CALCOLO DIFFERENZIALE

NORMA e PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}^N$

- $x := (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $x, y \in \mathbb{R}^N$ (VETTORI N-DIMENSIONALI)
  - SOMMA : $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N)$
  - PROD. PER SCALARE : $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  - PROD. SCALARE : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$ (IL RISULTATO $\in \mathbb{R}$)

PROPOSIZIONI RELATIVE AL PRODOTTO SCALARE:

- LINEARITÀ (A SX) : $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^N$
- SIMMETRIA : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$
- POSITIVITÀ : $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

DIMOSTRAZIONE LINEARITÀ:

$\langle ax + by, z \rangle = \sum_{j=1}^{N} (a x_j + b y_j) z_j = \sum_{j=1}^{N} a x_j z_j + \sum_{j=1}^{N} b y_j z_j = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$ $\square$ (STESSA DIM PER LINEARITÀ A DX)

NORMA DI VETTORE:

$x, y \in \mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

PROPRIETÀ:
1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (COME PROD. SCALARE)
2. $\|a x\| = |a| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ → DIM CON LA DISUG. DI CAUCHY-SCHWARZ ($|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$)

PER DIM DELLE GUARDARE GEO

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^N$

DATO $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, DEFINIAMO $r > 0$

$B(\bar{x}, r) := \{ y \in \mathbb{R}^N : \|\bar{x} - y\| < r \}$ (BOLLA CENTRATA IN $\bar{x}$ e DI RAGGIO r)

NOZIONE DI INTORNO:

SIA $\bar{x} \in U \in \mathbb{R}^N$. DICIAMO CHE U È INTORNO DI $\bar{x}$ SE ESISTE $r > 0$ t.c. $B(\bar{x}, r) \subseteq U$. (ANCHE $B(\bar{x}, r)$ È INTORNO DI r)

PUNTI INTERNI, ESTERNI e DI FRONTIERA

$A \subseteq \mathbb{R}^N$, $A \neq \emptyset$

- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO INTERNO DI A ($x \in \mathring{A}$, $\mathring{A}$ = INSIEME PUNTI INTERNI DI A)
  SE $\exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subseteq A$
- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO ESTERNO DI A ($x \in A^c$, COMPLEMENTARE DI A)
  SE $\exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \cap A = \emptyset$
- $x \in \mathbb{R}^N$ SI DICE PUNTO DI FRONTIERA DI A ($x \in \partial A$ ($F_r(A)$))
  $\forall r > 0$ SI HA CHE $\begin{cases} B(x, r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$

AFFERMAZIONE: $\mathring{A} = \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R \}$

DIMOSTRIAMO CHE $\forall x \in \mathbb{R}^N$ t.c. $\|x\| < R$ È UN PUNTO INTERNO : SIA x t.c. $\|x\| < R$

DEFINIAMO $r := R - \|x\|$ e DIMOST. CHE $B(x, r) \subseteq \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R \}$

PRENDO UN GENERICO $y \in B(x, r) \rightarrow \|y\| = \|y - x + x\| \overset{\text{DISUG. TRIANG.}}{\leq} \underbrace{\|y - x\|}_{< r} + \|x\| \leq r + \|x\| = R - \cancel{\|x\|} + \cancel{\|x\|} \Rightarrow \|y\| < R$

PUNTI DI ACCUMULAZIONE, CHIUSURA e ISOLATI

- x è punto **ACCUMULAZIONE** di A se $\forall r>0$ si ha che $B(x,r)\setminus\{x\}\cap A\neq\emptyset$
  e scriviamo $x\in Acc(A)$ (insieme dei punti di acc. di A) (x può non appartenere ad A)

- x è un punto della **CHIUSURA** di A se $(x\in\bar{A})$, $\forall r>0$ si ha che $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$ ($A\subseteq\bar{A}$ (chiusura di A))

- $x\in A$ è punto **ISOLATO** se $\exists r>0$ t.c. $B(x,r)\cap A=\{x\}$ (solo x). NOTA: $\bar{A}=\mathring{A}\cup\partial A$

POSSIAMO VERIFICARE, SE $\|x\|=R$

$$\forall r>0\begin{cases}B(x,r)\cap A\neq 0 & ①\\ B(x,r)\cap A^c\neq 0 & ②\end{cases}.$$

PROVIAMO LA 2: RICORDO $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|\quad\forall a\in\mathbb{R}$

SELEZIONO $a=\dfrac{R+\frac{r}{2}}{R}$ ($r>0$ ARBITRARIO), INOLTRE $y=ax$ con $\|x\|=R$

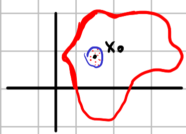
DIMOSTRO $y\in B(x,r)\cap A^c$: $\|y\|=\|ax\|=|a|\cdot\|x\|=\dfrac{R+\frac{r}{2}}{\cancel{R}}\cdot\cancel{R}=R+\frac{r}{2}>r\Rightarrow y\in A^c$

INOLTRE: $\|x-y\|<r\rightarrow\|x-y\|=\|x-ax\|=\|(1-a)\cdot x\|=|1-a|\cdot\|x\|=\left|1-\dfrac{R+\frac{r}{2}}{R}\right|\cdot R=\left|\dfrac{\cancel{R}-\cancel{R}+\frac{r}{2}}{\cancel{R}}\right|\cdot\cancel{R}\ \frac{r}{2}<r.\quad y\in B(x,r)$

NOTA: x ARBITRARIO t.c. $\|x\|=R$ e r ARBITRARIO

LIMITE e CONTINUITÀ

$A\subseteq\mathbb{R}^N$, $f:A\to\mathbb{R}^k$, $N,k\in\mathbb{N}$, $x_0\in Acc(A)$, $\ell\in\mathbb{R}^k$



POSSO AVVICINARMI ARBITRARIAMENTE A x_0, CON BOLLE CONTENENTI PUNTI $\in A$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell\ \text{ se }\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \text{t.c.}\ \|f(x)-\ell\|<\varepsilon\quad\forall x\in A-\{x_0\}\ \text{t.c.}\ \|x-x_0\|<\delta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{AVENDO } x_0\in A,\ f \text{ è continua in } x_0 \text{ se:}\\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ \text{t.c.}\ \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon\quad\forall x\ \text{t.c.}\ \|x-x_0\|<\delta\end{array}}$$

PROPOSIZIONE: SIA $A\subseteq\mathbb{R}^N$, $f:A\to\mathbb{R}^k$ $(k>1)$ cioè $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_k(x)\end{pmatrix}$

1) $x_0\in Acc(A)$ sia $\ell=\begin{pmatrix}\ell_1\\ \vdots\\ \ell_k\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^k$

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell\iff\begin{cases}\lim_{x\to x_0}f_1(x)=\ell_1\\ \vdots\\ \lim_{x\to x_0}f_k(x)=\ell_k\end{cases}$

2) $x_0\in A$, f è continua in $x_0\iff$

- $\begin{cases}f_1(x) \text{ è continua in } x_0\\ \vdots\\ f_k(x) \text{ è continua in } x_0\end{cases}$

DIM 1 ASSUMO $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell\Rightarrow\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ \text{t.c.}\ \|f(x)-\ell\|<\varepsilon\ \forall x\in A-\{x_0\}\ \text{t.c.}\ \|x-x_0\|<\delta}$ DEFINIZIONE

CIOÈ $|f_i(x)-\ell_i|\leq\sqrt{(f_1(x)-\ell_1)^2+\ldots+(f_k(x)-\ell_k)^2}<\varepsilon\quad\forall i=1,\ldots,k$ CIOÈ: $\displaystyle\lim_{x\to x_0}f_i(x)=\ell_i$

e D'ALTRA PARTE $\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_i>0\ \text{t.c.}\ |f_i(x)-\ell_i|<\varepsilon\ \forall x\ \text{t.c.}\ \|x-x_0\|<\delta_i\ \text{con}\ x\in A-\{x_0\}}$

DEFINISCO $\delta:=\min\{\delta_1,\ldots,\delta_k\}$

$\|f(x)-\ell\|\ \sqrt{(f_1(x)-\ell_1)^2+\ldots+(f_k(x)-\ell_k)^2}<\sqrt{\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^2}=\sqrt{k}\cdot\varepsilon\quad\forall x\in A-\{x_0\}$ t.c. $\|x-x_0\|<\delta$ $\square$

DIM 2 È UGUALE

PROPRIETÀ DEI LIMITI

PROPOSIZIONE: $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in Acc(A)$.

HP: $l, m \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$

ALLORA

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$

2) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$

3) $m \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

PROPRIETÀ CONTINUITÀ (f e g CONTINUE IN x_0)

$\left.\begin{array}{l} \text{i) } f+g \\ \text{ii) } f \cdot g \\ \text{iii) } g(x) \neq 0 \to \frac{f}{g} \end{array}\right\}$ CONTINUE

PROPOSIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq \mathbb{R}^K$, $N, K, M \in \mathbb{N}$

SIA: $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}^M$ e SIA $x_0 \in A$ e PONIAMO $y_0 := f(x_0)$. SE f È CONTINUA IN x_0 e $g(x)$ IN y_0

ALLORA: $g \circ f$ È CONTINUA IN x_0

PROPOSIZ: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in Acc(A)$, SIA $f: A \to \mathbb{R}^K$

$\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = l \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = m \end{cases}$ $\boxed{l = m}$ UNICITÀ LIMITE

TEOREMA DEL CONFRONTO:

HP: • $A \subseteq \mathbb{R}^N$, e $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ CON $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

• $x_0 \in Acc(A)$, $l \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

$\boxed{\text{ALLORA } \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l}$

Restrizione di f su B

DATO $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq A$, $f: A \to \mathbb{R}^K$

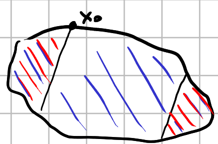
DEFINIAMO $f|_B : B \to \mathbb{R}^K$ COME

$f|_B(x) = f(x) \quad \forall x \in B$ "RESTRIZIONE DI f SU B"

PROPOSIZIONE:

HP: $x_0 \in Acc(A)$, $l \in \mathbb{R}^K$. SUPPONIAMO CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. SIA $x_0 \in Acc(B)$

TH: $\lim_{x \to x_0} f|_B(x) = l$



A B

CONTINUITÀ DI FUNZIONI:

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$, $p \in A$, DICIAMO CHE f È CONTINUA IN p SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\|f(x) - f(p)\| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ t.c. $\|x - p\| < \delta$

TEOREMA:

HP: $p \in Acc(A)$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$
TH: f È CONTINUA IN $p \iff \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

INSIEME APERTO e INSIEME CHIUSO

$A \in \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- x_0 è un punto INTERNO di A se $\exists r>0$, t.c. $B(x_0,r) \subseteq A$
- x_0 è un punto di FRONTIERA di A se $\forall r>0$: $\begin{cases} B(x_0,r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x_0,r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$
- x_0 è un punto DELLA CHIUSURA di A se $\forall r>0$ si ha $B(x_0,r) \cap A \neq 0$

$\rightarrow$ SEGUE CHE $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$
e SI VERIFICA:

$\bar{A} = \mathring{A} \cup F_r(A)$

$\bar{A} = A \cup A_{cc}(A)$

DEFINIZIONE: • $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è APERTO se $A = \mathring{A}$
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ è CHIUSO se $A = \bar{A}$

PROPOSIZIONE: A è APERTO $\Leftrightarrow$ A^c è CHIUSO
A è CHIUSO $\Leftrightarrow$ A^c è APERTO

PROPOSIZIONE: SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA e $c \in \mathbb{R}$
ALLORA : $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\}$ è APERTO
$B = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ è CHIUSO

DIM: SIA $x \in A$, APPLICO LA DEF. DI CONTINUITÀ : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall y$ t.c. $\|y-x\| < \delta$ VALE $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
ed EQUIVALENTEMENTE $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$. SCELGO $\varepsilon < c - f(x)$, QUINDI $\forall y$ t.c. $\|y-x\| < \delta$ VALE
$f(y) < f(x) + \varepsilon \leq f(x) + c - f(x) = c$ $\rightarrow$ $f(y) < c$ $\forall y$ t.c. $\|x-y\| < \delta$ CIOÈ $\forall y \in B(x,\delta)$ CIOÈ $B(x,\delta) \subseteq A$. HO TROVATO UNA BOLLA TUTTA CONTENUTA IN A

VISTO CHE x È ARBITRARIO e INTERNO, $\mathring{A} = A$.

DIM B È UGUALE.

CASI NOTEVOLI

$-\infty < a \leq L < +\infty$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA
$A = \{x \in \mathbb{R}^n : a < f(x) < b\}$ APERTO
$B = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq f(x) \leq b\}$ CHIUSO

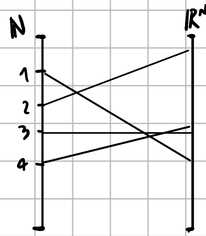
$\rightarrow$ IN GENERALE C, D APERTI $\rightarrow$ $C \cup D$ è APERTO, $C \cap D$ è CHIUSO
C, D CHIUSO $\rightarrow$ $C \cup D$ è CHIUSO, $C \cap D$ è CHIUSO

• INSIEMI LIMITATI:
SIA $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. DICIAMO A LIMITATO SE $A \subseteq B(0,R)$, $R > 0$ ABBASTANZA GRANDE.

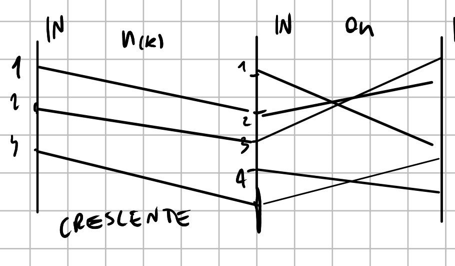
SUCCESSIONI IN R^N

DEF: $a_n : n \in \mathbb{N} \rightarrow a_n \in \mathbb{R}^n$ ES: $a_n = (2^{-n}, \frac{1}{n}, 1)$

DEF: DATA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (INSIEME DEI PUNTI DELLA SUCC) $\subset \mathbb{R}^n$ CONVERGE A $\ell \in \mathbb{R}^n$ SE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 > 0$ t.c. $\forall n > n_0$ $\|a_n - \ell\| < \varepsilon$



SIA $n(k)$ UNA FUNZIONE CRESCENTE da $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ CIOÈ $n(k+1) > n(k)$ ALLORA $a_{n_k} := a_{n(k)}$



UNA SOTTOSUCCESSIONE è UNA SUCCESSIONE COSTRUITA DALL' ORIGINALE CON DEI FILTRI

COMPATTEZZA:

DEF: SIA $K \subset \mathbb{R}^n$. K È COMPATTO SE DA OGNI FAMIGLIA DI APERTI $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ t.c. $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ ("COPERTURA APERTA DI K") È POSSIBILE ESTRARRE UNA "SOTTOCOPERTURA FINITA" $O_1, O_2 \dots O_N \subset \{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ t.c. $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} O_i$

TEOREMA DI HEINE-BOREL

HP: $K \subset \mathbb{R}^n$

TH: K È COMPATTO $\Longleftrightarrow$ CHIUSO E LIMITATO

COROLLARIO I: $K \subset \mathbb{R}^n$ COMPATTO. ALLORA OGNI SOTTOINSIEME K_∞ INFINITO DI K HA ALMENO UN PUNTO DI K CHE È DI ACCUM. PER K_∞

DIM:

SE NESSUN PUNTO DI K È DI ACCUMULAZIONE PER K_∞ $\forall x \in K$ È IL CENTRO DI UNA BOLLA $B(x, r_x)$ CONTENENTE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞ (x SE $x \in K_\infty$). ALLORA $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ E ALLO STESSO TEMPO NON È POSSIBILE ESTRARRE UNA SOTTOCOPERTURA FINITA (DATO CHE K_∞ È UN INSIEME INFINITO E CIASCUN $B(x, r_x)$ CONTIENE AL PIÙ UN PUNTO DI K_∞).

COROLLARIO II: OGNI SOTTOINSIEME INFINITO E LIMITATO DI $\mathbb{R}^n$ HA ALMENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE

DIM:

SIA K_∞ TALE INSIEME: DATO CHE È LIMITATO: $K_\infty \subset \overline{B(0,R)}$. DEFINISCO $K = \overline{B(0,R)}$ E VISTO CHE K È COMPATTO APPLICO COROLLARIO I E $\exists$ PUNTO DI ACC. DI K_∞

COROLLARIO III: K_∞ SOTTOIN. ∞ DI $\mathbb{R}^n$ E LIMITATO ($\exists$ PUNTO ACC. y), ALLORA $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_\infty$ t.c. $\lim_{n \to \infty} x_n = y$

DIM:

DATO $y \in Acc(K_\infty) \Rightarrow \forall r > 0$, $B(y,r) \setminus \{y\} \cap K_\infty \neq \emptyset$. PER FINI DIMOSTRATIVI, PRENDO $r = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \in B(y, \frac{1}{n}) \setminus \{y\} \cap K_\infty$ E INOLTRE $\|x_n - y\| < \frac{1}{n}$ (EQUIVALENTE A $x_n \in B(y, \frac{1}{n})$) CIOÈ $\lim_{n \to \infty} x_n = y$

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS:

OGNI SUCCESSIONE $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ LIMITATA HA UNA SOTTOSUCC. CONVERGENTE

DIM:

DEFINIAMO $E \overset{def}{=} (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ SOTTOSUCCESSIONE E ABBIAMO DUE POSSIBILI CASI:

1. E FINITA : $\exists$ UN ELEMENTO CHE SI RIPETE ∞ VOLTE, CIOÈ È CONVERGENTE

2. E INFINITA: $\Rightarrow \exists y \in Acc(E)$, $\forall r > 0$ $\exists x_r \in E$ t.c. $\|x_r - y\| < r$ (COME DIRE $x_r \in B(y,r) - \{y\} \cap E$)

SFRUTTO L'ARBITRARIETÀ DI r: QUINDI PRENDO x_{n_1} t.c. $\|x_{n_1} - y\| < 1$
E $n_2 > n_1$ x_{n_2} t.c. $\|x_{n_2} - y\| < \frac{1}{2}$

E A CASCATA $n_k > n_{k-1} > \dots > n_1$

QUINDI x_{n_k} t.c. $\|x_{n_k} - y\| < \frac{1}{k}$ •

E • È UNA SCRITTURA EQUIVALENTE A: $\boxed{\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = y, \text{ CIOÈ CONVERGE}}$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

$A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, COMPATTO. SIA $f: A \to \mathbb{R}$ CONTINUA SU A. ALLORA, ESISTONO $x, y \in A$ t.c. $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$ $\forall z \in A$ (x È UN PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO, y DI MAX ASSOLUTO).

PROPOSIZIONE: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$, ALLORA, $\exists$ DUE SUCCESSIONI $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ t.c.
- $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \inf f(A)$
- $\lim_{k \to \infty} f(y_k) = \sup f(A)$

DOVE $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È SUCCESSIONE MINIMIZZANTE e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ È MASSIMIZZANTE

DIM (PER $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- SE $\sup f(A) = +\infty \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists y_k \in A$ t.c. $f(y_k) > k \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(y_k) = +\infty = \sup f(A)$
- SE $\underbrace{\sup f(A)}_{= l} < \infty$. PER DEF DI SUPERIORE: • $f(y) \leq l$ $\forall y \in A$ • $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists y_k \in A$ t.c. $l - \frac{1}{k} < f(y_k)$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\exists y_k \in A$ t.c. $l - \frac{1}{k} < f(y_k) \leq l$ e PER TEO. CONFRONTO $\to \lim_{k \to \infty} f(y_k) = l$

RAPPORTO TRA LIMITI DI SUCCESSIONI E SOTTOSUCCESSIONI

OSSERVAZIONE: SAPENDO $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ e $\lim_{n \to \infty} x_n = l \in \mathbb{R}^n$ ALLORA OGNI SUCC. $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ HA COME LIMITE $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = l$

INFATTI: SE $\lim_{n \to \infty} x_n = l \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > N_0$ $\|x_n - l\| < \varepsilon$ (DEF. LIMITE)

ALLORA SE $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ POSSO AVERE $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_k > n_0$ $\forall k > k_0$. ALLORA $\forall k > k_0$ DICO $\|x_{n_k} - l\| < \varepsilon$

↳ DEF. DI SOTTOSUCCESSIONE

- CARATTERIZZAZIONE DI LIM USANDO LE SUCCESSIONI

USANDO $r > 0$ ARBITRARIO NELLE DEF. DI $\bar{A}$, $Fr(A)$, $Acc(A)$ e SCEGLIENDO UNA SUCC. $r_n \to 0^+$, $r_n > 0$ $(n \to +\infty)$ POSSIAMO CARATTERIZZARE:

- $x_0 \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in A$, $x_n \to x_0$
- $x_0 \in Fr(A) \iff \exists$ DUE SUCCESSIONI $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in A$, $y_n \in A^c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ t.c. $\begin{cases} \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \\ \lim_{n \to \infty} y_n = x_0 \end{cases}$
- $x_0 \in Acc(A) \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in A - \{x_0\}$ e t.c. $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}^k$:

1) $x_0 \in Acc(A)$, $l \in \mathbb{R}^k$ ALLORA $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \quad \text{PER OGNI SUCC.} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A - \{x_0\} \text{ t.c.} \\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \end{cases}$

2) SE $x_0 \in Acc(A) \cap A$ ALLORA
↳ f È CONTINUA IN $x_0 \iff \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \forall \text{ SUCC. } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \\ \text{t.c. } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI WEIERSTRASS:

DIMOSTRIAMO CHE $\exists y \in A$ t.c. $f(z) \le f(y) \ \forall z \in A$ (PER x È IDENTICA)

IN VIRTÙ DELLE PRECEDENTI PROPOSIZIONI, $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.c. $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \sup f(A)$ "SUCC. MASSIMIZZANTE"

A LIMITATO $\exists B(0,R)$ CON $R>0$ GRANDE ABBASTANZA $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(0,R)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ È LIMITATA.

USIAMO IL TEO. DI BOLZANO-WEIERSTRASS: $\exists$ UNA SOTTOSUCC. $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$ PER QUALCHE $y \in \mathbb{R}^n$

CIOÈ $y \in Acc(A)$, MA VISTO CHE $A = \bar{A}$ (CHIUSO) ALLORA $y \in Acc(A) \subseteq A \Rightarrow y \in A$

PER CONCLUDERE, USANDO LA CONTINUITÀ: $f(y) \overset{\text{continuità}}{=} \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) \overset{\text{sottosucc.}}{=} \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \sup f(A)$

$\Rightarrow f(y) = \sup f(A)$ CIOÈ $\sup f(A) = \max f(A)$

$\Rightarrow \forall z \in A,\ f(z) \le f(y) \to$ DALLA DEF. DI SUP. $\square$

NE SEGUE... $f(A)$ È UN INTERVALLO, NEL CASO $f: A \to \mathbb{R}$ CON $A \subseteq \mathbb{R}^n$ OPPORTUNO.

OSSERVAZIONE: SE A È COMPATTO E f È CONTINUA, PER TEO. DI WEIERSTRASS $\begin{pmatrix} a = f(x) \\ b = f(y) \end{pmatrix}$ $\Rightarrow a \le f(z) \le b \ \forall z \in A$

INSIEME CONNESSO:

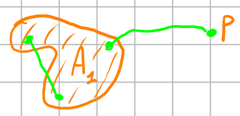
SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. DICIAMO A CONNESSO (PER ARCHI) SE PER OGNI $x,y \in A$ $\exists \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$, $\gamma(t) \in A$ $\forall t \in [a,b]$ E γ CONTINUA

NOTAZIONE: DATI $x,y \in \mathbb{R}^n$ CHIAMIAMO SEGMENTO DI ESTREMI x E y: $[x,y] = \{ ty + (1-t)x,\ t \in [0,1] \}$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, A SI DICE CONVESSO SE $\forall x,y \in A$, SI HA $[x,y] \subset A$

PROPOSIZIONE: A CONVESSO $\Rightarrow$ CONNESSO, A STELLATO $\Rightarrow$ CONNESSO

ES:



- $A = A_1 \cup \{P\}$, NÉ CONNESSO NÉ CONVESSO
- A_1 È CONNESSO, NON CONVESSO
- A È LIMITATO
- $\bar{A} = \bar{A}_1 \cup \{P\}$
- $P \in \bar{A}$, MA $P \notin Acc(A)$ (P È PUNTO ISOLATO)

GENERALIZZAZIONE PROPRIETÀ VALORI INTERMEDI

OSS: $I \subseteq \mathbb{R}$ È INTERVALLO $\Leftrightarrow$ $x,y \in I$, $x<y \Rightarrow t \in I$ $\forall t$. t.c. $x<t<y$

TEOREMA: HP: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, CONNESSO. SIA $f: A \to \mathbb{R}$. ALLORA f È INTERVALLO

DIM: SIANO $a,b \in f(A) \Rightarrow \exists x,y \in A$ t.c. $f(x) = a$ E $f(y) = b$ SUPPONIAMO CHE $a<b$ DIMOSTRIAMO CHE $\forall c \in \mathbb{R}$ t.c. $a<c<b$ $\exists z \in A$ t.c. $f(z) = c$ STRATEGIA DIMOSTRATIVA

A CONVESSO E $x,y \in A \Rightarrow \exists \gamma: [0,1] \to A$ t.c. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, $\gamma(t) \in A$ $\forall t \in [0,1]$ E CONTINUA SU $[0,1]$

DEFINISCO $g(t) \overset{def}{=} f(\gamma(t))$ SU $[0,1]$ CHE È CONTINUA (COMPOSIZ. DI f CONTINUE)

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(0) = f(\gamma(0)) = f(x) = a$, $g(1) = f(\gamma(1)) = f(y) = b$.

APPLICHIAMO A g LE PROP DEI VALORI INTERMEDI: $\exists \bar{t} \in [0,1]$ t.c. $c = \underbrace{f(\gamma(\bar{t}))}_{g(\bar{t})}$ E LA DIM È COMPLETA CON $z = \gamma(\bar{t})$.

QUINDI SE f È CONTINUA E A È SIA COMPATTO CHE CONNESSO ALLORA ($f: A \to \mathbb{R}$) ABBIAMO CHE $f(A) = [a,b]$ DOVE $a = \sup f(A) = \max f(A)$, $b = \inf f(B) = \min f(B)$

DERIVATA DIREZIONALE

$A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathring{A}$ (PUNTO INTERNO) $f: A \to \mathbb{R}$, CON $V \in \mathbb{R}^N$ FISSATO

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

$x_0 + tv \in B(x_0, r)$ PER t PICCOLO (r OPPORTUNO)

PRENDIAMO $r>0$ t.c. $B(x_0, r) \subseteq A$ (SI PUÒ FARE PERCHÈ $x_0 \in \mathring{A}$). SE $|t| \le \frac{r}{\|v\|}$, $V \neq (0,0,\dots,0)$ V. NULLO **ALLORA**

$x_0 + tv \in B(x_0, r)$ PERCHÈ $\|x_0 - (x_0 + tv)\| = \|tv\| = |t| \cdot \|v\| < r \Rightarrow |t| < \frac{r}{\|v\|}$

ALLORA DEFINISCO $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ "DERIVATA DIREZIONALE DI f NEL PUNTO x_0 LUNGO LA DIREZIONE V"

SE $v = (0, \dots, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} 0$$

TEOREMA DI FERMAT

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ $f: A \to \mathbb{R}$, SIA $x_0 \in \mathring{A}$ UN PUNTO DI MAX, MIN LOCALE PER f SE:

- MIN: $f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in U_{x_0}$
- $f(x_0) \ge f(x)$ $\forall x \in U_{x_0}$

U_{x_0} INTORNO DI x_0 E $U_{x_0} \subset A$

E $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ $\exists$ $(v \neq \underline{0}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE:

DEFINISCO $g(t) \overset{DEF}{=} f(x_0 + tv)$ NOTA: $|t| < \frac{r}{\|v\|} \Rightarrow x_0 + tv \in B(x_0, r) \subseteq A \leftarrow x_0 \in \mathring{A}$

r DEVE ESSERE SCELTO OPPORTUNAMENTE

SE x_0 È MAX LOCALE DI $f(x)$, ALLORA $t=0$ È MAX LOCALE PER g: $g(t) \le g(0)$ $\forall t$ IN UN INTERVALLO OPPORTUNO DI $0 \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$

E DAL TEO. DI FERMAT A UNA VARIABILE: $0 = g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \overset{\text{PER DEF}}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ $\square$

DERIVATE PARZIALI:

CONSIDERIAMO I VETTORI DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^N$: $e_J = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ (J-ESIMA) E DEF. DERIV. DIREZ. $V = e_J$

$$\frac{\partial f}{\partial x_J}(x_0) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial e_J}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + e_J) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0)_1 + (x_0)_2 + \dots + (x_0)_J + t + \dots (x_0)_n) - f(x_0)}{t}$$

CHE CORRISPONDE A DERIVARE f IN SENSO ORDINARIO RISPETTO ALLA VARIABILE x_J LASCIANDO TUTTE LE ALTRE VARIABILI "COSTANTI"

$\frac{\partial f}{\partial x_J}(x_0) \to$ DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A x_J, NEL PUNTO x_0

$\nabla f \to$ GRADIENTE DI $f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

TEOREMA DI SCHWARTZ:

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ APERTO. SIA $f: \Omega \to \mathbb{R}$ E t.c. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_J}$ E $\frac{\partial^2 f}{\partial x_J \partial x_i}$ CONTINUE

TH: LE DUE DERIVATE SONO UGUALI

DIFFERENZABILITÀ PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in[a,b]$

f è DERIVABILE IN $x_0 \iff \exists \lim_{x\to x_0} \overbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}^{f'(x_0)} \in\mathbb{R}$

$\iff \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in\mathbb{R}$

$\iff \exists A\in\mathbb{R}$ t.c.

⊛ $f(x)=f(x_0)+\underline{A(x-x_0)+o(x-x_0)}$, $x\to x_0$ DOVE $\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}\to 0$, $x\to x_0$, $A=f'(x_0)$

↳ DIFFERENZIABILITÀ: LA FUNZIONE $\varphi: h\to Ah$: $\varphi(h)=Ah$ è LINEARE ED è CHIAMATA DIFFERENZIALE DI F IN x_0 : $\varphi = df(x_0)$

⊛ $f(x)=f(x_0)+df(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$, $x\to x_0$. DERIVABILITÀ e DIFFERENZIABILITÀ SONO EQUIVALENTI CON UNA VARIABILE

↳ IMPLICA CONTINUITÀ

* DEF: DATA APPLICAZIONE LINEARE $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $n,m\in\mathbb{N}$ DICIAMO CHE T È LINEARE SE:

- $T(\mu+v)=T(\mu)+T(v)$ $\quad\forall \mu,v\in\mathbb{R}^n$
- $T(\lambda\mu)=\lambda T(\mu)$ $\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall\mu\in\mathbb{R}^n$

TEOREMA ALGEBRA LINEARE

HP: $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ LINEARE

TH: $\exists$ A MATRICE $m\times n$ t.c. $T(\mu)=A\cdot\mu$ $\quad\forall\mu\in\mathbb{R}^n$

CASO $n\in\mathbb{N}$, $m=1$: $T(\mu)=A\mu=\langle A,\mu\rangle$ (PROD. SCALARE)

DEFINIZIONE DIFFERENZIABILITÀ:

SIA $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, Ω APERTO. f È DIFFERENZIABILE IN $x_0\in\Omega$ SE $\exists T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ LINEARE t.c.:

$$\boxed{f(x_0+h)=f(x_0)+T(h)+o(\|h\|),\ h\to 0^{*}, \text{ DOVE } \frac{o(\|h\|)}{\|h\|}\to 0,\ h\to 0}$$

* RISCRIVIBILE COME: $\exists A\in\mathbb{R}^n$ t.c.: $f(x_0+h)=f(x_0)+\langle A,h\rangle+o(\|h\|)$, $h\to 0$

TERMINOLOGIA: T "DIFFERENZIALE DI f NEL PUNTO x_0". PONIAMO $df_{x_0}:=T$

TEOREMA ($\exists$, CONTINUITÀ e VALORE DEL DIFFERENZIALE IN UN PUNTO)

HP: $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, Ω APERTO, $x_0\in\Omega$. SE f È DIFFERENZIABILE IN x_0:

TH:
- f È CONTINUA IN x_0
- $\forall v\in\mathbb{R}^n$ $\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=df_{x_0}(v)$ (ESISTONO DERIVATE DIREZIONALI, E SONO UGUALI AL DIFF. IN QUEL PUNTO)
- $df_{x_0}(h)=\underbrace{\langle\nabla f(x_0),h\rangle}_{\text{PROD. SCALARE IN } \mathbb{R}^n}$ $\quad\forall h\in\mathbb{R}^n$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=\langle\nabla f(x_0),v\rangle$ $\quad\forall v\in\mathbb{R}^n$, $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$

CONSIDERO $n=3$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=\langle\nabla f(x_0),v\rangle=\|\nabla f(x_0)\|\cdot\|v\|\cos(\theta)$. IL GRADIENTE È LA DIREZIONE DI MASSIMA CRESCITA ($\overset{\text{THETA}}{\theta}=0$) DELLA f.

SE PER SEMPLICITÀ $\|v\|=1$, $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right|\le\|\nabla f(x_0)\|$ È UN IDENTITÀ PER $\theta=0$

$f(x_0+h)=f(x_0)+\underbrace{\langle A,h\rangle}_{df_{x_0}(h)}+o(\|h\|)$, $h\to 0$

↗ RELAZIONE CAUCHY-SCHWARZ

NOTO CHE $|\langle A,h\rangle|\le\|A\|\cdot\|h\|\to 0$, CIOÈ $\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)\to$ CIOÈ CONTINUA

PER DEF: $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$ DOBBIAMO DIM. LA SUA $\exists$

$=\lim_{t\to 0}\overset{\text{PER LINEARITÀ}}{\frac{T(\cancel{t}v)}{\cancel{t}}}+\frac{o(\|tv\|)}{t}=T(v)=A\cdot v$ MATRICE (VETTORE) CHE RAPP. T

$\|v\|\cdot\frac{o(\|tv\|)}{\|v\|\cdot t}=\|v\|\cdot\frac{o(\|tv\|)}{\pm\|tv\|}\to 0$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i v_i \iff \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i v_i$$

NEL CASO $v = e_j$ (BASE CANONICA), OTTENGO $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0) = A_J$, CIOÈ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ (DERIVATA PARZIALE)

CRITERIO DI DIFFERENZIABILITÀ:

$f \in C^1 \implies$ DIFFERENZIABILITÀ DI $f \Rightarrow f$ CONTINUA

$\hookrightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle$

TEOREMA (DIFFERENZIABILITÀ DI f):

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω APERTO, $f: \Omega \to \mathbb{R}$. SE $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ (CIOÈ $\exists$ DERIVATE PARZIALI IN Ω E SONO CONTINUE)

TH: f È DIFFERENZIABILE $\forall$ PUNTO $\in \Omega$. $\forall x_0 \in \Omega$: $df_{x_0}(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

DIM:

$n=2$ (PER $n \in \mathbb{N}$ È SIMILE). SIA $(x_0, y_0) \in \Omega$. LA TH PUÒ ESSERE RISCRITTA COME:

$$f(x_0+h, y_0+k) \overset{?}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \quad \text{CON } h,k \text{ t.c. } (x_0+h, y_0+k) \in \Omega$$

$\neq$ DAL VALORE DELL'ENUNCIATO

NOTIAMO CHE:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \pm f(x_0, y_0+k) = \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)}_{I} + \underbrace{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}_{II}$$

APPLICHIAMO TEO. MEDIA LAGRANGE:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \exists x_h \in [x_0, x_0+h],\ h>0 & \exists y_k \in [y_0, y_0+k],\ k>0 \\ \exists x_h \in [x_0+h, x_0],\ h<0 & \exists y_k \in [y_0+k, y_0],\ k<0 \end{array} \right\} \text{t.c. } I + II = \frac{\partial f}{\partial x}(x_h, y_0+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_k)k$$

LA TH È EQUIVALENTE A: $\dfrac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{?} 0$

(DIMOSTRARE PER I PUNTI INTERMEDI È UGUALE A x_0, y_0)

$$\left| \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} f(x_h, y_0+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_k)k - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \right\} \right|$$

(METTO VAL ASS. PERCHÈ $\lim_{x\to0}|x|$ e $\lim_{x\to0} x$ SONO $=$)

DISU. TRIAN.

$$\le \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\le 1} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right|}_{\to 0\ (h,k)\to(0,0)} + \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\le 1} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right|}_{\to 0\ (h,k)\to(0,0)}$$

GRAZIE AL FATTO CHE $x_h \to x_0$, $h \to 0$; $y_k \to y_0$, $k \to 0$ (x_h, y_k COLLASSANO SU x_0, y_0)

TEOREMA (DERIVABILITÀ DI FUNZIONI COMPOSTE)

HP: SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, DIFFERENZIABILE IN A e $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, φ DERIVABILE IN $\mathbb{R}^n$

SIA $\underbrace{\varphi([a,b])}_{\text{IMMAGINE}} \subseteq A$. ($\exists f \circ \varphi$).

TH: f COMPOSTA $f \circ \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE SU $[a,b]$ e $(f \circ \varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$, DOVE $\varphi'(t) := (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))$

DIM:

SIA $t_0 \in [a,b]$. PER HP f DIFF. IN $x_0 = \varphi(t_0)$

(*) $f(y) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle + o(\|y - x_0\|)$. INOLTRE φ È DERIVABILE IN t_0:

$\varphi(t_0+h) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \cdot h + o(h)$, $h \to 0$. PONGO $y = \varphi(t_0+h)$ in (*):

$f(\varphi(t_0+h)) = f(\varphi(t_0)) + \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi(t_0+h) - \varphi(t_0) \rangle + o(\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|)$

E INOLTRE L'ENUNCIATO È EQUIVALENTE A: $\exists \lim_{h\to0} \dfrac{(f\circ\varphi)(t_0+h) - (f\circ\varphi)(t_0)}{h} = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) \rangle$

DALLE CONSID. INIZIALI:

$$\lim_{h\to0} \frac{(f\circ\varphi)(t_0+h) - (f\circ\varphi)(t_0)}{h} = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} \rangle + \boxed{\frac{o(\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|)}{h}}$$

$$\underbrace{\frac{o(\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|)}{\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|}}_{=0} \cdot \underbrace{\frac{\|\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)\|}{h}}_{\text{LIMITATA } (\|\varphi'(t_0)\|)} = 0$$

CONCLUSIONE

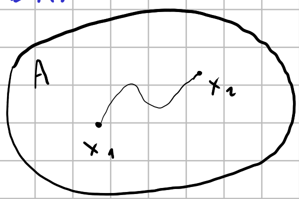
$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ\varphi)(t_0+h) - (f\circ\varphi)(t_0)}{h} = \langle \nabla f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0)\rangle \quad \square$$

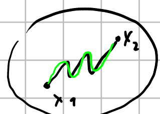
TEOREMA (SE UNA f HA DIFFERENZIALE NULLO, È COSTANTE)

HP: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO e CONNESSO (PER ARCHI), $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE, TALE CHE $\nabla f(x) = (0,\dots,0)$ $\forall x \in A$

TH: f COSTANTE

DIM:





DIMOSTRIAMO IL TEO. PRENDENDO φ DIFFERENZIABILE $\varphi: [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$

"SMUSSAMENTO" NEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DELLA DERIVATA

QUINDI CONSIDERO $\varphi(a) = x_1$ e $\varphi(b) = x_2$, φ DERIVABILE IN $[a,b]$.

CONSIDERO $f\circ\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$. È DERIVABILE PER TEO. PRECEDENTE: $(f\circ\varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \overset{\text{PER HP}}{=} 0$

DA ANALISI I, $f\circ\varphi$ È COSTANTE, IN PARTICOLARE $(f\circ\varphi)(a) = (f\circ\varphi)(b) \iff f(x_1) = f(x_2)$ CON x_1 e x_2 ARBITRARI

STUDIO PUNTI CRITICI CON MATRICE HESSIANA

- (x_0, y_0) È UN PUNTO CRITICO SE: $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ (A DIMENSIONE n, CON IL GRADIENTE NULLO)
- UN PUNTO CRITICO, SE NON È NÉ DI MASSIMO NÉ DI MINIMO È DETTO DI SELLA.

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR DEL SECONDO ORDINE)

HP: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, $f \in C^2(A)$.

$$\boxed{\text{TH: } f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hh, h\rangle + o(\|h\|^2)}$$

CON $\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \to 0$ $(\|h\| \to 0)$ e H MATRICE HESSIANA.

PER A APERTO, SAPPIAMO CHE $\exists B(x_0, r) \subset A$ CIOÈ $\|x_0 - (x_0+h)\| < r \to \|h\| < r$

DIM:

SIA $B(x_0, r) \subset A$ CONVESSO, ALLORA $x \in B(x_0, r) \Rightarrow \underbrace{[x, x_0]}_{\text{SEGMENTO CHE CONGIUNGE } x_0 \text{ e } x} \subset B(x_0, r) \subset A$

"PARAMETRIZZO" QUESTO SEGMENTO USANDO $\varphi: [0, \|x-x_0\|] \to A \subset \mathbb{R}^n$

DEFINITA COME: $\varphi(t) := x_0 + \frac{t(x-x_0)}{\|x-x_0\|}$ CON $\varphi'(t) := \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$ COSTANTE RISPETTO A t

$\varphi(0) = x_0$ e $\varphi(\|x-x_0\|) = \cancel{x_0} + \frac{x-\cancel{x_0}}{\cancel{\|x-x_0\|}}\cancel{\|x-x_0\|} = x$

USIAMO UNA FUNZ. AUSILIARIA:

$g(t) := f(\varphi(t))$, $g: [0, \|x-x_0\|] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, $\varphi \in C^2$ CON $\Rightarrow f(\varphi(t)) = (f\circ\varphi)(t) \in C^2([0, \|x-x_0\|])$

e DA TAYLOR PER UNA VARIABILE:

$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2)$, $t \to 0$

CON $g(0) = f(\overset{x_0}{\varphi(0)}) = f(x_0)$

$g'(t) \underset{\text{DAL TEO DER. COMPOSTA}}{=} \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle$, $\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} = k$, $= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))k_i$

$g''(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))x_i\right) \overset{\text{PERCHÉ DERIVAZ. È LINEARE}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))x_i \overset{\text{DERIV. COMPOS.}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\varphi(t))k_j k_i$

CASO $g''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overset{x_0}{\varphi(0)})k_j k_i$

RITORNANDO ALLA FORMULA DI TAYLOR: $g(t) = f(\varphi(t)) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + o(t^2)$

$$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), k \rangle t + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) t^2 + o(t^2)$$

PONGO $t = \|x - x_0\| \to g(\|x-x_0\|) = f(\varphi(\|x-x_0\|)) = f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), \frac{x-x_0}{\cancel{\|x-x_0\|}} \rangle \cancel{\|x-x_0\|} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \underbrace{\frac{(x-x_0)_i}{\cancel{\|x-x_0\|}}}_{k_i} \underbrace{\frac{(x-x_0)_j}{\cancel{\|x-x_0\|}}}_{k_j} \underbrace{\cancel{\|x-x_0\|^2}}_{t^2}$

$+ o(\|x-x_0\|^2)$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x-x_0), x-x_0 \rangle + o(\|x - x_0\|)^2 \quad \square \quad (\text{DA } h = x - x_0)$$

TEOREMA MAX/MIN $\leftrightarrow$ MATRICE HESSIANA

HP: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω APERTO, $f \in C^2(\Omega)$. $z_0 \in \Omega$ t.c. $\nabla f(z_0) = \underline{0}$

TH: ① $Hf(z_0)$ È DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow z_0$ MINIMO LOCALE
NEGATIVA $\Rightarrow$ MASSIMO LOCALE
INDEFINITA $\Rightarrow$ SELLA

DIMOSTRAZIONE:

DA TAYLOR (SECONDO ORDINE)

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \langle \cancel{\nabla f(z_0)}, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(z_0) h, h \rangle + o(\|h\|^2), \quad \|h\| \to 0$$

GIUSTIFICO ②

$f(z_0 + h) - f(z_0) = \frac{1}{2} \langle Hf(z_0) h, h \rangle + o(\|h\|^2)$. PONIAMO $z_0 \in \Omega$, APERTO (CIOÈ: $\exists B(z_0, r) \subset \Omega$)

$x \in B \iff x = z_0 + h \in B(z_0, r)$, CIOÈ: $\| z_0 - (z_0 + h) \| = \|h\| < r$. QUINDI $\exists r > 0$ t.c. $\|h\| < r \Rightarrow z_0 + h \in \Omega$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \|h\|^2 \left(\overbrace{\frac{1}{2} \langle Hf(z_0) \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} \rangle}^{q_{Hf(z_0)}\left(\frac{h}{\|h\|}\right)} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|} \right)$$

$\frac{h}{\|h\|} \in \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \}$ COMPATTO, SAPPIAMO CHE $q_{Hf(z_0)}$ È CONTINUA, QUINDI VALE IL TEO. DI WEIERSTRASS:

$\exists x_0 \in \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \}$ t.c. $q_{Hf(z_0)}(x_0) = \min_{h: \|h\| = 1} q_{Hf(z_0)}(h) = m > 0 \Rightarrow f(z_0 + h) - f(z_0) \geq \|h\|^2 \left\{ \frac{m}{2} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|} \right\}$ ⊛ ALLORA POSSO TROVARE $c > 0$ t.c.

SE $\|h\| < c$ ALLORA $\left| \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right| \leq \frac{m}{2} \iff -\frac{m}{2} \leq \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \leq \frac{m}{2}$ *

USO * IN ⊛: $f(z_0 + h) - f(z_0) \geq \|h\|^2 \left\{ \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \right\} = 0 \quad \forall h$ t.c. $\|h\| < c \Rightarrow f(z_0 + h) \geq f(z_0)$ □

- CASO DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

TEOREMA (max/min e relazione con matriche Hessiana in R^2)

HP: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e $f \in C^2(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$ t.c. $\nabla f(z_0) = \underline{0}$. $Hf(z_0)$ MATRICE HESSIANA.

TH: ① $\det(Hf(z_0)) > 0 \Rightarrow z_0$ È ESTREMANTE LOCALE, MINIMO RELATIVO SE $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0) > 0$ E MINIMO RELATIVO $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0) < 0$
② $< 0 \Rightarrow z_0$ NON È ESTREMANTE.

DIM:

DATA $f \in C^2(\Omega)$ ALLORA $Hf(x_0)$ È SIMMETRICA $\Rightarrow$ AUTOVALORI $m, M \in \mathbb{R}$ (SOLUZIONI DI $P(\lambda) = 0$ CON $P(\lambda) = \det(Hf(z_0) - \lambda I_{2\times 2})$)

CIOÈ: $\det \begin{pmatrix} f_{xx}(z_0) - \lambda & f_{xy}(z_0) \\ f_{xy}(z_0) & f_{yy}(z_0) - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy}) \lambda + f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$,

TENIAMO IN CONTO CHE IL POL. CARATT. È: $P(\lambda) = (\lambda - m)(\lambda - M) = \lambda^2 - (m + M)\lambda + mM$

ABBIAMO LE RELAZIONI $\overbrace{f_{xx} + f_{yy}}^{①} = m + M$. $\det Hf(z_0) = \overbrace{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}^{②} = mM$

SE ② $< 0 \to m$ e M SEGNO DISCORDE $\to H$ INDEFINITA

② $> 0 \to m$ e M SEGNO CONCORDE $\to H$ POSITIVA o NEGATIVA. È IMPLICATO ANCHE $f_{xx} \cdot f_{yy} > 0$.

DALLA RELAZIONE $f_{xx} + f_{yy} = m + M$ ABBIAMO CHE PER $f_{xx} > 0$ LA FORMA QUADRATICA ASSOCIATA È DEF. POSITIVA
$f_{xx} < 0$ NEGATIVA