EQUAZIONI A COEFF. COSTANTI (e relazioni con i complessi)

Consideriamo l'ordine 2: $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$ $\quad b \in C(I)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ continue

con soluz: $y(x) = y_*(x) + C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Prendiamo $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ e associo a essa un certo polinomio Φ

$\Phi = x^2 + a_1 x + a_0$ (polinomio caratteristico) $\longrightarrow \Delta := a_1^2 - 4a_0$ (discriminante)

con $\Phi = 0$ equazione caratteristica

e studiamo i casi del discriminante

① $\Delta > 0 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

② $\Delta = 0 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2}$

③ $\Delta < 0 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

TEOREMA 9: ($\mathcal{L}(y) = 0$ e $k = 2$)

- La soluzione generale di $y'' + a_1 y' + a_0 = 0$ $\quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ è data da: $y(x) = C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)$,

dove:

- $\Delta > 0 \Rightarrow w_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $w_2 = e^{\lambda_2 x}$ (radici reali di Φ)
- $\Delta = 0 \Rightarrow w_1 = e^{\lambda x}$ e $w_2 = x e^{\lambda x}$ (λ è la radice $\in \mathbb{R}$ unica di Φ)
- $\Delta < 0 \Rightarrow w_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $w_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ radici $\in \mathbb{C}$ di Φ)

$\rightarrow$ per la generalizzazione, guarda lezione 3 (molto più utile)

queste funzioni sono lin. indipendenti su $\mathbb{R}$.

- **ESEMPIO:** oscillatore armonico: $y'' + \omega^2 y = 0$, $\quad \omega > 0$
- Eq. di ordine 2 ($k = 2$)
- $a_1 = 0$, $a_0 = \omega^2$, struttura $\mathcal{L}(y) = 0$

↳ da teorema 6 $\Rightarrow y(x) = C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)$ con $\Phi = x^2 + \omega^2 = 0$ $\quad \left(\frac{x}{\omega}\right)^2 = -1 \Rightarrow \frac{x}{\omega} = \pm i \Rightarrow \boxed{x = \pm i\omega} \longrightarrow \begin{matrix}\alpha = 0 \\ \beta = \omega\end{matrix}$

da teo 9:

$w_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) = \cos(\omega x)$

$w_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) = \sin(\omega x)$ $\quad \Longrightarrow y(x) = C_1\cos(\omega x) + C_2\operatorname{sen}(\omega x)$

- **Risolvere il problema**

$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \cancel{0}\ 1 \end{cases}$ qui la soluz. sarebbe $y(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots = 1 \end{cases}$

- cambiato a 1 per rendere es. interessante

1. Trovare soluz. generale
2. Trovare C_1 e C_2 con le C.I.

1. $a_1 = -2$, $a_0 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ $\quad x = +1$ unica rad ($\Delta = 0$)

applico teo 3

$w_1 = e^{1 \cdot x}$, $\quad w_2 = x e^{1 \cdot x} \Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$

2. $\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ y'(x) = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x = 0 \quad C_1 + C_2 + 0 = 1 \Rightarrow C_2 = 1 \end{cases}$

$y(x) = x e^x$ (soluzione unica per teorema 5)

- **Trovare soluz. generale**

$y(x) = \underbrace{y_*(x)}_{\text{soluz. particolare}} + \underbrace{C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)}_{\mathcal{L}(y) = 0}$ $\quad * = \frac{x^2}{2} - 2$ (da esercizio fatto precedentemente)

cerchiamo quindi w_1 e w_2, usando il teorema 9:

$\Phi(x) = x^2 + x + 2$, $\quad \Delta = -7 < 0$, $\quad \lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\alpha} \pm i\underbrace{\frac{\sqrt{7}}{2}}_{\beta}$

$w_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

$w_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x) = e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$

Concludendo, $y(x) = \frac{x^2}{2} - 2 + C_1 e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

GIUSTIFICAZIONE TEOREMA 8

FUNZIONE GENERALE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, CIOÈ $f(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ $\quad \alpha, \beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

QUINDI CONSIDERO $f'(x) := \alpha'(x) + i\beta'(x)$ $\quad \alpha, \beta$ DERIVABILI

RICHIAMO L'IDENTITÀ DI EULERO: $e^{ib} := \cos(b) + i\,\text{sen}(b)$

$e^{a+ib} := e^a(\cos(b) + i\,\text{sen}(b))$ $\quad \Big(\underbrace{e^a\cos(b)}_{\mathbb{R}} + i\,\underbrace{e^a\,\text{sen}(b)}_{I_m}\Big)$

- PROCEDO AL CALCOLO DI $(e^{\lambda x})'$:

$e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cdot[\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx)]$

$(e^{\lambda x})' = (e^{ax})'(\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx)) + e^{ax}(\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx))'$

$= a e^{ax}\cdot e^{ibx} + e^{ax}(-b\,\text{sen}(bx) + bi\cos(bx))$

$= a e^{\lambda x} + e^{ax}(bi\,\underbrace{(\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx))}_{e^{ibx}})$

$a e^{\lambda x} + ib e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$

DIM TEOREMA 8

CONSIDERO $y'' + a_1 y' + a_0 = 0$, SOLUZIONI DEL TIPO $y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ E SOSTITUIAMO NELL' EQ:

$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0$, CERCHIAMO SOLUZIONI COMPLESSE

$\to \cancel{e^{\lambda x}}\cdot\cancel{e^{-\lambda x}}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0\cdot\cancel{e^{-\lambda x}} \Rightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \Rightarrow \Phi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ È RADICE E ANALIZZO I 3 CASI:

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 SOLUZ. REALI λ_1 E $\lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow W_1 = e^{\lambda_1 x}$ E $W_2 = e^{\lambda_2 x}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ 1 SOLUZ DATA DA $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow W_1 = e^{\lambda x}$

L'ALTRA SOLUZIONE È NELLA FORMA $y = c(x)e^{\lambda x}$ PER UNA $c(x)$. SAPPIAMO CHE $\lambda = -\frac{a_1}{2}$, CIOÈ $\Phi(x) = x^2 + a_1 x + a_0$

E ABBIAMO $y'(x) = e^{\lambda x}(\lambda c(x) + c'(x))$ E $y''(x) = e^{\lambda x}(\lambda^2 c(x) + 2\lambda c'(x) + c''(x))$.

SOSTITUISCO $y(x) = c(x)e^{\lambda x}$ NELL' EQ. $y'' + a_1 y' + a_0 = 0$:

$e^{\lambda x}[\underbrace{(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)}_{=0\ (\lambda \text{ È RADICE})}c(x) + \underbrace{(2\lambda + a_1)}_{=0\ (\lambda = -\frac{a_1}{2})}c'(x) + c''(x)] = 0 \Longrightarrow c''(x) = 0 \Longleftrightarrow c'(x) = c_1 \overset{\text{INTEGRO}}{\Longleftrightarrow} C(x) = C_1 x + C_2$

CIOÈ: $y(x) = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$ PER $C_1 = 0 \Rightarrow W_1 = e^{\lambda x}$

PER $C_2 = 0, C_1 = 1 \Rightarrow W_2 = x e^{\lambda x}$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ HO COME RADICI $\underbrace{-\frac{a_1}{2}}_{\alpha} \pm i\underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{\beta}$ CON $\lambda = \alpha + i\beta$ E $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ RADICI DISTINTE

$\Rightarrow V_1 = e^{\lambda x}$ E $V_2 = e^{\bar{\lambda} x}$ (FUNZIONI COMPLESSE). PER AVERE SOLUZ., SELEZIONO OPPORTUNE COMB. LIN. REALI

$W_1 = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2$ E $W_2 = -\frac{i}{2}V_1 + \frac{i}{2}V_2$. NOTO CHE $\mathcal{L}(y) = 0$ È LINEARE V_1, V_2 SOLUZIONI $\to W_1, W_2$ SOLUZIONI

$= e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $\qquad = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

↳ LA GIUSTIFICO:

$W_1 = \frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)x} = \frac{1}{2}e^{\alpha x}[\underbrace{\cos(\beta x) + i\,\text{sen}(\beta x)}_{e^{i\beta x}} + \overbrace{\cos(-\beta x) + i\,\text{sen}(-\beta x)}^{\text{IDENTITÀ EULERO}}] = \frac{1}{2}e^{\alpha x}[2\cos(\beta x)] = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

SOLUZIONI A EQ. DI K=2 NON OMOGENEE:

$y'' + a_1 y' + a_0 = b(x)$ DOVE $b(x)$ HA UNA FORMA PARTICOLARE

IMPORTANTE PREMESSA LEGATA ALLA LINEARITÀ:

STRUTTURA: $\mathcal{L}(y) = b(x)$ (OPERATORE LINEARE). ES: $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ E SE SONO IN GRADO DI TROVARE Y_1 E Y_2 t.c. $\mathcal{L}(Y_1) = b_1(x)$ E $\mathcal{L}(Y_2) = b_2(x)$

* SOLUZ. PARTICOLARI. ALLORA $Y_* = Y_1 + Y_2$ È SOLUZ. DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$: $\mathcal{L}(Y_1 + Y_2) = \mathcal{L}(Y_1) + \mathcal{L}(Y_2) = b_1(x) + b_2(x) = b(x)$

CERCHIAMO UNA SOLUZ. CON $b(x)$:

$b(x) = P_r(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\text{sen}(\beta x)$ O $b(x) = P_r(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos(\beta x)$ CON P_r POLINOMIO DI GRADO r, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

TEOREMA 10:

SIANO $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ E P_r POLIN. DI GRADO r

TRA LE SOLUZ. DELLE EQUAZIONI DI FORMA $y'' + a_1 y' + a_0 y = P_r(x)e^{\alpha x}\,\text{sen}(\beta x)$ / $\cos(\beta x)$ VI È UNA SOLUZIONE

$$Y_*(x) = x^h e^{\alpha x}\{P_r^*(x)\,\text{sen}(\beta x) + Q_r^*(x)\cos(\beta x)\}$$

CON P_r^* E Q_r^* POLINOMI DI GRADO r E
- $h = 0$ SE $\alpha + i\beta$ NON È RADICE DI Φ
- $h = 1$ SE $\Delta > 0$ O $\Delta < 0$ ($\alpha + i\beta$ È RADICE DI Φ)
- $h = 2$ SE $\Delta = 0$ E $\alpha + i\cdot 0 = \alpha$ È RADICE DI Φ ($\in \mathbb{R}$)

ESEMPIO $y'' + y' + 2y = x^2 + x - 3$, CON $y_* = \frac{x^2}{2} - 2$ (DA $y_* = ax^2 + bx + c$)

OSSERVIAMO CHE y_* È ANCHE INDICATA DAL TEOREMA 10:

$b(x) = x^2 + x - 3 = P_2(x) \underbrace{e^{0 \cdot x}}_{1} \cdot \underbrace{\cos(0 \cdot x)}_{1}$ $\quad e^{\alpha x}$ CON $\alpha = 0$ $\quad \cos(\beta x)$ CON $\beta = 0$ e POSSO APPLICARE LA FORMULA:

$h = ?$ $\longrightarrow$ SCRIVO $\alpha + i\beta$. È RADICE DI Φ? $\Phi(x) = x^2 + x - 2$, $\Phi(0) = -2$ NON È RADICE, $h = 0$

$y_* = \underbrace{x^h}_{1} \underbrace{e^{\alpha x}}_{1} \left\{ P_2^*(x) \underbrace{\cos(\beta x)}_{1} + \cancel{Q_2^*}(x) \underbrace{\operatorname{sen}(\beta x)}_{0} \right\} = P_2^*(x)$ (POLINOMIO DI 2° GRADO CON COEFF. DA DETERMINARE) ✓

ESEMPIO: TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI: $2y'' - 3y' + y = 3e^{2x}$ (SU $I \in \mathbb{R}$)

$= \underbrace{y'' - \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}y}_{\mathcal{L}(y)} = \underbrace{\frac{3}{2}e^{2x}}_{b(x)}$ CON SLZ: $y(x) = \underbrace{y_*(x)}_{\text{TEO. 10}} + \underbrace{c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)}_{\text{TEO. 3}}$

① DETERMINO w_1 e w_2

$\Phi(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}$ e EQ. CARATT. $\Phi(\lambda) = 0$, $\Delta > 0$ CON $\lambda = \dfrac{+\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2}$ $\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$ $\in \mathbb{R}$

TEO 5: $w_1 = e^x$ e $w_2 = e^{\frac{x}{2}}$ QUINDI $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{x/2}$ È SLZ. GENERALE

② TROVO $y_* = ?$ $\boxed{2.1}$ VERIFICO CHE TEO. 10 SIA APPLICABILE $b(x) = \underbrace{\frac{3}{2}}_{P_0(x)} \underbrace{e^{2x}}_{\alpha = 2} \cdot \underbrace{1}_{\cos(0 \cdot x)}$ e $h = 0$ (2 NON È RADICE) 2 DA $\alpha + i\beta$: $2 + 0i = 2$, $\Phi(2) = +4$

$y_* = 1 \cdot e^{2x} \left\{ P_0^*(x) \cdot 1 + \cancel{Q_0^*} \underbrace{\operatorname{sen}(\beta x)}_{0} \right\} \Rightarrow e^{2x}$

RES: $y(x) = e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{x/2}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ALTRO ES

$y'' - \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}e^{2x} + 1 \Rightarrow y'' - \frac{3}{2}y' + \frac{1}{2}y = 1$ CON $y = c$ (COSTANTE) TROVO $c = 2$ e $y_* = y_2 + y_1 = e^{2x} + 2$