

• ESEMPIO RISOLUZIONE CON EQ. DI RICCARDI

PC $\begin{cases} y' - 9x^2y + 2xy^2 = 2x + 1 - 2x^3 \\ y(0) = 2 \end{cases} *$

* STRUTT. EQ. RICCARDI

- 1 - VERIFICARE CHE HA UNA SOLU. NELLA FORMA $y_* = ax + b$
- 2 - TROVARE SOLU. PC A INTERVALLO ESISTENZA MASSIMALE (I_{\max})

1 - $y_* = ax + b \Rightarrow y'_* = a$ e MI DOMANDO: $\exists a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $y_* = ax + b$ VERIFICATA?

↳ LI SOSTITUISCO NELL' EQUAZIONE

$$\underbrace{(-4a + 2a^2 + 2)}_{2(a-1)^2} x^3 + \underbrace{(-4b + 4ab)}_{4b(a-1)} x^2 + \underbrace{(2b^2 - 2)}_{2(b^2-1)} x + a - 1 = 0$$

AFFINCHÉ SIA TUTTO 0, I COEFF. DEVONO ESSERE NULLI

$$\begin{cases} (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ b(a-1) = 0 \Rightarrow b = 0, a = 1 \\ b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = \pm 1 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

PERCHÉ NON VALE IN $b^2 - 1 = 0$

SOLUZIONI: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ CIÒ È: $y_1 = x + 1$ e $y_2 = x - 1$

ORA USIAMO LA VARIABILE AUSILIARIA z (DALL'EQ. DI RICCARDI) $y = \frac{y_0}{x+1} + \frac{1}{2}$, $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$

e SOSTITUENDO NELL' EQ. $z' - \frac{4x}{z} = \frac{2x}{z^2}$ - APPLICHO QUINDI TEOREMA 2

$$z(x) = e^{\int 4x dx} \left\{ c + \int e^{-\int 4x dx} \cdot 2x dx \right\} = e^{2x^2} \left\{ c + \int e^{-2x^2} \cdot 2x dx \right\} = e^{2x^2} \left\{ c - \frac{1}{2} e^{-2x^2} \right\} = c e^{2x^2} - \frac{1}{2}$$

e TROVO y CON $y = x + 1 + \frac{1}{z}$ CHE È $y = x + 1 + \left(c e^{2x^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$

PONGO LA CONDIZ. INIZIALE $\Rightarrow z = 0 + 1 + \left(c e^0 - \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow 1 = c - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

② $I_{\max} = ?$

$$\frac{3}{2} e^{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3e^{2x^2} = 1 \quad e^{2x^2} = \frac{1}{3} \quad 2x^2 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad x = \pm \sqrt{\frac{\ln(\frac{1}{3})}{2}} \Rightarrow \text{NO!}$$

QUINDI $y \in C(\mathbb{R})$ CIÒ È $I_{\max} \Rightarrow (\mathbb{R})$

• ESISTENZA e UNICITÀ PER PROBLEMI CAUCHY PC $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

- UNA $f(x, y)$ È CONTINUA IN (x_0, y_0) SE:

- $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (DOMINIO DI f)
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ ESISTE FINITO ed È UGUALE A $f(x_0, y_0)$

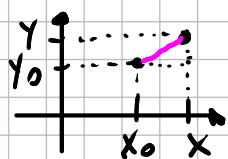
↳ CIÒ È

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in \Omega \text{ t.c.}$$

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

DISTANZA 2 PUNTI



STESSA COSA PER CONTINUITÀ SU INTERVALLI

DEFINITA COME $f \in C(\Omega)$ CLASSI DI f CONTINUE SU Ω

• CRITERI DI CONTINUITÀ (CASI CONCRETI)

① SE $g(x)$ È CONTINUA SU I ALLORA $f(x, y) := g(x)$ È CONTINUA SU $\Omega = I \times \mathbb{R}$

② SOMMA, DIFFERENZA e PRODOTTO DI f CONTINUE SU Ω SONO CONTINUE SU Ω

③ IL QUOZIENTE DI f CONTINUE È CONTINUA $\forall (x, y) \in \Omega \setminus \{\text{DENOM} = 0\}$

④ I POLINOMI SONO f CONTINUE SU $\Omega = \mathbb{R}^2$

ES: $x^4y^3 + x^2y + y^5 + 1$

⑤ LE FUNZIONI RAZIONALI SONO CONTINUE SUL LORO DOMINIO ($\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$ $q(x,y) \neq 0$) (p, q POLINOMI)

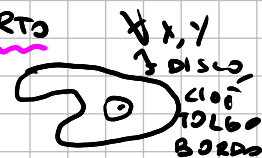
⑥ SE $g(x)$ È CONTINUA IN UN INTERVALLO I E $f(x,y)$ È CONTINUA NEI PUNTI $(x, g(x))$ ALLORA $f(x, g(x))$ È CONTINUA SU I

⑦ $f(x,y) \in C(U \subseteq \mathbb{R}^2)$ E $g(x) \in C(\text{DOMINIO DI } f)$ ALLORA $g(f(x,y)) \in C(U \subseteq \mathbb{R}^2)$

● TEOREMA DI PEANO

DATO (PC) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

DOVE $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f \in C(\Omega)$, Ω APERTO



TESI: (PC) HA UNA SOLUZIONE SU $y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA SU QUALCHE INTERVALLO CONTENENTE x_0

● TEOREMA 3: DI ESISTENZA E UNICITA' GLOBALE (PEANO, PICARD, CAUCHY, LINDOLF)

SIA $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}$ (oppure $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

• $(x_0, y_0) \in \Omega$

• $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\Omega)$

ASSUMIAMO $\exists L > 0$ t.c. $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z| \quad \forall (x, y), (x, z) \in \Omega$

ALLORA ESISTE UNA SOLA SOLUZIONE DI (PC) $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ PER $I = [a, b]$ (S $I = \mathbb{R}$ CON $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

CONDIZIONE DI LIPSCHITZ

● TEOREMA 4 (ESISTENZA E UNICITA' LOCALE)

"BOLLA APERTA CENTRATA IN (x_0, y_0) DI RAGGIO $r > 0$ "

$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$ ASSUMIAMO $f \in C(B_r)$ E $\exists L > 0$ t.c.

ALLORA IL (PC) $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ HA SOLUZ. UNICA DEFINITA SU I CONTENENTE x_0

● TED. 2 - (B) DIMOSTRATO CON TED. 3

$y' = q(x) - p(x)y = f(x, y)$
 $\in C(I \times \mathbb{R})$

CONSIDERO $[a, b] \subseteq I$ E $f \in C(\Omega)$ $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}$ CON x_0

+ HP DI LIPSCHITZ, CIOE $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z| \quad \forall (x, y), (x, z) \in \Omega$

DIVENTA $|q(x) - p(x)y - q(x) + p(x)z| = |-p(x)y + p(x)z| = |p(x)| \cdot |y - z| \leq \max |p(x)| \cdot |y - z| \leq L|y - z|$
 $\stackrel{\exists \text{ FINITA PER WEIERSTRASS}}{=} L$
 $\leq L|y - z| \quad \checkmark$

QUINDI UNICITA' E ESISTENZA SU $[a, b]$ ARBITRARIO, CIOE ANCHE SU I \checkmark

ESEMPIO:

(PC) $\begin{cases} y' = \frac{2x}{x^2+1}y + xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3}\right)}}$

$I_{\max} \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3} > 0 \Rightarrow 4 - (x^2+1)^3 > 0 \Rightarrow x^2 < \sqrt[3]{4-1}$

$\Rightarrow x \in (-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}) = I_{\max}$, POSSO APPLICARE SOLO **TEO. 4**
(MA NON MI DA INFORM. SU I_{\max})