ESEMPIO [PC] (PEANO) DI INFINITE SOLUZIONI

$$\boxed{PC} \begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- **SOLUZIONE BANALE:**

$y \equiv 0$ (STESSA COSA DI $y(x)=0 \ \forall x \in I$)

- **CERCHIAMO ALTRE SOLUZIONI**

SE $y(x) \neq 0$ PER QUALCHE INTERVALLO, POSSO:

$$\frac{1}{3}\left(y(x)\right)^{-\frac{2}{3}} y'(x) = 1 \,,$$ e INTEGRIAMO

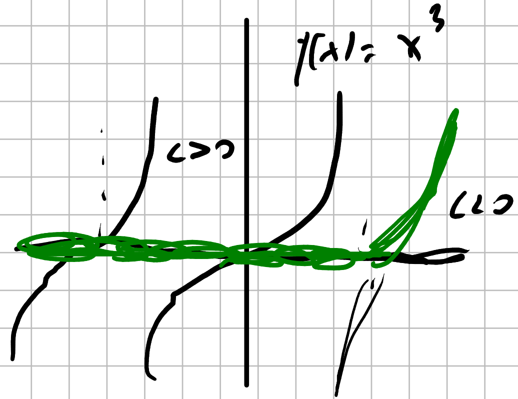
$$\rightarrow \frac{1}{3} \int \left(y(x)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot y'(x)\, dx = \int dx = x + c$$

FORMA GENERALE $\int y(x)^{\beta}\, y'(x)\, dx$ CON $\beta \neq -1$

e si RISOLVE COME $\dfrac{[y(x)]^{\beta+1}}{\beta+1} + c$, (DALLA SOMMA DI DERIVATE COMPOSTE)

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{3}} \cdot \frac{y(x)^{\frac{1}{3}}}{\cancel{-\frac{2}{3}+1}} = \left(y(x)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(y(x)\right)^{\frac{1}{3}} = x + c \Rightarrow y(x) = (x+c)^3$$



QUELLA VERDE È LA SOLUZIONE PER PEANO

CONSIDERO $c<0$

$y(-c)=0$

$$y_c(x)=\begin{cases}(x+c)^3, & x>-c\\ 0 & x\le -c\end{cases}$$

CONSIDERO ANCORA $y'(x)=3(x+c)^2$ CHE CON $x=-c$ HA COME RISULTATO SEMPRE 0.

CIOÈ $y'(-c)=0$

E SIA y È DERIVABILE (CON y' CONTINUA) E SODDISFA EQ. DIFF E CONDIZIONE INIZIALE

$\Rightarrow$ SOLUZIONE PC $\forall c<0$

ESISTONO HP SULLA STRUTTURA DELL' EQ. CHE CONSENTONO UNICITÀ E ESISTENZA (NON QUESTO CASO) DEL PC.

QUESTO ESEMPIO È UN' EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

$y'=a(x)b(x)$ $\qquad b(y)\neq 0$ $\qquad \dfrac{y'(x)}{b(y(x))}=a(x)$

INTEGRANDO $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}dx=\int a(x)\,dx$

PER SOSTITUZIONE $\displaystyle\int \frac{dy}{b(y)}$

SEPARANDO I DIFFERENZIALI

"VARIABILI SEPARABILI": $\dfrac{dy}{dx}=a(x)\,b(y)$ $\qquad \dfrac{dy}{b(y)}=a\,x\,dx$

ESEMPI SIGNIFICATIVI

1) $y' = 4x e^{-x^2}(1+y^2)$

2) $y' = y^4 x^4$

3) $y' = y \cdot 4x$

4) $y' = y e^{x^2}$

SOLUZIONI:

① $$\frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = 4x e^{-x^2}$$ e INTEGRIAMO RISPETTO A x

$$\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)}\,dx = \int 4x e^{-x^2}\,dx \Rightarrow$$

$$\arctan(y(x)) = -2e^{-x^2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

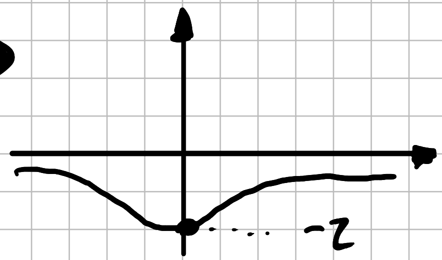
↳ SOLUZIONE IMPLICITA

$$y(x) = \tan(-2e^{-x^2} + c)$$ → PERDIAMO DELLE SOLUZIONI A CAUSA DEL DOMINIO

CIOÈ HA SENSO SE $-2e^{-x^2} + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ \forall x \in \mathbb{R}$

IMMAGINE DI: $-2e^{-x^2} \Rightarrow$

$= [-2, 0)$



QUINDI $-2 + c < -2e^{-x^2} + c < 0 + c$

$$\begin{cases} c < \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad c < \frac{\pi}{2} \\ -2 + c > -\frac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad c > 2 - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

② $y \equiv 0$ È SOLUZIONE

INVECE SE $y \neq 0$ SU QUALCHE INTERVALLO $\Rightarrow$

$y^{-4}(x)y'(x) = x^4$, INTEGRO PER x

$$\underbrace{\int y^{-4}(x)\, y'(x)\, dx}_{\int (y(x))^{\beta}\, y'(x)} = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$= \frac{y(x)^{\beta+1}}{\beta+1} = \frac{y(x)^{-3}}{-3} \Rightarrow y^{-3} = -3\left(\frac{x^5}{5}+c\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{-3\left(\frac{x^5}{5}+c\right)}}$$ SOLUZIONE ✓

---

③ $y \equiv 0$ È SOLUZIONE

$y \neq 0$ IN QUALCHE INTERVALLO

$\frac{y'(x)}{y(x)} = 4x$, INTEGRANDO $\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int 4x\, dx = 2x^2 + c$

CERCO IL GIALLO (TERMINE DI SINISTRA)

$$\text{"}\int \frac{dy}{y}\text{"} = \ln|y(x)|$$

QUINDI:

$\ln|y(x)| = 2x^2 + c$, USIAMO L'ESPONENZIALE

$$|y(x)| = \exp(2x^2 + c) = e^c \cdot e^{2x^2}$$

$y(x) = \pm e^c e^{2x^2}$ QUINDI CON c COSTANTE GENERICA

$y(x) = c e^{2x^2}$

---

(4) $y \equiv 0$ È SOLUZIONE, ALLORA ....

INVECE SE $y \neq 0$ SU QUALCHE INTERVALLO $\Longrightarrow$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = e^{x^2}$$ e INTEGRIAMO

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} = \int e^{x^2} dx = \ln|y(x)|$$

$\to$ INTEGRALE DI GAUSS, NON ESPRIMIBILE COME f ELEMENTARE

$\hookrightarrow$ PER ESEMPIO DI PRIMA $\hat{\int}$

$|y(x)| = \exp\left(\int e^{x^2} dx\right)$ CIOÈ $y = \pm \exp\left(\int e^{x^2} dx\right)$

ESEMPIO DI RIFLESSIONE SU INTERVALLO DI ESISTENZA MASSIMALE

$$(PC) \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(1) TROVARE LA SOLUZIONE (UNICA) DEL PC

(2) TROVARE INTERVALLO DI ESISTENZA "MASSIMALE" CIOÈ INTERVALLO PIÙ GRANDE I_{max} SU CUI È DEFINITA LA SOLUZIONE, e t.c. SODDISFA LA CONDIZIONE INIZIALE $(0 \in I_{max})$

SOLUZIONE (ESSENDO $y(x)$ DERIVABILE e CONTINUA, e $y'(x) \neq 0$)

$$\int \frac{y'}{y^2} = \int 1 \, dx \quad = \quad \int \frac{y'}{y^2} dx = x + C$$

$$= \frac{y^{-1}}{-2+1} = x + c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = x + c \Rightarrow y = -\frac{1}{x+c}$$

CONDIZ. INIZIALE

$$1 = -\frac{1}{0+c} \qquad c = -1 \qquad y(x) = -\frac{1}{x-1} \checkmark$$

VERIFICA DELLA SOLUZIONE

$$y' = \left(-\frac{1}{x-1}\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = y^2 \checkmark$$

(2) $I_{max} = (-\infty, 1)$ MAX INTERVALLO CON $\mathcal{D} \in I_{max}$

EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE a COEFFICIENTI VARIABILI

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad p, q \in C(I) \qquad I \subseteq \mathbb{R}$$

$C(I) :=$ "CLASSE DI FUNZIONI CONTINUE NELL'INTERVALLO I"

OSS: L'EQUAZIONE È EQUIVALENTE A

$$y' = \underbrace{q(x) - p(x)y}_{f(x,y)} \quad \text{o} \quad \mathcal{L}y = q(x) \quad \mathcal{L}y := y' + p(x)y$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2$ DERIVABILI SU I

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}(y)$$

ABBIAMO

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2)$$

↳ PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

DIMOSTRANDOLA ...

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$= \alpha y_1' + \beta y_2' + \alpha p(x) y_1 + \beta p(x) y_2$$

$$\alpha(y_1' + p(x) y_1) + \beta(y_2' + p(x) y_2)$$

$$= \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2) \quad ✓$$

QUANDO $q(x) \neq$ FUNZ. NULLA, ABBIAMO EQ. LINEARI (A COEFF. VARIABILI) NON - OMOGENEE

NEL CASO $q(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow$ "EQ. OMOGENEE"

TEOREMA DELLE EQ. DI PRIMO ORDINE LINEARI

LA SOLUZIONE DI $y' + p(x) y = q(x)$ È DATA DA

Ⓐ $$y(x) = e^{-P(x)} \left\{ c + \int e^{P(x)} \cdot q(x)\, dx \right.$$

DOVE $P(x)$ È UNA PRIMITIVA QUALSIASI (LE COSTANTI c^* SONO "INGLOBATE" IN ESSA)

Ⓑ IL PC

$$\begin{cases} y' + p(x) y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x_0 \in I$$

HA SOLUZIONE UNICA ED È POSS. DETERMINARE C DEL PUNTO Ⓐ IN MODO DA SODD. $y(x_0) = y_0$

DIMOSTRAZIONE (B)

• USANDO LA (A) E CONDIZIONE INIZIALE:

$$y_0 = y(x_0) = e^{-P(x_0)} \{ c + Q(x) \} \quad \text{DOVE} \quad Q(x) = \int e^{P(x)} \cdot q(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad c = y_0 e^{P(x_0)} - Q(x_0)$$

UNICITÀ: SUPPONIAMO DI AVERE 2 SOL. DEL PC

$$\begin{cases} y_1' + p(x) y_1 = q(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y_2' + p(x) y_2 = q(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SOTTRAGGO

$$\begin{cases} y_1' - y_2' + p(x)(y_1 - y_2) = q(x) - q(x) = 0 \\ y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

e DENOTIAMO $\mu = y_1 - y_2$, CIOÈ:

$$\begin{cases} \mu' + p(x)\mu = 0 \\ \mu(x_0) = 0 \end{cases}$$

CHE È UN CASO DEL (PC) DI (A)

DALL' EQ. $\mu' + p(x)\mu = 0$

$$(A) \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{-P(x)} \{ c + e^{P(x)} \cdot 0 \} = c\, e^{-P(x)}$$

MA DA $\mu(x_0) = 0$, ALLORA $\Rightarrow c = 0$ (PERCHÈ L'ESP. NON SI ANNULLA)

QUINDI $\mu(x) = 0 \quad \forall x \in I$ CIOÈ $\boxed{y_1 = y_2}$ ✓

DIMOSTRAZIONE (A)

"METODO DEL FATTORE INTEGRANTE"

PONGO $\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\, dx\right) > 0$

$$\mu'(x) = \underbrace{\exp\left(\int p(x)\, dx\right)}_{\mu(x)} \cdot p(x) = \mu(x) \cdot p(x)$$

MOLTIPLICO PER $\mu(x)$

$$y'\mu(x) + \underbrace{p(x)\cdot y\cdot \mu(x)}_{\mu'(x)} = q(x)\mu(x)$$

$$y'\mu(x) + y\cdot\mu'(x) = q(x)\mu(x)$$

$$\left(y(x)\mu(x)\right)' = q(x)\mu(x)$$

INTEGRO:

$$y(x) = \frac{\int q(x)\mu(x)\,dx}{\mu x}$$