Soluzioni di base

Ricerca Operativa [035IN]

Lorenzo Castelli

04 Ottobre 2021

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

Forma standard

Un qualunque problema di programmazione lineare può sempre essere formulato in forma standard

$$
\begin{aligned}
\max z &= \mathbf{c}\mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \ (\mathbf{b} \geq \mathbf{0}) \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Soluzioni di base (i)

Dato il problema

$$max z = \mathbf{cx}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

si supponga $rank(\mathbf{A}) = m$. Poiché $m < n$, eventualmente riordinando le colonne, si può porre

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}|\mathbf{N}]$$

dove

- $\mathbf{B}$ è una matrice non singolare $m \times n$ detta matrice delle colonne in base.
- $\mathbf{N}$ è una matrice $m \times (n - m)$, matrice delle colonne fuori base

La matrice $\mathbf{B}$ è composta da m colonne di $\mathbf{A}$ linearmente indipendenti che formano una base nello spazio vettoriale ad m dimensioni delle colonne di $\mathbf{A}$.

Soluzioni di base (ii)

In corrispondenza di una scelta di $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{N}$ si può partizionare anche il vettore delle $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} \begin{array}{l} m \text{ componenti} \\ n - m \text{ componenti} \end{array}$$

- $\mathbf{x_B}$ è detto vettore delle variabili in base (vettore di base)
- $\mathbf{x_N}$ è detto vettore delle variabili fuori base

Soluzioni di base (iii)

Il sistema di equazioni lineari $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si può riscrivere come

$$[\mathbf{B}|\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{x_B} + \mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$$

Per ogni base $\mathbf{B}$ ogni soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ corrisponde a determinare il valore per m variabili $\mathbf{x_B}$ avendo fissato arbitrariamente il valore per le restanti $n - m$ variabili $\mathbf{x_N}$.

Una scelta particolarmente importante è porre $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$, da cui si ottiene la corrispondente soluzione di base

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ si ottiene una soluzione di base ammissibile (BFS) per il sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Dato il problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, una soluzione $\mathbf{x}$ è un vertice del poliedro P(A, b) se e solo se $\mathbf{x}$ è una BFS

Un punto di un poliedro è un vertice (punto estremo) se e solo se soddisfa all'uguaglianza n vincoli linearmente indipendenti, quindi basta dimostrare che ogni BFS soddisfa n vincoli linearmente indipendenti tra $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Per definizione ogni BFS soddisfa all'uguaglianza (n-m) vincoli $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ e gli m vincoli di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. I vincoli stringenti sono linearmente indipendenti poiché la matrice dei loro coefficienti è certamente non singolare essendo della forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m} \end{pmatrix}$$

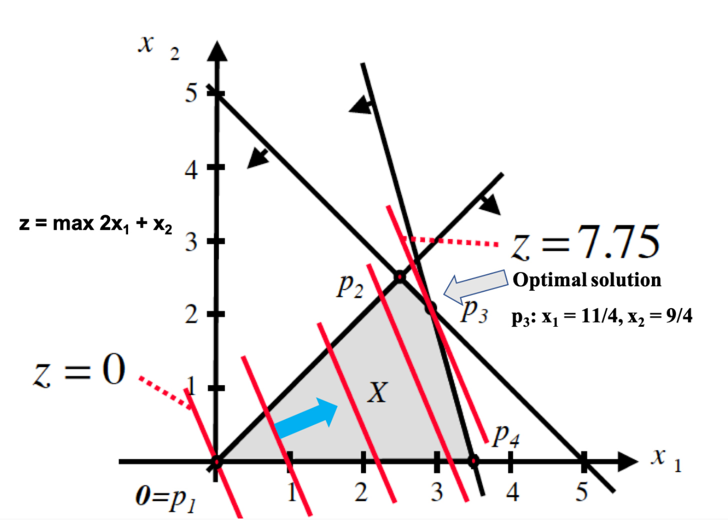
Problema LP - esempio

Sia dato il problema

$$
\begin{aligned}
\max z = & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& -x_1 + x_2 \leq 0 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Non è in forma standard, ma espresso solo in termini delle variabili strutturali (cioè quelle che hanno un immediata corrispondenza fisica col sistema reale che viene modellato)

Rappresentazione grafica - Esempio



Lo si trasforma in forma standard introducendo le variabli di slack x_3, x_4, x_5

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 5 \\ -x_1 + x_2 + \quad x_4 \quad &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + \qquad x_5 &= 21 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Limite superiore delle possibili basi $\frac{5!}{3!2!} = 10$, ma non tutte le basi corrispondono ad una soluzione ammissibile BFS, nell'esempio solo 6 basi sono ammissibili.

Siccome i vertici sono 4, vi saranno BFS degeneri

Esempio - BFS

$$\mathbf{x_B}^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{(3)}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{(3)}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{(3)}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/4 \\ 9/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow p_3$$

Esempio - BFS

$$\mathbf{x_B}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2 \qquad \mathbf{x_B}^{(4)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \\ 7/2 \end{bmatrix} \Rightarrow p_4$$

$$\mathbf{x_B}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{x_B}^{(5)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{x_B}^{(6)} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1$$

(soluzioni degeneri)

Esempio - Base non ammissibile

$$\mathbf{x_B}^{(7)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{(7)}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 8 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{(7)}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{(7)}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/8 \\ 21/8 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

Analogamente, sono basi non ammissibili

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Variabili di surplus

Se in un problema di PL ci sono dei vincoli di maggiore o uguale, per trasformare il problema in forma standard si introducono delle variabili di surplus con segno opposto, ad esempio,

$$-3x_1 + 2x_2 \geq 5 \Longleftrightarrow -3x_1 + 2x_2 - x_6 = 5$$

Esplicitando la funzione obiettivo:

$$z = \mathbf{c}\mathbf{x} = [\mathbf{c}_B \mathbf{c}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N \tag{1}$$

e sostituendo in (1) l'espressione delle variabili di base:

$$\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N} \tag{2}$$

si ottiene:

$$z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right) \mathbf{x}_N \tag{3}$$

Il valore dell'obiettivo corrispondente alla base $\mathbf{B}$ è quindi $z(\mathbf{B}) = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Thank you for your attention