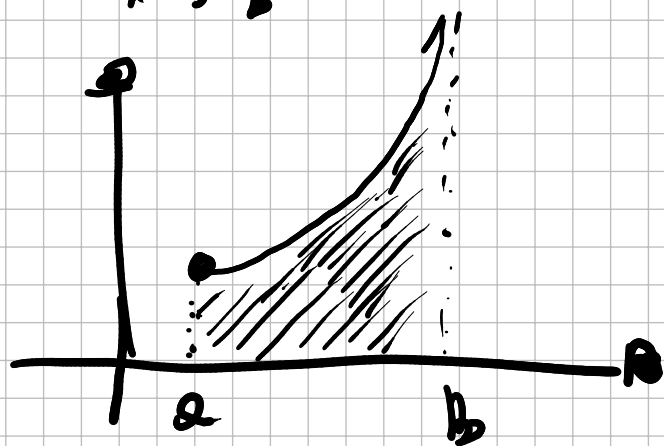


# INTEGRALI GENERALIZZATI

IN UN INTERVALLO NON LIMITATO.

ES)  $f(x)$  IN  $[0, b) \rightarrow \mathbb{R}$  INTERVALLO APERTO

CON  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$



$f$  CONTINUA  $\forall b < b$   
NELLE' INTERVALLO  $[0, b]$

DEF

SE ESISTE, FINITO

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$  ALLORA  $f$  È INTEGRABILE

(IN SENSO GENERALIZZATO O IMPROPRIO)

SU  $[a, b)$  E SI INDICA  $\int_a^b f(x) dx$

E DIREMO CHE È CONVERGENTE

SE INVECE IL LIMITE È  $\pm \infty$  ALLORA  
È DIVERGENTE

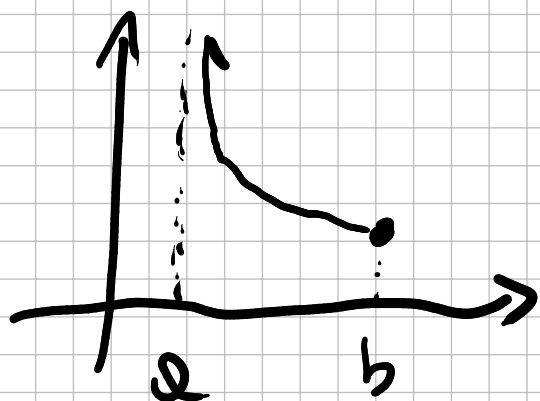
SE NON ESISTE, NON HA SENSO

ALLO STESSO MODO:

$f(x)$  IN  $[a, b]$  (APERTO IN  $a$ )

$f$  È CONTINUA IN  $[a, b]$   $\forall \alpha > a$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$



DEF

FORMULA DI SPEZZAMENTO

SE  $f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ED È INTEGRABILE  
IN  $[a, \beta]$   $\alpha > a$  E  $\beta < b$

SCELGO  $c \in (a, b)$

ALLORA  $f$  È INTEGRABILE SU  $[a, c]$  E

$[c, b]$  E:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

SE UNO TRA

DIVERGE, ALLORA

$$\int_a^b \dots \quad \text{e} \quad \int_c^b \dots$$
$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{DIVERGE}$$

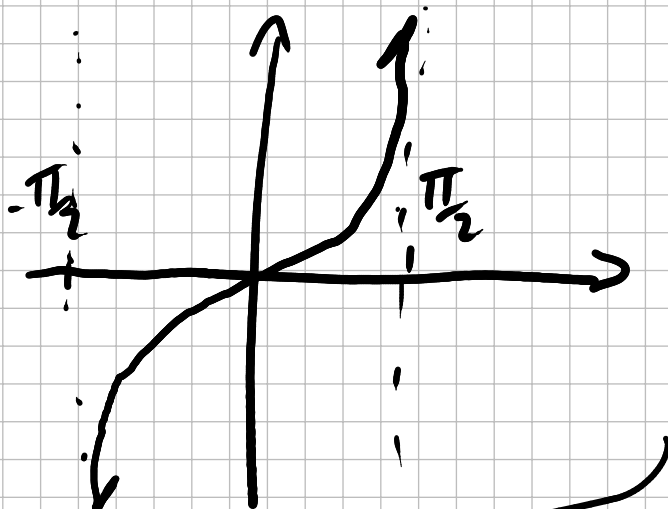
NEGLI ALTRI CASI, NON HA SENSO

DSS

PER GLI INTEGRALI GENERALIZZATI, VALGONO  
SOMMA E CONFRONTO

~ ~ ~ ~ ~  
ESEMPIO

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x) dx \quad \rightarrow \text{DOMINIO CORRETTO } \checkmark$$
$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \pi/2} \tan(x) = \pm \infty$$



$$\star: \int_{-\pi/2 + \epsilon}^{\pi/2 - \epsilon} \frac{\sinh x}{\cos x} dx =$$
$$= \left[ -\log(\cos x) \right]_{-\pi/2 + \epsilon}^{\pi/2 - \epsilon}$$

$$= -\log|\cos(\pi/2 - \epsilon)| + \log|\cos(-\pi/2 + \epsilon)| =$$
$$= -\log|\sin(\epsilon)| + \log|\sin(\epsilon)|$$

FORMA INDETERMINATA  $[-\infty + \infty]$

FORMULA DI SPEZZAMENTO NON VERIFICATA

ESEMPIO NOTEVOLE

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ in } (0, 1]$$

• SE  $\alpha \leq 0$  la  $f$  è INTEGRABILE

• SE  $\alpha > 0$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_{\varepsilon}^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} [-\log x]_{\varepsilon}^1 \\ \left[ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{\varepsilon}^1 \end{cases}$$

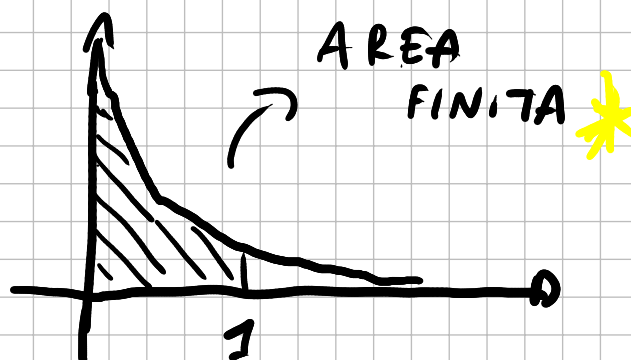
$$= \begin{cases} -\log \varepsilon & \alpha = 1 \\ \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

QUINDI:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \text{ se } 0 < \alpha < 1$$

$$\text{ES} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < +\infty$$



CALCOLO:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{\varepsilon}^1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2 - 2\sqrt{\varepsilon}] = \textcircled{2} \text{ AREA } *$$

CRITERI DI INTEGRABILITÀ AL FINITO

$f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  CONTINUA T.C.

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$$

TEOREMA CRITERIO DEL CONFRONTO:

SE  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  in  $[a, b)$  ALLORA

1) SE  $g$  È INTEGRABILE  $\Rightarrow f$  INTEGRABILE

2) SE  $f$  DIVERGENTE  $\Rightarrow g$  DIVERGENTE

TEOREMA CONFRONTO ASINTOTICO

$f > 0$  e  $g > 0$   $f \sim g$  PER  $x \rightarrow b$

$$\text{(cioè } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1)$$

ASINTOTICAMENTE  
UGUALE

ALLORA

$f$  INTEGRABILE  $\Leftrightarrow \int$  INTEGRABILE

ESEMPIO

STUDIA  $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3} \cos^2 x} dx$

NON CONTINUA IN  $\mathbb{Q}$

TRA  $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  CONTINUA

$$\lim_{x \rightarrow 0} = +\infty$$

QUINDI  $\rightarrow \frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3} \cos^2 x} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

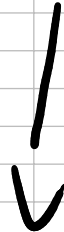
PERCHÉ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3} \cos^2 x} \cdot \cancel{\sqrt[4]{x^3}} = 1 \in \mathbb{R}$

PER CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO:

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ è EQUIVALENTE a } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int_0^1 x^{-3/4} dx < +\infty$$

TEOREMA

SE  $\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$  ALLORA  $\int_a^b f(x) dx < +\infty$



## ESEMPIO

$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  CONVERGE PERCHÈ

$$\int_0^1 \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx < +\infty$$

## INTEGRAZIONE SU INTERVALLI ILLIMITATI

• SIA  $f$  in  $[a, +\infty)$  CONTINUA

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

SE QUESTO ESISTE ED È FINITO,  
ALLORA CONVERGE. SE NO NON HA SENSO


• ANALOGO PER  $f$  in  $(-\infty, a]$

.....

## ESEMPIO NOTEVOLE

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ in } [1, +\infty)$$

$\alpha < 0$  DIVERGE

$\alpha \geq 0$  

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \begin{cases} \log x, & \alpha = 1 \\ \left[ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right], & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \begin{cases} \log b, & \alpha = 1 \\ \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

**RASSUMENDO**

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow 0 < \alpha < 1 & \text{CONVERGE} \\ \searrow \alpha = 1 & \text{NON ESISTE} \\ \alpha > 1 & \text{CONVERGE} \end{cases}$$

**OSS** I TEOREMI DI CONFRONTO e DI CONFRONTO ASINTOTICO VALGONO PER INTEGRABILITÀ AD INFINITO

**ESEMPIO**

VALUTARE ESISTENZA DI  $\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2+2 = \textcircled{4} \int_{-1}^0 + \int_0^2$