EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

FORMA GENERALE:

$$E(y, y', \dots, y^{(k)}, t) = 0 \qquad t \in I$$

↳ VARIABILE INDIPENDENTE

ALTRE NOTAZIONI PER FUNZIONI DERIVATE

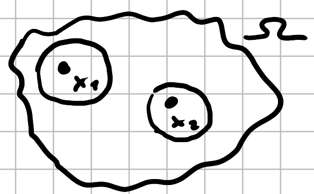
$$y' = \frac{dy}{dt} \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad y^{(k)} = \frac{d^k t}{dt^k}$$

- UNA SOLUZIONE È UNA y CHE SODDISFA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

DEFINIZIONE RIGOROSA:

SIA $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad \Omega$ "APERTO"

APERTO = $\forall x \in \Omega$, ESISTE UN DISCO CENTRATO IN x TUTTO CONTENUTO IN Ω
$D_x \subset \mathbb{R}$



UNA $y: I \to \mathbb{R}$ è SOLUZ. SE

- y È DERIVABILE SU I
- $(x, y(x)) \in \Omega$, $\forall x \in I$
- $y'(x) = f(x, y)$ $\quad \forall x \in I$

- L'ORDINE È L'ORDINE MASSIMO DELLE DERIVATE COINVOLTE NELL'EQUAZIONE

- NON TUTTE LE EQ. DIFFERENZIALI HANNO SOLUZIONE IN GENERALE CI DOBBIAMO CHIEDERE (SULLA SOLUZIONE):
  - ESISTENZA
  - UNICITÀ
  - MOLTEPLICITÀ
  - SOLUZIONI ESPLICITE (CIOÈ SVOLGIMENTO E RICERCA)

- ESEMPIO NOTEVOLE: MALTHUS $(y' = ky)$
  - HA SOLUZIONE $y = c \cdot e^{kt}$ (TROVATA MOLTIP. PER e^{-kt})
  - QUESTA y INGLOBA TUTTE LE SOLUZIONI POSSIBILI

▲ PROBLEMA DI CAUCHY

SELEZIONA UNA SOLUZIONE PARTICOLARE CON UNA CONDIZIONE INIZIALE

ES: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ EQ. DIFF. / CONDIZ. INIZIALE

$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e NOTI

UNA CERTA y È SOLUZIONE SE:

- $y = y(x)$ SODDISFA $y' = f(x, y)$ SU QUALCHE INTERVALLO
- $x_0 \in I$
- $y(x_0) = y_0$

▲ EQ. DIFFERENZIALE DI PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

$$\underline{(1)}\ y' = f(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{VARIABILE} \\ \text{INDIPENDENTE}}}{x},\ \underset{\substack{\searrow \\ \text{FUNZ.} \\ \text{INCOGNITA}}}{y})$$

COEFF. y' SEMPRE 1

▲ TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE RIVISITATO

$f : [a, b]$ $\forall x \in [a, b]$ CONTINUA

$$y(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0, \quad \forall x \in [a, b]$$

È SOLUZIONE UNICA DEL PC

- DIM IMMEDIATA: $\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0\right)' = y(x_0) = f(x)$ ✓

  e $y(x_0) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt}_{0} + y_0 \Rightarrow y(x_0) = y_0$

- DIM UNICITÀ

SUPPONGO $\begin{cases} y_1' = f(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y_2' = f(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$

SOTTRAGGO

$\begin{cases} (y_1 - y_2)' = f(x) - f(x) = 0 \\ (y_2 - y_1)x_0 = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$ e $M = y_1 - y_2 \Rightarrow \begin{cases} M' = 0 \\ M(x_0) = 0 \end{cases}$

CIOÈ:

$M(x) = \underline{c}$ ($M' = 0$ SOLO CON f COSTANTE)

e $M(x) = 0$ QUINDI $\underline{c} = 0$ $\forall x \in [a, b]$

CIOÈ $y_1 = y_2$

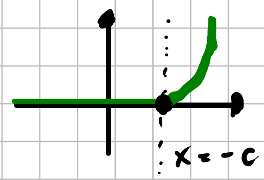
- UN PC PUÒ AVERE INFINITE SOLUZIONI (ES: PEANO) $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

QUESTO HA SOLUZIONE BANALE $y = 0$

MA ANCHE $y(x) = (x+c)^3$

PEANO RISOLVE CONSIDERANDO $y(-c) = 0$ CON $c < 0$

$$y_c(x) = \begin{cases} (x+c)^3 & x > -c \\ 0 & x \leq -c \end{cases}$$



- QUESTO È UN ES DI EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

$y' = a(x)\, b(x)$, $b(y) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$

e INTEGRANDO $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\, dx = \int a_x \, dx$ e PER SOSTITUZIONE

$$\int \frac{dy}{b(y)}$$

- EQ. LINEARI DEL PRIMO ORDINE A COEFF. VARIABILI

FORMA GENERALE: $y' + p(x)\, y = q(x)$ $\quad p(x), q(x) \in C(I)$

$C(I) \Rightarrow$ CLASSE DI f CONTINUE IN I

OPPURE: $y' = \underbrace{q(x) - p(x)\, y}_{f(x,y)}$ o $\mathcal{L}y = q(x)$ DOVE $\mathcal{L}y := y' + p(x)\, y$

- PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y_1, y_2 DERIVABILI SU I e $\mathcal{L}y = \mathcal{L}(y)$:

- $\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}y_1 + \beta \mathcal{L}y_2$

DIM:

$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha y_1' + \beta y_2' + \alpha p(x) y_1 + \beta p(x) y_2$

- RACCOLGO α e β $\Rightarrow$ $\alpha(y_1' + p(x) y_1) + \beta(y_2' + p(x) y_2)$

$= \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2)$ ✓

- TEOREMA DELLE EQ. DI PRIMO ORDINE LINEARI

UNA EQ. IN FORMA $y' + p(x)y = q(x)$ È

(A) $$y(x) = e^{-P(x)} \left\{ c + \int e^{P(x)} \cdot q(x)\,dx \right\}$$

DOVE $P(x)$ RAPPRESENTA UNA GENERICA PRIMITIVA (CON c "INGLOBATA")

(B) IL PC

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x_0 \in I$$

HA SOLUZIONE UNICA GRAZIE ALLA CONDIZ. INIZIALE (CIOÈ TROVA LA c)

DIM (B)

PONGO $Q(x) = \int e^{P(x)} \cdot q(x)\,dx$ e QUINDI: $y_0 = y(x_0) = e^{-P(x)}\{c + Q(x)\}$

e $c = y_0 e^{P(x)} - Q(x_0)$

UNICITÀ:

$$\begin{cases} y_1' + p(x)y_1 = q(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2' + p(x)y_2 = q(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- SOTTRAGGO

$$\begin{cases} y_1' - y_2' + p(x)(y_1 - y_2) = q(x) - q(x) = 0 \\ y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

e PONGO $m = y_1' - y_2'$

$$\begin{cases} m' + p(x)m = 0 \\ m(x_0) = 0 \end{cases}$$

CHE È UN CASO DEL PC DI (A), QUINDI RISOLVO CON FORMULA

$$m(x) = e^{-P(x)}\{c + e^{P(x)} \cdot 0) = ce^{-Px}$$

e VISTO CHE $m(x_0) = 0$ (e L'ESPONENZIALE NON SI ANNULLA) ALLORA $c = 0$

e $m(x) = 0 \quad \forall x \in I$ CIOÈ $\boxed{y_1 = y_2}$ ✓

DIM (A)

CON IL "METODO DEL FATTORE INTEGRANTE"

PONGO $m(x) = \exp\int p(x)\,dx > 0$

$m'(x) = \exp\int p(x)\,dx \cdot p(x) = m(x) \cdot p(x)$ (DERIVATA ESPONENZIALE)

- MOLTIPLICO PER $m(x)$

$$y'm(x) + p(x)\,y\,m(x) = q(x)\,m(x)$$

CIOÈ $y' M(x) + M'(x) y = q(x) M(x)$

$(y(x) M(x))' = q(x) M(x)$ e INTEGRANDO

$$y(x) = \frac{\int q(x) M(x)\,dx}{M(x)}$$

• EQUAZIONE DI BERNOULLI:

RISOLVE LE EQUAZIONI DI TIPO: $y' + p(x) y = q(x) y^\alpha$, $p(x)$ e $q(x) \in C(I)$

$\alpha = 1$ e 0 SONO GIÀ NOTI e ASSUMO $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

DIVIDO PER y^α

$y' y^{-\alpha} + p(x) y^{1-\alpha} = q(x)$ e PONGO $z := y^{1-\alpha}$ e $z' := (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$

RISCRIVENDO CON z... $\frac{z'}{1-\alpha} + p(x) z = q(x) \Rightarrow z' + p(x)(1-\alpha) z = q(x)(1-\alpha)$

RISOLVIBILE CON TEOREMA DELLE EQ. DI 1 ORDINE LINEARI (TEO. 2)

• EQUAZIONE DI RICCATI:

$y' = r(x) + p(x) y + q(x) y^2$ * $\quad r, p, q \in C(I)$ e CONOSCIAMO PER HP $y_0' = *$

RISOLUZIONE

USO $z(x)$ COME $\Rightarrow y(x) = y_0(x) + \boxed{\frac{1}{z(x)}}$ SAREBBE IL "RESTO" e DERIVO:

$y' = y_0' - \frac{1}{z^2} \cdot z'$ e SOSTITUISCO NELLA FORMULA INIZIALE

$\Rightarrow \cancel{y_0'} - \frac{z'}{z^2} = \cancel{r(x)} + p(x)\left(\cancel{y_0(x)} + \frac{1}{z(x)}\right) + q(x)\left(\cancel{y_0^2(x)} + \frac{2y_0(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right)$ PERCHÈ y_0 È SOLUZIONE

$= -\frac{z'}{z^2} = \frac{p(x)}{z(x)} + \frac{2y_0(x) q(x)}{z(x)} + \frac{p(x)}{z^2(x)} = 0$ (MOLTIPLICO PER $z(x)$) $\Rightarrow z' + 2q(x)y_0(x) - z = -q(x) z$

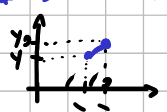
FORMA APPLICABILE AL TEO. 2 SU z, e TROVO y CON $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$

• CONTINUITÀ DI UNA $f(x,y)$

UNA $f(x,y)$ È CONTINUA IN (x_0, y_0) SE:

- $(x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (DOMINIO FUNZIONE)
- $\lim_{x,y \to x_0 y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ CIOÈ $\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x,y) - L| < \varepsilon \ \forall (x,y) \in \Omega$ t.c. $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2} < \delta$

* DISTANZA TRA 2 PUNTI



$< \delta$

• ESEMPI DI f CONTINUE

- SE $f(x,y) := g(x)$ (e $g(x) \in C(I)$) $\to f(x,y) \in C(\overset{x\in}{I} \times \overset{y\in}{\mathbb{R}})$
- $+, -, \cdot$ DI f CONTINUE SONO CONTINUE
- IL QUOZ. DI f CONTINUE È CONTINUO $\forall (x,y) \in \Omega - \{DENOM = 0\}$
- I POLINOMI SONO f CONTINUE SU $\Omega = \mathbb{R}^2$
- LE f RAZIONALI SONO CONTINUE SUL LORO DOMINIO
- SE $g(x) \in C(I)$ e $f(x,y) \in C(x, g(x))$, ALLORA $f(x,y)$ È CONTINUA SU I
- $f(x,y) \in C(U \subseteq \Omega)$ e $g(x) \in C$(CODOM. DI f) ALLORA $g(f(x,y)) \in C(U \subseteq \mathbb{R}^2)$

• TEOREMA DI PEANO ($\exists$ SOLUZIONI PC)

HP: DATO UN GENERALE PC e $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f(x) \in C(\Omega)$ e Ω "APERTO" ($\forall x, y$ IN Ω $\exists$ DISCO CONTENUTO)

ALLORA $\boxed{\exists\, y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ DEFINITA SU QUALCHE } I \text{ CONTENENTE } x_0, \text{ SOLUZIONE DEL PC}}$

• TEO. 3: $\exists$ e UNICITÀ GLOBALE SU PC

SIA $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}$ (ma ANCHE $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$):

- $(x_0, y_0) \in \Omega$
- $f: \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $f \in C(\Omega)$
- $\exists L > 0$ t.c. $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$ $\forall (x, y), (x, z) \in \Omega$ $\Rightarrow$ IPOTESI DI LIPSCHITZ

ALLORA $\boxed{\exists \text{ ed È UNICA LA SOLUZ. DEL PC PER } I = [a, b] \text{ (o } \mathbb{R} \text{ SE } \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R})}$

• TEO. 4: $\exists$ e UNICITÀ LOCALE

DATA B_r "BOLLA APERTA CENTRATA IN (x_0, y_0) e DI RAGGIO r" $\Rightarrow B_r(x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r}_{\text{DISTANZA PUNTO } (x,y) \text{ DAL CENTRO } < \text{ RAGGIO}} \right\}$

- $f \in C(B_r)$

ALLORA IL PC HA SOLUZIONE UNICA DEFINITA SU I (CONTENENTE x_0) $\subset \mathbb{R}$

È POSSIBILE DIMOSTRARE IL TEO. 2 USANDO IL TEOREMA 3:

DA $y' = q(x) - p(x)y = f(x, y)$ e $f \in C(\underset{x}{I} \times \underset{y}{\mathbb{R}})$ CONSIDERO $[a, b] \subseteq I$ e $f \in C(\Omega)$

$\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}$, $x_0 \in$

IMPONGO L'HP DI LIPSCHITZ:

$|\cancel{q(x)} - p(x)y - \cancel{q(x)} + p(x)z| \leq L|y - z| \Rightarrow |-p(x)y + p(x)z| \leq L|y - z| \Rightarrow |p(x)| \cdot |y - z| \leq L|y - z|$

$\Rightarrow$ PONGO $L = \max(p(x))$ IN $[a, b]$ (CHE ESISTE PER WEIERSTRASS) e QUINDI LA DISEQ. È VERIF.

e SE HO UNICITÀ e ESISTENZA SU $[a, b]$ ARBITRARIO, LA HO SU I

• EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

- STRUTTURA GENERALE: $y^{(k)} = f(x, y, \ldots, y^{(k-1)})$

DATO IL SEGUENTE PC y È UNA SOLUZIONE SU I SE: (CON $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\text{PC} \begin{cases} y^{(k)} = f(x, y, \ldots, y^{(k-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ \ldots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1} \end{cases}$$

- y È DERIVABILE SU I
- $(x, y(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)) \in \Omega$ $\forall x \in I$
- $y^{(k)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(k-1)}(x))$ SU QUALCHE I (CIOÈ SE VERIFICA L'EQ. DIFF.)

• EQ. DIFF. "LINEARI" DI ORDINE SUPERIORE

SONO SOLO GENERALIZZAZIONI DELLA FORMA $y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow \mathcal{L}(y) = q(x)$

CIOÈ: $\boxed{y^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x)\, y^{(i)} = b(x)}$ CON $a, b \in C(I)$ $I \subseteq \mathbb{R}$

NOTA: $\mathcal{L}(y) = 0$ È DETTA EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA A $\mathcal{L}(y) = q(x)$

- TEOREMA $\exists$ e UNICITÀ SOLUZIONI (PC)

AVENDO $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$: (PC) $\begin{cases} \text{EQ. DIFF.} \\ \dots \\ y^{k-1}(x_0) = y_k \end{cases}$ HA SOLUZIONE e QUESTA $y = y(x)$ è UNICA SU I

- INDIPENDENZA LINEARE DI FUNZIONI

DATE K FUNZIONI $v_1, \dots, v_k$ DEFINITE SU I, SONO LIN. INDIPENDENTI SE:

$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0}$ $\forall x \in I$ $\Leftrightarrow$ $c_1 = c_2 = \dots = 0$