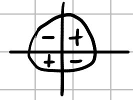
ESEMPIO 1: $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 1\}$. STUDIARE $f(A)$

SVOLGIMENTO:
- A È CONNESSO
- f POLINOMIO $\Rightarrow$ CONTINUA
- A È COMPATTO

} DA QUESTE OSSERVAZIONI RICAVO CHE (PER WEIERSTRASS) $a \le f(A) \le b$ DOVE a è MIN e b È MAX, IN PIÙ ESSENDO A CONNESSO $f(A)$ È INTERVALLO ($f(A) = [a,b]$) e ASSUME TUTTI I VALORI INTERMEDI

CERCO DI STUDIARE IL SEGNO DI f:



e PER WEIERSTRASS $\Rightarrow \exists x_m, x_M$ t.c. $f(x_m) = a$, $f(x_M) = b$

PER MIN e MAX, DEVO TROVARE x_m, x_M. $\nabla f(x_0) = 0$ (DAL TEOREMA DI FERMAT)

SE SONO INTERNI $\nabla f(x_0) = 0$, e LO SONO PERCHÈ $f(\partial A) = 0$ e f ASSUME VALORI $\oplus$ e $\ominus$ IN A.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-3x^2-3y^2) = 0 \iff \left\langle \begin{array}{l} y=0 \\ y^2+3x^2=1 \end{array}\right.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-x^2-3y^2) = 0 \iff \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x^2+3y^2=1 \end{array}\right.$$

$f(0,0) = 0$

SE $y=0$ $\begin{cases} y=0 \\ x^2+3y^2=1 \end{cases} \rightarrow x^2 = 1 \iff x = \pm 1$ CIOÈ $(-1,0)$ e $(1,0) \in Fr(A)$, QUINDI DA SCARTARE $Fr(A) = 0$

SE $y \ne 0$ $\begin{cases} y \ne 0 \\ y^2+3x^2 = 1 \quad (*) \end{cases}$ CON $x=0$ IN $(*)$ $y^2 = 1$ $y = \pm 1$, $(0,1), (0,-1) \in Fr(A)$

CI RIMANGONO DA PROVARE $x \ne 0, y \ne 0 \rightarrow \begin{cases} x^2+3y^2 = 1 \\ 3x^2+y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2+9y^2 = 3 \\ 3x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

$8y^2 = 2 \rightarrow y^2 = \frac{1}{4} \rightarrow y = \pm\frac{1}{2}$ e $x = \pm\frac{1}{2}$ $\Big/ \left(\underset{P_1}{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}, \underset{P_2}{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}, \underset{P_3}{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}, \underset{P_4}{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} \right)$ SOLUZ.

$f(P_1) = f(P_4) = -\frac{1}{8}$ min e $f(P_2) = f(P_3) = \frac{1}{8}$ MAX CIOÈ $f(A) = \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$

ESEMPIO 2: $f(x,y) = e^{x+y}$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$. TROVARE $f(A)$ (IMMAGINE)

SVOLGIMENTO: $f(x,y) = e^x \cdot e^y \Rightarrow$ CONTINUA

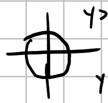
A CONNESSO $\Rightarrow f(A)$ È INTERVALLO

A COMPATTO $\Rightarrow f(A) = [a,b]$ (MAX MIN)

$\rightarrow$ DA FERMAT: $x_m, x_M \in \mathring{A} \Rightarrow \nabla f(x_m) = \nabla f(x_M) = 0$

$\hookrightarrow$ STUDIO LA DERIVATA: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{x+y} = \underset{\ne 0}{e^{x+y}} = \frac{\partial}{\partial y} e^{x+y}$ • QUINDI SI DEVONO TROVARE SULLA $Fr(A)$

CERCHIAMO QUINDI SULLA FRONTIERA:



$y>0$ $y = \sqrt{1-x^2}$

$y<0$ $y = -\sqrt{1-x^2}$

$\rightarrow \begin{cases} e^{x+\sqrt{1-x^2}}, & y>0,\ x \in (-1,1) \\ e^{x-\sqrt{1-x^2}}, & y<0,\ x \in (-1,1) \\ e, & y=0,\ x=1 \\ e^{-1}, & y=0,\ x=-1 \end{cases}$

$h_+(x) = e^{x+\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$ e $h_+'(x) = e^{x+\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$h_-(x) = e^{x-\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$ e $h_-'(x) = e^{x-\sqrt{1-x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

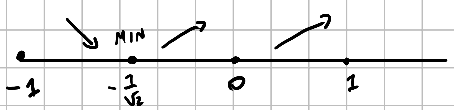
$h_+'(x) \ge 0 \iff \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} \ge 0 \iff \sqrt{1-x^2}-x \ge 0 \ \circledast \rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}-x \ge 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff 1-x^2 \ge x^2 \iff \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x > 0 \end{cases} \iff 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. QUINDI LA MONOTONIA DI h_+:

$\circledast$ $x<0 \rightarrow$ (ok)

$\rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ È MAX, $y = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{\sqrt{2}}$ MAX

$h_-'(x) \ge 0 \iff \frac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}} \ge 0$ $(x \in (-1,1))$ CIOÈ $\sqrt{1-x^2}+x \ge 0$ $(**)$ $\iff \begin{cases} \sqrt{1-x^2}+x \ge 0 \\ x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x^2 \ge x^2 \\ x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x<0 \end{cases} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x < 0}$

VERA $\forall x \ge 0$



$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ È MIN, $y = -\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ CIOÈ $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\sqrt{2}}$ MIN

$f(A) = \left[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\right]$

ESEMPIO 3: $f(x,y) = xy$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ TROVA $f(A)$

SVOLGIMENTO: $f(x,y)$ CONTINUA (POLINOMIO)

A CONNESSO

A COMPATTO

$\frac{\partial f}{\partial x} = y \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y} = x$

QUINDI IN $x=0$ e $y=0$ SI ANNULLA IL GRADIENTE, QUINDI CERCHIAMO SULLA FRONTIERA

RAPPRESENTO $x = \cos(t)$ e $y = \text{sen}(t)$ $f|_{Fr(A)} = \cos t \,\text{sen} t = \frac{1}{2}\text{sen} 2t$, $t \in [0, 2\pi]$

$\|\varphi(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$

QUINDI FACCIO LA NORMA $\|\varphi(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ e $\sin 2t \in [-1, 1] \Rightarrow f|_{\partial A} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow f(A) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

DIFFERENZIABILITÀ PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$

f è DERIVABILE IN $x_0 \iff \exists \overbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}^{f'(x_0)} \in \mathbb{R}$

$\iff \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$

$\iff \exists A \in \mathbb{R}$ t.c.

(*) $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, $x \to x_0$ DOVE $\frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \to 0$, $x \to x_0$, $A = f'(x_0)$

↳ DIFFERENZIABILITÀ: LA FUNZIONE $\varphi: h \to Ah$: $\varphi(h) = Ah$ è LINEARE ED è CHIAMATA DIFFERENZIALE DI F in x_0: $\varphi = df(x_0)$

(*) $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, $x \to x_0$. DERIVABILITÀ e DIFFERENZIABILITÀ SONO EQUIVALENTI CON UNA VARIABILE

↳ IMPLICA CONTINUITÀ