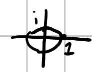
CALCOLO DIFFERENZIALE:

ALCUNE MOTIVAZIONI:

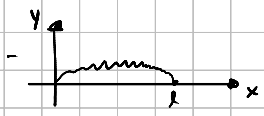
- STUDIO DI FUNZIONI $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ ES: N=1, M=2 $t \to e^{it}$, NOTANDO $|e^{it}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ (CIRCONF. UNITARIA NEL PIANO COMPLESSO)



È UNA CURVA, DESCRIVE LA TRAIETTORIA CIRCOLARE DI UN PUNTO AL VARIARE DEL TEMPO

e IN GENERALE: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ SONO CURVE

-



$\to$ DESCRIZIONE DI UNA CORDA VIBRANTE: $y = y(x,t)$ SOLUZIONE DI:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{CON} \quad \frac{\partial^2}{\partial^2 x^2} \text{ DERIVATA SECONDA RISPETTO A } x$$

NORMA e PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}^N$

- $x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$
- DATI x e $y \in \mathbb{R}^N$: (VETTORI)

SOMMA $x+y = (x_1+y_1, \dots, x_N+y_N) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N$

PRODOT. PER SCALARE $a \cdot x = (ax_1, \dots, ax_N) \quad x \in \mathbb{R}^N,\ a \in \mathbb{R}$

PRODOT. SCALARE: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \underbrace{x_1y_1 + \dots + x_N y_N}$ $\to$ NUMERO REALE

PROPOSIZIONI (PROPRIETÀ PRODOTTO SCALARE)

1. $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle \quad \forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall x,y \in \mathbb{R}^N$ $\to$ LINEARITÀ A SINISTRA
2. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N$ $\to$ SIMMETRIA
3. $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x=0$

DIM 1: $\langle ax+by, z\rangle = \sum_{j=1}^{N}(ax_j + by_j)z_j = \sum_{j=1}^{N} a x_j z_j + \sum_{j=1}^{N} b y_j z_j = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$

e VEDIAMO CHE ① e ② $\to$ IMPLICANO LA LINEARITÀ A DESTRA (BASTA SPOSTARE PER SIMMETRIA)

NORMA: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

① $\|x\| \geq 0$, e $\|x\| = 0 \Rightarrow x=0$

② $\|ax\| = |a| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall a \in \mathbb{R}$

③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N$ $\to$ DIMOSTRABILE DALLA DISUG. DI CAUCHY-SCHWARZ ($|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$)

PER LE DIM: GUARDA APPUNTI GEO

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^N$:

DATO $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, DEFINIAMO $r>0$

$B(\bar{x}, r) := \{y \in \mathbb{R}^N : \|\bar{x} - y\| < r\}$ (BOLLA CENTRATA IN $\bar{x}$ e DI RAGGIO r)

ES:

$\to B(0,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$

$\to B(0,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$

NOZIONE DI INTORNO:

SIA $\bar{x} \in U \in \mathbb{R}^N$. DICIAMO CHE U È INTORNO DI $\bar{x}$ SE ESISTE $r>0$ t.c. $B(\bar{x}, r) \subseteq U$. (ANCHE $B(\bar{x}, r)$ È INTORNO DI r)

ES: N=2 $\to$ $Q = (-r, r) \times (-r, r)$ È UN INTORNO DELL'ORIGINE $(0,0)$

PUNTI INTERNI, ESTERNI e DI FRONTIERA

$A \subseteq \mathbb{R}^N$, $A \neq \emptyset$

- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO INTERNO DI A ($x \in \mathring{A}$, $\mathring{A}$ = INSIEME PUNTI INTERNI DI A)

  SE $\exists r > 0$ t.c. $B(x,r) \subseteq A$
- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO ESTERNO DI A ($x \in A^c$, COMPLEMENTARE DI A)

  SE $\exists r>0$ t.c. $B(x,r) \cap A = \emptyset$
- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO DI FRONTIERA DI A ($x \in \partial A$ ($F_r(A)$))

$\forall r>0$ SI HA CHE $\begin{cases} B(x,r)\cap A \neq \emptyset \\ B(x,r)\cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$ ES: $A := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq R\}$, $R>0$ FISSATO

AFFERMAZIONE: $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R\}$

DIMOSTRIAMO CHE $\forall x \in \mathbb{R}^N$ t.c. $\|x\| < R$ È UN PUNTO INTERNO: SIA x t.c. $\|x\| < R$

DEFINIAMO $r := R - \|x\|$ e DIMOST. CHE $B(x,r) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R\}$

PRENDO UN GENERICO $y \in B(x,r) \to \|y\| = \|y-x+x\| \overset{\text{DISUG. TRIANG.}}{\leq} \underbrace{\|y-x\|}_{<r} + \|x\| \leq r + \|x\| = R - \cancel{\|x\|} + \cancel{\|x\|} \implies \|y\| < R$

PUNTI DI ACCUMULAZIONE, CHIUSURA e ISOLATI

- x È PUNTO ACCUMULAZIONE DI A SE $\forall r>0$ SI HA CHE $B(x,r)\setminus\{x\} \cap A \neq \emptyset$ e SCRIVIAMO $x \in Acc(A)$ (INSIEME DEI PUNTI DI ACC. DI A) (x PUÒ NON APPARTENERE AD A)

- x È UN PUNTO DELLA CHIUSURA DI A SE ($x \in \bar{A}$), $\forall r>0$ SI HA CHE $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ ($A \subseteq \bar{A}$ (CHIUSURA DI A))

ES: $\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^N : \|x-y\| \leq r\}$

- $x \in A$ È PUNTO ISOLATO SE $\exists r>0$ t.c. $B(x,r) \cap A = \{x\}$ (SOLO x). NOTA: $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

ES: SIA $A = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq R\}$, VERIFICHIAMO CHE $\overset{Fr(A)}{\partial A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = R\}$, CIOÈ $= \{x \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + x_2^2 + \dots x_N^2\}$

POSSIAMO VERIFICARE, SE $\|x\| = R$

$\forall r>0 \begin{cases} B(x,r) \cap A \neq 0 & ① \\ B(x,r) \cap A^c \neq 0 & ② \end{cases}$. PROVIAMO LA 2: RICORDO $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ $\forall a \in \mathbb{R}$

SELEZIONO $a = \dfrac{R + \frac{r}{2}}{R}$ ($r>0$ ARBITRARIO), INOLTRE $y = ax$ CON $\|x\| = R$

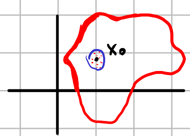
DIMOSTRO $y \in B(x,r) \cap A^c$: $\|y\| = \|ax\| = |a| \cdot \|x\| = \dfrac{R+\frac{r}{2}}{\cancel{R}} \cdot \cancel{R} = R + \frac{r}{2} > r \implies y \in A^c$

INOLTRE: $\|x - y\| < r \to \|x-y\| = \|x - ax\| = \|(1-a)\cdot x\| = |1-a| \cdot \|x\| = \left|1 - \dfrac{R+\frac{r}{2}}{R}\right| \cdot R = \left|\dfrac{\cancel{R} - \cancel{R} + \frac{r}{2}}{\cancel{R}}\right| \cancel{R}\ \frac{r}{2} < r$. $y \in B(x,r)$

NOTA: x ARBITRARIO t.c. $\|x\| = R$ e r ARBITRARIO

LIMITE, CONTINUITÀ

$A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^K$, $N, K \in \mathbb{N}$, $x_0 \in Acc(A)$, e $\ell \in \mathbb{R}^K$



POSSO AVVICINARMI ARBITRARIAMENTE A x_0, CON BOLLE CONTENENTI PUNTI $\in A$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \text{ SE } \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \text{ t.c. } \|f(x) - \ell\| < \varepsilon \quad \forall x \in A - \{x_0\} \text{ t.c. } \|x - x_0\| < \delta}$$

AVENDO $x_0 \in A$, f È CONTINUA IN x_0 SE:
$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ t.c. $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ $\quad \forall x$ t.c. $\|x - x_0\| < \delta$

PROPOSIZIONE: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^K$ ($k \geq 1$) CIOÈ $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_K(x) \end{pmatrix}$

1) $x_0 \in Acc(A)$ SIA $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{x \to x_0} f_1(x) = \ell_1 \\ \vdots \\ \lim_{x \to x_0} f_K(x) = \ell_K \end{cases}$

2) $x_0 \in A$, f È CONTINUA IN $x_0 \iff$
- $\begin{cases} f_1(x) \text{ È CONTINUA IN } x_0 \\ \vdots \\ f_K(x) \text{ È CONTINUA IN } x_0 \end{cases}$

DIM 1 ASSUMO $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \implies \boxed{\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 \text{ t.c. } \|f(x) - \ell\| < \varepsilon\ \ \forall x \in A - \{x_0\} \text{ t.c. } \|x - x_0\| < \delta}$ DEFINIZIONE

CIOÈ $|f_i(x) - \ell_i| \leq \sqrt{(f_1(x) - \ell_1)^2 + \dots + (f_K(x) - \ell_K)^2} < \varepsilon$ $\quad \forall i = 1, \dots, k$ CIOÈ: $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i$

e D'ALTRA PARTE $\boxed{\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_i>0 \text{ t.c. } |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon\ \ \forall x \text{ t.c. } \|x - x_0\| < \delta_i \text{ CON } x \in A - \{x_0\}}$

DEFINISCO $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_K\}$

$$\|f(x)-\ell\| \quad \sqrt{(f_1(x)-\ell_1)^2+\dots+(f_k(x)-\ell_k)^2} < \sqrt{\varepsilon^2+\dots+\varepsilon^2} = \sqrt{k}\cdot\varepsilon \quad \forall x \in A-\{x_0\} \text{ t.c. } \|x-x_0\|<\delta \quad \square$$

DIM 2 È UGUALE

ES: FUNZIONE "PROIEZIONE DI X" È CONTINUA: $x \in \mathbb{R}^N$ $\quad P_j(x) := x_j$, $j = 1 \dots N$
e CON $x_0 \in \mathbb{R}^N$

$|P_j(x)-P_j(x_0)| = |x_j-(x_0)_j| \le \sqrt{(x_1-(x_0)_1)^2+\dots+(x_N-(x_0)_N)^2} = \|x-x_0\|$, FISSATO $\varepsilon>0$ POSSO PRENDERE $\delta=\varepsilon$
IN MODO TALE DA FAR VALERE (CON $\|x-x_0\|<\delta$) $|P_j(x)-P_j(x_0)|<\varepsilon$.

PROPRIETÀ DEI LIMITI

PROPOSIZIONE: $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in Acc(A)$.
HP: $\ell, m \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

ALLORA
1) $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \ell+m$
2) $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \ell\cdot m$
3) $m \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$

PROPRIETÀ CONTINUITÀ (f e g CONTINUE IN x_0)
i) $f+g$
ii) $f\cdot g$
iii) $g(x)\neq 0 \to \frac{f}{g}$

$\Big\}$ CONTINUE

PROPOSIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq \mathbb{R}^K$, $N, K, M \in \mathbb{N}$

SIA: $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}^M$ e SIA $x_0 \in A$ e PONIAMO $y_0 := f(x_0)$. SE f È CONTINUA IN x_0 e $g(y)$ IN y_0
ALLORA: $g\circ f$ È CONTINUA IN x_0

PROPOSIZ: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in Acc(A)$, SIA $f: A \to \mathbb{R}^K$
$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = m \end{cases} \quad \boxed{\ell = m} \quad \text{UNICITÀ LIMITE}$$

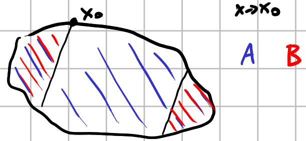
TEOREMA DEL CONFRONTO:

HP: • $A \subseteq \mathbb{R}^N$, e $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ CON $f(x) \le g(x) \le h(x)$
• $x_0 \in Acc(A)$, $\ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$

$$\boxed{\text{ALLORA } \exists \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell}$$

DATO $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq A$, $f: A \to \mathbb{R}^K$
DEFINIAMO $f|_B : B \to \mathbb{R}^K$ COME
$f|_B(x) = f(x) \quad \forall x \in B$ "RESTRIZIONE DI f SU B"

PROPOSIZIONE:
HP: $x_0 \in Acc(A)$, $\ell \in \mathbb{R}^K$. SUPPONIAMO CHE $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. SIA $x_0 \in Acc(B)$
TH: $\lim_{x\to x_0} f|_B(x) = \ell$



ESERCIZI

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(1) DEFINITA SU $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, SIA $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0,\ y = 0\}$

NOTO:
- $(0,0) \in Acc(B)$
- $f|_B(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) = 0$
- SE $\exists \lim\limits_{x,y\to 0,0} f(x,y)$ DEVE ESSERE 0

CONSIDERO:
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ y \neq 0\}$
- $f|_C(x,y) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$
- NOTO: $(0,0) \in Acc(C)$, $\lim\limits_{x,y\to 0,0} f(x,y) = \frac{1}{2}$

E $\lim\limits_{x,y\to 0,0} f(x,y) \nexists$ PER LA DIM. PRECEDENTE

(2) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0, y = 0\}$, $f|_B(x,y) = 0$ (CIOÈ SE $\exists \lim\limits_{x,y\to 0,0} f(x) = 0$)

CERCO ALTRE DIREZIONI

$C_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx,\ x \neq 0\}$, $f|_{C_m}(x,y) = \dfrac{m^2x^4}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{m^2}{1+m^2}x^2 \to 0$, $(x,y) \to (0,0)$

VISTO CHE IL RISULTATO È 0, POTREBBE ESSERCI LIMITE

NOTO: $0 \leq f(x,y) = \underbrace{\dfrac{x}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \cdot y^2 \leq y^2 \leq y^2+x^2 = \|(x,y)\|^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

$\Rightarrow$ DAL TEO. CONFRONTO: $\lim\limits_{x,y\to 0,0} f(x,y) = 0$ ✓

(3) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$. HO $B = \{y = 0,\ x \neq 0\}$ $f|_B(x,y) = 0$. SE IL LIMITE $\exists$, È $= 0$.

PER AIUTARCI, DEFINIAMO $C_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = mx,\ x \neq 0\}$. $f|_{C_m}(x,y) = \dfrac{x^3m^2}{x^2+m^4x^4} = \dfrac{x\,m^2}{1+m^4x^2} \to 0$ (PER ORA NO CONTRADDIZIONE)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 \neq 0\}$ ALLORA $f|_D(x,y) = \dfrac{y^4}{y^4+y^4} = \dfrac{1}{2} \neq 0$ (CONTRADDIZIONE) $\to \lim\limits_{(x,y)\to 0,0} f|_D(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0 \left(\lim\limits_{\cdots \to 0,0} f|_B(x,y)\right)$

NON ESISTE