Esempi di modelli

Ricerca Operativa [035IN]

Lorenzo Castelli

23 Settembre 2021

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

La compilation ideale

Si vuole realizzare una compilation ideale avendo disposizione dei file musicali e un CD-ROM dalla capacità di 800 MB. l'indice di gradimento (in una scala da 1 a 10) e l'ingombro in MB di ogni file sono riportati nella tabella seguente.

Canzone	Gradimento	Ingombro
Light my fire	8	210
Fame	7	190
I will survive	8,5	235
Imagine	9	250
Let it be	7,5	200
I feel good	8	220

Si vuole decidere quali file inserire nel CD in modo tale da massimizzare il gradimento complessivo senza eccedere la capacità del CD.

La compilation ideale - formulazione

Il problema può essere modellato per mezzo di variabili decisionali binarie associate a ogni file musicale in modo tale che assumono valore uno se il file in questione e inserito nel CD valore zero in caso contrario.

Indicato con g_i il gradimento della canzone i-esima, con w_i il suo ingombro e con C la capacità del CD il problema può essere formulato per mezzo del seguente problema PLI:

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq C \\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

dove $n = 6$ è il numero di file musicali. L'unico vincolo del problema consiste nel fatto che l'ingombro dei file inseriti non deve eccedere la capacità del CD.

Problema dello zaino - Knapsack

I treni combinati

Una compagnia ferroviaria deve decidere quanti treni combinati realizzare potendo scegliere tra due diversi modelli DeLuxe e FarWest. La composizione dei due treni è schematizzata nella tabella seguente.

Tipo di vagone	DeLuxe	FarWest	Disponibilità
Merci	1	3	12
WLit	1	0	9
Ristorante	1	0	10
II Classe	2	3	21
I Classe	1	2	10
Motrice	1	1	9
Guadagno	€3000	€8000	-

Si vuole massimizzare il guadagno totale

I treni combinati - formulazione

Poiché dobbiamo decidere quanti treni di ciascun tipo realizzare il problema può essere formulato per mezzo di due variabili decisionali x_1 e x_2 che rappresentano rispettivamente il numero di treni Deluxe e il numero di treni Far West da realizzare: ovviamente tali variabili dovranno risultare intere e non negative.

$$
\begin{aligned}
\max z = 3x_1 + 8x_2 & \\
x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
x_1 &\leq 9 \\
x_1 &\leq 10 \\
x_1 + x_2 &\leq 9 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, interi
\end{aligned}
$$

La raffineria

Una raffineria miscela quattro tipi di petrolio greggio in diverse proporzioni per ottenere tre diversi tipi di benzina: normale, blu super e V-power. La massima quantità disponibile di ciascun componente greggio e il corrispondente costo di acquisto sono indicati nella seguente tabella.

Componente	Disponibilità massima (barili)	Costo (€)
P1	500	9
P2	2400	7
P3	4000	12
P4	1500	6

Per poter soddisfare le specifiche qualitative dei diversi tipi di benzina è necessario rispettare dei limiti assegnati circa la percentuale di ciascun componente impiegato. Tali limiti, insieme ai prezzi di vendita dei diversi tipi di benzina, sono indicati nella tabella che segue:

Benzina	Specifiche qualitative	Prezzo (€ barile)
Normale	almeno il 20% di P2 e al massimo il 30% di P3	12
Blu super	almeno il 40% di P3	18
V-power	al massimo il 50% di P2	10

Si vuole determinare la miscela ottimale dei quattro componenti che massimizza il guadagno totale derivante dalla vendita delle benzine.

La raffineria - formulazione

Poiché dobbiamo decidere quale quantità di ogni componente greggio usare nella produzione di ciascun tipo di benzina, nella formulazione sono necessarie delle variabili a due indici: $x_{ij} =$ barili di componente greggio i usati nella produzione di benzina di tipo j.

$$max \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} p_j x_{ij} - \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_i x_{ij}$$

$$x_{21} \geq 0,2 \sum_{i=1}^{4} x_{i1}$$

$$x_{31} \leq 0,3 \sum_{i=1}^{4} x_{i1}$$

$$x_{32} \geq 0,4 \sum_{i=1}^{4} x_{i2}$$

$$x_{23} \leq 0,5 \sum_{i=1}^{4} x_{i3}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq d_i \quad per \ i = 1, \ldots, 4$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad per \ i = 1, \ldots, 4 \quad j = 1. \ldots, 3$$

Dove c_i e d_i indicano rispettivamente il costo e la disponibilità del componente greggio i, e p_j indica il prezzo di vendita della benzina j.

La turnaznione degli infermieri

Un ospedale deve organizzare i turni settimanali degli infermieri in modo da minimizzare il numero totale di persone coinvolte. Per soddisfare le esigenze di servizio occorre garantire ogni giorno la presenza di un numero minimo di infermieri (vedi tabella).

	LUN	MAR	MER	GIO	VEN	SAB	DOM
Infermieri	17	13	15	19	14	16	11

I turni degli infermieri consistono in cinque giorni consecutivi di lavoro seguiti da due giorni di riposo (per esempio venerdì, sabato, domenica, lunedì, e martedì lavoro; mercoledì e giovedì riposo).

Il problema può essere modellato mediante le variabili decisionali x_i che rappresentano il numero di persone che iniziano il turno di lavoro il giorno i per $i = 1, \ldots, 7$.

$$\begin{aligned}
\min z = \sum_{1=7} x_i \\
x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 \\
x_i \geq 0 \quad \text{e intero, per } i = 1, \ldots, 7
\end{aligned}$$

dove i vincoli impongono la presenza del numero minimo di infermieri per ciascun giorno della settimana.

La campagna pubblicitaria

Un’agenzia di pubblicità deve realizzare una campagna promozionale avendo disposizione due mezzi: gli annunci radiofonici e quelli su carta stampata. Sono ammessi annunci radiofonici con durata di frazione di minuto e annunci sul giornale di frazione di pagina. Le stazioni radiofoniche private praticano sconti in base alla quantità di minuti richiesti: il costo al minuto è di €100 meno €2 per ogni minuto utilizzato (p. e., il costo al minuto qualora se ne richiedono tre è di €94). Inoltre, le emittenti possono fornire al massimo 30 minuti di annunci in totale. I giornali invece richiedono un prezzo standard di €200 per pagina. Per vincoli contrattuali almeno un terzo della spesa deve consistere in annunci sui giornali. In base ai risultati statistici si stima che tramite un minuto di annunci radiofonici si raggiungono 100.000 persone e tramite un annuncio su una pagina di giornale 15.000 persone. L’agenzia deve raggiungere almeno 3 milioni di persone minimizzando i costi della campagna.

Introduciamo le variabili decisionali x_1 e x_2 che rappresentano il numero di minuti e il numero di pagine di giornale utilizzati nella campagna.

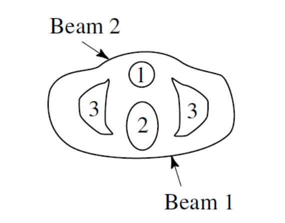
$$
\begin{aligned}
min f(x) = (100 - 2x_1)x_1 + 200x_2 \\
100x_1 + 15x_2 \geq 3000 \\
200x_2 \geq 1/3((100 - 2x_1)x_1 + 200x_2) \\
0 \leq x_1 \leq 30, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Come si vede si tratta di un problema di programmazione non lineare.

Radioterapia

- La radioterapia prevede l'utilizzo di raggio esterno per far passare le radiazioni ionizzanti attraverso il corpo del paziente, danneggiando sia i tessuti cancerosi che quelli sani.
- Normalmente, diversi fasci vengono amministrati con precisione da diverse angolazioni in un piano bidimensionale. A causa dell'attenuazione, ogni raggio fornisce più radiazioni al tessuto vicino al punto di ingresso rispetto al tessuto vicino al punto di uscita. La dispersione causa anche una certa quantità di radiazione al tessuto al di fuori del percorso diretto del raggio.
- Poiché le cellule tumorali sono tipicamente microscopicamente intervallati tra cellule sane, il dosaggio di radiazioni in tutto la regione del tumore deve essere abbastanza grande da uccidere le cellule maligne, che sono leggermente più radiosensibili, ma abbastanza piccolo da risparmiare le cellule sane.
- Allo stesso tempo, la dose che colpisce i tessuti critici non deve superare i livelli di tolleranza stabiliti, al fine di prevenire complicazioni che possono essere più gravi della malattia stessa. Per la stessa ragione, la dose totale all'intera parte sana deve essere ridotta al minimo.
- L'obiettivo del progetto è selezionare la combinazione di raggi da utilizzare, e l'intensità di ciascuno, per generare la migliore distribuzione possibile della dose. (L'intensità della dose in qualsiasi punto del corpo viene misurata in unità chiamate kilorad.)

Radioterapia



Area	Frazione della dose d'ingresso assorbita dall'area Raggio 1	Raggio 2	Restrizioni su dosaggio totale medio (Kilorad)
Anatomia sana	0.4	0.5	minimizzare
Tessuti critici	0.3	0.1	≤ 2.7
Regione tumorale	0.5	0.5	$= 6.0$
Nucleo del tumore	0.6	0.4	≥ 0.6

Radioterapia - formulazione

Le due variabili decisionali x_1 e x_2 rappresentano la dose (in kilorad) al punto di ingresso per il raggio 1 e il raggio 2, rispettivamente.

$$\begin{aligned} \min z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 0.6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Thank you for your attention