## BERNOULLI

Per risolvere le equazioni differenziali che si presentano nella forma:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^{\alpha}(t)$$

con $\alpha \neq 0; 1$. Vediamo il metodo di risoluzione passo-passo:

**(1)** Dividere ambo i membri per $y^{\alpha}$ ottenendo

$$\frac{y'(t)}{y^{\alpha}(t)} = a(t)\frac{y(t)}{y^{\alpha}(t)} + b(t)$$

ossia

$$(\spadesuit) \qquad \frac{y'(t)}{y^{\alpha}(t)} = a(t)y^{1-\alpha}(t) + b(t)$$

**(2)** Porre $y^{1-\alpha}(t) = z(t)$.

**(3)** Derivare entrambi i membri dell'uguaglianza (2), ricavando

$$z'(t) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(t)y'(t)$$

ossia

$$z'(t) = (1-\alpha)\frac{y'(t)}{y^{\alpha}(t)}$$

per cui

$$\frac{y'(t)}{y^{\alpha}(t)} = \frac{z'(t)}{(1-\alpha)}$$

**(4)** Sostituire i risultati ottenuti ai punti (3) e (4) in ($\spadesuit$) ottenendo:

$$\overbrace{\frac{z'(t)}{1-\alpha}}^{=\frac{y'(t)}{y^{\alpha}(t)}} = a(t)\ \overbrace{z(t)}^{=y^{1-\alpha}(t)}\ + b(t)$$

che è un'equazione differenziale lineare, non omogenea, del primo ordine, di cui conosciamo la formula risolutiva.

**(5)** Tornare alla variabile $y(t)$ ricordandosi dell'imposizione fatta al punto (2), ovvero: $y^{1-\alpha}(t) = z(t)$

Potrebbe sembrare qualcosa di difficile, ma non è così! Con il seguente esempio vi risulterà tutto più chiaro!

---

## RICCATI

$$1) \quad y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$$

Esiste anche un procedimento alternativo per la risoluzione, che però prevede di conoscere una soluzione particolare $y_1$. Se disponiamo di una soluzione particolare, possiamo effettuare la sostituzione

$$z = \frac{1}{y - y_1}$$

che riconduce l'equazione di Riccati ad un'equazione differenziale di Bernoulli

$$z' = -(B(x) + 2y_1C(x))z - C(x)$$

Dopo averla risolta puoi ricavare la soluzione dell'equazione originaria come

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

---

- TEOREMA DELLE EQ. DI PRIMO ORDINE LINEARI

UNA EQ. IN FORMA $y' + p(x)y = q(x)$ È

$$y(x) = e^{-P(x)} \left\{ c + \int e^{P(x)} \cdot q(x)\,dx \right\}$$

TEOREMA 9 (SOLUZIONE GENERALE):

HP: • $\mathcal{L}(y)=0$ (EQ. OMOGENEA) e $k=2$ (ORDINE 2)
• $y''+a_1y'+a_0y=0$ e $a_1,a_0\in\mathbb{R}$ HA SOLUZIONE $y(x)=C_1W_1+C_2W_2$

CON $k=2$:

- $\Delta>0 \rightarrow W_1=e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ | $\mathbb{R}$
- $\Delta=0 \rightarrow W_1=e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$
- $\Delta<0 \rightarrow W_1=e^{\alpha x}\cos(x)$ e $e^{\alpha x}\sin(x)$ | $\mathbb{C}$

GENERALIZZATO:

$x^{h_i}e^{\lambda_i x}$ | $\mathbb{R}$
$x^{t_i}e^{\alpha_i x}\cos(x)$
$x^{t_i}e^{\alpha_i x}\sin(x)$ | $\mathbb{C}$

$\rightarrow$ SPAZIO DELLE SOLUZ. DI $\mathcal{L}(y)=0$

DOVE $h_i$ e $t_i$ SONO LA <u>MOLTEPLICITÀ</u> DELLE SOLUZIONI IN $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$

$\sum_{j=1}^{r} h_j + 2\sum_{j=1}^{s} t_j = k$, LA SOMMA DELLE MOLTEPLICITÀ È L'ORDINE DELL'ED

$\rightarrow$ PERCHÈ SIA $\alpha+i\beta$ CHE $\alpha-i\beta$ (COMPLESSO CONIUGATO) SONO SOLUZIONI

TEOREMA 10 (SOLUZIONE PARTICOLARE)

HP: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $P_r$ POLINOMIO DI GRADO $r$. ED IN FORMA: $y''+a_1y'+a_0y=P_r(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ " = " $\cos(\beta x)$ ALLORA

$$\boxed{\begin{array}{l} y_*(x)=x^h e^{\alpha x}\{P_r(x)\operatorname{sen}(\beta x)+Q_r\cos(\beta x)\}, \text{ con } Q_r \text{ e } P_r \text{ polinomi di grado } r \text{ e} \\ h=0 \text{ SE } \alpha+i\beta \text{ NON È RADICE DI } \Phi \\ h=1 \quad \Delta>0 \vee \Delta<0 \quad \alpha+i\beta \text{ È RADICE DI } \Phi \\ h=2 \quad \Delta=0 \quad \alpha+i\cdot 0\rightarrow\alpha \text{ È RADICE REALE DI } \Phi \end{array}}$$

## Restrizione di funzioni a due variabili

1. calcolo gradiente e lo pongo = a 0. Mi segno i punti trovati
2. punti sulla frontiera. pongo y (o x, in base alla restrizione) = al valore e trovo i punti dove l'altra variabile è "al limite"
3. punti sulla frontiera. stessa cosa con altro "bound". Probabilmente si può parametrizzare per rendere la cosa più facile
4. Confronto i punti calcolandone i valori, trovando max e min

PIANO TANGENTE

Se f è differenziabile in $(x_0,y_0)$, il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ ha equazione

$$z(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

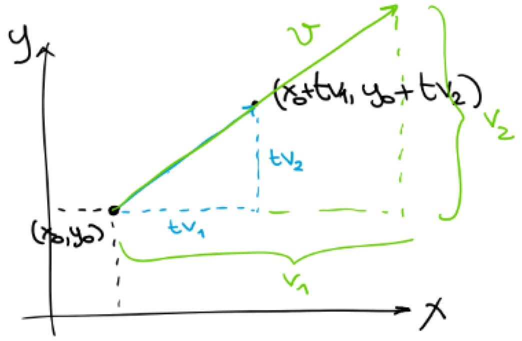
## DERIVATA DIREZIONALE NEL PUNTO $(x_0,y_0)$ NELLA DIREZIONE $v=(v_1,v_2)$, $\|v\|=1$

### DEFINIZIONE

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t}$$

se il lim $\exists$ finito

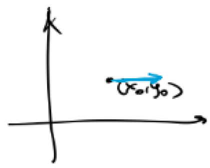
$v=(v_1,v_2)$
$\|v\|=1$




## DERIVATE PARZIALI NEL PUNTO $(x_0,y_0)$
(CASI PARTICOLARI DI DERIVATE DIREZIONALI)

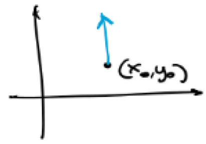
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$ con $v=(1,0)$




$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}$$

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$ con $v=(0,1)$




### DIFFERENZIABILITÀ

$f$ è DIFFERENZIABILE in $(x_0,y_0)$ $\iff$ $\exists (A_1,A_2)\in\mathbb{R}^2$: $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \langle (A_1,A_2),(h,k)\rangle + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$, $(h,k)\to(0,0)$

(si può dimostrare che questo equivale a: $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$)

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & f \text{ DIFFERENZIABILE IN } (x_0,y_0) & \\ \Downarrow \ \cancel{\Uparrow} & & \cancel{\Uparrow}\ \Downarrow \\ f \text{ CONTINUA in } (x_0,y_0) & \cancel{\Rightarrow}\ \cancel{\Leftarrow} & f \text{ DERIVABILE in } (x_0,y_0) \\ & & \left(\exists \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \exists \frac{\partial f}{\partial y} \text{ in } (x_0,y_0)\right) \end{array}}$$

### TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

$$\left.\begin{array}{l} f:\Omega\to\mathbb{R},\quad \Omega\subseteq\mathbb{R}^2 \text{ aperto} \\ \exists \frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \exists \frac{\partial f}{\partial y} \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ sono continue in } \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è differenziabile in } \Omega$$

### FORMULA DEL GRADIENTE

se ||v|| diversa da 1, ricorda di normalizzare

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ differenziabile in } (x_0,y_0) \\ \|v\|=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \langle \nabla f(x_0,y_0), v\rangle$$

# CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI CRITICI PER FUNZIONI DI 2 VARIABILI
$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(\Omega)$

① Cerco i punti tali che $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$ (ovvero: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$)

② Utilizzo uno dei metodi seguenti per stabilire se ciascuno dei punti sopra trovati è punto
- di massimo locale
- di minimo locale
- né di massimo locale né di minimo locale


## Ⓐ MATRICE HESSIANA

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

dove, ad esempio, $f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

TEOREMA (SCHWARZ): $f \in C^2(\Omega) \Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$

### Teorema

$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\Omega$ aperto
$f \in C^2(\Omega)$
$(x_0,y_0) \in \Omega$
$\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$
$\parallel$
$(x_0,y_0)$ punto critico
$\parallel$
$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$

$+$

(A) $\begin{cases} \det H_f(x_0,y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0,y_0)$ è punto di MINIMO LOCALE

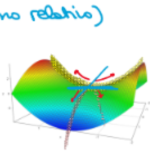
(B) $\begin{cases} \det H_f(x_0,y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0,y_0)$ è punto di MASSIMO LOCALE

(C) $\det H_f(x_0,y_0) < 0 \Longrightarrow (x_0,y_0)$ NON è punto di estremo locale (è punto di sella)

⚠ Se $\det H_f(x_0,y_0) = 0$ il metodo dell'Hessiana NON dà risposte
$\Longrightarrow$ Uso i metodi Ⓑ o Ⓒ

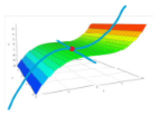
## Ⓑ RESTRIZIONI (NB: metodo utilizzabile solo per dimostrare che $(x_0,y_0)$ è punto né di massimo relativo né di minimo relativo)

**B1** Trovo 2 restrizioni diverse in modo che $(x_0,y_0)$ risulti
- punto di massimo relativo lungo una restrizione
- punto di minimo relativo lungo l'altra restrizione



$\Rightarrow (x_0,y_0)$ è punto né di massimo relativo né di minimo relativo per $f$ (punto di sella)

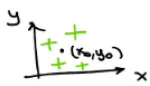
**B2** Trovo 1 restrizione lungo cui $(x_0,y_0)$ risulta punto né di massimo relativo né di minimo relativo per la restrizione



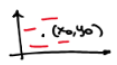
$\Longrightarrow (x_0,y_0)$ è punto né di massimo relativo né di minimo relativo anche per la funzione $f$

## Ⓒ DEFINIZIONE

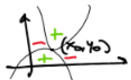
Studio il segno di $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ in un intorno sufficientemente piccolo di $(x_0,y_0)$




$\Rightarrow f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ $\forall (x,y) \in$ intorno $\Rightarrow (x_0,y_0)$ è punto di minimo relativo




$\Rightarrow f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ $\forall (x,y) \in$ intorno $\Rightarrow (x_0,y_0)$ è punto di massimo relativo




$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ per alcuni $(x,y)$ dell'intorno e $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ per altri $(x,y)$ dell'intorno $\Rightarrow (x_0,y_0)$ è punto né di massimo relativo né di minimo relativo

## 2C METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

- Scrivo l'equazione di $\partial A$ nella forma $g(x,y) = 0$.
- Determino i punti $(x_0,y_0)$ che risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(Eventuali punti in cui $f, g$ non sono di classe $C^1$ o in corrispondenza dei quali $\nabla g = (0,0)$ vanno considerati a priori come possibili punti di estremo)

# SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

## CONVERGENZA PUNTUALE

La successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ CONVERGE PUNTUALMENTE in $x$

se ESISTE FINITO $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$

## CONVERGENZA UNIFORME

La successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE a $f$ in $J$

se $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

---

## METODI PER STABILIRE SE UNA SERIE $\underbrace{\text{CONVERGE / DIVERGE / È INDETERMINATA}}_{\text{CARATTERE}}$

**SERIE ARMONICA (GENERALIZZATA)**

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$
- CONVERGE se $\alpha > 1$
- DIVERGE SE $\alpha \le 1$

$\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$
- se $\alpha > 1$, $\forall \beta$: CONVERGE
- se $\alpha < 1$, $\forall \beta$: DIVERGE
- se $\alpha = 1$
  - $\beta > 1$: CONVERGE
  - $\beta \le 1$: DIVERGE

**SERIE GEOMETRICA**

$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$
- CONVERGE* se $-1 < q < 1$
- DIVERGE A $+\infty$ se $q \ge 1$
- INDETERMINATA se $q \le -1$

* LA SOMMA È $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ !

METODI APPLICABILI A SERIE DI SEGNO QUALUNQUE (almeno definitivamente)

- Convergenza assoluta
  $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
  ($\sum |a_n|$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ ???)
- Leibniz

Comuni a entrambi:

- condizione necessaria
  $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
  (quindi: $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ non converge)

METODI APPLICABILI A SERIE A TERMINI NON NEGATIVI (almeno DEFINITIVAMENTE: non negativi da un certo $\bar{n}$ in poi)

- confronto
- confronto asintotico
- rapporto
- radice
- serie-integrale

## SERIE DI FUNZIONI

La serie $\sum_n f_n(x)$ converge (puntualmente) in A se $\forall x \in A \ \exists \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)}_{S_n(x)}$ (somma parziale n-esima)

In questo caso si pone $f(x) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)}$

Notazione compatta: $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

non calcolabili facilmente

$\sum_n f_n$ converge uniformemente in A se $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} \left| \underbrace{S_n(x)}_{f_1+f_2+\dots+f_n} - \underbrace{S(x)}_{\sum_{k=1}^{+\infty} f_k} \right| = 0$

### M-test di Weierstrass

$f_n : A \to \mathbb{R}$

$|f_n(x)| \underset{\forall x\in A}{\leq} M_n^*$ , $M_n \in \mathbb{R}$, $M_n \geq 0$ , $\forall n \geq \bar{n}$ (da un certo $\bar{n}$ in poi)

$\underbrace{\sum_n M_n}_{\text{serie numerica}}$ converge

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ converge uniformemente in A

(ovvero: $\sum |f_n(x)|$ converge uniformemente in A)

* non deve dipendere da x

## SERIE DI FOURIER

$f(x)$ funzione periodica di periodo T

$$\underbrace{S_f(x)}_{\text{serie di Fourier di } f} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right] ,$$

dove

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2 \, *} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx , \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2 \, *} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx , \quad n = 1,2,\dots$$

* al posto di $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ si può scegliere qualunque altro intervallo di ampiezza pari al periodo T

### Teorema A

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo T monotona a tratti e limitata $\Rightarrow$ $S_f(x)$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a:
- $f(x)$ se $f$ è continua in x
- $\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2}$ se $f$ è discontinua in x

### Teorema B

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo T e continua, derivabile eccetto al più in un numero finito di punti in $[0,T]$ nei quali esistono le derivate destre e sinistre $\Rightarrow$ $S_f(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su $\mathbb{R}$