• EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

▲ FORMA GENERALE:

$$E(y, y', \ldots, y^{(k)}, t) = 0 \qquad t \in I$$

↳ VARIABILE INDIPENDENTE

ALTRE NOTAZIONI PER FUNZIONI DERIVATE

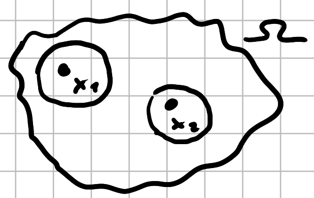
$$y' = \frac{dy}{dt} \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad y^{(k)} = \frac{d^k t}{dt^k}$$

• UNA SOLUZIONE È UNA y CHE SODDISFA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

DEFINIZIONE RIGOROSA:

SIA $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad \Omega$ "APERTO"

APERTO = $\forall x \in \Omega$, ESISTE UN DISCO CENTRATO IN x TUTTO CONTENUTO IN Ω
$D_x \subset \mathbb{R}$



UNA $y : I \to \mathbb{R}$ È SOLUZ. SE

- y È DERIVABILE SU I
- $(x, y(x)) \in \Omega$, $\forall x \in I$
- $y'(x) = f(x, y)$ $\quad \forall x \in I$

• L'ORDINE È L'ORDINE MASSIMO DELLE DERIVATE COINVOLTE NELL' EQUAZIONE

• NON TUTTE LE EQ. DIFFERENZIALI HANNO SOLUZIONE IN GENERALE CI DOBBIAMO CHIEDERE (SULLA SOLUZIONE):

- ESISTENZA
- UNICITÀ
- MOLTEPLICITÀ
- SOLUZIONI ESPLICITE (CIOÈ SVOLGIMENTO E RICERCA)

• ESEMPIO NOTEVOLE : MALTHUS $(y' = ky)$

- HA SOLUZIONE $y = c \cdot e^{kt}$ (TROVATA MOLTIP. PER e^{-kt})
- QUESTA y INGLOBA TUTTE LE SOLUZIONI POSSIBILI

PROBLEMA DI CAUCHY

SELEZIONA UNA SOLUZIONE PARTICOLARE CON UNA CONDIZIONE INIZIALE

ES: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ EQ. DIFF. / CONDIZ. INIZIALE

$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e NOTI

UNA CERTA y È SOLUZIONE SE:

- $y = y(x)$ SODDISFA $y' = f(x,y)$ SU QUALCHE INTERVALLO
- $x_0 \in I$
- $y(x_0) = y_0$

EQ. DIFFERENZIALE DI PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

$$(1)\quad y' = f(\underbrace{x}_{\text{VARIABILE INDIPENDENTE}}, \underbrace{y}_{\text{FUNZ. INCOGNITA}})$$

COEFF. y' SEMPRE 1

TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE RIVISITATO

$f: [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$ CONTINUA

$$y(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0, \quad \forall x \in [a,b]$$

È SOLUZIONE UNICA DEL PC

- DIM IMMEDIATA: $\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0\right)' = y(x_0) = f(x)$ ✓

e $y(x_0) = \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt}_{0} + y_0 \Rightarrow y(x_0) = y_0$

- DIM UNICITÀ

SUPPONGO $\begin{cases} y_1' = f(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y_2' = f(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$

SOTTRAGGO

$\begin{cases} (y_1 - y_2)' = f(x) - f(x) = 0 \\ (y_2 - y_1)x_0 = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$ e $M = y_1 - y_2 \Rightarrow \begin{cases} M' = 0 \\ M(x_0) = 0 \end{cases}$

CIOÈ:

$M(x) = c$ ($M' = 0$ SOLO CON f COSTANTE)

e $M(x) = 0$ QUINDI $c = 0$ $\forall x \in [a,b]$

CIOÈ $y_1 = y_2$

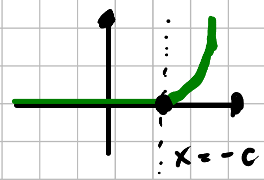
- UN PC PUÒ AVERE INFINITE SOLUZIONI (ES: PEANO) $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

QUESTO HA SOLUZIONE BANALE $y = 0$

MA ANCHE $y(x) = (x+c)^3$

PEANO RISOLVE CONSIDERANDO $y(-c) = 0$ CON $c < 0$

$$y_c(x) = \begin{cases} (x+c)^3 & x > -c \\ 0 & x \leq -c \end{cases}$$



- QUESTO È UN ES DI EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = a(x)\, b(x) \quad , \quad b(y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

e INTEGRANDO $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\,dx = \int a_x \, dx$ e PER SOSTITUZIONE

$$\int \frac{dy}{b(y)}$$

- EQ. LINEARI DEL PRIMO ORDINE A COEFF. VARIABILI

FORMA GENERALE: $y' + p(x)\, y = q(x)$ $\qquad p(x), q(x) \in C(I)$

$C(I) \Rightarrow$ CLASSE DI f CONTINUE IN I

OPPURE: $y' = \underbrace{q(x) - p(x)\, y}_{f(x,y)}$ o $\mathcal{L}y = q(x)$ DOVE $\mathcal{L}y := y' + p(x)\, y$

- PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y_1, y_2 DERIVABILI SU I e $\mathcal{L}y = \mathcal{L}(y)$:

- $\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}y_1 + \beta \mathcal{L}y_2$

DIM:

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha y_1' + \beta y_2' + \alpha p(x) y_1 + \beta p(x) y_2$$

- RACCOLGO α e β $\Rightarrow \alpha(y_1' + p(x) y_1) + \beta(y_2' + p(x) y_2)$

$= \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2)$ ✓

- TEOREMA DELLE EQ. DI PRIMO ORDINE LINEARI

UNA EQ. IN FORMA $y' + p(x)\,y = q(x)$ È

(A) $$y(x) = e^{-P(x)}\left\{c + \int e^{P(x)} \cdot q(x)\,dx\right\}$$

DOVE $P(x)$ RAPPRESENTA UNA GENERICA PRIMITIVA (CON C "INGLOBATA")

(B) IL PC
$$\begin{cases} y' + p(x)\,y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x_0 \in I$$
HA SOLUZIONE UNICA GRAZIE ALLA CONDIZ. INIZIALE (CIOÈ TROVA LA C)

DIM (B)

PONGO $Q(x) = \int e^{P(x)} \cdot q(x)\,dx$ E QUINDI: $y_0 = y(x_0) = e^{-P(x_0)}\{c + Q(x_0)\}$

E $c = y_0 e^{P(x_0)} - Q(x_0)$

UNICITÀ:

$$\begin{cases} y_1' + p(x)\,y_1 = q(x) \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2' + p(x)\,y_2 = q(x) \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- SOTTRAGGO

$$\begin{cases} y_1' - y_2' + p(x)(y_1 - y_2) = q(x) - q(x) = 0 \\ y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$
E PONGO $m = y_1 - y_2$

$$\begin{cases} m' + p(x)\,m = 0 \\ m(x_0) = 0 \end{cases}$$
CHE È UN CASO DEL PC DI (A), QUINDI RISOLVO CON FORMULA

$$m(x) = e^{-P(x)}\{c + e^{P(x)} \cdot 0\} = c\,e^{-P(x)}$$

E VISTO CHE $m(x_0) = 0$ (E L'ESPONENZIALE NON SI ANNULLA) ALLORA $c = 0$

E $m(x) = 0 \quad \forall x \in I$ CIOÈ $\boxed{y_1 = y_2}$ ✓

DIM (A)

CON IL "METODO DEL FATTORE INTEGRANTE"

PONGO $M(x) = \exp \int p(x)\,dx > 0$

$M'(x) = \exp \int p(x)\,dx \cdot p(x) = M(x) \cdot p(x)$ (DERIVATA ESPONENZIALE)

- MOLTIPLICO PER $M(x)$

$$y' M(x) + p(x)\,y\,M(x) = q(x)\,M(x)$$

CIOÈ $y' M(x) + M'(x) y = q(x) M(x)$

$(y(x) M(x))' = q(x) M(x)$ E INTEGRANDO

$$y(x) = \frac{\int q(x) M(x)\, dx}{M(x)}$$ ✓

• EQUAZIONE DI BERNOULLI:

RISOLVE LE EQUAZIONI DI TIPO: $y' + p(x) y = q(x) y^{\alpha}$, $p(x)$ E $q(x) \in C(I)$

$\alpha = 1$ E 0 SONO GIÀ NOTI E ASSUMO $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

DIVIDO PER y^{α}

$y' y^{-\alpha} + p(x) y^{1-\alpha} = q(x)$ E PONGO $z := y^{1-\alpha}$ E $z' := (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$

RISCRIVENDO CON z... $\frac{z'}{1-\alpha} + p(x) z = q(x) \Rightarrow z' + p(x)(1-\alpha) z = q(x)(1-\alpha)$

RISOLVIBILE CON TEOREMA DELLE EQ. DI 1 ORDINE LINEARI (TEO. 2)

• EQUAZIONE DI RICCATI:

$y' = r(x) + p(x) y + q(x) y^2$ * $\quad r, p, q \in C(I)$ E CONOSCIAMO PER HP $y_0' = *$

RISOLUZIONE

USO $z(x)$ COME $\Rightarrow y(x) = y_0(x) + \boxed{\frac{1}{z(x)}}$ SAREBBE IL "RESTO" E DERIVO:

$y' = y_0' - \frac{1}{z^2} \cdot z'$ E SOSTITUISCO NELLA FORMULA INIZIALE

$$\Rightarrow \cancel{y_0'} - \frac{z'}{z^2} = \cancel{r(x)} + p(x)\left(\cancel{y_0(x)} + \frac{1}{z(x)}\right) + q(x)\left(\cancel{y_0^2(x)} + \frac{2y_0(x)}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right)$$ PERCHÈ y_0 È SOLUZIONE

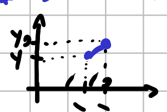
$$= -\frac{z'}{z^2} = \frac{p(x)}{z(x)} + \frac{2y_0(x) q(x)}{z(x)} + \frac{p(x)}{z^2(x)} = 0$$ (MOLTIPLICO PER $z(x)$) $\Rightarrow z' + 2q(x)y_0(x) - z = -q(x) z$

FORMA APPLICABILE AL TEO. 2 SU z, E TROVO y CON $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$

• CONTINUITÀ DI UNA $f(x,y)$

UNA $f(x,y)$ È CONTINUA IN (x_0, y_0) SE:
- $(x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (DOMINIO FUNZIONE)
- $\lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ CIOÈ $\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x,y) - L| < \varepsilon \ \forall (x,y) \in \Omega$ t.c. $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2} < \delta$

* DISTANZA TRA 2 PUNTI



$< \delta$

• ESEMPI DI f CONTINUE

- SE $f(x,y) := g(x)$ (E $g(x) \in C(I)$) $\to f(x,y) \in C(\overset{x\in}{I} \times \overset{y\in}{\mathbb{R}})$
- $+, -, \cdot$ DI f CONTINUE SONO CONTINUE
- IL QUOZ. DI f CONTINUE È CONTINUO $\forall (x,y) \in \Omega - \{DENOM = 0\}$
- I POLINOMI SONO f CONTINUE SU $\Omega = \mathbb{R}^2$
- LE f RAZIONALI SONO CONTINUE SUL LORO DOMINIO
- SE $g(x) \in C(I)$ E $f(x,y) \in C(x, g(x))$, ALLORA $f(x,y)$ È CONTINUA SU I
- $f(x,y) \in C(U \subseteq \Omega)$ E $g(x) \in C(\text{CODOM. DI } f)$ ALLORA $g(f(x,y)) \in C(U \subseteq \mathbb{R}^2)$

TEOREMA DI PEANO ($\exists$ SOLUZIONI PC)

HP: DATO UN GENERALE PC e $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f(x) \in C(\Omega)$ e Ω "APERTO" ($\forall x, y$ IN Ω $\exists$ DISCO CONTENUTO)

ALLORA $\boxed{\exists\, y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ DEFINITA SU QUALCHE } I \text{ CONTENENTE } x_0, \text{ SOLUZIONE DEL PC}}$

TEO. 3 : $\exists$ e UNICITÀ GLOBALE SU PC

SIA $\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}$ (ma ANCHE $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$):

- $(x_0, y_0) \in \Omega$
- $f: \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $f \in C(\Omega)$
- $\exists L > 0$ t.c. $|f(x,y) - f(x,z)| \le L|y-z| \quad \forall (x,y),(x,z) \in \Omega$ $\Rightarrow$ IPOTESI DI LIPSCHITZ

ALLORA $\boxed{\exists \text{ ed È UNICA LA SOLUZ. DEL PC PER } I = [a,b] \text{ (o } \mathbb{R} \text{ SE } \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R})}$

TEO. 4 : $\exists$ e UNICITÀ LOCALE

DATA B_r "BOLLA APERTA CENTRATA IN (x_0, y_0) e DI RAGGIO r" $\Rightarrow B_r(x_0,y_0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r \right\}$

DISTANZA PUNTO (x,y) DAL CENTRO e RAGGIO

- $f \in C(B_r)$

ALLORA IL PC HA SOLUZIONE UNICA DEFINITA SU I (CONTENENTE x_0) $\subset \mathbb{R}$

È POSSIBILE DIMOSTRARE IL TEO. 2 USANDO IL TEOREMA 3:

DA $y' = q(x) - p(x)y = f(x,y)$ e $\bullet \in C(I_x \times \mathbb{R}_y)$ CONSIDERO $[a,b] \subseteq I$ e $f \in C(\Omega)$

$\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}$, $x_0 \in$

IMPONGO L'HP DI LIPSCHITZ:

$|\cancel{q(x)} - p(x)y - \cancel{q(x)} + p(x)z| \le L|y-z| \Rightarrow |-p(x)y + p(x)z| \le L|y-z| \Rightarrow |p(x)| \cdot |y-z| \le L|y-z|$

$\Rightarrow$ PONGO $L = \max(p(x))$ IN $[a,b]$ (CHE ESISTE PER WEIERSTRASS) e QUINDI LA DISEQ. È VERIF.

e SE HO UNICITÀ e ESISTENZA SU $[a,b]$ ARBITRARIO, LA HO SU I

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

- STRUTTURA GENERALE: $y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)})$

DATO IL SEGUENTE PC y È UNA SOLUZIONE SU I SE: (CON $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\text{PC} \begin{cases} y^{(k)} = f(x, y, \dots, y^{(k-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ \dots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1} \end{cases}$$

- y È DERIVABILE SU I
- $(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \in \Omega \quad \forall x \in I$
- $y^{(k)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$ SU QUALCHE I (CIOÈ SE VERIFICA L'EQ. DIFF.)

EQ. DIFF. "LINEARI" DI ORDINE SUPERIORE

SONO SOLO GENERALIZZAZIONI DELLA FORMA $y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow \mathcal{L}(y) = q(x)$

CIOÈ: $\boxed{y^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x) y^{(i)} = b(x)}$ CON $a, b \in C(I)$ $I \subseteq \mathbb{R}$

NOTA: $\mathcal{L}(y) = 0$ È DETTA EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA A $\mathcal{L}(y) = q(x)$

• TEOREMA 5, ∃ e UNICITÀ SOLUZIONI (PC)

AVENDO $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$: (PC) $\begin{cases} \text{EQ. DIFF.} \\ \vdots \\ y^{k-1}(x_0) = y_k \end{cases}$ HA SOLUZIONE e QUESTA $y = y(x)$ è UNICA SU I

• INDIPENDENZA LINEARE DI FUNZIONI

DATE K FUNZIONI $v_1, \dots, v_k$ DEFINITE SU I, SONO LIN. INDIPENDENTI SE:

$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0}$ $\quad \forall x \in I \quad$ s $\quad c_1 = c_2 = \dots = 0$

• TEOREMA 6, SOLUZIONI DI EQUAZIONI CON COEFF. LIN. INDIPENDENTI

DATA UNA EQ. DI ORDINE k, AVENDO a_i, $i = 0, \dots, k-1 \in C(I)$
e $S = \{$SPAZIO SOLUZIONI DI $\mathcal{L}(y) = 0$ SU $I\}$

1. S È SPAZIO VETTORIALE
2. $\dim(S) = k \Rightarrow$ È POSSIBILE SELEZIONARE K SOLUZIONI DI $\mathcal{L}(y)=0$ SU I, $w_1, w_2, \dots, w_k$ t.c.
   OGNI SOLUZIONE $y: I \to \mathbb{R}$ SI SCRIVE COME:
   - $y(x) = c_1 w_1(x) + \dots + c_k w_k(x) \quad \forall x \in I$ e $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$
     ↳ SOLUZIONE GENERALE ESPRESSA COME COMBINAZIONE LINEARE

CENNO ALLA DIM:

S SODDISFA GLI ASSIOMI DEGLI SPAZI VETT., IN PARTICOLARE $y_1, y_2 \in S \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in S$ $\quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
MA ANCHE

↳ $\underbrace{\mathcal{L}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{=0} = \alpha_1 \underbrace{\mathcal{L}(y_1)}_{0} + \alpha_2 \underbrace{\mathcal{L}(y_2)}_{0} = 0$

• TEOREMA 7: SOLUZIONI EQ. LINEARI

DATI $a_i(x)$ e $b(x) \in C(I)$
ALLORA LA SOLUZIONE GENERALE DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ È: $\boxed{y(x) = y_*(x) + c_1 w_1(x) + \dots + c_k w_k(x)}$

DOVE y_* È UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ e $w_1, \dots, w_k$ SONO LIN. INDIP. $(c_1 \dots c_k \in \mathbb{R})$

• DIM:

PER PROP. LINEARITÀ: $\mathcal{L}(y_* + c_1 w_1 + \dots + c_k w_k) = \mathcal{L}(y_*) + c_1 \underbrace{\mathcal{L}(w_1)}_{0} + \dots + c_k \underbrace{\mathcal{L}(w_k)}_{0} = \mathcal{L}(y_*) = b(x)$
PRENDO UNA SOLUZ. DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ $\quad y: y(x)$ ARBITRARIA

e TROVO CHE: $\mathcal{L}(y - y_*) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y_*) = b(x) - b(x) = 0 \quad \forall x$ CIOÈ $\mathcal{L}(y - y_0) = 0$, $y - y_0 \in S$, PER TEO. 6 $\Rightarrow$
$\Rightarrow y - y_0 = c_1 w_1 + \dots + c_k w_k$ DOVE w_i LIN. INDIP. CIOÈ: $y = y_* + c_1 w_1 + \dots + c_k w_k$

• TEO 8: MATRICE WRONSKIANA

SIA • $k=2$ (ORDINE EQ. DIFF) e • $a_1(x), a_0(x) \in C(I)$ e INFINE w_1, w_2 SOLUZIONI DI $\overbrace{y'' + a_1 y' + a_0 y}^{\mathcal{L}(y)} = 0$
ALLORA w_1, w_2 SONO LIN. INDIPENDENTI SU I SE E SOLO SE:

$$\boxed{\det \underbrace{\begin{pmatrix} w_1(x) & w_2(x) \\ w_1'(x) & w_2'(x) \end{pmatrix}}_{A} \neq 0 \quad \forall x \in I \qquad A = \text{MATRICE WRONSKIANA}}$$

EQUAZIONI DI ORDINE SUPERIORE:

- A COEFF. COSTANTI: $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$ $\quad \{a_1, a_0\} \in \mathbb{R}$, $b(x) \in C(I)$

DEFINIAMO POLINOMIO CARATTERISTICO $\Phi := x^2 + a_1 x + a_0$
EQUAZIONE CARATTERISTICA $\Phi = 0$

Δ (DISCRIMINANTE) $= a_1^2 - 4a_0$

ABBIAMO DIVERSE SOLUZIONI IN BASE AL Δ:

1. $\Delta > 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$
2. $\Delta = 0$ $\quad \lambda = -\frac{a_1}{2}$
3. $\Delta < 0$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ (SOLUZ. COMPLESSA)

TEOREMA 9 (SOLUZIONE GENERALE):

HP: • $\mathcal{L}(y) = 0$ (ED. OMOGENEA) e $k = 2$ (ORDINE 2)
• $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ e $a_{1}, a_0 \in \mathbb{R}$ HA SOLUZIONE $y(x) = C_1 w_1 + C_2 w_2$

CON $k = 2$:

- $\Delta > 0 \rightarrow w_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ $\Big| \mathbb{R}$
- $\Delta = 0 \rightarrow w_1 = e^{\lambda x}$ e $x e^{\lambda x}$
- $\Delta < 0 \rightarrow w_1 = e^{\alpha x} \cos(x)$ e $e^{\alpha x} \sin(x)$ $\Big| \mathbb{C}$

GENERALIZZATO:

$x^{h_i} e^{\lambda_i x}$ $\Big| \mathbb{R}$
$x^{t_i} e^{\alpha_i x} \cos(x)$
$x^{t_i} e^{\alpha_i x} \sin(x)$ $\Big| \mathbb{C}$

$\rightarrow$ SPAZIO DELLE SOLUZ. DI $\mathcal{L}(y) = 0$

DOVE h_i e t_i SONO LA MOLTEPLICITÀ DELLE SOLUZIONI IN $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$

$\sum_{j=1}^{r} h_j + 2\sum_{j=1}^{s} t_j = k$, LA SOMMA DELLE MOLTEPLICITÀ È L'ORDINE DELL' ED

$\rightarrow$ PERCHÈ SIA $\alpha + i\beta$ CHE $\alpha - i\beta$ (COMPLESSO CONIUGATO) SONO SOLUZIONI

PER GIUSTIFICARE IL TEOREMA 9

CONSIDERO $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ QUINDI $f(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ $\quad \alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

e RICHIAMO L'IDENTITÀ DI EULERO: $e^{ib} := \cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)$ e $e^{a+ib} := e^{a}(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b))$

• CALCOLO y', CIOÈ $(e^{\lambda x})'$:

- $e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) + i\,\mathrm{sen}(bx))$

- $(e^{\lambda x})' = (e^{ax})'(\cos(bx) + i\,\mathrm{sen}(bx)) + e^{ax}(\cos(bx) + i\,\mathrm{sen}(bx))'$
$= a e^{ax} \cdot e^{ibx} + e^{ax} \cdot (-b\,\mathrm{sen}(bx) + bi\cos(bx))$
$= a e^{\lambda x} + e^{ax}(bi\underbrace{(\cos(bx) + i\,\mathrm{sen}(bx))}_{\rightarrow e^{ibx}}) = a e^{\lambda x} + ib e^{\lambda x} = (a + ib)e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA 9

CONSIDERO UNA $y = e^{\lambda x}$ SOLUZIONE DELL' ED e $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. SOSTITUENDO:

$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0 \rightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \Rightarrow \Phi(\lambda) = 0$ $\quad \lambda$ È RADICE DEL POLINO.

• $\Delta > 0$ HO 2 SOL. REALI $w_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $w_2 = e^{\lambda_2 x}$

• $\Delta = 0$ HO 1 SOLUZIONE $e^{\lambda x}$. L'ALTRA SARÀ NELLA FORMA $c(x)e^{\lambda x}$. ALLORA DERIVO e SOSTITUISCO
$y'(x) = e^{\lambda x}(\lambda c(x) + c'(x))$ e $y''(x) = e^{\lambda x}(\lambda^2 c(x) + 2\lambda c'(x) + c''(x))$
SOSTITUISCO, RICORDANDO $\lambda = -\frac{a_1}{2}$
$e^{\lambda x}[\underbrace{\cancel{(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)}}_{=0,\ \lambda \text{ è radice}} c(x) + \underbrace{\cancel{(2\lambda + a_1)}}_{=0} c'(x) + c''(x)] = 0 \rightarrow c''(x) = 0 \Longleftrightarrow c'(x) = C_1 \overset{\text{INTEGRO}}{\Longleftrightarrow} c(x) = C_1 x + C_2$

FINALMENTE: $y(x) = (c_1 x + c_2) e^{\lambda x} \to c_1 = 0 \Rightarrow w_1 = c_2 e^{\lambda x}$

$c_1 \neq 0,\ c_2 = 0 \Rightarrow w_2 = c_1 x e^{\lambda x}$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ RADICI $\underbrace{-\frac{a_1}{2}}_{\alpha} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}_{\beta}$ (λ e $\bar{\lambda}$ DISTINTI). VALUTO $V_{1,2} = e^{\lambda_{1,2} x}$ (FUNZIONI COMPLESSE)

$W_1 = \frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ e $W_2 = -\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_2$ (ESSENDO $\mathcal{L}(y) = 0$, SIA $V_{1,2}$ CHE $W_{1,2}$ LO SONO)

$\hookrightarrow \frac{1}{2} e^{(\alpha + i\beta)x} + \frac{1}{2} e^{(\alpha - i\beta)x} = \frac{1}{2} e^{\alpha x} \left[\cos(\beta x) + \cancel{i\,\text{sen}(\beta x)} + \cos(-\beta x) + \cancel{\underbrace{i\,\text{sen}(-\beta x)}_{-i\,\text{sen}(\beta x)}} \right] = \frac{1}{\cancel{2}} e^{\alpha x} \left(\cancel{2} \cos(\beta x) \right) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$

TEOREMA 10 (SOLUZIONE PARTICOLARE)

HP: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, P_r POLINOMIO DI GRADO r. ED IN FORMA: $y'' + a_1 y' + a_0 y = P_r(x) e^{\alpha x} \text{sen}(\beta x)$ " = " "$\cos(\beta x)$" ALLORA

$y_*(x) = x^h e^{\alpha x} \{ P_r(x) \,\text{sen}(\beta x) + Q_r \cos(\beta x) \}$, CON Q_r e P_r POLINOMI DI GRADO r e

$h = 0$ SE $\alpha + i\beta$ NON È RADICE DI Φ

$h = 1$ | $\Delta > 0 \lor \Delta < 0$ $\alpha + i\beta$ È RADICE DI Φ

$h = 2$ ↓ $\Delta = 0$ $\alpha + i \cdot 0 \to \alpha$ È RADICE REALE DI Φ