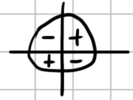
ESEMPIO 1: $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\}$. STUDIARE $f(A)$

SVOLGIMENTO:
- A È CONNESSO
- f POLINOMIO $\Rightarrow$ CONTINUA
- A È COMPATTO

} DA QUESTE OSSERVAZIONI RICAVO CHE (PER WEIERSTRASS) $a \leq f(A) \leq b$ DOVE a è MIN e b È MAX, IN PIÙ ESSENDO A CONNESSO $f(A)$ È INTERVALLO ($f(A) = [a,b]$) e ASSUME TUTTI I VALORI INTERMEDI

CERCO DI STUDIARE IL SEGNO DI f:  e PER WEIERSTRASS $\Rightarrow \exists x_m, x_M$ t.c. $f(x_m) = a$, $f(x_M) = b$

PER MIN e MAX, DEVO TROVARE x_m, x_M. $\nabla f(x_0) = 0$ (DAL TEOREMA DI FERMAT)
SE SONO INTERNI $\nabla f(x_0) = 0$, e LO SONO PERCHÈ $f(\partial A) = 0$ e f ASSUME VALORI $\oplus$ e $\ominus$ IN A.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-3x^2-3y^2) = 0 \iff \begin{cases} y=0 \\ y^2+3x^2=1 \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-x^2-3y^2) = 0 \iff \begin{cases} x=0 \\ x^2+3y^2=1 \end{cases}$$
$f(0,0) = 0$

SE $y=0$ $\begin{cases} y=0 \\ x^2+3y^2=1 \end{cases} \rightarrow x^2=1 \iff x=\pm 1$ CIOÈ $(-1,0)$ e $(1,0) \in Fr(A)$, QUINDI DA SCARTARE $Fr(A)=0$

SE $y \neq 0$ $\begin{cases} y \neq 0 \\ y^2+3x^2=1 \ (*) \end{cases}$ CON $x=0$ IN $(*)$ $y^2=1$ $y=\pm 1$, $(0,1), (0,-1) \in Fr(A)$

CI RIMANGONO DA PROVARE $x \neq 0, y \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ 3x^2+y^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2+9y^2=3 \\ 3x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\ominus$ $8y^2=2 \rightarrow y^2=\frac{1}{4} \rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$ e $x=\pm\frac{1}{2}$ $\left(\underset{P_1}{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}, \underset{P_2}{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}, \underset{P_3}{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}, \underset{P_4}{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} \right)$ SOLUZ.

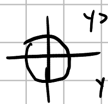
$f(P_1) = f(P_4) = -\frac{1}{8}$ min e $f(P_2) = f(P_3) = \frac{1}{8}$ MAX CIOÈ $f(A) = [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$

ESEMPIO 2: $f(x,y) = e^{x+y}$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. TROVARE $f(A)$ (IMMAGINE)

SVOLGIMENTO: $f(x,y) = e^x \cdot e^y \Rightarrow$ CONTINUA
A CONNESSO $\Rightarrow f(A)$ È INTERVALLO
A COMPATTO $\Rightarrow f(A) = [a,b]$ (MAX MIN)

$\rightarrow$ DA FERMAT: $x_m, x_M \in \mathring{A} \Rightarrow \nabla f(x_m) = \nabla f(x_M) = 0$
$\hookrightarrow$ STUDIO LA DERIVATA: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} e^{x+y} = \underset{\neq 0}{e^{x+y}} = \frac{\partial}{\partial y} e^{x+y}$ • QUINDI SI DEVONO TROVARE SULLA $Fr(A)$

CERCHIAMO QUINDI SULLA FRONTIERA:



$y>0$ $y=\sqrt{1-x^2}$
$y<0$ $y=-\sqrt{1-x^2}$

$\rightarrow \begin{cases} e^{x+\sqrt{1-x^2}}, & y>0,\ x \in (-1,1) \\ e^{x-\sqrt{1-x^2}}, & y<0,\ x \in (-1,1) \\ e, & y=0,\ x=1 \\ e^{-1}, & y=0,\ x=-1 \end{cases}$

$h_+(x) = e^{x+\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$ e $h'_+(x) = e^{x+\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$h_-(x) = e^{x-\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$ e $h'_-(x) = e^{x-\sqrt{1-x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

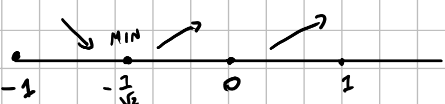
$h'_+(x) \geq 0 \iff \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \iff \sqrt{1-x^2}-x \geq 0$ $\circledast$ $\rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}-x \geq 0 \\ x>0 \end{cases} \iff 1-x^2 \geq x^2 \iff \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x>0 \end{cases} \iff 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ QUINDI LA MONOTONIA DI h_+:

$\circledast$ $x<0 \rightarrow$ (OK)

$\rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ È MAX, $y = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{\sqrt{2}}$ MAX

$h'_-(x) \geq 0 \iff \frac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$ $(x \in (-1,1))$ CIOÈ $\sqrt{1-x^2}+x \geq 0$ $(**)$ $\iff \begin{cases} \sqrt{1-x^2}+x \geq 0 \\ x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x^2 \geq x^2 \\ x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x<0 \end{cases} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 0}$

VERA $\forall x \geq 0$



$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ È MIN, $y = -\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ CIOÈ $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\sqrt{2}}$ MIN

$f(A) = [e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}]$

ESEMPIO 3: $f(x,y) = xy$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ TROVA $f(A)$

SVOLGIMENTO: $f(x,y)$ CONTINUA (POLINOMIO)
A CONNESSO
A COMPATTO

$\frac{\partial f}{\partial x} = y \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = x$
QUINDI IN $x=0$ e $y=0$ SI ANNULLA IL GRADIENTE, QUINDI CERCHIAMO SULLA FRONTIERA

RAPPRESENTO $x = \cos(t)$ e $y = \operatorname{sen}(t)$ $f|_{Fr(A)} = \cos t \operatorname{sen} t = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$, $t \in [0, 2\pi]$

$\|\varphi(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$

QUINDI FACCIO LA NORMA $\|\varphi(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ e $\sin 2t \in [-1, 1] \Rightarrow f|_{\partial A} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow f(A) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

DIFFERENZIABILITÀ PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$

f è DERIVABILE IN $x_0 \iff \exists \overbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}^{f'(x_0)} \in \mathbb{R}$

$\iff \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$

$\iff \exists A \in \mathbb{R}$ t.c.

⊛ $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, $x \to x_0$ DOVE $\frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \to 0$, $x \to x_0$, $A = f'(x_0)$

↳ DIFFERENZIABILITÀ: LA FUNZIONE $\varphi : h \to Ah$: $\varphi(h) = Ah$ è LINEARE ED è CHIAMATA DIFFERENZIALE DI f in x_0 : $\varphi = df(x_0)$

⊛ $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, $x \to x_0$. DERIVABILITÀ e DIFFERENZIABILITÀ SONO EQUIVALENTI CON UNA VARIABILE

↳ IMPLICA CONTINUITÀ