ESEMPIO MATRICE ASSOCIATA

$$3x^2 + 4y^2 - 6xy + 5x - 2y + 1 = 0$$

$$3(x_1)^2 + 4(x_2)^2 - 6x_1x_2 + 5x_0x_1 - 2x_0x_2 + (x_0)^2$$

OMOGENEE COORDINATE

$$A = \begin{array}{c|ccc|c} & x_0 & x_1 & x_2 & \\ \hline & 1 & 5/2 & -1 & x_0 \\ & 5/2 & 3 & -3 & x_1 \\ & -1 & -3 & 4 & x_2 \end{array}$$

→ SONO DIVISI ×2 PERCHÈ È SIMMETRICA

- VALE LO STESSO PROCEDIMENTO AL CONTRARIO

$\boxed{12.21}$

$$\det \bar{E} = \det {}^tE \in \{1, -1\} \Rightarrow$$

$$\det A = \det({}^tE \cdot A' \cdot \bar{E}) = \det({}^tE) \cdot \det(A') \cdot \det(\bar{E})$$

$$= \det(A') \cdot \underbrace{\det(E')^2}_{\pm 1 \to (1)} = \det(A')$$

• RANGO DI CONICA

12.25

CONICA NON DEGENERE $\Rightarrow \varrho(C) = 3$

12.27

CONICHE IMMAGINARIE e REALI
↳ DIPENDE DAL SUPPORTO

RICORDA!!!
NON DEGENERI

ESEMPIO

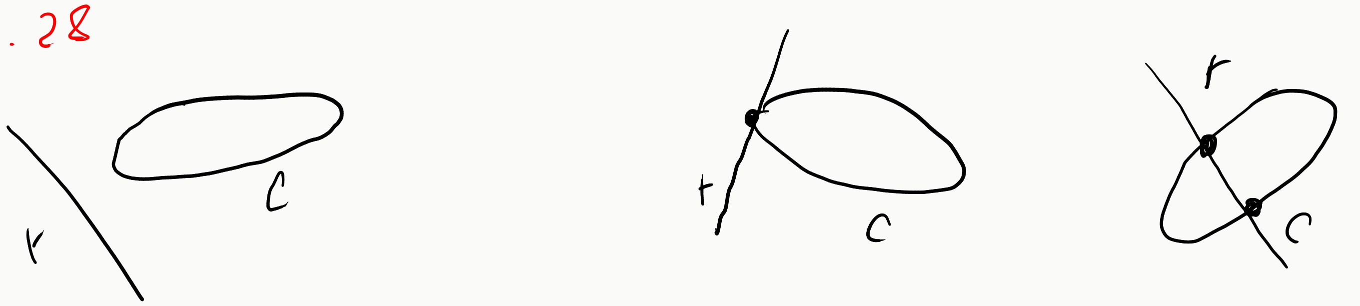
$$3x^2 - 6xy + 4y^2 - 5x + 3y = 0 \qquad \mathcal{C}$$

$$O = (0,0) \in \mathcal{I}(\mathcal{C}) \to \mathcal{I}(\mathcal{C}) \neq \emptyset \to \underline{\text{REALE}}$$

INTERSEZIONE CONICA - RETTA

$$\begin{cases} \text{EQ. CONICA} \\ \text{EQ. RETTA} \end{cases} \to \begin{cases} \mathcal{C} \\ r \end{cases} \qquad \{2, 1, 0\} \text{ PUNTI}$$

12.28



12.29

ELLISSE | 0
PARABOLA | 1
IPERBOLA | 2

→ RAPPORTO CON LA RETTA IMPROPRIA → SUPPORTO IMPROPRIO

→ N° PUNTI SUPPORTO IMPROPRIO

RISPETTIVAMENTE ESTERNA, TANGENTE e SECANTE

TEOREMA 12.30 CLASSIFICAZIONE

SIA C UNA CONICA NON DEGENERE CON M ASSOCIATA A RISPETTIVAMENTE CON RIFERIMENTO CARTESIANO R

C PARABOLA SE $A_{00} = 0$
IPERBOLE SE $A_{00} < 0$
ELLISSE SE $A_{00} > 0$

A_{00} = COMPL. ALGEBRICO DI A $\left(A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \right)$

ESEMPIO

$C = x^2 - y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

CONTROLLO SE È DEGENERE $\det(A) = \cancel{4} \times 4 + 4 \neq 0$

$\rho(A) = 3$ NON **DEGENERE**

QUINDI CALCOLO $A_{00} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow$ $\boxed{\text{IPERBOLE}}$
TEO. 12.30

ESEMPIO PARAMETRICO

$3kx^2 + y^2 - kxy - 3kx + ky = 0$

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2}k & \frac{k}{2} \\ -\frac{3}{2}k & 3k & -\frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_k) = k^2 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \cancel{\frac{3}{8}k} + \cancel{\frac{3}{8}k} - \cancel{\frac{3}{4}k} - \frac{9}{4} + 0 \Rightarrow -\frac{9}{4}k^2 \rightarrow -\left(\frac{3}{2}k\right)^2$$

$k \neq 0$ NON DEGENERE!!!

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 3k & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 1 \end{vmatrix} = 3k - \frac{k^2}{4} \rightarrow 12k - k^2 > 0$$

$-K(K-12)>0$ $K=0$ NON DEG!

$\boxed{K=12 \quad A_{00}=0}$
PARABOLA

0		12	
+	-	-	
-	-	+	
-	+	-	

$\boxed{0<K<12 \quad A_{00}>0}$
ELLISSE

$\boxed{K<0 \ \vee \ K>12 \quad A_{00}<0}$
IPERBOLE

DIM 12.30

$$\begin{cases} \cancel{a_{00}(x_0)^2}+a_{11}(x_1)^2+a_{22}(x_2)^2+\cancel{a_{22}(x_2)^2}+2a_{12}x_1x_2+\cancel{2a_{01}x_0x_1}+\cancel{2a_{02}x_0x_2}=0 \\ x_0=0 \quad \underline{\text{RETTA IMPROPRIA}} \end{cases}$$

passa per origine

$\det(A)\neq 0$

$$r_\infty \cap C = \begin{cases} x_0=0 \\ a_{11}(x_1)^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}(x_2)^2=0 \end{cases} \ast 1$$

PONGO $a_{11}\neq 0$ $\quad x_1 = \dfrac{-a_{12}x_2 \pm \sqrt{(a_{12}x_2)^2-a_{11}a_{22}(x_2)^2}}{a_{11}} =$

EQ. 2° GRADO

$$= \frac{-a_{12}\pm\sqrt{\boxed{(a_{12})^2-a_{11}a_{22}}}}{a_{11}}x_2$$

$$\boxed{\frac{\Delta}{4}} = (a_{12})^2-a_{11}a_{22} \begin{cases} =0 & 1 \text{ PT. IMPROPRIO} \to \text{PARAB.} \\ >0 & 2 \ \text{"} \to \text{IPERBOLE} \\ <0 & 0 \ \text{"} \to \text{ELLISSE} \end{cases}$$

#1 $A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11} a_{22} - (a_{12})^2} = -\frac{\Delta}{4}$

$A_{00} = 0 = \frac{\Delta}{4} = 0$ PARAB.

$A_{00} > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} < 0 \Rightarrow$ ELLISSE

$A_{00} < 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} > 0 \Rightarrow$ IPERBOLE

12.32

POLARE DI UNA CONICA

$P \equiv (y_0, y_1, y_2)$

$$\boxed{(x_0 \; x_1 \; x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0} \Rightarrow \text{RETTA POLARE}$$

PUNTO DELLA RETTA POLARE $\Rightarrow$ POLO

12.33

ESEMPIO

$x^2 - y^2 - 4x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow C$

a) RETTA POLARE IN $P \equiv (1, 3)$ RISPETTO A C

b) POLO DELLA RETTA $r: x - 2y - 2 = 0$ " " C

c) RETTA TANG. $Q \equiv (0, 2) \in I(C)$

$$\pi_P : (x_0 \; x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (x_0 \; x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -x_1 - x_2 = 0$$

TORNO IN COORD. CARTESIANE:

$-x - y = 0$ (a) $\Rightarrow \boxed{x + y = 0}$

(b) IL POLO È $P' \equiv (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$: $\pi_r : x - 2y - 2 = 0$

$$\pi_r : (x_0 \; x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} -4\bar{y}_0 - 2\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 \\ -2\bar{y}_0 + \bar{y}_1 \\ 2\bar{y}_0 + 0 - \bar{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$= (-4\bar{y}_0 - 2\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2)x_0 + (-2\bar{y}_0 + \bar{y}_1)x_1 + (2\bar{y}_0 - \bar{y}_2)x_2$$

$$\begin{cases} 4\bar{y}_0 - 2\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 = -2 \\ -2\bar{y}_0 + \bar{y}_1 = 1 \\ 2\bar{y}_0 - \bar{y}_2 = -2 \end{cases} \to \text{SIST. CRAMER} \quad \boxed{P' \equiv (1, 3, 4)}$$

PROPRIO

e IN COORDINATE CARTESIANE $\boxed{P' \equiv (3, 4)}$

(c) POICHÉ $Q \in I(C)$, LA TANG. IN Q È LA POLARE

PROPRIO

$$\pi_Q : (x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\to$ COORD Q.

$$= (x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2x_1 \overset{\text{CARTES.}}{=} \boxed{x = 0}$$

12.34

PUNTO ESTERNO E TANGENTE CON CONICA

12.35 $\to$ DIAMETRO DELLA CONICA

LE POLARI DEI PUNTI IMPROPRI DI $\mathcal{E}^2$

CENTRO $\to$ CONTENUTO IN TUTTI I DIAMETRI

$\hookrightarrow$ CENTRO DEL FASCIO DI DIAMETRI (RETTE)

LEGGE DI RECIPROCITÀ

$Q \in \pi_P \iff P \in \pi_Q$ **NO DIM**

DIM 12.35

HP $\begin{cases} d \text{ DIAMETRO DI } \mathcal{C} \\ C \text{ CENTRO DI } \mathcal{C} \end{cases}$ TH: $C \in d$

PER HP, $d = \pi_{P_\infty}$ CON P_∞ PT. IMPROPRIO DI $\mathcal{E}^2$

" ", $\pi_C = r_\infty$ (RETTA IMPROPRIA)

QUINDI $P_\infty \in r_\infty \Rightarrow P \in \pi_C$

LEGGE DI RECIPROCITÀ, SEGUE $C \in \pi_P = d$

12.36 → CALCOLO DEL CENTRO

ESEMPIO

$\mathcal{C}: 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x + 5 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow$ NON DEGENERE e A_{00} $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} > 0$ $\mathcal{C}$ = ELLISSE

CENTRO $\Rightarrow$ $C = [A_{00}, A_{01}, A_{02}] =$

$$= \left[2, -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right] = [2, +4, +4]$$

$$\boxed{C = (2, 2)}$$