Sviluppi in serie di Taylor con c=0 delle funzioni elementari		
Funzione	Sviluppo in forma troncata	Sviluppo in forma compatta
$\sin(x)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7), \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + o(x^8), \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5), \quad \lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$	
$\sec(x)$	$\sec(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + o(x^8), \quad \lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$	
$\arcsin(x)$	$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + o(x^9), \quad \lvert x\rvert < 1$	
$\arccos(x)$	$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 + o(x^9), \quad \lvert x\rvert < 1$	
$\arctan(x)$	$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + o(x^9), \quad \lvert x\rvert < 1$	
e^x	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5), \quad \lvert x\rvert < 1$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$(1+x)^\alpha$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3), \quad \lvert x\rvert < 1$	
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4), \quad \lvert x\rvert < 1$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6), \quad \lvert x\rvert < 1$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$	
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$	

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx}$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int f(x)\,dx = \int f(\underline{g(t)}) \cdot \underline{g'(t)\,dt}$$

$$x = g(t)$$

$$dx = g'(t)\,dt$$

INTEGRAZIONE FUNZIONI FRATTE

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{P_2(x)}dx$$

Integrale fondamentale	Integrale in forma generalizzata
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{R},\, n \neq -1$	$\int f(x)^n \cdot f'(x) \, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{R},\, n \neq -1$
$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int f(x)^{-1} \cdot f'(x) \, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$\int \sin[f(x)] \cdot f'(x) \, dx = -\cos[f(x)] + c$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	$\int \cos[f(x)] \cdot f'(x) \, dx = \sin[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2[f(x)]} \cdot f'(x) \, dx = \tan[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2[f(x)]} \cdot f'(x) \, dx = -\cot[f(x)] + c$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int e^x \, dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x) \, dx = \arcsin[f(x)] + c$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + c$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x) \, dx = \arccos[f(x)] + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$	$\int \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x) \, dx = \arctan[f(x)] + c$

Tabella delle derivate fondamentali

Funzione	Derivata
$y = c$ (costante)	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^{\alpha}$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{m-n}}}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$
$f(x)$	$f'(x)$
$a\, f(x)+b\, g(x)$	$a\, f'(x)+b\, g'(x)$
$f(x)\, g(x)$	$g(x)\, f'(x)+f(x)\, g'(x)$
$f(x)\, g(x)\, h(x)$	$g(x)\, h(x)\, f'(x)+f(x)\, h(x)\, g'(x)+$ $f(x)\, g(x)\, h'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$
$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}\left(\frac{g(x)\, f'(x)}{f(x)}+\log(f(x))\, g'(x)\right)$
$\log(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{g(x)\left(\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}\right)}{f(x)}$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\, f'(x)$
$a^{f(x)}$	$\log(a)\, a^{f(x)}\, f'(x)$
$\log(a^{f(x)})$	$\log(a)\, f'(x)$
$\frac{f(x)}{a^{g(x)}}$	$a^{-g(x)}\, f'(x)-\log(a)\, f(x)\, a^{-g(x)}\, g'(x)$
$f(g(x))$	$g'(x)\, f'(g(x))$

Tabella riassuntiva dei limiti notevoli

esponenziali e logaritmici

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

6) $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

7) $\lim_{x\to0}\lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lg_e a}$

8) $\lim_{x\to0}\frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e = \frac{1}{\ln a}$

9) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

10) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$

11) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{ax} = 1$

12) $\lim_{x\to0}x^r\lg_a x = 0 \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

13) $\lim_{x\to0}\frac{\lg_a x}{x^r} = 0 \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

14) $\lim_{x\to+\infty}x^r a^x = \lim_{x\to+\infty}a^x \qquad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

15) $\lim_{x\to-\infty}|x|^r a^x = \lim_{x\to-\infty}a^x \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

16) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^r} = \lim_{x\to+\infty}a^x \qquad \forall r\in R^+$

17) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}a^x \qquad \forall r\in R^+$

18) $\lim_{x\to-\infty}e^x x^r = 0 \qquad \forall r\in R^+$

goniometrici

1) $\lim_{x\to0}\frac{sen\ x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to0}\frac{sen\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{tg\ x}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to0}\frac{tg\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

6) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\ x}{x} = 1$

8) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

9) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\ x}{x} = 1$

10) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

11) $\lim_{x\to0}\frac{senh\ x}{x} = 1$

12) $\lim_{x\to0}\frac{settsenh\ x}{x} = 1$

13) $\lim_{x\to0}\frac{tgh\ x}{x} = 1$

14) $\lim_{x\to0}\frac{settgh\ x}{x} = 1$

15) $\lim_{x\to0}\frac{x-sen\ x}{x^3} = \frac{1}{6}$

16) $\lim_{x\to0}\frac{x-arctg\ x}{x^3} = \frac{1}{3}$

Se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è convergente, allora si *deve avere*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Considerazioni generali sulle serie a termini non negativi

- **1** $\{\forall\, k \ge 1 \ a_k \ge 0\} \Leftrightarrow \{$ la successione s delle somme parziali è monotòna non decrescente$\}$
  Infatti per ogni $k \ge 1$ si ha $s_k = s_{k-1} + a_k$ quindi $\{a_k \ge 0\} \Leftrightarrow \{s_k \ge s_{k-1}\}$

- **2** $\{\forall\, k \ge 1 \ a_k \ge 0\} \Rightarrow \{\ \{$ la successione s è limitata$\} \Leftrightarrow \{$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge $\}\ \}$

  Infatti, per **1**, se gli a_k sono ≥ 0 per $k \ge 1$ deduciamo che la la successione s è monotòna non decrescente. Per un teorema fondamentale di Analisi A, una successione monotòna ha limite finito se e solo se è limitata. Ma, per la definizione di serie, dire che s ha limite finito coincide col dire che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

Criterio del confronto(versione-base). Siano a e b due successioni tali che

$$0 \le a_k \le b_k \qquad \forall\, k \in I\!N \tag{3}$$

Allora

$$\{ \text{ la serie. } \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge } \} \Rightarrow \{ \text{ la serie} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge } \}.$$

Criterio del rapporto asintotico. Sia a una successione *a termini positivi* (cioè tale che $a_k > 0$ per ogni $k \in I\!N$). Consideriamo il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}. \tag{8}$$

Si ha allora

$$\textbf{se} \text{ il limite (8) } \begin{cases} \text{è minore di 1} & \textbf{allora} \text{ la serie} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge} \\ \text{è maggiore di 1} & \textbf{allora} \text{ la serie} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ diverge} \\ \text{è uguale a 1, oppure non esiste} & \textbf{allora} \text{ il criterio è inefficace.} \end{cases}$$

CONVERGENZA ASSOLUTA

Teorema(della convergenza assoluta). Sia a una successione di numeri reali. **Se** la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \tag{10}$$

è convergente, **allora** anche la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{11}$$

converge.

Teorema di Leibniz(sulle serie a termini di segno alterno). Sia p una successione di numeri reali **monotòna non crescente**, cioè verificante

$$p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq .... \geq p_k \geq ... \tag{15}$$

e **infinitesima**, cioè verificante

$$\lim_{k \to +\infty} p_k = 0. \tag{16}$$

Costruiamo una nuova successione a_k come

$$a_k = (-1)^k p_k. \tag{17}$$

Allora (tesi): la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{18}$$

converge.

- TABELLA DEGLI INTEGRALI IMPROPRI NOTEVOLI

Caso 1: integrali di potenze con intervallo di integrazione [0,α)

Sia $\alpha > 0$. Allora

$$\int_0^\alpha \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \geq 1 \end{cases}$$

Possiamo generalizzare il precedente integrale con:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p<1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \geq 1 \end{cases}$$

Caso 2: integrali di potenze con intervallo di integrazione [α,+∞)

Sia $\alpha > 0$. Allora:

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p>1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$$

Caso 3: integrale improprio con potenza e logaritmo in [0,α)

Sia $0 < \alpha < 1$. Allora

$$\int_0^\alpha \frac{1}{x^a|\ln(x)|^b} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \begin{cases} a<1 & \forall b \in \mathbb{R} \\ a=1 & b>1 \end{cases} \\ \text{diverge} & \text{se } \begin{cases} a>1 & \forall b \in \mathbb{R} \\ a=1 & b \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Caso 4: Integrale improprio con potenza e logaritmo in [α,+∞)

Sia $\alpha > 1$. Allora:

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b(x)}dx \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \begin{cases} a>1 \text{ e } b \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ a=1 \text{ e } b>1 \end{cases} \\ \text{diverge} & \text{se } \begin{cases} a<1 \text{ e } b \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ a=1 \text{ e } b \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad \begin{cases} l < 1 \quad allora \displaystyle\sum_{1}^{+\infty} a_n \; converge \\ l > 1 \quad allora \displaystyle\sum_{1}^{+\infty} a_n \; diverge \end{cases}$$

1 Criterio di confronto tra serie e integrale

Teorema 1 *Sia* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione positiva e decrescente. Allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1.1}$$

e l'integrale

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx, \tag{1.2}$$

convergono o divergono simultaneamente.

Tabella $(\varepsilon_n \to 0)$

1) $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
2) $\arcsin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
3) $\tan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
4) $\arctan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
5) $1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{{\varepsilon_n}^2}{2}$
6) $\sinh \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
7) $\tanh \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$
8) $\cosh \varepsilon_n - 1 \sim \frac{{\varepsilon_n}^2}{2}$
9) $(1 + \varepsilon_n)^{1/\varepsilon_n} \sim \mathrm{e}$
10) $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$
11.a) $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
11.b) $\log a_n \sim a_n - 1 \quad [\text{se } a_n \to 1]$
12.a) $(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\varepsilon_n \quad [\text{con } \alpha \in \mathbb{R}]$
12.b) $(1 + \varepsilon_n)^{a_n} - 1 \sim a_n\varepsilon_n \quad [\text{se } a_n\varepsilon_n \to 0]$
13) $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ (de Moivre-Sterling)
14) $\log n! \sim n \log n$
15) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n$ (Eulero-Mascheroni)