ULTERI RISULTATI SU SUCCESSIONI

OSSERVAZIONE: SAPENDO $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}^n$ ALLORA OGNI SUCC. $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ HA COME LIMITE $\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = \ell$

INFATTI: SE $\lim_{n\to\infty} X_n = \ell \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists N_0\in\mathbb{N}$ t.c. $\forall n>N_0 \quad \|X_n-\ell\|<\varepsilon$ (DEF. LIMITE)

ALLORA SE $\underline{(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (X_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ POSSO AVERE $K_0\in\mathbb{N}$ t.c. $n_k>n_0 \ \forall k>K_0$. ALLORA $\forall k>K_0$ DICO $\|X_{n_k}-\ell\|<\varepsilon$

↳ DEF. DI SOTTOSUCCESSIONE

- CARATTERIZZAZIONE DI LIM USANDO LE SUCCESSIONI

USANDO $r>0$ ARBITRARIO NELLE DEF. DI $\bar{A}$, $F_r(A)$, $Acc(A)$ e SCEGLIENDO UNA SUCC. $r_n\to 0^+$, $r_n>0$ $(n\to\infty)$ POSSIAMO CARATTERIZZARE:

- $x_0 \in \bar{A} \iff \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n\in A$, $x_n\to x_0$
- $x_0 \in F_r(A) \iff \exists$ DUE SUCCESSIONI $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n\in A$, $y_n\in A^c$ $\forall n\in\mathbb{N}$ t.c. $\begin{cases}\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\\ \lim_{n\to\infty} y_n = x_0\end{cases}$
- $x_0 \in Acc(A) \iff \exists\ (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n\in A-\{x_0\}$ e t.c. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

SIA $A\subseteq\mathbb{R}^m$, $A\neq\emptyset$, $x_0\in\mathbb{R}^m$, $f:A\to\mathbb{R}^k$:

1) $X_0\in Acc(A)$, $\ell\in\mathbb{R}^k$ ALLORA $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \begin{cases}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\ell \quad \text{PER OGNI SUCC.}\\ (X_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A-\{x_0\} \text{ t.c.}\\ \lim_{n\to\infty} X_n = X_0\end{cases}$

2) SE $X_0\notin Acc(A)\wedge A$ ALLORA
↳ f è CONTINUA IN $x_0 \iff \begin{cases}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0) \quad \forall \text{ succ. } (X_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A\\ \text{t.c. } \lim_{n\to\infty} X_n = X_0\end{cases}$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI WEIESTRASS:

DIMOSTRIAMO CHE $\exists y\in A$ t.c. $f(z)\le f(y)\ \forall z\in A$ (PER x è IDENTICA)

IN VIRTU' DELLE PRECEDENTI PROPOSIZIONI, $\exists\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ t.c. $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \sup f(A)$ "SUCC. MASSIMIZZANTE"

A LIMITATO $\exists\ B(0,R)$ CON $R>0$ GRANDE ABBASTANZA $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset B(0,R)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ È LIMITATA.

USIAMO IL TEO. DI BOLZANO-WEIESTRASS: $\exists$ UNA SOTTOSUCC. $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\subset (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$ PER QUALCHE $y\in\mathbb{R}^n$

CIOÈ $y\in Acc(A)$, MA VISTO CHE $A=\bar{A}$ (CHIUSO) ALLORA $y\in Acc(A)\subseteq A \Rightarrow y\in A$

PER CONCLUDERE, USANDO LA CONTINUITÀ: $f(y) \overset{\text{continuità}}{=} \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) \overset{\text{sottosucc.}}{=} \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \sup f(A)$

$\Rightarrow f(y)=\sup f(A)$ CIOÈ $\sup f(A) = \max f(A)$
$\Rightarrow \forall z\in A,\ f(z)\le f(y) \to$ DALLA DEF. DI SUP. □

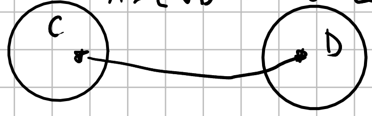
NE SEGUE... $f(A)$ È UN INTERVALLO, NEL CASO $f:A\to\mathbb{R}$ CON $A\subseteq\mathbb{R}^n$ OPPORTUNO.

OSSERVAZIONE: SE A È COMPATTO e f È CONTINUA, PER TEO. DI WEIESTRASS $\begin{pmatrix}a=f(x)\\ b=f(y)\end{pmatrix} \Rightarrow a\le f(z)\le b \quad \forall z\in A$

INSIEME CONNESSO:

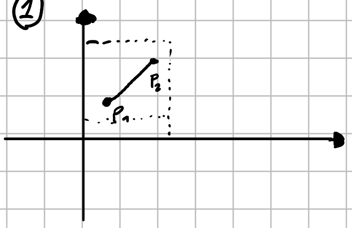
SIA $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $A\neq\emptyset$. DICIAMO A CONNESSO (PER ARCHI) SE PER OGNI $x,y\in A$ $\exists\ \gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ t.c. $\gamma(a)=x$, $\gamma(b)=y$, $\gamma(t)\in A$ $\forall t\in[a,b]$ e γ CONTINUA

ES: $A = C \cup D$ NON È CONNESSO



ES: ① $A = [0,1] \times [1,2] \subset \mathbb{R}^2$ È CONNESSO
② $B = (x_0, r) \subset \mathbb{R}^N$ È CONNESSO

①



$$P_1 = \left(\overset{x_1}{\tfrac{1}{5}}, \overset{y_1}{\tfrac{6}{5}}\right) \qquad P_2 = \left(\overset{x_2}{\tfrac{4}{5}}, \overset{y_2}{\tfrac{8}{5}}\right)$$

$\gamma(t) = P_1 + t(P_2 - P_1)$ $\quad t \in [0,1] \rightarrow (t x_2 + (1-t)x_1,\ t y_2 + (1-t) y_1)$
CHE È CONTINUA

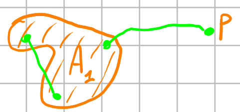
NOTAZIONE: DATI $x, y \in \mathbb{R}^N$ CHIAMIAMO SEGMENTO DI ESTREMI x e y: $[x,y] = \{ t y + (1-t)x,\ t \in [0,1] \}$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $A \neq \emptyset$, A SI DICE CONVESSO SE $\forall x, y \in A$, SI HA $[x,y] \subset A$
ES: $B(x_0, r)$ È CONVESSO

$A \subseteq \mathbb{R}^N$, $A \neq \emptyset$, È STELLATO SE

PROPOSIZIONE: A CONVESSO $\Rightarrow$ CONNESSO, A STELLATO $\Rightarrow$ CONNESSO

ES:



- $A = A_1 \cup \{P\}$, NÈ CONNESSO NÈ CONVESSO
- A_1 È CONNESSO, NON CONVESSO
- A È LIMITATO
- $\bar{A} = \bar{A}_1 \cup \{P\}$
- $P \in \bar{A}$, MA $P \notin Acc(A)$ (P È PUNTO ISOLATO)

GENERALIZZAZIONE PROPRIETÀ VALORI INTERMEDI

OSS: $I \subseteq \mathbb{R}$ È INTERVALLO $\Longleftrightarrow$ $x, y \in I$, $x < y \Rightarrow t \in I$ $\forall t$ t.c. $x < t < y$

TEOREMA: HP: $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $A \neq \emptyset$, CONNESSO. SIA $f: A \to \mathbb{R}$. ALLORA f È INTERVALLO

DIM: SIANO $a, b \in f(A) \Longrightarrow \exists\, x, y \in A$ t.c. $f(x) = a$ e $f(y) = b$ SUPPONIAMO CHE $a < b$ DIMOSTRIAMO CHE
$\forall c \in \mathbb{R}$ t.c. $a < c < b$ $\exists z \in A$ t.c. $f(z) = c$ STRATEGIA DIMOSTRATIVA

A CONVESSO e $x, y \in A \Rightarrow \exists\, \gamma: [0,1] \to A$ t.c. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $\gamma(t) \in A$ $\forall t \in [0,1]$ e CONTINUA SU $[0,1]$

DEFINISCO $g(t) \overset{def}{=} f(\gamma(t))$ SU $[0,1]$ CHE È CONTINUA (COMPOSIZ. DI f CONTINUE)

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(0) = f(\gamma(0)) = f(x) = a$, $g(1) = f(\gamma(1)) = f(y) = b$.

APPLICHIAMO e g LE PROP DEI VALORI INTERMEDI: $\exists \bar{t} \in [0,1]$ t.c. $c = \underbrace{f(\gamma(\bar{t}))}_{g(\bar{t})}$ e LA DIM È COMPLETA CON $z = \gamma(\bar{t})$.

QUINDI SE f È CONTINUA e A È SIA COMPATTO CHE CONNESSO ALLORA ($f: A \to \mathbb{R}$) ABBIAMO CHE
$f(A) = [a, b]$ DOVE $a = \sup f(A) = \max f(A)$
$b = \inf f(B) = \min f(B)$

DERIVATA DIREZIONALE

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathring{A}$ (PUNTO INTERNO) $f: A \to \mathbb{R}$, CON $v \in \mathbb{R}^n$ FISSATO

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

$x_0 + tv \in B(x_0, r)$ PER t PICCOLO

OPPORTUNO

PRENDIAMO $r > 0$ t.c. $B(x_0, r) \subseteq A$ (SI PUÒ FARE PERCHÉ $x_0 \in \mathring{A}$). SE $|t| \leq \frac{r}{\|v\|}$, $v \neq (0,0,\dots,0)$ V. NULLO ALLORA

$x_0 + tv \in B(x_0, r)$ PERCHÉ $\|x_0 - (x_0 + tv)\| = \|tv\| = |t| \cdot \|v\| < r \implies |t| < \frac{r}{\|v\|}$

ALLORA DEFINISCO $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ "DERIVATA DIREZIONALE DI f NEL PUNTO x_0 LUNGO LA DIREZIONE v"

SE $v = (0, \dots, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} 0$$

TEOREMA DI FERMAT

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ $f: A \to \mathbb{R}$, SIA $x_0 \in \mathring{A}$ UN PUNTO DI MAX $\nearrow$ MIN LOCALE PER f SE:

- MIN: $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U_{x_0}$; $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in U_{x_0}$ } U_{x_0} INTORNO DI x_0 e $U_{x_0} \subset A$

e $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ $\exists$ $(v \neq 0) \implies \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE:

DEFINISCO $g(t) \overset{DEF}{=} f(x_0 + tv)$ NOTA: $|t| < \frac{r}{\|v\|} \implies x_0 + tv \in B(x_0, r) \subseteq A \leftarrow x_0 \in \mathring{A}$

r DEVE ESSERE SCELTO OPPORTUNAMENTE

SE x_0 È MAX LOCALE DI $f(x)$, ALLORA $t=0$ È MAX LOCALE PER g: $g(t) \leq g(0)$ $\forall t$ IN UN INTERVALLO OPPORTUNO DI $0 \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$

e DAL TEO. DI FERMAT A UNA VARIABILE: $0 = g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \overset{\text{PER DEF}}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ □

DERIVATE PARZIALI:

CONSIDERIAMO I VETTORI DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$: $e_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ e DEF. DERIV. DIREZ. $v = e_j$

J-ESIMA

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + e_j) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0)_1 + (x_0)_2 + \dots + (x_0)_j + t + \dots (x_{0n})) - f(x_0)}{t}$$

CHE CORRISPONDE A DERIVARE f IN SENSO ORDINARIO RISPETTO ALLA VARIABILE x_j LASCIANDO TUTTE LE ALTRE VARIABILI "COSTANTI"

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \to$ DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A x_j, NEL PUNTO x_0

ES: $f(x, y) = x\,y$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$

ES: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0)$

TEOREMA DI SCHWARTZ:

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO. SIA $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e t.c. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ CONTINUE, ALLORA SONO UGUALI IN x_0