EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

- SONO EQUAZIONI **FUNZIONALI** E DIPENDE DALLA FUNZIONE INCOGNITA E DALLE RELATIVE DERIVATE

- FORMA GENERALE:

$$\boxed{E}(y, y', \ldots\ldots, y^{(k)}, t) = 0, \quad t \in I$$

y: FUNZIONE

$y^{(k)}$: DERIVATA K-ESIMA

t: VARIABILE INDIPENDENTE

I: SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$

E → ESPRESSIONE CHE CONTIENE $y = y(t)$

ALTRE NOTAZIONI ...

$$y' = \frac{dy}{dt} \; ; \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2} \; ; \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}$$

- COS'È UNA SOLUZIONE?

TROVARE UNA FUNZIONE $y = y(t)$ t.c.

$$\boxed{E(y(t), y'(t), \ldots, y^{(k)}(t), t) = 0 \qquad \forall t \in I}$$

"ORDINARIE" PER DISTINGUERLE DA EQ. DIFF. ALLE DERIVATE PARZIALI

ESEMPI:

(I) $y'' + y = 0$ È UGUALE A $y''(x) + y(x) = 0$
$y''(t) + y(t) = 0$

(II) $y'' + y = \cos(t)$ È UGUALE A $y''(t) + y(t) = \cos(t)$

SIA I CHE II SONO EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE

$$\boxed{\text{L'ORDINE È L'ORDINE MASSIMO DELLE DERIVATE COINVOLTE NELL'EQUAZIONE}}$$

LA STRUTTURA È SEMPRE DEL TIPO:

$E(y, y', y'', t) = 0$ (NELLA II LA t È ESPLICITA)

NOTIAMO CHE

$\begin{cases} y_1 = \cos(t) \\ y_2 = \sin(t) \end{cases}$ SONO SOLUZ. DI I CON $I = \mathbb{R}$

PERCHÈ $y_1'(t) = -\operatorname{sen} t$ e $y_1'' = -\cos(t)$

e SOSTITUISCO:

$y_1''(t) + y(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0$, VERO $\forall t \in \mathbb{R}$

STESSA COSA CON y_2

MENTRE PER IL CASO II, NON SONO SOLUZIONI...

$-\cos(t) + \cos(t) \neq \cos(t) \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

NON TUTTE LE EQ. DIFF. HANNO SOLUZIONI

ESEMPIO

$(y')^2 + 1 = 0 \qquad I \subseteq \mathbb{R}$

NON HA SOLUZIONI PERCHÈ NON C'È UNA FUNZ. $y: I \to \mathbb{R}$ CHE SODDISFA L'EQUAZIONE

DOMANDE DA FARE SULLE SOLUZIONI:

- ESISTENZA
- UNICITÀ
- MOLTEPLICITÀ
- SOLUZIONI ESPLICITE (SVOLGIMENTO e RICERCA)

ESEMPIO (MALTHUS)

$y' = ky$ $\qquad k \in \mathbb{R}$ SE NON SPECIFICATO

▷ PRIMO ORDINE
▷ VARIABILE INDIP. NON SPECIFICATA, SOLITAMENTE "t"

$$y'(t) = k\,y(t)$$

MOLTIPLICO PER e^{-kt} E SPOSTO A SINISTRA

$y' e^{-kt} - k y e^{-kt} = 0$ E QUESTO È COME DIRE:

$\frac{d}{dt}\left(y e^{-kt}\right) = 0$ MA SAPPIAMO CHE FUNZ. COST. HANNO DERIVATA NULLA, QUINDI

$y(t) = c \cdot e^{-kt}$, $c \in \mathbb{R}$ E $\forall c$ SONO TUTTE SOLUZ.

$\underbrace{(c\,e^{-kt})'}_{y'} = k\,\underbrace{c e^{kt}}_{y}$ $\qquad \forall t \in I \subset I = \mathbb{R}$

ABBIAMO TROVATO CHE $y = c \cdot e^{kt}$ È UNA ESPRESS. CHE INGLOBA TUTTE LE SOLUZIONI POSSIBILI.

ESISTE UN MODO PER SELEZIONARE UNA SLZ. PARTICOLARE

SÌ $\Rightarrow$ PROBLEMA AI VALORI INIZIALI
" " DI CAUCHY

ESEMPIO (PC) $\begin{cases} y' = y & \text{EQ. DIFFERENZIALE} \\ y(0) = 1 & \text{CONDIZIONE INIZIALE} \end{cases}$

DEFINIZIONE ALTERNATIVA DELLA f ESPONENZIALE

SOLUZIONE: CASO $k = 1$ DELL'ESEMPIO DI MALTHUS

SLZ. GENERALE $y(t) = c e^{t}$, $c \in \mathbb{R}$

$1 = y(0) = c e^{0} = c \Rightarrow c = 1$ QUINDI

$y(t) = e^{t}$ È L'UNICA SOLUZ. AL PROBLEMA DI CAUCHY

CONCLUDENDO

$y = e^t$ È L'UNICA FUNZ. DERIVABILE t.c. $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

QUESTI PROBLEMI DI ORDINE 1 SONO CASI PARTICOLARI DEL TIPO

$$\boxed{(1)\ y' = f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{VARIABILE INDIPEND.}}}{x}, \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{FUNZ. INCOGNITA}}}{y})}$$

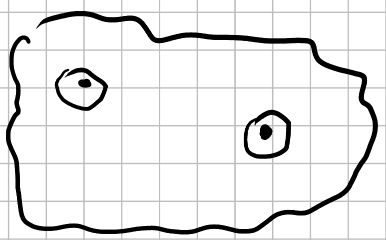
* => EQ. DI 1 ORDINE IN FORMA NORMALE

PER COEFF. DI y' HO 1 *

DEFINIZIONE DI SOLUZIONE:

SIA $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω "APERTO"

APERTO = $\forall x \in \Omega$ $\exists$ UN DISCO CENTRATO IN x TUTTO CONTENUTO IN Ω, $D_x \subset \mathbb{R}$



Ω

UNA FUNZ $y : I \to \mathbb{R}$ È UNA SOLUZ. DI $y' = f(x, y)$ SU I SE:

- y È DERIVABILE SU I
- $(x, y(x)) \in \Omega$, $\forall x \in I$
- $y'(x) = f(x, y(x))$, $\forall x \in I$

SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ È UN PUNTO NOTO NEL PROBLEMA

SIA QUINDI $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

DICIAMO CHE $y = y(x_0)$ È SOLUZ DI (PC) SE:

- $y = y(x)$ SODDISFA $y' = f(x, y)$ SU QUALCHE INTERVALLO
- $x_0 \in I$
- $y(x_0) = y_0$

SE f SODDISFA ALCUNE IPOTESI $\Longrightarrow$ ESISTE ED È UNICA LA SOLUZIONE DI (PC)

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE CALCOLO INTEGRALE RIVISITATO

SIA $f: [a,b]$, $\forall x_0 \in [a,b]$, CONTINUA IN $[a,b]$

ALLORA:

$$y(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0 \quad , \forall x \in [a,b]$$

$\boxed{:=}$ => DEFINIZIONE

È L'UNICA (2) SOLUZIONE (1) DEL PC

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DIM:

(1) SOLUZ.

$$\underbrace{\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0 \right)'}_{y(x_0)} = f(x) \quad ✓$$

MA ANCHE $y(x_0) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt}_{0} + y_0 \Rightarrow y(x_0) = y_0$

② UNICITÀ

SUPPONIAMO

$$\begin{cases} y_1' = f(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y_2' = f(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SOTTRAENDO OTTENGO

$$\begin{cases} (y_1 - y_2)' = f(x) - f(x) = 0 \\ (y_1 - y_2)(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{PONGO } M = y_1 - y_2 \quad \begin{cases} M' = 0 \\ M(x_0) = 0 \end{cases}$$

QUINDI $M(x) = c$ ($M' = 0$ CIOÈ COSTANTE)

e $M(x) = 0$ QUINDI $c = 0$ $\forall x \in [a,b]$

CIOÈ $\boxed{y_1 = y_2}$