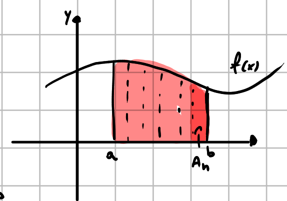
SUCCESSIONI e SERIE DI FUNZIONI

DEFINIAMO $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ TUTTE FUNZIONI DEFINITE IN UN INTERVALLO I

ES: $f_n(x) = \dfrac{(\operatorname{sen}(nx)\arctan(nx))^2}{n}$. CALCOLO DEL $\lim\limits_{n\to+\infty}$ e IN PARTICOLARE $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{(\operatorname{sen}(nx)\arctan(nx))^2}{n}\,dx = ?$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$



SE $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ↳ SE SONO PIÙ COMODI

ESPRESSIONI DEL TIPO $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ ⊛ , PER OGNI FISSATO $x\in I$ LA ⊛ È UNA SERIE $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. ASSEGNO $\forall x$ UNA f_n

---

OSS: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)}_{S_k} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k(x)$ CON $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI (PRIME k FUNZIONI)

CI SONO VARI TIPI DI CONVERGENZA PER $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

DATA $f_n : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e DEFINIAMO COSA VUOL DIRE $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$

SI DICE CHE $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE PUNTUALMENTE IN I ALLA FUNZIONE f SE $\forall x \in I$ FISSATO $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\quad (f_n(x) \to f(x),\ n\to\infty)$

ES:

f_n CONTINUE SU I e $f_n(x) \to f(x),\ n\to\infty$ $\not\Rightarrow$ f CONTINUA (f NON È CONTINUA)

$f_n(x) = x^n ,\quad x\in[0,1] \in C(I)$ $\quad\to\quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases} \mapsto f(x)$, DISCONTINUA $\left(\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0 \neq f(1) = 1\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ SIGNIFICA CHE (FISSATO $x\in I$) :

$\forall \varepsilon>0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ (n_0 = \overset{\text{DIPENDE DA } \varepsilon \text{ e } x}{n_0(\varepsilon, x)})$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. IN ALTRE PAROLE: $a_n := f_n(x)$ $\quad l = f(x)$ $\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0\in\mathbb{N}$ t.c. $\forall n > n_0$ t.c. $|a_n - l| < \varepsilon$

ES: • $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{\operatorname{sen}(nx)\arctan(nx)^2}{n}\,dx \leq \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{n} = 0$

• $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \operatorname{sen}(nx)\arctan(nx)^2 e^{-\frac{k^2}{1+x^2}}\,dx$?

SCAMBIO DI INTEGRALE - LIMITE → TEORIA MISURA DI LEBESGUE

• $f_n(x) := x^n$ $\quad x\in[0,1] = I$. ABBIAMO OSSERVATO CHE $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\ \forall x \in I - \{0\}$. AVENDO $\varepsilon > 0$

AFFINCHÈ CONVERGA $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| < \varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$ $\iff \ln x^n < \ln\varepsilon \iff n\ln x < \ln\varepsilon \iff n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}$ e DEFINIAMO $n_0 = \left(\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right) + 1$

$\forall n > n_0$ VALE $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

OSS: $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x} = +\infty$ → NON POSSIAMO PRENDERE n_0 "UNIFORME" t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\ \forall n > n_0\ \ \forall x \in I$, CIOÈ n_0 DIPENDE DA x.

ES 3, CONVERGENZA UNIFORME DIPENDENZA DI n_0 DALL' INTERVALLO

$I = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. $\quad f_n(x) := x^n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$\forall x\in I$, SIA $\varepsilon \in (0,1)$ $\to$ ⊛ $|\underbrace{f_n(x)}_{x^n} - \underbrace{f(x)}_{0}| = x^n < \varepsilon \iff n > \overset{\text{PERCHÈ } \ln(x) \text{ CON } x\in(0,1) \text{ È NEGATIVO}}{\left(\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right)} + 1$

CERCHIAMO $n_0 = n_0(\varepsilon)$ INDIPENDENTE DA $x\in I$ t.c. ⊛ VALGA $\forall x\in I$ $\ \forall n > n_0$ $\to 0 \leq \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x} \leq \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln\varepsilon}{-\ln 2}$. DEFINENDO $n_0 = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{-\ln 2}\right] + 1$

$\forall n > n_0$ ⊛ VALE $\forall x\in I$

LAVORANDO SU $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}] \subset [0,1)$ ABBIAMO TROVATO $h_0 = h_0(\varepsilon, \cancel{x})$

CONVERGENZA UNIFORME:

DATA SUCC. DI FUNZIONI $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f_n CONVERGE UNIFORMEMENTE a $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ PER I SE: $\exists \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = \underbrace{n_0(\varepsilon)}_{\text{INDIP. DA } x}$ t.c. $\forall n > n_0$ VALE $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in I$

ES. VERIFICARE CONVERGENZA UNIFORME

$f_n(x) := \frac{x^n}{n}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE SU $I = [0,1]$ a $f(x) = 0$ $\forall x \in I$ ($f \equiv 0$). $f(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$ limite puntuale.

$\Big|\underbrace{\frac{x^n}{n}}_{f_n(x)} - \underbrace{f(x)}_{0}\Big| < \frac{1}{n} \to 0$ $\forall x \in [0,1]$. SE $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} = n_0(\varepsilon)$. $\forall n > n_0$ $n > \frac{1}{\varepsilon}$ È SODDISFATTA $\to \left|\frac{x^n}{n} - f(x)\right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon$

ES: $\frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in [0,1)$ $\forall x \in I$ $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \le \lim_{n\to\infty} x^n = 0$

$f \equiv 0$ ($f(x) = 0$, $\forall x \in I$) È LA FUNZ. "LIMITE PUNTUALE" DI f_n SU I: $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} \le x^n \to 0$, $n \to \infty$, $\forall x \in I$

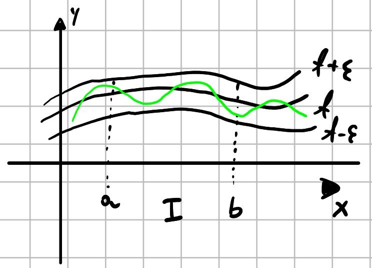
VOGLIO VERIFICARE CHE f_n NON CONVERGE UNIFORMEMENTE a $f \equiv 0$ SU I

PER ASSURDO: $\to$ SE CONVERGESSE a $f(x) = 0$ $\forall x \in I$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall \varepsilon > 0$ VALE $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n > n_0$, $\forall x \in I$ $\iff$

$\iff \frac{x^n}{1+x^n} < \varepsilon$ $\forall x \in [0,1)$. SE $x_n := \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ (CASO SPECIALE) $\Rightarrow f_n(x_n) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$. IN CORRISPONDENZA DI QUESTI PUNTI $|f_n(x) - x| < \varepsilon$ È VIOLATA. CONTRADDIZIONE

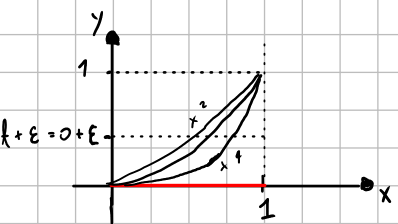
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA CONVERGENZA UNIFORME

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CONV. UNIFORMEMENTE a f SU I LA DISUGUAGLIANZA $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ $x \in I$, $\forall n > n_0$



f_n GENERALE, UNIFORME NELL'INTERVALLO CIOÈ $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n > n_0$ TUTTE LE f_n SONO COMPRESE IN QUESTA FASCIA DI SPESSORE 2ε

NEL CASO $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1)$ $f \equiv 0$



$\to$ ESCONO DALLA FASCIA INDIVIDUATA DA $f \equiv 0$ e $f + \varepsilon$

TEOREMA:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$. ALLORA f_n CONVERGE UNIFORM. A f SU I SE e SOLO SE $\lim_{n\to\infty} \overbrace{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|}^{a_n} = 0$

DIM:

- SE $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0$ VALE $|a_n - 0| < \varepsilon \to a_n < \varepsilon \to \overbrace{|f_n(x) - f(x)| \le a_n}^{\text{PERCHÈ } a_n \text{ È IL SUP}} < \varepsilon$. $\to$ CIOÈ VALE CONVERGENZA UNIFORME DI f_n SU I □

- ASSUMIAMO IL CONTRARIO: f_n SIA CONV. UNIF. a f SU I: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0$ VALE $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in I$

  $\Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ $\forall n > n_0$ $\to \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ □

OSS: CONVERGENZA UNIFORME IMPLICA QUELLA PUNTUALE

$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = a_n \to 0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \to 0$ $\forall x \Rightarrow$ CONV. PUNTUALE

ES:

$f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$ VERIFICARE CONV. UNIF. SU $I = [1,2]$ MA NON SU $I = [0,2]$

OSS: (x positivo, $n \in \mathbb{N}$)

$\forall x \neq 0$ HO: $|f_n(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \longrightarrow 0,\ n \to \infty$. $f(x)=0$ $\forall x \in I$ È LA FUNZ. LIMITE PUNTUALE

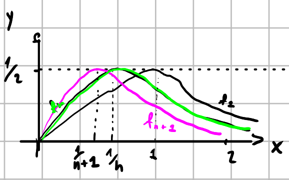
OSS: TUTTE FUNZIONI CONTINUE e

$$\sup_{x\in[1,2]} |f_n(x) - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(x)}| = \max_{x\in[1,2]} \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

≥ 0, VALORE ASS NON SERVE

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(x)}| = \max_{x\in[0,2]} \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

CALCOLANDO $f_n'(x) = \frac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} \geq 0 \iff x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] - \left[-\frac{1}{n}, 0\right)$



$\rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \implies$ NON UNIF. $\max_{x\in[0,2]} |f_n(x) - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{f(x)}| = \frac{1}{2} \not\to 0 \quad n \to \infty$

$\max_{x\in[1,2]} |f_n(x) - \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{f(x)}| = f_n(1) = \frac{n}{1+n^2} \underset{n\to\infty}{=} 0$

UNIFORME

TEOREMA (CONTINUITÀ LIMITE UNIFORME DI f CONTINUE

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCC. DI f CONTINUE SU $I \subseteq \mathbb{R}$, UNIF. CONV. SU I A f

TH: f È CONTINUA

DIM:

FISSO $x_0 \in I$. CONSIDERO $|f(x) - f(x_0)| \to 0$ $\quad x \to x_0$ $\quad \boxed{I_n} \quad II_n \quad III_n$

$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$

$\exists$ ARBITRARIO DIS. TRIA

DALLA CONV. UNIF. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\boxed{I_n} < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n > n_0$. PER PRENDERE UN n_0 PIÙ GRANDE, $\forall n > n_0$ ABBIAMO $\boxed{III_n < \frac{\varepsilon}{3}}$

DALLA CONTINUITÀ DELLE f_n, $\exists \delta > 0$ t.c. SE $|x - x_0| < \delta$ ABBIAMO $\boxed{II_n < \frac{\varepsilon}{3}}$ CIOÈ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. SE $|x - x_0| < \delta$ ALLORA $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ □

TEOREMA (PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE)

HP: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCC. DI FUNZ. CONTINUE SU $[a,b]$. UNIF. CONV. SU $[a,b]$ A f.

TH: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ $\quad \left(\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right)$

DIM:

DAL TEO. PRECEDENTE, f È CONTINUA SU $[a,b] \Rightarrow f\ (e\ f_n)$ LIMITATA GRAZIE A WEIERSTRASS

$\Rightarrow \int_a^b f_n(x)\,dx$ e $\int_a^b f(x)\,dx$ SONO DEFINITI.

$b-a \Rightarrow$ PER SEMPLIFICARE LA DIMOSTRAZIONE

$\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0$ VALE $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (CONV. DATA DALLE IPOTESI) ALLORA

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)} = \varepsilon \quad \forall n > n_0$$ □