

ULTERI RISULTATI SU SUCCESSIONI

OSSERVAZIONE: SAPENDO $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}^n$ ALLORA OGNI SUCC. $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ HA COME LIMITE $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l$

INFATTI: SE $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N_0 \quad \|x_n - l\| < \varepsilon$ (DEF. LIMITE)

ALLORA SE $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ POSSO AVERE $K_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_k > n_0 \quad \forall k > K_0$. ALLORA $\forall k > K_0$ DICO $\|x_{n_k} - l\| < \varepsilon$
 \hookrightarrow DEF. DI SOTTOSSUCCESSIONE

CARATTERIZZAZIONE DI LIM USANDO LE SUCCESSIONI

USANDO $\varepsilon > 0$ ARBITRARIO NELLE DEF. DI $\bar{A}, F_r(A), A_{cc}(A)$ e SCEGLIENDO UNA SUCC. $n_k \rightarrow \infty, n_k > 0$ ($n \rightarrow \infty$) POSSIAMO CARATTERIZZARE:

- $x_0 \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c. } x_n \in A, x_n \rightarrow x_0$
- $x_0 \in F_r(A) \iff \exists \text{ DUE SUCCESSIONI } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ e } (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c. } x_n \in A, y_n \in A^c \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 \end{cases}$
- $x_0 \in A_{cc}(A) \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c. } x_n \in A - \{x_0\}, \text{ t.c. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

SIA $A \subset \mathbb{R}^m, A \neq \emptyset, x_0 \in \mathbb{R}^m, f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$:

1) $x_0 \in A_{cc}(A), l \in \mathbb{R}^k$ ALLORA $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \text{ PER OGNI SUCC. } \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{x_0\} \text{ t.c. } \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \end{cases}$

2) SE $x_0 \in A_{cc}(A) \wedge A$ ALLORA
 $\hookrightarrow f$ È CONTINUA IN $x_0 \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \forall \text{ SUCC. } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \\ \text{t.c. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI WEIESTRASS:

DIMOSTRIAMO CHE $\exists y \in A$ t.c. $f(z) \in f(y) \quad \forall z \in A$ (PER x È IDENTICA)

IN VIRTÙ' DELLE PRECEDENTI PROPOSIZIONI, $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ t.c. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \sup f(A)$ "SUCC. MASSIMIZZANTE"

A LIMITATO $\exists B(0, R)$ CON $R > 0$ GRANDE ABBASTANZA $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, R), (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È LIMITATA.

USIAMO IL TEO. DI BOLZANO-WEIESTRASS: \exists UNA SOTTOSSUCCESSIONE $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y$ PER QUALCHE $y \in \mathbb{R}^m$

CIOÈ $y \in A_{cc}(A)$, MA VISTO CHE $A = \bar{A}$ (CHIUSO) ALLORA $y \in A_{cc}(A) \subseteq A \Rightarrow y \in A$

PER CONCLUDERE, USANDO LA CONTINUITÀ: $f(y) \stackrel{\text{CONTINUITÀ}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) \stackrel{\text{SOTTOSSUCCESSIONE}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \sup f(A)$

$\Rightarrow f(y) = \sup f(A)$ CIOÈ $\sup f(A) = \max f(A)$

$\Rightarrow \forall z \in A, f(z) \in f(y) \rightarrow$ DALLA DEF. DI SUP. \square

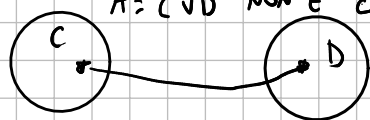
NE SEGUE... $f(A)$ È UN INTERVALLO, NEL CASO $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ CON $A \subset \mathbb{R}^n$ OPPORTUNO.

OSSERVAZIONE: SE A È COMPATTO e f È CONTINUA, PER TEO. DI WEIESTRASS ($a = f(x), b = f(y)$) $\Rightarrow a \leq f(z) \leq b \quad \forall z \in A$

INSIEME CONNESSO:

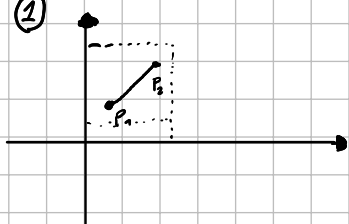
SIA $A \subset \mathbb{R}^n, A \neq \emptyset$. DICIAMO A CONNESSO (PER ARCHI) SE PER OGNI $x, y \in A$ $\exists \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y, \gamma(t) \in A \quad \forall t \in [a, b]$ e γ CONTINUA

ES: $A = C \cup D$ NON È CONNESSO



ES: ① $A = [0, 1] \times [1, 2] \subset \mathbb{R}^2$ È CONNESSO
 ② $B = (x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ È CONNESSO

②



$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(t) = P_1 + t(P_2 - P_1) \quad t \in [0, 1] \rightarrow (tx_2 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)y_1)$$

CHE È CONTINUA

NOTA ZIONE: DATI $x, y \in \mathbb{R}^n$ CHIAMIAMO SEGMENTO DI ESTREMI x e y : $[x, y] = \{ty + (1-t)x, t \in [0, 1]\}$

SIA $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, A SI DICE CONNESSO SE $\forall x, y \in A$, SI HA $[x, y] \subset A$

ES: $B(x_0, r)$ È CONNESSO

$A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, È STELLATO SE

PROPOSIZIONE: A CONNESSO \Rightarrow CONNESSO, A STELLATO \Rightarrow CONNESSO

ES:



- $A = A_2 \cup \{P\}$, NE CONNESSO NE CONNESSO
- A_2 È CONNESSO, NON CONNESSO
- A È LIMITATO
- $\bar{A} = \bar{A}_2 \cup \{P\}$
- $P \in \bar{A}$, MA $P \notin A_{cc}(A)$ (P È PUNTO ISOLATO)

GENERALIZZAZIONE PROPRIETÀ VALORI INTERMEDI

OSS: $I \subset \mathbb{R}$ È INTERVALLO $\Leftrightarrow x, y \in I, x < y \Rightarrow t \in I \quad \forall t. t.c. x < t < y$

TEOREMA: HP: $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, CONNESSO. SIA $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. ALLORA f È INTERVALLO

DIM: SIANO $a, b \in f(A) \Rightarrow \exists x, y \in A$ t.c. $f(x) = a$ e $f(y) = b$ SUPPONIAMO CHE $a < b$ DIMOSTRIAMO CHE?

$\forall c \in \mathbb{R}$ t.c. $a < c < b \exists z \in A$ t.c. $f(z) = c$ STRATEGIA DIMOSTRATIVA

A CONNESSO e $x, y \in A \Rightarrow \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow A$ t.c. $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \gamma(t) \in A \quad \forall t \in [0, 1]$ e CONTINUA SU $[0, 1]$

DEFINISCO $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\gamma(t))$ SU $[0, 1]$ CHE È CONTINUA (COMPOSIZ. DI f CONTINUA)

$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(0) = f(\gamma(0)) = f(x) = a, g(1) = f(\gamma(1)) = f(y) = b.$

APPLICHIAMO LE PROP DEI VALORI INTERMEDI: $\exists \bar{t} \in [0, 1]$ t.c. $c = \underbrace{f(\gamma(\bar{t}))}_{g(\bar{t})}$ e LA DIM È COMPLETA CON $g = g \circ \gamma$.

QUINDI SE f È CONTINUA e A È SIA COMPATTO CHE CONNESSO ALLORA $(f: A \rightarrow \mathbb{R})$ ABBIAMO CHE

$$f(A) = [a, b] \quad \text{DOVE} \quad \begin{aligned} a &= \sup f(A) = \max f(A) \\ b &= \inf f(A) = \min f(A) \end{aligned}$$

DERIVATA DIREZIONALE

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ (PUNTO INTERNO) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $v \in \mathbb{R}^n$ FISSATO

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

$x_0 + tv \in B(x_0, r)$ PER t PICCOLO
↑
OPPORTUNO

PRENDIAMO $t > 0$ t.c. $B(x_0, r) \subseteq A$ (SI PUÒ FARE PERCHÉ $x_0 \in \overset{\circ}{A}$). SE $|t| \leq \frac{r}{\|v\|}$, $v \neq (0, 0, \dots, 0)$ v. NULLO ALLORA

$$x_0 + tv \in B(x_0, r) \text{ PERCHÉ } \|x_0 - (x_0 + tv)\| = \|tv\| = |t| \cdot \|v\| < r \Rightarrow |t| < \frac{r}{\|v\|}$$

ALLORA DEFINISCO $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ "DERIVATA DIREZIONALE DI f NEL PUNTO x_0 LUNGO LA DIREZIONE v "

SE $v = (0, \dots, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0$$

TEOREMA DI FERMAT.

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, SIA $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ UN PUNTO DI MAX, MIN LOCALE PER f SE:

$$\bullet \text{ MIN: } \left. \begin{array}{l} f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U_{x_0} \\ f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U_{x_0} \end{array} \right\} U_{x_0} \text{ INTERNO DI } x_0 \text{ e } U_{x_0} \text{ CA}$$

$$\text{e } \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0 \quad (\forall v \neq 0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$$

DI MOSTRAZIONE:

DEFINISCO $g(t) \stackrel{\text{DEF}}{=} f(x_0 + tv)$ **NOTA:** $|t| < \frac{r}{\|v\|} \Rightarrow x_0 + tv \in B(x_0, r) \subseteq A$ $\leftarrow x_0 \in \overset{\circ}{A}$
 t DEVE ESSERE SCELTO OPPORTUNAMENTE

SE x_0 È MAX LOCALE DI $f(x)$, ALLORA $t=0$ È MAX LOCALE PER g : $g(t) \leq g(0) \quad \forall t$ IN UN INTERVALLO OPPORTUNO DI $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

DAL TEO. DI FERMAT A UNA VARIABILE: $0 = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \stackrel{\text{PER DEF}}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \quad \square$

DERIVATE PARZIALI:

CONSIDERIAMO I VETTORI DELLA BASE CANONICA DI \mathbb{R}^n : $e_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$, DEF. **DERIV. DIREZ.** $v = e_j$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \stackrel{\text{DEF}}{=} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + e_j t) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0)_1, (x_0)_2, \dots, (x_0)_j + t, \dots, (x_0)_n) - f(x_0)}{t}$$

↑
J-ESIMA

CHE CORRISPONDE A DERIVARE f IN SENSO ORDINARIO RISPETTO ALLA VARIABILE x_j LASCIANDO TUTTE LE ALTRE VARIABILI "CONSTANTI"

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \rightarrow$ DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A x_j , NEL PUNTO x_0

ES: $f(x, y) = x y \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$

ES: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x_0)$

TEOREMA DI SCHWARTZ:

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO. SIA $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ CONTINUE, ALLORA SONO UGUALI IN x_0