

## • ESEMPIO RISOLUZIONE CON EQ. DI RICCARDI

PC  $\begin{cases} y' - 9x^2y + 2xy^2 = 2x + 1 - 2x^3 \\ y(0) = 2 \end{cases} *$

\* STRUTT. EQ. RICCARDI

- 1 - VERIFICARE CHE HA UNA SOLU. NELLA FORMA  $y_* = ax + b$
- 2 - TROVARE SOLU. (PC) L'INTERVALLO ESISTENZA MASSIMALE ( $I_{\max}$ )

1 -  $y_* = ax + b \Rightarrow y'_* = a$  e MI DOMANDO:  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  t.c.  $y_* = ax + b$  VERIFICATA?

↳ LI SOSTITUISCO NELL' EQUAZIONE

$$\underbrace{(-4a + 2a^2 + 2)}_{2(a-1)^2} x^3 + \underbrace{(-4b + 4ab)}_{4b(a-1)} x^2 + \underbrace{(2b^2 - 2)}_{2(b^2-1)} x + a - 1 = 0$$

AFFINCHÉ SIA TUTTO 0, I COEFF. DEVONO ESSERE NULLI

$$\begin{cases} (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ b(a-1) = 0 \Rightarrow b = 0, a = 1 \\ b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = \pm 1 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

PERCHÉ NON VALE IN  $b^2 - 1 = 0$

SOLUZIONI:  $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$  e  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$  CIÒ È:  $y_1 = x + 1$  e  $y_2 = x - 1$

ORA USIAMO LA VARIABILE AUSILIARIA  $z$  (DALL'EQ. DI RICCARDI)  $y = \frac{y_0}{x+1} + \frac{1}{2}$ ,  $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$   
e SOSTITUENDO NELL' EQ.  $z' - \frac{4}{z} = \frac{2x}{z^2}$  - APPLICHO QUINDI TEOREMA 2

$$z(x) = e^{\int 4x dx} \left\{ c + \int e^{-\int 4x dx} \cdot 2x dx \right\} = e^{2x^2} \left\{ c + \int e^{-2x^2} \cdot 2x dx \right\} = e^{2x^2} \left\{ c - \frac{1}{2} e^{-2x^2} \right\} = c e^{2x^2} - \frac{1}{2}$$

e TROVO  $y$  CON  $y = x + 1 + \frac{1}{z}$  CHE È  $y = x + 1 + \left( c e^{2x^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$

PONGO LA CONDIZ. INIZIALE  $\Rightarrow z = 0 + 1 + \left( c e^0 - \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow 1 = c - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

②  $I_{\max} = ?$

$$\frac{3}{2} e^{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3e^{2x^2} = 1 \quad e^{2x^2} = \frac{1}{3} \quad 2x^2 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad x = \pm \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{2}} \Rightarrow \text{NO!}$$

QUINDI  $y \in C(\mathbb{R})$  CIÒ È  $I_{\max} \Rightarrow (\mathbb{R})$

• ESISTENZA e UNICITÀ PER PROBLEMI CAUCHY (PL)  $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

- UNA  $f(x, y)$  È CONTINUA IN  $(x_0, y_0)$  SE:

- $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  (DOMINIO DI  $f$ )
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  ESISTE FINITO ed È UGUALE A  $f(x_0, y_0)$

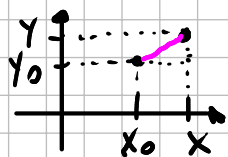
↳ CIÒ È

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in \Omega \text{ t.c.}$$

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

DISTANZA 2 PUNTI



STESSA COSA PER CONTINUITÀ SU INTERVALLI

DEFINITA COME  $f \in C(\Omega)$  CLASSI DI  $f$  CONTINUE SU  $\Omega$

• CRITERI DI CONTINUITÀ (CASI CONCRETI)

① SE  $g(x)$  È CONTINUA SU  $I$  ALLORA  $f(x, y) := g(x)$  È CONTINUA SU  $\Omega = I \times \mathbb{R}$

② SOMMA, DIFFERENZA e PRODOTTO DI  $f$  CONTINUE SU  $\Omega$  SONO CONTINUE SU  $\Omega$

③ IL QUOZIENTE DI  $f$  CONTINUE È CONTINUA  $\forall (x, y) \in \Omega \setminus \{\text{DENOM} = 0\}$

④ I POLINOMI SONO  $f$  CONTINUE SU  $\Omega = \mathbb{R}^2$

ES:  $x^4y^3 + x^2y + y^5 + 1$

⑤ LE FUNZIONI RAZIONALI SONO CONTINUE SUL LORO DOMINIO ( $\frac{p(x,y)}{q(x,y)}$   $q(x,y) \neq 0$ ) ( $p, q$  POLINOMI)

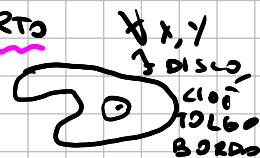
⑥ SE  $g(x)$  È CONTINUA IN UN INTERVALLO  $I$  E  $f(x,y)$  È CONTINUA NEI PUNTI  $(x, g(x))$  ALLORA  $f(x, g(x))$  È CONTINUA SU  $I$

⑦  $f(x,y) \in C(U \subseteq \mathbb{R}^2)$  E  $g(x) \in C(\text{DOMINIO DI } f)$  ALLORA  $g(f(x,y)) \in C(U \subseteq \mathbb{R}^2)$

## ● TEOREMA DI PEANO

DATO (PC)  $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

DOVE  $(x_0, y_0) \in \Omega$ ,  $f \in C(\Omega)$ ,  $\Omega$  APERTO



TESI: (PC) HA UNA SOLUZIONE SU  $y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  DEFINITA SU QUALCHE INTERVALLO CONTENENTE  $x_0$

## ● TEOREMA 3: DI ESISTENZA E UNICITA' GLOBALE (PEANO, PICARD, CAUCHY, LINDOLF)

SIA  $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}$  (oppure  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ )

•  $(x_0, y_0) \in \Omega$

•  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C(\Omega)$

ASSUMIAMO  $\exists L > 0$  t.c.  $|f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y-z| \quad \forall (x,y), (x,z) \in \Omega$

ALLORA ESISTE UNA SOLA SOLUZ. DI (PC)  $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  PER  $I = [a, b]$  (S  $I = \mathbb{R}$  CON  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ )

CONDIZIONE DI LIPSCHITZ

## ● TEOREMA 4 (ESISTENZA E UNICITA' LOCALE)

"BOLLA APERTA CENTRATA IN  $(x_0, y_0)$  DI RAGGIO  $r > 0$ "

$B_r(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}$  ASSUMIAMO  $f \in C(B_r)$  E  $\exists L > 0$  t.c.

ALLORA IL (PC)  $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  HA SOLUZ. UNICA DEFINITA SU  $I$  CONTENENTE  $x_0$

## ● TED. 2 - (B) DIMOSTRATO CON TED. 3

$y' = q(x) - p(x)y = f(x,y)$   
 $\in C(I \times \mathbb{R})$

CONSIDERO  $[a, b] \subseteq I$  E  $f \in C(\Omega)$   $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}$  CON  $x_0$

+ HP DI LIPSCHITZ, CIOE  $|f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y-z| \quad \forall (x,y), (x,z) \in \Omega$

DIVENTA  $|q(x) - p(x)y - q(x) + p(x)z| = |-p(x)y + p(x)z| = |p(x)| \cdot |y-z| \leq \max |p(x)| \cdot |y-z| \leq L|y-z|$   
 $\stackrel{\exists \text{ FINITA PER WEIERSTRASS}}{=} L$   
 $\leq L|y-z| \quad \checkmark$

QUINDI UNICITA' E ESISTENZA SU  $[a, b]$  ARBITRARIO, CIOE ANCHE SU  $I$   $\checkmark$

ESEMPIO:

(PC)  $\begin{cases} y' = \frac{2x}{x^2+1}y + xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3}\right)}}$

$I_{\max} \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{(x^2+1)^3}{3} > 0 \Rightarrow 4 - (x^2+1)^3 > 0 \Rightarrow x^2 < \sqrt[3]{4-1}$

$\Rightarrow x \in (-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}) = I_{\max}$ , POSSO APPLICARE SOLO TED. 4  
(MA NON MI DA INFORM. SU  $I_{\max}$ )