

# APPROFONDIMENTO SUL TEO. 10

PER IL TEO. FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA:  $\Phi(x) = (x-\lambda_1)^{h_1} \dots (x-\lambda_m)^{h_m}$  (OGNI POLINOMIO PUO' ESSERE SCOMPOSTO IN  $m$  RADICI) CON MOLTEPLICITA'  $h_m$

NEL NOSTRO CASO, POSSONO ANCHE ESSERE COMPLESSE. NEL NOSTRO TEOREMA,  $h$  E' LA MOLTEPLICITA'.

**OSSERVAZIONE:**  $\lambda \in \mathbb{C}$  RADICE  $\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$  RADICE ( $\bar{\lambda}$  E' IL COMPLESSO CONIUGATO)  
PERCHÉ  $\overline{\Phi(\lambda)} = \Phi(\bar{\lambda})$

**ES:**  $\Phi(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$   $a_i \in \mathbb{R}$ . SUPPONGO  $\lambda \in \mathbb{C}$ :  
 $\rightarrow \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \rightarrow \overline{\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0} = \bar{0} \rightarrow \bar{\lambda}^3 + \bar{a}_2\bar{\lambda}^2 + \bar{a}_1\bar{\lambda} + \bar{a}_0 = 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow \bar{\lambda}^3 + a_2\bar{\lambda}^2 + a_1\bar{\lambda} + a_0 = 0$  (TRAMITE LE PROP: [1]  $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  e [2]  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ )

ABBI O DIMOSTRATO CHE:  $\alpha + i\beta$  E' RADICE  $\Leftrightarrow \alpha - i\beta$  E' RADICE (CONIUGATO COMPLESSO) \*1

"ST SA" TEO. 3

SO  $\lambda \in \mathbb{C}$  E' RADICE CON MOLTEP.  $h$   
 $z_i(x) = x^i e^{\lambda x}$ ,  $i=0, 1, \dots, h-1$  (PER QUESTO CON  $\lambda=0$  AVENDO  $e^x$  e  $x e^x$ )

## GENERALIZZAZIONE TEO 3:

$$\sum_{j=1}^v h_j + 2 \sum_{j=2}^s t_j = k \quad \text{DOVE } h_i \text{ E' LA MOLTEPLICITA' DELLA RADICE REALE } \lambda_j$$

" "  $t_j$  " " " COMPLESSA  $\alpha_j + i\beta_j$   
 $k$  E' L'ORDINE DELL'EQ. DIFFERENZIALE

IL 2 VIENE DAL FATTO CHE SIA  $\alpha + i\beta$  CHE  $\alpha - i\beta$  SONO RADICI! \*3

**ALLORA**

$\rightarrow x^{h_i} e^{\lambda_i x}$	$i=0, \dots, h-1$	} SPAZIO DI SOLUZIONI DI $\mathcal{L}(y)=0$ (LIN. INDIP.)
$\rightarrow x^{t_i} e^{\alpha_i x} \cos(\beta_i x)$	$i=0, \dots, t-1$	
$\rightarrow x^{t_i} e^{\alpha_i x} \sin(\beta_i x)$	$i=0, \dots, t-1$	

ALLO STESSO MODO PUO' ESSERE GENERALIZZATO ANCHE IL TEO. 10

**ESEMPIO:**  $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = 0$   
 $\Phi(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$   
 $\lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$   $\lambda=0$  RADICE  
 $\lambda = 1, 2 \in \mathbb{R}$

TUTTE RADICI REALI

$0 \rightarrow h=2$	$\rightarrow w_1 = e^{0 \cdot x} = 1$ e $w_2 = x \cdot e^{0 \cdot x} = x$
$1 \rightarrow h=1$	$\rightarrow w_3 = e^x$
$2 \rightarrow h=2$	$\rightarrow w_4 = e^{2x}$

**SOLU:**  $C_1 \cdot 1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{2x}$  CON  $C_i \in \mathbb{R}$   $i=(1,2,3,4)$

**ESERCIZIO:**  $y^{(3)} + 2y^{(2)} + y^{(1)} = x+2$  \*

1. RIFERIMENTI ALLA TEORIA: EQ. DIFF. DI  $K=3$ , COEFF. COSTANTI IN  $\mathbb{R}$ , LINEARE

2. ~~6, 7, 8, 9, 10~~ (TEOREMI APPLICABILI) ~~si~~ CON  $\alpha=0, \beta=0$  e USANDO IL COSENO  
~~NON E' PC~~  
~~si PER TRAVARE XL GENERALE~~

3. SOLUZIONE GENERALE:

$$\mathbb{E} = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda \rightarrow \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \rightarrow \lambda=0 \quad h=1$$

$$\lambda = -1 \quad h=2$$

$$w_1 = 1$$

$$w_2 = e^{-x}$$

$$w_3 = x e^{-x}$$

$$y(x) = y_{in}(x) + C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$$

**ESERCIZIO PER CASA:**  $y'' + y' + 2y = x^2 + x - 3$

# SOLUZIONE:

1. STRUTTURA  $L(y) = b(x)$   $b(x) \in C(I)$  e  $L(y)$  a COEFF. COSTANTI e PER TEO. 7:  $y(x) = y_*(x) + C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3$

SOLUZIONE PARTICOLARE  $L(y) = b(x)$  SOL. GENERALE DI  $L(y) = 0$  (TEO. 9)

QUINDI TROVO  $\Phi(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)^2$   
 QUINDI  $\lambda=0$  RADICE CON  $h=1 \rightarrow$   
 $\lambda=-1$  RADICE CON  $h=2 \rightarrow$

$e^{\lambda x} = e^{-x} = 1$  ( $w_1$ )  
 $e^{\lambda x} = e^{-x}$  ( $w_2$ ) e  $x e^{\lambda x} = x e^{-x}$  ( $w_3$ ) → SOL. GENERALE EQ. OMOGENEA  $L(y)=0$

POSSO APPLICARE TEO. 10:  $b(x) = x+2 \rightarrow p_1(x) \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ , CON  $\alpha=0$  e  $\beta=0$   
 QUINDI:  $y_* = x^h e^{\alpha x} (p_2^*(x) \cos(\beta x) + q_1^*(x) \sin(\beta x)) = x^h (p_1^*(x))$  DOVE  $h$  È LA MOLTIPLICITÀ DI  $\alpha+i\beta=0$  ( $h=1$ )

$y_* = x(ax+b) \Rightarrow y_*' = 2ax+b$ ;  $y_*'' = 2a$ ;  $y_*''' = 0$  e SOSTITUISCO NELL'EQ. DIFFERENZIALE

$0 + 4a + 2ax+b = x+2 \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 4a+b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \end{cases}$  QUINDI:  $y_* = \frac{1}{2}x^2$

CONCLUSIONE:  $y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$