APPROFONDIMENTO SUL TEO. 10

PER IL TEO. FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: $\Phi(x) = (x-\lambda_1)^{h_1} \dots (x-\lambda_m)^{h_m}$ (OGNI POLINOMIO PUÒ ESSERE SCOMPOSTO IN m RADICI CON MOLTEPLICITÀ h_m)

NEL NOSTRO CASO, POSSONO ANCHE ESSERE COMPLESSE. NEL NOSTRO TEOREMA, h È LA MOLTEPLICITÀ.

OSSERVAZIONE: $\lambda \in \mathbb{C}$ RADICE $\Longleftrightarrow \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ RADICE ($\bar{\lambda}$ È IL COMPLESSO CONIUGATO)
PERCHÉ $\overline{\Phi(\lambda)} = \Phi(\bar{\lambda})$

ES: $\Phi(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $\quad a_i \in \mathbb{R}$. SUPPONGO $\lambda \in \mathbb{C}$:

$\to \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \to \overline{\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0} = \bar{0} \longrightarrow \bar{\lambda}^3 + \bar{a}_2\bar{\lambda}^2 + \bar{a}_1\bar{\lambda} + \bar{a}_0 = 0 \longrightarrow$

$\to \bar{\lambda}^3 + a_2\bar{\lambda}^2 + a_1\bar{\lambda} + a_0 = 0$ (TRAMITE LE PROP: $\boxed{1}$ $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ e $\boxed{2}$ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$)

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE: $\alpha + i\beta$ È RADICE $\Longleftrightarrow \alpha - i\beta$ È RADICE (CONIUGATO COMPLESSO) $*_1$

"SI SA" TEO. 9
SO CHE $\lambda \in \mathbb{C}$ È RADICE CON MOLTEP. h
$z_i(x) = x^i e^{\lambda x}$, $i = 0, 1, \dots, h-1$ (PER QUESTO CON $\Delta = 0$ AVEVO e^x e xe^x)

GENERALIZZAZIONE TEO 9:

$$\sum_{j=1}^{r} h_j + 2\sum_{j=1}^{s} t_j = k$$

DOVE h_i È LA MOLTEPLICITÀ DELLA RADICE REALE λ_j
" " t_i " " " COMPLESSA $\alpha_j + i\beta_j$
k È L'ORDINE DELL'EQ. DIFFERENZIALE

IL 2 VIENE DAL FATTO CHE SIA $\alpha + i\beta$ CHE $\alpha - i\beta$ SONO RADICI! $*_2$

ALLORA
- $x^{h_i} e^{\lambda_i x}$ $\quad i = 0, \dots, h-1$
- $x^{t_i} e^{\alpha_i x} \cos(\beta_i x)$ $\quad i = 0, \dots, t-1$
- $x^{t_i} e^{\alpha_i x} \sin(\beta_i x)$ $\quad i = 0, \dots, t-1$

$\longrightarrow$ SPAZIO DI SOLUZIONI DI $\mathcal{L}(y) = 0$ (LIN. INDIP.)

ALLO STESSO MODO PUÒ ESSERE GENERALIZZATO ANCHE IL TEO. 10

ESEMPIO: $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = 0$

$\Phi(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2$
$\lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ $\quad \lambda = 0$ RADICE
$\lambda = 1, 2 \in \mathbb{R}$

TUTTE RADICI REALI
- $0 \to h = 2 \longrightarrow w_1 = e^{0 \cdot x} = 1$, $w_2 = x \cdot e^{0 \cdot x} = x$
- $1 \to h = 1 \longrightarrow w_3 = e^x$
- $2 \to h = 2 \longrightarrow w_4 = e^{2x}$

SOLUZ: $C_1 \cdot 1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{2x}$ CON $C_i \in \mathbb{R}$ $i = (1,2,3,4)$

ESERCIZIO: $y^{(3)} + 2y^{(2)} + y^{(1)} = x + 2$ *

1. RIFERIMENTI ALLA TEORIA: EQ. DIFF. DI $k=3$, COEFF. COSTANTI IN $\mathbb{R}$, LINEARE

2. ~~5~~, 6, 7, ~~8~~, 9, 10 (TEOREMI APPLICABILI) * SÌ CON $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e USANDO IL COSENO
NON È PC
SÌ, PER TROVARE SOL. GENERALE

3. SOLUZIONE GENERALE:

$\Phi = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda \to \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \to \lambda = 0 \quad h = 1$
$\lambda = -1 \quad h = 2$

$w_1 = 1$
$w_2 = e^{-x}$
$w_3 = xe^{-x}$

$$y(x) = y_*(x) + C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}$$

ESERCIZIO PER CASA: $y'' + y' + 2y = x^2 + x - 3$

SOLUZIONE:

1. STRUTTURA $\mathcal{L}(y) = b(x)$ $b(x) \in C(I)$ e $\mathcal{L}(y)$ a COEFF. COSTANTI e PER TEO. 7: $y(x) = \underbrace{y_*(x)}_{\text{SOLUZIONE PARTICOLARE } \mathcal{L}(y)=b(x)} + \underbrace{C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3}_{\text{SOLUZ. GENERALE DI } \mathcal{L}(y)=0 \text{ (TEO. 9)}}$

QUINDI TROVO $\Phi(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)^2$

QUINDI $\lambda = 0$ RADICE CON $h = 1 \longrightarrow$ $\boxed{e^{\lambda x} = e^{0x} = 1 \ (w_1)}$

$\lambda = -1$ RADICE CON $h = 2 \longrightarrow$ $\boxed{e^{\lambda x} = e^{-x} \ (w_2) \text{ e } xe^{\lambda x} = xe^{-x} \ (w_3)}$ $\rightarrow$ SOLUZ. GENERALE EQ. OMOGENEA $\mathcal{L}(y) = 0$

POSSO APPLICARE TEO. 10: $b(x) = x + 2 \rightarrow P_1(x) \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, CON $\alpha = 0$ e $\beta = 0$

QUINDI: $y_* = x^h \underbrace{\cancel{e^{\alpha x}}}_{1} (P_1^*(x) \underbrace{\cancel{\cos(0x)}}_{1} + \cancel{Q_1^*(x) \operatorname{sen}(0x)}) = x^h (P_1^*(x))$ DOVE h È LA MOLTEPLICITÀ DI $\alpha + i\beta = 0$ $(h = 1)$

$y_* = x(ax+b) \Rightarrow y_*' = 2ax + b$; $y'' = 2a$; $y''' = 0$ e SOSTITUISCO NELL' EQ. DIFFERENZIALE

$0 + 4a + 2ax + b = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 4a + b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{matrix}$ QUINDI: $\boxed{y_* = \frac{1}{2}x^2}$

CONCLUSIONE: $\boxed{y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}}$