad \forall \lambda, z \in \mathbb{C}$
- $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

## • FORMA POLARE



$$\begin{cases} d = r \cos(\theta) \\ \beta = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \text{ ANGOLO "ARGOMENTO DI } z$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{d^2 + \beta^2} \text{ (DIST. ORIGINE)} \\ \cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \beta^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{d^2 + \beta^2}} \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Cioè  $z = \alpha + i\beta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  FORMA POLARE DI  $z$

SE ABBIAMO  $r=1 \Rightarrow |z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$

CIOÈ DESCRIVO IL CERCIO UNITARIO DEL PIANO DI ARGAND - GAUSS

ES:  $\begin{cases} z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \\ w = r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{cases}$

CIOÈ:  $z \cdot w = (r \cdot r)(\cos(\phi + \theta) + i \sin(\phi + \theta))$

## • FORMULA DI DE MOIVRE

SIA  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \in \mathbb{C}$ , SIA  $n \in \mathbb{Z}$ , ALLORA

$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

CON CONSEGUENZA:

## • TEOREMA \*

SIA  $z \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$  ALLORA  $X^n = z$  HA  $n$  SOLUZIONI (RADICI  $n$ -ESIME) E SONO DATE DA: (CON  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ )

$X = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) \right), k=0, \dots, (n-1)$

PROVIAMO  $\theta_k := \frac{\phi + 2k\pi}{n}$  e IN GENERALE  $\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{2\pi}{n}$ . DETTO IN UN ALTRO MODO, LE "RADICI" o SOLUZIONI DI  $X^n = z$  DIVIDONO IL CERCINO IN  $n$  ARCHI UGUALI

ES:  $X^4 = 1 = z$   $X = ? \in \mathbb{C}$

NOTO:  $z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$  CIOÈ  $X = 1 \left( \cos \frac{0 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{4} \right) k=0, 1, 2, 3$

ANALIZZO  $k=0 \Rightarrow X=1$   4 ARCHI UGUALI.

QUINDI  $X = 1, i, -1, -i$

ES:  $X^2 = -1 = z = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$

$X = 1^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2} \right)$  CON  $k=0 \Rightarrow X=i$ , CON  $k=1 \Rightarrow X=-i$

## SIM \*

PONGO  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$  ( $r > 0$  e  $\phi \in [0, 2\pi)$ ) e PONGO  $X = r(\cos \theta + i \sin \theta)$   
 $X^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

VERIFICO SE SONO UGUALI  $X^n$  e  $z$

$r = r^n \Rightarrow r = r^{\frac{1}{n}}$

e  $\begin{cases} \cos(n\theta) = \cos \phi \\ \sin(n\theta) = \sin \phi \end{cases} \Rightarrow n\theta = \phi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$  CON RADICI DISTINTE PER  $k=0, \dots, n-1$

NOTA: UNA GENERICA  $f(x) = a^2x + bx + c$  CON  $\Delta < 0$  HA 2 SOLUZIONI COMPLESSE CONIUGATE  
 $f(x) = a(x - z)(x - \bar{z}) \quad z = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

QUESTO PUÒ ESSERE GENERALIZZATO A GRADO  $k$ :

$\Phi(x) = a_k x^k + \dots + a_0 \quad a_k \neq 0$  (PER ESSERE DI GRADO  $k$ )

## TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

$\Phi(x) = a_k x^k + \dots + a_0 \in \mathbb{R}$  HA  $k$  RADICI IN  $\mathbb{C}$  (POSSIBILMENTE REALI e/o COINCIDENTI)

VALORI DI  $x$  I.e.  $\Phi(x)=0$

CIOÈ:  $\Phi(x) = a_k (x - x_1)^{h_1} (x - x_2)^{h_2} \dots (x - x_m)^{h_m}$  DOVE  $h_1 + \dots + h_m = k$  DOVE  $x_i$  SONO RADICI e  $h_i$  SONO LE LORO "MOLTEPLICITÀ"

## • OPERAZIONE DI EXP SU $\mathbb{C}$

PARTE DA:  $e^{x_1 + ix_2} = \underbrace{e^{x_1}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{e^{ix_2}}_{?} \Rightarrow e^{ix} = \cos x + i \sin x$  IDENTITÀ DI EULERO

CON CASO PARTIC X=PI  $\Rightarrow e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

$\hookrightarrow e^{x_1} \cdot (\cos(x_2) + i \sin(x_2))$