DEF: $\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

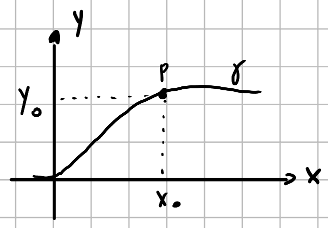
$\varphi(x, y) := (x, y, f(x, y)) \in G_f$ (GRAFICO DI f)

↳ MAPPA DI $f(x)$ SU UN PIANO 3D

OSS: LA CORRISPONDENZA $\varphi: \Omega \to G_f$ È BIUNIVOCA: FISSATO $p \in G_f$ $\exists (x_0, y_0) \in \Omega$ t.c. $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

DEF: IL PIANO TANGENTE A UNA f IN P È L'INSIEME DEI VETTORI TANGENTI A QUEL PUNTO.

CONSIDERO UNA CURVA $\gamma: (-\delta, \delta) \ni t \longrightarrow (x(t), y(t)) \in \Omega$.



QUINDI $(x_0, y_0) = \gamma(0) \longrightarrow$ ALL'ISTANTE 0 PASSA PER x_0, y_0
SIMILE AL MODELLO CINEMATICO
CIOÈ $(x_0, y_0) = \varphi^{-1}(P)$ (CON P FISSATO) → SIAMO SICURI $\exists$ PER BIUNIVOCITÀ.

A QUESTO PUNTO CONSIDERO UN ULTERIORE CURVA $\varphi(\gamma(t)) : (-\delta, \delta) \to G_f$ e $\varphi(\gamma(t)) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))$ CON $t \in (-\delta, \delta)$. AL VARIARE DI t CREIAMO UN CAMMINO SU G_f DOVE CON $t=0$, $\varphi(\gamma(0)) = P$.

OSS: SE $\gamma(t)$ È REGOLARE (CIOÈ $\gamma \in C^1(-\delta, \delta)$ t.c. $\gamma'(t) \neq 0$) ALLORA ANCHE $\varphi(\gamma(t))$ È REGOLARE

MATRICE IACOBIANA:

DATA $\varphi(x, y) := (\underset{\varphi_1}{x}, \underset{\varphi_2}{y}, \underset{\varphi_3}{f(x, y)})$

$$\boxed{I_p(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1(x, y) \\ \nabla \varphi_2(x, y) \\ \nabla \varphi_3(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}}$$

DOVE $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

LA MATRICE I_p HA RANGO 2 $\left(c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \iff c_1 = c_2 = 0 \right)$

CERCHIAMO QUINDI $\varphi'(\gamma(t))$, CHE È REGOLARE E PER IL TEO. DERIVAZIONE COMPOSTA:

$\varphi'(\gamma(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma(t)) x'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma(t)) y'(t) \neq \underline{0}$ (CON $t \in (-\delta, \delta)$ SE $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq \underline{0}$)

e IN PARTICOLARE $\varphi'(\gamma(0))$, CON $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ e $\varphi(x_0, y_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \to \varphi'(\gamma(0)) = \varphi'(x_0, y_0)$
CHE È ESPRIMIBILE COME COMB. LINEARE DI $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma(0))$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma(0))$.

INOLTRE VALE IL VICEVERSA: SE $\exists$ $w = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$, POSSO DEFINIRE.

UNA CURVA REGOLARE PASSANTE PER P, IL CUI VETTORE TANGENTE PER $t=0$ È w: $p(t) = \varphi(\lambda t + x_0, \mu t + y_0)$
e $p(0) = \varphi(x_0, y_0) = P$. INOLTRE $p'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\lambda t + x_0, \mu t + y_0)\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\lambda t + x_0, \mu t + y_0)$

QUINDI DEFINIAMO LO SPAZIO TANGENTE AL PUNTO $p \in G_f$ L'INSIEME DELLE COMB. LINEARI DI $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$

DEFINIAMO VERSORE NORMALE AL PIANO TANGENTE A G_f IN P:

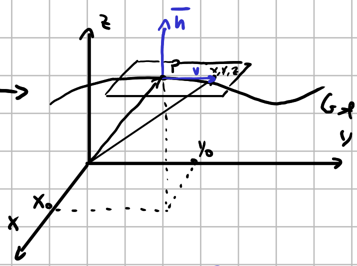
$$\boxed{\bar{n} := \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \right\|}}$$

DOVE $\bar{a} \wedge \bar{b}$ ($\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3$) $= \det \begin{pmatrix} \bar{e}_1, & \bar{e}_2, & \bar{e}_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{pmatrix}$ CON $\bar{e}$ BASE CANONICA e $\bar{a} \wedge \bar{b}$ ORTOGONALE A $\bar{a}$ e $\bar{b}$

IN $\mathbb{R}^3 \to \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

$$\bar{n} = \left(\frac{-f_x(x_0,y_0)}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}} , \frac{-f_y(x_0,y_0}{\dots} , \frac{1}{\dots\dots} \right)$$

GRAFICAMENTE $\longrightarrow$



(x,y,z) GENERICI $\in$ PIANO TANG.

DA QUESTA RELAZIONE RICAVIAMO CHE: $V = (x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0))$ È $\perp$ A $\bar{n}$: $\langle V, \bar{n} \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$

e DA CUI LA FORMULA DEL PIANO TANGENTE: $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

STUDIO DI ESTREMI LOCALI

DERIVATA DI ORDINE SUPERIORE:

DATA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad i = 1, \dots, n$

DICIAMO f È DERIVABILE 2 VOLTE RISPETTO A x_j SE:

$\exists \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ e PONIAMO $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}$

TEOREMA DI SCHWARZ:

HP: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, $f \in C^2(A)$ ($\exists$ DERIVATE SECONDE e SONO CONTINUE SU A)

TH: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\quad \forall i \neq j \quad i,j = 1, \dots, n$

MATRICE HESSIANA:

HP: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$

TH: LA MATRICE HESSIANA DI f IN $x_0 \in A$ È: $Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0), & \dots \\ \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix} \longrightarrow$

- SIMMETRICA PER TEO. SCHWARZ
- TUTTI GLI AUTOVALORI SONO REALI
(SOLUZ. DI $\det(Hf(x_0) - \lambda I_n) = 0$)

MATRICE QUADRATICA ASSOCIATA

DATA UNA MATRICE $H = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ASSOCIO UNA FUNZIONE $q_H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (FORMA QUADRATICA ASSOCIATA AD H)

$$\boxed{h \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Hh, h \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j}$$

- POSITIVA : $q_H(h) > 0$ $\quad \forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- NEGATIVA : $q_H(h) < 0$
- INDEFINITA : $\exists h_1, h_2$ t.c. $q(h_1) < 0 < q(h_2)$

TEOREMA (CORRISPONDENZA AUTOVALORI - q_H)

HP: H SIMMETRICA, q_H FORMA QUADRATICA

TH:
1) q_H POSITIVA $\Longleftrightarrow$ TUTTI AUTOV. POSITIVI
2) NEGATIVA $\Longleftrightarrow$ NEGATIVI
3) INDEFINITA $\Longleftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

UN "MINORE PRINCIPALE" È UN MINORE OTTENUTO CANCELLANDO RIGHE e COLONNE DELLO STESSO INDICE

- q_H POSITIVA: TUTTI I MINORI PRINCIPALI SONO $\oplus$
- NEGATIVA : MINORI PRINCIPALI DI INDICE PARI SONO $\oplus$, I DISPARI $\ominus$
- INDEFINITA: $\det(H) \neq 0$ e $\exists$ MINORE PRINCIPALE DI ORDINE PARI NEGATIVO

DEFINIZIONE MAX e MIN LOCALE

DATA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

x_0 È MAX SE: $\exists r > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\quad \forall x \in B(x_0, r) \cap A$

MIN SE: $\quad f(x) \geq f(x_0)$

- PER TEO FERMAT: SE $x_0 \in \mathring{A}$, $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$. NON VALE IL VICEVERSA.