

## LE SERIE

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1?$$

### Serie numeriche a valori complessi

Sia  $(a_n)_n$  una successione di numeri complessi  $\mathbb{C}$ .

$$a_n \in \mathbb{C}, \forall n$$

Definiamo la successione  $(S_n)_n$

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$(a_n)_n$  è la successione dei termini generali

$(S_n)_n$  è la successione delle somme parziali (o delle ridotte)

La coppia di successioni  $(a_n)_n$  e  $(S_n)_n$  si chiama **serie**.

Vista la serie  $a_n = \frac{1}{2^n}$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

Se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S}$$

$S$  si dice la **somma della serie**.

Se  $S$  è finito la serie si dice **convergente**. Se è  $\pm\infty$  si dice **divergente**. Se il limite non esiste si dice **divergente**.

Sia

$$a_n = (-1)^n$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = ?$$

Consideriamo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $a_n = z^n, n \geq 0$

La serie  $1 + z + z^2 + \dots + z^n$  si dice **serie geometrica** di ragione  $z$ .

Studiare i caratteri di una serie significa stabilire se la serie converge, diverge o è indeterminata.

Nel nostro caso

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \\ &= 1 + z(1 + z + \dots + z^{n-1} + z^n - z^n) = \\ &= 1 + z * S_n - z^{n+1} \end{aligned}$$

Se  $z \neq 1$

$$\begin{aligned} S_n(1 - z) &= 1 - z^{n+1} \\ S_n &= \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \begin{cases} \frac{1}{1 - z}, & \text{se } |z| < 1 \\ +\infty, & \text{se } z = 1 \\ +\infty, & \text{se } z \in \mathbb{R}, z > 1 \\ \text{INDET}, & \text{se } z \in \mathbb{R}, z \leq -1 \text{ o se } z \notin \mathbb{R}, |z| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ESEMPIO:

$$\Rightarrow \sum_{n=37}^{+\infty} 3(\cos(1))^n$$

La serie è geometrica di ragione  $|\cos(1)| < 1$  quindi è convergente

$$\sum_{n=37}^{+\infty} 3(\cos(1))^n = \frac{3}{1 - \cos(1)} - \sum_{k=0}^{36} 3(\cos(1))^n$$

ESEMPIO:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$

Supponiamo che la serie sia convergente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$$

$$\Rightarrow S_{n+1} - S_n = 0 = a_{n+1}$$

**TEOREMA DELLA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE:**

Sia  $a_0 + a_1 + \dots + a_n$  una serie convergente allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

La condizione è necessaria ma non sufficiente.

## RELAZIONE TRA SERIE E INTEGRALI GENERALIZZATI

Ogni serie può essere pensata come un integrale generalizzato

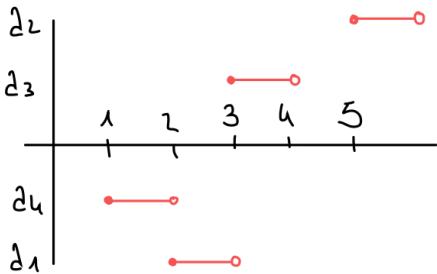
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Sia data una successione  $(a_n)_n$ , di cui vogliamo considerare la serie.

Definiamo la funzione  $f: [1, +\infty[$

$$f(x) = a_n, \quad \text{se } x \in [n, n+1[$$

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} a_n dx = a_n$$



La somma parziale della serie

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \\ &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x)dx \\ &= \int_1^{n+1} f(x)dx \end{aligned}$$

Dire che la serie converge equivale a dire che esiste finito il limite all'infinito per le somme parziali  $S_n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Quindi se esiste l'integrale generalizzato della funzione  $f$ , coincide con la somma della serie (sostituisco  $b$  con  $n+1$ ).

Se esiste la somma della serie vale viceversa, ma va dimostrato.

Sia  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  una serie, sia  $f$  la funzione associata come sopra, allora  $f$  è integrabile in

senso generalizzato su  $[1, +\infty[$  se e solo se la serie di partenza è convergente, e

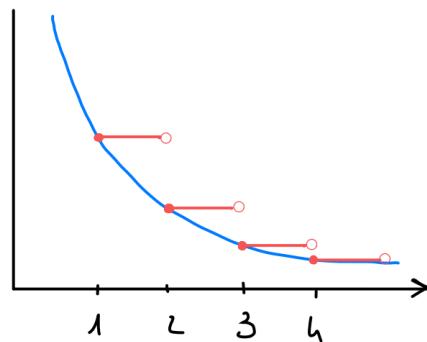
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

## LA SERIE ARMONICA

Sia  $(a_n)_n$  una successione

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = 1/x, \quad \text{se } x \in [n, n+1[$$



$$f(x) \geq 1/x, \forall x \in [1, +\infty[$$

Vista la precedente osservazione, la serie converge se e solo se esiste finito il limite

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\log b - 1) = +\infty$$

Quindi dato che la funzione  $f$  non è integrabile, la serie di partenza **non converge**.

Poiché  $f(x) \geq \frac{1}{x}$  e  $\frac{1}{x}$  non è integrabile, su  $[1, +\infty[$ , per il confronto non lo è nemmeno  $f$ , e quindi la serie  $\sum \frac{1}{n}$  è divergente.

In generale possiamo vedere se  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge?

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^b =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{se } x \in ]n-1, n]$$

In questo modo la funzione risulta essere

$$f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

$f$  è integrabile perché  $\frac{1}{x^\alpha}$ ,  $\alpha > 1$ , è integrabile, quindi la serie generalizzata  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  è convergente per  $\alpha > 1$ .

Se  $0 < \alpha < 1$  la serie  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  è divergente.

### TEOREMA CRITERIO DEL CONFRONTO PER SERIE A TERMINI POSITIVI

Sia  $0 \leq a_n \leq b_n$ ,  $\forall n \in N$ , allora se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

converge, converge anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Se invece la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

diverge, diverge anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

#### DIM:

Siano

$$S_n^a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

e

$$S_n^b = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

le ridotte dei termini di  $a_n$  e  $b_n$ .

Essendo  $a_n \leq b_n$ ,  $\forall n \Rightarrow S_n^a \leq S_n^b$  e quindi è evidente che, se il limite di  $S_n^b$  è finito lo è anche quello di  $S_n^a$ , e se il limite di  $S_n^a$  è infinito lo è anche quello di  $S_n^b$ .

#### OSS:

I limiti  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{a,b}$  esistono perché le successioni  $(S_n^a)_n$  e  $(S_n^b)_n$  sono crescenti.

Per il Teorema del confronto dei limiti si conclude che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad \blacksquare$$

### AUT AUT PER LE SERIE A TERMINI POSITIVI

Sia  $a_n \geq 0$ ,  $\forall n \in N$ . Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

è convergente oppure divergente, **non può** essere indeterminata.

#### SEMI DIM:

Si usa la monotonia della successione delle ridotte  $(S_n)_n$ .

### SERIE A TERMINI POSITIVI

- Criterio del confronto (non serve chiedere che valga  $\forall n \in N$ ).

Siano  $a_n, b_n \geq 0$ , siano tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

E che valga

$$\text{ord } a_n \geq \text{ord } b_n$$

Allora, se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

converge, converge anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Se invece la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Diverge, diverge anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

DIM:

caso  $\text{ord } a_n > \text{ord } b_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Fissato un  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_{1\varepsilon} \in N$  tale che  $\forall n \geq n_{1\varepsilon}$

$$\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$$

E quindi  $a_n < b_n$ .

Caso  $\text{ord } a_n = \text{ord } b_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$$

Fissato un  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_{2\varepsilon} \in N$  tale che  $\forall n \geq n_{2\varepsilon}$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon$$

E quindi

$$\frac{a_n}{b_n} < (l + \varepsilon) \Rightarrow a_n < (l + \varepsilon)b_n$$

Concludo in entrambi i casi applicando il Teorema del confronto. ■

### COROLLARIO (CRITERIO DELL'ORDINE DI INFINITESIMO)

Sia  $a_n \geq 0 \ \forall n$ , sia  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Se  $\text{ord } a_n \leq 1$  la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  **diverge**.

Se invece esiste  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$  e  $\text{ord } a_n \geq \alpha$ , la serie **converge**.

DIM:

Confronto con

$$b_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

E concludo. ■

ESEMPIO:

$$a_n = \frac{1}{n \log n}$$

$$\text{ord } a_n > 1 \Rightarrow \frac{a_n}{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

è di ordine infrareale, quindi

$$\forall \alpha > 1 \Rightarrow \text{ord } a_n < \alpha$$

Quindi questo caso non può essere risolto con il criterio del confronto.

Considero la serie quindi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty$$

Diverge perché, considerando l'integrale generalizzato della funzione associata

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{x \log x} dx = \\ &\stackrel{y=\log x}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\log 2}^{\log b} \frac{1}{y} dy = +\infty \end{aligned}$$

Considerando invece

$$b_n = \frac{1}{n(\log n)^2}$$

Continua a valere che  $\text{ord } b_n > 1$  e  $\frac{b_n}{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$  però la serie **converge**.

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \\ &\stackrel{y=\log x}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\log 2}^{\log b} \frac{1}{y^2} dy = l \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ESEMPIO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5n + \cos n}{3 + 2n^3}$$

Converge perché l'ordine è 2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$$

Converge perché l'ordine è  $\frac{3}{2}$ .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1 - \cos(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}} * \frac{1}{n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2} * n}$$

Diverge perché l'ordine è 1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{2\pi n * n^{2n} * \left(\frac{1}{e}\right)^{2n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi n * n^n * \left(\frac{1}{e}\right)^{2n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2n}}{2\pi n * n^n} = ?$$

Con il metodo del confronto non si riesce ad arrivare a una conclusione.

### CRITERIO DEL RAPPORTO (18)

$a_n > 0$ , ed esista una costante  $K$ ,  $0 \leq K < 1$ , tale che  $\forall n \in N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K$$

Allora converge la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

DIM:

$$a_{n+1} \leq K * a_n$$

$$a_1 \leq K * a_0$$

$$a_2 \leq K * a_1 \leq K^2 * a_0$$

Per induzione quindi si dimostra che

$$a_n \leq K^n * a_0$$

Per confronto con la serie geometrica  $\sum K^n$  la serie **converge**. ■

### COROLLARIO (CRITERIO DEL RAPPORTO)

$a_n > 0 \quad \forall n$ , Esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$$

Se  $\alpha < 1$  la serie **converge**.

OSS:

Se  $\alpha > 1$  la serie **diverge** perché  $(a_n)_n$  non è infinitesima.

DIM:

Fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_\varepsilon$  tale che  $\forall n \geq n_\varepsilon$  si ha che

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha \right| < \varepsilon$$

$$\alpha - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon$$

Prendo  $\varepsilon < 1 - \alpha$ , allora per il precedente Teorema la serie converge ( $K < 1$ ):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \overbrace{\alpha + \varepsilon}^K < \alpha + 1 - \alpha = 1 \quad ■$$

Tornando quindi all'esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} * \frac{(n!)^2}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(n+1)^n}{n^n} * \frac{(n!)^2}{[(n+1)!]^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_e = 0 < 1$$

Quindi la serie converge per il criterio del rapporto.

### CRITERIO DELLA RADICE N-ESIMA

Sia  $a_n \geq 0$ , esista poi  $K \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq K < 1$  tale che  $\forall n \in N$  si ha che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq K$$

Allora converge la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

DIM:

eleva alla  $n$  entrambi i termini

$$a_n \leq K^n$$

Essendo  $0 \leq K < 1$  e  $K^n$  una serie geometrica, la serie converge. ■

### COROLLARIO

Sia  $a_n \geq 0$ , ed esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$$

Allora, se  $\alpha < 1$  la serie  $\sum a_n$  converge.

Se  $\alpha > 1$  la serie diverge. Se  $\alpha = 1$  non abbiamo informazioni sufficienti.

ESEMPIO:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(\log n)^n}$$

Applico il criterio della radice n-esima

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{(\log n)^n}} = \frac{2}{\log n} \rightarrow 0$$

La serie converge.

ESEMPIO:

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}, a > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha a^n$$

Se  $a > 1$  la serie diverge.

Se  $a = 1$ :

- Se  $\alpha \geq -1$  la serie converge
- Se  $\alpha < -1$  la serie converge perché è una serie armonica.

Se  $0 < a < 1$  il limite tende a zero in ogni caso:

- Se  $\alpha = 0$  la serie geometrica converge

- Se  $\alpha < 0$  la serie è di ordine sopra reale, quindi converge
- Se  $\alpha > 0$  la serie converge per il criterio della radice n-esima.

ESEMPIO:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Non è a termini positivi, quindi cambio segno

$$-\sum_{n=2}^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Applico il criterio del rapporto

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \\ & = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{-\frac{1}{n+1}}}_{\underset{1}{\underbrace{\phantom{0}}}} * \underbrace{\frac{-\frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n}}}_{\underset{1}{\underbrace{\phantom{0}}}} * \underbrace{\frac{-\frac{1}{n}}{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)}}_{\underset{1}{\underbrace{\phantom{0}}}} \\ & = 1 \end{aligned}$$

Cercando l'ordine della serie si trova che questo sia uguale a 1, e quindi la serie diverge.

ESEMPIO:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{n(n - 10\pi)}$$

Se  $n > 10\pi$ ,  $a_n > 0$ , quindi per  $n$  grandi è a termini positivi.

$$\frac{n^{\frac{1}{2}} * \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2 * \left(1 - \frac{10\pi}{n}\right)}$$

L'ordine è  $\frac{3}{2}$  quindi la serie converge.

### TOPOLOGIA DEL CAMPO COMPLESSO

Posso identificare il campo complesso con  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$$

Supponiamo di avere una successione  $(z_n)_z \in \mathbb{C}$ , sia  $\gamma \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \gamma$$

Significa che  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$  tale che  $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\underbrace{|z_n - \gamma|}_{\text{modulo di } \mathbb{C}} < \varepsilon$$

OSS:

$$z_n = x_n + iy_n, \quad \gamma = \alpha + i\beta$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \gamma$$

Se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \beta$$

DIM $\Rightarrow$ :

$$\begin{aligned} |z_n - \gamma| &= |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)| = \\ &= \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} \geq \\ &\geq \sqrt{(x_n - \alpha)^2} = |x_n - \alpha| \\ &\Rightarrow |x_n - \alpha| \leq |z_n - \gamma| \\ &\Rightarrow |y_n - \beta| \leq |z_n - \gamma| \end{aligned}$$

Quindi se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \gamma, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$  tale che  $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &\leq |z_n - \gamma| < \varepsilon \\ |y_n - \beta| &\leq |z_n - \gamma| < \varepsilon \end{aligned}$$

DIM $\Leftarrow$ :

$$\begin{aligned} |z_n - \gamma| &= \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} \leq \\ &\leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| \end{aligned}$$

Quindi  $\exists n_1 \in N$  tale che  $\forall n > n_1$

$$|x_n - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Ed esiste  $\exists n_2 \in N$  tale che  $\forall n > n_2$

$$|y_n - \beta| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$|z_n - \gamma| < \dots < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Se  $n > \max\{n_1, n_2\}$ . ■

### TEOREMA

Una serie a termini complessi  $\sum z_n$  converge a  $\gamma$  se e solo se la serie  $\sum \operatorname{Re}(z_n)$  converge a  $\operatorname{Re}(\gamma)$  e la successione  $\sum \operatorname{Im}(z_n)$  converge a  $\operatorname{Im}(\gamma)$ .

ESEMPIO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( 2i^n - \frac{5^n}{i} \right)$$

La serie NON converge perché il termine generale non è infinitesimo.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+i}{n^3+ni}$$

Vorrei averlo nella forma  $x_n + iy_n$

$$\begin{aligned} \frac{3n+i}{n^3+ni} * \frac{n^3-ni}{n^3-ni} &= \frac{(3n+i)(n^3-ni)}{n^6+n^2} = \\ &= \frac{3n^4+n}{n^6+n^2} + i \frac{n^3-3n^2}{n^6+n^2} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^4+n}{n^6+n^2} \end{aligned}$$

Converge per l'ordine di infinitesimo, ord = 2

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3-3n^2}{n^6+n^2}$$

Converge per l'ordine di infinitesimo, ord = 3

Quindi la serie converge per il Teorema.

### SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Sia  $\sum a_n$  una serie a termini generali complessi, la serie si dice **assolutamente convergente** se la sua serie di moduli  $\sum |a_n|$  è convergente.

### TEOREMA

Una serie assolutamente convergente è convergente.

**ATTENZIONE:** esistono serie convergenti che NON sono assolutamente convergenti.

ES: Serie di Leibniz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

È convergente ma NON assolutamente convergente.

DIM:

Caso  $a_n \in \mathbb{R}$ :

$$a_n^+ = \begin{cases} 0, & \text{se } a_n \leq 0 \\ a_n, & \text{se } a_n > 0 \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n, & \text{se } a_n \leq 0 \\ 0, & \text{se } a_n > 0 \end{cases}$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-$$

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

Osserviamo che

$$a_n^+ \leq |a_n|, \quad a_n^- \leq |a_n|$$

Se  $\sum |a_n|$  è convergente, per il criterio del confronto, sono convergenti le serie delle parti positive e delle parti negative.

Allora per il Teorema (vedi esercizio 1)  $\Rightarrow$

$$\sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$$

Caso  $a_n \in \mathbb{C}$ :

Sia  $a_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$ , e sia  $\sum |a_n|$  convergente.

$$|x_n| \leq |a_n| \quad \text{e} \quad |y_n| \leq |a_n|$$

Per confronto sono convergenti le serie

$$\sum |x_n| \quad \text{e} \quad \sum |y_n|$$

Per quanto visto sopra si ha che anche  $\sum x_n$  e  $\sum y_n$  sono convergenti. Quindi anche la serie

$\sum (x_n + iy_n)$  converge. ■

ESEMPIO:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+i}{n^3+ni}$$

$$\left| \frac{3n+i}{n^3+ni} \right| = \frac{\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^6+n^2}} = \sqrt{\frac{9n^2+1}{n^6+n^2}}$$

L'ordine di infinitesimo della serie è 2 e quindi la serie converge.

### SERIE SEMPLICEMENTE CONVERGENTI

Una serie si dice **semplicemente convergente** se è convergente ma non è assolutamente convergente.

Un esempio di questo tipo di serie è la serie di Leibniz.

### SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

Le serie del tipo

$$\sum (-1)^n a_n$$

Si dicono **serie a termini di segno alterno**.

Per queste serie vale un criterio:

### CRITERIO DI LEIBNIZ

Sia  $(a_n)_n$  una successione a numeri reali  $a_n \in \mathbb{R}$ ,

- $a_n > 0 \forall n$ , inoltre
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- $a_{n+1} \leq a_n \forall n$

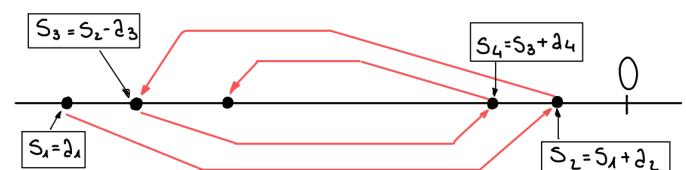
Cioè la successione è decrescente.

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

È convergente.

DIM:



Dimostriamo che

$$S_{2k+1} < S_{2k+3} < S_{2j+2} < S_{2j}$$

Dimostro direttamente che  $\forall k$  si ha

$$S_{2k+1} < S_{2k+3}$$

$$S_{2k+3} = S_{2k+1} + \underbrace{a_{2k+2} - a_{2k+3}}_{>0} > S_{2k+1}$$

Abbiamo dimostrato che la successione delle ridotte di indice dispari è crescente, ossia che  $(S_{2k+1})_k$  è crescente.

Dimostro ora che  $S_{2j+2} < S_{2j}$  (indice pari)  $\forall j$

$$S_{2j} > S_{2j} - \underbrace{(a_{2j+1} - a_{2j+2})}_{>0} = S_{2j+2}$$

Abbiamo dimostrato che la successione delle ridotte di indice pari è decrescente, ossia che  $(S_{2j})_j$  è decrescente.

Se  $j \leq k \Rightarrow$

$$S_{2k+1} < S_{2k+1} + a_{2k+2} = S_{2k+2} \leq S_{2j+2} < S_{2j}$$

È decrescente.

Se  $j > k \Rightarrow$

$$S_{2k+1} < S_{2j+1} < S_{2j+1} + a_{2j+2} = S_{2j+2} < S_{2j}$$

È crescente.

Per l'esistenza del limite delle successioni monotone, esiste il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k+1} = \alpha$$

E il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k} = \beta$$

E sicuramente  $\alpha \leq \beta$ .

Si ha però che  $\alpha = \beta$  perché infatti se  $k \rightarrow +\infty$

$$\underbrace{S_{2k+1}}_{\rightarrow \alpha} - \underbrace{S_{2k}}_{\rightarrow \beta} = \underbrace{a_{2k+1}}_{\rightarrow 0} \\ \Rightarrow \alpha - \beta = 0$$

Quindi si conclude che esiste finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \alpha \blacksquare$$

### FORMULA DI STIMA DELL'ERRORE

$$|S_n - S| < a_{n+1}$$

$$|S_n - S| = \Rightarrow$$

- $n = 2k \Rightarrow$   
 $|S_{2k} - S| = S_{2k} - S <$   
 $< S_{2k} - S_{2k+1} = a_{2k+1} = a_{n+1}$
- $n = 2k + 1 \Rightarrow$   
 $|S_{2k+1} - S| = S - S_{2k+1} <$   
 $< S_{2k+2} - S_{2k+1} = a_{2k+2} = a_{n+1}$

### ESEMPIO:

Identifico con  $\text{Log } x$  il logaritmo  $\log_{10} x$ .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\text{Log } n}{n}$$

Si verifichi che la serie è convergente e si trovi un valore approssimato della somma con un errore più piccolo di  $\frac{1}{10}$ .

Verifico sia convergente:

Essendo a segni alterni devo verificare che:

- 1)  $\frac{\text{Log } n}{n} > 0, \forall n > 1$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } n}{n} = 0$
- 3)  $\left(\frac{\text{Log } n}{n}\right)_n$  è decrescente

Sia  $f(x) = \frac{\text{Log } x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x \log 10} * x - \text{Log } x}{x^2} = \\ = \frac{\text{Log } e - \text{Log } x}{x^2} < 0, \quad \text{se } x > e$$

La successione è decrescente per  $n \geq 3 > e$ .

Trovo  $n$  per cui  $\text{Errore} < 10^{-1}$ :

$$|S - S_{n-1}| < a_n = \frac{\text{Log } n}{n}$$

$$\frac{\text{Log } n}{n} \underset{?}{<} 10^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 \text{ Log } n < n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Log } n^{10} < n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^{10} < 10^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > 10$$

$$\Rightarrow S \approx \frac{\text{Log } 2}{2} + \frac{\text{Log } 3}{3} + \dots + \frac{\text{Log } 10}{10}$$

## SUCCESSIONI CI CAUCHY

Sia  $(z_n)_n$  una successione in  $\mathbb{R}$  o in  $\mathbb{C}$  convergente ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$|z_n - l| < \varepsilon$$

Diremo che una successione  $(z_n)_n$  **verifica la condizione di Cauchy** o in breve è **di Cauchy**, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

OSS:

Ogni successione convergente è di Cauchy.

DIM:

$$\begin{aligned} |z_{n+p} - z_n| &= |z_{n+p} - l + l - z_n| \leq \\ &\leq \underbrace{|z_{n+p} - l|}_{<\frac{1}{2}\varepsilon} + \underbrace{|l - z_n|}_{<\frac{1}{2}\varepsilon} < \varepsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

In  $\mathbb{R}$  e in  $\mathbb{C}$  vale anche il viceversa.

Una successione è convergente **se e solo se** è di Cauchy.

## CASO SPECIFICO PER LE SERIE

Si ha che  $(S_n)_n$  converge se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$$

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^n a_k \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Con questo sistema si può dimostrare la divergenza della serie armonica.

DIM:

Dobbiamo dimostrare che quanto detto sopra NON si verifichi.

Supponiamo quindi per assurdo che la serie  $\sum \frac{1}{n}$  sia convergente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}$$

Scelgo  $p = n \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} &> \\ &> \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_n = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per ottenere l'assurdo basta prendere  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . ■

Si può dimostrare anche che la convergenza assoluta implica la convergenza:

DIM:

Supponiamo che la serie  $\sum |a_n|$  sia convergente.

Proviamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

è convergente usando la condizione di Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

## SUCCESSIONI DI FUZIONI

$$f_n(x) = x^n$$

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \cos(nx), \quad (\cos(nx))_n$$

$$f_n(x) = e^{-inx}$$

ESEMPI:

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n} \quad f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + n} = 0$$

Dove 0 è una funzione, la funziona nulla.

$$\forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Sia ora  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = 0 \text{ in } [0,1], 1 \text{ in } 1$$

Sia ora  $f_n(x) = \frac{n}{x^2+n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{x^2+n} = 1$$

Fissato  $x$  ho la convergenza, ma guardando globalmente la funzione questa risulta essere distante dalla funzione limite. Questo ci fa capire che questa definizione di convergenza detta **convergenza puntuale**, non è la più appropriata per quanto riguarda le successioni funzioni.

#### DEFINIZIONE:

Sia  $f_n: E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Sia  $(f_n)_n$  una successione di funzioni. Sia  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ .

Diremo che  $f$  è **limite puntuale** della successione e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Se  $\forall x \in E$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Cioè se  $\forall x \in E$  e  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon,x} : \forall n \geq n_{\varepsilon,x}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

#### DEFINIZIONE:

Diremo che  $f$  è **limite uniforme** e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \text{ uniforme}$$

Se se  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \text{ e } \forall x \in E$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

#### ESEMPIO:

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$$

Vogliamo verificare che ci sia convergenza uniforme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Quindi  $\forall x \in \mathbb{R}$  vale

$$\left| \frac{1}{x^2+n} - 0 \right| = \frac{1}{x^2+n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Basti prendere  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Quindi la convergenza è uniforme.

**N.B.** se c'è convergenza uniforme c'è anche convergenza puntuale, ma non è detto il viceversa.

#### ESEMPIO:

Sia  $f_n(x) = x^n$  su  $[0, 1[$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x$$

C'è quindi convergenza puntuale.

$$\begin{aligned} |x^n - 0| &\stackrel{?}{<} \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^n < \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log x^n < \log \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n \log x < \log \varepsilon \Leftrightarrow \\ \log x < 0 \Rightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log x} \end{aligned}$$

$x$  più si avvicina ad 1 più devo trovare un  $n$  più grande, quindi  $n$  dipende da  $x$ . La convergenza quindi è **puntuale ma non uniforme**.

#### TEOREMA DEI DUE LIMITI

Supponiamo di avere una successione di funzioni

$$f_n: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Sia  $x_0$  punto di accumulazione per  $E$  e che  $\forall n$  esista

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$$

Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \text{ uniforme}$$

Allora esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = l$$

Inoltre esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

E quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

DIM Prima parte (solo 30L):

Dimostriamo che esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = l$$

Mostriamo che la successione  $(l_n)_n$  è di Cauchy.

$$\begin{aligned} |l_{n+p} - l_n| &= |l_{n+p} - f_{n+p}(x) + f_{n+p}(x) - f_n(x) + f_n(x) - l_n| \leq \\ &\leq |l_{n+p} - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \\ &\quad + |f_n(x) - l_n| \end{aligned}$$

Se  $n_\varepsilon$  è abbastanza grande, per la convergenza uniforme:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall p \in N, \forall x$$

Fisso  $n \geq n_\varepsilon$  e fisso  $p$ .

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_{n+p}(x) = l_{n+p}$$

Quindi esiste  $\delta_{n,p} > 0$  tale che  $\forall x \in E$ , se

$$0 < |x - x_0| < \delta_{n+p}$$

Si ha:

$$|f_{n+p}(x) - l_{n+p}| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

La stessa cosa vale per  $f_n$ :

Fisso  $n$  e quindi esiste  $\delta_n > 0$  tale che  $\forall x \in E$ , se

$$0 < |x - x_0| < \delta_n$$

Si ha:

$$|f_n(x) - l_n| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

Posso quindi prendere un  $\delta$  tale che sia più piccolo di entrambi.

$$\delta < \min\{\delta_n, \delta_{n,p}\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |l_{n+p} - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \\ + |f_n(x) - l_n| &< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

DIM Seconda parte:

Dimostriamo che il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Dimostriamo che se

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \\ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\Rightarrow |f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|$$

Sappiamo che la funzione  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ .

Esiste quindi  $n_\varepsilon \in N : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E$

$$\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

Sappiamo inoltre che se  $n \geq \tilde{n}_\varepsilon$  si ha che

$$|l_n - l| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

Prendo un  $n$  tale che

$$n \geq \max\{n_\varepsilon, \tilde{n}_\varepsilon\}$$

Quindi entrambe le condizioni sono verificate.

A questo punto  $n$  è fissato, e per questo  $n$  so che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$$

Prendo un  $\delta_{n,\varepsilon}$  tale che  $\forall x \in E$ , se

$$0 < |x - x_0| < \delta_{n,\varepsilon}$$

Si ha che

$$|f_n(x) - l_n| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

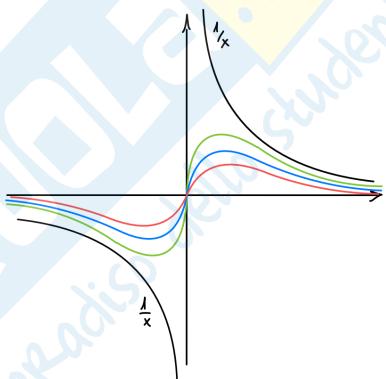
Scelgo il  $\delta$  tale che  $\delta = \delta_{n,\varepsilon}$  e così se,  $x \in E$

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

E ho che

$$|f(x) - l| \leq \dots < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \blacksquare$$

ESEMPIO:



$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Si calcoli

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{nx^2 + 1} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ho quindi una convergenza puntuale ma NON uniforme perchè anche il limite dovrebbe tendere a 0 ma  $\frac{1}{x}$  non ha limite.

### COROLLARIO

Se ho una successione di funzioni

$$f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$$

continue  $\forall n$  e se ho il limite uniforme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \quad \text{unif}$$

Allora  $f$  è continua.

### DIM:

Dire che una funzione è continua in un punto di accumulazione  $x_0$  significa che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

ESEMPIO:

Sia  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ n, & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se } x \in \left[ \frac{1}{n}, 1 \right] \end{cases}$$

Si osservi che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad \forall n$$

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0$$

### TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DEL LIMITE UNIFORME

Sia  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile, sia  $I$  compatto  $[a, b]$ , sia inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \text{ uniforme}$$

Allora  $f$  è integrabile e si ha che

$$\int_I f dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n dx$$

### DIM seconda parte:

Dimostro soltanto la formula:

$$\begin{aligned} \left| \int_I f_n(x) dx - \int_I f(x) dx \right| &\leq \\ &\leq \int_I |f_n(x) - f(x)| dx \end{aligned}$$

Avendo convergenza uniforme posso prendere,  $\forall x \in E$ , se  $n \geq n_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{m(I)}$$

$m(I)$ : misura di  $I$ .

Quindi così ho che

$$\int_I |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon \quad \blacksquare$$

ESEMPIO:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

$f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$f'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} * x$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = |x|$$

La convergenza però è uniforme:

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} < \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$> \sqrt{\frac{1}{n}}$

Se  $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ ,  $\forall x$

### TEOREMA SULLA DERIVATA DEL LIMITE UNIFORME

Sia  $f_n \in C^1(I)$ ,  $I$  intervallo, inoltre sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{puntuale}$$

Sia inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n = g \quad \text{uniforme}$$

Dove  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Allora  $f$  è derivabile e  $f' = g$ .

DIM:

Fisso un punto  $x_0 \in I$ . Si può scrivere che

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

Fisso  $x$  e considero il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right)$$

Posso portare il limite all'interno dell'integrale perché la funzione  $f'_n(t)$  converge uniformemente alla funzione  $g(t)$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

Derivo entrambi i membri dell'equazione e ottengo

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt \right) = g(x)$$

Quindi  $f'(x) = g(x)$ . ■

### SERIE DI FUNZIONI

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Anche qua si parla di convergenza **puntuale** e **uniforme**.

DEF:

Sia  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni. Diremo che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

converge **uniformemente** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R} \quad |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

ESEMPIO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$f_n: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$$

Converge in mono NON uniforme perché dipende da  $x$ .

La successione  $x^n$  è infinitesimama non uniformemente.

OSS:

Se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

È uniformemente convergente, allora

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{uniforme}$$

Come faccio a verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$$

Non è uniforme? Devo verificare che pur prendendo  $n$  grande non riesco a far valere

$$|x^n| < \varepsilon \quad \forall x \text{ se } n \geq n_\varepsilon$$

Per assurdo supponiamo esista  $n$ . Fissiamo quindi  $\varepsilon = \frac{1}{1000}$  per esempio. Se ci fosse convergenza uniforme dovrebbe esistere un  $n$  opportuno per cui vale:

$$x^n < \frac{1}{1000} \quad \forall x \in ]-1,1[$$

Non posso prendere 1 ma posso prendere il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^n \leq \frac{1}{1000}$$

Non è minore quindi è un assurdo.

Sull'intervallo  $[0, \frac{1}{2}]$  la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Converge uniforme? Uso Cauchy:

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n+p} x^k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left( \frac{1}{2} \right)^k < \varepsilon \end{aligned}$$

La serie numerica  $\sum \left( \frac{1}{2} \right)^n$  è convergente quindi vale il criterio di Cauchy. Quindi per ogni  $\varepsilon$  posso trovare un  $\hat{n}$  abbastanza grande tale che

$$\forall n > \hat{n}, \forall p$$

Si ha che  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \left( \frac{1}{2} \right)^k < \varepsilon$$

E dato che non c'è dipendenza da  $x$  la serie converge **uniformemente**.

### TEST DI WEIERSTRASS PER LA CONVERGENZA UNIFORME DI UNA SERIE DI FUNZIONI (M-test)

Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Una serie di funzioni. Sia  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo di maggiorare le funzioni  $f_n$  con delle costanti.

$$\forall n \exists M_n : |f_n(x)| \leq M_n$$

$$[\text{si può prendere } \sup_{x \in I} |f_n(x)|]$$

Se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$$

converge, allora la serie iniziale converge **uniformemente e assolutamente**.

DIM usando il criterio di Cauchy:

Fissato  $\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon$  e  $\forall p \in N$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$$

Vado a considerare

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$$

Che vale  $\forall x, \forall p$  se  $n \geq n_\varepsilon$ . ■

ESEMPIO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$$

Converge puntualmente perché  $\sin(nx) \leq 1$  e per il criterio del confronto in quanto converge  $\frac{1}{2^n}$ .

$$\left| \frac{\sin(nx)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$

In questo caso  $M_n = \frac{1}{2^n}$ , quindi converge uniformemente.

### ESEMPIO:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^n} \text{ su } [-1,1]$$

$$\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

Converge uniformemente perché  $M_n = \frac{1}{3^n}$ .

### VERIFICA CONVERGENTE UNIFORME CON LEIBNIZ (ESEMPIO):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan(nx)}{n}$$

La serie non converge assolutamente se  $x \neq 0$  in quanto di ordine 1 simile a  $\frac{1}{n}$ . Per questa serie quindi NON è utilizzabile l'M-test.

Posso supporre  $x > 0$  e utilizzare il criterio di Leibniz.

Sia  $x$  un parametro fissato:

$$f(x,y) = \frac{\arctan(yx)}{y}$$

$$\frac{d}{dy} f(x,y) = \frac{\frac{1}{1+y^2x^2} * x * y - \arctan(yx)}{y^2}$$

Se  $y$  diventa tanto grande allora  $\frac{1}{1+y^2x^2} * x * y$  tende a 0 e  $-\arctan(yx)$  è negativo.

Quindi  $\forall x \in \mathbb{R}$  la serie converge. Però converge uniformemente? Per la definizione è uniformemente convergente se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|S(x) - S_n(x)| < \arctan \frac{(n+1)x}{n+1} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{n+1} < \varepsilon$$

Utilizzo la stima dell'errore di Leibniz.

Se  $n >$  qualcosa, quindi non dipende da  $x$  e la convergenza è uniforme.

### SVILUPPABILITÀ DI UNA FUNZIONE IN SERIE DI ELEMENTI DI UN DATO INSIEME

Sia

$$\Phi = \{\varphi_n : E \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$$

una famiglia di funzioni.

$$\text{Es: } \varphi_n = \cos(nx), \varphi_n = x^n$$

Data una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  ci chiediamo se è possibile trovare una successione di numeri complessi  $a_n$  tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(z)$$

Se è possibile si dice che  $f$  è sviluppabile in serie di elementi di  $\Phi$ .

Nel caso

$$\Phi = \{1, \cos(nx), \sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$$

Oppure

$$\Phi = \{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$$

Si parla di sviluppabilità in serie di Fourier.

Nel caso, dato  $z_0 \in E$

$$\Phi = \{(z - z_0)^n : n \in \mathbb{N}\}$$

Si parla di sviluppabilità in serie di potenze.

### SERIE DI POTENZE

Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ , si dice **serie di potenze** una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Dove  $a_n \in \mathbb{C}$ .

Una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  che è esprimibile in questo modo si dice **sviluppabile in serie di potenze**.

### ESEMPIO:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$a_n = 1 \quad \forall n, \quad f : B(0,1) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$f(z) = \frac{1}{1-z}$  è sviluppabile in serie di potenze.

### DEF:

Si dice **insieme di convergenza** della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

l'insieme

$$E = \{z_1 \in \mathbb{C} \text{ tali che la serie } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_1 - z_0)^n \text{ converge}\}$$

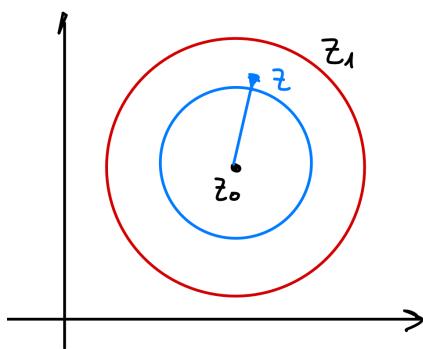
### PROPRIETÀ DELL'INSIEME DI CONVERGENZA

Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

una serie di potenze, ed esista un punto  $z_1 \neq z_0$  dove la serie converge.

- Allora  $\forall z \in \mathbb{C}$  tale che  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  la serie converge **assolutamente**.
- Inoltre, su ogni palla compatta (chiusa e limitata)  $\overline{B(z_0, r)} \subset B(z_0, |z_1 - z_0|)$ , la convergenza è **uniforme**.



### DIM 1:

La serie per ipotesi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_1 - z_0)^n \text{ converge}$$

Quindi la successione  $(a_n(z_1 - z_0)^n)_n$  è infinitesima, e quindi è limitata.

Sia  $M \in \mathbb{R}$  tale che

$$|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fisso  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ . In particolare si ha che

$$K = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1$$

Si ha che

$$\begin{aligned} |a_n(z - z_0)^n| &= a_n|z - z_0|^n = \\ &= \underbrace{|a_n(z_1 - z_0)^n|}_{\leq M} * \underbrace{\left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}\right)^n}_{K^n} \leq \\ &\leq MK^n \end{aligned}$$

Per confronto con la serie geometrica concludo che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(z - z_0)^n| \text{ converge.}$$

### DIM 2:

Sia ora  $\overline{B(z_0, r)} \subset B(z_0, |z_1 - z_0|)$ .

$\forall z \in \overline{B(z_0, r)}$  si ha che  $|z - z_0| < r$

$$\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < \frac{r}{|z_1 - z_0|} = K_1 < 1$$

non dipende da z

Quindi  $\forall z \in \overline{B(z_0, r)} \Rightarrow |a_n(z - z_0)^n| \leq MK_1^n$

Dove in questo caso  $K_1$  non dipende da  $z$ , e allora per l'M-test concludo che la convergenza è uniforme. ■

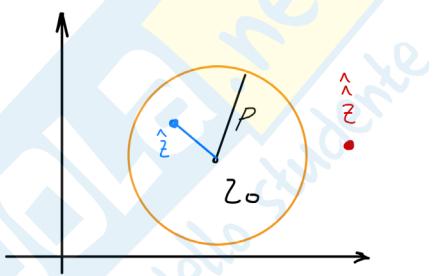
### DEF:

Definiamo **raggio di convergenza** della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

$$\text{Il sup}\{|z - z_0| : \text{la serie converge in } z\} = \varrho$$

$$\varrho \in [0, +\infty[$$



OSS:

Se  $\rho \in ]0, +\infty[$ , sia  $|\hat{z} - z_0| < \rho$ , per la seconda proprietà del sup esiste  $z$  con  $|z - z_0| > |\hat{z} - z_0|$  dove la serie converge, quindi converge anche in  $\hat{z}$ .

Sia ora invece  $|\tilde{z} - z_0| > \rho$ , allora la serie non può convergere in  $\tilde{z}$ .

### PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DEL RAGGIO DI CONVERGENZA

$\rho \in ]0, +\infty[$  è il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Se e solo se

- 1)  $\forall z, |z - z_0| < \rho$  la serie converge
- 2)  $\forall z, |z - z_0| > \rho$  la serie NON converge

Se  $|z - z_0| = \rho$  non possiamo dire nulla.

ESEMPI in R:

Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Il criterio più utile per studiare queste serie è il criterio del rapporto. Verifico la convergenza assoluta:

$$\left| \frac{1}{n} x^n \right| \Rightarrow \frac{\frac{1}{n+1} |x|^{n+1}}{\frac{1}{n} |x|^n} = |x| * \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x| * \frac{n}{n+1} = |x|$$

Se  $|x| < 1$  la serie converge, se  $|x| > 1$  la serie non converge.

$\rho = 1$  è il raggio di convergenza di questa serie.

Se  $|x| = 1$  non si sa. Provo con  $x = 1$ , la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

E diverge. Se invece  $x = -1$  ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$$

Che è la serie di Leibniz e converge.

Quindi si è visto che se  $|z - z_0| = \rho$  ci può essere convergenza o ci può essere non convergenza.

ESEMPIO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$$

$$\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{n|x|^n} \rightarrow |x|$$

$$\rho = 1$$

In generale l'insieme di convergenza E:

$$B(z_0, \rho) \subseteq E \subseteq \overline{B(z_0, \rho)}$$

Compreso tra la palla e la sua chiusura.

In questo caso l'insieme è  $E = ]-1, 1[$

ESEMPIO:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} * \frac{n^2}{x^n} \rightarrow |x|$$

$$\rho = 1$$

$$E = [-1, 1]$$

## PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI SVILUPPABILI IN SERIE DI POTENZE

Sia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Sia  $\varrho$  il raggio di convergenza

$$I = ]x_0 - \varrho, x_0 + \varrho[$$

- 1)  $f$  è continua su  $I$
- 2)  $\forall x \in I, f$  è integrabile e

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

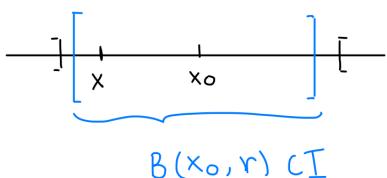
- 3)  $f \in C^\infty(I)$  e si ha che

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

o più in generale

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) (x - x_0)^{n-k}$$

DIM 1:



Fissato un punto  $x_0$  nell'aperto, posso costruirgli attorno un insieme compatto

$$\overline{B(x_0, r)} \subset I$$

La continuità è conseguenza del Teorema della continuità del limite uniforme e delle proprietà dell'insieme di convergenza.

DIM 2:

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \dots$$

Sto lavorando sempre nell'intervallo di convergenza compatto, quindi ho convergenza uniforme.

Per il Teorema della continuità del limite uniforme so che il limite è integrabile e posso portare l'integrale all'interno  $\Rightarrow$

$$\dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{x_0}^x (t - x_0)^n dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \blacksquare$$

DIM 3:

Voglio dimostrare che

$f \in C^\infty(I)$  e si ha che

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Definisco

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

$$S'_n(x) = \sum_{k=1}^n k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

Dobbiamo verificare che la successione  $S'_n(x)$  converge uniformemente.

Si osservi che anche  $\sum n a_n (x - x_0)^{n-1}$  è una serie di potenze, quindi la serie converge uniformemente in ogni intervallo del tipo

$$[x_0 - r, x_0 + r] \quad r < \varrho'$$

Dove  $\varrho'$  è il raggio di convergenza della serie.

Proviamo che  $\varrho = \varrho'$ , dove  $\varrho$  è il raggio di convergenza della serie iniziale.

Dimostriamo che  $\varrho \leq \varrho'$ :

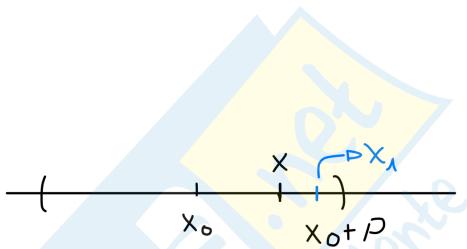
Supponiamo sia  $|x - x_0| < \varrho$ , proviamo che allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

converge.

Poiché  $|x - x_0| < \varrho$ , allora

$$\Rightarrow \exists x_1 : |x - x_0| < |x_1 - x_0| < \varrho$$



Considero la successione

$$(|a_n| |x_1 - x_0|^{n-1})_n$$

che è infinitesima, perché la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x_1 - x_0)^{n-1} = \frac{1}{x_1 - x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x_1 - x_0)^n$$

converge.

Esiste quindi una costante  $R \in \mathbb{R}^+$  tale che

$$|a_n| |x_1 - x_0|^{n-1} < R, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prendiamo il termine generale della serie delle derivate

$$|na_n(x - x_0)^{n-1}| =$$

$$= \underbrace{|a_n| |x_1 - x_0|^{n-1}}_{< R} * n \left( \underbrace{\frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|}}_{< 1} \right)^{n-1} \leq \dots$$

$$\text{Sia } K = \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| < 1$$

$$\dots \leq R * nK^{n-1}$$

La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} nK^{n-1}$  converge. Quindi la serie "iniziale" converge per confronto.

Abbiamo dimostrato che  $\varrho \leq \varrho'$ .

Dimostriamo ora che  $\varrho' \leq \varrho$ :

$$\begin{aligned} \forall x \quad |a_n(x - x_0)^n| &< |na_n(x - x_0)^n| \\ &= |na_n(x - x_0)^{n-1}| |x - x_0| \end{aligned}$$

Fissato  $x$ ,  $|x - x_0|$  è costante, quindi se converge

$$|na_n(x - x_0)^{n-1}|$$

converge anche il primo termine.

$$\Rightarrow \varrho' = \varrho \quad \blacksquare$$

Sapendo che negli intervalli compattamente contenuti in un intervallo di convergenza, la convergenza è uniforme, posso dire che la funzione è derivabile in tutto l'intervallo aperto di convergenza.

$$[x_0 - r, x_0 + r] \subset [x_0 - \varrho, x_0 + \varrho]$$

La derivabilità però ce l'ho solo nell'intervalllo aperto.

### ESEMPIO

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad [-1, 1[$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}, \quad ]-1, 1[$$

Se  $f$  è sviluppabile in sdp  $\Rightarrow f \in C^\infty$ .

### DEF:

Una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice **analitica** se  $\forall z_0 \in A$  esiste una palla  $B(z_0, \varrho)$  dove  $f$  è sviluppabile in serie di potenze.

### ESEMPIO:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad |t| < 1 \\ -\log(1-x) &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ \Rightarrow \log(1-x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

Vale se  $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \log(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{n+1} (-x)^{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

### SERIE DI TAYLOR

Ricordiamo il **polinomio di Taylor**:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Si dice **serie di Taylor**.

Sia  $f(x)$  rappresentata in serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

È vero che  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ?

La risposta è **SI**, infatti:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 * 2a_3(x - x_0) + \dots$$

$$f^{(k)}(x_0) = k! * a_k$$

### TEOREMA (sviluppabilità in serie di Taylor)

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sviluppabile in serie di potenze, allora  $f \in C^\infty(I)$  e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

ESEMPIO:

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad \forall k$$

$$f^{(k)}(0) = 1$$

Se  $e^x$  è sviluppabile in serie di potenze, si ha

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Esempio nell'esempio importante:

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f^{(k)}(0) = 0$$

La serie di Taylor di questa funzione è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x), \quad \forall x \neq 0$$

La funzione  $f \in C^\infty$ , esiste la sua serie di Taylor MA la funzione NON è sviluppabile in serie di potenze.

Come riconoscere una funzione sviluppabile in serie di potenze?

Deve essere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k - f(x) \right] = 0$$

Errore  $E_n(x)$

**Lagrange:**

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$$|\xi - x_0| < |x - x_0|$$

### TEOREMA (un criterio di sviluppabilità)

Sia  $f \in C^\infty(I)$  ed esista  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $\forall n \in N$  e  $\forall x \in I$

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n$$

Allora  $f$  è sviluppabile in serie di potenze.

DIM:

$$\begin{aligned} |E_{n-1}| &= \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n!} \left( \overbrace{M * |x - x_0|}^K \right)^n \end{aligned}$$

Se all'infinito tende a zero ho finito.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K^n}{n!} = 0 \quad \blacksquare$$

ESEMPIO  $e^x$ :

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

$$|e^x| \leq M^n, \quad \forall x ?$$

NO! Non si può fare.

Lavoriamo ora sui compatti  $[-R, R] \subset \mathbb{R}$

$$f: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^x$$

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^R = M \leq M^n \\ \forall n \geq 1$$

Il criterio ora è soddisfatto su  $[-R, R]$ .

ESEMPIO:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$|f^{(n)}(x)| = \begin{cases} |\sin x| & \leq 1, \\ |\cos x| & \leq 1, \end{cases} \quad M = 1$$

Il criterio è soddisfatto.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 1 - (-1)^n \\ \begin{matrix} 0 \text{ se } n \text{ è pari} \\ 2 \text{ se } n \text{ è dispari} \end{matrix} \end{pmatrix} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

Però solo se  $|x| < 1$ .

### SERIE BINOMIALE

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \alpha$$

$$f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

Si dice **coefficiente binomiale generalizzato**.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \text{se } |x| < 1$$

[ non dimostro la sviluppabilità ]

Sia  $\alpha = j \in N$

$$\binom{j}{n} = \frac{j(j-1)(j-2)\dots(j-n+1)}{n!}, \quad \text{se } n \leq j \\ = 0, \quad \text{se } n > j$$

$$(1+x)^j = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{j}{n} x^n = \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} x^n$$

Ritrovo il **binomio di Newton**.

Se  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$(1+x)^\alpha = \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$$

Se  $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$(1+x)^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dt =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n t^{2n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$f(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1-(-x^2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \\
&\Rightarrow \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1
\end{aligned}$$

## FUNZIONI COMPLESSE

Sia

$$\begin{aligned}
f: A \subseteq \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\
z: x + iy & \\
f(x + iy) &= f_1(x, y) + if_2(x, y) \\
f_{12}: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in A\} &\rightarrow \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ogni funzione complessa è sviluppabile in serie di potenze!

### ESEMPIO:

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

### TEOREMA (formula di Eulero)

$\forall x \in \mathbb{R}$  si ha che

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

### DIM:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} i^n x^n =$$

Ricordiamo che

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 + 4k \\ i, & \text{se } n = 1 + 4k \\ -1, & \text{se } n = 2 + 4k \\ -i, & \text{se } n = 3 + 4k \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^{ix} = \dots &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(4k)!} x^{4k} + \frac{1}{(4k+1)!} i x^{4k+1} \right. \\
&\quad - \frac{1}{(4k+2)!} x^{4k+2} \\
&\quad \left. - \frac{1}{(4k+3)!} i x^{4k+3} \right) =
\end{aligned}$$

Spezzo parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(4k)!} x^{4k} - \frac{1}{(4k+2)!} x^{4k+2} \right) + \\
&\quad + i \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(4k+1)!} x^{4k+1} - \frac{1}{(4k+3)!} x^{4k+3} \right) = \\
&\quad [4k = 2n \Rightarrow n = 2k] \\
&\quad 4k+2 = 2n+2 = 2(n+1)] \\
&\dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + \\
&\quad + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \\
&\quad = \cos x + i \sin x \\
&\Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \\
&\quad = e^x (\cos y + i \sin y)
\end{aligned}$$

### LA FORMULA PIÙ BELLA DELLA MATEMATICA

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

$e \rightarrow$  analisi

$i \rightarrow$  algebra

$\pi \rightarrow$  geometria

$1, 0 \rightarrow$  aritmetica

$$e^{i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi$$

### LO SPAZIO $R^n$

È uno spazio vettoriale. Non distinguiamo i punti e i vettori di  $R^n$  per semplicità.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Dal punto di vista **Topologico**: ho bisogno di un **prodotto scalare**.

Utilizzo il **prodotto scalare canonico** in  $R^n$ :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i = x^T y$$

### PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

1) Definita positiva

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &\geq 0, \quad \forall x \\ \langle x, x \rangle &= 0 \Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

2) Simmetrica

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

3) Bilinearità

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle, \quad \forall \alpha \\ \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle\end{aligned}$$

Sia  $X$  uno spazio vettoriale; sia

$$\langle *, * \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione che verifica 1), 2) e 3), allora  $\langle *, * \rangle$  si dice un prodotto scalare in  $X$ .

### ESEMPIO:

$$\begin{aligned}X &= C^0([a, b], \mathbb{R}) = \\ &= \{ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ continua} \}\end{aligned}$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(t) \psi(t) dt$$

1)

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \varphi \rangle &= \int_a^b \varphi^2(t) dt \geq 0, \quad \forall \varphi \\ \langle \varphi, \varphi \rangle &= 0 \Leftrightarrow \int_a^b \varphi^2(t) dt = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varphi = 0\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \psi \rangle &= \int_a^b \varphi(t) \psi(t) dt = \int_a^b \psi(t) \varphi(t) dt = \\ &= \langle \psi, \varphi \rangle\end{aligned}$$

3)

$$\langle \varphi_1 + \varphi_2, \psi \rangle = \int_a^b (\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) \psi(t) dt =$$

$$\begin{aligned}&= \int_a^b \varphi_1(t) \psi(t) + \varphi_2(t) \psi(t) dt = \cdots = \\ &= \langle \varphi_1, \psi \rangle + \langle \varphi_2, \psi \rangle\end{aligned}$$

### DEF:

Siano  $x, y \in X, x, y \neq 0, \langle *, * \rangle$  un prodotto scalare su  $X$

Si dice che  $x$  è **ortogonale** a  $y$  se

$$\langle x, y \rangle = 0$$

### OSS:

In fisica  $x * y = |x| * |y| * \cos \theta$

### DEF:

Si dice **norma** di  $x$  il numero

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$$

Si può porre per definizione

$$\cos \alpha := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| * \|y\|}$$

### ESEMPIO:

$$X = C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$$

Si calcoli  $\cos \alpha$ , con  $\alpha$  “angolo” tra  $\varphi(t) = \cos t$  e  $\psi(t) = \sin t$ .

$$\begin{aligned}\langle \cos t, \sin t \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{2 \cos t \sin t}_{\sin 2t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (-\cos 2t) \right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

### TEOREMA (Formula di Buniakowski Cauchy-Schwarz)

Sia  $X$  uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Allora

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| + \|y\|$$

E vale l’ugaglianza se e solo se sono **linearmente dipendenti**.

### DIM ce ne sono tante

## PROPRIETÀ DELLA NORMA

1)

$$||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2)

$$||\alpha x|| = |\alpha| * ||x||, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3)

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

DEF:

Sia  $X$  uno spazio vettoriale, una funzione

$$|| * || : X \rightarrow \mathbb{R}$$

Si dice una **norma** se verifica 1), 2), e 3).

ESEMPIO:

In  $\mathbb{R}^n$ ,  $|| * ||_p \quad p \geq 1, p \in \mathbb{R}$

$$||x||_p = \left[ \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Se  $p = 2$  abbiamo la **norma euclidea**.

$$||x||_2 = \left[ \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_N|$$

$$||x||_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |x_i|$$

Sia ora  $X = C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$

$$||\varphi||_p = \left[ \int_a^b |\varphi(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

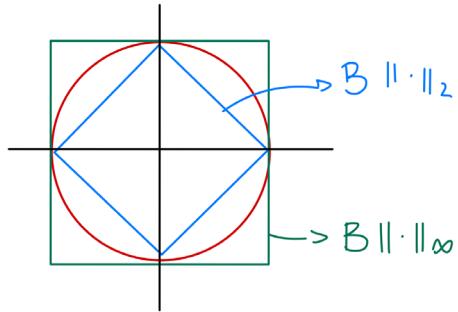
Se  $p = 1$

$$||\varphi||_1 = \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

$$||\varphi||_\infty = \max_{t \in [a, b]} |\varphi(t)|$$

In  $\mathbb{R}^n$  usando la norma  $||x||$

$$d(x, y) = ||x - y||$$



## PROPRIETÀ DELLA DISTANZA

1)

$$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

2)

$$d(x, y) = d(y, x)$$

3)

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Sia  $d(x, y) = ||x - y||$ , allora valgono 1), 2) e 3).

DEF:

Sia  $X$  un insieme qualsiasi non vuoto. Una funzione

$$d(*, *) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfi 1), 2), 3) si dice **distanza o metrica**.

$(X, d(*, *))$  si dice **spazio metrico**.

OSS:

Ogni sottoinsieme di uno spazio metrico è uno spazio metrico.

OSS:

Sia  $X$  un insieme non vuoto. Definiamo

$$d_0 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

### DEF:

Sia  $(X, d(*, *))$  uno spazio metrico, si definisce **palla aperta** di centro  $x_0 \in X$  e raggio  $r \in \mathbb{R}^+$  l'insieme dei punti

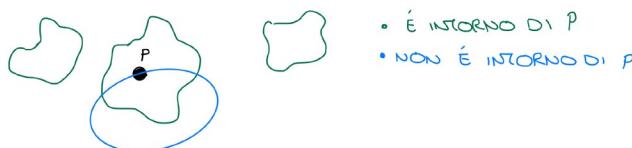
$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

### TOPOLOGIA DI UNO SPAZIO METRICO

Sia  $(X, d(*, *))$  uno spazio metrico.

#### Intorno di $x_0$ :

Un insieme  $E \subseteq X$  si dice **intorno** di  $x_0$  se esiste un  $r \in \mathbb{R}^+$  tale che  $B(x_0, r) \subset E$ .



#### Proprietà degli intorni:

Indico con  $\mathcal{N}_x$  la famiglia degli intorni di  $x$ .

1)

$$\forall U \in \mathcal{N}_x \Rightarrow x \in U$$

2)

$$\forall U, W \in \mathcal{N}_x \Rightarrow U \cap W \in \mathcal{N}_x$$

3)

$$\forall U \in \mathcal{N}_x, \forall W \subseteq X \text{ se } U \subseteq W \Rightarrow W \in \mathcal{N}_x$$

#### 4) Proprietà di Hausdorff

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U \in \mathcal{N}_x, W \in \mathcal{N}_y : U \cap W = \emptyset$$

### DEF:

Sia  $E \subseteq X$ , un punto  $x_0$  si dice **interno** ad  $E$  se  $E \in \mathcal{N}_{x_0}$ .

Un insieme  $A \subseteq X$  si dice **aperto** se ogni punto di  $A$  è *interno* ad  $A$ .

(cioè se  $\forall x \in A \exists r \in \mathbb{R}^+ : B(x, r) \subseteq A$ )

Si dice **interno di un insieme**  $E$  l'insieme dei punti interni ad  $E$ .

Un punto  $x \in E$  si dice **isolato** se esiste

$$r \in \mathbb{R}^+ : B(x, r) \cap E = \{x\}$$

Un punto  $x$  si dice di **accumulazione** per  $E$  se per ogni intorno  $U$  di  $x$  esiste  $x_U \in U \cap E, x_U \neq x$ .

Sia  $E \subseteq X$ , diremo **chiusura** di  $E$  l'insieme

$$\bar{E} = E \cup \{p. di acc. di E\}$$

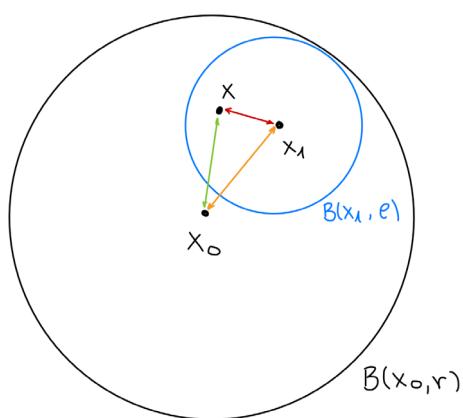
Un insieme  $E \subseteq X$  si dice **chiuso** se  $E = \bar{E}$ .

### TEOREMA

Una palla-aperta è un insieme aperto.

### DIM:

Sia  $B = B(x_0, r), r \in \mathbb{R}^+$ . Devo dimostrare che è un insieme aperto.



Dimostriamo che  $\forall x_1 \in B$  esiste  $B(x_1, \rho) \subseteq B$ .

Sia  $x_1 \in B$ , allora  $d(x_1, x_0) < r$ .

Sia  $0 < \rho < r - d(x_1, x_0)$ . Verifichiamo che

$$B(x_1, \rho) \subseteq B$$

Sia  $x \in B(x_1, \rho)$ , proviamo che  $x \in B$ .

Sappiamo che  $d(x, x_1) < \rho < r - d(x_1, x_0)$

$$\begin{aligned} d(x, x_0) &\leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < \\ &< r - d(x_1, x_0) + d(x_1, x_0) = r \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### DEF:

Sia  $(X, d(*, *))$  uno spazio metrico.  $E \subseteq X$

$x_0$  è detto **punto di frontiera** di  $E$  se per ogni intorno  $U$  di  $x_0$  esiste  $x_1 \in E \cap U, x_2 \in U \setminus E$

Si dice **frontiera** l'insieme dei punti di frontiera.

Se  $E$  è tale che esiste un aperto  $A, A \subseteq E \subseteq \bar{A}$  spesso la frontiera di  $E$  si dice **bordo di E**.

Un insieme  $D \subseteq E$  si dice **denso** in  $E$  se

$$\bar{D} \cap E = E$$

### INSIEME LIMITATO:

Un insieme  $E \subseteq X$  si dice limitato se esiste una palla  $B(x_0, r) \supseteq E$ .

### DEF:

Si dice **diametro** di  $E$  il numero (o simbolo  $+\infty$ )

$$\text{diam } E = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$$

$E$  è limitato se e solo se il suo diametro è finito.

### RIPASSO DI GEOMETRIA SU $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$

#### Retta in $\mathbb{R}^2$ :

Fisso  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ . Considero l'insieme dei punti  $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tali che  $Q - P \perp v$

$$Q - P = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$Q - P \perp v \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

#### Retta in forma cartesiana implicita:

$$ax + by + c = 0$$

In senso analitico ho una funzione

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x, y) = ax + by + c$$

La retta è l'insieme di livello 0 del campo scalare  $g$ .

### DEF:

Una funzione  $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **campo scalare**.

Una funzione  $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $M, N \geq 2$  si dice un **campo vettoriale**.

Una funzione  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 2$ ,  $I$  intervallo si dice **curva**.

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice **insieme di livello  $\alpha$**  del campo scalare  $f$  l'insieme

$$L_\alpha = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

Diremo **curva implicita** un insieme di livello  $L_\alpha$  di un campo.

#### Retta in forma esplicita:

Se  $b \neq 0$  si può scrivere

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

#### Retta in forma parametrica:

Sia  $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .  $P + t\bar{v} \in$  retta,  $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + ta \\ y_0 + tb \end{pmatrix}$$

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$\gamma$  è una curva.

### RIEPILOGO:

#### Retta:

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x, y) = 0$$

#### Grafico:

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$$

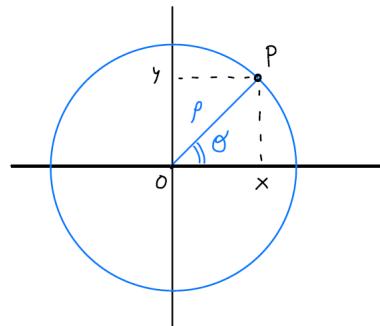
#### Curva:

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

### COORDINATE POLARI

Sono una rappresentazione parametrica delle coordinate cartesiane.

In  $\mathbb{R}^2$  si pensa un punto di un piano come se fosse un punto  $P = (x, y)^T$  di una circonferenza di raggio  $\rho$  che forma un angolo  $\theta$  con l'asse delle  $x$ .



Posso scrivere

$$x = (x_0) + \rho \cos \theta$$

$$y = (y_0) + \varrho \sin \theta$$

$$\theta \in [0, 2\pi[, \quad \varrho \in [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow P = [\varrho, \theta]$$

La coppia  $[\varrho, \theta]$  individua il punto  $P = (x, y)^T$ .

**NB:**  $\theta$  non è univocamente determinato, ad esempio se considero

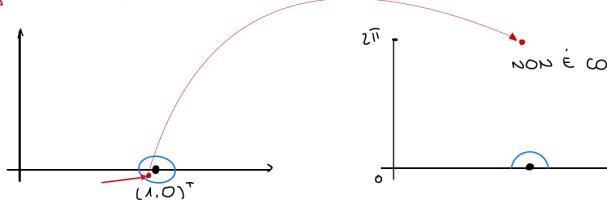
$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, \quad \varrho = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{9}{4}\pi, -\frac{7}{4}\pi, \dots$$

Per convenzione sceglio di prendere  $\theta \in [0, 2\pi[$

C'è un problema: quando devo fare un cambio di variabile devo avere una funzione che sia un **omeomorfismo**, ossia un funzione continua con inversa continua.

**⚠  $\varphi$  NON È CONTINUA**



$\varphi$  **NON** è continua. Il problema si risolve eliminando la semiretta del codominio delle  $x$  positive.

Il punto  $(0,0)^T, \varrho = 0, \theta = ?$

A questo punto c'è corrispondenza biunivoca tra i punti  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$  e  $]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \rightarrow ]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$$

È **bigettiva**.

Per ricavare  $\varrho$  e  $\theta$ :

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Coordinate sferiche:**

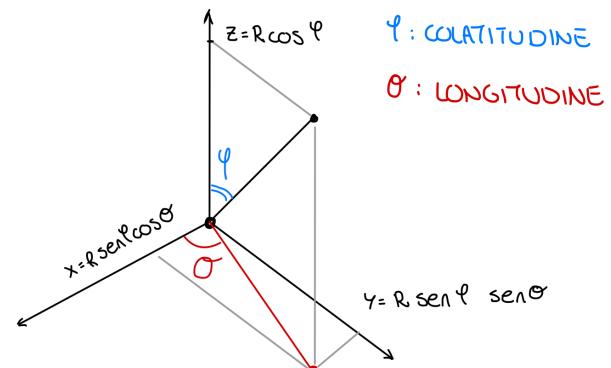
Prendo il segmento  $\varrho$  che va dall'origine al punto  $P$ .

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Prendo poi l'angolo  $\varphi$  tra l'asse  $z$  e  $P$  (collatitudine)

$$z = \varrho * \cos \varphi$$

Proietto ora  $P$  nel piano  $xy$ , il cui segmento sul piano ora vale  $\varrho * \sin \varphi$ .



Ora considero l'angolo  $\theta$  tra il segmento proiettato e l'asse  $x$  (longitudine) e l'asse  $y$  (latitudine).

$$x = \varrho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \varrho \sin \varphi \sin \theta$$

Fissiamo ora il raggio  $\varrho \geq 0$  e lavoriamo su una sfera, in questo caso però

$$\varphi \in [0, \pi]$$

Fissato l'angolo  $\varphi$  lavoro su  $\theta$

$$\theta \in [0, 2\pi[$$

$$P: (x, y, z)^T \rightarrow [\varrho, \varphi, \theta]$$

Abbiamo quindi ora una funzione

$$\sigma: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T\} \rightarrow ]0, +\infty[ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$$

Questa funzione non potrà essere continua su un piano, quindi si escluderà il piano  $z = 0$ .

$$\sigma(x, y, z) = [\varrho, \varphi, \theta]$$

tali che

$$x = \varrho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \varrho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \varrho \cos \varphi$$

Si osservi che

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Equivale a  $\rho = r$ .

### CONICHE

Una conica si può scrivere come

$$\frac{a_{11}x^2 + a_{22}y^2}{\text{parte quadratica}} + \frac{2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y}{\text{parte lineare}} + \frac{a_{33}}{\text{termine noto}} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- $\det A = 0$   
*coniche degeneri.*
- $\det A \neq 0$ :
  - $\det B > 0$ :  
è simmetrica a valori reali positivi  
quindi si può diagonalizzare. Si ha un *ellisse*.
  - $\det B = 0$ :  
*parabola*.
  - $\det B < 0$ :  
*iperbole*.

### QUADRICHE

Una quadrica si può scrivere come

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$$

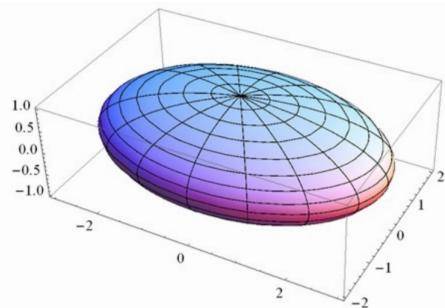
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{21} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0, \det B \neq 0$

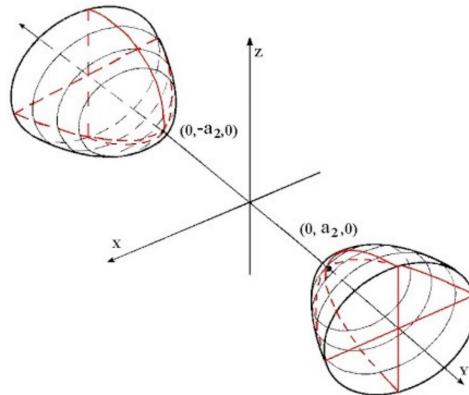
### ELISSOIDE:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



### IPERBOLOIDEO ELLITTICO A DUE FALDE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

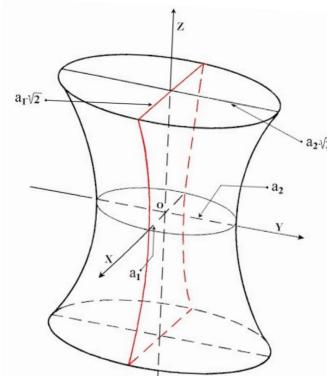


Proiezione sul piano  $yz$ :

$$\begin{aligned} y^2 - z^2 &= -1 \\ z^2 - y^2 &= 1 \\ y = 0 &\quad z^2 = 1 \end{aligned}$$

### IPERBOLOIDEO IPERBOLICO A UNA FALDA

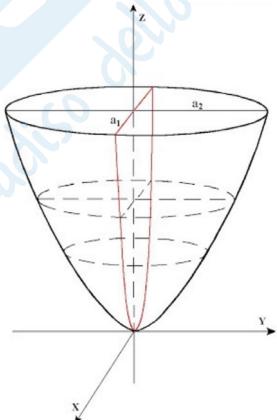
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



## PARABOLOIDE ELLITTICO

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

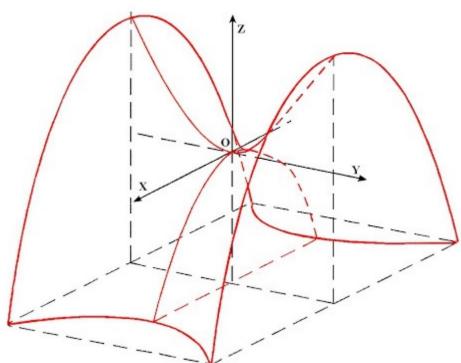
Grafico:  $f(x, y) = x^2 + y^2$



## PARABOLOIDE IPERBOLICO

$$x^2 - y^2 - z = 0$$

$$\Rightarrow z = x^2 - y^2$$

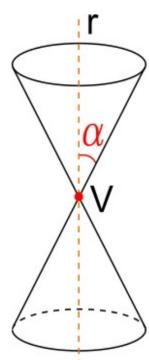


## CONO

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$$

Se  $z > 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)^T\|$



Piano equazione cartesiana implicita:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Sia  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Insieme di livello } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : g(x) = 0 \right\}$$

Piano equazione esplicita:

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}$$

Sia  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Il suo grafico è dato da

$$\Gamma_\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Forma parametrica:

$$P + s\bar{u} + t\bar{v}$$

$$x = x_0 + su_1 + tv_1$$

$$y = y_0 + su_2 + tv_2$$

$$z = z_0 + su_3 + tv_3$$

$$\sigma(st) = \begin{pmatrix} x_0 + su_1 + tv_1 \\ y_0 + su_2 + tv_2 \\ z_0 + su_3 + tv_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

In generale una funzione  $\sigma: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  si dice una **superficie**.

Retta nello spazio:

Intersezione di due piani:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Oppure, data una funzione  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$h(z, y, z) = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Retta: } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Retta in forma parametrica in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\gamma(t) = P + t\bar{v}$$

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = x_0 + tu_1$$

$$y = y_0 + tu_2$$

$$z = z_0 + tu_3$$

In generale l'intersezione di due superfici dovrebbe dare una curva.

### FUNZIONI TRA SPAZI METRICI

#### LIMITI DI FUNZIONI:

Sia  $f: A \subseteq X_1 \rightarrow X_2$ ,  $(X_1, d_1)$ ,  $(X_2, d_2)$  spazi metrici. Sia  $l \in X_2$ ,  $x_0 \in X_1$  punto di accumulazione di  $A$ .

Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che

$$\begin{aligned} \forall x \in A, x \neq x_0, \quad d(x, x_0) &< \delta \\ \Rightarrow d_2(f(x), l) &< \varepsilon \end{aligned}$$

#### DEF:

Sia  $f: A \subseteq X_1 \rightarrow X_2$

$(X_1, d_1)$ ,  $(X_2, d_2)$  spazi metrici.

Sia  $x_0 \in A$ .  $f$  si dice **continua** in  $x_0$  se

Se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che

$$\begin{aligned} \forall x \in A, \quad d(x, x_0) &< \delta \\ \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Si noti che se  $x_0$  è punto di accumulazione per  $A$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se  $x_0$  è un punto isolato di  $A$   $f$  è sempre continua in  $x_0$ .

#### LIMITI DI SUCCESSIONI:

Diremo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \in X_2$$

Se  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che

$$\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_2(x_n, l) < \varepsilon$$

### TEOREMA

Sia  $f: A \subseteq X_1 \rightarrow X_2$ ,  $(X_1, d_1)$ ,  $(X_2, d_2)$  spazi metrici. Sia  $l \in X_2$ ,  $x_0 \in X_1$  punto di accumulazione di  $A$ . Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se e solo se per ogni successione in  $(x_n)_n$  in  $X_1$ ,  $x_n \neq x_0$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$$

Si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

#### DIM:

Sia vero che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Sia  $(x_n)_n$  una successione in  $X_1$ ,  $x_n \neq x_0$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$$

Proviamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\begin{aligned} \forall x \in A, x \neq x_0, d(x, x_0) &< \delta \\ \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$$

Esiste  $n_\varepsilon$  tale che  $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_1(x_n, x_0) < \delta$

Ma allora  $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$ .

#### DIM $\Leftarrow$ :

Per assurdo supponiamo falso che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Quindi esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\delta = \frac{1}{n} > 0$  esiste  $x_n \in A, x_n \neq x_0, d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$  ma

$$d_2(f(x_0), l) \geq \varepsilon$$

Quindi la successione così definita  $(x_n)_n$  è tale che  $x_n \neq x_0 \quad \forall n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$$

Ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq l$$

Che è un assurdo. ■

OSS:

Supponiamo  $X: C^0([a, b], \mathbb{R})$  e

$$d_\infty(\varphi, \psi) = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x) - \psi(x)|$$

$(\varphi_n)_n$  è una successione di funzioni.

La convergenza di  $(\varphi_n)_n$  uniforme equivale alla convergenza in  $(X, d_\infty)$ .

DIM:

Supponiamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$  uniforme.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\forall x \in [a, b] \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Ma allora

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Sia ora vero che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \max_{\forall x} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Quindi è valido per ogni  $x$ . ■

### SUCCESSIONI A VALORI IN $\mathbb{R}^M$

Sia  $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{M,n})^T \in \mathbb{R}^M$

$$l = (l_1, l_2, \dots, l_M)^T \in \mathbb{R}^M$$

Si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{x}_n = l$$

Se e solo se  $\forall k = 1, \dots, M$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{k,n} = l_k$$

DIM:  $M = 2$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \bar{x}_n, \quad l = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \beta$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} \leq$$

$$\leq \underbrace{|x_n - \alpha|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|y_n - \beta|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Per  $n$  opportuno.

DIM  $\Leftarrow$ :

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &\leq \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_n - \beta| &\leq \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Corollario:

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}^M$$

$$f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_M)^T$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, \dots, l_M)^T$$

Se e solo se

$$\forall k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = l_k$$

In particolare una funzione

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_M)^T$$

È continua se e solo se ogni componente  $f_k$  è continua.

### Esempi di funzioni continue:

Sia  $X, ||x||$  uno spazio metrico;  
 $d(x, y) = ||x - y||$

La norma è una funzione continua.

### DIM:

Sia  $x_0 \in X$ .

$$|||x|| - ||x_0||| \leq ||x - x_0|| \stackrel{\delta=\varepsilon}{\gtrsim} \varepsilon \quad \blacksquare$$

Sia ora

$$X = C^0([a, b], \mathbb{R}), \quad Y = \mathbb{R}$$

$$f: X \rightarrow Y, \quad f(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

$f$  è continua? Devo dimostrare che

$$\forall \varepsilon \geq \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall \varphi \in X, \varphi \neq \varphi_0 \in X$$

$$\text{Se } d_\infty(\varphi, \varphi_0) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \varphi_0(x) dx \right| < \varepsilon$$

Quindi

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \varphi_0(x) dx \right| \leq \\ & \leq \int_a^b |\varphi(x) - \varphi_0(x)| dx < \underbrace{\delta(b-a)}_{<\delta} < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Se } \delta < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad \blacksquare$$

Sia  $X = C_{d_\infty}^1([a, b], \mathbb{R})$ ,  $Y = C_{d_\infty}^0([a, b], \mathbb{R})$

$$D: X \rightarrow Y, \quad D\varphi = \varphi'$$

$D$  è continua? NO!

### TEOREMI SUI LIMITI

#### Unicità:

Sia

$$f: A \subseteq X_1 \rightarrow X_2$$

$x_0$  punto di accumulazione per  $A$ . Se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Allora è unico.

### DIM:

Se per assurdo fossero due  $l_1 \neq l_2$  esisterebbero  $U_1$  intorno di  $l_1$  e  $U_2$  intorno di  $l_2$  con

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Vedi continuo su analisi 1. ■

#### Limite della restrizione:

Sia  $E \subseteq A \subseteq X$ ,  $f: A \rightarrow Y$ ,  $x_0$  p. di acc. per  $E$ . Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in Y$$

Allora

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f|_E(x) = l$$

Applicazione: importante per verificare che non esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Si possono cercare due restrizioni di  $f$ ,  $E_1, E_2$  e

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_1}} f|_{E_1}(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E_2}} f|_{E_2}(x)$$

### TEOREMA SUL LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Siano  $X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{g} X_3$  spazi metrici.

$$E \subseteq X_1, \quad f(E) \subseteq F, \quad f: E \rightarrow X_2$$

$$g: F \rightarrow X_3$$

Sia  $x_0$  punto di accumulazione di  $E$ .  $y_0$  punto di accumulazione per  $F$ .  $l \in X_3$

Supponiamo sia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$$

Esista inoltre un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che

$$\forall x \in U, x \neq x_0$$

$$\Rightarrow f(x) \neq y_0$$

### DIM su analisi 1.

### Corollario:

Una funzione composta di due funzioni continue è continua.

### INSIEME COMPATTO (per successioni in uno spazio metrico)

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Un insieme  $E \subseteq X$  si dice **compatto** se per ogni successione  $(x_n)_n$  con  $x_n \in E \ \forall n$ , esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k$  tale che esiste

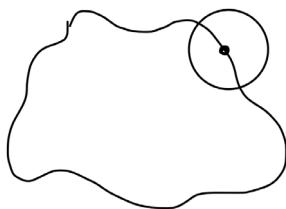
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \alpha \in E$$

(enunciato di Bolzano Weierstrass)

### TEOREMA

Sia  $E \subseteq X$  compatto. Allora  $E$  è chiuso e limitato.

### DIM chiuso:



Sia  $x_0$  un punto di accumulazione di  $E$ . Bisogna dimostrare che  $x_0$  appartiene ad  $E$ .

Supponiamo per assurdo che  $x_0 \notin E$ .

Per ogni  $n$  considero la palla  $B(x_0, \frac{1}{n}) \cap E$ , che è un intorno di  $x_0$ . Siccome è p. di acc. esiste

$$x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \cap E$$

La successione  $(x_n)_n$  ammette una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k$  tale che

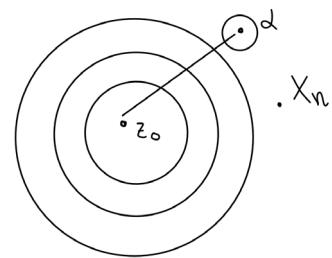
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \alpha \in E$$

Ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$$

Quindi  $E \ni \alpha = x_0 \notin E$ , quindi ottengo l'assurdo.

### DIM limitato:



Per assurdo non lo sia. Fissiamo un punto  $z_0 \in E$ .

Quindi  $\forall n \exists x_n \in E \setminus B(z_0, n)$ .

Sia  $(x_{n_k})_k$  una sottosuccessione di  $(x_n)_n$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \alpha \in E$$

Considero  $B(\alpha, \frac{1}{2}) \subset B(z_0, n)$  per ogni  $n \geq \hat{n}$ , che è un assurdo perché dovrei avere

$$x_n \in B(\alpha, \frac{1}{2})$$

Se  $n$  grande ma  $x_n \notin B(z_0, n)$ . ■

### TEOREMA di caratterizzazione degli insiemi compatti in $\mathbb{R}^N$

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  è compatto se e solo se  $E$  è chiuso e limitato.

### DIM:

Se  $E$  è compatto allora è chiuso e limitato. Dimostriamo viceversa.

Sia ora  $E$  chiuso e limitato, dimostriamo che è compatto.

Sia  $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_N^k)_k$  una successione in  $E$ .

Dobbiamo trovare una sottosuccessione che converge in  $E$ .

Consideriamo la successione in  $\mathbb{R}$  data dalla **prima** componente

$(x_1^k)_k$ , questa è limitata in  $\mathbb{R}$ , per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione

$$(x_1^{k_j})_j, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} x_1^{k_j} = \alpha_1 \in \mathbb{R}$$

Considero ora in  $\mathbb{R}^N$  la successione

$$\left( \underbrace{x_1^{k_j}, x_2^{k_j}, \dots, x_N^{k_j}}_{*} \right)_j$$

Consideriamo la successione in  $\mathbb{R}$  data dalla **seconda** componente

$(x_2^{k_j})_j$ , questa è limitata in  $\mathbb{R}$ , per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione

$$(x_2^{k_{j_s}})_s, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} x_2^{k_{j_s}} = \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Considero ora in  $\mathbb{R}^N$  la successione

$$\left( x_1^{k_{j_s}}, x_2^{k_{j_s}}, \underbrace{x_3^{k_{j_s}}, \dots, x_N^{k_{j_s}}}_{*} \right)_j$$

Consideriamo la successione in  $\mathbb{R}$  data dalla **terza** componente, e così avanti..

Procedendo in questo modo otteniamo una sotto successione

$$\left( x_N^{k_1 k_2 \dots k_N}, x_N^{k_1 k_2 \dots k_N}, \dots, x_N^{k_1 k_2 \dots k_N} \right)_{k_N}$$

Che converge a  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T \in \mathbb{R}^N$ .

Poichè  $E$  è chiuso si ha che

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T \in E \quad \blacksquare$$

### TEOREMA DI COMPATTEZZA

Sia  $f: X_1 \rightarrow X_2$   $f$  continua,  $K \subseteq X_1$  compatto.

Allora  $f(K)$  è compatto.

DIM:

Sia  $(y_n)_n$  una successione nell'insieme  $f(K)$ ; allora  $\forall n$  esiste  $x_n \in K$  con  $y_n = f(x_n)$ ;

La successione  $(x_n)_n$  ha una sottosuccessione convergente  $(x_{n_k})_k$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \alpha \in K$$

Quindi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) \stackrel{\text{continuità}}{\cong} f(\alpha) \in f(K)$$

Ho quindi trovato una sotto successione di  $(y_n)_n$  che ha un limite in  $f(K)$ , e questo dimostra che l'immagine è un insieme compatto ■

### TEOREMA DI WEIERSTRASS (corollario)

Sia  $f: K \rightarrow X_2$   $f$  continua,  $K \subseteq X_1$  compatto. Allora esistono

$$\min_K f, \quad \max_K f$$

DIM:

$f(K)$  è compatto in  $\mathbb{R}$  e quindi esistono massimo e minimo.

### TEOREMA DELLA CONTINUITÀ UNIFORME (Heine-Cantor)

Sia  $f: K \subseteq X_1 \rightarrow X_2$ ,  $K$  compatto.  $f$  continua su  $K$ . Allora  $f$  è uniformemente continua su  $K$ , cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che } \forall x_1, x_2 \in K$$

$$d_1(x_1, x_2) < \delta$$

$$\text{Si ha} \Rightarrow d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

DIM:

Supponiamo falsa la tesi, allora

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta = \frac{1}{n} > 0 \quad \exists x_n, y_n$$

tali che

$$d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ ma } d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

Considero  $(x_n)_n \in K$ , esiste allora una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k$  che converge a un punto  $\alpha \in K$ .

Si ha che  $d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$  quindi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \alpha$$

La funzione  $f$  è continua in  $\alpha$  quindi

$$\exists \delta > 0 : \text{se } d_1(x, \alpha) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2(f(x), f(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\varepsilon < d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \underbrace{d_2(f(x_{n_k}), f(\alpha))}_{<\frac{1}{4}\varepsilon} +$$

$$+ \underbrace{d_2(f(\alpha), f(y_{n_k}))}_{<\frac{1}{4}\varepsilon} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Per  $n$  abbastanza grande. Si ottiene quindi l'assurdo. ■

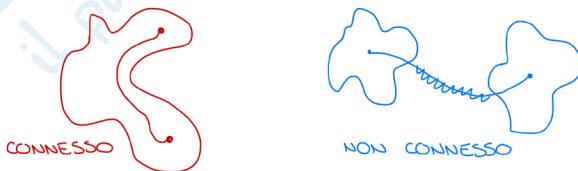
### DEF:

Sia  $X$  uno spazio metrico. Un insieme  $E \subseteq X$  si dice **connesso per archi** se  $\forall x_1, x_2 \in E$ , esiste una curva continua

$$\gamma: [0,1] \rightarrow E$$

Tale che  $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$ .

$$[\forall t \in [0,1] \Rightarrow \gamma(t) \in E]$$



### TEOREMA DI CONNESSIONE

Sia  $f: X_1 \rightarrow X_2, E \subseteq X_1$  connesso per archi.  $f$  continua. Allora  $f(E)$  è connesso per archi.

### DIM:

Siano  $y_1, y_2 \in f(E)$ , esistono quindi  $x_1, x_2 \in E$  tali che  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ .

Poichè  $E$  è connesso, esiste una curva  $\gamma: [0,1] \rightarrow E$  continua tale che

$$\gamma(0) = x_1, \quad \gamma(1) = x_2$$

Allora la curva  $(f \circ \gamma): [0,1] \rightarrow f(E)$  è continua e

$$(f \circ \gamma)(0) = y_1, \quad (f \circ \gamma)(1) = y_2$$

### COROLLARIO (Teorema di Bolzano)

Sia  $f: E \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E$  connesso per archi.  $f$  continua. Esistono  $x_1, x_2 \in E$  tali che  $f(x_1) * f(x_2) < 0$

Allora esiste  $\xi \in E$  tale che  $f(\xi) = 0$ .

### DIM:

$f(E) \subseteq \mathbb{R}$  è connesso, quindi è un intervallo. Esistono in  $f(E)$  valori negativi e valori positivi, quindi  $0 \in f(E) \Rightarrow \exists \xi \in E$  tale che  $f(\xi) = 0$ . ■

### TEOREMI SUI LIMITI

Siano  $f, g: E \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}^M, (X, d)$  spazio metrico.  $x_0$  punto di accumulazione per  $E$ . Esistono inoltre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$$

Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ . Allora esistono

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (af + bg)(x) = a\alpha + b\beta$$

Siano invece  $f, g: E \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f * g)(x) = \alpha * \beta$$

### TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Sia  $f: E \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ , sia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha > 0$$

Allora esiste  $U \in \mathcal{N}_{x_0}$  tale che

$$\forall x \in E \cap U, x \neq x_0$$

$$\Rightarrow f(x) > 0$$

### TEOREMA DELLA LIMITATEZZA LOCALE

Sia  $f: E \subseteq X_1 \rightarrow X_2$ , esista inoltre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$$

Allora esiste  $U \in \mathcal{N}_{x_0}$  tale che  $f|_{U \cap E}$  è limitata; cioè esiste una palla  $B(y_0, r) \subset X_2$  tale che

$$f(x) \in B(y_0, r), \forall x \in U \cap E$$

### ALTRI LIMITI

Ha senso scrivere  $f: X \rightarrow Y$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$$

Si, se  $Y = \mathbb{R}$ , quindi per campi scalari.

Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Se  $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$  tale che

$$\forall x \in E, x \neq x_0, d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) > M$$

Ha senso scrivere  $f: X \rightarrow Y$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$$

Si, se  $X = \mathbb{R}$

Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$$

Se  $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$  tale che

$$\begin{aligned} \forall x \in E, x \neq x_0, d(x, 0) > N \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

In generale  $f: X_1 \rightarrow X_2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

*non ha significato*

Però ha senso considerare

$$\lim_{||x|| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

### ESEMPI IMPORTANTI DI CAMPI VETTORIALI:

#### Un applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$$

È tale che

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Un'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$  si può rappresentare mediante una matrice  $M$  a  $K$  righe e  $N$  colonne.

Fissate le basi (canoniche)

$$M = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ f(e_1) & \cdots & f(e_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = (y_1, \dots, y_k)^T$$

La matrice è tale che, se  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$$f(v) = M * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se  $K = 1$  ho una **forma lineare**

$$M = (f(e_1) \ \cdots \ f(e_n))$$

Ottengo una matrice riga.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= (f(e_1) \ \cdots \ f(e_n)) * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= \left\langle (f(e_1) \ \cdots \ f(e_n))^T, (x_1, \dots, x_n)^T \right\rangle \end{aligned}$$

#### OSS (Teorema di Riesz):

Ogni forma lineare  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  ammette una rappresentazione del tipo

$$f(v) = \langle w, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N$$

Dove  $w \in \mathbb{R}^N$  è fissato.

#### DERIVATE PER CAMPI SCALARI

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

La "pendenza" dipende dalla direzione, che si può individuare con un **versore**  $\bar{v}: ||\bar{v}|| = 1$

Si parla quindi di "pendenza nella direzione di  $v$ ".

Si può considerare  $f(x_0 + h\bar{v})$ , dove  $x_0 \in A$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h\bar{v}) - f(x_0)}{h}$$

Questa è la derivata della funzione

$$\varphi(h) = f(x_0 + h\bar{v}), \quad \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

#### DEF:

Sia quindi  $x_0 \in A, f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .  $A$  aperto. Esiste  $B(x_0, \varepsilon) \subset A$ ; fisso  $v \in \mathbb{R}^n : ||v|| = 1$

Considero la funzione  $\varphi: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv)$$

Se esiste  $\varphi'(0)$  questa si dice **derivata direzionale** di  $f$  in  $x_0$  nella direzione  $v$ .

Scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \varphi'(0)$$

In generale si può fare su  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , ma se  $M > 1 \Rightarrow \varphi'(0) \in \mathbb{R}^N$ .

#### ESEMPIO:

Se  $f = (f_1, f_2)^T, M = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial v}(x_0), \frac{\partial f_2}{\partial v}(x_0) \right)^T$$

#### ESEMPIO:

Considero la funzione

$$f(x, y) = xy + 2x$$

$$x_o = (1,0)^T, \quad \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((1,0)^T + t(1,0)^T) - f(1,0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1,0)}{t} = \\ &\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left[\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\frac{t}{\sqrt{2}} + 2\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] - 2}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} \left[\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\frac{t}{\sqrt{2}} + 2\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{3}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Sia  $v = e_i = \left(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0\right)^T, f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

$$x_o = (x_1^o, \dots, x_i^o, \dots, x_N^o)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_o) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^o, \dots, x_i^o + t, \dots, x_N^o) - f(x_1^o, \dots, x_i^o, \dots, x_N^o)}{t}$$

Consideriamo la funzione  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) := f\left(x_1^o, \dots, \underset{i}{x}, \dots, x_N^o\right)$$

$$g'(x_i^o) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_i^o + t) - g(x_i^o)}{t} = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_o)$$

$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_o)$  si dice anche **derivata parziale** della funzione  $f$  rispetto alla variabile  $x_i$  e si scrive

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) = g'(x_o)$$

Dove  $g$  è la funzione  $f$  in cui ho “congelato” tutte le variabili diverse da  $x_i$ .

### ESEMPIO:

Considerando la funzione di prima

$$f(x, y) = xy + 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$$

Considero le variabili non incrementate come valori fissati.

$$\text{Sia } f(x, y, z) = \frac{\sin(xy^2)}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{z} \cos(xy^2) - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{z} \cos(xy^2) 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{\sin(xy^2)}{z^2}$$

Se ho un campo vettoriale

$$f(x, y, z) = (x_2 + 2y + z, -x + \log y, x + z^2 - 1)^T$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (2x, -1, 1)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left(2, \frac{1}{y}, 0\right)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (1, 0, 2z)^T$$

**ATTENZIONE!** Una funzione può avere tutte le derivate parziali, ma non avere altre derivate direzionali.

Una funzione può avere tutte le derivate direzionali ma non essere continua.

### FUNZIONI DIFFERENZIABILI

#### DEF:

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, x_o \in A$

$f$  si dice **differenziabile** in  $x_o$  se esiste un'applicazione lineare  $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{(f(x) - f(x_o)) - L(x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

Se  $f$  è differenziabile  $L = df(x_o)$  si dice **differenziale** di  $f$  in  $x_o$ .

### CALCOLO DEL DIFFERENZIALE

$df(x_o)$  è un'applicazione lineare

$$df(x_o): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

Possiamo rappresentare il differenziale con una matrice  $M$  righe  $N$  colonne considerando le basi canoniche.

$$Jf(x_o) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ df(x_o)(e_1) & \cdots & df(x_o)(e_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Questa matrice si dice **matrice Jacobiana** di  $f$  in  $x_o$ .

### TEOREMA proprietà della funzione differenziabile

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $x_o \in A$ ,  $f$  differenziabile in  $x_o$ . Allora

- 1)  $f$  è continua in  $x_o$
- 2)  $f$  è derivabile in ogni direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = df(x_o)(v)$$

In particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) = df(x_o)(e_i)$$

Ne si deduce che la matrice Jacobiana avrà come colonne le derivate parziali della funzione relative alle variabili.

$$Jf(x_o) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

### ESEMPIO:

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3, \sin(x) + y, y)^T$$

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ \cos x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sia } v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0, 1) &= df(0, 1)(v) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### DIM del Teorema (continua):

Sia  $f$  differenziabile in  $x_o \in A$ , quindi esiste

$$df(x_o): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{(f(x) - f(x_o)) - df(x_o)(x - x_o)}{\|x - x_o\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pongo

$$\varphi(x) = \frac{(f(x) - f(x_o)) - df(x_o)(x - x_o)}{\|x - x_o\|}$$

Allora

$$\Rightarrow f(x) - f(x_o) =$$

$$= \varphi(x) * \|x - x_o\| + df(x_o)(x - x_o)$$

$f$  continua in  $x_o$  significa che

$$\lim_{x \rightarrow x_o} [f(x) - f(x_o)] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_o} [f(x) - f(x_o)] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_o} \left[ \underbrace{\varphi(x)}_{\rightarrow 0} * \underbrace{\|x - x_o\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{df(x_o)(x - x_o)}_{\substack{\text{A.L. quindi} \\ \text{è continua} \rightarrow 0}} \right] = 0$$

### DIM (derivabile):

Dobbiamo dimostrare che  $f$  è derivabile in ogni direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = df(x_o)(v)$$

In particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) = df(x_o)(e_i)$$

Per definizione si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_o + tv) - f(x_o)}{t}$$

Se è differenziabile allora si ha che

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_o) &= \\ &= \varphi(x) * \|x - x_o\| + df(x_o)(x - x_o) \end{aligned}$$

Dove  $\lim_{x \rightarrow x_o} \varphi(x) = 0$ . Prendo  $x = x_o + tv$

$$f(x_o + tv) - f(x_o) =$$

$$= \varphi(x_o + tv) * \overbrace{\overbrace{||tv||}^{||v||=1}}^{\text{lineare}} + \overbrace{df(x_o)(tv)}^{df(x_o)(v)} =$$

$$= |t| \varphi(x_o + tv) + t df(x_o)(v)$$

Allora

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_o) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_o + tv) - f(x_o)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\text{limitata}} \underbrace{\varphi(x_o + tv) + df(x_o)(v)}_{\rightarrow 0} \right] = \\ &= df(x_o)(v) \blacksquare \end{aligned}$$

Questo funziona anche per i **campi vettoriali**.

La matrice associata al  $df(x_o)$  si ottiene dove ogni colonna è il differenziale applicato alla direzione di base.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) &= \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_o) = df(x_o)(e_i) \\ Jf(x_o) &= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se il campo è **scalare** ( $M = 1$ ),  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , la matrice è una matrice riga, e il differenziale è una **forma lineare**  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ricordiamo che ogni forma lineare si può rappresentare come

$$\langle v, x \rangle$$

Dove  $v$  è fissato

$$v = Jf(x_o)^T = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^T$$

Questo vettore è detto **gradiente di  $f$  in  $x_o$**  e si indica con il simbolo  $\nabla f(x_o)$  **nabla**.

**NB:** Il gradiente è definito se  $f$  è un campo scalare e differenziabile. Ricordando che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = df(x_o)(v) = \langle \nabla f(x_o), v \rangle$$

ESEMPIO:

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$(x_o, y_o)^T = (1, 2)^T$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = \langle \nabla f(1, 2), v \rangle$$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 3y^2)^T$$

$$\nabla f(1, 2) = (2, 12)^T$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = 2 * \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

### APPROXIMANTE LINEARE

Sia  $f$  differenziabile in  $x_o \in A$ . Diremo **approssimante lineare di  $f$  in  $x^o$**  la funzione

$$\tilde{f}(x) = f(x_o) + df(x_o)(x - x_o)$$

In particolare se  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , l'equazione

$$\begin{aligned} z &= f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o) \end{aligned}$$

È l'equazione del **piano tangente** il grafico della funzione  $f$  nel punto  $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))^T$ .

DEF:

Se consideriamo una funzione  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la matrice Jacobiana è una matrice colonna.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$$

$$\begin{aligned} J_\gamma(t_0) &= \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} := \gamma'(t_0) \\ \gamma' &: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$\gamma'$  è il vettore tangente la curva.

### REGOLE DI DIFFERENZIABILITÀ

1)

#### Differenziabilità della combinazione lineare

Siano  $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $x_o \in A$ ;  $f, g$  differenziabili in  $x_o$ ; allora

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g$  è differenziabile e

$$d(\alpha f + \beta g)(x_o) = \alpha * df(x_o) + \beta * dg(x_o)$$

2)

### Differenziabilità del prodotto

Siano  $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  differenzabili in  $x_o$ , allora  $f * g$  è differenziabile in  $x_o$  e si ha

$$\begin{aligned}\forall v \in \mathbb{R}^N &\Rightarrow d(f * g)(x_o)(v) = \\ &= df(x_o)(v) * g(x_o) + f(x_o) * dg(x_o)(v) \\ d(f * g)(x_o) &: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

3)

### Teorema di differenziabilità delle funzioni composte

$$A \subseteq \mathbb{R}^N \xrightarrow[f]{\quad} B \subseteq \mathbb{R}^M \xrightarrow[g]{\quad} \mathbb{R}^K$$

Sia  $x_o \in A$ ,  $y_o = f(x_o) \in B$ .  $f$  differenziabile in  $x_o$ ,  $g$  differenziabile in  $y_o$ .

Allora  $g \circ f$  è differenziabile in  $x_o$  e sia ha

$$\begin{aligned}d(g \circ f)(x_o) &= \\ &= dg(f(x_o)) * df(x_o)\end{aligned}$$

Si osservi che la matrice Jacobiana di  $f$  è  $M \times N$ , quella di  $g$  è  $K \times M$ , e la matrice della composta è  $K \times N$ .

$$\underbrace{J(g \circ f)(x_o)}_{K \times N} = \underbrace{Jg(f(x_o))}_{K \times M} * \underbrace{Jf(x_o)}_{M \times N}$$

Dove ' $*$ ' è il prodotto righe per colonne tra matrici.

$$\boxed{\frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^M \frac{\partial g_i(y_o)}{\partial y_k} * \frac{\partial f_k(x_o)}{\partial x_j}}$$

Questa è detta **chain rule** (regola della catena).

### DIM (3):

Proviamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{g(f(x)) - g(f(x_o)) - dg(y_o)df(x_o)(x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0$$

Per la differenziabilità della  $g$ :

$$g(y) - g(y_o) = dg(y_o)(y - y_o) + o(\|y - y_o\|)$$

Lo applichiamo ora quando

$$y = f(x) \text{ e } y_o = f(x_o)$$

$$\begin{aligned}g(f(x)) - g(f(x_o)) &= dg(f(x_o))(f(x) - f(x_o)) \\ &+ o(\|f(x) - f(x_o)\|)\end{aligned}$$

Per la differenziabilità della  $f$ :

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x) - f(x_o) &= \\ &= df(x_o)(x - x_o) + o(\|x - x_o\|) \\ \Rightarrow g(f(x)) - g(f(x_o)) &= \\ &= dg(f(x_o)) \left( df(x_o)(x - x_o) + o(\|x - x_o\|) \right) + \\ &+ \frac{o(\|f(x) - f(x_o)\|)}{\|f(x) - f(x_o)\|} * \|f(x) - f(x_o)\|\end{aligned}$$

Divido tutto per  $\|x - x_o\|$  considerando il numeratore del limite iniziale

$$\begin{aligned}g(f(x)) - g(f(x_o)) - dg(f(x_o))df(x_o)(x - x_o) &= \\ \Downarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x)) - g(f(x_o)) - dg(f(x_o))df(x_o)(x - x_o)}{\|x - x_o\|} &= \\ &= \underbrace{\frac{dg(f(x_o))df(x_o)(x - x_o)}{\|x - x_o\|}}_{1^o} + \\ &+ \underbrace{\frac{dg(f(x_o))(o(\|x - x_o\|))}{\|x - x_o\|}}_{2^o} + \\ &+ \underbrace{\frac{o(\|f(x) - f(x_o)\|)}{\|f(x) - f(x_o)\|} * \frac{\|f(x) - f(x_o)\|}{\|x - x_o\|}}_{3^o} + \\ &- \underbrace{\frac{dg(f(x_o))df(x_o)(x - x_o)}{\|x - x_o\|}}_{5^o}\end{aligned}$$

Il primo pezzo si semplifica con il quinto:

$$\begin{aligned}\frac{dg(f(x_o))df(x_o)(x - x_o)}{\|x - x_o\|} + \\ - \frac{dg(f(x_o))df(x_o)(x - x_o)}{\|x - x_o\|} = 0\end{aligned}$$

Restano le parti 2, 3, 4. Considero il blocco 2:  
 $dg(f(x_o))$  è lineare quindi posso portare il denominatore (costante) all'interno

$$\frac{dg(f(x_o))(o(||x - x_o||))}{||x - x_o||} = \\ = dg(f(x_o)) \underbrace{\left( \frac{o(||x - x_o||)}{||x - x_o||} \right)}_{\rightarrow 0 \text{ per definizione di } o \text{ piccolo, se } x \rightarrow x_o} \rightarrow 0$$

Dato che  $dg(f(x_o))$  è continua, dato che un'applicazione lineare calcolata in un punto che tende a 0, questa stessa tende a 0.

Il blocco 3 tende a zero per per definizione di  $o$  piccolo e perché essendo  $f$  differenziabile allora è continua, e quindi  $f(x) \rightarrow f(x_o)$  se  $x \rightarrow x_o$

$$\frac{o(||f(x) - f(x_o)||)}{||f(x) - f(x_o)||} \xrightarrow{\rightarrow 0 \text{ perché } f \text{ è continua}} 0$$

Bisogna ora dimostrare che il blocco 4 è limitata quando  $x \rightarrow x_o$ .

$$\frac{||f(x) - f(x_o)||}{||x - x_o||} = \\ = \frac{||df(x_o)(x - x_o) + o(||x - x_o||)||}{||x - x_o||} = \\ = \left\| \underbrace{df(x_o) \left( \frac{x - x_o}{||x - x_o||} \right)}_{\text{limitata}} + \underbrace{o\left(\frac{||x - x_o||}{||x - x_o||}\right)}_{\rightarrow 0} \right\|$$

Quella quantità è limitata perché  $df(x_o)$  è una funzione continua e quindi è limitata sul compatto  $\overline{B(0,1)}$ .

E quindi il limite tende a 0. ■

### Caso particolare di funzione composta

Sia  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $g: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ \gamma): I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(g \circ \gamma)(t_o) = dg(\gamma(t_o)) * d\gamma(t_o)$$

Essendo da  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si può pensare come

$$(g \circ \gamma)'(t_o)$$

$$(g \circ \gamma)'(t) = dg(\gamma(t_o))\gamma'(t_o) = \langle \nabla g(\gamma(t_o)), \gamma'(t_o) \rangle$$

Supponiamo di avere una curva nel piano rappresentata come una curva di livello di un campo scalare

$$f(x, y) = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$L_\alpha = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \alpha\}$$

Sia  $(x_o, y_o)^T \in L_\alpha$ ; supponiamo che in un intorno  $U$  del punto  $(x_o, y_o)^T$  la curva si possa parametrizzare.

$$L_\alpha \cap U = \{\gamma(t) : t \in I\}$$

Ad esempio:  $x^2 + y^2 = 1$

Fisso un punto qualunque del cerchio, ho che

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T, \quad t \in [0, 2\pi]$$

È una parametrizzazione del cerchio.

Considero la funzione composta

$$f \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall t \in I \Rightarrow \gamma(t) \in L_\alpha$$

$$\forall (x, y)^T \in L_\alpha \Rightarrow f(x, y) = \alpha$$

La funzione  $f \circ \gamma$  è costante.

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle, \forall t \in I$$

Quindi il gradiente è ortogonale alla sua curva di livello, ma questo vale in generale.

### PROPRIETÀ GEOMETRICHE DEL VETTORE GRADIENTE (le chiede spesso!!!!)

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile.

- Il vettore gradiente è ortogonale ai suoi insiemi di livello (DIM sopra)

#### OSS:

Sia  $v$  un versore, allora la derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| = |\langle \nabla f(x), v \rangle| \leq \|\nabla f(x)\| * \overbrace{\|v\|}^1 = \\ = \|\nabla f(x)\|$$

Se il gradiente non è nullo posso considerare

$$\begin{aligned} v &= \frac{\nabla f(x)}{||\nabla f(x)||} \\ &\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| = \left| \langle \nabla f(x_0), \frac{\nabla f(x_0)}{||\nabla f(x_0)||} \rangle \right| = \\ &= \frac{1}{||\nabla f(x_0)||} |\langle \nabla f(x_0), \nabla f(x_0) \rangle| = ||\nabla f(x_0)|| \end{aligned}$$

- 2) Il vettore gradiente indica la direzione di massima "rapidità" di variazione e la sua norma è quella massima.

### EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Un'equazione differenziale è un'equazione del tipo ad esempio

$$u' = u$$

Dove  $u$  è una variabile funzionale. Bisogna trovare una funzione  $u(x)$  tale che

$$u'(x) = u(x) \quad \forall x$$

In questo caso  $u(x) = K * e^x$

Oppure nel caso di due variabili,  $u(x, y)$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

In questo caso risolverla significa trovare una funzione

$$u(x, y) \text{ tale che } \forall (x, y)^T$$

$$\Rightarrow x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Ad esempio  $u = 0$  è soluzione.

Sia  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una qualunque funzione derivabile; allora la funzione

$$u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), u: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y)^T : y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

È soluzione di

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Calcoliamo da derivata di  $u$  rispetto ad  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \circ h)(x, y)$$

Dove  $h(x, y) = \frac{y}{x}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow[h]{\varphi} \mathbb{R} \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \circ h)(x, y) = \\ &= \varphi'\left(h(x, y)\right) * \frac{\partial}{\partial x}(h(x, y)) = \\ &= \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) * \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) * \frac{1}{x} \\ x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} &= \\ &= x * \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) * \left(-\frac{y}{x^2}\right) + y * \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) * \frac{1}{x} = \\ &= \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \left[-\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\right] = 0, \quad \forall (x, y)^T \end{aligned}$$

### TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $A$  aperto,  $x_o \in A$ .

Supponiamo inoltre esistano in  $A$  tutte le derivate parziali della funzione  $f$  e queste siano continue nel punto  $x_o$ .

Allora  $f$  è differenziabile in  $x_o$ .

DIM caso  $N = 2, M = 1$ :

$$x_o \rightarrow (x_o, y_o)^T, x \rightarrow (x, y)^T$$

dire che  $f$  è differenziabile significa che la differenza della funzione e il suo approssimante lineare è un infinitesimo di ordine maggiore di 1:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_o, y_o) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) \\ - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o) &= \\ &= [f(x, y) - f(x, y_o)] + [f(x, y_o) - f(x_o, y_o)] \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o) = \dots \end{aligned}$$

Osservo che la differenza  $f(x, y) - f(x, y_0)$  è una funzione in  $y$ , in quanto  $x$  è fissato, quindi si tratta di una funzione

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) \underset{\text{Lagrange}}{\equiv} \overline{\varphi'}(\xi)(y - y_0)$$

$\varphi'$  è la derivata parziale di  $f$  rispetto ad  $y$ .

$$\dots = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y - y_0) + \dots$$

Per la differenza  $f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$  risulta essere una funzione in  $x$  perché  $y_0$  è fissato

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \underset{\text{Lagrange}}{\equiv} \overline{\gamma'}(\sigma)(x - x_0)$$

$\gamma'$  è la derivata parziale di  $f$  rispetto ad  $x$ .

$$\begin{aligned} & \cdots + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)}^{\Downarrow} \\ & - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = \\ & = \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0) + \\ & + \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) = \bullet \\ & \left| \frac{1}{\|(x - x_0, y - y_0)^T\|} * \bullet \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| * \underbrace{\frac{|y - y_0|}{\|(x - x_0, y - y_0)^T\|}}_{\leq 1} + \\ & + \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| * \underbrace{\frac{|x - x_0|}{\|(x - x_0, y - y_0)^T\|}}_{\leq 1} \leq \\ & \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| \end{aligned}$$

Se considero il limite

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (x_0,y_0)^T}$$

Ho che  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  ma in particolare, dato che

$$|\xi - y_0| < |y - y_0|$$

E anche

$$|\sigma - x_0| < |x - x_0|$$

Ho che

$$\Rightarrow \xi \rightarrow y_0, \sigma \rightarrow x_0$$

E quindi al limite per la continuità ho che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

E quindi tutto il blocco tende a  $\rightarrow 0$ . ■

**NB:** la condizione è sufficiente ma NON necessaria.

OSS:

Se  $f$  ha le derivate parziali continue, allora  $f$  è differenziabile, ma allora esistono tutte le derivate direzionali e vale la formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$\nabla f = \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^T}_{\text{è continua}}$$

Se faccio il prodotto scalare di una funzione continua per un vettore ho ancora una funzione continua

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \text{ è continua}$$

E quindi tutte le derivate direzionali sono continue.

### FORMULA DEL VALOR MEDIO

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Dove  $|\xi - a| < |b - a|, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sia ora  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , vale ancora?

$$f(b) - f(a) = ?$$

$b - a$  è un vettore

$\nabla f$  è un vettore

$$\Rightarrow f(b) - f(a) \stackrel{?}{=} \langle \nabla f(\xi), b - a \rangle$$

## TEOREMA

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  un aperto convesso. Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $A$ . Allora per ogni  $x_1, x_2 \in A$  esiste un punto  $\xi$  appartenente al segmento di estremi  $x_1$  e  $x_2$  tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = \langle \nabla f(\xi), x_2 - x_1 \rangle$$

Il segmento di estremi  $x_1$  e  $x_2$  in  $\mathbb{R}^N$  è una curva che collega i due punti e si può parametrizzare nel seguente modo:

$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\gamma(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

DIM:

Considero

$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\gamma(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

Considero ora la composta

$$(f \circ \gamma)(t): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma'(t) = x_2 - x_1$$

Per il Teorema di Lagrange esiste un punto

$$\eta \in ]0,1[$$

Tale che

$$\begin{aligned} (1 - 0)(f \circ \gamma)'(\eta) &= (f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0) = \\ &= f(x_2) - f(x_1) \end{aligned}$$

Per il Teorema sulla derivata della funzione composta

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(\eta) &= \langle \nabla f(\gamma(\eta)), \gamma'(\eta) \rangle = \\ &= \langle \nabla f(\gamma(\eta)), x_2 - x_1 \rangle \end{aligned}$$

Concludo ponendo  $\xi = \gamma(\eta)$ . ■

## TEOREMA (funzioni con derivate nulle)

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  un aperto connesso (per archi);

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  tale che esista

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall x \in A$$

E sia vero che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \quad \forall i, \forall x$$

Allora  $f$  è costante.

DIM:

[ Lemma: se  $A$  è aperto connesso per archi, allora per ogni  $x_1, x_2 \in A$ , esiste  $\gamma$  curva  $C^1$  che congiunge  $x_1$  e  $x_2$  ]

Per ipotesi esistono le derivate parziali. Considero quindi due punti  $x_1, x_2 \in A$ . Per il lemma esiste

$$\gamma \in C^1(I, A)$$

Tale che  $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$ . Proviamo che

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Considero la funzione composta

$$f \circ \gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \circ \gamma)'(t) = \underbrace{\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle}_0 = 0 \quad \forall t$$

[ Il gradiente esiste perché  $f$  è differenziabile, e questo per il Teorema del differenziale totale, dato che tutte le derivate parziali sono 0 e quindi continue. ]

Quindi

$$\Rightarrow (f \circ \gamma)(1) = (f \circ \gamma)(0)$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad ■$$

## APPLICAZIONI IMPORTANTI

Sia  $h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M, w \in \mathbb{R}^M, \varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \langle w, h(x) \rangle$$

$$\nabla \varphi(x) = ?$$

Definisco  $\eta(y) = \langle w, y \rangle, \eta: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla \eta(y) = w$$

$$\varphi(x) = (\eta \circ h)(x)$$

$$J\varphi(x) = \left[ \underbrace{J\eta(h(x)) * Jh(x)}_{w^T} \right]$$

$$\boxed{\nabla \varphi(x) = Jh(x)^T * w}$$

Sia  $\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle, \psi(x, y) = \langle Ax, y \rangle$

$$\nabla \psi(x, y) = (A^T y, Ax)^T$$

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= (x, x)^T \\
\Rightarrow \varphi(x) &= (\psi \circ \eta)(x) \\
J\varphi(x) &= J\psi(\eta(x)) * J\eta(x) = \\
&\quad \underbrace{(A^T y, Ax)^T}_{y=x} * \underbrace{\begin{pmatrix} I_N \\ I_N \end{pmatrix}}_{I_N} \\
&= A^T y|_{y=x} + Ax = A^T x + Ax = 2Ax \\
\Rightarrow \boxed{\nabla \varphi(x) = \nabla \langle Ax, x \rangle = 2Ax}
\end{aligned}$$

### FORME QUADRATICHE

Una forma quadratica in  $\mathbb{R}^N$  è una funzione del tipo

$$\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle$$

Con  $A$  matrice quadrata simmetrica.

Si ha che  $\varphi(x) = 0$  oppure è un polinomio omogeneo di 2° grado.

### DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , fissiamo un a direzione  $v: \|v\| = 1$ . Supponiamo esista  $\frac{\partial f}{\partial v}(x) \forall x \in A$

$\frac{\partial f}{\partial v}: A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione; sia  $w \in \mathbb{R}^N$  un altro versore,  $\|w\| = 1$ , ci chiediamo se la funzione  $\frac{\partial f}{\partial v}$  è derivabile lungo la direzione  $w$  in un punto  $x_0$ .

Se questo è il caso diremo che la derivata

$\frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}$  è la derivata direzionale seconda di  $f$  in  $x_0$  nelle direzioni  $v$  e  $w$  (in questo ordine).

Se  $v = e_i$  e  $w = e_k$  si parlerà di derivata parziale seconda in  $x_i$  e  $x_k$  e si scriverà

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x_0)$$

Si procede poi a definire le derivate di ogni ordine.

### ESEMPIO:

Se  $N = 3$ , ci sono 3 derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

Ma ci sono 9 derivate seconde

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z}
\end{aligned}$$

Ci sono 27 derivate terze, quindi  $3^k$  derivate di ordine  $k$ .

In generale ci sono  $N^k$  derivate di ordine  $k$ .

NB:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \approx \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  ma è solo una notazione.

### ESEMPIO:

Sia  $f(x, y, z) = x^2 y 2^z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy2^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 2^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y 2^z \log 2$$

Derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y2^z, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x2^z, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2xy2^z \log 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x2^z, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x^2 2^z \log 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2xy2^z \log 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x^2 2^z \log 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = x^2 y 2^z \log^2 2$$

Se pensata come una matrice, è simmetrica

$$\begin{pmatrix} 2y2^z & 2x2^z & 2xy2^z \log 2 \\ 2x2^z & 0 & x^2 2^z \log 2 \\ 2xy2^z \log 2 & x^2 2^z \log 2 & x^2 y 2^z \log^2 2 \end{pmatrix}$$

### OSS:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$$

Prendo ad esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0, & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3(x^2 + y^2) - xy^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - xy^3 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{xy^2(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5/t^4}{t} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \mathbf{0} \neq \mathbf{1}$$

**NB:** In generale può essere che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_o) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x_o)$$

### TEOREMA DI SCHWARZ (sull'inversione dell'ordine di derivazione)

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto; sia  $x_o \in A$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \geq 2$ .

Siano definite in  $A$  tutte le derivate parziali di ogni ordine  $\leq k$  rispetto a tutte le variabili, e queste siano continue in  $x_o$ .

Allora tutte le derivate parziali che differiscono tra loro soltanto nell'ordine di derivazione sono uguali tra loro.

In particolare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_o) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x_o)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_o) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(x_o) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}(x_o) = \dots \end{aligned}$$

### FUNZIONI DUE VOLTE DIFFERENZIABILI

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  un campo scalare differenziabile. Allora è definito il gradiente

$$\nabla f: A \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Campo vettoriale.

Se  $\nabla f$  è differenziabile in  $x_o \in A$ , diremo che la funzione  $f$  è **due volte differenziabile** in  $x_o$ .

La matrice Jacobiana di  $\nabla f$  si dice **Hessiana** di  $f$

$$J(\nabla f)(x_o) = Hf(x_o)$$

E si può dimostrare che è una matrice simmetrica [ Teorema di Young ].

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^T \\ Hf = J(\nabla f) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow Hf(x_o)^T = Hf(x_o) \end{aligned}$$

### DEF:

Si dice **forma bilineare** una funzione del tipo

$$\varphi(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

Ossia un'applicazione che è lineare secondo le sue due componenti.

$$\varphi: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(ax_1 + \beta x_2 y) = \alpha \varphi(x_1, y) + \beta \varphi(x_2, y)$$

$$\varphi(x, \gamma y_1 + \delta y_2) = \gamma \varphi(x, y_1) + \delta \varphi(x, y_2)$$

Diremo **differenziale secondo** di  $f$  in  $x_o$  la forma bilineare

$$\varphi(x, y) = \langle Hf(x_o)x, y \rangle$$

O la forma **quadratica associata**  $\varphi(x, x)$ .

OSS:

Se  $f$  è due volte differenziabile

$$d^2f(x_o): \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(x_o) &= \langle Hf(x_o)v, w \rangle = \\ &= \langle v, Hf(x_o)^T w \rangle = \langle v, Hf(x_o)w \rangle = \\ &= \langle Hf(x_o)w, v \rangle = \frac{\partial^2}{\partial v \partial w}(x_o) \end{aligned}$$

DIM (dell'osservazione) lo chiede quotato 1:

Per definizione

$$\begin{aligned} d^2f(x_o) &= d(\nabla f)(x_o) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(x_o) &= \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right)(x_o) = \dots \end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial w}(x) &= \langle \nabla f(x), w \rangle = \varphi(x) \\ \Rightarrow \dots &= \frac{\partial}{\partial v} \varphi(x_0) = \langle \nabla \varphi(x_0), v \rangle = \\ &= \underbrace{\langle J(\nabla f)(x_o)^T * w, v \rangle}_{Hf(x_o)} = \langle Hf(x_o) * w, v \rangle = \\ &= d^2f(x_o)(v, w) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definiamo quindi il **differenziale terzo**

$$d^3f(x_o): \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d^3f(x_o)(u, v, w) = \frac{\partial^3 f}{\partial w \partial u \partial v}(x_o) \dots$$

Abbiamo osservato che  $d^2f(x_o)(u, u)$  è una forma quadratica

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= d^2f(x_o)(u, u) \\ &= \langle Hf(x_o)u, u \rangle \end{aligned}$$

Sia  $N = 2$ ,  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , allora

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

Per quanto riguarda invece il differenziale terzo

$$\varphi(u) = d^3f(x_o)(u, u, u)$$

$$\varphi(x, y) = a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$

Che è un polinomio omogeneo di grado 3.

### APPROXIMANTE DI ORDINE $k$ DI UN CAMPO SCALARE $f$ , [ $k = 2$ ]

Se esiste un polinomio di grado  $\leq k$ ,  $P_k$  tale che

$$\begin{aligned} P_k(x_o) &= f(x_o) \\ \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - P_k(x)}{\|x - x_o\|^k} &= 0 \end{aligned}$$

Allora  $P_k$  si dice **approssimante di ordine  $k$**  di  $f$  in  $x_o$ .

### TEOREMA

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  due volte differenziabile in  $x_o \in A$ .

Allora esiste l'approssimante di ordine 2 di  $f$  in  $x_o$ ,  $P_2$ , e si ha

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_o) + df(x_o)(x - x_o) + \\ &\quad + \frac{1}{2} d^2f(x_o)(x - x_o, x - x_o) = \\ &= f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle Hf(x_o)(x - x_o), x - x_o \rangle \end{aligned}$$

DIM:

Dimostriamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{1}{\|x - x_o\|^2} [f(x) - P_2(x)] = 0$$

Sia  $g(x) = f(x) - P_2(x)$ .

Osserviamo che  $g(x_o) = f(x_o) - f(x_o) = 0$ , per Lagrange si ha che

$$\Rightarrow g(x) - g(x_o) = \langle \nabla g(\xi), x - x_o \rangle$$

Con  $\xi \in$  segmento  $[x, x_o]$

$$\begin{aligned} \nabla g(x) &= \nabla f(x) - \nabla P_2(x) = \\ &= \nabla f(x) - \nabla \left[ \overbrace{f(x_o)}^{cost} + \overbrace{\langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle}^{\nabla(\langle v, x \rangle) = v} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \langle Hf(x_o)(x - x_o), x - x_o \rangle \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla f(x) - \nabla f(x_o) - \frac{1}{2} * 2Hf(x_o)(x - x_o) \\
\Rightarrow g(x) &= \langle \nabla g(\xi), x - x_o \rangle = \\
\langle \nabla f(\xi) - \nabla f(x_o) - Hf(x_o)(\xi - x_o), x - x_o \rangle &= \dots ***
\end{aligned}$$

Ricordiamo che se  $h$  è differenziabile, allora

$$h(\xi) - h(x_o) = dh(x_o)(\xi - x_o) + o(|\xi - x_o|)$$

applico questa formula al gradiente di  $f$ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \nabla f(\xi) - \nabla f(x_o) &= \underbrace{d(\nabla f)(x_o)}_{Hf(x_o)} (\xi - x_o) \\
&\quad + o(|\xi - x_o|) \\
*** &= \langle Hf(x_o)(\xi - x_o) + o(|\xi - x_o|) \\
&\quad - Hf(x_o)(\xi - x_o), x - x_o \rangle = \\
&= \langle o(|\xi - x_o|), x - x_o \rangle
\end{aligned}$$

Calcolo il limite

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{g(x)}{|\xi - x_o|^2} \\
\left| \frac{g(x)}{|\xi - x_o|^2} \right| &= \frac{|\langle o(|\xi - x_o|), x - x_o \rangle|}{|\xi - x_o|^2} \leq
\end{aligned}$$

Per Cauchy Schwarz  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|o(|\xi - x_o|)\| * |\xi - x_o|}{|\xi - x_o|^2} = \\
&= \left\| \frac{o(|\xi - x_o|)}{|\xi - x_o|} \right\| = \\
&\left\| \frac{o(|\xi - x_o|)}{|\xi - x_o|} * \underbrace{\frac{|\xi - x_o|}{|\xi - x_o|}}_{<1} \right\| < \dots
\end{aligned}$$

$\xi$  si trova sul segmento che congiunge  $x$  e  $x_o$  quindi

$$\begin{aligned}
&|\xi - x_o| < |\xi - x_o| \\
\Rightarrow \frac{|\xi - x_o|}{|\xi - x_o|} &< 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dots < \left\| \frac{o(|\xi - x_o|)}{|\xi - x_o|} \right\| \rightarrow 0$$

Al limite tende al 0 per definizione di  $o$  piccolo. ■

### TEOREMA

Se  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  ha tutte le derivate parziali prime e seconde continue in  $x_o \in A$ , allora  $f$  è due volte differenziabile in  $x_o$ .

DIM:

Applico il teorema del differenziale totale alla funzione  $\nabla f$ .

DEF:

Si dice che  $f$  è di **classe  $C^k$**  e si scrive

$$f \in C^k(A, \mathbb{R})$$

se ha tutte le derivate parziali continue fino all'ordine  $k$ .

### OTTIMIZZAZIONE DI CAMPI SCALARI

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_o \in E$ , si dice punto di massimo (o **minimo**) per  $f$  se

$$f(x_o) = \min_E f$$

Cioè se  $\forall x \in E \Rightarrow f(x) \geq f(x_o)$

$x_o$  è punto di massimo/minimo relativo per  $f$  se esiste un intorno  $U$  di  $x_o$  tale che  $x_o$  è di massimo/minimo per  $f|_{E \cap U}$ , cioè

$$f(x) \leq f(x_o) \quad \forall x \in E \cap U$$

$x_o \in A$  (aperto) si dice **punto di sella** per  $f$  se esistono due direzioni  $u, w$  di  $\mathbb{R}^N$  tali che la funzione

$\varphi(t) = f(x_o + tu)$  ammette in  $t = 0$  un punto di minimo, mentre la funzione

$\psi(t) = f(x_o + tw)$  ammette in  $t = 0$  un punto di massimo.

### TEOREMA DI FERMAT (Test del gradiente)

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $x_o \in A$  punto di massimo o minimo relativo per  $f$ .

Supponiamo esista  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o)$ .

Allora  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = 0$ .

In particolare si ha  $\nabla f(x_o) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

DIM:

Sia  $x_o$  punto di minimo. Allora

$$f(x) \geq f(x_o) \quad \forall x \in A$$

Considero i punti del segmento  $x_o + tv$  contenuto in  $A$  ( $t \in ]-\delta, \delta[$ ).

Allora la funzione  $\varphi(t) = f(x_o + tv)$  ha in  $t = 0$  un punto di minimo.

$$(\varphi(t) \geq \varphi(0) \quad \forall t \in ]-\delta, \delta[)$$

Quindi  $\varphi'(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial v}(x_o)$ . ■

DEF:

Diremo **punto critico** di  $f$  un punto  $x_o \in A$  dove  $\nabla f(x_o) = 0$ .

### FORME QUADRATICHE: SEGNO

Si parla di **segno** (o **segnatura**) di una forma quadratica.

Una forma quadratica è una funzione del tipo

$$\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \langle Ax, x \rangle, A = A^T$$

$\varphi$  si dice **definita-positiva** se

$$\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0$$

$\varphi$  si dice **definita-negativa** se

$$\varphi(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0$$

$\varphi$  si dice **indefinita** se esistono  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$  tali che  $\varphi(x_1) < 0 < \varphi(x_2)$ .

ESEMPI:

$\varphi(x, y) = x^2 + y^2$  è definita positiva.

$\varphi(x, y) = -x^2 - y^2$  è definita negativa.

$\varphi(x, y) = xy$  è indefinita.

$\varphi(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$  NON è definita positiva, NON è definita negativa, NON è indefinita.

### PROPRIETÀ DELLE FORME QUADRATICHE

1)

Sia  $\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una forma quadratica.

$$\varphi(x) = \langle Ax, x \rangle, A = A^T$$

Allora  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha x) = \alpha^2 \varphi(x)$$

DIM:

$$\varphi(\alpha x) = \langle A\alpha x, \alpha x \rangle = \alpha^2 \langle Ax, x \rangle = \alpha^2 \varphi(x)$$

2)

Sia  $\varphi$  definita positiva. Allora esiste una costante  $m > 0$  tale che

$$\varphi(x) \geq m \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^N$$

DIM:

Se  $x = 0 \Rightarrow 0 \geq 0$ .

$$\text{Se } x \neq 0 \text{ considero } v = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow \|v\| = 1$$

Considero la funzione  $\varphi$  ristretta alla sfera unitaria

$$S(0,1) = \{v \in \mathbb{R}^N : \|v\| = 1\}$$

$S(0,1)$  è compatto.  $\varphi$  è continua su un compatto, quindi per Weierstrass esiste  $\min_{x \in S(0,1)} \varphi(x) = m$

$m > 0$  perché  $\varphi$  è definita positiva e quindi

$$m = \min_{x \in S(0,1)} \varphi(x) = \underbrace{\varphi(x_o)}_{x_o \neq 0} > 0$$

Abbiamo quindi che

$$m = \min\{\varphi(v) : \|v\| = 1\}$$

$$\Rightarrow m \leq \varphi(v), \quad \forall v : \|v\| = 1$$

$$m \leq \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|^2} \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \geq m|x|^2$$

$$f(x) - f(x_o) = \overbrace{\langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle}^{=0 \text{ perchè punto critico}} + \frac{1}{2} \varphi(x - x_o) + o(|x - x_o|^2) = \dots$$

### TEST DEL DIFFERENZIALE SECONDO (per lo studio dei punti critici)

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_o \in A$ ,  $f$  due volte differenziabile in  $x_o$ , e sia

$$\nabla f(x_o) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allora, posto

$$\varphi(v) = d^2 f(x_o)(v, v) = \langle Hf(x_o)v, v \rangle$$

Si ha che

- 1) Se  $\varphi$  è **definita positiva**,  $x_o$  è un punto di **minimo** relativo per  $f$ .
- 2) Se  $\varphi$  è **definita negativa**,  $x_o$  è un punto di **massimo** relativo per  $f$ .
- 3) Se  $\varphi$  è **indefinita** allora  $x_o$  è un punto di sella.

#### ESEMPIO:

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

$$\nabla f(x, y) = 4 \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x, y) = 12 \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

Punto critico  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi \equiv 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  punto di minimo.

Se  $f(x, y) = -x^4 - y^4$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  è punto di massimo.

Se  $f(x, y) = x^4 - y^4$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  è punto di sella.

Ma in ogni caso  $\varphi \equiv 0$ .

#### DIM TEOREMA:

Supponiamo  $\varphi$  definita positiva; proviamo che  $x_o$  è punto di minimo stretto.

[ Dove  $\varphi(x - x_o) = \langle Hf(x_o)(x - x_o), x - x_o \rangle$  ]

$$\dots = \frac{1}{2} \varphi(x - x_o) + o(|x - x_o|^2) = \dots$$

$$[ o(|x - x_o|^2) = \eta(x)|x - x_o|^2, \text{ dove} ]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \eta(x) = 0$$

Inoltre  $\varphi(x - x_o) \geq m * |x - x_o|^2$  per la seconda proprietà.]

$$\Rightarrow f(x) - f(x_o) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \underbrace{m * |x - x_o|^2}_{>0} + \eta(x)|x - x_o|^2 =$$

$$= \underbrace{\left( \frac{1}{2}m + \eta(x) \right)}_{>0 \text{ se } x \in U_{x_o}} |x - x_o|^2 > 0, \forall x \in U, x \neq x_o$$

[  $\left( \frac{1}{2}m + \eta(x) \right) > 0$  se  $x \in U$  intorno opportuno di  $x_o$ , in quanto  $m > 0$  e  $\eta(x)$  tende a zero se  $x \rightarrow x_o$  ]

$$\Rightarrow f(x) > f(x_o), \quad \forall x \in U, x \neq x_o$$

E quindi è punto di minimo relativo stretto.

Se  $\varphi$  è definita negativa

$$f(x) - f(x_o) = \langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle + \frac{1}{2} \varphi(x - x_o) + o(|x - x_o|^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\varphi(x - x_o)}_{\leq -m * |x - x_o|^2} + \underbrace{o(|x - x_o|^2)}_{\eta(x)|x - x_o|^2} \leq$$

$$\leq \underbrace{\left( -\frac{1}{2}m + \eta(x) \right)}_{<0 \text{ se } x \in U_{x_o}} |x - x_o|^2 < 0$$

$$\forall x \in U, x \neq x_o$$

E quindi  $x_o$  è punto di massimo relativo stretto.

Sia ora  $\varphi$  indefinita, allora esistono  $u, w \in \mathbb{R}^N$  tali che  $\varphi(u) < 0 < \varphi(w)$ .

Si può supporre che  $\|u\| = \|w\| = 1$ .

$$[\text{perché } \varphi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|^2} \varphi(u)]$$

Studiamo  $f(x_o + tu) = \sigma(t)$ . Si ha che

$$\sigma'(0) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_o) = 0$$

$\Rightarrow 0$  è punto critico per  $\sigma$ .

$$\sigma''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x_o) = \varphi(u) < 0$$

$\Rightarrow 0$  punto di massimo per  $\sigma$ .

$[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x_o) = \varphi(u)$  perché  $\varphi$  è il differenziale secondo, quindi per definizione]

Studiamo  $f(x_o + tw) = \gamma(t)$ . Si ha che

$$\gamma'(0) = \frac{\partial f}{\partial w}(x_o) = 0$$

$\Rightarrow 0$  è punto critico per  $\gamma$ .

$$\gamma''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(x_o) = \varphi(w) > 0$$

$\Rightarrow 0$  punto di minimo per  $\gamma$ .

Quindi  $x_o$  punto di sella. ■

### COME RICONOSCERE IL SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA

$A = A^T$ ,  $A$  è diagonalizzabile, e quindi si può diagonalizzare usando gli autovalori.

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_N \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_N x_N^2$$

Se tutti gli autovalori sono **positivi strettamente**  $\Rightarrow \varphi$  è definita positiva.

Se tutti gli autovalori sono **negativi strettamente**  $\Rightarrow \varphi$  è definita negativa.

Se ci sono autovalori di segni discordi  $\Rightarrow \varphi$  è indefinita.

### METODO DI JACOBI-SYLVESTER (N = 2)

Supponiamo di avere una matrice quadrata simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

La forma quadratica associata è

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Calcoliamo  $\varphi(x, y)$ : sia  $y \neq 0$ ,

$$\varphi(x, y) = y^2 \left[ a \left( \frac{x}{y} \right)^2 + 2b \frac{x}{y} + c \right]$$

$$\text{Poniamo } t = \frac{x}{y} \Rightarrow$$

$$a \left( \frac{x}{y} \right)^2 + 2b \frac{x}{y} + c = at^2 + 2bt + c$$

$\varphi$  definita positiva significa  $\varphi(x, y) > 0 \quad \forall (x, y)^T \neq (0, 0)^T$ , in particolare

$$\Rightarrow at^2 + 2bt + c > 0 \quad \forall t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta}{4} = b^2 - ac < 0 \quad \text{e} \quad a > 0$$

Cioè se e solo se

$$\boxed{\det A > 0, \quad a > 0}$$

Mentre  $\varphi(x, y) < 0 \quad \forall (x, y)^T \neq (0, 0)^T \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\det A > 0, \quad a < 0}$$

$\varphi$  è indefinita  $\Leftrightarrow \exists (x_1, y_1)^T$  e  $(x_2, y_2)^T$  tali che

$$\varphi(x_1, y_1) < 0, \quad \varphi(x_2, y_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\det A < 0}$$

### TEOREMA

Sia  $\varphi(x, y)$  la forma quadratica definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Allora

- $\varphi$  è definita positiva se e solo se  $\det A > 0, a > 0$
- $\varphi$  è definita negativa se e solo se  $\det A > 0, a < 0$
- $\varphi$  è indefinita se e solo se  $\det A < 0$

Se  $N = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cdot & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & \cdot & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\varphi$  è definita positiva (ripettivamente negativa) se e solo se

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{21} \end{pmatrix} > 0, \det A > 0$$

In generale se  $N > 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

$\varphi$  è definita positiva (ripettivamente negativa) se e solo se

$$a_{11} > 0, \det A > 0$$

E se tutti i determinanti delle sottomatrici nord-ovest sono maggiori di 0.

### ESEMPIO:

Consideriamo un'azienda che deve costruire delle lattine a forma di cilindro di altezza  $h$  e raggio di base  $r$ . Il fondo ha un costo maggiore.

Costo del fondo:  $5\text{€}/m^2$

Parte laterale:  $2\text{€}/m^2$

Coperchio: 1€ costante.

Quali dimensioni mi permettono di minimizzare i costi?

Il volume è fissato e deve essere positivo.

$$V = \pi h r^2$$

Il costo è una funzione

$$f(r, h) = \pi r^2 * 5 + 2\pi r h * 2 + 1$$

$$\Rightarrow f(x, y) = 5\pi x^2 + 4\pi xy + 1$$

Con vincoli:

$$x > 0, \quad y > 0, \quad \pi x^2 y = V$$

Vogliamo calcolare, se esiste, il minimo della funzione  $f(x, y) = 5\pi x^2 + 4\pi xy + 1$  ristretta all'insieme

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \pi x^2 y = V\}$$

Dove  $V$  è fissato.

$$\begin{aligned} \pi x^2 y = V &\Leftrightarrow y = \frac{V}{\pi x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow h(x) &= f\left(x, \frac{V}{\pi x^2}\right) = \\ &= 5\pi x^2 + 4\pi x * \frac{V}{\pi x^2} + 1 \end{aligned}$$

Quindi devo studiare la funzione composta di

$$y(x) = \left(x, \frac{V}{\pi x^2}\right)^T \text{ con } h(x) = f(y(x)).$$

Un punto di minimo di  $f$  ristretto alla curva equivale a un punto di minimo per  $h$ .

$$h(x) = 5\pi x^2 + \frac{4V}{x} + 1$$

$$h'(x) = 10\pi x - \frac{4V}{x^2}$$

Pongo  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10\pi x - \frac{4V}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5\pi x^3 = 2V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{2V}{5\pi} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$$

$$y = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^3 \frac{1}{V^3} \frac{4V^2}{25\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{4\pi}{25V}}}$$

Devo calcolare il rapporto tra altezza e raggio

$$\frac{h}{r} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt[3]{\frac{5\pi}{2V}}}{\sqrt[3]{\frac{4\pi}{25V}}} = \sqrt[3]{\frac{5\pi}{2V} * \frac{25V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$$

### ESEMPIO:

Trovare la distanza di una retta del piano dall'origine

$$y = mx + q$$

$$d(P, E) = \min\{d(P, Q) : Q \in E\}$$

$$d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2$$

Considero quindi

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Vincolo che  $y = mx + q$

Considero la composta  $f \circ \gamma$ , dove

$$\gamma(x) = (x, mx + q)^T$$

$$h(x) = f(\gamma(x)) = x^2 + (mx + q)^2$$

Calcoliamo il minimo di  $h$ .

$$h(x) = x^2 + m^2x^2 + 2mxq + q^2 =$$

$$= x^2(1 + m^2) + 2mxq + q^2$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(1 + m^2) + 2mq = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{mq}{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow y = mx + q = -\frac{m^2q}{1 + m^2} + \frac{q + qm^2}{1 + m^2} =$$

$$= \frac{q}{1 + m^2}$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{mq}{1 + m^2} \\ \frac{q}{1 + m^2} \end{pmatrix}$$

$$f(P) = \frac{m^2q^2}{(1 + m^2)^2} + \frac{q^2}{(1 + m^2)^2} =$$

$$= \frac{q^2}{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow d\left(retta, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{|q|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

In alternativa scrivo la generica retta ortogonale

$$y = -\frac{1}{m}x + s$$

Impongo il passaggio per l'origine  $\Rightarrow s = 0$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{m}x$$

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = -\frac{1}{m}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow mx + q = -\frac{1}{m}x$$

$$\Rightarrow x \left(1 + \frac{1}{m}\right) = -q$$

$$\Rightarrow x = -\frac{qm}{1 + m^2}$$

In questo caso ho come vincolo che  $y = mx + q$

Considero la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Le linee di livello di  $f$  sono delle circonferenze

$$x^2 + y^2 = \alpha$$

Osserviamo che nel punto che realizza il minimo si ha che la tangente alla linea di livello di  $f$  è parallela

### PROBLEMI DI MINIMO/MASSIMO VINCOLATO

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .

Diremo **vincolo** un qualunque sottoinsieme  $V$  di  $A$  che non sia aperto.

$$V \subset A$$

Un punto  $x_o \in V$  si dice un punto **di estremo vincolato** per  $f$  [massimo/minimo] se  $x_o$  è punto di estremo per  $f|_V$ .

### CASI IMPORTANTI IN $\mathbb{R}^2$ :

1)

$V$  è una **curva** e si può rappresentare nei seguenti modi:

1a) Curva parametrica

$$V = \{\gamma(t): t \in I\}$$

1b) Grafico

$$V = \{(x, h(x))^T : x \in I\}$$

1c) Forma implicita

$$V = Zg = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

Se  $V$  è una curva parametrizzata, studiare un punto di estremo per  $f$  vincolato a  $V$  equivale a studiare un punto di estremo per la funzione composta

$$f \circ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$$

Osserviamo che se  $V$  è il grafico di una funzione  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ , abbiamo una parametrizzazione,

$$V = \{\gamma(t) : t \in I\}$$

$$\text{Con } \gamma(t) = (t, h(t))^T.$$

2)

Il vincolo è un **dominio**.

$$f: \underbrace{B(0,1)}_{\substack{\text{palla} \\ \text{aperta}}} \cup \underbrace{\partial B(0,1)}_{\substack{\text{bordo:} \\ \text{curva}}}$$

Il vincolo è del tipo  $\Omega = A \cup \partial A$  e si dice dominio, dove  $A$  è un aperto e  $\partial A$  è una curva.

- Si studia prima la  $f$  in  $A$ , e se è differenziabile studio di gradiente [ calcolo  $\nabla f$  ].
- Studio poi  $f$  sulla curva  $\partial A$ .

### ESEMPIO:

Considero la funzione  $f(x, y) = x + y$  e prendo come vincolo il cerchio

$$V = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \gamma([0, 2\pi])$$

$$\text{Dove } \gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T.$$

Studiare estremo di  $f(x, y) = x + y$  vincolati a  $V$  equivale a studiare estremi della composta

$$(f \circ \gamma): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi(t) = f(\cos t, \sin t)$$

$$\psi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi(0) = \psi(2\pi) = 1$$

$$\psi'(t) = -\sin t + \cos t$$

$$\psi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5}{4}\pi$$

$$\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad \psi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

Il massimo di  $f$  vincolato a  $V$  è  $\sqrt{2}$ . Il minimo di  $f$  vincolato a  $V$  è  $-\sqrt{2}$ .

Consideriamo ora sempre  $x^2 + y^2 = 1$ . Posso però scrivere

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{se } y > 0$$

$$y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad \text{se } y < 0$$

$$h(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f(x, y) = x + y$$

$$\text{Sia ora } \gamma(t) = (t, h(t))^T = (t, \sqrt{1 - t^2})^T$$

E quindi la funzione composta è

$$(f \circ \gamma)(t) = t + \sqrt{1 - t^2} = \psi(t)$$

$$\psi'(t) = 1 - \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - t^2} = t \Leftrightarrow t^2 = 1 - t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Data una curva rappresentata in forma implicita

$$Zg = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

In un intorno  $U$  di un punto della curva  $(x_o, y_o)^T \in Zg$  [ $g(x_o, y_o) = 0$ ] è possibile rappresentare quel pezzettino di curva come grafico di una funzione  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{(x, \varphi(x))^T : x \in I\} \quad ?$$

Ho un problema nell'intersezione con l'asse  $x$  in quanto non è nemmeno localmente il grafico di una funzione in  $x$ .

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Nell'intersezione con l'asse  $x$  la derivata in  $y$  è nulla. Quindi il gradiente risulta

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T$$

Dove  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , e quindi il gradiente è un vettore orizzontale avente una tangente nel punto che è verticale.

Nel punto dell'intersezione però, si può avere una funzione della variabile  $y$ .

$$(h(y), y)^T$$

## TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA (U. DINI)

Caso  $\mathbb{R}^2$ :

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto. Sia  $(x_0, y_0)^T \in A$ .

Sia  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $g(x_0, y_0) = 0$ .

$$[(x_0, y_0)^T \in Zg = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}]$$

Supponiamo che esista e sia continua in  $A$  la funzione

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

E inoltre sia

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esistono  $U$  intorno di  $x_0$ ,  $V$  intorno di  $y_0$  tali che per ogni  $x \in U$  esiste ed è unico  $y \in V$  che soddisfa  $g(x, y) = 0$ , ossia

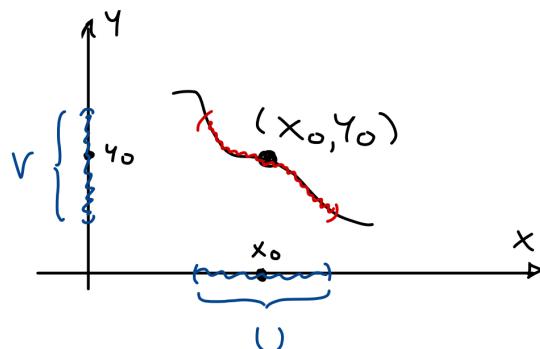
$$\forall x \in U \exists! y \in V : g(x, y) = 0$$

Resta quindi definita una funzione

$$\varphi: U \rightarrow V$$

$\varphi$  continua, tale che

$$\{(x, \varphi(x))^T \in \mathbb{R}^2 : x \in U\} = Zg \cap U \times V$$



DIM:

Sia

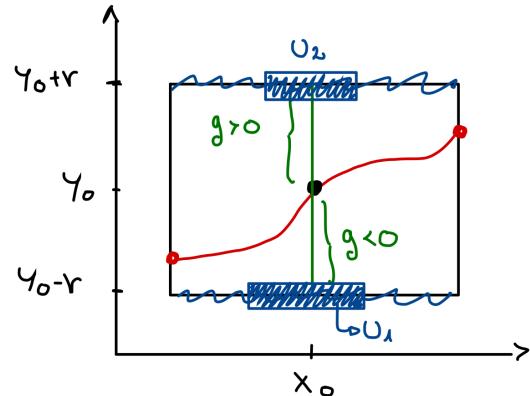
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$$

Siccome la funzione  $\frac{\partial g}{\partial y}$  è continua per ipotesi, per il teorema della permanenza del segno esistono un intervallo  $U_0$  intorno di  $x_0$  e un intervallo  $V$  intorno di  $y_0$ ,  $V = [y_0 - r, y_0 + r]$ ,  $r > 0$ , tali che

$$\forall x \in U_0, y \in V \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) > 0$$

Studiamo la funzione  $g$  sul segmento verticale

$$x_0 \times V, \quad g(x_0, *): V \rightarrow \mathbb{R}$$



È una funzione in  $y$ , se ne calcolo la derivata parziale ottengo

$$\frac{d}{dy} g(x_0, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y) > 0$$

Quindi la funzione  $g(x_0, *)$  è strettamente crescente su  $V = [y_0 - r, y_0 + r]$ .

Sappiamo che la funzione  $g(x_0, y_0) = 0$  per ipotesi, quindi

$$g(x_0, y) < 0 \quad \forall y \in [y_0 - r, y_0[$$

$$g(x_0, y) > 0 \quad \forall y \in ]y_0, y_0 + r]$$

Poiché  $g(x_0, y_0 - r) < 0$  (muovo  $x_0$  e tengo fisso  $y_0 - r$ ) per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno  $U_1$  di  $x_0$  tale che

$$g(x, y_0 - r) < 0 \quad \forall x \in U_1$$

Applico lo stesso ragionamento al segmento superiore, poiché  $g(x_0, y_0 + r) > 0$  (muovo  $x_0$  e tengo fisso  $y_0 + r$ ) per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno  $U_2$  di  $x_0$  tale che

$$g(x, y_0 + r) > 0 \quad \forall x \in U_2$$

Prendo  $U = U_1 \cap U_2$ ,  $\forall x \in U$  si ha che

$$g(x, y_0 - r) < 0, g(x, y_0 + r) > 0$$

Fisso  $\hat{x} \in U \Rightarrow$

$$g(\hat{x}, y_0 - r) < 0 \quad e \quad g(\hat{x}, y_0 + r) > 0$$

Considero la funzione

$$g(\hat{x}, *): [y_o - r, y_o + r] \rightarrow \mathbb{R}$$

Questa funzione è continua e assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo, quindi per il Teorema dell'esistenza degli zeri di Bolzano, esiste un punto  $\hat{y} \in [y_o - r, y_o + r]$  tale che

$$g(\hat{x}, \hat{y}) = 0$$

$\hat{y}$  è unico perché la funzione  $g(\hat{x}, *)$  ha derivata positiva  $\frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x}, *) > 0$  e quindi è strettamente crescente.

Abbiamo quindi visto che per ogni  $\hat{x} \in U$  esiste uno ed un solo  $\hat{y} \in V$  tale che

$$g(\hat{x}, \hat{y}) = 0$$

Ho costruito una funzione  $\varphi: U \rightarrow V$ ,  $\varphi(\hat{x}) = \hat{y}$ .

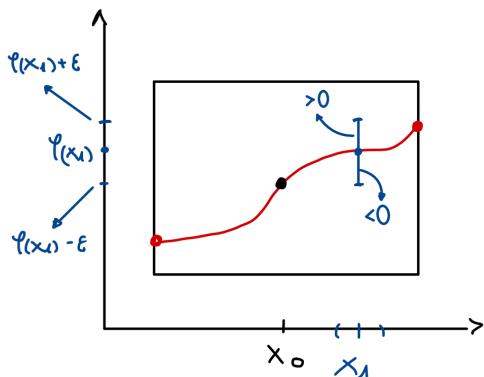
$\varphi$  si dice la funzione **implicitamente definita** dall'equazione  $g(x, y) = 0$ .

Si ha che: per ogni  $x \in U \Rightarrow g(x, \varphi(x)) = 0$ ; inoltre se  $y \in V$  è tale che  $g(x, y) = 0$ , necessariamente si ha che  $y = \varphi(x)$ .

È quindi dimostrato che il grafico di  $\varphi$

$$\{(x, \varphi(x))^T \in A : x \in U\} = Zg \cap (U \times V)$$

Resta da dimostrare la continuità di  $\varphi$ .



Fisso quindi  $x_1 \in U$ ,  $\varphi$  continua in  $U$  significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta] \\ \Rightarrow \varphi(x_1) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_1) + \varepsilon$$

Fissati  $x_1$  e  $\varepsilon$ , considero l'intervallo

$$W = [\varphi(x_1) - \varepsilon, \varphi(x_1) + \varepsilon]$$

Sappiamo che  $g(x_1, *)$  è strettamente crescente su  $W$ , inoltre

$$g(x_1, \varphi(x_1) - \varepsilon) < 0 < g(x_1, \varphi(x_1) + \varepsilon)$$

Esiste quindi un intorno  $\Omega$  di  $x_1$  tale che  $\forall x \in \Omega$   $\Rightarrow g(x, \varphi(x_1) - \varepsilon) < 0 \quad e \quad g(x, \varphi(x_1) + \varepsilon) > 0$   
 $\varphi(x)$  è tale che  $g(x, \varphi(x)) = 0$  e quindi

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi(x_1) - \varepsilon}_{g(x_1, \varphi(x_1) - \varepsilon) < 0} < \underbrace{\varphi(x)}_{g(x, \varphi(x)) = 0} < \underbrace{\varphi(x_1) + \varepsilon}_{g(x_1, \varphi(x_1) + \varepsilon) > 0} \blacksquare$$

### DERIVABILITÀ DELLA FUNZIONE IMPLICITA

Siano soddisfatte le ipotesi del teorema del Dini e inoltre sia  $g \in C^1(A, \mathbb{R})$  [ in particolare esiste anche  $\frac{\partial g}{\partial x}$  in  $A$  ]

$$(x_o, y_o)^T \in Zg, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$$

Allora la funzione  $\varphi$  implicitamente definita dall'equazione  $g(x, y) = 0$  è derivabile e si ha

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

DIM:

$$\varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h}$$

$$\text{Ricordo che } g(x, \varphi(x)) = 0$$

$$0 = 0 - 0 = \\ = g(x + h, \varphi(x + h)) - g(x, \varphi(x)) = **$$

Per la formula del valor medio (Lagrange) esiste un punto  $(\xi, \eta)^T$  appartenente al segmento che congiunge  $(x, \varphi(x))^T$  con  $(x + h, \varphi(x + h))^T$  tale che

$$** = \langle \nabla g(\xi, \eta), \begin{pmatrix} h \\ \varphi(x + h) - \varphi(x) \end{pmatrix} \rangle = **$$

$$\text{(dove } h = (x + h) - x\text{)}$$

$$** = \frac{\partial g}{\partial x}(\xi, \eta)h + \frac{\partial g}{\partial y}(\xi, \eta)[\varphi(x + h) - \varphi(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(\xi, \eta)[\varphi(x + h) - \varphi(x)] = -\frac{\partial g}{\partial x}(\xi, \eta)h$$

Divido per  $h \Rightarrow$

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} * \frac{\partial g}{\partial y}(\xi, \eta) = -\frac{\partial g}{\partial x}(\xi, \eta)$$

Se  $h \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow x$  perchè  $\xi$  si trova tra  $x$  e  $x+h$ . Mentre  $\varphi(x+h) \rightarrow \varphi(x)$  per la continuità di  $\varphi$ , e allora  $\eta \rightarrow \varphi(x)$ .

Noi sappiamo che  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$  in un intorno di  $(x_o, y_o)^T$  e quindi se  $\xi$  e  $\eta$  sono sufficientemente vicini a  $x$  e  $y$  anche  $\frac{\partial g}{\partial y}(\xi, \eta) \neq 0$ .

Posso quindi scrivere

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\xi, \eta)}{\frac{\partial g}{\partial y}(\xi, \eta)}$$

E quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \blacksquare$$

Più in generale se  $g \in C^k(A, \mathbb{R})$  si ha anche che

$$\varphi \in C^k(A, \mathbb{R})$$

Ad esempio se  $k=2$

$$\text{Sia } \frac{\partial g}{\partial x} = g_x, \frac{\partial^2}{\partial x^2} = g_{xx}, \frac{\partial g}{\partial y} = g_y, \frac{\partial^2}{\partial y^2} = g_{yy}$$

$$\frac{d}{dx} g_x(t, \varphi(t)) = (g_x \circ \gamma)(t) = g_x(t, \varphi(t))$$

$$\gamma(t) = (t, \varphi(t))^T$$

$$\gamma'(t) = (1, \varphi'(t))^T$$

$$\frac{d}{dx} g_x(t, \varphi(t)) = \langle \Delta g_x(t, \varphi(t)), (1, \varphi'(t))^T \rangle =$$

$$= g_{xx}(t, \varphi(t)) * \mathbf{1} + g_{xy}(t, \varphi(t)) * \varphi'(t)$$

$$\varphi''(x) = \frac{d}{dx} \varphi'(x) =$$

$$= \frac{d}{dx} \left[ -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \right] = \frac{d}{dx} \left[ -\frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))} \right] =$$

$$= (\text{calcoli saltati perchè troppo confusi}) =$$

$$= \frac{-g_{xx}g_y^2 + 2g_{xy}g_xg_y - g_{yy}g_x^2}{g_y^3}(x, \varphi(x))$$

Abbiamo quindi studiato l'equazione  $g(x, y) = 0$  e abbiamo trovato che sotto opportune ipotesi esiste una funzione in cui la stessa curva può essere rappresentata nella forma  $y = \varphi(x)$ .

Si posso scambiare i ruoli di  $y$  e  $x$ , si ha quindi

### TEOREMA ANALOGO in $y$

Sia  $g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_o, y_o)^T \in Zg$

$\exists \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$  continua in  $A$  e sia

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o) \neq 0$$

Allora esistono un intorno  $U$  di  $x_o$  e un intorno  $V$  di  $y_o$  e una funzione continua  $\psi: V \rightarrow U$  tale che

$$g(\psi(y), y) = 0 \quad \forall y \in V$$

E si ha che

$$\{(\psi(y), y)^T \in A : y \in V\} = Zg \cap (U \times V)$$

Usando quindi una funzione della variabile  $y$ .

### DEF:

Una funzione  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$  si dice **regolare** se  $\gamma$  è derivabile e  $\gamma'(t) \neq \bar{0} \quad \forall t \in I$ .

### TEOREMA DI PARAMETRIZZABILITÀ LOCALE IN $\mathbb{R}^2$

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ ,  $(x_o, y_o)^T \in Zg$ ;

Sia  $\nabla g(x_o, y_o) \neq (0, 0)^T$ .

Allora la curva  $Zg = \{(x, y)^T \in A : g(x, y) = 0\}$  è localmente parametrizzabile, cioè esistono un intorno  $W$  di  $(x_o, y_o)^T$  e una curva parametrizzata  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow W$ ,  $\gamma$  regolare, tale che

$$Zg \cap W = \{\gamma(t) : t \in I\}$$

### DIM:

Sappiamo che  $\nabla g(x_o, y_o) \neq 0$ , cerchiamo una parametrizzazione locale.

Supponiamo che  $\frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$ . Allora esistono  $U$  intorno di  $x_o$  e  $V$  intorno di  $y_o$  e una funzione  $\varphi: U \rightarrow V$  tale che

$$Zg \cap (U \times V) = \left\{ (x, \varphi(x))^T \in A : x \in U \right\} = \\ = \{ \gamma(t) : t \in I \}$$

La parametrizzazione è

$$\begin{aligned} \gamma: U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &= (t, \varphi(t))^T \\ \gamma'(t) &= (1, \varphi'(t))^T \end{aligned}$$

Essendo la prima componente 1 non può mai essere nulla  $\forall t \in I$  e quindi  $\gamma$  è regolare.

Se  $\frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o) = 0$  allora  $\frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o) \neq 0$ .

Allora esistono  $U, V, \psi: V \rightarrow U$  tale che

$$Zg \cap (U \times V) = \{ (\psi(y), y)^T \in A : y \in V \}$$

La parametrizzazione quindi sarà

$$\begin{aligned} \gamma: V &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &= (\psi(t), t)^T \\ \gamma'(t) &= (\psi'(t), 1)^T \neq (0, 0)^T \end{aligned}$$

E quindi  $\gamma$  è regolare. ■

OSS:

Se ho un campo scalare

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

E considero le linee di livello

$$L_\alpha = \left\{ (x, y)^T \in A : \overbrace{f(x, y)}^{g(x, y)} - \alpha = 0 \right\}$$

Se  $f \in C^1$  è differenziabile, le linee di livello sono ortogonali al gradiente.

Questo era stato dimostrato usando  $\gamma$  come parametrizzazione di  $L_\alpha$ , in quanto

$$(f \circ \gamma)(t) = \alpha \quad \text{è costante} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Avevamo dato per scontato che esisteva una parametrizzazione  $\gamma$ .

Ora se ho un punto  $(x_o, y_o)^T$  dove  $\nabla f(x_o, y_o) \neq (0, 0)^T$  si può applicare il Teorema del Dini e quindi

$$\nabla f \perp L_\alpha$$

Se invece  $\nabla f(x_o, y_o) = (0, 0)^T$  è sempre ortogonale a tutti i vettori (anche alla linea di livello) e quindi la risposta è ovvia.

Tornando al problema di massimo vincolato:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Vincolo  $g(x, y) = 0$ . Se possiamo trovare una parametrizzazione per  $g$  è possibile risolvere facilmente, altrimenti bisogna usare un altro teorema.

**TEOREMA DEL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE**  
**per la determinazione di eventuali punti di estremo vincolato (nel caso di un vincolo implicito)**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$ , il vincolo è

$$Zg = \{ (x, y)^T \in A : g(x, y) = 0 \}$$

Sia  $(x_o, y_o)^T \in Zg$  un punto di estremo per  $f$  vincolato a  $Zg$ .

Sia inoltre  $\nabla g(x_o, y_o) \neq (0, 0)^T$ .

Allora esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  (moltiplicatore di Lagrange) tale che

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda * \nabla g(x_o, y_o)$$

DIM:

Poichè per ipotesi  $\nabla g(x_o, y_o) \neq (0, 0)^T$  per il Teorema del Dini esiste una parametrizzazione locale del vincolo  $Zg$ , cioè esiste un intorno  $W$  di  $(x_o, y_o)^T$  e una curva  $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow W$ ,  $I$  intervallo aperto (per usare Fermat) di  $\mathbb{R}$ ,  $t_o \in I : \gamma(t_o) = (x_o, y_o)^T$ ,  $\gamma$  regolare e

$$Zg \cap W = \{ \gamma(t) : t \in I \}$$

La funzione composta  $h(t) = (f \circ \gamma)(t)$  ha in  $t_o$  un punto di estremo, quindi

$$\Rightarrow h'(t_o) = 0$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(\gamma(t_o)), \gamma'(t_o) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_o, y_o) \perp Zg$$

Dobbiamo dimostrare che  $\nabla f(x_o, y_o)$  è parallelo a  $\nabla g(x_o, y_o)$ .

Ma  $\nabla g(x_o, y_o) \perp Zg$  in ogni punto (vedi osservazione precedente).

E quindi abbiamo che  $\nabla f(x_o, y_o)$  e  $\nabla g(x_o, y_o)$  sono entrambi ortogonali allo stesso vettore (nel punto).

In  $\mathbb{R}^2$  quindi  $\nabla f(x_o, y_o)$  e  $\nabla g(x_o, y_o)$  sono paralleli (linearmente dipendenti).

E dato che  $\nabla g(x_o, y_o) \neq 0$  per ipotesi, allora esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda * \nabla g(x_o, y_o) \quad \blacksquare$$

Questa espressione significa che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \lambda * \frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \lambda * \frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o) \\ g(x_o, y_o) = 0 \end{cases}$$

Si osservi che serve inoltre che  $(x_o, y_o)^T \in Zg$  ossia  $g(x_o, y_o) = 0$ .

Quindi se ho un punto che appartiene al vincolo ed è di estremo deve soddisfare quel sistema.

Se considero la nuova funzione

$$h(x, y, t): A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x, y, t) = f(x, y) - tg(x, y)$$

OSS importante:

$(x_o, y_o, \lambda)^T$  è punto critico per  $h$  se e solo se è soluzione del sistema precedente.

$$\begin{aligned} \nabla h(x, y, t) &= \\ &= \left( \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - t \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - t \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ -g(x, y) \end{array} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \nabla h(x_o, y_o, \lambda) = (0, 0, 0)^T$  se e solo se vale il sistema.

ESEMPIO:

$$f(x, y) = 2x + y, \quad g(x, y) = xy - 1$$

Cerco il massimo/minimo di  $f$  vincolata a  $xy = 1$ .

Le linee di livello di  $f$ :  $2x + y = \alpha$ .

$$L_\alpha = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = \alpha\}$$

$$y = \alpha - 2x$$

E quindi sono rette che partono da  $\alpha$  e scendono verso sud-est con un fattore di pendenza 2.

I punti di estremo si troveranno sulle linee di livello che sono tangenti (parallele) alle linee di livello della curva perchè sappiamo che i punti di minimo/massimo

$$\nabla f \parallel \nabla g \Rightarrow L_f \parallel L_g$$

Prendiamo il gradiente di  $f$  e  $g$

$$\nabla f(x, y) = (2, 1)^T, \quad \nabla g(x, y) = (y, x)^T$$

Consideriamo il sistema di Lagrange

$$\begin{cases} 2 = \lambda * y \\ 1 = \lambda * x \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = 1$$

$$\Rightarrow 2 = \lambda^2 xy = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} * 2, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Oppure

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}} * 2, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ho trovato due punti

$$\left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \right)^T, \quad \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right)^T$$

Se calcoliamo la funzioni in questi due punti troviamo subito se c'è massimo e minimo

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Siamo sicuri che siano di massimo e minimo? La funzione  $f$  non ha massimi e minimi ma se imponiamo il vincolo cosa cambia?

Il vincolo  $xy = 1$  all'infinito  $x \approx 0$  e  $y$  diventa molto grande quindi  $f(x, y) \gg 2\sqrt{2}$ , e quindi  $2\sqrt{2}$  non può essere massimo.

I punti quindi sono punti di estremo locale ma non sono punti di massimo o minimo assoluti della funzione vincolata.

#### ESEMPIO:

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1$$

Studio il vincolo

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

Che è un'ellisse. La funzione  $f$  che vogliamo ottimizzare è

$$f(x, y) = xy$$

Esistono massimo e minimo vincolato di  $f$  con  $g(x, y) = 0$ ?

Si perchè il vincolo è un'ellisse che è un insieme compatto, ed essendo  $f$  continua esistono massimo e minimo della funzione.

Possiamo usare il metodo del moltiplicatore di Lagrange.

$$\nabla g(x, y) = (2x - y, -x + 2y)^T$$

$$\nabla f(x, y) = (y, x)^T$$

Imponiamo che

$$\nabla f(x, y) = \lambda * \nabla g(x, y)$$

$$\begin{cases} y = \lambda * (2x - y) \\ x = \lambda * (2y - x) \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Sommo le prime due equazioni

$$\begin{aligned} x + y &= 2\lambda x - \lambda y + 2\lambda y - \lambda x = \\ &= \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) \\ \Rightarrow (x + y) - \lambda(x + y) &= 0 \\ \Rightarrow (x + y)(1 + \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Qua abbiamo due opzioni:

- $x + y = 0$
- $\lambda = 1$

Caso  $y = -x$ :

Dalla terza equazione ottengo

$$x^2 + x^2 + x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

E ottengo 2 punti

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

Caso  $\lambda = 1$ :

$$y = 2x - y$$

$$\Rightarrow 2x = 2y$$

$$\Rightarrow y = x$$

Nella terza equazione ottengo

$$x^2 - x^2 + x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

Ottengo due punti

$$(-1, -1)^T, \quad (1, 1)^T$$

Vediamo cosa succede in  $P = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ :

$$f(P) = -\frac{1}{3} = f(-P)$$

Mentre in  $Q = (-1, -1)^T$ :

$$f(Q) = 1 = f(-Q)$$

Il Teorema del moltiplicatore di Lagrange dice che se esiste un punto di estremo vincolato per la  $f$  deve risolvere il sistema (ce ne sono 4) e so che esistono min e max di  $f$ , e quindi evidentemente si ha che:

$$\max f = 1, \quad \min f = -\frac{1}{3}$$

#### ESEMPIO:

Sia come vincolo la funzione

$$g(x, y) = (x - 1)^3 - y^2$$

E sia la funzione da studiare la seguente

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla g(x, y) = (3(x - 1)^2, -2y)^T$$

$$\nabla f(x, y) = 2(x, y)^T$$

Il sistema è

$$\begin{cases} 2x = 3\lambda(x - 1)^2 \\ 2y = -2\lambda y \\ (x - 1)^3 = y^2 \end{cases}$$

La seconda equazione può essere scritta come

$$2y(1 + \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \vee \lambda = -1$$

Caso  $y = 0$ :

Dalla terza equazione ottengo

$$x = 1$$

Ma dalla prima, se  $x = 1 \Rightarrow x = 0$ , ed è impossibile.

Caso  $\lambda = -1$ :

Dalla prima equazione ho

$$2x = -3(x - 1)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq 0$$

Dalla terza ho che

$$(x - 1)^3 = y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 1$$

Che è impossibile.

Questo sistema NON ha soluzioni.

Sicuramente  $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$

$$(1, 0)^T \in Zg, \quad g(1, 0) = 0$$

$$f(1, 0) = 1$$

D'altra parte so che la funzione vale

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 1$$

Perchè abbiamo trovato che  $x \geq 1$

$$[(x - 1)^3 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^3 = y^2 \Rightarrow]$$

$$\Rightarrow (x - 1)^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 ]$$

E quindi il punto  $(1, 0)^T$  è punto di minimo vincolato, ma NON risolve il sistema del moltiplicatore di Lagrange.

Questo perchè non è soddisfatta l'ipotesi del teorema

$$\Delta g(x_0, y_0) \neq 0$$

$$\text{Ma in questo caso } \nabla g(1, 0) = (0, 0)^T !!!$$

### RIEPILOGO E VINCOLI IN $\mathbb{R}^3$

Abbiamo quindi visto che un vincolo espresso come **curva in  $\mathbb{R}^2$**  può essere:

- Esplicito
  - 1) Parametrizzato
  - 2) Grafico
- Implicito ( $Zg$ )

Però un vincolo può anche essere **un dominio** ossia un aperto completato con la sua chiusura

$$\Omega = A \cup \partial A$$

$\partial A$  è il bordo ed è una curva.

Studiamo ora i **vincoli in  $\mathbb{R}^3$** . Al posto di una curva nel piano abbiamo una **superficie** che può essere rappresentata:

- Esplicita
  - 1) Parametrica
  - 2) Grafico
- Implicita  $Zg$

Il secondo tipo di vincolo è sempre **un dominio**

$$\underbrace{A}_{\text{aperto}} \cup \underbrace{\partial A}_{\text{superficie}}$$

C'è anche una terza tipologia di vincolo che è quello della **curva in  $\mathbb{R}^3$** :

- Esplicita  $\Rightarrow$  parametrica
- Implicita: intersezione tra due superfici del tipo  $Zg_1 \cap Zg_2$

### ESEMPIO:

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq z\}$$

Prendiamo la funzione

$$f(x, y, z) = x - z$$

Determinare massimi e minimi di  $f$  vincolato ad  $E$ .

Prima cosa: studiare  $f$  nell'interno di  $E$ :

$$\{0 < z < 1, x^2 + y^2 < z\}$$

$$\nabla f(x, y, z) = (1, 0, -1)^T$$

Il gradiente non si annulla mai.

Seconda cosa: studiare  $f$  sul bordo, che è fatto in due pezzi, un paraboloida e un disco.

$\partial E = \text{Paraboloida} \cup \text{Disco}$

Sul paraboloida:  $x^2 + y^2 = z$ , con  $0 \leq z \leq 1$

Il vincolo è rappresentato in modo esplicito perché è il grafico della funzione

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2$$

Parametrizzo  $\sigma(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$  con

$$(x, y)^T \in \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$h(x, y) = f(x, y, x^2 + y^2) = x - x^2 - y^2$$

Sul piano  $xy$  il dominio è un disco che ha una sua parte interna e un bordo, quindi devo di nuovo spezzare la funzione in due parti.

Studio prima all'interno del disco in  $B(0,1)$

$$\nabla h(x, y) = (1 - 2x, -2y)^T = (0, 0)^T$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y = 0$$

Questo è un punto del piano che mi ha corrispondere a un punto sulla superficie che è

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)^T$$

Studio poi il bordo del disco, che è una circonferenza:  $x^2 + y^2 = 1$

$$h(x, y) = x - 1$$

siccome  $x \in [-1, 1]$

$$\Rightarrow \min h = -2$$

$$\Rightarrow \max h = 0$$

Se  $x = -1 \Rightarrow y = 0, z = 1$ , abbiamo ottenuto il punto

$$(-1, 0 - 1)^T$$

Se  $x = 1 \Rightarrow y = 0, z = 1$ , abbiamo ottenuto il punto

$$(1, 0, 1)^T$$

Ora bisogna studiare cosa succede sul disco:

$$D = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$$

$$f(x, y, z) = x - z$$

$$z = 1$$

$$\Rightarrow h(x, y, z) = x - 1$$

La variabile  $x$  sul disco può variare tra  $[-1, 1]$

$$\Rightarrow \min h = -2, \max h = 0$$

Trovo sempre i punti

$$(-1, 0 - 1)^T, \quad (1, 0, 1)^T$$

E quindi alla fine i punti trovati sono

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)^T, \quad (-1, 0 - 1)^T, \quad (1, 0, 1)^T$$

$$f\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} = \max f$$

$$f(1, 0, 1) = 0$$

$$f(-1, 0 - 1) = -2 = \min f$$

### TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA (SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$ )

Sia  $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto,

$$Zg = \{(x, y, z)^T \in A : g(x, y, z) = 0\}$$

$$(x_o, y_o, z_o)^T \in Zg$$

Supponiamo che

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq 0$$

Allora esistono un intorno  $U$  di  $(x_o, y_o)^T$ , un intorno  $V$  di  $z_o$  e una funzione

$\varphi: U \rightarrow V$ , continua e tale che

$$\begin{aligned} &\left\{(x, y, \varphi(x, y))^T \in A : (x, y)^T \in U\right\} = \\ &= Zg \cap (U \times V) \end{aligned}$$

Inoltre anche  $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$  e si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

DIM omessa.

### COROLLARIO: TEOREMA DI PARAMETRIZZAZIONE LOCALE DI UNA SUPERFICIE

Sia  $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto,

$$Zg = \{(x, y, z)^T \in A : g(x, y, z) = 0\}$$

$$(x_o, y_o, z_o)^T \in Zg$$

$$\nabla g(x_o, y_o, z_o) \neq (0, 0, 0)^T$$

Allora esiste una parametrizzazione locale di  $Zg$  in un intorno di  $(x_o, y_o, z_o)^T$ , cioè esistono un intorno  $W$  di  $(x_o, y_o, z_o)^T$  e una funzione

$$\sigma: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$\sigma$  regolare tale che

$$\{\sigma(s, t) : (s, t)^T \in \Omega\} = Zg \cap W$$

DIM:

Per il Teorema della funzione implicita, se

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq (0, 0, 0)^T$$

Si può scrivere

$$\sigma(s, t) = (s, t(\varphi(s, t)))^T$$

Dove  $\varphi$  è la funzione implicita.

Se invece  $\frac{\partial g}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) = (0, 0, 0)^T$  ma

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) \neq (0, 0, 0)^T$$

$$\sigma(s, t) = (s, \psi(s, t), t)^T$$

Dove  $\psi$  è la funzione implicita.

Se invece  $\frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) = (0, 0, 0)^T$  ma

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) \neq (0, 0, 0)^T$$

$$\sigma(s, t) = (\gamma(s, t), s, t)^T$$

Dove  $\gamma$  è la funzione implicita. ■

DEF:

Sia  $\sigma: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\sigma \in C^1$  e tale che

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t)$$

Non siano tra loro paralleli, cioè se

$$Ra \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial z}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) \end{pmatrix} = 2$$

In questo caso il vettore

$$\nu(s, t) = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t} \neq (0, 0, 0)^T$$

Questo è il vettore **normale** della superficie.

### TEOREMA DEL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE (superficie in $\mathbb{R}^3$ )

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$ ,  $(x_o, y_o, z_o)^T \in Zg$  punto di estremo vincolato a  $Zg$ .

Sia  $\nabla g(x_o, y_o, z_o) \neq (0, 0, 0)^T$ .

Allora esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  (moltiplicatore di Lagrange) tale che

$$\nabla f(x_o, y_o, z_o) = \lambda * \nabla g(x_o, y_o, z_o)$$

DIM:

Per il Teorema di parametrizzazione locale esistono  $W$  intorno di  $(x_o, y_o, z_o)^T$ ,  $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare tale che

$$\{\sigma(s, t) : (s, t)^T \in \Omega\} = Zg \cap W$$

Sappiamo che  $\nabla g$  è sempre ortogonale alle sue superfici di livello, infatti

$$(g \circ \sigma)(s, t) = g(\sigma(s, t)) = \text{costante su } \Omega$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial s} (g \circ \sigma)(s, t) = \langle \nabla g(\sigma(s, t)), \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t) \rangle$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t} (g \circ \sigma)(s, t) = \langle \nabla g(\sigma(s, t)), \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t) \rangle$$

Quindi  $\nabla g(\sigma(s, t))$  è ortogonale al vincolo come già osservato in precedenza.

Ora sia  $\sigma(s_o, t_o) = (x_o, y_o, z_o)^T$  punto di estremo per  $f$ .

Allora  $(s_o, t_o)^T$  è punto di estremo per  $f \circ \sigma$ , quindi per il Teorema del test differenziale per i punti di estremo, si ha che

$$\begin{aligned} (0,0)^T &= \nabla(f \circ \sigma)(s_o, t_o) = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial s} (f \circ \sigma)(s_o, t_o), \frac{\partial}{\partial t} (f \circ \sigma)(s_o, t_o) \right) = \\ &= \left( \langle \nabla f(\sigma(s, t)), \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s_o, t_o) \rangle, \langle \nabla f(\sigma(s, t)), \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s_o, t_o) \rangle \right) \end{aligned}$$

Quindi  $\nabla f(\sigma(s, t))$  è ortogonale al vincolo (piano tangente).

Quindi essendo  $\nabla f(x_o, y_o, z_o)$  e  $\nabla g(x_o, y_o, z_o)$  entrambi ortogonali allo stesso piano (il piano tangente del vincolo), sono tra loro paralleli e quindi esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$\nabla f(x_o, y_o, z_o) = \lambda * \nabla g(x_o, y_o, z_o) \blacksquare$$

### ESEMPIO:

Si trovino i punti della superficie  $z^2 - xy = 1$  più vicini all'origine.

Bisogna ottimizzare la funzione distanza

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

I punti che minimizzano la distanza sono gli stessi che minimizzano la distanza al quadrato, quindi conviene prendere

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Avendo come vincolo

$$g(x, y, z) = z^2 - xy - 1$$

E trovo i punti dove questa si annulla.

Uso il metodo del moltiplicatore di Lagrange:

$$\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)^T$$

$$\nabla g(x, y, z) = (-y, -x, 2z)^T$$

Impostiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = 2\lambda z \\ z^2 - xy = 1 \end{cases}$$

Dalla terza osservo che

$$2z(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \vee z = 0$$

Se  $\lambda = 1$ :

Dalla prima ottengo che

$$2x = -y$$

e dalla seconda

$$2y = -x$$

In particolare ho che

$$xy = 4xy \Rightarrow xy = 0$$

Dalla quarta ho che  $z^2 = 1$

$$\Rightarrow z = \pm 1$$

Ottengo i punti

$$(0,0,-1)^T, \quad (0,0,1)^T$$

Se  $z = 0$ :

$$xy = -1$$

Moltiplico la prima per la seconda riga

$$4xy = \lambda^2 xy$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 4)xy = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 2$$

- $\lambda = 2x = -2y \Rightarrow x = -y$
- $\lambda = -2 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

Se  $x = -y \Rightarrow$

$$\Rightarrow -xy = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

Se  $x = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x^2 = 1 \quad \text{impossibile}$$

L'unica opzione possibile è  $x = \pm 1$  e otteniamo i punti

$$(-1, 1, 0)^T, \quad (1, -1, 0)^T$$

Calcoliamo la funzione nei 4 punti:

$$f(0, 0, \pm 1) = 1$$

$$f(\pm 1, \pm 1, 0) = 2$$

I punti più vicini all'origine quindi sono

$$(0, 0, \pm 1)$$

Dove  $dist = 1$ .

In alternativa:

$$z^2 = 1 + xy$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Ho un'espressione per  $z^2$  quindi posso scrivere

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + 1 + xy$$

per  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \nabla h(x, y) = (2x + y, 2y + x)^T = (0, 0)^T$$

$$\Rightarrow y = -2x$$

$$\Rightarrow x = -2y$$

$$\Rightarrow y = -2(-2y)$$

$$\Rightarrow y = 0, \quad x = 0$$

Dato che  $z^2 = 1 + xy \Rightarrow z = \pm 1$ .

E quindi si trova sempre il punto

$$(0, 0, \pm 1)^T$$

### CURVA IN $\mathbb{R}^3$ :

Caso curva parametrica:

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \circ \gamma): I \rightarrow \mathbb{R}$$

Ad esempio:

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

È una **spirale**.

Si trovi il punto dell'elica di minima distanza con il punto  $(0, 0, 1)^T$

La funzione che consideriamo è

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$$

Avendo il vincolo dell'elica, vado a considerare la composta

$$(f \circ \gamma): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(t) = (t \cos t)^2 + (t \sin t)^2 + (t - 1)^2 =$$

$$= t^2 + t^2 - 2t + 1 = 2t^2 - 2t + 1$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$h'(t) = 4t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \min h$$

$$h(0) = 1$$

$$h(2\pi) = 2 * 4\pi^2 - 4\pi + 1 = \max h$$

se  $t = \frac{1}{2} \Rightarrow$  abbiamo il punto

$$\left(\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$$

Caso curva in  $\mathbb{R}^3$  implicita:

È considerata come intersezione di due superfici

$$g_1(x, y, z) = 0, \quad g_2(x, y, z) = 0$$

$$g_1, g_2: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Si può pensare come una funzione

$$g: A \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g = (g_1, g_2)^T, \quad g(x, y, z) = (0, 0)^T$$

### TEOREMA DI PARAMETRIZZABILITÀ LOCALE (curva in $\mathbb{R}^3$ )

Sia  $g: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$g = (g_1, g_2)^T$$

$$g \in C^1(A, \mathbb{R})$$

$$Zg = \{(x, y, z)^T \in A : g(x, y, z) = (0, 0)^T\}$$

Sia  $(x_o, y_o, z_o)^T \in Zg$

Sia inoltre

$$Ra(Jg(x_o, y_o, z_o)) = 2$$

Allora la curva  $Zg$  ammette una parametrizzazione locale in un intorno di  $(x_o, y_o, z_o)^T$  cioè esistono un intorno  $W$  di  $(x_o, y_o, z_o)^T$ , un intervallo  $I$ ,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$\{\gamma(t) : t \in I\} = Zg \cap W$$

### TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (curva di $\mathbb{R}^3$ )

Siano  $f, g_1, g_2 \in C^1(A, \mathbb{R})$ ,

$$g = (g_1, g_2)^T: A \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Sia  $(x_o, y_o, z_o)^T \in Zg$  un punto di estremo vincolato a  $Zg$  per  $f$ .

Sia  $Ra(Jg(x_o, y_o, z_o)) = 2$ .

Allora esistono  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (moltiplicatori di Lagrange) tali che

$$\begin{aligned} \nabla f(x_o, y_o, z_o) &= \lambda \nabla g_1(x_o, y_o, z_o) * \\ &\quad * \mu \nabla g_2(x_o, y_o, z_o) \end{aligned}$$

#### DIM:

Per il Teorema di parametrizzabilità locale esiste una curva

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Che parametrizza il vincolo. Sappiamo che dato che  $\nabla g_{1,2}$  è ortogonale alle sue linee di livello, quindi alla superficie, è di conseguenza ortogonale alla curva

$$\nabla g_1 \perp \gamma'$$

$$\nabla g_2 \perp \gamma'$$

Questo vale in tutti i punti della curva  $Zg$ .

Considero la funzione  $h(t) = (f \circ \gamma)(t)$

$$h: I \rightarrow \mathbb{R}$$

Sia  $t_o \in I$ ,  $\gamma(t_o) = (x_o, y_o, z_o)^T$ .

$t_o$  è punto di estremo per  $h$ , quindi  $h'(t_o) = 0$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(\gamma(t_o)), \gamma'(t_o) \rangle = 0$$

Cioè  $\nabla f(x_o, y_o, z_o) \perp \gamma'(t_o)$ .

Quindi i tre gradienti devono essere linearmente dipendenti.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla f(x_o, y_o, z_o) &= \lambda \nabla g_1(x_o, y_o, z_o) * \\ &\quad * \mu \nabla g_2(x_o, y_o, z_o) \end{aligned}$$

#### ESEMPIO:

$$f(x, y, z) = xy + 2z$$

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 24 \end{pmatrix}$$

Vincoli:

$$x + y + z = 0 \text{ è un piano}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 24 \text{ è una sfera}$$

$$\nabla f = (y, x, 2)^T$$

$$\nabla g_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\nabla g_2 = (2x, 2y, 2z)^T$$

Per usare Lagrange bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \lambda * 1 + \mu * 2x \\ x = \lambda * 1 + \mu * 2y \\ 2 = \lambda * 1 + \mu * 2z \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 24 \end{cases}$$

Dalle prime due ho

$$y - x = 2\mu(x - y)$$

$$\Rightarrow (y - x)(1 + 2\mu) = 0$$

$$\Rightarrow x = y \vee \mu = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Se } \mu = -\frac{1}{2}:$$

Dalla terza ho

$$2 = \lambda - z \Rightarrow z = \lambda - 2$$

Dalla quarta ho

$$x + y = 2 - \lambda$$

Sommendo le prime due ottengo

$$x + y = 2\lambda - (x + y)$$

$$\Rightarrow 2 - \lambda = 2\lambda - 2 + \lambda$$

$$\Rightarrow 4 = 4\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

$$x + y = 2 - \lambda = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 - x$$

$$z = \lambda - 2 = -1$$

Dall'ultima equazione ottengo

$$x^2 + (1-x)^2 + (-1)^2 = 24$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + 1 = 24$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 22 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 11 = 0$$

$$x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+44}}{2}$$

$$\text{Se } x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}:$$

$$y = 1 - x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2}$$

$$\text{Se } x = 1 + \frac{\sqrt{45}}{2}:$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}$$

Ho ottenuto i punti:

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2}, -1 \right)^T$$

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}, -1 \right)^T$$

Se  $x = y$ :

Dalla terza ottengo

$$z = -2x$$

Dalla quarta ho

$$x^2 + x^2 + (-2x)^2 = 24$$

$$\Rightarrow 6x^2 = 24$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

Ottengo i punti

$$(-2, -2, 4)^T$$

$$(2, 2, -4)^T$$

$$f\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2}, -1\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{45}{4} - 2 = -13 = \min f$$

$$= f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}, -1\right)$$

$$f(-2, -2, 4) = 12 = \max f$$

$$f(2, 2, -4) = -4$$

### FUNZIONI INTEGRALI (INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRI)

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, t)$ , definiamo la funzione

$$h(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

#### ESEMPIO:

$$f(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0, \quad 0 \leq x < t \\ 0, & \text{se } t < x \leq 1 \vee t = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x, t) = 0 \quad \forall x > 0$$

$$\int_0^1 f(x, t) dx =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{t} dx + \int_t^1 0 dx = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, t) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) dx$$

### TEOREMA DI CONTINUITÀ

Sia  $f: [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo,  
 $f$  continua su  $[a, b] \times I$ .

Allora la funzione

$$h(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

è continua su  $I$ .

#### DIM:

Sia  $t_o \in I$ ; sia  $c \leq t_o \leq d$ ;  $c, d \in I$ ; e  
consideriamo la funzione  $f$  ristretta a  $[a, b] \times [c, d]$ .

Dobbiamo dimostrare che  $h$  è continua in  $t_o$   
quindi che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{se } |t - t_o| < \delta$$

$$\Rightarrow |h(t) - h(t_o)| < \varepsilon$$

Fissato  $\varepsilon$ , so che  $f$  è uniformemente continua su  $[a, b] \times [c, d]$  per Heine-Cantor; quindi

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta' > 0 \text{ tale che}$$

$$\forall (x_1, t_1)^T, (x_2, t_2)^T \in [a, b] \times [c, d]$$

$$\text{Se } |(x_1, t_1)^T - (x_2, t_2)^T| < \delta'$$

$$\Rightarrow |f(x_1, t_1) - f(x_2, t_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Allora abbiamo che

$$|h(t) - h(t_o)| =$$

$$= \left| \int_a^b f(x, t) dx - \int_a^b f(x, t_o) dx \right| = \\ \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_o)| dx$$

Se prendo  $\delta = \delta'$ , e  $t$  tale che

$$|(x, t)^T - (x, t_o)^T| = |t - t_o| < \delta' = \delta$$

$$\text{Ho che } |f(x, t) - f(x, t_o)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

E quindi

$$\int_a^b |f(x, t) - f(x, t_o)| dx < \varepsilon \\ \Rightarrow |h(t) - h(t_o)| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

### TEOREMA DERIVABILITÀ DELLA FUNZIONE INTEGRALE

Sia  $f: [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo,

$$f \in C^1([a, b] \times I, \mathbb{R})$$

$$h(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

Allora  $h$  è derivabile su  $I$  e si ha

$$h'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

DIM:

$$h'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \\ = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \left[ \int_a^b f(x, t) dx - \int_a^b f(x, t_0) dx \right] = \\ = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_a^b [f(x, t) - f(x, t_0)] dx = \dots$$

$x$  è fissato, quindi per Lagrange ho che

$$f(x, t) - f(x, t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi)(t - t_0)$$

Con  $|\xi - t_0| < |t - t_0|$ , semplifico  $|t - t_0|$  e ottengo  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow h'(t_0) = \dots =$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi) dx$$

Dato che  $f \in C^1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t}$  è continua, e quindi per il Teorema precedente (di continuità),  $h$  è continua e si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx \quad \blacksquare$$

ESEMPIO:

$$h(t) = \int_0^1 \sin(x^2 t) dx$$

$$h'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \sin(x^2 t) dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 \cos(x^2 t) dx$$

Supponiamo di avere una funzione

$$h(t) = \int_0^t f(x, t) dx$$

Cos'è  $h'(t)$ ? Devo pensare a una funzione composta

$$\varphi(u, v) = \int_0^u f(x, v) dx$$

$$h(t) = \varphi(t, t)$$

se considero  $\gamma(t) = (t, t)^T$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow h(t) = (\varphi \circ \gamma)(t) \\
&\Rightarrow h'(t) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t) = \\
&= \langle \nabla \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\
&\gamma'(t) = (1, 1)^T \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = f(u, v) \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \int_0^u \frac{\partial f}{\partial v}(x, v) dx \\
&\Rightarrow h'(t) = \langle \nabla \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\gamma(t)) * 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\gamma(t)) * 1 = \\
&= f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx
\end{aligned}$$

E quindi vale la formula

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^t f(x, t) dx \right) = f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

### IMPORTANTE 18:

In generale se ho  $f, \alpha, \beta \in C^1$

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = \\
&= \int_{z_0}^{\beta(t)} f(x, t) dx - \int_{z_0}^{\alpha(t)} f(x, t) dx
\end{aligned}$$

Con  $z_0$  punto qualsiasi

$$\begin{aligned}
h'(t) &= f(\beta(t), t) * \beta'(t) - f(\alpha(t), t) * \alpha'(t) + \\
&+ \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx
\end{aligned}$$

### ESEMPIO DA ESAME:

Si calcoli il gradiente  $\nabla f(x, y)$  di

$$f(x, y) = \int_{x^2}^y \cos(tx y) dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos(x^3 y) * 2x - \int_{x^2}^y [\sin(tx y) * ty] dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy^2) - \int_{x^2}^y [\sin(tx y) * tx] dt$$

### INTEGRALI DI RIEMANN IN $\mathbb{R}^N$

Per  $N = 1$

$$\int_{[a,b]} f dm$$

Per  $N = 2$ : ( $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^N$  per esercizio)

Un intervallo in  $\mathbb{R}^2$  si pensa sia un 2-rettangolo, ossia un insieme del tipo

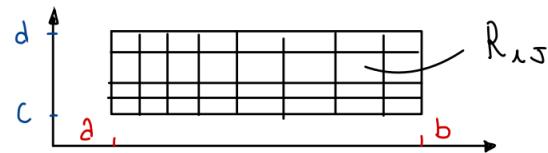
$$R = [a, b] \times [c, d]$$

Ossia il prodotto cartesiano tra due intervalli compatti. L'idea è quella di decomporre il rettangolo in sottorettangoli.

Sia quindi  $R = [a, b] \times [c, d]$  un rettangolo in  $\mathbb{R}^2$ , diremo **decomposizione** di  $R$  una famiglia di sottorettangoli

$$\{R_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$$

Del tipo  $R_{ij} = I_i \times J_j$



Dove  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $J_j = [y_{j-1}, y_j]$  e dove  $\{I_i, i = 1, \dots, n\}$  è una decomposizione di  $[a, b]$ ,  $\{J_j, j = 1, \dots, m\}$  è una decomposizione di  $[c, d]$ .

Siano  $\delta, \delta'$  decomposizioni di  $R$  ( $\Delta R$ ). Diremo che  $\delta'$  è **più fine** di  $\delta$  se ogni nodo di  $\delta$  è un nodo di  $\delta'$ .

I nodi sono tutti i punti del tipo  $(x_i, y_j)^T$ , con  $\delta = \{(x_0, y_0), (x_0, y_1), \dots, (x_0, y_m), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_m)\}$

Si osservi che date due decomposizioni  $\delta_1, \delta_2$  di  $R$  non è detto che una sia più fine dell'altra, tuttavia esiste sempre una terza decomposizione  $\delta$  più fine di entrambe (i nodi di  $\delta$  sono l'unione dei nodi di  $\delta_1$  e  $\delta_2$ ).

Sia  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Diremo **somma inferiore** di  $f$  relativa alla decomposizione  $\delta$  il numero

$$s(f, \delta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \inf_{x, y \in R_{ij}} f(x, y) * m(R_{ij})$$

Diremo **somma superiore** di  $f$  relativa alla decomposizione  $\delta$  il numero

$$S(f, \delta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sup_{x,y \in R_{ij}} f(x, y) * m(R_{ij})$$

Dove  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

$$m(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) * (y_j - y_{j-1})$$

### Proprietà delle somme:

- $\forall \delta \in \Delta \Rightarrow s(f, \delta) \leq S(f, \delta)$
- Se  $\delta'$  è più fine di  $\delta \Rightarrow$ 

$$s(f, s) \leq s(f, s')$$

$$S(f, s) \geq S(f, s')$$
- $\forall \delta_1, \delta_2 \in \Delta \Rightarrow s(f, \delta_1) \leq S(f, \delta_2)$

Consideriamo i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$

$$\sigma = \{s(f, \delta) : \delta \in \Delta(\mathbb{R})\}$$

$$\sum = \{S(f, \delta) : \delta \in \Delta(\mathbb{R})\}$$

Per le proprietà appena viste, si ha che  $\sigma$  e  $\sum$  sono separati in  $\mathbb{R}$ .

Si dice **integrale inferiore** di  $f$  su  $\mathbb{R}$ :

$$\sup \sigma = \iint_R^- f dm$$

Si dice **integrale superiore** di  $f$  su  $\mathbb{R}$ :

$$\inf \sum = \iint_R^+ f dm$$

Si ha che

$$\iint_R^- f dm \leq \iint_R^+ f dm$$

La funzione  $f$  si dice **integrabile secondo Riemann** su  $R$  se

$$\iint_R^- f dm = \iint_R^+ f dm$$

Questo accade se  $\sigma$  e  $\sum$  sono insiemi contigui.  
Ossia se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \Delta(\mathbb{R}) :$$

$$S(f, \delta_2) - s(f, \delta_1) < \varepsilon$$

Prendendo  $\delta$  più fine di  $\delta_1$  e  $\delta_2$  si ha che

$$S(f, \delta) - s(f, \delta) < \varepsilon$$

Se  $f$  è integrabile secondo Riemann si dice **integrale di  $f$**  il numero

$$\iint_R f dm = \iint_R^+ f dm = \iint_R^- f dm$$

[ è l'elemento separatore tra  $\sigma$  e  $\sum$  ]

Se  $f(x, y) \geq 0$ , allora  $\iint_R f dm$  rappresenta il **volume** della regione di  $\mathbb{R}^3$   $(x, y, z)$  compresa tra il piano  $xy$  e il grafico  $z = f$  [ sottografico della funzione  $f$  ]

Se considero  $f(x, y)$

$$\iint_R f dm = \iint_R f(x, y) \underbrace{dxdy}_{\text{SIMBOLO}}$$

### ESEMPI:

$$f(x, y) = \alpha$$

Considero il rettangolo  $R$  e considero una decomposizione qualsiasi. Quali sono la somma superiore e la somma inferiore:

$$S(f, \delta) = \alpha * m(R), \forall \delta$$

Questo perché

$$\begin{aligned} S(f, \delta) &= \sum_{i,j} \overbrace{\sup_{R_{ij}} f}^{\alpha} * m(R_{ij}) = \\ &= \alpha * \sum_{i,j} m(R_{ij}) = \alpha * m(R) = s(f, \delta) \end{aligned}$$

$$\sigma = \{\alpha * m(R)\}, \sum = \{\alpha * m(R)\}$$

$\Rightarrow f$  è integrabile e

$$\iint_R f dm = \alpha * m(R)$$

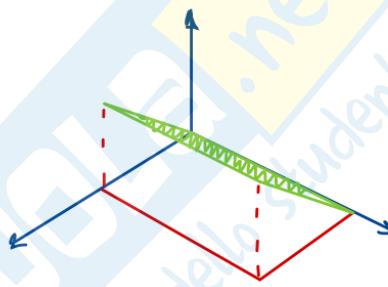
In particolare se  $\alpha = 1$

$$\iint_R 1 dm = m(R)$$

### ESEMPIO:

Sia  $f: \underbrace{[0,1] \times [0,2]}_R \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x$$



$$\iint_R x \, dm = \text{Volume del prisma} =$$

$$= \frac{1}{2} \text{Area base} * \text{altezza} =$$

$$= \frac{1}{2} * 1 * 2 * 1 = 1$$

$$s(f, \delta) =$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \inf_{R_{ij}} x * m(R_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M x_{i-1}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^N x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) * \sum_{j=1}^M y_j - y_{j-1} = \\ (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \\ + \dots + (y_M - y_{M-1}) = \\ = y_M - y_0 = 2$$

$$\Rightarrow s(f, \delta) = 2 * \sum_{i=1}^N x_{i-1} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{= \frac{i}{N} - \frac{i-1}{N} = \frac{1}{N}} =$$

$$= 2 * \sum_{i=1}^N \frac{i-1}{N} * \frac{1}{N} =$$

$$= \frac{2}{N^2} * \underbrace{(0 + 1 + 2 + \dots + N-1)}_{\frac{N(N-1)}{2}} =$$

$$= \frac{N-1}{N}$$

Per la somma superiore cambia che

$$\sum_{i=1}^N x_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow S(f, \delta) = \frac{2}{N^2} (0 + 1 + \dots + N) =$$

$$= \frac{N+1}{N}$$

Abbiamo quindi per questa  $\delta_n$

$$\delta_n = \left\{ \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times [0,1] : i = 1, \dots, n \right\}$$

$$S(f, \delta_n) = \frac{N+1}{N}$$

$$s(f, \delta_n) = \frac{N-1}{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \delta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \delta_n) = 1$$

Quindi la funzione è integrabile e

$$\iint_R x \, dm = 1$$

DEF:

Fissato un rettangolo  $R$ , indichiamo con

$$\mathcal{R}(R) = \{ \text{funzioni } f: R \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrabili su } R \}$$

### PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE SU RETTANGOLI

1)

**Linearità:** siano  $f, g \in \mathcal{R}(R), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(R)$$

$$\iint_R (\alpha f + \beta g) \, dm =$$

$$= \alpha \iint_R f \, dm + \beta \iint_R g \, dm$$

2)

**Prodotto:** siano  $f, g \in \mathcal{R}(R) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f * g \in \mathcal{R}(R)$$

3)

**Monotonia:** siano  $f, g \in \mathcal{R}(R) \Rightarrow$

se  $f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y)^T \in R$ , allora

$$\iint_R f \, dm \leq \iint_R g \, dm$$

OSS:

può essere  $f(x, y) < g(x, y)$  per qualche punto  $(x, y)^T \in R$  e tuttavia

$$\iint_R f \, dm = \iint_R g \, dm$$

Se  $f$  e  $g$  sono continue ed esiste  $(x_o, y_o)^T \in R$  dove  $f(x_o, y_o) < g(x_o, y_o)$

$$\iint_R f \, dm < \iint_R g \, dm$$

4)

**Valore assoluto:** sia  $f \in \mathcal{R}(R) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(R)$

E inoltre

$$\left| \iint_R f \, dm \right| \leq \iint_R |f| \, dm$$

**ESEMPIO attenzione:**

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

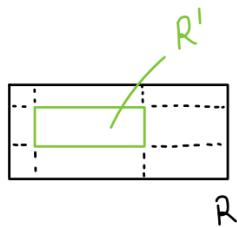
Allora  $f$  NON è integrabile su  $[0,1]$  però  $|f|$  è integrabile su  $[0,1]$ .

5)

**Integrabilità della restrizione:**

Sia  $R' \subset R$  (entrambi rettangoli), se  $f \in \mathcal{R}(R) \Rightarrow$

$$f|_{R'} \in \mathcal{R}(R')$$



6)

**Addittività dell'integrale:**

Se ho due rettangoli  $R_1, R_2$  tali che

$$R_1 \cup R_2 = R$$

E  $R_1 \cap R_2$  ha interno vuoto (segmento in comune)



Sia  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f|_{R_1} \in \mathcal{R}(R_1)$ ,  $f|_{R_2} \in \mathcal{R}(R_2) \Rightarrow$

$$f \in \mathcal{R}(R)$$

$$\Rightarrow \iint_R f \, dm = \iint_{R_1} f \, dm + \iint_{R_2} f \, dm$$

### TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Sia  $f \in \mathcal{R}(R)$ , allora

$$\inf_R f \leq \frac{\iint_R f \, dm}{m(R)} \leq \sup_R f$$

Inoltre se  $f$  è continua, esiste  $(x_o, y_o)^T \in R$  tale che

$$f(x_o, y_o) = \frac{\iint_R f \, dm}{m(R)}$$

DIM:

Osservo che, data  $\delta_0$  la decomposizione banale di  $R$ ,  $\delta_0 = \{R\}$

$$\inf_R f * m(R) = s(f, \delta_0)$$

$$\sup_R f * m(R) = S(f, \delta_0)$$

Allora si ha che

$$\inf_R f * m(R) \leq \iint_R f \, dm \leq \sup_R f * m(R)$$

$$\Rightarrow \inf_R f \leq \frac{\iint_R f \, dm}{m(R)} \leq \sup_R f \quad \blacksquare$$

### SECONDA PARTE:

Dato che  $R$  è compatto e connesso,  $f$  continua, per Weierstrass esistono

$$\min_R f, \max_R f$$

$$\Rightarrow \min_R f \leq \frac{\iint_R f \, dm}{m(R)} \leq \max_R f$$

Per il Teorema di connessione l'immagine di  $f(R)$  è l'intervallo  $[\min_R f, \max_R f]$ , e dato che

$$\frac{\iint_R f \, dm}{m(R)} \in [\min_R f, \max_R f]$$

$$\Rightarrow \exists (x_o, y_o)^T \in R : f(x_o, y_o) = \frac{\iint_R f \, dm}{m(R)} \quad \blacksquare$$

## TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

Sia  $R$  rettangolo,  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $R$ .

Allora  $f \in \mathcal{R}(R)$

DIM:

$R$  è compatto, quindi  $f$  è uniformemente continua su  $R$  per Heine Cantor. Vogliamo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \Delta(R)$  decomposizione tale che

$$S(f, \delta) - s(f, \delta) < \varepsilon$$

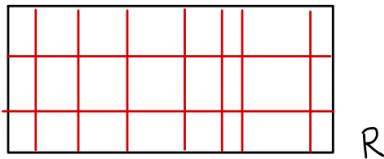
Per l'uniforme continuità di  $f$  esiste  $\sigma > 0$  tale che

$$\forall (x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T \in R$$

$$\text{se } \|(x_1, y_1)^T - (x_2, y_2)^T\| < \sigma$$

Allora fissato  $\varepsilon \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{m(R)}$

Devo suddividere il rettangolo in tanti rettangolini, tale in che ognuno di questi, presi due punti qualsiasi, la loro distanza  $< \sigma$ .



Prendiamo una decomposizione  $\delta$  di  $R$  con  $\text{mesh} < \sigma$  [cioè  $\text{diam } R_{ij} < \sigma, \forall i, j$ ].

Allora si può dire che (dato che esistono minimo e massimo per Weierstrass):

$$\begin{aligned} S(f, \delta) - s(f, \delta) &= \\ &= \sum_{i,j} \left( \max_{R_{ij}} f - \min_{R_{ij}} f \right) * m(R_{ij}) \end{aligned}$$

$$\max_{R_{ij}} f = f(P_{ij}), P_{ij} \in R_{ij}$$

$$\max_{R_{ij}} f = f(Q_{ij}), Q_{ij} \in R_{ij}$$

$$\|P_{ij} - Q_{ij}\| < \sigma$$

$$\Rightarrow |f(P_{ij}) - f(Q_{ij})| < \frac{\varepsilon}{m(R)}$$

$$\Rightarrow S(f, \delta) - s(f, \delta) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j} (f(P_{ij}) - f(Q_{ij})) * m(R_{ij}) \leq \\ &\leq \sum_{i,j} \frac{\varepsilon}{m(R)} * m(R_{ij}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{m(R)} * \sum_{i,j} m(R_{ij}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{m(R)} * m(R) = \varepsilon \blacksquare \end{aligned}$$

## CALCOLO DEGLI INTEGRALI

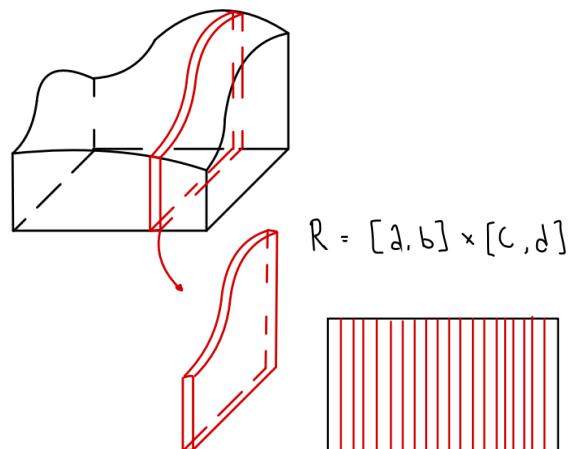
Supponiamo di avere una funzione positiva e di voler calcolare il suo integrale, quindi il volume del sottografico, sommando tra di loro delle "colonnine" di base rettangolare, andando poi al limite.

Penso però di tagliare a "fettine" il volume, e di sommare queste fettine, e lo spessore di queste al limite diventa sempre più fine.

Andrei quindi a suddividere il rettangolo in striscioline sempre più sottili invece che in una griglia.

Questo equivale a fissare un  $\hat{y}$  e muovermi lungo  $x$ . Otterrei così una funzione

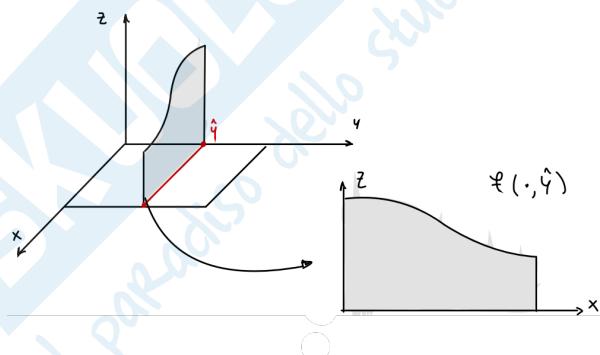
$$f\left(\underset{x}{\hat{y}}\right): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



Se guardo sul piano  $xz$  il grafico di  $f$  osservo che il suo sottografico corrisponde alla "lamina" creata in corrispondenza di  $\hat{y}$  nello spazio.

Posso calcolare

$$\int_{[a,b]} f(x, \hat{y}) dx = \text{area della lamina}$$



Devo quindi "sommare" tutte le lamine infinitesime, calcolando

$$\int_{[c,d]} \left( \int_{[a,b]} f(x, \hat{y}) dx \right) dy$$

funzione da  $[c,d] \rightarrow \mathbb{R}$

### TEOREMA DI RIDUZIONE DI FUBINI PER INTEGRALI DOPPI SUI RETTANGOLI

Sia  $R = [a, b] \times [c, d]$  rettangolo e sia  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $R$ . Per ogni  $\hat{y} \in [c, d]$  posso considerare

$$f(*, \hat{y}): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Supponiamo inoltre che per ogni  $y \in [c, d]$  la funzione  $f(*, y)$  sia integrabile su  $[a, b]$ .

Allora, la funzione  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(y) = \int_{[a,b]} f(x, y) dx$$

è integrabile su  $[c, d]$  e si ha che

$$\int_{[c,d]} g(y) dy = \iint_R f dm$$

Ossia

$$\iint_R f dm = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Vale il Teorema analogo dove si fissa  $\hat{x}$  e si sposta  $y$ , invertendo gli integrali.

DIM omessa

ESEMPIO:

Vogliamo calcolare su  $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$  l'integrale di  $f(x, y) = \sin(x + y)$

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x + y) dx dy =$$

Usando il Teorema di Fubini si può spezzare

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + y) dy \right) dx = **$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + y) dy =$$

$$= [-\cos(x + y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x)$$

$$** = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) \right) dx =$$

$$= [\mp \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) =$$

$$= -0 + 1 + 1 - 0 = 2$$

ESEMPIO:

Prendiamo  $R = [0,1] \times [1,2]$ ,  $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} y^{-3}$

$$\iint_R f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_1^2 e^{\frac{x}{y}} y^{-3} dy \right) dx$$

$$\int_1^2 e^{\frac{x}{y}} y^{-3} dy = ???$$

Il calcolo è tedioso quindi posso scrivere

$$\int_1^2 \left( \int_0^1 e^{\frac{x}{y}} y^{-3} dx \right) dy =$$

$$= \int_1^2 y^{-3} \left( \int_0^1 e^{\frac{1}{y} * x} dx \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 y^{-3} \left[ \underbrace{y * e^{\frac{1}{y} * x}}_{ye^y - y} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \\
&= \int_1^2 y^{-3} \left( ye^{\frac{1}{y}} - y \right) dy = \\
&= \int_1^2 \left( e^{\frac{1}{y}} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} \right) dy = \\
&= \int_1^2 e^{\frac{1}{y}} \frac{1}{y^2} dy + \int_1^2 \left( -\frac{1}{y^2} \right) dy \\
&u = \frac{1}{y}, du = -\frac{1}{y^2} dy \\
&= \int_1^{\frac{1}{2}} -e^u du + \int_1^{\frac{1}{2}} 1 * du = \\
&= [-e^u + u]_1^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left[ -e^{\frac{1}{y}} + \frac{1}{y} \right]_1^{\frac{1}{2}} = \\
&= -e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + e - 1 = \\
&= e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ESEMPIO:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx \\
&\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy
\end{aligned}$$

Si osservi che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{x^2 + y^2 - y - 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy &= \int_0^1 \frac{d}{dy} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy = \\
&= \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{x^2 + 1} \\
\Rightarrow \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx &= \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx =
\end{aligned}$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Ora se calcolo invece

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy$$

Non cambia quasi nulla, per simmetria

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{d}{dx} \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Però l'integrale vale  $-\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$

Non posso usare Fubini perché la funzione

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

**non è integrabile** sul quadrato  $[0,1] \times [0,1]$ , questo perché **NON è limitata!**

ESEMPIO:

Considero la funzione

$$\begin{aligned}
f: [0,1] \times [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\
f(x,y) &= \begin{cases} 1, & \text{se } x = \frac{1}{2}, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\
\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x,y) dx dy &= 0
\end{aligned}$$

Posso usare Fubini?

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y) dy \right) dx$$

NO! Perché  $\int_0^1 f(x,y) dy$  non ha significato quando  $x = \frac{1}{2}$ .

$\int_0^1 f\left(\frac{1}{2}, y\right) dy$  non è integrabile!

ESEMPIO:

S calcoli il volume del solido delimitato superiormente dalla superficie di equazione

$$xy - z = 0$$

inferiormente dal quadrato  $[0,1]^2$  e lateralmente da piano ortogonali al piano  $xy$

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} xy dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left( \int_0^1 xy \, dy \right) dx = \\
&= \int_0^1 x \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

ESEMPIO:

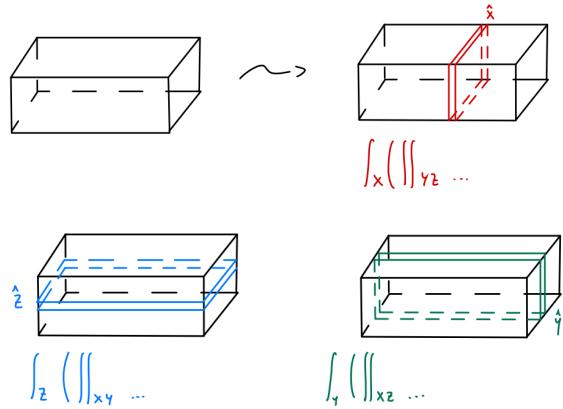
Calcolare sul quadrato  $[0,1]^2$

$$\begin{aligned}
&\iint_{[0,1]^2} |y - x^2| \, dxdy = \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^1 |y - x^2| \, dy \right) dx \\
|y - x^2| &= \begin{cases} y - x^2, & \text{se } y \geq x^2 \\ x^2 - y, & \text{se } y < x^2 \end{cases} \\
&\int_0^1 |y - x^2| \, dy = \\
&= \int_0^{x^2} |y - x^2| \, dy + \int_{x^2}^1 |y - x^2| \, dy = \\
&= \int_0^{x^2} (x^2 - y) \, dy + \int_{x^2}^1 (y - x^2) \, dy = \\
&= \left[ x^2 y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{x^2} + \left[ \frac{1}{2} y^2 - x^2 y \right]_{x^2}^1 = \\
&= x^4 - \frac{1}{2} x^4 - 0 + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2} x^4 + x^4 = \\
&= x^4 - x^2 + \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \int_0^1 \left( \int_0^1 |y - x^2| \, dy \right) dx = \\
&= \int_0^1 \left( x^4 - x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{30}
\end{aligned}$$

Cosa succede su gli integrali tripli?

### RIDUZIONE DELL'INTEGRALE TRIPLO IN $\mathbb{R}^3$

Consideriamo un tre-rettangolo (dominio), al posto di considerare i cubettini, posso tagliarlo a fette sottili.



### TEOREMA DI RIDUZIONE PER SEZIONI IN $\mathbb{R}^3$ (FUBINI)

Consideriamo il tre-rettangolo

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$f: R \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $R$ .

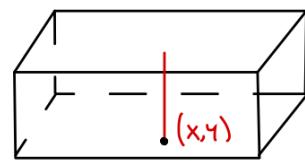
Supponiamo che per ogni  $z \in [a_3, b_3]$ , la funzione  $f(*, *, z): [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$  sia integrabile.  
Poniamo

$$\begin{aligned}
g(z) &= \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x, y, z) \, dxdy \\
g &: [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Allora  $g$  è integrabile su  $[a_3, b_3]$  e si ha

$$\begin{aligned}
\int_{[a_3, b_3]} g(z) dz &= \iiint_R f \, dm = \\
&= \int_{a_3}^{b_3} \left( \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x, y) \, dxdy \right) dz
\end{aligned}$$

### TEOREMA DI RIDUZIONE PER CORDE IN $\mathbb{R}^3$



$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

Sia  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $R$ .

Per ogni  $(x, y)^T \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  sia integrabile su  $[a_3, b_3]$  la funzione

$$f(x, y, *): [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}$$

Poniamo

$$g(x, y) = \int_{[a_3, b_3]} f(x, y, z) dz$$

$$g: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

Allora  $g$  è integrabile su  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  e si ha

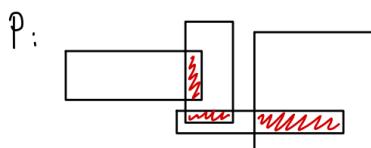
$$\begin{aligned} \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} g(x, y) dx dy &= \\ &= \iiint_R f dm = \\ &= \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left( \int_{[a_3, b_3]} f(x, y, z) dz \right) dx dy \end{aligned}$$

E se ho un cerchio? Occorre estendere la nozione di integrale a insiemi che non sono rettangoli.

DEF:

Diremo **plurirettangolo** un'unione finita di rettangoli  $R_i$

$$P = \bigcup_{i=1}^n R_i$$



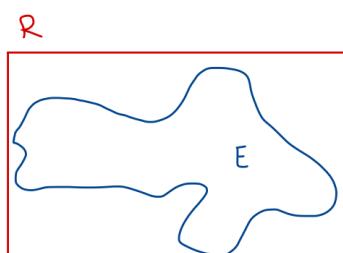
### INTEGRAZIONE SU UN INSIEME LIMITATO

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  un insieme limitato. Sia  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  limitata.

Fissiamo un rettangolo  $R$  contenente  $E$ . Definiammo una nuova funzione

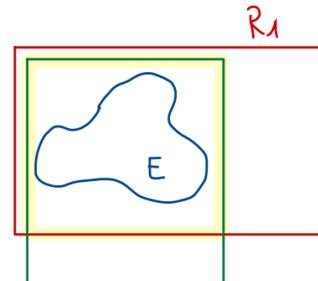
$$f_R^*: R \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_R^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in R \setminus E \\ f(x), & \text{se } x \in E \end{cases}$$



OSS:

Siano  $R_1$  e  $R_2$  contenenti  $E$ . Si ha che  $f_{R_1}^*$  è integrabile su  $R_1$  se e solo se  $f_{R_2}^*$  è integrabile su  $R_2$  e si ha che  $\int_{R_1} f_{R_1}^*(x) dx = \int_{R_2} f_{R_2}^*(x) dx$ .



DIM:

Considero  $R_1 \cap R_2$

$$\int_{R_1} f_{R_1}^*(x) dx = 0 + \int_{R_1 \cap R_2} f_{R_1}^*(x) dx$$

$$\int_{R_2} f_{R_2}^*(x) dx = 0 + \int_{R_1 \cap R_2} f_{R_2}^*(x) dx$$

per l'additività.

Si ha che

$$f_{R_1}^*(x) = f_{R_1 \cap R_2}^*(x), \forall x \in R_1 \cap R_2$$

$$f_{R_2}^*(x) = f_{R_1 \cap R_2}^*(x), \forall x \in R_1 \cap R_2$$

DEF:

Sia  $E$  limitato,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Diremo che  $f$  è **integrabile** su  $E$  se, preso un rettangolo qualsiasi contenente  $E$ , la funzione  $f_R^*$  è integrabile sul rettangolo  $R$ . Si pone in tal caso

$$\int_E f dm = \int_R f_R^* dm$$

ES:

$$f(x) = 1$$

$$E = Q \cap [0,1]$$

$f$  NON è integrabile su  $E$ .

$$R \supset E, R = [0,1]$$

$\int_0^1 f_R^* dx$  NON esiste (è la funzione di Dirichlet, non integrabile!)

### DEF:

Sia  $E \subset \mathbb{R}^N$  limitato.  $E$  si dice **misurabile** secondo Peano-Jordan se la funzione  $f(x) = 1$  è integrabile su  $E$ . In questo caso si dice **misura di  $E$**  il numero

$$m(E) = \int_E 1 dm = \int_R f_R^*(x) dx$$

con  $E \subseteq R$ ,  $R$  rettangolo.

### ES:

$E = [0,1] \cap Q \subset \mathbb{R}$  non è misurabile secondo Peano-Jordan in  $\mathbb{R}$ .

### ATTENZIONE:

L'insieme  $A = ([0,1] \cap Q \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2)$  è misurabile secondo Peano-Jordan in  $\mathbb{R}^2$  con  $m(A) = 0$ .

### PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE (e della misura)

1)

#### **Linearità:**

$$\begin{aligned} \int_E (\alpha f + \beta g) dm &= \int_R (\alpha f + \beta g)_R^* dm = \\ &= \alpha \int_R f_R^* dm + \beta \int_R g_R^* dm = \\ &= \alpha \int_E f dm + \beta \int_E g dm \end{aligned}$$

2)

#### **Monotonia:**

Se  $f \leq g$  su  $E$

$$\Rightarrow \int_E f dm \leq \int_E g dm$$

3)

#### **Valore assoluto:**

$$|f_R^*| = |f|_R^*$$

### ATTENZIONE, NON VALE LA RESTISSIONE!

#### **Addittività:**

$f$  integrabile su  $E_1$ ,  $f$  integrabile su  $E_2$ .

Allora  $f$  è integrabile su  $E_1 \cup E_2$  e su  $E_1 \cap E_2$  e si ha

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \cup E_2} f dm &= \\ &= \int_{E_1} f dm + \int_{E_2} f dm - \int_{E_1 \cap E_2} f dm \end{aligned}$$

### DIM:

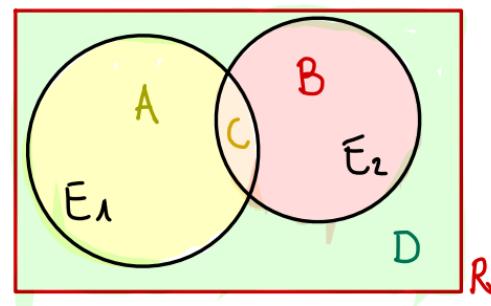
Costruiamo un rettangolo  $R$  qualsiasi attorno a  $E_1$  e  $E_2$ . Divido in 4 parti:

$$A = E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)$$

$$B = E_2 \setminus (E_1 \cap E_2)$$

$$C = E_1 \cap E_2$$

$$D = R \setminus (E_1 \cup E_2)$$



Vado a considerare

$$f_{E_1 \cup E_2}^*(x) \stackrel{?}{=} f_{E_1}^*(x) + f_{E_2}^*(x) - f_{E_1 \cap E_2}^*(x)$$

Se  $x \in D \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = 0 + 0 - 0$$

Se  $x \in A \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) + 0 - 0$$

Se  $x \in B \Rightarrow$

$$f(x) = 0 + f(x) - 0$$

Se  $x \in C \Rightarrow$

$$f(x) = f(x) + f(x) - f(x)$$

Quindi vale su tutto  $R$  che

$$f_{E_1 \cup E_2}^*(x) = f_{E_1}^*(x) + f_{E_2}^*(x) - f_{E_1 \cap E_2}^*(x)$$

Applico la linearità su  $R$  e ottengo la tesi. ■

Per le proprietà delle misure si ha che:

1)

### Addittività:

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2)$$

### Positività:

$$m(E) \geq 0, \forall E \text{ misurabile}$$

$$[1 \geq 0 \Rightarrow \int 1 \geq \int 0]$$

### Monotonia:

Se  $E_1 \subseteq E_2$ , entrambi misurabili, allora

$$\Rightarrow m(E_1) \leq m(E_2)$$

$$[1_{E_1}^*(x) \leq 1_{E_2}^*(x)]$$

**La misura di un rettangolo si ottiene col prodotto:**

$$m([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$$

In generale in  $\mathbb{R}^N$ ,  $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$

$$\Rightarrow m(R) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$$

### Invarianza per traslazioni:

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  misurabile,  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ , allora anche

$E + \{\alpha\} = \{x + \alpha : x \in E\}$  è misurabile e

$$m(E + \alpha) = m(E)$$

### OSS:

Se  $E = \{x_0\}$  un punto, allora  $E$  è misurabile in  $\mathbb{R}^N$ ,  $\forall N \geq 1$ ,  $m(E) = 0$ .

Un'unione numerabile di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan è misurabile? In generale no, ad esempio  $Q \cap [0,1]$ .

La misura di Peano-Jordan NON è una misura (perché non vale la proprietà di addittività per famiglie numerabili di insiemi)

$$\left[ m\left(\bigcup_{\substack{n=1 \\ E_i \cap E_j = \emptyset}}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n) \right]$$

addittività sui numerabili, NON  
vale su Peano-Jordan

### INSIEMI DI MISURA NULLA

Un insieme  $E$  misurabile con  $m(E) = 0$  si dice "di misura nulla".

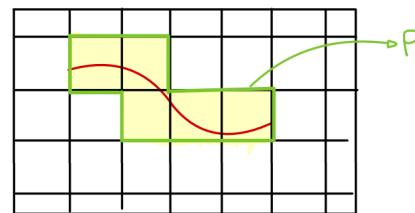
### TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI DI MISURA NULLA

$E$  è di misura nulla se e solo se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste un plurirettangolo  $P$  tale che  $E \subseteq P$  e  $m(P) < \varepsilon$ .

### DIM:

Sia  $E$  di misura nulla. Allora preso un rettangolo  $R$ ,  $E \subseteq R$ , allora

$$\int_R 1_E^* dm = 0$$



Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Sappiamo che

$$\int_R 1_E^* dm = \inf\{S(1_E^*, \delta) : \delta \in \Delta(R)\}$$

Sia  $\delta \in \Delta(R)$  tale che

$$S(1_R^*, \delta) < \varepsilon$$

Per definizione  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} S(1_R^*, \delta) &= \sum_{i,j} \sup_{R_{ij}} 1_R^* * m(R_{ij}) = \\ &= \sum_{R_{ij} \cap E \neq \emptyset} m(R_{ij}) < \varepsilon \end{aligned}$$

Prendiamo  $P$  tale che

$$P = \bigcup \{R_{ij} : R_{ij} \cap E \neq \emptyset\}$$

Viceversa, sia ora  $E$  tale che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $P$  plurirettangolo con  $m(P) < \varepsilon$ ,  $E \subseteq P$ .

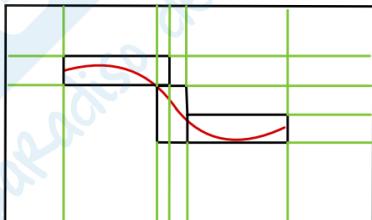
Dimostriamo che  $E$  è misurabile e  $m(E) = 0$ .

Cioè dimostriamo che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta \in \Delta(R)$  con  $S(1_R^*, \delta) < \varepsilon$ .

Per ipotesi esiste un plurirettangolo  $P$  che contiene  $E$  e  $m(P) < \varepsilon$ .

$$P = \bigcup_{k=1}^N R_k$$

“Completiamo”  $P$  in una decomposizione  $\delta$  di  $R$ .



$$\Rightarrow S(1_R^*, \delta) = m(P) < \varepsilon$$

Quindi  $1_R^*$  è integrabile su  $R$  e

$$\int_R 1_R^* dm = 0$$

Cioè

$$\int_E 1 dm = 0 \quad \blacksquare$$

OSS:

Se  $m(E) = 0$  e  $E' \subseteq E$ , allora  $E'$  è misurabile e  $m(E') = 0$ .

ESEMPIO:

$f: R \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile su  $R$ . Il grafico di  $f$ :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)^T) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in R\}$$

Allora  $\Gamma_f$  è di misura nulla in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

DIM  $N = 1$ :

Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  è integrabile se e solo se

$$\underbrace{S(f, \delta) - s(f, \delta)}_{\text{area del plurirettangolo}} < \varepsilon$$

$$P = \bigcup [x_{i-1}, x_i] \times \left[ \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \right]$$

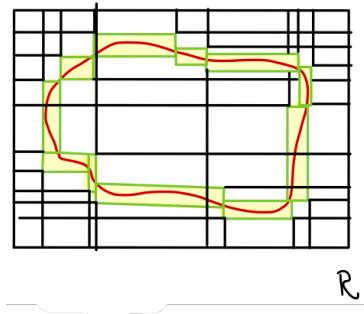
$$m(P) < \varepsilon, \forall \varepsilon$$

$$\Gamma_f \subset P.$$

### TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI MISURABILI MEDIANTE LA FRONTIERA

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $E$  limitato.  $E$  è misurabile se e solo se la sua frontiera è di misura nulla.

DIM:



Sia  $E$  misurabile. Allora  $1_R^*$  è integrabile su  $R$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \Delta(R) :$$

$$S(1_R^*, \delta) - s(1_R^*, \delta) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} \left( \sup_{R_{ij}} 1_R^* - \inf_{R_{ij}} 1_R^* \right) * m(R_{ij}) < \varepsilon$$

Se  $R_{ij} \cap E = \emptyset \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left( \overline{\sup_{R_{ij}} 1_R^*} - \overline{\inf_{R_{ij}} 1_R^*} \right) = 0$$

Se invece  $R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset$  ( $\partial E$  bordo)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sup_{R_{ij}} 1_R^* = 1, \quad \inf_{R_{ij}} 1_R^* = 0$$

$$\Rightarrow \left( \sup_{R_{ij}} 1_R^* - \inf_{R_{ij}} 1_R^* \right) = 1$$

Se  $R_{ij} \subset E \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sup_{R_{ij}} 1_R^* = 1, \quad \inf_{R_{ij}} 1_R^* = 1$$

$$\Rightarrow \left( \sup_{R_{ij}} 1_R^* - \inf_{R_{ij}} 1_R^* \right) = 0$$

Quindi l'unico caso in cui la differenza non è zero è quando il rettangolino interseca il bordo.

$$\Rightarrow \sum_{i,j: R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset} m(R_{ij}) < \varepsilon$$

Sia  $P$  un plurirettangolo tale che

$$P = \bigcup \{R_{ij} : R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset\}$$

$$\Rightarrow m(P) < \varepsilon \Rightarrow \partial E \subseteq P \Rightarrow m(\partial E) = 0$$

Viceversa sia ora che  $m(\partial E) = 0$ . Allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  un plurirettangolo  $P$  che contiene  $\partial E$  e  $m(P) < \varepsilon$ .

Completo  $P$  in una decomposizione di tutto il rettangolo  $R$  e osservo che

$$S(1_R^*, \delta) - s(1_R^*, \delta) = m(P) < \varepsilon \quad \blacksquare$$

### TEOREMA DI INTEGRABILITÀ SUGLI INSIEMI DI MISURA NULLA

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  di misura nulla,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  limitata.

Allora  $f$  è integrabile su  $E$  e

$$\int_E f dm = 0$$

DIM:

Sia  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $|f(x)| \leq M, \forall x \in E$ .

Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un plurirettangolo  $P$  tale che

$$E \subseteq P \quad e \quad m(P) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Completo  $P$  in una decomposizione  $\delta$  di  $R$ .

$$\begin{aligned} S(f_R^*, \delta) - s(f_R^*, \delta) &= \\ &= \sum_{i,j} \left( \underbrace{\sup_{R_{ij}} f_R^*}_{\leq M} - \underbrace{\inf_{R_{ij}} f_R^*}_{\leq M} \right) * m(R_{ij}) \leq \\ &\quad \text{---} \\ &\quad \text{---} \\ &\quad \text{---} \\ &\leq 2M * m(P) < \varepsilon \end{aligned}$$

E quindi  $f$  è integrabile.  $\blacksquare$

OSS:

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $E \subseteq R$ ,  $R$  rettangolo.

$E$  è misurabile se e solo se  $R \setminus E$  è misurabile.

OSS:

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  limitata,  $E$  limitato,  $N \subset E$ ,  $m(N) = 0$ . Allora  $f$  è integrabile su  $E \setminus N$  se e solo se  $f$  è integrabile su  $E$ .

INFO:

Concetto di "quasi ovunque": Sia  $P$  una proprietà che ha a che fare con gli insiemi. Si dice che  $P$  vale **quasi ovunque** se vale su un insieme a eccezione di un sottoinsieme di misura nulla.

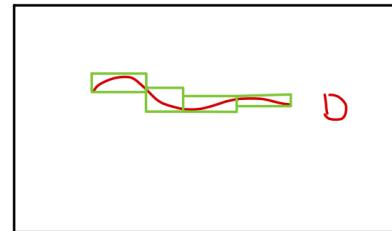
### TEOREMA DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI QUASI OVUNQUE CONTINUE

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  limitata,  $E$  misurabile. Sia  $N \subset E$ ,  $m(N) = 0$ . Sia  $f$  continua su  $E \setminus N$ . Allora  $f$  è integrabile su  $E$ .

DIM:

**Passo 1:**

$f: R \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R$  rettangolo. Sia  $D$  interno ad  $R$  (non tocca la frontiera) di misura nulla,  $f$  continua su  $R \setminus D$ . Allora  $f$  è integrabile su  $R$ .



Sappiamo che  $f$  è limitata, quindi prendo  $M$  tale che  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in R$ . Fissiamo un  $\varepsilon > 0$ .

Poiché  $D$  è interno a  $R$  ed è di misura nulla esistono un plurirettangolo  $P = \bigcup_{i,j} R_{ij}$  tale che  $D \subset P$  e  $m(P) < \frac{\varepsilon}{4M}$ .

Osservo che  $R \setminus \text{interno di } P$  è compatto. Inoltre  $f$  è continua su  $R \setminus \text{int } P$ , e quindi  $f$  è uniformemente continua su  $R \setminus \text{int } P$ .

Prendiamo  $\sigma > 0$  tale che  $\forall x_1, x_2 \in R \setminus \text{int } P$ , se

$$|x_1 - x_2| < \sigma \Rightarrow$$

Allora  $\Rightarrow$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2m(R)}$$

Prendiamo una decomposizione del rettangolo con  $\text{mesh} < \sigma$  e che completa  $P$ .

$$\Rightarrow S(f, \delta) - s(f, \delta) =$$

$$= \sum_{\substack{\text{fuori} \\ \text{da } P \\ i,j}} \left( \max_{R_{ij}} f - \min_{R_{ij}} f \right) m(R_{ij}) +$$

$$+ \sum_{i,j} \left( \sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f \right) m(R_{ij})$$

Si sa che  $\forall x_1, x_2$

$$\max_{R_{ij}} f - \min_{R_{ij}} f = f(x_1) - f(x_2)$$

Se  $\|x_1 - x_2\| < \sigma \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left( \max_{R_{ij}} f - \min_{R_{ij}} f \right) &< \frac{\varepsilon}{2m(R)} \\ \Rightarrow \sum_{\substack{\text{fuori} \\ \text{da } P \\ i,j}} \left( \max_{R_{ij}} f - \min_{R_{ij}} f \right) m(R_{ij}) &< \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< \frac{\varepsilon}{2m(R)} \overbrace{\sum_{\substack{\text{fuori} \\ \text{da } P \\ i,j}} m(R_{ij})}^{<m(R)} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \sum_{i,j} \left( \underbrace{\sup_{R_{ij}} f}_{\leq M} - \underbrace{\inf_{R_{ij}} f}_{\geq -M} \right) m(R_{ij}) &\leq \\ \leq 2M \sum_{i,j} m(R_{ij}) &= 2M * m(P) < \\ &< 2M * \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow S(f, \delta) - s(f, \delta) &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

**Passo 2:**

Sia  $E$  misurabile,  $N \subset E$ ,  $m(N) = 0$ . Prendiamo un rettangolo  $R$  tale che  $E \subset \text{int } R$ .

Consideriamo l'insieme  $D = N \cup \partial E$ .  $E$  è misurabile  $\Rightarrow \partial E$  ha misura nulla  $\Rightarrow D$  ha misura nulla.  $f_R^*$  è continua su  $R \setminus D$ . Per il passo 1, la funzione  $f_R^*$  è integrabile su  $R$  e quindi per definizione  $\Rightarrow f$  è integrabile su  $E$ . ■

### ANCORA SULLE PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE SUGLI INSIEMI LIMITATI

**Restrizione:** sia  $f$  integrabile su  $E$ ,  $E' \subset E$ ,  $E'$  misurabile. Allora  $f|_{E'}$  è integrabile.

### TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Sia  $E$  misurabile,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile. Allora

$$\inf_E f * m(E) \leq \int_E f dm \leq \sup_E f * m(E)$$

Inoltre se  $f$  è continua su  $E$ ,  $m(E) > 0$ ,  $E$  è connesso (e chiuso), allora esiste un punto  $x_o \in E$  tale che

$$f(x_o) = \frac{\int_E f dm}{m(E)}$$

DIM:

Sappiamo che

$$\inf_{x \in E} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in E} f(x)$$

Allora per la monotonia dell'integrale

$$\int_E \left[ \inf_{x \in E} f(x) \right] dm \leq \int_E f dm$$

$$\Rightarrow \inf_E f * m(E) \leq \int_E f dm$$

$$\int_E f dm \leq \int_E \left[ \sup_{x \in E} f(x) \right] dm$$

$$\int_E f dm \leq \sup_E f * m(E)$$

$$\Rightarrow \inf_E f * m(E) \leq \int_E f dm \leq \sup_E f * m(E)$$

Sia  $m(E) > 0$ ,  $E$  connesso (chiuso),  $f$  continua.  $E$  è compatto quindi esistono minimo e massimo per Weierstrass

$$\min_E f \leq \frac{\int_E f dm}{m(E)} \leq \max_E f$$

Poiché è connesso si ha che l'immagine di  $f$  è l'intervallo  $[\min_E f, \max_E f]$ . Dato che

$$\frac{\int_E f dm}{m(E)} \in [\min_E f, \max_E f]$$

Si ha che

$$\exists x_o \in E : f(x_o) = \frac{\int_E f dm}{m(E)} ■$$

## DOMINI NORMALI DI $\mathbb{R}^2$

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice **normale** rispetto all'asse  $x$  se esistono  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , funzioni  $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\varphi(x) \leq \psi(x), \forall x \in [a, b]$  e  $\alpha, \beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\alpha(y) \leq \beta(y), \forall y \in [c, d]$

$$\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha, \beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) \leq \psi(x), \forall x \in [a, b]$$

$$\alpha(y) \leq \beta(y), \forall y \in [c, d]$$

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

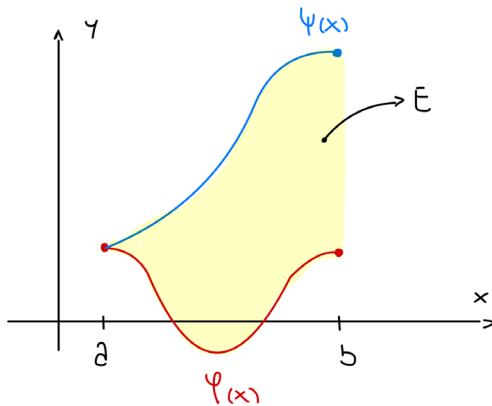
$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$

OSS:

Un dominio normale di  $\mathbb{R}^2$  è misurabile. Infatti se  $E$  è normale, la frontiera di  $E$  è l'unione finita di grafici di funzioni continue e eventualmente segmenti, e quindi  $\partial E$  è di misura nulla  $\Rightarrow$  e quindi  $E$  è misurabile.

## TEOREMA (integrale di una funzione continua su un insieme normale)

Sia  $E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  un dominio normale rispetto all'asse  $x$ ;



( $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue). Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f$  è integrabile su  $E$  e si ha che

$$\iint_E f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

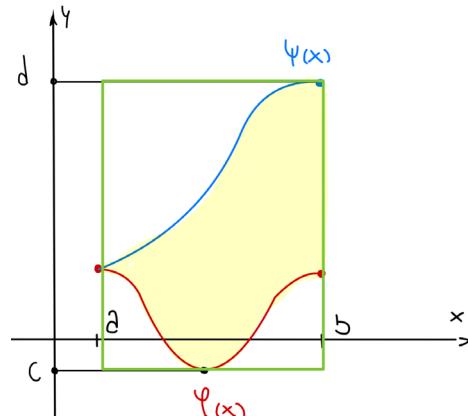
DIM:

$f$  è limitata perché continua su  $E$  compatto.  $E$  è misurabile  $\Rightarrow f$  è integrabile.

Siano

$$c = \min_{x \in [a, b]} \varphi(x), \quad d = \max_{x \in [a, b]} \psi(x)$$

(esistono per Weierstrass).



Sia  $R = [a, b] \times [c, d]$

$$\Rightarrow \iint_E f dm = \iint_{[a, b] \times [c, d]} f_R^*(x, y) dx dy \stackrel{\text{Fubini}}{\cong}$$

$$= \int_a^b \left( \int_c^d f_R^*(x, y) dy \right) dx$$

$x$  è fissato, e la  $y$  si sposta tra  $c$  e  $d$ , incontrando sia  $\varphi(x)$  che  $\psi(x)$ . Posso dividere l'intervallelo  $[c, d]$  quindi in 3 intervalli:

$$[c, d] = [c, \varphi(x)] + [\varphi(x), \psi(x)] + [\psi(x), d]$$

$$\Rightarrow \int_c^d f_R^*(x, y) dy =$$

$$= \int_c^{\varphi(x)} \underbrace{f_R^*(x, y)}_{=0} dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{f_R^*(x, y)}{f(x, y)} dy$$

$$+ \int_{\psi(x)}^d \underbrace{f_R^*(x, y)}_{=0} dy =$$

$$= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left( \int_c^d f_R^*(x, y) dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \blacksquare$$

Vale un teorema analogo per i domini normali rispetto all'asse  $y$ .

ESEMPIO:

$$\iint_D xy \, dxdy$$

Dove  $D$  è la regione limitata di piano del piano compresa tra la parabola  $y = x^2$  e la retta  $2x - y + 3 = 0$

Risovo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Ottengo i punti

$$\left(\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} 3 \\ 9 \end{matrix}\right)$$

Calcolo l'integrale

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^{2x+3} xy \, dy \right) dx = \dots$$

$$\dots = \frac{160}{3}$$

### DOMINI NORMALI IN $\mathbb{R}^3$

Sia  $K \subset \mathbb{R}^2$  un insieme chiuso misurabile e siano  $\varphi, \psi: K \rightarrow \mathbb{R}$  continue con

$$\varphi(x, y) \leq \psi(x, y), \quad \forall (x, y)^T \in K$$

L'insieme

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x, y)^T \in K, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

si dice **normale** rispetto al piano  $xy$ .

### TEOREMA

Un dominio normale  $E$  di  $\mathbb{R}^3$  è misurabile.

DIM:

Proviamo che  $\partial E$  ha misura nulla in  $\mathbb{R}^3$

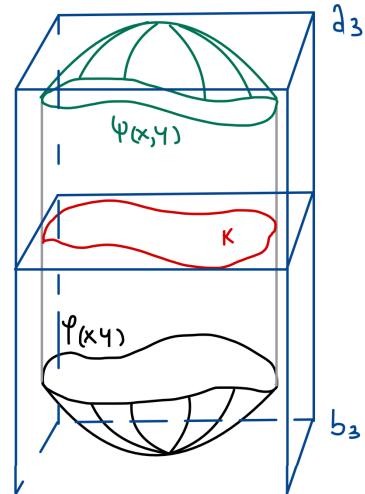
$$\partial E = \Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi \cup \text{cilindro}$$

$\Gamma_\varphi$  e  $\Gamma_\psi$  hanno misura nulla (grafici di funzioni continue quindi integrabili).

Una superficie cilindrica è del tipo

$$\{(x, y, z)^T : (x, y)^T \in C, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

dove  $C$  è una curva del piano  $xy$ . Sia  $K$  il dominio delle due funzioni, allora  $C = \partial K$  è di misura nulla nel piano  $xy$ .



Siano

$$c = \min_{(x,y)^T \in K} \varphi(x, y), \quad d = \max_{(x,y)^T \in K} \psi(x, y)$$

$\partial K$  ha misura nulla in  $\mathbb{R}^2$ , quindi  $\forall \varepsilon > 0$  esiste un plurirettangolo  $P$  in  $\mathbb{R}^2$  tale che

$$\partial K \subset P \quad \text{e} \quad m(P) < \frac{\varepsilon}{d - c}$$

$$P = \bigcup_{k=1}^N R_k$$

Considero un plurirettangolo  $Q$  in  $\mathbb{R}^3$

$$Q = \bigcup_{k=1}^N R_k \times [c, d]$$

$$m(Q) = m(P) * (d - c) < \varepsilon$$

E il cilindro è contenuto in  $Q$ . Quindi essendo di misura nulla, anche  $\partial E$  è di misura nulla. ■

### TEOREMA DI INTEGRABILITÀ SUI DOMINI NORMALI DI $\mathbb{R}^3$

Sia  $K \subset \mathbb{R}^2$  chiuso e misurabile,  $\varphi, \psi$  continue su  $K$ ,  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$

Sia

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x, y)^T \in K, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

dominio normale rispetto al piano  $xy$ .

Sia  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $E$ .

Allora  $f$  è integrabile su  $E$  e si ha che

$$\begin{aligned} \iiint_E f dm &= \\ &= \iint_K \left( \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ (\text{usando una riduzione per corde}). \end{aligned}$$

### RIDUZIONE PER SEZIONI

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\hat{z} \in \mathbb{R}$ . Si dice **sezione di quota**  $\hat{z}$  dell'insieme  $E$  l'insieme

$$S_{\hat{z}} = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x, y, \hat{z})^T \in E\}$$

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  un insieme chiuso e misurabile (in particolare compatto).  $E$  si dice **sezionabile** rispetto all'asse  $z$  se tutte le sezioni di  $E$  sono misurabili nel piano.

### TEOREMA (riduzione per sezioni)

Sia  $E$  sezionabile rispetto all'asse  $z$ . Sia  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

Allora  $f$  è integrabile su  $E$  e si ha che

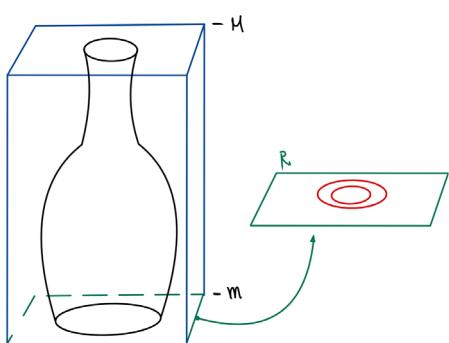
$$\iiint_E f dm = \int_m^M \left( \iint_{S_z} f(x, y, x) dx dy \right) dz$$

Dove

$$m = \min\{z \in \mathbb{R} : S_z \neq \emptyset\}$$

$$M = \max\{z \in \mathbb{R} : S_z \neq \emptyset\}$$

DIM:



Costruisco un parallelepipedo attorno ad  $E$ , di altezza  $|M - m|$  e base  $R$  rettangolo.

$R$  è abbastanza grande da contenere tutte le sezioni.

$$\iiint_E f dm = \iiint_{R \times [m, M]} f^* dm =$$

Applico fubini per sezioni

$$= \int_m^M \left( \iint_R f^*(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Fisso  $z$  tra  $m$  e  $M$ , la sezione corrispondente è in  $R$ , e la funzione vale 1 se sono dentro la sezione, 0 se sono fuori.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \iint_R f^*(x, y, z) dx dy = \\ &= \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

Perché appunto fuori di  $S_z$  vale 0.

$$\Rightarrow \iiint_E f dm = \int_m^M \left( \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \blacksquare$$

ESEMPIO:

Si voglia calcolare l'integrale

$$\iiint_E 2xz dx dy dz$$

Dove  $E$  è il solito del primo ottante limitato dalle superfici

$$y = x^2 + z^2, y = 1$$

La sezione  $S_y$  è un quarto di circonferenza

$$y = x^2 + z^2$$

Dove  $y$  è un numero fissato, quindi il raggio sarà

$$r = \sqrt{y}$$

Devo quindi calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \left( \iint_{S_y} 2xz dx dz \right) dy$$

Calcoliamo  $\iint_{S_y} 2xz dx dz$ :

$$0 \leq x \leq \sqrt{y}$$

$$y = x^2 + z^2 \Rightarrow z = \sqrt{y - x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{y - x^2}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{S_y} 2xz \, dx dz &= \int_0^{\sqrt{y}} \left( \int_0^{\sqrt{y-x^2}} 2xz \, dz \right) dx = \\
&= \int_0^{\sqrt{y}} x(y - x^2) \, dx = \\
&= \left[ \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{\sqrt{y}} = \\
&= \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}y^2 \\
&\Rightarrow \int_0^1 \left( \iint_{S_y} 2xz \, dx dz \right) dy = \\
&= \int_0^1 \frac{1}{4}y^2 dy = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

### ESEMPIO 18:

Volume del cono, conviene integrare per sezioni lungo  $z$ .

$$V = \iiint_E 1 \, dm = \int_0^h \left( \iint_{S_z} dx dy \right) dz$$

$$\text{Area di } S_z = \pi r(z)^2, r(z) = \frac{(h-z)}{h} r$$

$$\Rightarrow S_z = \pi \left( \frac{h-z}{h} r \right)^2$$

$$\Rightarrow \int_0^h \left( \iint_{S_z} dx dy \right) dz =$$

$$= \int_0^h \pi \left( \frac{h-z}{h} r \right)^2 dz =$$

$$= \left[ -h \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^3 * \frac{1}{3} \right]_0^h =$$

$$= \pi r^2 h * \frac{1}{3}$$

### CAMBIO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI IN $\mathbb{R}^N$

Se  $N = 1$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) * \varphi'(t) dt \\
\varphi(\alpha) &= a, \varphi(\beta) = b
\end{aligned}$$

Sia  $\varphi$  invertibile  $C^1$  con inversa  $C^1$  ( $\varphi$  è un diffeomorfismo)

$$\Rightarrow \varphi'(t) \neq 0, \forall t$$

$\varphi'(t) > 0, \forall t \Rightarrow \varphi$  è struttamente crescente:

$$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$$

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

Posso scrivere

$$\int_{\varphi([\alpha, \beta])}^{[\alpha, \beta]} f(x) dx = \int_{[\alpha, \beta]} f(\varphi(t)) * |\varphi'(t)| dt$$

$\varphi'(t) < 0, \forall t \Rightarrow \varphi$  è struttamente decrescente:

$$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [b, a]$$

$$\varphi(\alpha) = a > b = \varphi(\beta)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi([\alpha, \beta])}^{[\alpha, \beta]} f(x) dx &= \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx = \\
&= \int_{[\alpha, \beta]} f(\varphi(t)) \left| \frac{\varphi'(t)}{-\varphi'(t)} \right| dt
\end{aligned}$$

Quindi la formula seguente è sempre verificata, che va generalizzata

$$\int_{\varphi([\alpha, \beta])}^{[\alpha, \beta]} f(x) dx = \int_{[\alpha, \beta]} f(\varphi(t)) * |\varphi'(t)| dt$$

Caso  $N = 2$  (esempio):

$$\varphi(s, t) = (x(s, t), y(s, t))^T$$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Esempio della trasformazione lineare di coordinate:

$$\varphi \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 s + b_1 t \\ a_2 s + b_2 t \end{pmatrix}$$

Se  $Q$  è un quadrato,  $Q = [0, 1]^2$

$$Q = \{(s, t)^T : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$$

$$\varphi(Q) = \text{parallelogramma}$$

Il parallelogramma individuato dai vettori

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Area del parallelogramma =  $\det A$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$Area(Q) = \iint_Q 1 dm = 1$$

$$\begin{aligned} Area(\varphi(Q)) &= \iint_{\varphi(Q)} 1 dx dy = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = \iint_Q \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| ds dt \\ J\varphi &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In generale si avrà che

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \iint_{\varphi(E)} f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_E f(\varphi(s, t)) * |\det J\varphi(s, t)| ds dt \end{aligned}$$

### TEOREMA

Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$  aperti misurabili;  
 $\phi: B \rightarrow A$ ,  $\phi \in C^1$  diffeomorfismo (cioè  $\phi$  è invertibile  $C^1$  e  $\phi^{-1}$  è  $C^1$ )  
 $|\det J\phi(u, v)| \neq 0, \forall (u, v)^T \in B$

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua e limitata.

Allora

$$\begin{aligned} &\iint_A f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_B f(\phi(u, v)) * |\det J\phi(u, v)| du dv \\ &\quad \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_B f(\phi(u, v, w)) * |\det J\phi(u, v, w)| du dv dw \end{aligned}$$

$|\det J\phi(u, v)| du dv$  è l'elemento di area infinitesimo.

$|\det J\phi(u, v, w)| du dv dw$  è l'elemento di volume infinitesimo.

### ESEMPIO IMPORTANTE COORDINATE POLARI:

Siano

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)^T : x \leq 0\}$$

$$B = ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$$

$$\phi: B \rightarrow A$$

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)^T$$

ATTENZIONE: la  $\phi$  definita su  $[0, +\infty[ \times [-\pi, \pi[$  non è bieettiva!

$$\begin{aligned} J\phi(\rho, \theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \\ \Rightarrow |\det J\phi| &= \rho > 0 \end{aligned}$$

Quindi se ho una funzione  $f(x, y)$

$$\begin{aligned} &\iint_{E_{xy}} f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{E_{\rho\theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) * \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

### ESEMPIO COORDINATE ELLITTICHE:

$$x = a\rho \cos \theta$$

$$y = b\rho \sin \theta$$

$$\rho \leq 1$$

$$|\det J\varphi| = ab\rho$$

### AREA DEL CERCHIO:

Per calcolare l'area del cerchio con centro nell'origine calcolo l'integrale su  $E$

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y)^T : x^2 + y^2 = R^2\} = \\ &= \{(\rho, \theta)^T : 0 \leq \rho \leq R, \theta \in [0, 2\pi]\} \\ &\quad \iint_E 1 dx dy = \\ &= \iint_{E_{\rho\theta}} \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \rho d\theta \right) d\rho = \\ &= \int_0^R \rho * 2\pi d\rho = \pi R^2 \end{aligned}$$

### MISTO DI FISICA E GEOMETRIA E ANALISI

#### Volume:

$$Volume E = \int_E dm$$

#### Massa:

$$Massa E = \int_E \delta(x) dm$$

Massa in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\iint_E \delta(x, y) dx dy$$

Massa in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\iiint_E \delta(x, y, z) dx dy dz$$

Centro di massa  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T$

$$\hat{x} = \frac{1}{M} \iiint_E x * \delta(x, y, z) dz dy dz$$

$$\hat{y} = \frac{1}{M} \iiint_E y * \delta(x, y, z) dz dy dz$$

$$\hat{z} = \frac{1}{M} \iiint_E z * \delta(x, y, z) dz dy dz$$

Se  $\delta$  è costante si può supporre  $\delta = 1$ .

### MOMENTO DI INERZIA DI UN SOLIDO E RISPETTO AD UN INSIEME C

$$I_C = \iiint_E d^2((x, y, z)^T, C) * \delta(x, y, z) dx dy dz$$

Asse z:

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) * \delta(x, y, z) dx dy dz$$

Piano xy:

$$I_{xy} = \iiint_E z^2 * \delta(x, y, z) dx dy dz$$

### COORDINATE SFERICHE

$$\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$\phi: ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$$

$$\rho > 0, \quad \varphi \neq 0, \varphi \neq \pi, \quad \theta \neq 0, \theta \neq 2\pi$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J\phi = \dots = \rho^2 \sin \varphi$$

In generale se studio un problema in coordinate sferiche ho che

$$\begin{aligned} & \iiint_{E_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{E_{\rho \varphi \theta}} [f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \\ & \quad * \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta] \end{aligned}$$

Problema:

Si calcoli il volume del solido ottenuto come intersezione del cono

$$x^2 + y^2 \leq z^2$$

E della sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, \quad a \geq 0$$

$$r = \sqrt{\frac{4a^2}{2}} = |a| = a$$

$$\text{volume cono inferiore} = \frac{1}{3}\pi a^3$$

$$\text{volume semi sfera} = \frac{2}{3}\pi a^3$$

$$\text{Area totale} = \pi a^3$$

Utilizziamo le coordinate sferiche:

$$\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \rho \sin \varphi \sin \theta \\ \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta =$$

$$= \rho^2 \sin^2 \varphi \leq \rho^2 \cos^2 \varphi$$

$$\Rightarrow \sin^2 \varphi \leq \cos^2 \varphi$$

$$\Rightarrow \tan^2 \varphi \leq 1$$

$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] (z \geq 0)$$

$$\Rightarrow \tan^2 \varphi \leq 1 \Leftrightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi \leq \\ \leq 2a\rho \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \rho \leq 2a \cos \varphi$$

$\Rightarrow 0 \leq \rho \leq \text{funzione di } \varphi$

$$D = \left\{ (\rho, \varphi, \theta)^T : \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \theta \in [0, 2\pi], \begin{array}{l} \\ 0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi \end{array} \right\}$$

$$\iiint_E 1 dm =$$

$$= \iiint_D \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \iint_{[0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 2\pi]} \left( \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho \right) d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \sin \varphi * \frac{1}{3} 8a^3 \cos^3 \varphi d\theta \right) d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3} a^3 * 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi * \cos^3 \varphi d\theta = \pi a^3$$

## COORDINATE ELISSOIDALI

L'equazione dell'elissoide è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Si può scrivere come

$$x = a\rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = b\rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = c\rho \cos \theta$$

$$J\phi(\rho, \varphi, \theta) =$$

$$= \begin{pmatrix} a \sin \varphi \cos \theta & a\rho \cos \varphi \cos \theta & -a\rho \sin \varphi \sin \theta \\ b \sin \varphi \sin \theta & b\rho \cos \varphi \sin \theta & b\rho \sin \varphi \cos \theta \\ c \cos \varphi & -c\rho \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(J\phi) = abc \rho^2 \sin \varphi$$

Se si vuole calcolare il volume dell'elissoide di semiassi  $a, b, c$

$$\iiint_E dm =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} abc \rho^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\theta \right) d\rho =$$

$$= abc * \frac{1}{3} * 2\pi * [-\cos \varphi]_0^\pi = \frac{4}{3}\pi * abc$$

Volume del toro:

è una ciambella, ottenuto ruotando un disco attorno a un asse. Integro per sezioni rispetto all'asse  $z$ .

$S_z$  è una corona circolare.

$$r_{int} = R - \sqrt{r^2 - z^2}$$

$$r_{est} = R + \sqrt{r^2 - z^2}$$

Facendo ruotare il disco attorno a  $z$  ottengo la corona circolare di area

$$Area = \pi(r_{est}^2 - r_{int}^2)$$

$$Area S_z = \pi \left[ \left( R + \sqrt{r^2 - z^2} \right)^2 - \left( R - \sqrt{r^2 - z^2} \right)^2 \right] =$$

$$= \pi \left[ R^2 + (r^2 - z^2) + 2R\sqrt{r^2 - z^2} - R^2 - (r^2 - z^2) + 2R\sqrt{r^2 - z^2} \right] =$$

$$= 4\pi R\sqrt{r^2 - z^2}$$

$$Vol = \iiint_E dm =$$

$$= \int_{-r}^r \left( \iint_{S_z} dx dy \right) dy =$$

$$= \int_{-r}^r 4\pi R\sqrt{r^2 - z^2} dz =$$

$$= 8\pi r R \int_0^r \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2} dz$$

$$u = \frac{z}{r}, du = \frac{1}{r} dz$$

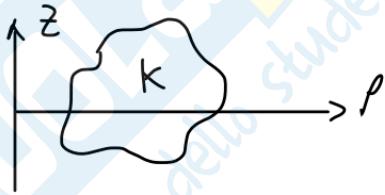
$$= 8\pi r^2 R \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du = \frac{1}{4} \text{ di area di disco} = \frac{\pi}{4}$$

$$= 2\pi^2 r^2 R$$

Il toro è un esempio di solido di rotazione

## SOLIDI DI ROTAZIONE (dim Pappo-Guldino)

Sia  $K$  una figura del piano  $\rho z$  con  $\rho \geq 0$ .



Il solido ottenuto ruotando  $K$  intorno all'asse  $z$  si può rappresentare come segue:  $\rho$  in 3D diventa la distanza dall'asse  $z$ , quindi ruotando il solido di un angolo  $\theta = 2\pi$  si ha

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

$$(\rho, z)^T \in K$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

Calcoliamo il volume del solido

$$S = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = \rho \cos \theta, \begin{array}{l} y = \rho \sin \theta, (\rho, z)^T \in K \end{array} \right\}$$

Considero il cambio di variabili

$$\phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)^T$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(J\phi) = \rho$$

$$\Rightarrow Vol S = \iiint_S dxdydz =$$

$$= \iiint_{\{(\rho, \theta, z)^T : (\rho, z)^T \in K, \theta \in [0, 2\pi]\}} \rho d\rho d\theta dz$$

È un dominio normale rispetto al piano  $\rho z$ , diviso dalle funzioni  $\theta = 0, \theta = 2\pi$ . Posso quindi scrivere l'integrale come

$$\iint_K \left( \int_0^{2\pi} \rho d\theta \right) d\rho dz =$$

$$= 2\pi \iint_K \rho d\rho dz =$$

$$= 2\pi * Area(K) * \hat{x}$$

Dove  $\hat{x}$  è l'ascissa del baricentro.

## TEOREMA DI PAPPO-GULDINO PER I VOLUMI

Sia  $K$  un insieme misurabile nel semipiano  $xz$ ,  $x \geq 0$ ,  $S$  il solido di rotazione ottenuto ruotando  $K$  attorno all'asse  $z$  di un angolo  $\alpha \in ]0, 2\pi]$ .

Sia  $A$  l'area di  $K$ ,  $\hat{x}$  l'ascissa del baricentro di  $K$ .

Allora il volume di  $S$  è dato dalla formula

$$Vol(S) = \alpha * A * \hat{x}$$

Nel caso del toro, si ha che  $R$  è l'ascissa del baricentro, e quindi

$$Vol(toro) = 2\pi * \pi r^2 * R = 2\pi^2 r^2 R$$

Per il cilindro, l'ascissa del rettangolo da ruotare è  $\frac{r}{2}$ , l'area  $r * h$ , quindi il volume del cilindro è

$$Vol(cilindro) = 2\pi * rh * \frac{r}{2} = \pi r^2 h$$

Nel caso del cono, ruoto un triangolo di area  $\frac{1}{2}rh$  e di ascissa  $\hat{x} = \frac{1}{3}r$ .

$$Vol(cono) = 2\pi * \frac{1}{2}rh * \hat{x} = \frac{1}{3}r^2 h$$

Se non conosco l'ascissa, posso risolvere sapendo qual è il volume del cono.

### ESEMPIO:

Vogliamo calcolare il baricentro di una lamina omogenea a forma di quarto di corona circolare. Posso utilizzare il teorema di Pappo-Guldino sapendo che ruotando la lamina attorno a  $z$  ottengo due semisfere.

Il volume del solido è

$$Vol = 2\pi * Area * \hat{x}$$

$$Vol = \frac{\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)}{2} = \\ = \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

L'area della lamina è un quarto dell'area della differenza di due circonferenze

$$Area = \frac{1}{4}\pi(R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3) = 2\pi * \frac{1}{4}\pi(R^2 - r^2) * \hat{x}$$

Posso ora ricavare  $\hat{x}$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{4}{3\pi} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Per motivi di simmetria si ha che

$$\hat{y} = \hat{x}$$

### INTEGRALI GENERALIZZATI

DEF:

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Una successione di insiemi misurabili (limitati in particolare)  $(A_n)_n$  si dice **una successione invadente di  $E$  adatta ad  $f$**  se

- 1)  $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq E$ ,  $\forall n$
- 2)  $f|_{A_n}$  è integrabile
- 3) Per ogni misurabile  $M \subseteq E$  si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m(M \setminus A_n) = 0$$

L'idea è quella di definire

$$\int_E f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f dm$$

Ma NON si può perché l'integrale può dipendere dalla successione scelta.

### TEOREMA

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in E$ .

Siano  $(A_n)_n$  e  $(B_n)_n$  successioni invadenti di  $E$  adatte ad  $f$ .

[ si osservi che essendo  $f \geq 0$  e  $A_n \subseteq A_{n+1}$  si ha che la successione  $(\int_{A_n} f dm)_n$  è crescente, quindi esiste sempre  $\lim_{n \rightarrow +\infty}$  ]

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_n} f dm$$

DEF:

Se  $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in E$ , diremo che  $f$  è integrabile **in senso generalizzato** su  $E$  se, presa comunque una successione invadente adatta a  $f \Rightarrow$  il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f dm$  esiste finito. Questo limite si indica con

$$\int_E f dm$$

OSS:

Se  $f(x) \leq 0$  si considera  $-f(x)$  e si può definire chiaramente

$$\int_E f dm = - \int_E -f dm$$

ESEMPIO:

$$f(x) = \arctan x$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \arctan x dx &= \int_{]-\infty, 0]} \arctan x dx \\ &\quad + \int_{]0, +\infty[} \arctan x dx \end{aligned}$$

Ma questo non ha significato perché i due integrali non esistono.

ESEMPIO:

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx, \quad E = [0, +\infty[$$

$$A_n = [0, 2n\pi], \quad B_n = [0, (2n+1)\pi]$$

$$\int_{A_n} \sin x dx = 0 \quad \forall n$$

$$\int_{B_n} \sin x dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} \sin x dx = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_n} \sin x dx = 2$$

ESEMPIO:

$$E = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$A_n = [-n, n], \quad B_n = [-n, 2n]$$

$$\int_{A_n} \frac{2x}{1+x^2} dx = [\log(1+x^2)]_{-n}^n =$$

$$= \log(1+n^2) - \log(1+n^2) = 0$$

$$\int_{B_n} \frac{2x}{1+x^2} dx = [\log(1+x^2)]_{-n}^{2n} =$$

$$= \log(1-4n^2) - \log(1-n^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \log \left( \frac{1 - 4n^2}{1 - n^2} \right) \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} \frac{2x}{1+x^2} dx &= 0 \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_n} \frac{2x}{1+x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - 4n^2}{1 - n^2} \right) = \\
&= \log 4 \neq 0
\end{aligned}$$

ESEMPIO in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\iint_{B((0,0)^T, 1) \setminus \{(0,0)^T\}} \log \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dx dy$$

È una circonferenza "bucata" al centro. Prendo le successioni come corone circolari.

$$\begin{aligned}
A_n &= B(0,1) - B\left(0, \frac{1}{n}\right) \\
m(E \setminus A_n) &\rightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\iint_{A_n} \log \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dx dy$$

In polari

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$$

$$\frac{1}{n} < \rho < 1, \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{1}{n}}^1 -\log(\rho^2) * \rho d\rho \right) d\theta = \\
&= -2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 2 \log(\rho) * \rho d\rho = \\
&= -4\pi * \left( \left[ \frac{\rho^2}{2} * \log \rho \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\rho^2}{2} * \frac{1}{\rho} d\rho \right) = \\
&= -4\pi * \left( -\frac{1}{2} * \frac{1}{n^2} * \log \frac{1}{n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} * \frac{1}{n^4} \right) \\
&\quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{A_n} f(x, y) dx dy = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -4\pi * \left( -\frac{1}{2n^2} \log \frac{1}{n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^4} \right) \right) = \\
&= -4\pi \left( -\frac{1}{4} \right) = \pi
\end{aligned}$$

ESEMPIO:

$$f(x) = 1$$

$$\int_E dm$$

Si parla di misura generalizzata (oppure area/volume).

Consideriamo un imbianchino che vuole dipingere una parete infinita sul piano  $yz$ .

Si posiziona in  $y = 1$  e vuole dipingere la parte di parete sotto la funzione  $z = \frac{1}{y}$ .

L'area generalizzata dell'insieme  $E$  è

$$\iint_E 1 dx dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} dy = +\infty$$

L'imbianchino vuole usare meno di 4 litri di pittura, quindi prende l'insieme  $E$  e lo ruota attorno all'asse  $y$ . Questo è un solido di rotazione illimitato e ne vuole calcolare il volume.

$$\iiint_S 1 dm$$

Per prendere una successione invadente è sufficiente prendere un pezzetto del volume del solido da  $y = 1$  a  $y = n$ .

$$A_n = \{(x, y, z)^T \in S : y \in [1, n]\}$$

$$\iiint_S 1 dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iiint_{A_n} 1 dm$$

Integro per sezioni rispetto all'asse  $y \in [1, n]$

$$S_y = \left\{ (x, z)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq \frac{1}{y^2} \right\}$$

$$Area(S_y) = \pi * \frac{1}{y^2}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{A_n} 1 dm &= \int_1^n \left( \iint_{S_y} 1 dx dz \right) dy = \\
&= \int_1^n \pi \frac{1}{y^2} dy = \pi \left[ -\frac{1}{y} \right]_1^n = \\
&= \pi \left( 1 - \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = \pi$$

Questo può sembrare un paradosso però non lo è. L'imbianchino vorrebbe immergere la parete nell'imbuto creato e ottenere il risultato usando solo  $\pi$  litri di pittura. Questo però non è possibile perché si tratta di applicare uno strato di pittura su una parete, ma questo strato non è infinitesimo, ha comunque un volume. Per dipingere dovrebbe usare uno strato infinitesimo che è impossibile.

Quindi questo sembra un paradosso perché sto confondendo una misura di superficie con una misura di volume.

#### ESEMPIO IMPORTANTE:

Integrale di **Gauss**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

La funzione è integrabile perché ha un ordine di infinitesimo sopraeale a  $\pm\infty$ . Per risolvere il problema passiamo a un problema più complicato, ossia calcoleremo sul piano:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

La successione invadente è data da delle palle concentriche di centro 0 e raggio  $n$ .

$$A_n = B(0, n)$$

Uso le coordinate polari

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$\theta \in [0, 2\pi], \quad \rho \in [0, n]$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^n e^{-\rho^2} * \rho d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} [e^{-\rho^2}]_0^n d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} (e^{-n^2} - 1) d\theta =$$

$$= 2\pi * \frac{1}{2} (1 - e^{-n^2}) = \pi(1 - e^{-n^2})$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi$$

Prendo ora  $B_n$  come dei quadrati

$$B_n = [-n, n] \times [-n, n]$$

$$\underbrace{\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy}_{\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{B_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

$$\iint_{B_n} e^{-x^2-y^2} dxdy =$$

$$= \int_{-n}^n \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} * e^{-y^2} dy \right) dx =$$

$$= \int_{-n}^n e^{-x^2} \underbrace{\left( \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right)}_{\text{non dipende da } x} dx =$$

$$= \underbrace{\left( \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right)}_{\text{il nome della variabile non conta}} \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right) =$$

$$= \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2$$

Sappiamo che

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\int_{-n}^n e^{-x^2} dx}_{\text{so che esiste finito}} \right)^2 =$$

$$= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^2$$

Posso quindi che concludere che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

#### ESEMPI IMPORTANTI:

Studiamo le funzioni del tipo

$$\frac{1}{|x|^{\alpha}}$$

Caso  $N = 2$

$$\iint_{B((0,0)^T, 1) \setminus \{(0,0)^T\}} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\alpha}} dxdy$$

$$B_n = B(0, 1) - B\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{B_n} (x^2 + y^2)^{-\frac{\alpha}{2}} dx dy$$

Uso le coordinate polari

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{1}{n}}^1 (\rho^2)^{-\frac{\alpha}{2}} * \rho d\rho \right) d\theta = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi \left[ \frac{1}{2-\alpha} \rho^{2-\alpha} \right]_{\frac{1}{n}}^1 \stackrel{\alpha \neq 2}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi \left( \frac{1}{2-\alpha} - \frac{1}{n^{2-\alpha}(2-\alpha)} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{2-\alpha} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}} \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha}, & \text{se } \alpha < 2 \\ +\infty, & \text{se } \alpha > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Se  $\alpha = 2$  ottengo un logaritmo, e quindi la divergenza.

### TEOREMA Criterio dell'ordine di infinito per l'integrale generalizzato

Sia  $f: B(0, R) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\text{Ord } f \leq \alpha$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha < N$$

$f$  integrabile su ogni corona circolare

$$B(0, R) \setminus B(0, \varepsilon)$$

Allora  $f$  è integrabile in senso generalizzato su  $B(0, R)$ .

DIM:

Per confronto con  $\frac{1}{|x|^\alpha}$ . ■

Caso  $N = 3$

$$\begin{aligned} & \iint_B \frac{1}{|x|^\alpha} dm = \\ &= \iint_B \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^\alpha} dx dy dz \end{aligned}$$

In coordinate sferiche:

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{n}}^1 \left( \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^\alpha} * \rho^2 \sin \varphi d\theta \right) d\varphi \right) d\rho = \\ &= 2\pi * \frac{1}{2} * \left[ \frac{1}{3-\alpha} * \rho^{3-\alpha} \right]_{\frac{1}{n}}^{\pi \sin \varphi} \end{aligned}$$

Il limite  $\rightarrow +\infty$  è finito se  $\alpha < 3$ , infinito se  $\alpha > 3$ .

CASO  $x \rightarrow +\infty$

Studiamo le funzioni del tipo

$$\frac{1}{||x||^\alpha}$$

Caso  $N = 2$ :

$$B_n = B(0, n) \setminus B(0, 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{B_n} (x^2 + y^2)^{-\frac{\alpha}{2}} dx dy$$

Uso le coordinate polari

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \left( \int_1^n (\rho^2)^{-\frac{\alpha}{2}} * \rho d\rho \right) d\theta = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi \left[ \frac{1}{2-\alpha} \rho^{2-\alpha} \right]_1^n \stackrel{\alpha \neq 2}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi \left( \frac{1}{2-\alpha} n^{2-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{2-\alpha} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2-\alpha} - 1 \right) = \\ &= \begin{cases} -\frac{2\pi}{2-\alpha}, & \text{se } \alpha > 2 \\ +\infty, & \text{se } \alpha < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

### TEOREMA Criterio dell'ordine di infinitesimo per l'integrale generalizzato

Sia  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$

$$\lim_{||x|| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Allora se

$$\text{ord}_{+\infty} f \geq \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > N$$

la  $f$  è integrabile in senso generalizzato su  $\mathbb{R}^N$ .

DIM:

Per confronto con la funzione

$$g(x) = \frac{1}{||x||^\alpha} \blacksquare$$

Caso  $N = 3$

Uso le coordinate polari

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \iiint_{B(0,n) \setminus B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^\alpha} dm &= \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \left( \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^\alpha} * \rho^2 \sin \varphi d\theta \right) d\varphi \right) d\rho &= \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi * 2 * \frac{1}{3-\alpha} [\rho^{3-\alpha}]_1^n &= \\ = \frac{4\pi}{3-\alpha} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3-\alpha} - 1 \right) &= \\ = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3-\alpha}, & \text{se } \alpha > 3 \\ +\infty, & \text{se } \alpha < 3 \end{cases} & \end{aligned}$$

Caso  $f$  generale:

Considero le funzioni

$$f^+(x), f^-(x)$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

DEF:

Diremo che  $f$  è integrabile in senso generalizzato su  $E$  se sono integrabili in senso generalizzato  $f^+$  e  $f^-$ . In questo caso si porrà

$$\int_E f dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm$$

### CURVE IN $\mathbb{R}^N$

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo, una funzione  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua è una **curva**.  $\gamma(I) = \Gamma$  si dice **sostegno della curva**.

- $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  si dice **chiusa** se

$$\gamma(b) = \gamma(a)$$

ES: circonferenza

- $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$  si dice **semplice** se

- 1)  $\gamma$  non chiusa: se  $\gamma$  è iniettiva ( $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ )
- 2)  $\gamma$  è chiusa:  $I = [a, b]$ ,  $\gamma$  iniettiva su  $[a, b]$  e su  $[a, b]$

In altre parole è una curva senza intersezioni.

### TEOREMA DELLA CURVA CHIUSA DI JORDAN

Sia  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa.

Allora  $\Gamma = \gamma(I)$  separa il piano in due regioni  $\Gamma_{int}$  e  $\Gamma_{ext}$ , dove  $\Gamma_{int}$  è limitata,  $\Gamma_{ext}$  è illimitata e si ha che

$$\mathbb{R}^2 = \Gamma_{int} \cup \Gamma \cup \Gamma_{ext}$$

DEF:

Una curva si dice **regolare** se è derivabile e  $\gamma'(t) \neq 0 \forall t$ . In questo modo ogni punto della curva ha un vettore tangente che è  $\gamma'(t)$

ESEMPI:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)^T$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_3(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)^T$$

$$t \in [0, 1]$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$$

Il sostegno delle curve è sempre un cerchio. Però  $\gamma_2$  non è una curva semplice, è un cerchio percorso due volte, è essenzialmente diversa dalle altre.

$\gamma_1$  e  $\gamma_3$  sono **equivalenti**, cioè è un cambio di variabile.

DEF:

Siano  $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ .  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si dicono **equivalenti** se esiste un diffeomorfismo

$h \in C^1(I_2, I_1)$  invertibile e con  $h^{-1} \in C^1(I_1, I_2)$  tale che

$$\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$$

ES:

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_3(t) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u)^T$$

$$u \in [0, 1]$$

$$h: [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$$

$$h(u) = 2\pi u$$

$$h^{-1}(t) = \frac{t}{2\pi}$$

È un diffeomorfismo.

$$(\gamma_1 \circ h): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_1(2\pi u) = \gamma_3(u)$$

$h$  è strettamente monotona,  $h'(t) > 0 \quad \forall t$   
oppure  $h'(t) < 0 \quad \forall t$ .

DEF:

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve equivalenti. Si dice che sono **equiverse** o che hanno lo stesso verso/orientazione se la funzione  $h$  è tale che  $h'(t) > 0 \quad \forall t$  altrimenti si dice che sono **controverse** o hanno verso opposto.

ESEMPI:

**Astroide:**

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)^T$$

$$\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)^T$$

$\gamma$  è chiusa e semplice. NON è regolare in quanto

$$\gamma'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)^T$$

Si ha che  $\gamma'(t) = (0, 0)^T$  per  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$

Si dice che è regolare a tratti, ossia che si può decomporre la curva in un numero finito di archi, e su ogni arco la curva è regolare.

TEOREMA

Due curve regolari semplici e non chiuse che hanno lo stesso sostegno sono equivalenti.

ESEMPIO:

Si scriva l'equazione cartesiana della retta tangente la curva regolare semplice

$$\gamma(t) = (\cos t * \sin t, t)^T$$

$$\text{Nel punto } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^T, t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\gamma'(t) = (-\sin^2 t + \cos^2 t, 1)^T$$

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 1)^T$$

Retta tangente

$$r(s) = \gamma(t_o) + s\gamma'(t_o), s \in \mathbb{R}$$

$$r(s) = \left(\frac{\pi}{2}\right) + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\pi}{2} + s\right)$$

Per ottenere l'equazione cartesiana scrivo

$$x = -s, y = \frac{\pi}{2} + s$$

$$\Rightarrow s = -x$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - x$$

### LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Possiamo usare l'integrale di Riemann per definire la lunghezza di una curva in  $\mathbb{R}^2$ ?

NO! Derve introdurre una nuova nozione di integrale.

Consideriamo un segmento in  $\mathbb{R}^N$ , che è dato da due punti  $P$  e  $Q$ . La curva che lo definisce è

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\gamma(t) = P + t(Q - P)$$

$$l(\gamma) = ||Q - P||$$

Se  $\gamma$  è una poligonale, cioè un'unione connessa di segmenti

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^n ||P_k - P_{k-1}||$$

Se  $\gamma$  è una curva "liscia", possiamo approssimare con poligoni

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Sia  $\delta \in \Delta([a, b])$  una decomposizione.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$\gamma(x_i)$  sono punti del sostegno della curva.

Consideriamo la poligonale individuata da questi punti  $\gamma(x_i)$ :  $\pi(\delta)$

$$l(\pi(\delta)) = \sum_{k=1}^n |\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})|$$

Sia  $\delta'$  più fine di  $\delta$ , allora  $l(\pi(\delta')) \geq l(\pi(\delta))$

Definiamo **lunghezza** della curva  $\gamma$  il

$$\sup\{l(\pi(\delta)) : \delta \in \Delta(I)\} = l(\gamma)$$

Se questo sup è finito la curva si dice **rettificabile**

ESEMPIO:

esempio di una curva limitata ma non rettificabile

$\gamma$  è continua, limitata, ma non rettificabile,  
 $l(\gamma) = +\infty$ .

Considero la poligonale  $\pi$ ,

$$l(\pi) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Che è la ridotta della serie armonica

$$\sup l(\pi) = +\infty$$

### CURVE RETTIFICABILI

Due osservazioni sugli integrali vettoriali:

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_M)^T$ , se ciascuna delle componenti è integrabile su  $E$

$$\int_E f \, dx = \left( \int_E f_1 \, dx, \dots, \int_E f_M \, dx \right)^T$$

In particolare se  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una curva

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$$

$$\int_I \gamma(t) dt = \left( \int_I x(t) dt, \int_I y(t) dt, \int_I z(t) dt \right)^T$$

### OSS 1: Formula di Torricelli-Barrow

Siano  $t_1, t_2 \in I$  fissati,  $\gamma \in C^1$ , allora

$$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \gamma'(\xi) d\xi$$

Se  $N = 2$ ,  $\gamma = (x, y)^T$

$$(x(t_2) - x(t_1), y(t_2) - y(t_1))^T = \\ = \left( \int_{t_1}^{t_2} x'(\xi) d\xi, \int_{t_1}^{t_2} y'(\xi) d\xi \right)^T$$

### OSS 2: Diseguaglianza sulla norma dell'integrale

Sia  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$  integrabile in ogni componente, allora

$$\left\| \int_I \gamma \, dt \right\| \leq \int_I \|\gamma\| dt$$

DIM:

Fissiamo un qualunque vettore  $v \in \mathbb{R}^N$

$$\langle \int_I \gamma \, dt, v \rangle = \int_I \langle \gamma(t), v \rangle dt$$

Per Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t), v \rangle &\leq \|\gamma(t)\| * \|v\| \\ \Rightarrow \int_I \langle \gamma(t), v \rangle dt &\leq \int_I \|\gamma(t)\| * \|v\| dt = \\ &= \|v\| \int_I \|\gamma(t)\| dt \end{aligned}$$

Prendo  $v = \int_I \gamma \, dt \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle \int_I \gamma \, dt, v \rangle &= \left\| \int_I \gamma \, dt \right\|^2 \leq \\ &\leq \left\| \int_I \gamma \, dt \right\| * \int_I \|\gamma(t)\| dt \end{aligned}$$

Divido per  $\left\| \int_I \gamma \, dt \right\| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\| \int_I \gamma \, dt \right\| \leq \int_I \|\gamma(t)\| dt \quad \blacksquare$$

### TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ DELLE CURVE REGOLARI

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  una curva di classe  $C^1$ .

Allora  $\gamma$  è rettificabile e

$$l(\gamma) \leq \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

DIM:

Sia  $\delta \in \Delta(I)$ ,  $I = [a, b]$

$$l(\pi(\delta)) = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| =$$

Applico Torricelli-Barrow

$$= \sum_{k=1}^n \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(\xi) d\xi \right\| \leq$$

Per l'Osservazione 2 successiva

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} ||\gamma'(\xi)|| d\xi \\ &\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n}}_{\text{somma telescopica}} = \int_{t_0=a}^{t_n=b} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} ||\gamma'(\xi)|| d\xi = \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt = K$$

$$\forall \delta \quad l(\pi(\delta)) \leq K$$

$$l(\gamma) = \sup_{\delta \in \Delta(I)} l(\pi(\delta)) \leq K \quad \blacksquare$$

TEOREMA

Si ha che

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt$$

ESEMPIO:

lunghezza della circonferenza

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$$

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t)^T$$

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} ||\gamma'(t)|| dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} ||\gamma'(t)|| dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt =$$

ESEMPIO:

lunghezza della cicloide

$$\gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))^T, t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = (R(1 - \cos t), R \sin t)^T$$

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^{2\pi} ||\gamma'(t)|| dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t} dt = \\ &= R \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t - 2 \cos t + 1 + \sin^2 t} dt = \\ &= R \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\ &= \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \end{aligned}$$

È utile usare formule di trigonometria in quanto bisogna spesso calcolare delle radici di seni e coseni

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 1 - \cos(2x) = 2 \sin^2 x$$

$$t = 2x$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2 \sin^2(\frac{t}{2})}} dt = \\ &= 2R \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \end{aligned}$$

$$\frac{t}{2} = u$$

$$dt = 2 du$$

$$\begin{aligned} 4R \int_0^\pi |\sin(u)| du &= 4R \int_0^\pi \sin(u) du = \\ &= 8R \end{aligned}$$

OSS:

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve  $C^1$  equivalenti. Allora

$$l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$$

Infatti se  $\gamma_2(t) = (\gamma_1 \circ h)(t)$  dove

$$h: [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$$

$h \in C^1$  diffeomorfismo

$$\begin{aligned} l(\gamma_2) &= \int_{[a_2, b_2]} \|\gamma'_2(t)\| dt = \\ &= \int_{[a_2, b_2]} \left\| \gamma'_1(h(t)) * h'(t) \right\| dt = \\ &= \int_{[a_2, b_2]} \left\| \gamma'_1(h(t)) \right\| * |h'(t)| dt = \end{aligned}$$

Pongo  $h(t) = u$

$$= \int_{[a_1, b_1]} \|\gamma'_1(u)\| du = l(\gamma_1)$$

DEF:

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\gamma \in C^1$  regolare. Sia  $L = l(\gamma)$ ;

Poniamo  $s(t)$  = lunghezza dell'arco di curva tra  $\gamma(a)$  e  $\gamma(t)$

$$s: [a, b] \rightarrow [0, L]$$

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$$

Che rappresenta la lunghezza dell'arco di curva tra  $\gamma(a)$  e  $\gamma(t)$ .

Si osservi che  $s(t)$  è una funzione ( $h(t)$ ) che è "buona" come trasformazione di coordinate.

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

Quindi oltre a essere derivabile, si ha che dato che  $\|\gamma'(t)\|$  è  $C^1$ , allora  $s'$  è continua

$$\Rightarrow s \in C^1([a, b], [0, L])$$

$s(t)$  è invertibile perché è strettamente crescente.

$s'(t) > 0 \forall t$  se  $\gamma$  è regolare, e quindi anche l'inversa  $s^{-1}$  è  $C^1$ .

La funzione  $s$  si dice **ascissa curvilinea** di  $\gamma$  e la curva si può parametrizzare utilizzando  $s$ ; diremo allora che la curva è parametrizzata in lunghezza d'arco.

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$s: [a, b] \rightarrow [0, L]$$

Dove  $L = l(\gamma)$

Sia  $t: [0, L] \rightarrow [a, b]$  l'inversa di  $s(t)$ , definiamo quindi

$$\varphi(s) = \gamma(t(s))$$

Osserviamo che  $\varphi'(s) = \gamma'(t(s)) * t'(s)$

Per il Teorema sulla derivata della funzione inversa si ha che

$$t'(t) = \frac{1}{s'(t)}$$

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

$$\Rightarrow \varphi'(s) = \gamma'(t(s)) * \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$$

Quindi  $\|\varphi'(s)\| = 1$ .

Se la curva è parametrizzata in lunghezza d'arco abbiamo che

$$l(\varphi) = L$$

$$l(\varphi) = \int_0^L \|\varphi'(s)\| ds = \int_0^L ds = L$$

ESEMPIO:

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Parametrizziamo in lunghezza d'arco

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$$

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t)^T$$

$$\|\gamma'(t)\| = R$$

$$\Rightarrow s(t) = Rt$$

$$t(s) = \frac{s}{R}$$

$$\varphi(s) = \gamma\left(\frac{s}{R}\right) = \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)^T$$

$$\varphi: [0, 2\pi R] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

## INTEGRALI DI LINEA DI UN CAMPO SCALARE

Supponiamo di avere una curva regolare  $\gamma$

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$$

Sia  $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  un campo scalare,

$$\Gamma \subseteq E \quad (\Gamma = \gamma(I))$$

Diremo **integrale di linea** di  $f$  sulla curva  $\gamma$ , se esiste, il numero

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_I f(\gamma(t)) * |\gamma'(t)| \, dt$$

(se  $\gamma$  è regolare a tratti si può estendere la definizione per additività)

OSS:

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve equivalenti. Allora

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_{\gamma_2} f \, ds$$

Infatti, sia  $\gamma_2(t) = (\gamma_1 \circ h)(t)$ , con  $h \in C^1(I_2, I_1)$  diffeomorfismo

$$\gamma_2: \underbrace{[a_2, b_2]}_{I_2} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\gamma_1: \underbrace{[a_1, b_1]}_{I_1} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\int_{\gamma_2} f \, ds = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t)) * |\gamma_2'(t)| \, dt =$$

$$= \int_{[a_2, b_2]} f(\gamma_1(h(t))) * |\gamma_1'(h(t))| * |h'(t)| \, dt =$$

$$u = h(t), \quad du = h'(t) \, dt$$

$$= \int_{[a_1, b_1]} f(\gamma_1(u)) * |\gamma_1'(u)| \, du =$$

$$= \int_{\gamma_1} f \, ds$$

Si osservi in particolare che, se  $\varphi(s)$  è la parametrizzazione di  $\gamma$  in lunghezza d'arco, si ha che

$$\int_{\varphi} f \, ds = \int_0^{l(\gamma)} f(\varphi(s)) * \underbrace{|\varphi'(s)|}_1 \, ds =$$

$$= \int_0^{l(\gamma)} f(\varphi(s)) \, ds$$

In particolare se  $f \equiv 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\varphi} 1 \, ds = l(\gamma)$$

Massa lineare:

Un filo se è omogeneo avrà la massa proporzionale alla sua misura; se non è omogeneo posso avere una densità di massa

$$f(x, y, z), \quad \text{con } (x, y, z)^T = \gamma(t)$$

$$\text{Massa del filo: } M = \int_{\gamma} f \, ds$$

Baricentro:

$$\hat{x} = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x * f \, ds$$

$$\hat{y} = \frac{1}{M} \int_{\gamma} y * f \, ds$$

$$\hat{z} = \frac{1}{M} \int_{\gamma} z * f \, ds$$

Momenti di inerzia:

$$I_k = \int_{\gamma} d^2(s, K) * f \, ds$$

$d(*, *)$  è la distanza,  $s$  è il punto sulla curva.

ESEMPIO:

Baricentro dell'anello omogeneo di raggio  $R$ .

$\gamma$  definita come  $\gamma_1 + \gamma_2$  regolare a tratti, dove

$$\gamma_1(t) = (R \cos t, R \sin t)^T, t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0)^T, t \in [-R, R]$$

$$M = l(\gamma_1) + l(\gamma_2) =$$

$$= \pi R + 2R = R(\pi + 2)$$

$$\hat{x} = \frac{1}{M} \left( \int_0^{\pi} R^2 \cos t \, dt + \int_{-R}^R t * 0 \, dt \right) = 0$$

$$\hat{y} = \frac{1}{M} \left( \int_0^{\pi} R^2 \sin t + \int_{-R}^R 0 \, dt \right) =$$

$$= \frac{R^2}{M} \int_0^\pi \sin t = \frac{2R^2}{R(\pi+2)} = \frac{2R}{\pi+2}$$

### ESEMPIO:

Momento di interzia rispetto all'asse  $z$  dell'elica circolare omogenea di passo  $\alpha$ , raggio  $R$  e altezza  $h$ .

$$\gamma(t) = (R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t), \alpha t)^T$$

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t, \alpha)^T$$

$$t \in \left[0, \frac{h}{\alpha}\right]$$

$$I_z = \int_{\gamma} d^2(s, K) * f \, ds =$$

$$= \int_0^{\frac{h}{\alpha}} R^2 * |\gamma'(t)| \, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{h}{\alpha}} R^2 \sqrt{4\pi^2 R^2 + \alpha^2} \, dt =$$

$$= R^2 \sqrt{4\pi^2 R^2 + \alpha^2} * \frac{h}{\alpha}$$

### CASI PARTICOLARI

Sia  $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , il grafico di  $g$  è una curva che può essere parametrizzata come

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(x) = (x, g(x))^T$$

Allora se  $g$  è derivabile,  $\gamma$  è regolare

$$\gamma'(x) = (1, g'(x))^T$$

$$l(\gamma) = \int_I |\gamma'(x)| \, dx = \int_I \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx$$

Se  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Gamma_g \subset A$ ; allora

$$\int_{\Gamma_g} f \, ds = \int_I f(x, g(x)) * \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx$$

### ESEMPIO:

$$g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = e^x$$

La lunghezza del grafico di  $g$  è

$$\int_{\Gamma_g} ds = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} \, dx$$

$$u = \sqrt{1 + e^{2x}}$$

$$du = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1 + e^{2x}}} \, dx = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \, dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{u}{u^2 - 1} \, du$$

$$e^{2x} = u^2 - 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} \, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{u^2}{u^2 - 1} \, dx$$

$$\frac{u^2}{u^2 - 1} = \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1} = \frac{1}{(u+1)(u-1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right)$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} 1 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 1) + \left[ \log \frac{n-1}{n+1} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}$$

### CURVE UN FORMA POLARE

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$$

$$x(t) = \rho(t) \cos(\vartheta)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin(\vartheta)$$

Si può spesso supporre che  $\vartheta = t$

$$\Rightarrow x = \rho(t) \cos t$$

$$\Rightarrow y = \rho(t) \sin t$$

La funzione d'interesse è  $\rho(t)$ .

Per calcolare la lunghezza si considera

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

$$x' = \rho'(t) \cos t - \rho(t) \sin t$$

$$y' = \rho'(t) \sin t + \rho(t) \cos t$$

$$\Rightarrow ||\gamma'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} =$$

$$= \sqrt{(\rho'(t) \cos t - \rho(t) \sin t)^2 + (\rho'(t) \sin t + \rho(t) \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2}$$

Quindi l'integrale di linea si può scrivere come

$$\int_{\gamma} ds = \int_I \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2} dt$$

### ESEMPIO:

Spirale di archimede

$$\begin{aligned}\rho(\vartheta) &= a * \vartheta \\ \vartheta &\in [0, b]\end{aligned}$$

$$\rho'(\vartheta) = a$$

$$l(\gamma) = \int_0^b \sqrt{a^2 + a^2 \vartheta^2} d\vartheta = a \int_0^b \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta$$

$$\vartheta = \sinh u$$

$$d\vartheta = \cosh u$$

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \vartheta^2 = \cosh^2 u$$

$$\vartheta = 0 \rightarrow u = 0$$

$$\vartheta = b \rightarrow u = \operatorname{settsinh} b = b^*$$

$$a \int_0^b \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta = a \int_0^{b^*} \sqrt{\cosh^2 u} * \cosh u du$$

$$= a \int_0^{b^*} \cosh^2 u du =$$

$$[\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2u)]$$

$$= a \int_0^{b^*} \frac{1}{2}(1 + \cosh 2u) du =$$

$$= \frac{a}{b} * \left( b^* + \frac{1}{2} \sinh(2b^*) \right)$$

### ESEMPIO Cardioide:

$$\rho(\vartheta) = 1 + \cos(\vartheta)$$

$$\vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\rho'(\vartheta) = -\sin h$$

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho'(\vartheta)^2 + \rho(\vartheta)^2} d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \vartheta + \frac{(1 + \cos \vartheta)^2}{1 + 2 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta}} d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \vartheta} d\vartheta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \vartheta} d\vartheta$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x$$

$$\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \vartheta} d\vartheta =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cos^2 \left( \frac{\vartheta}{2} \right)} d\vartheta = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \right| d\vartheta$$

$$\frac{\vartheta}{2} = u, du = 2du$$

$$= 4 \int_0^{\pi} |\cos u| du = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 8$$

### ESEMPIO:

Lunghezza dell'astroide, non è regolare ma è regolare a tratti

$$\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))^T$$

$$l(\gamma) = 4l(\gamma_1)$$

$$\gamma_1: \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma'(t) = (-3 \sin t \cos^2 t, 3 \cos t \sin^2 t)^T$$

$$l(\gamma) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{9 \sin^2 t \cos^4 t + 9 \cos^2 t \sin^4 t}{\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)}} dt$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \underbrace{\sin t}_{\geq 0} \underbrace{\cos t}_{\geq 0} \right| dt =$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt =$$

$$= 6 \left( \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) - \sin^2(0) \right) = 6$$

### SUPERFICI in $\mathbb{R}^3$

Il dominio della superficie è  $K \subset \mathbb{R}^2$  regolare a tratti, cioè  $\partial K$  è una curva regolare a tratti.

$$K = A \cup \partial A$$

Prendiamo una funzione  $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma \in C^1$

$\sigma$  si dice **regolare** se

$$Ra(J\sigma(s,t)) = 2, \forall (s,t)^T \in K$$

Si ha in ogni punto il piano tangente è identificato con il vettore normale:

$$\begin{aligned} v(s,t) &= \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s,t) = \\ &= (a,b,c)^T \end{aligned}$$

Equazione del piano tangente parametrica

$$\begin{aligned} \pi(u,v) &= \sigma(s_0, t_0) + u \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s_0, t_0) + v \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s_0, t_0) \\ (u,v)^T &\in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Equazione del piano tangente cartesiana

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

DEF:

### AREA DI UNA SUPERFICIE

Abbiamo visto che l'area di un parallelogramma generato dai vettori  $v_1$  e  $v_2$  è

$$||v_1 \wedge v_2||$$

Possiamo generalizzare questo all'area di una superficie formata da parallelogrammi

$$Area = \iint_K ||v(s,t)|| ds dt$$

Dove  $v(s,t)$  è il vettore normale alla superficie nel punto.

### INTEGRALE DI SUPERFICIE DI UN CAMPO

#### SCALARE

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\iint_{\phi} f d\sigma = \iint_K f(\phi(s,t)) * ||v(s,t)|| ds dt$$

#### ESEMPI:

Area della superficie sferica:

$$\psi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R \sin \varphi \cos \vartheta \\ R \sin \varphi \sin \vartheta \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\varphi \in [0, \pi], \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$K = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$$

$$v(\varphi, \vartheta) = R^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} R \sin \varphi \cos \vartheta \\ R \sin \varphi \sin \vartheta \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$||v(\varphi, \vartheta)|| = R^2 \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} Area &= \iint_K ||v(\varphi, \vartheta)|| d\varphi d\vartheta = \\ &= \iint_K R^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta = \\ &= \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} R^2 \sin \varphi d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= 2\pi R^2 * 2 = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Anche in questo caso si ha: Massa superficiale, momento di inerzia, baricentro

#### ESEMPIO:

Baricentro della semisfera

$$(\hat{x}, \hat{y})^T = (0,0)^T$$

$$M = 2\pi R^2$$

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} R^2 \sin \varphi * R \cos \vartheta d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= \frac{2\pi R^3}{2\pi R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{R}{2} * [\sin^2 \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R}{2} \end{aligned}$$

### SUPERFICI PARTICOLARI

#### Grafici di funzioni:

Sia  $g: K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo scalare

$$\phi(x,y) = (x, y, g(x,y))^T$$

$$v(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

TIP: per il prodotto vettoriale calcolo il determinante lungo la prima colonna di

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 1 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & 1 \\ \mathbf{k} & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Dove  $i, j, k$  sono rispettivamente i versori degli assi  $x, y, z$ .

$$\Rightarrow v(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|v(x, y)\| = \sqrt{\underbrace{\frac{\partial g^2}{\partial x} + \frac{\partial g^2}{\partial y}}_{\|\nabla g\|^2} + 1}$$

$$Area = \iint_K \sqrt{1 + \|\nabla g(x, y)\|^2} dx dy$$

### ESEMPIO:

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g: B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}$$

Vogliamo calcolare il baricentro

$$(\hat{x}, \hat{y})^T = (0, 0)^T$$

$$\hat{z} = \frac{1}{M} \iint_{\phi} z d\sigma$$

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)^T$$

$$M = \iint_{B(0, R)} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy =$$

$$= \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= 2\pi \left[ \left( \frac{1 + 4\rho^2}{12} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R =$$

$$= \frac{1}{6}\pi \left( (1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

$$\hat{z} = \frac{1}{M} \iint_{\phi} z d\sigma =$$

$$= \frac{1}{M} \iint_{B(0, 1)} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy =$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= \frac{2\pi}{M} \int_0^R \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho$$

$$u = \sqrt{1 + 4\rho^2}$$

$$du = \frac{1}{2} \frac{8\rho}{\sqrt{1 + 4\rho^2}} d\rho$$

$$u^2 = 1 + 4\rho^2$$

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{u^2 - 1}$$

$$d\rho = \frac{u}{2\sqrt{u^2 - 1}} du$$

$$\rho = 0 \rightarrow u = 1$$

$$\rho = R \rightarrow u = \sqrt{1 + 4R^2} = R^*$$

$$\frac{2\pi}{M} \int_1^{R^*} \left( \frac{1}{2} \sqrt{u^2 - 1} \right)^3 u * \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du =$$

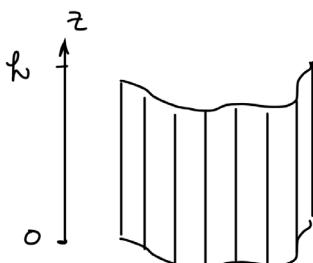
$$= \frac{\pi}{4M} \int_1^{R^*} \frac{1}{2} \underbrace{(u^2 - 1)u^2}_{u^4 - u^2} du =$$

$$= \frac{\pi}{8M} \left( \frac{R^* 5}{5} - \frac{1}{5} - \frac{R^* 3}{3} + \frac{1}{3} \right)$$

### Superficie cilindrica:

Avendo una curva, voglio vedere quant'è l'area laterale che ottengo prendendo dei segmenti verticali a partire dalla curva  $\gamma$ .

$$\gamma = \gamma(t) = (x(t), y(t))^T, \gamma \in [a, b]$$



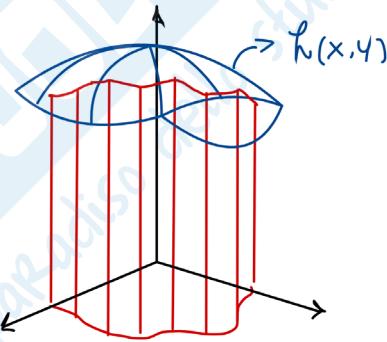
Se ho un cilindro tradizionale ho un'altezza fissata  $h$ , ho che

$$0 \leq z \leq h$$

Per calcolare l'area laterale del cilindro di altezza  $h$  e punti con  $(x, y)^T$  si calcola  $l(\gamma) * h = 2\pi Rh$ .

Se invece ho una superficie che sta sopra la curva all'altezza  $z$ , ho che

$$0 \leq z \leq h(x, y)$$



La superficie d'interesse è data da

$$\{(x(t), y(t), z)^T : t \in [a, b], 0 \leq z \leq h(x(t), y(t))\}$$

La sua parametrizzazione è

$$\phi(t, z) = \left( \underbrace{x(t), y(t)}_{\gamma(t)}, z \right)^T$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} x'(t) & 0 \\ y'(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nu(x, y) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$||\nu(t, z)|| = \sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2} = ||\gamma'(t)||$$

La norma del vettore normale della superficie è uguale alla norma del vettore tangente alla curva.

$$Area = \iint_K ||\nu(t, z)|| dt dz$$

$$0 \leq z \leq h \left( \underbrace{x(t), y(t)}_{\gamma(t)} \right)$$

$$0 \leq z \leq (h \circ \gamma)(t)$$

Quindi è un dominio normale rispetto all'asse  $t$

$$Area = \int_a^b \left( \int_0^{h(\gamma(t))} ||\nu(t, z)|| dz \right) dt =$$

$$= \int_a^b h(\gamma(t)) * ||\nu(t, z)|| dt = \int_\gamma h ds$$

**ATTENZIONE:** lo chiede spesso all'esame!

In generale se ho un insieme

$$\left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x, y)^T = \gamma(t), t \in [a, b], h_1 \leq z \leq h_2 \right\}$$

$$Area = \int_\gamma (h_2 - h_1) ds$$

### SUPERFICI DI ROTAZIONE

Sia  $\gamma(t) = (\rho(t), z(t))^T$  una curva nel piano  $\rho z$  con  $\rho(t) \geq 0$ ,  $t \in [a, b]$ .

Ruotando la curva  $\gamma$  attorno all'asse  $z$  otteniamo la superficie

$$x = \rho(t) \cos \vartheta$$

$$y = \rho(t) \sin \vartheta$$

$$z = z(t)$$

$$\phi: [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\phi(t, \vartheta) = (\rho(t) \cos \vartheta, \rho(t) \sin \vartheta, z(t))^T$$

$$J\phi^T(t, \vartheta) = \begin{pmatrix} \rho'(t) \cos \vartheta & \rho'(t) \sin \vartheta & z'(t) \\ -\rho(t) \sin \vartheta & \rho(t) \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu(t, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\rho(t)z'(t) \cos \vartheta \\ -\rho(t)z'(t) \sin \vartheta \\ \rho'(t)\rho(t) \end{pmatrix}$$

$$||\nu(t, \vartheta)|| =$$

$$= \sqrt{\rho(t)^2 z'(t)^2 \cos^2 \vartheta + \rho(t)^2 z'(t)^2 \sin^2 \vartheta + \rho'(t)\rho(t)^2}$$

$$= \rho(t) \sqrt{z'(t)^2 + \rho'(t)^2} = \rho(t) ||\gamma'(t)||$$

Quindi l'area della superficie è data da

$$\iint_{[a,b] \times [0,2\pi]} \rho(t) ||\gamma'(t)|| d\vartheta dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \int_a^b \rho(t) ||\gamma'(t)|| dt \right) d\vartheta =$$

$$= 2\pi \int_a^b \rho(t) ||\gamma'(t)|| dt$$

$$\int_a^b \rho(t) ||\gamma'(t)|| dt = l(\gamma) * \hat{x}$$

$$\Rightarrow Area = 2\pi * l(\gamma) * \hat{x}$$

### TEOREMA DI PAPPO-GULDINO PER LE AREE

Sia  $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse  $z$  di un angolo  $\alpha \in ]0, 2\pi]$  una curva regolare a tratti  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (x(t), z(t))^T, x(t) \geq 0$$

Allora l'area di  $\phi$  è data da

$$Area = \alpha * l(\gamma) * \hat{x}$$

Dove  $\hat{x}$  è l'ascissa del baricentro della curva  $\gamma$ .

### ESEMPI:

Area laterale del cono di raggio  $R$  e altezza  $h$

Il lato è  $\sqrt{h^2 + R^2}$

$$\begin{aligned} Area Lat &= 2\pi\sqrt{h^2 + R^2} * \frac{r}{2} = \\ &= \pi r \sqrt{h^2 + R^2} \end{aligned}$$

Ottavo calcolando l'integrale

$$\iint_{B(0,1)} \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

Dove  $\gamma = (R \cos t, R \sin t)^T$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= h - \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \nabla f &= \left( -\frac{h}{R} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{h}{R} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ \iint_{B(0,R)} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy &= \\ &= \iint_{B(0,R)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2(x^2 + y^2)}} (x^2 + y^2) dx dy = \\ &= \iint_{B(0,R)} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} dx dy = \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{h^2 + R^2} * \pi R^2 = \\ &= \pi R \sqrt{h^2 + R^2} \end{aligned}$$

### Area della sfera:

Ho un semicerchio, quindi una curva  $\gamma$  di lunghezza  $l(\gamma) = R\pi$

$$4\pi R^2 = Area Sfera = 2\pi * R\pi * \hat{x}$$

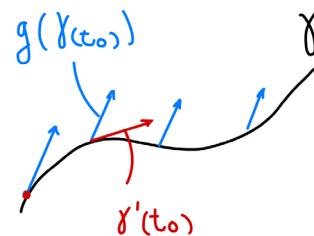
$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{2R}{\pi}$$

### Area del toro:

$$A = 2\pi * l(\gamma) * \hat{x} = 4\pi^2 rR$$

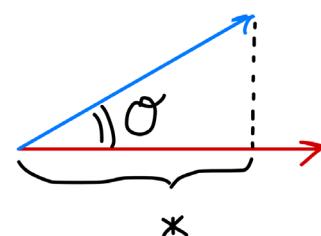
### INTEGRALI SU CAMPI VETTORIALI

Sia  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , e  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo vettoriale, possiamo rappresentare un campo vettoriale in modo che in ogni punto ci sia un vettore che rappresenta il campo.



$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))^T$$

Anche una curva individua dei vettori, ossia quelli tangenti. Quello che spesso è interessante è prendere la componente del campo  $g$  lungo la curva (cioè la proiezione sulla tangente).



Se ho i due vettori (tangente e del campo), questi generano un angolo  $\vartheta$  tra loro. La proiezione è proprio il prodotto scalare:

$$\langle g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Questo vale in un punto, ma per avere il risultato su tutti i punti vado a integrare

$$\int \langle g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

### DEF:

Sia  $g: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\gamma: I \rightarrow A$  regolare (a tratti).

Diremo **integrale della componente tangenziale del campo  $g$  lungo la curva  $\gamma$**  l'integrale

$$\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds := \int_I \langle g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Dove  $ds$  è l'elemento di lunghezza d'arco,  $\tau$  è il versore tangente

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

Significato fisico: è il **lavoro** compiuto dal campo  $g$  sulla particella che si muove lungo la curva  $\gamma$ .

### NOTAZIONE COME FORMA DIFFERENZIALE

Caso  $N = 2$

$$\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = \int_I \langle g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = **$$

$$g(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))^T$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$$

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))^T$$

$$** = \int_I \langle \begin{pmatrix} X(x, y) \\ Y(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \rangle dt =$$

$$= \int_I X(x(t), y(t))x'(t) + Y(x(t), y(t))y'(t) dt$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}, \quad y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$x'(t)dt = dx, \quad y'(t)dt = dy$$

$$= \int_{\gamma} X dx + Y dy$$

OSS:

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve equivalenti.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds &= \int_{a_2}^{b_2} \langle g(\gamma_2(t)), \gamma'_2(t) \rangle dt = \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \langle g(\gamma_1(h(t))), \gamma'_1(h(t)) * h'(t) \rangle dt = \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \langle g(\gamma_1(h(t))), \gamma'_1(h(t)) \rangle * h'(t) dt \\ &\quad s = h(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{h(a_2)}^{h(b_2)} \langle g(\gamma_1(s)), \gamma'_1(s) \rangle ds &= \\ &= \int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds \end{aligned}$$

Ma questo vale se e solo se

$$h(a_2) = a_1, \quad h(b_2) = b_1$$

e cioè se  $h$  è crescente  $h'(t) > 0$ . Se però  $h'(t) < 0$  allora l'integrale diventa

$$- \int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds$$

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono equiverse si ha che

$$\int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds = \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds$$

Se invece sono controverse si ha che

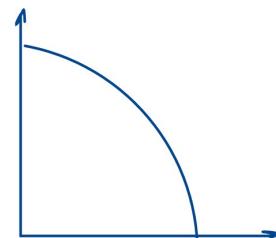
$$\int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds = - \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds$$

### ESEMPIO:

Si calcoli il lavoro compiuto dal campo

$$g(x, y) = (x^2, -xy)^T$$

Su una particella che si muove lungo l'arco di cerchio  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$$

Il lavoro è l'integrale di linea

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = \int_I \langle g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ -\cos t \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \rangle dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \sin t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{2}{3} [\cos^3 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Se  $\gamma(t)$  è in  $\mathbb{R}^2$ , allora  $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$

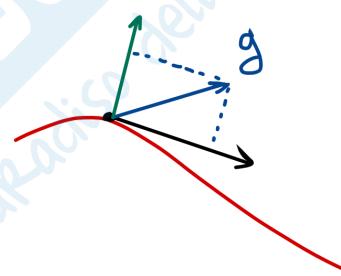
$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))^T$$

Il vettore normale è

$$(y'(t), -x'(t))^T$$

oppure

$$(-y'(t), x'(t))^T$$



DEF:

Definiamo **vettore normale della curva** nel punto il vettore

$$\nu(t) = (y'(t), -x'(t))^T$$

Il verso "standard" del vettore normale è tale da rendere congruente il sistema di assi definito nell'ordine da  $\nu(t), \tau(t)$  con gli assi  $x$  e  $y$ .

**Integrale di linea della componente normale del campo  $g$ :**

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \langle g, \nu \rangle ds = \\ &= \int_a^b \langle g(x(t), y(t)), (y'(t), -x'(t))^T \rangle dt \\ & \gamma(t) = (x(t), y(t))^T \\ & \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

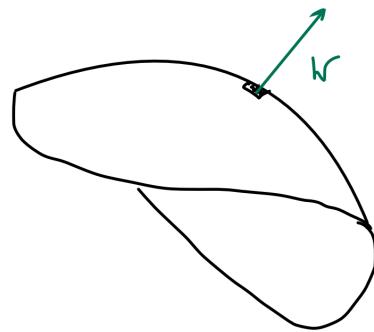
Significato fisico:

è il flusso del campo che attraversa la curva.

In  $\mathbb{R}^3$  si studierà il flusso attraverso una superficie, e in questo caso avremo

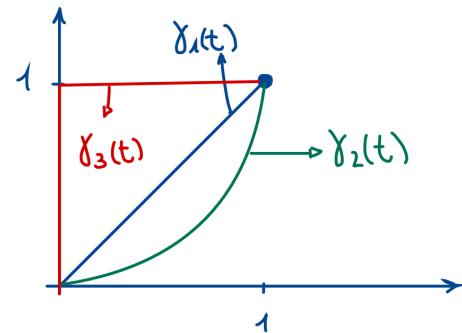
$$\sigma: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} \langle g, \nu \rangle d\sigma = \\ &= \iint_K \langle g(\sigma(s, t)), \nu(s, t) \rangle ds dt \end{aligned}$$



ESEMPIO:

$$g(x, y) = (y^2, 2xy)^T$$



Vogliamo calcolare il lavoro compiuto lungo la curva

$$\gamma_1(t) = (t, t)^T, \quad t \in [0, 1]$$

$$L_1 = \int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds = \int_0^1 t^2 + 2t^2 dt = 1$$

Prendo ora un'altra curva

$$\gamma_2(t) = (t, t^2)^T, \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds = \int_0^1 t^4 + 2t^3 * 2t dt = \\ &= \int_0^1 5t^4 dt = 1 \end{aligned}$$

Prendo un'altra curva

$$\gamma_3(t) = \gamma_{3,a} + \gamma_{3,b}$$

$$\gamma_{3,a}(t) = (0, t)^T, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_{3,b}(t) = (t, 1)^T, \quad t \in [0, 1]$$

$$L_3 = \int_{\gamma_3} \langle g, \tau \rangle ds =$$

$$= \int_{\gamma_{3,a}} \langle g, \tau \rangle ds + \int_{\gamma_{3,b}} \langle g, \tau \rangle ds =$$

$$= \int_0^1 t^2 * 0 + 2 * 0 * t * 1 dt + \\ + \int_0^1 1 * 1 + 2t * 0 dt = 0 + 1 = 1$$

### CAMPPI CONSERVATIVI

#### DEF:

Sia  $g: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$   $A$  aperto; se esiste un campo scalare

$$U: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Tale che

$$\nabla U = g$$

Allora  $U$  si dice **potenziale di  $g$** .

Un campo si dice **conservativo** se esiste un potenziale di  $g$ .

#### OSS:

Se  $U$  è un potenziale di  $g$ , allora per ogni costante  $c$ ,  $U + c$  è un potenziale di  $g$ .

Sia  $A$  connesso, se  $U_1$  e  $U_2$  sono potenziali di  $g$ , allora  $U_1 - U_2$  è costante.

#### OSS:

Sia  $g$  un campo conservativo differenziabile

$$g = \nabla U$$

$$g = (g_1, \dots, g_N)^T = \left( \frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_N} \right)^T$$

$U$  è due volte differenziabile.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

Condizione **necessaria** affichè un campo  $g$  differenziabile sia conservativo è che si abbia

$$\forall i, j \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} g_i = \frac{\partial}{\partial x_i} g_j$$

#### DEF:

Sia  $g: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se  $g(x, y, z) = (X, Y, Z)^T$

Si dice **rotore di  $g$** :

$$\text{rot } g(x, y, z) = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)^T$$

Se  $N = 2$ ,  $g(x, y) = (X, Y)^T$ , definisco

$$\tilde{g}(x, y, z) = (X(x, y), Y(x, y), 0)^T$$

$$\text{rot } g = \text{rot } \tilde{g}$$

Se  $g$  è differenziabile e conservativo, allora

$$\Rightarrow \text{rot } g = 0$$

Un campo si dice **irrotazionale** se  $\text{rot } g = 0$ .

#### OSS:

Sia  $g: A \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  un campo conservativo

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\gamma([a, b]) = \Gamma \subset A$$

Allora

$$\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = \int_{\gamma} \langle \nabla U, \tau \rangle ds =$$

$$= \int_a^b \langle \nabla U(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} (U \circ \gamma)(t) dt =$$

$$= U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

In particolare il lavoro non dipende dalla curva ma soltanto dal valore agli estremi.

### TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPPI CONSERVATIVI

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto connesso,  $g: A \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua. Sono equivalenti:

- 1)  $g$  è conservativo (cioè esiste un potenziale  $U$  di  $g$ )
- 2) Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve regolari a tratti tali che

$$\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$$

$$\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$$

Allora

$$\int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds = \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds$$

3) Per ogni curva  $\gamma$  chiusa regolare a tratti si ha che

$$\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = 0$$

[ se  $\gamma$  è una curva chiusa, allora l'integrale  $\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds$  si indica con

$$\oint_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds$$

e si dice **circuitazione** ]

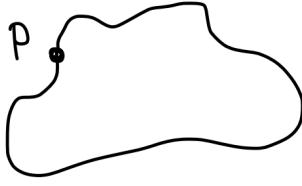
DIM:

1)  $\Rightarrow$  2) fatto

2)  $\Rightarrow$  3) considero

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \gamma(a) = \gamma(b)$$

Definisco:  $\gamma_0(t) = \gamma(a) = \gamma(b)$



Per il punto 2 ho che:

$$\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = \int_{\gamma_0} \langle g, \tau \rangle ds = 0$$

Dimostriamo 2)  $\Rightarrow$  1) ( $N = 2$ ):

Dobbiamo definire un potenziale  $U$ : fissiamo un punto  $(x_0, y_0)^T \in A$ ; per ogni  $(x, y)^T \in A$ . Sia  $\gamma$  una curva congiungente  $(x_0, y_0)^T$  a  $(x, y)^T$ ; poniamo

$$U(x, y) = \int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds$$

$U$  è ben definito per ipotesi (2). Dimostriamo che  $\nabla U = g$ .

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (U(x + h, y) - U(x, y))$$

$$U(x, y) = \int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds$$

$\gamma$  congiunge  $(x_0, y_0)^T$  e  $(x, y)^T$

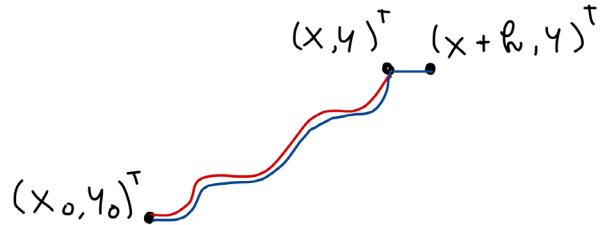
$$U(x + h, y) = \int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds$$

$\gamma$  congiunge  $(x_0, y_0)^T$  e  $(x + h, y)^T$

Come curva congiungente  $(x_0, y_0)^T$  e  $(x + h, y)^T$  scegliamo la curva data da  $\gamma_1 + \gamma_2$  dove  $\gamma_1$  è la curva congiungente  $(x_0, y_0)^T$  e  $(x, y)^T$ , mentre

$$\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_2(t) = (x + th, y)^T$$



$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\gamma=\gamma_1+\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds - \int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds \right)$$

$$\int_{\gamma=\gamma_1+\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds - \int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds =$$

$$= \int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds + \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds - \int_{\gamma_1} \langle g, \tau \rangle ds =$$

$$= \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds$$

$$g = (X, Y)^T$$

$$\gamma_2(t) = (x + th, y)^T$$

$$\gamma'_2(t) = (h, 0)^T$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\gamma_2} \langle g, \tau \rangle ds \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_0^1 (X(x + th, y) * h + Y(x + th, y) * 0) ds \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_0^1 (h * X(x + th, y)) ds \right) = X(x, y)$$

Si verifica nello stesso modo che

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y)$$

ESEMPIO calcolo del potenziale:

Consideriamo il campo

$$g(x, y) = (y^2, 2xy + y^2 + 1)^T$$

$$U(x, y) = ?$$

In generale per un campo

$$g(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))^T$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y$$

Devo integrare

$$U(x, y) = \int X(x, y) dx + h(y)$$

In questo caso specifico

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2$$

$$\underbrace{\int \frac{\partial U}{\partial x} dx}_{U(x,y)} = \int y^2 dx = y^2 x + h(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + y^2 + 1$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2yx + h'(y)$$

$$\Rightarrow 2yx + h'(y) = 2xy + y^2 + 1$$

$$\Rightarrow h'(y) = y^2 + 1$$

$$\int h'(y) dy = \int y^2 + 1 dy =$$

$$= \frac{1}{3}y^3 + y$$

$$\Rightarrow U(x, y) = y^2 x + \frac{1}{3}y^3 + y$$

ESEMPIO:

$$g(x, y) = (y, -x)^T$$

$$U = \int y dx = xy + h(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + h'(y) = -x$$

$$\Rightarrow -2x = h'(y)$$

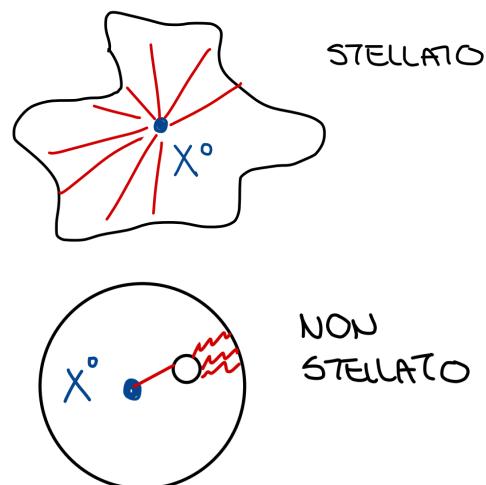
Non si può trovare alcuna funzione  $h$  che soddisfi quella condizione  $\Rightarrow$  il campo non è conservativo, infatti il rotore

$$\text{rot } g = (0, 0, -1)^T \neq (0, 0, 0)^T$$

Però non sempre se un campo è irrotazionale allora è conservativo.

DEF:

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  si dice **stellato** se esiste un punto  $x_o \in A$  (centro della stella) tale che  $\forall x \in A$  il segmento che congiunge  $x_o$  a  $x$  è contenuto in  $A$ .



TEOREMA Lemma di Poincaré

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ ,  $A$  aperto stellato.

$$g(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))^T$$

$g: A \rightarrow \mathbb{R}^N$  differenziabile,  $g$  irrotazionale.

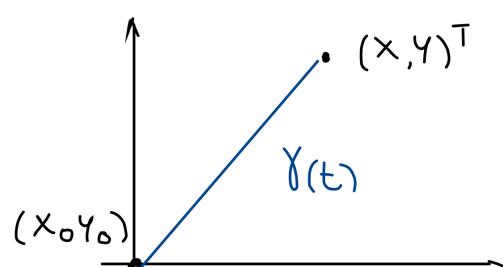
Allora  $g$  è conservativo.

DIM:  $N = 2$

Costruiamo un potenziale per  $g$ ,  $U: A \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\nabla U = g$ . Fissiamo un punto  $(x_o, y_o)^T \in A$  centro della stella.

Definiamo

$$U(x, y) = \int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds$$



Dove  $\gamma$  è il segmento che congiunge il punto  $(x_o, y_o)^T$  al punto  $(x, y)^T$ .

$$\gamma(t) = (x_o, y_o)^T + t(x - x_o, y - y_o)^T$$

$$t \in [0,1]$$

$$\gamma'(t) = (x - x_o, y - y_o)^T$$

Dimostriamo che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = X(x, y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \left( \begin{pmatrix} X(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o)) \\ Y(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_o \\ y - y_o \end{pmatrix} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [X(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o)) * (x - x_o) + Y(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o)) * (y - y_o)] dt =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x} X(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o)) * t(x - x_o) + X(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o)) * t(y - y_o) + \frac{\partial}{\partial x} Y(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o)) * t(y - y_o) \right) dt =$$

Metto in evidenza  $t$ :

$$t \left( \frac{\partial X}{\partial x}(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o))(x - x_o) + \frac{\partial Y}{\partial x}(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o))(y - y_o) \right) + X(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o))$$

Per ipotesi

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$t \left( \frac{\partial X}{\partial x}(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o))(x - x_o) + \frac{\partial X}{\partial y}(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o))(y - y_o) \right) + X(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o))$$

Questo si può scrivere come

$$\frac{d}{dt} (t * X(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o)))$$

E quindi tornando all'integrale iniziale

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} (t * X(x_o + t(x - x_o), y_o + t(y - y_o))) dt = X(x, y)$$

E quindi abbiamo dimostrato che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X(x, y)$$

E in modo del tutto analogo si dimostra che

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y) \quad \blacksquare$$

ESEMPIO:

$$\text{Sia } g(x, y) = (ye^x, e^x - \cos y)^T$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)^T$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t)^T$$

$$\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = \int_0^{2\pi} \langle (t \sin t e^{t \cos t}, e^{t \cos t} - \cos(t \sin t))^T, (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t)^T \rangle dt =$$

Molto complicato!

$$\text{rot } g = (0, 0, e^x - e^x) = (0, 0, 0)^T$$

$g$  irrotazionale  $\Rightarrow g$  conservativo

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = \int_{\varphi} \langle g, \tau \rangle ds$$

$$\varphi(t) = (t, 0)^T, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= (1,0)^T \\ \int_{\varphi} \langle g, \tau \rangle ds &= \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (0, e^t - e)^T, (1,0)^T \rangle dt = 0\end{aligned}$$

Terzo modo:  $g$  è conservativo quindi

$$\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

Troviamo  $U$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = ye^x \Rightarrow U(x, y) = ye^x + h(y)$$

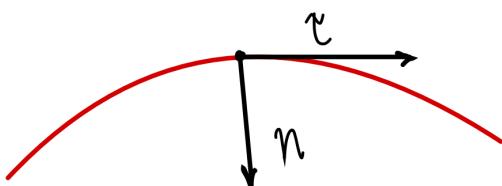
$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x - \cos y = e^x + h'(y)$$

$$\Rightarrow h(y) = -\sin y$$

$$\Rightarrow U(x, y) = ye^x - \sin y$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds &= U(2\pi, 0) - U(0, 0) = \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

Se ho una curva piana  $\gamma(t)$  e in un punto i versori tangente e normale  $\tau$  e  $n$ , questi sono congruenti a  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .



Questo mi permette di "orientare" la curva. In ogni punto della curva (fissata una parametrizzazione) posso dire qual è il verso del vettore normale.

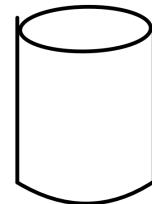
Cambiare la parametrizzazione può cambiare l'orientazione della curva, ma in ogni caso ho sempre un versore normale che si muove con continuità su tutta la curva.

Cosa succede su una superficie?

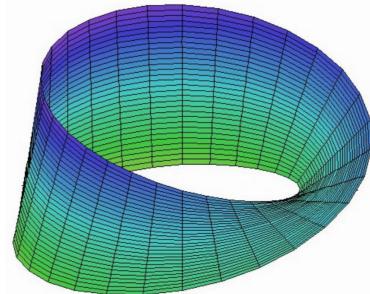
$$\sigma: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\nu = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Data una superficie, posso dire ciò che è "dentro" e ciò che è "fuori". Il cilindro è una superficie **orientabile**.

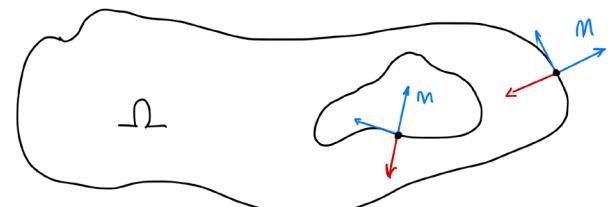


Ma esistono anche superfici non orientabili (Nastro di Möbius).



Non potremo calcolare il flusso di un campo attraverso una superficie non orientabile.

Orientare il "bordo" di un insieme:



Sia  $\Omega$  dominio regolare a tratti (aperto convesso con  $\partial\Omega$  regolare a tratti).

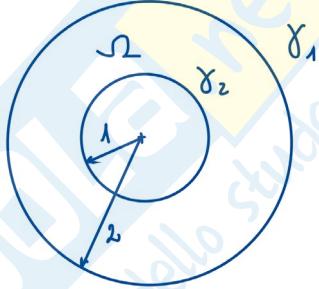
In ogni punto di  $\partial\Omega$  esiste una normale entrante e una normale uscente.

DEF:

Diremo che  $\Omega$  è **orientato positivamente** (secondo la normale esterna) se la normale di  $\partial\Omega$  punta verso l'esterno di  $\Omega$ .

ESEMPIO:

Corona circolare,  $r = 1, R = 2$ .  $\partial\Omega = \gamma_1 + \gamma_2$ . Come si parametrizza la corona in modo da avere un'orientazione positiva?



$$\gamma_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)^T$$

$$\gamma'_1(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)^T$$

$$v(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)^T$$

Posso prendere  $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)^T$ ? NO!  
Perché avrei il vettore normale che punta verso l'interno della regione della corona. Prendo invece

$$\gamma_2(t) = (\sin t, \cos t)^T$$

$$\gamma'_2(t) = (\cos t, -\sin t)^T$$

$$v(t) = (-\sin t, -\cos t)^T$$

### DEF: $\mathbb{R}^3$

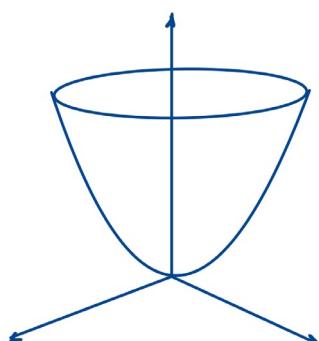
Sia  $\Omega$  una regione (solido) di  $\mathbb{R}^3$  con bordo regolare a tratti (superficie).  $\Omega$  è orientato positivamente se la parametrizzazione  $\sigma$  di  $\partial\Omega$  è tale che la normale  $v = \frac{\partial\sigma}{\partial s} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial t}$  punta verso l'esterno.

### ESEMPIO:

Consideriamo

$$\Omega = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3, x^2 + y^2 \leq z \leq 3 \right\}$$

$\partial\Omega$  = Paraboloid + Disco



Scriviamo una parametrizzazione che orienti  $\Omega$  positivamente

$$\sigma_1: B((0,0)^T, \sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\sigma_1(s, t) = (s, t, s^2 + t^2)^T$$

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial s} = (1, 0, 2s)^T, \quad \frac{\partial\sigma_1}{\partial t} = (0, 1, 2t)^T$$

$$v(s, t) = \frac{\partial\sigma_1}{\partial s} \wedge \frac{\partial\sigma_1}{\partial t} = (-2s, -2t, 1)^T$$

$$v(0,0) = (0,0,1)^T$$

Nell'origine è rivolto verso l'alto e quindi verso l'interno del solido, quindi questa parametrizzazione NON va bene!

Si può prendere

$$\sigma_1(s, t) = (t, s, s^2 + t^2)^T$$

$$v(s, t) = (2s, 2t, -1)^T$$

E in questo caso punta verso l'esterno.

Per il disco si può prendere

$$\sigma_2(s, t) = (s, t, 3)^T$$

$$v(s, t) = (0, 0, 1)^T$$

E va bene perché punta verso l'alto.

### ESEMPIO:

Si calcoli il flusso del campo  $g(x, y, z) = (x, y, z)^T$  uscente da  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega^+} \langle g, v \rangle d\sigma &= \iint_{\sigma_1} \langle g, v \rangle d\sigma + \iint_{\sigma_2} \langle g, v \rangle d\sigma = \\ &= \iint_{B((0,0)^T, \sqrt{3})} \left\langle \begin{pmatrix} t \\ s \\ s^2 + t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t \\ 2s \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dsdt + \\ &\quad + \iint_{B((0,0)^T, \sqrt{3})} \left\langle \begin{pmatrix} s \\ t \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dsdt = \\ &= \iint_{B((0,0)^T, \sqrt{3})} \frac{t^2 + s^2}{(2t^2 + 2s^2 - s^2 - t^2)} dsdt + \\ &\quad + \iint_{B((0,0)^T, \sqrt{3})} 3 dsdt \end{aligned}$$

In coordinate polari

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 * \rho \, d\rho \right) d\vartheta + 9\pi = \\
&= 2\pi * \frac{1}{4} (\sqrt{3})^4 + 9\pi = \\
&= 9\pi \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{27}{2}\pi
\end{aligned}$$

DEF Operatori Differenziali:

Gradiente:

$$\nabla: C^1(A, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(A, \mathbb{R}^N)$$

Rotore:  $N = 3$

$$\text{rot} : C^1(A, \mathbb{R}^N) \rightarrow C^0(A, \mathbb{R}^N)$$

Divergenza:

$$\text{div} : C^1(A, \mathbb{R}^N) \rightarrow C^0(A, \mathbb{R})$$

Se  $g(x_1, \dots, x_N) =$

$$\begin{aligned}
&= (X_1(x_1, \dots, x_N), \dots, X_N(x_1, \dots, x_N)) \\
\text{div } g &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_k}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Ossia è la **traccia** della matrice jacobiana.

OSS:

$$\text{rot}(\nabla f) = 0$$

rot(div  $g$ ) NON si può fare!

$$\text{div}(\text{rot } g) = 0$$

$$\text{div}(\nabla f) = \Delta f = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

$\Delta f$  è il **Laplaciano di  $f$** .

### TEOREMA DELLA DIVERGENZA (GAUSS)

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  regolare a tratti con bordo orientato positivamente (secondo la normale uscente).

Sia  $\Omega \subseteq A$ ,  $A$  aperto,  $g: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $g \in C^1(A, \mathbb{R}^N)$ .

Allora

$$\int_{\partial\Omega^+} \langle g, v \rangle d\sigma = \underbrace{\int_{\Omega} \text{div } g \, dm}_{\substack{\text{Integrale di} \\ \text{superficie } (\mathbb{R}^3) \\ \text{o di linea } (\mathbb{R}^2)} \quad \underbrace{\text{Integrale}}_{\substack{\text{di Riemann} \\ \text{in } \mathbb{R}^N}}$$

Se  $N = 3$ :

$$\iint_{\partial\Omega^+ = \sigma} \langle g, v \rangle d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div } g \, dx dy dz$$

Se  $N = 2$ :

$$\iint_{\partial\Omega^+ = \gamma} \langle g, v \rangle ds = \iint_{\Omega} \text{div } g \, dx dy$$

DIM:  $N = 2$

Supponiamo che  $\Omega$  sia un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi.

$$g(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))^T$$

$$\partial\Omega^+ = \gamma$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$$

$$t \in I$$

$$v(t) = (y'(t), -x'(t))^T$$

Vogliamo dimostrare che

$$\iint_{\partial\Omega^+ = \gamma} \langle g, v \rangle ds = \iint_{\Omega} \text{div } g \, dx dy$$

Ossia

$$\begin{aligned}
&\int_I X(x(t), y(t)) * y'(t) - Y(x(t), y(t)) \\
&\quad * x'(t) \, dt = \\
&= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial X}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y) \right] \, dx dy
\end{aligned}$$

Proveremo che:

$$1) \quad \int_I X y' \, dt = \iint_{\Omega} \frac{\partial X}{\partial x} \, dx dy$$

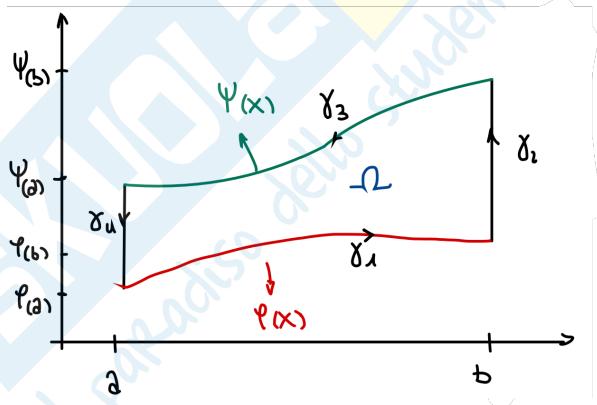
$$2) \quad - \int_I Y x' \, dt = \iint_{\Omega} \frac{\partial Y}{\partial y} \, dx dy$$

$$\int_I Y(x(t), y(t)) * x' \, dt$$

Essendo il dominio normale, si può scrivere:

$$\Omega = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Osserviamo che il bordo di  $\Omega$  può essere spezzato in 4 parti e quindi in 4 curve:



$\gamma_1$  come grafico di  $\varphi(x)$ ,  $\gamma_2$  come segmento verticale dal basso verso l'alto,  $\gamma_3$  come grafico di  $\psi(x)$  al "contrario",  $\gamma_4$  come segmento dall'alto verso il basso.

$$\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_1(t) = (t, \varphi(t))^T, \quad \gamma'_1(t) = (1, \varphi'(t))^T$$

$$\gamma_2: [\varphi(b), \psi(b)] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_2(t) = (b, t)^T, \quad \gamma'_2(t) = (0, 1)^T$$

$$-\gamma_3: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$-\gamma_3(t) = (t, \psi(t))^T, \quad -\gamma'_3(t) = (1, \psi'(t))^T$$

$$-\gamma_4: [\varphi(b), \psi(b)] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$-\gamma_4(t) = (a, t)^T, \quad -\gamma'_4(t) = (0, 1)^T$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

$$\int_I Y(x(t), y(t)) * x' dt =$$

$$= \int_a^b Y(t, \varphi(t)) * 1 dt +$$

$$+ \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} Y(b, t) * 0 dt +$$

$$- \int_a^b Y(t, \psi(t)) * 1 dt +$$

$$- \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} Y(a, t) * 0 dt =$$

$$= \int_a^b Y(t, \varphi(t)) - Y(t, \psi(t)) dt =$$

Cambio il nome di  $t \rightsquigarrow x$

$$= \int_a^b Y(x, \varphi(x)) - Y(x, \psi(x)) dx$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \frac{\partial Y}{\partial y} dxdy = \\ & = - \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \\ & = - \int_a^b Y(x, \psi(x)) - Y(x, \varphi(x)) dx = \\ & = \int_a^b Y(x, \varphi(x)) - Y(x, \psi(x)) dx \end{aligned}$$

Ho quindi dimostrato che

$$\int_I Y x' dt = - \iint_{\Omega} \frac{\partial Y}{\partial y} dxdy$$

Per dimostrare

$$\int_I X y' dt = \iint_{\Omega} \frac{\partial X}{\partial x} dxdy$$

scriviamo  $\Omega$  come insieme normale rispetto all'asse  $Y$ :

$$\Omega = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$

Si effettuano i medesimi calcoli di prima e si osserva sempre che

$$\begin{aligned} \int_I X y' dt &= - \int_c^d X(\alpha(t), t) dt + \\ &+ \underbrace{0}_{\gamma_2} + \int_c^d X(\beta(t), t) dt + \underbrace{0}_{\gamma_4} = \\ &= \int_c^d [X(\beta(t), t) - X(\alpha(t), t)] dt = \\ &= \int_c^d \left( \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial X}{\partial x}(x, y) dx \right) dy = \\ &= \iint_{\Omega} \frac{\partial X}{\partial x} dxdy \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Significato fisico della divergenza:

Se ho un punto  $(x_o, y_o, z_o)^T$  e un campo  $g$ , cosa significa  $\operatorname{div} g(x_o, y_o, z_o)$ ?

Costruisco una pallina intorno al punto di raggio  $R$

$$B_R = B((x_o, y_o, z_o)^T, R)$$

$$S_R = \partial B_R$$

Sappiamo che

$$\iiint_{B_R} \operatorname{div} g \, dm = \iint_{S_R} \langle g, v \rangle d\sigma$$

Se dividiamo per il volume della sfera e prendiamo il limite per il raggio che tende a 0

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{1}{Vol(B_R)} \iiint_{B_R} \operatorname{div} g \, dx dy dz$$

Per il Teorema della media posso trovare un punto dentro la palla tale che l'integrale sulla palla diviso il suo volume è pari a

$$\operatorname{div} g(x_R, y_R, z_R) \in B_R$$

E quindi il limite tende a

$$\operatorname{div} g(x_o, y_o, z_o)$$

cioè la divergenza nel punto.

$$\Rightarrow \operatorname{div} g(x, y, z) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{S_R} \langle g, v \rangle d\sigma}{Vol(B_R)}$$

In particolare se  $\operatorname{div} g(x, y, z) = 0$  allora il flusso è nullo.

DEF:

Un campo  $g$  si dice **solenoidale** se esiste un potenziale vettore  $h: A \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\operatorname{rot} h = g$

[  $g$  conservativo vuol dire  $\Rightarrow g = \nabla U$ ,  $U$  campo scalare  $\Rightarrow$  in particolare  $\operatorname{rot} g = \operatorname{rot} \nabla U = 0$ ;  
 $\Rightarrow \oint_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = 0$  circuitazione nulla. ]

$g$  solenoidale  $\Rightarrow g = \operatorname{rot} h$ ,  $h$  campo vettore  $\Rightarrow$  in particolare  $\operatorname{div} g = \operatorname{div} \operatorname{rot} h = 0$ ;  
 $\Rightarrow \iint_S \langle g, v \rangle d\sigma = 0$ ,  $S$  superficie chiusa ]

Teorema della divergenza N = 2:

Definiamo un nuovo campo

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} -Y(x, y) \\ X(x, y) \end{pmatrix}$$

Sia  $-Y(x, y) = U(x, y)$ ,  $X(x, y) = W(x, y)$

Bisogna dimostrare che

$$\begin{aligned} & \int_I X(x(t), y(t)) * y'(t) - Y(x(t), y(t)) \\ & * x'(t) dt = \\ & = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial X}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y) \right] dx dy \end{aligned}$$

Che diventa

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x(t), y(t)) * y'(t) + U(x(t), y(t)) \\ & * x'(t) dt = \\ & = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial X}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y) \right] dx dy \end{aligned}$$

Osservo che

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_a^b (U * x' + W * y') dt}_{\text{Lavoro}} = \int_{\gamma} \langle h, \tau \rangle ds = \\ & = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial X}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \\ & = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial W}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \\ & \quad \text{terza componente di rot } h \\ & = \iint_{\Omega} \langle \operatorname{rot} h, (0, 0, 1)^T \rangle dx dy \end{aligned}$$

FORMULA DI GAUSS-GREEN (TEOREMA DEL ROTORE IN  $\mathbb{R}^2$ )

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dominio regolare a tratti, con bordo orientato positivamente (secondo la normale esterna); Supponiamo  $\bar{\Omega} \subset A$ ,  $A$  aperto,

$$g: A \rightarrow \mathbb{R}^2, g \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$$

$$g(x, y) = (X, Y)^T$$

Allora vale la formula

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial \Omega^+} \langle g, \tau \rangle ds = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \\ & = \iint_{\Omega} \langle \operatorname{rot} g, (0, 0, 1)^T \rangle dx dy \end{aligned}$$

DIM:

Si consideri un campo

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} Y(x, y) \\ U \\ -X(x, y) \\ W \end{pmatrix}^T$$

$$\partial\Omega^+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\partial\Omega^+(t) = (x(t), y(t))^T$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^+} \langle g, \tau \rangle ds &= \\ &= \int_a^b \left[ \underbrace{X(x(t), y(t)) * x'(t)}_{-W * x'} + \underbrace{Y(x(t), y(t)) * y'(t)}_{U * y'} \right] dt = \\ &= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_{\partial\Omega^+} \langle h, v \rangle ds \stackrel{\text{Gauss}}{\cong} \\ &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} h \, dx dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} Y + \frac{\partial}{\partial y} (-X) \, dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \, dx dy \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ESEMPIO:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= (\sin x + y, e^{y^2} - 3x)^T \\ \gamma(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t)^T, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Si calcoli

$$\oint_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds$$

Con la definizione devo calcolare

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} & [(\sin(2 \cos t) + 2 \sin t) * (-2 \sin t) \\ & + (e^{4 \sin^2 t} - 6 \cos t) * 2 \cos t] dt \end{aligned}$$

O con la formula

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds &= \\ &= \iint_{\text{interno di } \gamma} \langle \operatorname{rot} g, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \, dx dy = \\ &= B \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} g &= (0, 0, -4)^T \\ &= \iint_B -4 \, dx dy = -16\pi \end{aligned}$$

OSS: Lemma di Poincarè

$A$  stellato,  $g$  irrotazionale  $\Rightarrow g$  conservativo.

$$\oint_{\gamma=\partial\Omega^+} \langle g, \tau \rangle ds = \iint_{\Omega} \langle \operatorname{rot} g, (0, 0, 1)^T \rangle \, dx dy = 0$$

Se  $\operatorname{rot} g = 0$

Quindi se  $g$  è irrotazionale, allora  $g$  è a circuitazione nulla, quindi conservativo.

L'affermazione è vera se è vero che per ogni curva chiusa  $\gamma$ ,  $\gamma$  è il bordo di un dominio  $\Omega \subseteq A$ .

DEF:

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice **semplicemente connesso** se per ogni curva chiusa regolare a tratti  $\gamma$  con sostegno  $\Gamma \subseteq E$  si ha che  $\gamma$  è il bordo di una regione limitata  $\Omega$  tutta contenuta nell'insieme.

Ossia " $E$  non ha buchi".

**TEOREMA (Lemma di Poincarè migliorato)**

Sia  $A$  aperto semplicemente connesso,

$$g: A \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g \in C^1$$

$g$  irrotazionale. Allora  $g$  è conservativo.

DIM:

Per ogni  $\gamma$  chiusa e sufficientemente regolare

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds &= \int_{\partial\Omega^+} \langle g, \tau \rangle ds = \\ &= \iint_{\Omega} \langle \operatorname{rot} g, (0, 0, 1)^T \rangle \, dx dy = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow g$  è conservativo.  $\blacksquare$

Per la divergenza si ha che, se  $A$  è semplicemente connesso

$$\int_{\partial\Omega^+} \langle g, v \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} g \, dx dy$$

Se  $\operatorname{div} g = 0$  si ha che

$$\int_{\gamma} \langle g, v \rangle ds = 0, \forall \gamma \text{ chiusa}$$

Vale anche in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\iint_{\partial\Omega^+} \langle g, v \rangle d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} g \, dx dy dz$$

Questo chiedendo che  $A$  sia tale che per ogni superficie chiusa regolare a tratti, questa è il bordo di una regione  $\Omega \subseteq A$ .

### TEOREMA DI KELVIN-STOKES DEL ROTORE IN $\mathbb{R}^3$

In  $\mathbb{R}^2$  avevamo che

$$\oint_{\partial\Omega^+} \langle g, \tau \rangle ds = \iint_{\Omega} \langle \operatorname{rot} g, (0,0,1)^T \rangle \, dx dy$$

In questo caso  $e_3 = (0,0,1)^T = v$  vettore normale della superficie piana  $\Omega$

$$\tilde{\Omega} = \{(s, t, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : (s, t)^T \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\sigma(s, t) = (s, t, 0)^T$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = (1, 0, 0)^T, \frac{\partial \sigma}{\partial t} = (0, 1, 0)^T$$

$$v = (0, 0, 1)^T$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} \langle \operatorname{rot} g, (0,0,1)^T \rangle \, dx dy =$$

$$= \iint_{\sigma=\tilde{\Omega}} \langle \operatorname{rot} g, v \rangle \, d\sigma$$

Che è il flusso attraverso  $\tilde{\Omega}$  del rotore di  $g$ .

In generale possiamo avere una superficie

$$\sigma: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

che ha un "bordo".

#### DEF:

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio regolare a tratti con frontiera  $\partial K^+$  orientata positivamente;  $\partial K^+$  è il sostegno di una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Sia  $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie regolare a tratti; diremo **bordo di  $\sigma$**  la curva  $\partial\sigma^+ = \sigma \circ \gamma$  (orientata positivamente).

#### ENUNCIATO DEL TEOREMA:

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  un aperto,  $g: A \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^1$ .

Sia  $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$  superficie regolare a tratti con bordo  $\partial\sigma^+$  orientato positivamente.

Allora

$$\underbrace{\oint_{\partial\sigma^+} \langle g, \tau \rangle ds}_{\substack{\text{circuitazione} \\ \text{del campo sul bordo} \\ \text{della superficie}}} = \underbrace{\iint_{\sigma} \langle \operatorname{rot} g, v \rangle \, d\sigma}_{\substack{\text{flusso del rotore} \\ \text{di } g \text{ attraverso} \\ \text{la superficie}}}$$

$$\operatorname{div} g = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{S_R} \langle g, v \rangle \, d\sigma}{\operatorname{Vol}(B_R)}$$

In  $N = 1$ :

Si lavora su un intervallo  $[x - R, x + R]$ , una palla unidimensionale. So che

$$\int_{x-R}^{x+R} f'(x) \, dt = f(x+R) - f(x-R)$$

Si può dividere la per lunghezza dell'intervallo  $2R$  e usare il teorema della media

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{2R} \int_{\substack{B(x,R) \\ [x-R,x+R]}} f'(x) \, dt = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x+R) - f(x-R)}{2R} \end{aligned}$$

Quindi

$$\operatorname{div} g = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{S_R} \langle g, v \rangle \, d\sigma}{\operatorname{Vol}(B_R)}$$

è come se fosse la stessa cosa in dimensione superiore.

$$\underbrace{\frac{f(x+R) - f(x-R)}{\text{integrale dimensione 0}}}_{\substack{\text{integrale dimensione 0}}}$$

$$\underbrace{\iint_{S_R} \langle g, v \rangle \, d\sigma}_{\substack{\text{integrale dimensione 2}}}$$

Facciamo una cosa simile per il rotore:

$$\langle \operatorname{rot} g, \bar{v} \rangle$$

$$\bar{v} \in \mathbb{R}^3, \bar{v} = e_1, e_2, e_3$$

Ora come palla prendiamo un disco in  $\mathbb{R}^3$  che ha come bordo una circonferenza, e lo individuo con  $n$  versore normale.

$D_{R,n}$ : disco di centro  $(x_o, y_o, z_o)^T$  con versore normale  $n$  di raggio  $R$ .

La formula di Stokes mi dice che

$$\iint_{D_{R,n}} \langle \operatorname{rot} g, v \rangle d\sigma = \oint_{C_{R,n}} \langle g, \tau \rangle ds$$

$C_{R,n} = \partial D_{R,n}$  che è una circonferenza di centro  $(x_o, y_o, z_o)^T$ , raggio  $R$  e normale  $n$ .

Divido per l'area

$$\frac{1}{\text{Area}} \iint_{D_{R,n}} \langle \operatorname{rot} g, v \rangle d\sigma = \frac{1}{\text{Area}} \oint_{C_{R,n}} \langle g, \tau \rangle ds$$

Prendo il limite

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\iint_{D_{R,n}} \langle \operatorname{rot} g, v \rangle d\sigma}{\underbrace{\text{Area}(D_{R,n})}_{\pi R^2}} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_{R,n}} \langle g, \tau \rangle ds}{\text{Area}(D_{R,n})}$$

Per il teorema della media ottengo

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\iint_{D_{R,n}} \langle \operatorname{rot} g, v \rangle d\sigma}{\pi R^2} = \langle \operatorname{rot} g(x_o, y_o, z_o), n \rangle$$

perchè il raggio tende a zero e quindi al rotore calcolato nel centro. Abbiamo quindi ottenuto

$$\langle \operatorname{rot} g(x_o, y_o, z_o), n \rangle = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_{R,n}} \langle g, \tau \rangle ds}{\text{Area}(D_{R,n})}$$

*vorticosità del campo*

Se  $\operatorname{rot} g = 0$  vuol dire che non c'è vorticosità del campo.

### ESERCIZIO:

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^3 \cos z \\ x^3 e^z \\ -yz^2 \sin x \end{pmatrix}$$

Sia  $h(x, y, z) = \operatorname{rot} g(x, y, z)$

Sia  $S$  la superficie semisferica

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$$

$$z \geq 1$$

Si calcoli il flusso del campo  $h$  attraverso la superficie  $S$ .

1° modo: calcolare  $\operatorname{rot} g = h$ , parametrizzare  $S$  e calcolare usando la definizione (lunghissimo).

2° modo: usando il Teorema di Stokes

$$\iint_{\sigma} \langle h, v \rangle d\sigma = \iint_{\sigma} \langle \operatorname{rot} g, v \rangle d\sigma = \oint_{\partial \sigma^+} \langle g, \tau \rangle ds$$

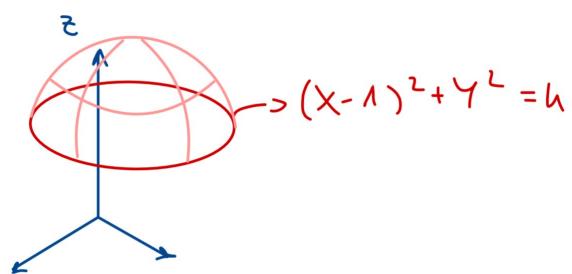
Devo parametrizzare il bordo di  $\sigma$ :

$$\sigma(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sqrt{5} \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sqrt{5} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$z \geq 1 \Rightarrow \sqrt{5} \cos \varphi \geq 1 \Rightarrow \cos \varphi \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\varphi \in \left[ 0, \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \right]$$

$$\vartheta \in [0, 2\pi]$$



Il bordo di  $\partial S$  è la circonferenza

$$\begin{cases} z = 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

È la curva:

$$\gamma(t) = (1 + 2 \cos t, 2 \sin t, 1)^T$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds &= \int_0^{2\pi} (8 \sin^3 t \cos 1)(-2 \sin t) \\ &\quad + (1 + 2 \cos t)^3 e^1 (2 \cos t) \\ &\quad + (-2 \sin t) 1 (\sin(1 + 2 \cos t) * 0) dt \end{aligned}$$

Però c'è un altro modo. Il Teorema dice che  $\oint_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds$  può essere calcolato come il flusso attraverso QUALUNQUE superficie avente quella curva come bordo. Prendiamo quindi un disco.

$$\iint_{\text{Disco che ha come bordo } \gamma} \langle \operatorname{rot} g, v \rangle d\sigma =$$

$$v = (0, 0, 1)^T$$

$$= \iint_{Disco} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) d\sigma$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 3x^2 e^z$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 3y^2 \cos z$$

$$\iint_{Disco} (3x^2 e^z - 3y^2 \cos z) d\sigma$$

$$Disco: (x-1)^2 + y^2 \leq 4, z = 1$$

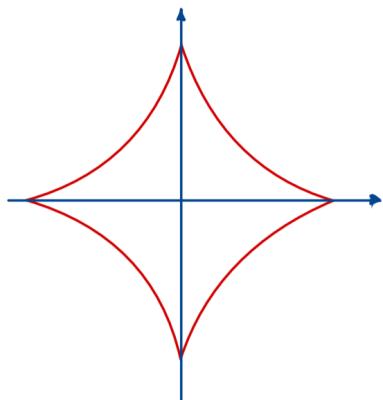
$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 [3(1 + \rho \cos \vartheta)^2 \right. \\ & \quad \left. - 3\rho^2 \sin^2 \vartheta \cos 1] \rho \, d\rho \right) d\vartheta = \\ & = \dots = 12\pi(2e - \cos 1) \end{aligned}$$

### APPLICAZIONE AL CALCOLO DELL'AREA DI UNA REGIONE PIANA RACCHIUSA DA UN CURVA

**(LO CHIEDE SPESSO ALLO SCRITTO!!!!)**

ESEMPIO:

Area della regione interna all'astroide



$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)^T$$

Si potrebbe usare l'integrale di Riemann usando il sottografico della funzione

$$x = \cos^3 t$$

$$y = \sin^3 t$$

$$|\sin t| = \sqrt{1 - \cos^2 t}$$

Lavorando nel primo quadrante sia  $\sin t$  che  $\cos t$  sono positivi e potrò scrivere

$$y = (1 - \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$$

$$\cos^2 t = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y = \left( 1 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

E quindi l'area cercata sarà

$$A = 4 \int_0^1 \left( 1 - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} dx$$

Però vediamo un modo alternativo che guarda solo la parametrizzazione della curva. Per il Teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} Area &= \iint_{\Omega} 1 \, dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div} g \, dx dy = \\ &= \int_{\partial \Omega^+ = \gamma} \langle g, v \rangle d\sigma \end{aligned}$$

Scegliendo  $g$  tale che  $\operatorname{div} g = 1$ .

Cerchiamo

$$g(x, y) = (X, Y)^T$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 1$$

Possiamo prendere

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)^T$$

$$g(x, y) = (x, 0)^T$$

$$g(x, y) = (0, y)^T$$

$$\operatorname{div} g = 1$$

$$Area \Omega = \iint_{\Omega} 1 \, dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div} g \, dx dy =$$

$$= \int_{\gamma} \left\langle \frac{1}{2}(x, y)^T, v \right\rangle ds$$

$$\gamma'(t) = (-3 \sin t \cos^2 t, 3 \cos t \sin^2 t)^T$$

$$v(t) = (3 \cos t \sin^2 t, 3 \sin t \cos^2 t)^T$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos^3 t (3 \cos t \sin^2 t) \\ & \quad + \sin^3 t (3 \sin t \cos^2 t)] dt = \\ & = \dots = \frac{3}{8}\pi \end{aligned}$$

## ALCUNE FORMULE DI "INTEGRAZIONE PER PARTI"

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Si può scrivere come

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

Nel caso  $N = 1$ : si può vedere (molto con le pinze) come

$$\int_{[a,b]} Df * g dx = [fg]_{[a,b]} - \int_{[a,b]} f * Dg dx$$

$$\iiint_{\Omega} Df * g = \iint_{\partial\Omega^+} fg - \iiint_{\Omega} f * Dg$$

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  campo scalare

Sia  $g: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo vettoriale

$f * g$  è un campo vettoriale

Come operatore differenziale usiamo

$$\operatorname{div}(f * g) =$$

$$= \operatorname{div} \left( (f(x,y,z) * g_1(x,y,z), f(x,y,z) * g_2(x,y,z), f(x,y,z) * g_3(x,y,z))^T \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f}{\partial x} * g_1 + f * \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} * g_2 + f * \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} * g_3 + f * \frac{\partial g_3}{\partial z} = \\ &= f * \operatorname{div} g + \langle \nabla f, g \rangle \\ \Rightarrow \operatorname{div}(f * g) &= f * \operatorname{div} g + \langle \nabla f, g \rangle \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(f * g) dx dy dz =$$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega} f * \operatorname{div} g dx dy dz + \iiint_{\Omega} \langle \nabla f, g \rangle dx dy dz \\ &\underbrace{\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(f * g) dx dy dz}_{\text{per il Teorema della divergenza}} = \iint_{\partial\Omega^+} \langle fg, \nu \rangle d\sigma = \end{aligned}$$

$$= \iint_{\partial\Omega^+} f \langle g, \nu \rangle d\sigma$$

$$\boxed{\iiint_{\Omega} \langle \nabla f, g \rangle dx dy dz = \iint_{\partial\Omega^+} f \langle g, \nu \rangle d\sigma - \iiint_{\Omega} f * \operatorname{div} g dx dy dz}$$

Se  $N = 2$ :

$$\boxed{\iint_{\Omega} \langle \nabla f, g \rangle dx dy dz = \int_{\partial\Omega^+} f \langle g, \nu \rangle d\sigma - \iint_{\Omega} f * \operatorname{div} g dx dy dz}$$

Torniamo al caso  $N = 1$ :

$$f, g \in C^1([a, b])$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f'' g dx &= [f' g]_a^b - \int_a^b f' g' dx = \\ &= [f' g]_a^b - [fg]_a^b + \int_a^b fg'' dx \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $f = g = 0$  su  $[a, b]$  si può dire che

$$\int_a^b f'' g dx = \int_a^b fg'' dx$$

Siano ora  $f, h \in C^2(A, \mathbb{R})$  tali che

$$f|_{\partial A} = h|_{\partial A} = 0$$

Allora

$$\iiint_A f * \Delta h dm = \iiint_A \Delta f * h dm$$

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Poniamo  $g = \nabla f$ .

Dalla formula precedente:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \langle \nabla h, \nabla f \rangle dm &= \underbrace{\iint_{\partial\Omega^+} h \langle \nabla f, \nu \rangle d\sigma}_0 \\ &- \iiint_{\Omega} h * \Delta f dm \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} h \Delta f dm = - \iiint_{\Omega} \langle \nabla h, \nabla f \rangle dm$$

Ho ottenuto che

$$\iiint_A h \Delta f dm = - \iiint_A \langle \nabla h, \nabla f \rangle dm$$

Scambio il ruolo di  $h$  e  $f$

$$\iiint_A f \Delta h \, dm = - \underbrace{\iiint_A \langle \nabla f, \nabla h \rangle \, dm}_{= \iiint_A \langle \nabla h, \nabla f \rangle \, dm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\iiint_A f * \Delta h \, dm = \iiint_A h * \Delta f \, dm}$$

### EQUAZIONE DI LAPLACE

Si dice **equazione di Laplace** l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\Delta f = 0$$

(cioè si cerca una funzione  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\Delta f(x) = 0, \forall x \in \Omega$ ) **connesso**.

Tutte le funzioni costanti sono soluzioni.

Chiediamo inoltre che  $f|_{\partial\Omega} = 0$  per ogni  $x \in \partial\Omega$

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

È un BVP.  $f = 0$  è l'unica soluzione.

Supponiamo che  $f$  sia una soluzione; allora vale

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Se calcoliamo

$$\iiint_A \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{||\nabla f||^2} \, dm = \iiint_A f * \Delta f \, dm = 0$$

Ho l'integrale di una funzione  $||\nabla f||^2 \geq 0$  e continua, ciò implica che  $||\nabla f||^2 = 0$

$$\Rightarrow \nabla f = 0 \quad \stackrel{\Omega \text{ connesso}}{\Rightarrow} \quad f = \text{costante}$$

Sul bordo  $f$  è nulla  $\Rightarrow f = 0$ .

### EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Dinamica di popolazioni, Modello di Malthus:

$N = N(t)$  è il numero di persone di una popolazione.

$\nu$  è il coefficiente di natalità.

$\mu$  è il coefficiente di mortalità.

Dopo un certo tempo  $\Delta t$  quanta è la popolazione?

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \nu \Delta t * N(t) - \mu \Delta t * N(t) =$$

$$\begin{aligned} &= (\nu - \mu) \Delta t * N(t) + N(t) \\ \Rightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= (\nu - \mu) N(t) \\ \Delta t \rightarrow 0 & \\ N'(t) &= (\nu - \mu) N(t) \end{aligned}$$

È un equazione differenziale.

Cerchiamo  $N(t)$  che verifica l'equazione per ogni  $t$ .

$N(t) = 0$  è soluzione ma di poco interesse.

$N(t) = C * e^{(\nu-\mu)t}$  è soluzione  $\Rightarrow$

$$N'(t) = C * (\nu - \mu) e^{(\nu-\mu)t} = (\nu - \mu) N(t)$$

Ci sono infinite soluzioni del tipo

$$\begin{aligned} C * e^{(\nu-\mu)t} \\ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

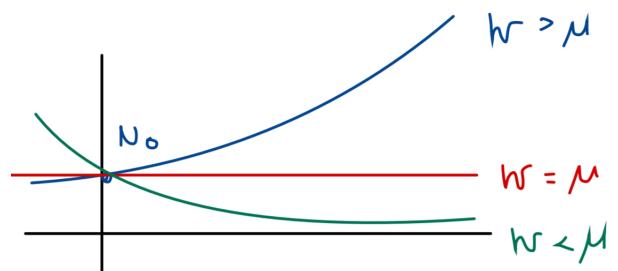
Se  $t = 0$  ottengo la soluzione banale.

$$C = N(0)$$

Detta "condizione iniziale".

Se si impone questa condizione, la soluzione diventa unica.

$$\begin{cases} N' = (\nu - \mu) N \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$



Se  $\nu - \mu > 0$ , allora  $N_0 e^{(\nu-\mu)t}$  è crescente;

Se  $\nu - \mu = 0$ , allora  $N_0 e^{(\nu-\mu)t}$  è costante;

Se  $\nu - \mu < 0$ , allora  $N_0 e^{(\nu-\mu)t}$  è decrescente;

*Gompertz:*

$$\begin{aligned} N' &= -r * N(t) * \log\left(\frac{N(t)}{K}\right) \\ r &= \nu - \mu \end{aligned}$$

Se  $N_0 = K$

$$\log\left(\frac{N_0}{K}\right) = 0$$

$N_0$  è soluzione costante.

Se  $N_0 > K$

$$\log\left(\frac{N_0}{K}\right) > 0$$

$\Rightarrow N$  decresce;

Se  $N_0 < K$

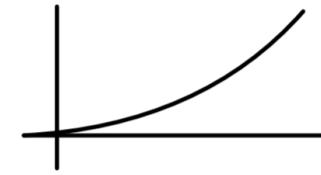
$$\log\left(\frac{N_0}{K}\right) < 0$$

$\Rightarrow N$  cresce;

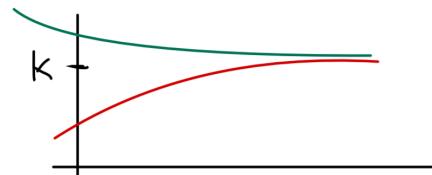
$K$  è il limite di tutte le  $N'$ .

$K$  rappresenta la capacità ambientale ed è il valore a cui tende  $N(t)$  qualunque sia la condizione iniziale  $N_0$ .

$K$  si dice un **equilibrio** del problema, ed è un equilibrio stabile, perché se  $N \approx K$  si ha che  $N$  si avvicina a  $K$ .



Equilibrio:  $N = K$  stabile.



$$N' = (\nu - \mu)N \left[ 1 - \frac{1}{K}N \right]$$

Caso banale:  $(\nu - \mu) = 0$ ,  $N' = 0$  soluzione costante  $\forall K$ .



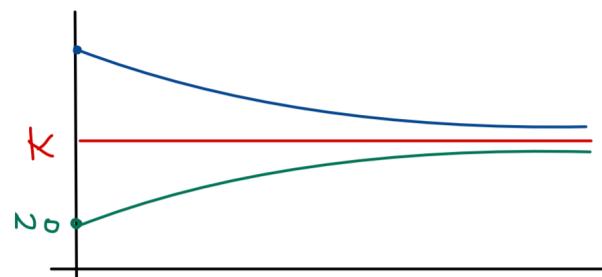
Sia  $\nu > \mu$ ,  $0 < N_0 < K$

$$N'(0) = (\nu - \mu)N_0 \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{K}N_0 \right)}_{>0}$$

$N$  è crescente,  $N'(t) > 0$  se  $N(t) < K$ .

Sia ora  $N_0 > K \Rightarrow 1 - \frac{1}{K}N_0 < 0 \Rightarrow N'(0) < 0$   
 $\Rightarrow N$  è decrescente.

$N'(t) < 0$  se  $N(t) > K$ . Quindi  $K$  è equilibrio stabile.



Sia  $\nu < \mu$ ,  $K = \frac{\nu - \mu}{\varepsilon} < 0$ , in questo caso non è influenzato da  $K$ .

### MODELLO DEGLI ORSI

$$N' = (\nu - \mu)N \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \left( 1 - \frac{m}{N} \right)$$

$$m > 0$$

Se  $N$  è grande,  $\frac{m}{N}$  è piccolo e

$$\left(1 - \frac{m}{N}\right) \approx 1$$

Se  $N$  è grande ho il modello di Verhulst.

Se  $N$  è piccolo  $\left(1 - \frac{m}{N}\right)$  è significativo,  $m$  è la difficoltà di accoppiamento.

Ho 3 equilibri:

$$N = 0, \quad N = K, \quad N = m$$

### MODELLO DELLA PESCA

$$N' = (\nu - \mu)N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - P(N)$$

$P(N)$  è una funzione di  $N$  e rappresenta il "prelievo".

$$P(N) = \text{costante}$$

oppure

$$P(N) = aN$$

$$N' = (\nu - \mu)N \left(1 - \frac{a}{\nu - \mu} - \frac{N}{K}\right)$$

$$K = \frac{\nu - \mu}{\varepsilon}$$

$$N' = (\nu - \mu)N \left(1 - \frac{N + a}{(\nu - \mu) \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)}\right)$$

È di nuovo il modello logistico, cambia  $K$ .

Se  $P(N) = \text{costante}$ :

$$N' = (\nu - \mu)N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - P$$

Se  $N$  è grande è  $P$  piccolo va bene; se però  $N_0$  è basso, il termine  $P$  porta all'estinzione.

### DEF:

Un'**equazione differenziale** è un'equazione funzionale (l'incognita è una funzione) in cui l'incognita funzionale appare con almeno una derivata.

### ESEMPIO:

Trovare  $f$  tale che  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) * f(x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  è un'equazione funzionale ma NON differenziale.  $f(x) = a^x$  è soluzione.

### ESEMPIO:

$$(xy)' + \log xy = 5$$

Chi è  $x$ ? Chi è  $y$ ?

$$y = y(x)? \quad x = x(y)? \quad x(t), y(t)?$$

Se scrivo invece

$$x' = 4xt$$

Allora  $x = x(t)$ .

La variabile funzionale può essere una funzione in una sola variabile o in più variabili.

### ESEMPIO Equazione del Calore:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u = u(t, x)$$

$u$  è la variabile funzionale.

### DEF:

Una equazione differenziale si dice "**alle derivate parziali**" (PDE) se l'incognita è una funzione in più variabili; si dice invece "**ordinaria**" (ODE) se è in una sola variabile.

Diremo **ordine** di un'equazione differenziale il massimo ordine di derivazione che appare nell'equazione.

Un'equazione si dice **autonoma** se non appaiono in modo esplicito le variabili numeriche.

### ESEMPIO:

$$x' - tx + 1 = 0$$

NON è autonoma.

### DEF:

Un'equazione ordinaria si dice **in forma normale** se è esplicita rispetto alla derivata di massimo ordine.

### ESEMPIO:

$$y''' = 3xy'' + 2y - \log(xy)$$

$$y = y(x)$$

È un forma normale.

### EQUAZIONI LINEARI ORDINARIE

Sono equazioni del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Dove  $a_i \in C(\mathbb{R})$ ,  $a_i = a_i(x)$

Se considero

$$P_n(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0$$

Quindi l'equazione lineare è un polinomio dove

$$P_n(y^k \rightsquigarrow y^{(k)})$$

In generale un'equazione differenziale si può scrivere nella forma

$$F\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_i}, u, x_1, \dots, x_N\right) = 0$$

$$k = 1, \dots, n$$

$$i = 1, \dots, n$$

Per una ODE:

$$F(u^{(n)}, u^{(n-1)}, \dots, u, x) = 0$$

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Un'eqazione di questo tipo si dice **lineare** se la funzione  $F$  è lineare rispetto alla variabili funzionali.

### ESEMPIO:

$$\sin(t) u'' + 2t^3 u' - 4u = e^t$$

È un equazione differenziale ordinaria lineare del 2° ordine.

$\sin(t), t^3, e^t$  non sono lineari, però la variabile funzionale è  $u$ , e quindi si ha:

$$a_2(t)u'' + a_1(t)*u' + a_0(t)*u = b(t)$$

Ed è lineare rispetto ad  $u$ .

### ESEMPIO Equazione di Laplace:

$$\Delta u = 0$$

È una PDE lineare autonoma del secondo ordine, mentre

$$y'' = g$$

è la caduta di un grave nel vuoto, è una ODE del secondo ordine autonoma,  $y = y(t)$

$$y' = gt + c_1$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$$

### EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

$$F(x, u, u') = 0$$

$$F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Penso  $u = u(x)$

Se è scritta in forma normale

$$u' = f(x, u)$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

### ESEMPIO:

$$f(x, y) = 2xy$$

$$u' = 2xu$$

$$\text{Soluzioni: } u(x) = ae^{x^2}, a \in \mathbb{R}$$

$$u'(x) = ae^{x^2} * 2x = 2xu(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

### DEF:

Sia  $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $(E)$  l'equazione

$$F(x, u, u') = 0$$

Diremo soluzione di  $(E)$   $F(x, u, u') = 0$  ogni funzione  $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo,  $\varphi$  derivabile su  $I$ , tale che per ogni  $x \in I$ ,

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x))^T \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

[ Se in forma normale  $(E)$   $u' = f(x, u)$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$\varphi$  è soluzione se  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo,  $\varphi$  derivabile su  $I$ ,  $\forall x \in I$   $(x, \varphi(x))^T \in A$  e  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$  ]

### ESEMPIO:

$$F(x, y, z) = xz + y$$

$$xu' + u = 0$$

Considero

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$x * \varphi'(x) + \varphi(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0, \forall x \neq 0$$

$\varphi$  NON è soluzione perché non è definita su un intervallo.

Invece sono soluzioni

$$\varphi_1: ]-\infty, 0[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$$

$\varphi_1$  è soluzione.

### PROBLEMA DI CAUCHY (ai dati iniziali)

$$(CP) \begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_0, u_0)^T \in A$$

Diremo **soluzione** del problema di Cauchy (CP) una funzione definita su un intervallo

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che  $\varphi$  derivabile,

$$\forall x \in I \quad (x, \varphi(x))^T \in A$$

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

e inoltre

$$\varphi(x_0) = u_0$$

### ESEMPIO 1:

$$\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

Abbiamo visto che  $u(x) = 2e^x$

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$u$  è unica

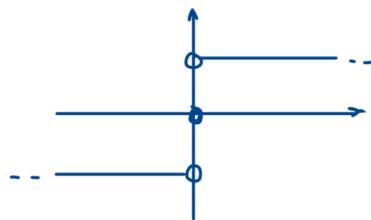
$$f(x, y) = y$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

### ESEMPIO 2:

Considero

$$f(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(0) = 0 \\ u(x) = |x| ? \end{cases}$$

$$u'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Ma  $u$  non è derivabile!

$u'(x)$  ha un salto in 0, ma NON può essere! Per il Teorema sul limite della derivata.

Quindi il problema non ammette soluzioni.

### ESEMPIO 3:

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Una soluzione è  $u = 0$ .

$u(x) = x^2$  è soluzione su  $[0, +\infty[$

$$u'(x) = 2x = 2\sqrt{|u|}$$

Se prendo invece  $u(x) = -x^2$  è anche soluzione su  $] -\infty, 0]$

$$u'(x) = -2x = 2|x| = -2x$$

Se  $x \leq 0$ ,

$$\Rightarrow u(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Ma come soluzione c'è anche

$$u(x) = \begin{cases} -(x - \alpha)^2, & x \leq \alpha \\ 0, & \alpha < x < \beta \\ (x - \beta)^2, & x \geq \beta \end{cases}$$

Quindi ci sono infinite soluzioni del problema di Cauchy definite su  $\mathbb{R}$ .

ESEMPIO 4:

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \\ u \neq 0 \end{cases}$$

Divido per  $u^2$

$$\frac{u'}{u^2} = 1$$

Integro

$$\int_0^x \frac{u'(t)}{u(t)^2} dt = \int_0^x 1 dt = x$$

Pongo  $z = u(t)$

$$dz = u'(t)dt$$

$$t = 0 \rightarrow u(0) = 1$$

$$t = x \rightarrow z = u(x)$$

$$\int_1^{u(x)} \frac{1}{z^2} dz = \left[ -\frac{1}{z} \right]_1^{u(x)} = -\frac{1}{u(x)} + 1$$

E per quanto sopra

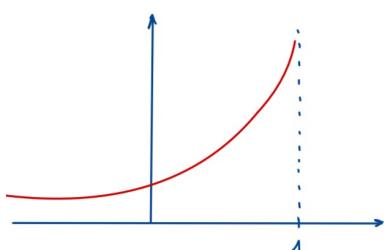
$$\Rightarrow -\frac{1}{u(x)} + 1 = x$$

$$\Rightarrow 1 - x = \frac{1}{u(x)}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{1-x}$$

Nell'esempio 4 il problema ha una ed una sola soluzione unica

$$u(x) = \frac{1}{1-x}$$



che però NON è globale.

DEF:

Sia  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in I, y_0 \in J$ , consideriamo il problema di Cauchy

$$(CP) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Una soluzione si dice **globale** se è definita su  $I$ .

Nell'esempio di prima

$$y' = f(x, y) = y^2$$

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Ma la soluzione  $u: ]-\infty, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$

Alcune questioni importanti su questo problema:

$$(CP) \begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

- Esistenza di una soluzione: *f continua*
- Unicità della soluzione: *f Lipschitz*
- Dominio della soluzione (soluzione Globale): *f sottolineare*
- Questioni di stabilità, equilibri, dinamiche caotiche (studio dei sistemi dinamici)
- Dipendenza continua da condizioni iniziali e parametri
- Calcolo approssimato della soluzione (numerica)

### EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE LINEARI

$$u' = f(x, u)$$

$$f(x, y) = a(x) * y + b(x)$$

$$a, b: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$$

$$f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Se  $b(x) \equiv 0$  diremo che l'equazione è **omogenea**

$$y' = a(x)y$$

Soluzioni:

$$y(x) = c * e^{A(x)}$$

Dove  $A'(x) = a(x)$

Si verifica vedendo che

$$y'(x) = c * e^{A(x)} * a(x) = a(x)y(x)$$

$$y(x_0) = c * e^{A(x_0)} \Rightarrow c = y_0 e^{-A(x_0)}$$

La soluzione di (CP) (omogeneo) è

$$y(x) = y_0 e^{-A(x_0)} e^{A(x)}$$

### TEOREMA (esistenza globale e unicità della soluzione di un (CP) lineare del primo ordine)

$$a, b \in C(I)$$

$I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}, A' = a$

Allora il problema

$$(CP) \begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  (e quindi globale) e si ha

$$\boxed{\varphi(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt}$$

$$K(x, t) = e^{A(x)-A(t)}$$

$K$  è detta **nucleo risolvente** dell'equazione.

DIM:

$$y' = ay + b$$

Moltiplico per  $e^{-A(x)}$   $\Rightarrow$

$$\underbrace{y'(x)e^{-A(x)} - a(x)y(x)e^{-A(x)}}_{\frac{d}{dx}(ye^{-A(x)})} = b(x)e^{-A(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{-A(x)}) = b(x)e^{-A(x)}$$

Integro  $\Rightarrow$

$$\underbrace{\int_{x_0}^x \frac{d}{dt}(ye^{-A(t)}) dt}_{y(x)e^{-A(x)} - y(x_0)e^{-A(x_0)}} = \int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)} dt$$

$$y(x)e^{-A(x)} = y(x_0)e^{-A(x_0)} + \int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)} dt$$

Moltiplico per  $e^{A(x)}$   $\Rightarrow$

$$y(x) = y(x_0)e^{A(x)-A(x_0)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt$$

Ora bisogna dimostrare che è unica:

Siano  $\varphi$  e  $\psi$  due soluzioni, vogliamo dimostrare che sono uguali.

$$\begin{cases} \varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi'(x) = a(x)\psi(x) + b(x) \\ \psi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Sia  $y(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ , allora

$$y'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x) - a(x)\psi(x) - b(x)$$

$$\Rightarrow y'(x) = a(x)(\varphi(x) - \psi(x)) = a(x)y(x)$$

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

Considero la funzione  $z(x) = e^{-A(x)}y(x)$

Si ha che

$$\begin{aligned} z'(x) &= e^{-A(x)}(-a(x))y(x) + e^{-A(x)} \underbrace{y'(x)}_{a(x)y(x)} = \\ &= 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Quindi  $z(x)$  è costante, però

$$z(x_0) = e^{-A(x_0)}y(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow z(x) = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in I$$

E quindi la soluzione è unica. ■

Premessa:

Consideriamo

$$y' = f(x, y)$$

Sia  $|f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

Sia  $y$  soluzione con  $y(0) = 0$ .

Allora  $|y'(x)| \leq M$ .

Questo perchè

$$|y'(x)| = |f(x, y(x))| \leq M$$

In altre parole il grafico di  $y$  non può uscire dalla regione angolare

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : -Mx \leq y \leq Mx\}$$

### TEOREMA DI ESISTENZA LOCALE DI PEANO

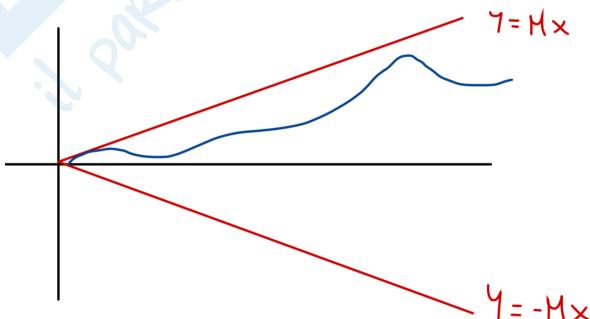
Sia  $R$  un rettangolo,

$$R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

$$a, b \in \mathbb{R}^+$$

Sia  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  continua; sia  $|f(x, y)| \leq M$  su  $R$ .

$$\text{Sia } \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$



Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ha almeno una soluzione definita su  $[x_0, x_0 + \alpha]$ .

### FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Sia  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **Lipschitziana** se esiste  $L \in \mathbb{R}$  tale che  $\forall x_1, x_2 \in I$

$$\Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$$

OSS:

$f$  Lipschitz  $\Rightarrow f$  unif. continua

$$\forall \varepsilon > 0, \delta = \frac{\varepsilon}{L}$$

Se  $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < L|x_2 - x_1| < \varepsilon$$

ES:

$f(x) = x^2$  non è Lipschitz però è localmente Lipschitziana ( $\forall$  compatto  $K \subset \mathbb{R}$  la restrizione di  $f$  è Lipschitziana).

Una funzione derivabile con derivata limitata è Lipschitziana

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \left| \overbrace{f'(\xi)}^{< L} (x_2 - x_1) \right| < L|x_2 - x_1|$$

### Funzione Lipschitziana in due variabili:

Sia  $f: I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitziana nella variabile  $y$  uniformemente rispetto alla variabile  $x$  significa che esiste  $L \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall x \in I, \quad y_1, y_2 \in J$$

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$$

### TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE (Cauchy-Lipschitz/Lindelof-Picard)

Sia  $R$  un rettangolo,

$$R = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

$$a, b \in \mathbb{R}^+$$

Sia  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $R$  Lipschitziana in  $y$  uniformemente rispetto a  $x$ , con costante di Lipschitz  $L$ .

Sia  $|f(x, y)| \leq M$  su  $R$ . Sia  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$

Allora esiste una ed una sola soluzione su  $[x_0, x_0 + \alpha]$  di  $(CP)$   $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

DIM:

Passo 1) Riformulazione integrale del problema:

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$$\Rightarrow y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$u$  è soluzione di  $(CP)$  se e solo se  $u$  è soluzione dell'equazione integrale

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Passo 2) Definiamo per ricorrenza (induzione) una successione di funzioni

$$\varphi_n: [x_0, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$$

che verificano le seguenti proprietà:

(Passo base)

$$\varphi_0(x) = y_0 \text{ costante}$$

Definiremo

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt$$

$$(t, \varphi_n(t))^T \in \text{dom } f$$

Chiediamo quindi

$$1. \quad |\varphi_n(x) - y_0| \leq b, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + a]$$

$$2. \quad \Downarrow$$

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq M \frac{L^n}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$$\forall x \in [x_0, x_0 + a]$$

$\varphi_1$  sarà quindi definita

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$$

Per  $n = 0$  la 1. è soddisfatta.

Per la 2. si chiede

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt - y_0 \right| \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \int_{x_0}^x \underbrace{|f(t, y_0)|}_{\leq M} dt \leq M * (x - x_0) = \\ & = M * \frac{L^0}{(0+1)!} (x - x_0)^{0+1} \end{aligned}$$

Passo base è verificato.

Passo induttivo:

Supponiamo sia vero fino a  $n$ :

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leq b, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + a]$$

E

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq M \frac{L^n}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Poniamo  $\varphi_{n+1}$  come anticipato

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt$$

Dimostriamo siano vere le condizioni per  $n + 1$ :

Per la 1 si fa come prima:

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt \right| \leq \\ &\leq M(x - x_0) \leq ** \end{aligned}$$

Si ricorda che  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$  e quindi

$$** \leq Ma \leq b$$

In quanto  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ , e quindi la 1 è OK.

Per la 2:

$$\begin{aligned} & |\varphi_{n+2}(x) - \varphi_{n+1}(x)| = \\ &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n+1}(t)) dt - y_0 \right. \\ & \quad \left. - \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n+1}(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{n+1}(t)) - f(t, \varphi_n(t)) dt \right| \leq \\ & \leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi_{n+1}(t)) - f(t, \varphi_n(t))| dt \leq *** \end{aligned}$$

Essendo  $f$  Lipschitziana ho che

$$\begin{aligned} & |f(t, \varphi_{n+1}(t)) - f(t, \varphi_n(t))| \leq L |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \\ & *** \leq \int_{x_0}^x L |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| dt \leq **** \end{aligned}$$

Per l'ipotesi induttiva so che

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq M \frac{L^n}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

E quindi

$$\begin{aligned} **** &\leq \int_{x_0}^x LM \frac{L^n}{(n+1)!} (t - x_0)^{n+1} dt = \\ &= \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (t - x_0)^{n+1} dt = \\ &= \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} \left[ \frac{1}{n+2} (t - x_0)^{n+2} \right]_{x_0}^x = \\ &= ML^{n+1} * \frac{1}{(n+2)!} (x - x_0)^{n+2} \end{aligned}$$

Verificato  $\forall n$ .

Passo 3:

Considero la serie di termine generale

$$h_n(x) = \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$$

Questa serie converge uniformemente perché

$$\begin{aligned} |h_n(x)| &\leq M \frac{L^n}{(n+1)!} \underbrace{(x-x_0)}_{\leq \alpha}^{n+1} \leq \\ &\leq M \frac{L^n}{(n+1)!} \alpha^{n+1} \end{aligned}$$

e la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M \alpha \frac{(L\alpha)^n}{(n+1)!}$$

converge (ordine soprareale) per l'M-test di Weierstrass.

Abbiamo quindi che converge la serie telescopica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x)$$

La sua ridotta è

$$\begin{aligned} S_n(x) &= (\varphi_1(x) - \varphi_0(x)) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \\ &\quad + \cdots + (\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)) + \\ &\quad + (\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)) \end{aligned}$$

In cui si semplificano i termini a 2 a 2 e resta

$$S_n(x) = \varphi_{n+1}(x) - \varphi_0(x)$$

Dato che la serie converge, significa che esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

E quindi esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

$f$  è continua su  $R$  per ipotesi, quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t, \varphi_n(t)) = f(t, \varphi(t))$$

Ma allora per le proprietà del passaggio dell'integrale nel limite si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

Si ha  $\forall n$  che

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt$$

E quindi prendendo il limite si ottiene

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

E quindi  $\varphi(x)$  è soluzione dell'equazione integrale e di conseguenza del problema di Cauchy.

Bisogna ora dimostrare l'unicità.

Sia  $z$  soluzione, allora

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt$$

Per induzione verifichiamo che

$$|\varphi_n(x) - z(x)| \leq M \frac{L^n}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Passo base:  $n = 0$

$$\begin{aligned} \left| \underbrace{\varphi_0(x)}_{y_0} - z(x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt \right| \leq \\ &\leq M(x - x_0) \end{aligned}$$

Passo induttivo:  $n \rightarrow n+1$

Sia vero per  $n$ .

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - z(x)| &= \\ &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt - y_0 \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi_n(t)) - f(t, z(t))| dt \stackrel{\text{Lipschitz}}{\leq} \\ &\leq \int_{x_0}^x L |\varphi_n(t) - z(t)| dt \stackrel{\text{Ipotesi}}{\leq} \\ &\leq \int_{x_0}^x LM \frac{L^n}{(n+1)!} (t - x_0)^{n+1} dt = \dots \end{aligned}$$

$$\dots = ML^{n+1} * \frac{1}{(n+2)!} (x - x_0)^{n+2}$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi_n(x) - z(x)| = 0$$

Cioè

$$\varphi(x) = z(x)$$

E abbiamo dimostrato anche l'unicità. ■

### OSS: Confronto delle soluzioni di un problema di Cauchy

Siano  $f, g: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) < g(x, y)$ ,  
 $u_0, \varphi_0 \in J$ ,  $u_0 \leq \varphi_0$ ,  $x_0 \in I$

$$(1) \begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \varphi' = g(x, \varphi) \\ \varphi(x_0) = \varphi_0 \end{cases}$$

Con le ipotesi del teorema precedente. (In ipotesi di Lipschitz)

Siano  $u$  e  $\varphi$  soluzioni si (1) e (2) ripetutivamente sull'intervallo  $[x_0, x_0 + \alpha]$

Allora  $u(x) < \varphi(x), \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha]$

DIM:

Caso  $u_0 = \varphi_0$ , allora

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= f(x_0, u_0) = f(x_0, \varphi_0) < g(x_0, \varphi_0) = \\ &= \varphi'(x_0) \\ \Rightarrow u'(x_0) &< \varphi'(x_0) \end{aligned}$$

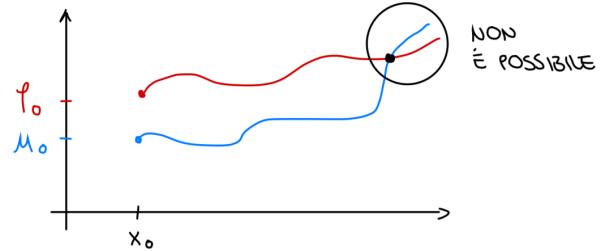
Quindi almeno su un tratto  $[x_0, x_1]$  si ha

$$u(x) < \varphi(x)$$

Se  $u_0 < \varphi_0$  si ha ovviamente che  $u(x) < \varphi(x)$  su  $[x_0, x_1]$ .

Supponiamo  $x_1 > x_0$  tale che  $u(x_1) = \varphi(x_1)$ ; allora

$$\begin{aligned} u'(x_1) &= f(x_1, u(x_1)) = f(x_1, \varphi(x_1)) < \\ &< g(x_1, \varphi(x_1)) = \varphi'(x_1) \\ \Rightarrow u'(x_1) &< \varphi'(x_1) \end{aligned}$$



Che è impossibile perché non si potrebbero mai intersecare.

### TEOREMA DI ESISTENZA GLOBALE DELLA SOLUZIONE

Sia  $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e Lipschitziana in  $y$  uniformemente rispetto a  $x$ ; sia inoltre sottolineare cioè esistono  $a, b \in C(I)$  tali che

$$|f(x, y)| \leq a(x)y + b(x) \quad \forall (x, y)^T \in I \times \mathbb{R}$$

Allora il (CP)

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione globale (definita su  $I$ )

DIM:

Dato che

$$-a(x)y - b(x) \leq f(x, y) \leq a(x)y + b(x)$$

$$-1 - a(x)y - b(x) < f(x, y) < a(x)y + b(x) + 1$$

Considero i problemi

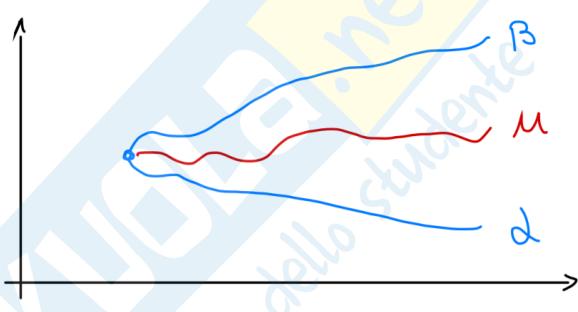
$$(1) \begin{cases} y' = -a(x)y - b(x) - 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y' = a(x)y + b(x) + 1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Siano  $\alpha$  soluzione di (1),  $\beta$  soluzione di (2),  $u$  soluzione di (CP).

Per il confronto delle soluzioni si ha che

$$\alpha(x) < u(x) < \beta(x)$$



Su  $[x_0, x_0 + \alpha]$ .

$\alpha$  e  $\beta$  sono soluzioni di problemi lineari quindi sono soluzioni globali cioè definite su  $I$ .

Se  $u$  non è definita su tutto  $I$ :

- $u$  tende a  $\pm\infty$ , ma è impossibile perché  $\alpha(x) < u(x) < \beta(x)$
- $u'$  tende a  $\pm\infty$  ma è impossibile perché  $u'(x) = f(x, u(x))$ , che è continua su un compatto, quindi è limitata

Quindi anche  $u$  è definita su  $I$ .

### ESEMPI:

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{x}y + x^3 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Equazione differenziale ordinaria del primo ordine lineare.

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$$a(x) = \frac{2}{x}$$

$$a, b: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A(x) = 2 \log x = \log x^2$$

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt$$

$$e^{A(x)} = x^2, \quad e^{-A(x_0)} = e^0 = 1$$

$$e^{-A(t)} = t^{-2}$$

$$y(x) = 2x^2 + \int_1^x x^2 * \frac{1}{t^2} t^3 dt =$$

$$= 2x^2 + x^2 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2$$

Controllo il risultato

$$y(1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$y'(x) = 2x^3 + 3x$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x}y(x) + x^3 &= \frac{2}{x} \left( \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right) + x^3 = \\ &= x^3 + 3x + x^3 = 2x^3 + 3x \end{aligned}$$

### EQUAZIONI A VARIABILI SEPARATE

$$y' = f(x, y)$$

Supponiamo che  $f(x, y) = a(x) * b(y)$

$$a: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Continue. Esiste una soluzione per il Teorema di Peano. Vogliamo trovare una soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = a(x) * b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Caso 1:  $b(y_0) = 0$ , una soluzione è  $y(x) = y_0$  costante

Caso 2:  $b(y_0) \neq 0$ , quindi per continuità sarà  $b(y) \neq 0$  in un intorno di  $y_0$ , e quindi, se  $y(x)$  è soluzione, in un intorno di  $x_0$  sarà  $b(y(x)) \neq 0$ , allora posso dividere per  $b(y(x))$

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int_{x_0}^x a(t) dt = A(x) - A(x_0)$$

Poniamo  $z = y(t) \Rightarrow dz = y'(t)dt$

$$\int_{y(x_0)=y_0}^{y(x)} \frac{1}{b(z)} dz = H(y(x)) - H(y_0)$$

$$\text{Dove } H'(z) = \frac{1}{b(z)}$$

$$H(y(x)) = H(y_0) + A(x) - A(x_0)$$

Vorrei scrivere

$$y(x) = H^{-1}(H(y_0) + A(x) - A(x_0))$$

$H$  è invertibile perché  $H'(z) = \frac{1}{b(z)}$  ha segno costante e quindi  $H$  è strettamente monotona e quindi invertibile

ESEMPIO:

$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{y'}{y^2} = x$$

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)^2} dt = \int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{2}x^2$$

$$-\frac{1}{y(x)} + 1 = \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$y(x) = \frac{2}{2 - x^2}$$

$$y: ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

Non è globale perché non è sottolineare, infatti in

$$y' = xy^2$$

C'è una dipendenza dalla  $x$ .

ESEMPIO:

$$\begin{cases} y' = 2\frac{x}{y}e^{-y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$2\frac{x}{y}e^{-y} = \underbrace{\frac{2x}{a(x)}}_{b(y)} * \underbrace{\frac{ye^y}{b(y)}}_{y'}$$

$$b(1) = \frac{1}{e} \neq 0$$

$$\Rightarrow ye^y * y' = 2x$$

$$\int_0^x ye^y * y' dt = x^2$$

$$\begin{aligned} \int_1^{y(x)} ze^z dz &= \dots = e^{y(x)}y(x) - e - e^{y(x)} + e = \\ &= \underbrace{e^y(y-1)}_{H(y)} = x^2 \end{aligned}$$

Non c'è un'espressione analitica per  $H^{-1}$

Se  $x \geq 0$

$$x = \sqrt{e^y(y-1)}$$

Se  $x < 0$

$$x = -\sqrt{e^y(y-1)}$$

ESEMPIO sostituzione:

$$\begin{cases} y' = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy} = 2\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\frac{y}{x} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Uso la sostituzione

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu$$

$$\Rightarrow y' = x + xu' = 2\frac{1}{u} + \frac{3}{2}u$$

$$u(2) = \frac{y(2)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \left[ 2\frac{1}{u} + \frac{3}{2}u \right] = \frac{1}{x} \frac{4+u^2}{2u} \\ u(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{2u}{4+u^2} u' = \frac{1}{x}$$

$$\int_2^x \frac{2u}{4+u^2} u' dt = \int_2^x \frac{1}{t} dt = \log \frac{x}{2}$$

$$z = u(t) \Rightarrow dz = u' dt$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{u(x)} \frac{2z}{4+z^2} dz = [\log(4+z^2)]_{\frac{1}{2}}^{u(x)} =$$

$$= \log \frac{4+u^2}{4+\frac{1}{4}} = \log \left[ \frac{4}{17}(4+u^2) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{4}{17}(4+u^2) = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow 4+u^2 = \frac{17}{8}x$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{17}{8}x - 4$$

$$\Rightarrow u(x) = \sqrt{\frac{17}{8}x - 4}$$

$$y = xu = x \sqrt{\frac{17}{8}x - 4}$$

$$y: [\frac{32}{17}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

### EQUAZIONI DI BERNOULLI

$$y' = ay + by^\gamma$$

$$\gamma \in \mathbb{R}$$

$$a, b \in C(I)$$

$$\text{Se } \gamma = 0 \Rightarrow y' = ay + b$$

$$\text{Se } \gamma = 1 \Rightarrow y' = (a + b)y$$

Che sono lineari. Supponiamo quindi che

$$\gamma \neq 0, 1, \quad y(x) \neq 0 \quad \forall x$$

$$\frac{y'}{y^\gamma} = ay^{1-\gamma} + b$$

Si osservi che

$$\frac{d}{dx} y(x)^{1-\gamma} = (1-\gamma) \frac{y'}{y^\gamma}$$

Moltiplico l'equazione per  $(1-\gamma)$

$$(1-\gamma) \frac{y'}{y^\gamma} = (1-\gamma)(ay^{1-\gamma} + b)$$

Uso la sostituzione

$$u = y^{1-\gamma}$$

$$\Rightarrow u' = a(1-\gamma)u + b(1+\gamma)$$

Che è lineare.

### ESEMPIO:

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} + \frac{1}{x^2 y^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

È un'equazione di Bernoulli:  $\gamma = -2$

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}y^{-2}$$

$$\Rightarrow y^2 y' = -\frac{1}{x}y^3 + \frac{1}{x^2}$$

Uso la sostituzione

$$u = y(x)^3$$

$$u' = 3y(x)^2 y'(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u' = -\frac{3}{x}u + \frac{3}{x^2} \\ u(1) = 8 \end{cases}$$

$$a(x) = -\frac{3}{x}, \quad b(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$A(x) = -3 \log x$$

La condizione iniziale  $x_0 = 1 > 0$  è positiva e quindi  $x > 0$  è positivo.

$$e^{A(x)} = x^{-3}$$

$$e^{-A(t)}$$

$$u(x) = 8e^{A(x)-A(x_0)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} * b(t) dt =$$

$$= 8x^{-3} + x^{-3} \int_{x_0}^x t^3 * \frac{3}{t^2} dt =$$

$$= 8x^{-3} + x^{-3} * \frac{8}{2}(x^2 - 1) =$$

$$= \left(8 - \frac{3}{2}\right)x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-1} =$$

$$= \frac{13}{2}x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-1}$$

$$y(x) = u^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{13}{2}x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-1}}$$

### Modello di propagazione di una malattia MS

$$M = 1 - S$$

$$M' = k * M(1 - M)$$

$$y' = ky - ky^2$$

È un'equazione di Bernoulli / variabili separate

$$\gamma = 2$$

$$\frac{y'}{y^2} = k \frac{1}{y} - k$$

$$u = \frac{1}{y}$$

$$u' = -\frac{1}{y^2}, y > 0$$

$$-\frac{y'}{y^2} = -k \frac{1}{y} + k$$

$$\Rightarrow u' = -ku + k$$

$$u(x) = e^{-kx} + 1$$

$$y(x) = \frac{1}{\lambda e^{-kx} + 1}$$

$$y(0) = \frac{1}{\lambda + 1}$$

$$\lambda + 1 = \frac{1}{y(0)}$$

$$\lambda = \frac{1}{y_0} - 1$$

$$\Rightarrow M(x) = \frac{1}{\frac{1 - M_0}{M_0} e^{-kx} + 1} =$$

$$= \frac{M_0}{M_0 + (1 - M_0)e^{-kx}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = 1$$

Torniamo alle equazioni differenziali lineari del primo ordine da un punto di vista più astratto

$$(C) \quad y' = a(x)y + b(x)$$

$$a, b \in C(I)$$

I intervallo.

$$(H) \quad y' = a(x)y$$

È detta **equazione omogenea associata** all'equazione "completa" (C).

Consideriamo l'operatore differenziale

$$L: C^1(I) \rightarrow C^0(I)$$

Se ho una funzione  $y \in C^1(I) \Rightarrow$

$$\Rightarrow L(y)(x) = y'(x) - a(x)y(x)$$

$$L(y) \in C^0(I)$$

OSS:

$L$  è lineare: siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $y_1, y_2 \in C^1(I)$ .

$$\begin{aligned} L(\alpha y_1 + \beta y_2) &= (\alpha y_1 + \beta y_2)' - a(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \alpha y'_1 + \beta y'_2 - \alpha a y_1 - \beta a y_2 = \\ &= \alpha(y'_1 - a y_1) + \beta(y'_2 - a y_2) = \\ &= \alpha L(y_1) - \beta L(y_2) \end{aligned}$$

$\text{Ker } L = \text{nucleo di } L =$

$$= \{y \in C^1(I): L(y) = 0\} =$$

$$= \{y \text{ soluzioni di } (H)\}$$

$$\text{Ker } L = S_H = \{\text{soluzioni di } (H)\}$$

È uno spazio vettoriale di dimensione 1

$$\text{Ker } L = \text{span}\{e^{A(x)}\}$$

Infatti ogni soluzione di (H)  $y' = a(x)y$  è del tipo  $\lambda u_1(x)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$

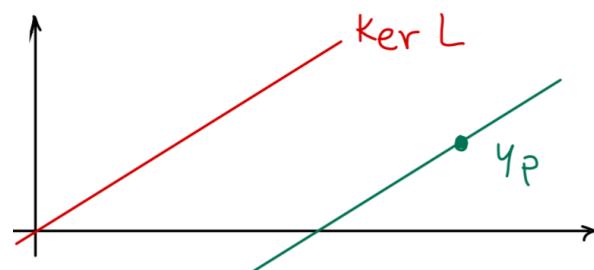
$$(C) \quad y' - a(x)y = b(x)$$

$$L(y) = b$$

L'insieme delle soluzioni di (C) è

$$L^{-1}\{b\} = \{y \in C^1(I): L(y) = b\}$$

Questo è uno spazio affine; è il "traslato" del nucleo di  $L$ .



$$L^{-1}\{b\} = S_C = \{\text{soluzioni di } (C)\} =$$

$$= \text{Ker } L + \{y_p\} = \{u + y_p: u \in \text{Ker } L\}$$

$y_p$  è una qualsiasi fissata soluzione di (C).

Supponiamo di conoscere  $\text{Ker } L = \text{span}\{u_1\}$

Supponiamo inoltre di conoscere una soluzione particolare  $y_p$  di (C)  $y' = a(x)y + b(x)$

Allora le soluzioni di (C) sono tutte le funzioni  $y \in C^1(I)$  che si possono scrivere nella forma

$$y = u + y_p$$

Con  $u \in \text{Ker } L$

DIM:

Sia  $y$  soluzione di (C); allora  $u = y - y_p$  soddisfa

$$u' - a(x)u = (y' - y'_p) - a(x)(y - y_p) =$$

$$= \underbrace{[y' - a(x)y]}_{b(x)} - \underbrace{[y'_p - a(x)y_p]}_{b(x)} = 0$$

$$\Rightarrow u \in \text{Ker } L$$

$$\Rightarrow y = u + y_P$$

Viceversa se  $y = u + y_P$ ,  $u \in \text{Ker } L$  si ha

$$\Rightarrow L(y) = \underbrace{L(u)}_0 + \underbrace{L(y_P)}_b = b \quad \blacksquare$$

**PROBLEMA:** trovare una soluzione  $y_P$  dell'equazione completa

**TEOREMA (Metodo della variazione della costante per la determinazione di una soluzione particolare dell'equazione completa)**

$$(H) \quad y' = a(x)y$$

$$y(x) = \lambda u_1(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(C) \quad y' = a(x)y + b(x)$$

Cercheremo una soluzione di  $(C)$  del tipo

$$y(x) = \lambda(x)u_1(x)$$

Cioè faccio "variare" la costante  $\lambda$ .

Fissiamo una base di  $\text{Ker } L$  cioè una funzione  $\{u_1\}$  e consideriamo  $y(x) = \lambda(x)u_1(x)$

[  $\lambda(x)$  è una funzione da determinare ]

$$L(y)(x) = \frac{(\lambda(x)u_1(x))'}{\lambda'(x)u_1(x) + \lambda(x)u'_1(x)} - a(x)\lambda(x)u_1(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(y)(x) &= \lambda'(x)u_1(x) \\ &\quad + \lambda(x) \left( \underbrace{u'_1(x) - a(x)u_1(x)}_{=L(u_1)(x)=0} \right) = \\ &\stackrel{?}{=} b(x) \end{aligned}$$

Se e solo se

$$\lambda'(x) = \frac{1}{u_1(x)} * b(x)$$

Sicuramente  $u_1 \neq 0$ , ma può esistere  $x_0 \in I$  tale che  $u_1(x_0) = 0$  ?

No, perché se esistesse avrei che  $u_1$  è soluzione del problema di Cauchy

$$(CP) \begin{cases} u' = a(x)u(x) \\ u(x_0) = 0 \end{cases}$$

In questo problema il secondo membro soddisfa le ipotesi di Lipschitz, e quindi se  $u_1$  è soluzione ed è unica, si avrebbe che

$$\Rightarrow u_1(x) = 0 \quad \forall x \text{ impossibile}$$

$$\text{E quindi } \lambda'(x) = \frac{1}{u_1(x)} * b(x).$$

Integro ( $x_0 \in I$ )

$$\lambda(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{u_1(t)} b(t) dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_P &= \lambda(x)u_1(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{u_1(t)} b(t) dt * u_1(x) = \\ &= \int_{x_0}^x \underbrace{K(x,t)}_{\substack{\text{nucleo} \\ \text{risolvente}}} * b(t) dt \\ K(x,t) &= u_1(x) * \frac{1}{u_1(t)} \end{aligned}$$

Sappiamo che

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{A(x)} \\ \Rightarrow K(x,t) &= e^{A(x)-A(t)} \\ \Rightarrow y_P(x) &= \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt \end{aligned}$$

Sapevamo infatti che le soluzioni erano del tipo

$$y(x) = \lambda e^{A(x)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt$$

**PROBLEMA LINEARIZZATO**

Supponiamo di avere un'equazione del primo ordine non lineare

$$(CP) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Linearizzare il problema significa linearizzare il campo  $f \Rightarrow$  consideriamo l'approssimante lineare in un intorno di  $(x_0, y_0)^T$

$$\tilde{f}(x,y) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \rangle$$

Dove

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \rangle &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

$\tilde{f}(x,y)$  è un'applicazione lineare, quindi posso considerare il problema

$$\begin{cases} CP \\ lin \end{cases} \begin{cases} u' = \tilde{f}(x, u) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Che è un problema lineare.

Se  $u$  è soluzione del problema di  $\begin{cases} CP \\ lin \end{cases}$  e  $y$  è soluzione di  $(CP)$ , quanto sono diverse  $u$  e  $y$  vicino a  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ?

Per l'ordine 0 è subito verificato per definizione che  $u(x_0) = y(x_0)$

Primo ordine: dobbiamo calcolare  $u'(x_0)$

$$u'(x) = \tilde{f}(x, u(x)) =$$

$$\begin{aligned} &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(u(x) - y_0) \end{aligned}$$

In particolare se lo calcolo in  $x_0$

$$u'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

Per quanto riguarda  $y'(x_0)$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0) = u'(x_0)$$

Secondo ordine: valutiamo  $u''(x_0), y''(x_0)$

$$u'(x) = \tilde{f}(x, u(x)) =$$

$$\begin{aligned} &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(u(x) - y_0) \end{aligned}$$

$$u''(x) = \frac{d}{dx} \tilde{f}(x, u(x)) =$$

$$= \frac{df}{dx}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)u'(x)$$

$$u''(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)u'(x_0)$$

Per quanto riguarda  $y''(x_0)$

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) * 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) * y'(x)$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) * y'(x_0)$$

Ricordando che  $y'(x_0) = u'(x_0)$  abbiamo ottenuto che

$$\Rightarrow u''(x_0) = y''(x_0)$$

Quindi  $y(x) - u(x) = o(|x - x_0|)^2$

ESEMPIO:

$$(1) \begin{cases} y' = e^y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$f(x, y) = e^y$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y = \\ &= 1 + y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2) \begin{cases} u' = u + 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione di (1) è

$$e^{-y}y' = 1$$

$$\int_0^x e^{-y}y' dt = x$$

$$\int_0^{y(x)} e^{-z} dz = -e^{-y(x)} + 1 = x$$

$$\Rightarrow e^{-y} = 1 - x$$

$$\Rightarrow -y = \log(1 - x)$$

$$y(x) = -\log(1 - x)$$

La soluzione di (2) è

$$u(x) = e^x - 1, \quad y(x) = -\log(1 - x)$$

$$u'(x) = e^x, \quad y'(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$u''(x) = e^x, \quad y''(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

$$u'''(x) = e^2, \quad y''(x) = \frac{2}{(1 - x)^3}$$

$$u(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

$$u'(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$u''(0) = 1, \quad y''(0) = 1$$

$$u'''(0) = 1, \quad y'''(0) = 2$$

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DI ORDINE N (in forma normale)

$$(E) \quad u^{(N)} = f(x, u, u', \dots, u^{(N-1)})$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_N)$$

$$(CP) \begin{cases} u^{(N)} = f(x, u, u', \dots, u^{(N-1)}) \\ u(x_0) = W_1^0 \\ u'(x_0) = W_2^0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = W_N^0 \end{cases}$$

Ho N condizioni iniziali. Supponendo che

$$(x_0, W_1^0, W_2^0, \dots, W_N^0)^T \in A$$

DEF:

$u$  è soluzione di (E) se  $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo,  $u$  N volte derivabile,  $\forall x \in I$ , il punto

$$\left( x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x) \right)^T \in A$$

e

$$f\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right) = u^{(N)}(x)$$

$u$  è soluzione di (CP) se inoltre soddisfa

$$u(x_0) = W_1^0, u'(x_0) = W_2^0, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = W_N^0$$

## TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ ORDINE N

Sia  $f: [x_0, x_0 + \alpha] \times K \subseteq \mathbb{R}^{N+1}, K$  compatto

Sia  $f$  continua, allora esiste  $\alpha > 0$  e almeno una soluzione di (CP)  $u: [x_0, x_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sia  $f$  continua e Lipschitziana in  $y$  uniformemente rispetto a  $x$  ( $y = (y_1, \dots, y_N)^T$ ), cioè esiste  $L \in \mathbb{R}^+$  tale che  $\forall x \in [x_0, x_0 + \alpha]$  e  $\forall y, z \in K$  si ha che

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L |y - z|$$

Allora la soluzione è unica.

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI DI ORDINE N

$$y^{(N)} = a_{N-1}y^{(N-1)} + \dots + a_1y' + a_0y + b(x)$$

$$a_k, b \in C(I)$$

$$L: C^N(I) \rightarrow C^0(I)$$

$$L(y)(x) = y^{(N)}(x) - a_{N-1}y^{(N-1)} - \dots - a_1y' - a_0y$$

Diremo equazione omogenea

$$(H) \quad L(y) = 0$$

Diremo equazione completa

$$(C) \quad L(y) = b$$

OSS:

$L$  è lineare;

$$\begin{aligned} L(\alpha y_1 + \beta y_2) &= ((\alpha y_1 + \beta y_2)^{(N)} \\ &\quad - a_{N-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(N-1)} - \dots \\ &\quad - a_0(\alpha y_1 + \beta y_2)) = \\ &= \alpha y_1^{(N)} + \beta y_2^{(N)} - a_{N-1}\alpha y_1^{(N-1)} \\ &\quad - a_{N-1}\beta y_2^{(N-1)} - \dots - \alpha a_0 y_1 \\ &\quad - \beta a_0 y_2 = \\ &= \alpha (y_1^{(N)} - a_{N-1}y_1^{(N-1)} - \dots - a_0 y_1) \\ &\quad + \beta (y_2^{(N)} - a_{N-1}y_2^{(N-1)} - \dots \\ &\quad - a_0 y_2) = \\ &= \alpha L(y_1) + \beta L(y_2) \end{aligned}$$

OSS:

$$\text{Ker } L = S_H = \{\text{soluzioni dell'eq. omogenea}\}$$

OSS:

Sia  $y_P$  una qualunque soluzione fissata di (C); allora l'insieme di tutte le soluzioni

$$\begin{aligned} S_C &= \{\text{soluzioni di (C)}\} = \text{Ker } L + \{y_P\} = \\ &= \{u + y_P : u \in \text{Ker } L\} \end{aligned}$$

Infatti, sia  $y \in S_C$ ; considero  $u = y - y_P$ , si ha che

$$L(u) = L(y) - L(y_P) = b - b = 0$$

$$\Rightarrow u \in \text{Ker } L \Rightarrow y = u + y_P$$

Viceversa, sia  $y = u - y_P$  con  $u \in \text{Ker } L$ ; allora

$$L(y) = L(u) + L(y_P) = b$$

### TEOREMA (Ker L)

Ker L ha dimensione N.

DIM:

Consideriamo N problemi di Cauchy associati all'equazione: (fissiamo un punto  $x_0 \in I$ )

$$(CP_1) \left\{ \begin{array}{l} Ly = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x_0) = 0 \end{array} \right.$$

$$(CP_2) \left\{ \begin{array}{l} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x_0) = 0 \end{array} \right.$$

$$(CP_N) \left\{ \begin{array}{l} Ly = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x_0) = 1 \end{array} \right.$$

Ciascuno di questi problemi ha una ed una sola soluzione  $u_i$  perchè sono lineari e verificano le ipotesi di Lipschitz.

$$u_i: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N$$

Verifichiamo che  $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$  è una base per Ker L.

1) Linearmente dipendenti

$$\text{Sia } u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_N u_N = \underbrace{0}_{\text{funzione, } \forall x}$$

$$u = 0 \Rightarrow u' = 0, u'' = 0, \dots, u^{(N-1)} = 0$$

In particolare posso calcolare  $u(x_0)$

$$0 = u(x_0) = \lambda_1 \underbrace{u_1(x_0)}_1 + \dots + \lambda_N \underbrace{u_N(x_0)}_0$$

$u_1$  è soluzione di  $(CP_1)$  quindi  $u_1(x_0) = 1$

$u_2$  è soluzione di  $(CP_2)$  quindi  $u_2(x_0) = 0$

$\vdots$

$u_N$  è soluzione di  $(CP_N)$  quindi  $u_N(x_0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = u(x_0) = \lambda_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Per dimostrare che sono tutti 0 derivo

$$0 = u'(x_0) = \lambda_1 u'_1(x_0) + \dots + \lambda_N u'_N(x_0)$$

$u_1$  è soluzione di  $(CP_1)$  quindi  $u'_1(x_0) = 0$

$u_2$  è soluzione di  $(CP_2)$  quindi  $u'_2(x_0) = 1$

$\vdots$

$u_N$  è soluzione di  $(CP_N)$  quindi  $u'_N(x_0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = u'(x_0) = \lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0$$

Si procede così per ogni ordine di derivata

$$\begin{aligned} 0 = u^{(k)}(x_0) &= \lambda_1 \underbrace{u_1^{(k)}(x_0)}_0 + \dots + \lambda_k \underbrace{u_k^{(k)}(x_0)}_1 \\ &\quad + \dots + \lambda_N \underbrace{u_N^{(k)}(x_0)}_0 = \lambda_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = 0$$

2)  $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$  genera lo spazio

Sia  $u \in \text{Ker } L$ ; consideriamo il problema di Cauchy

$$(CP) \left\{ \begin{array}{l} Ly = 0 \\ y(x_0) = u(x_0) \\ y'(x_0) = u'(x_0) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(x_0) = u^{(N-1)}(x_0) \end{array} \right.$$

$u$  è soluzione del problema  $(CP)$ , ma anche la funzione

$$\begin{aligned} v(x) &= u(x_0) * u_1(x) + u'(x_0) * u_2(x) + \dots \\ &\quad + u^{(N-1)}(x_0) * u_N(x) \end{aligned}$$

è una soluzione, infatti

$$\begin{aligned} L(v)(x) &= u(x_0) * \underbrace{L(u_1)(x)}_0 + \dots + u^{(N-1)}(x_0) * \underbrace{L(u_N)(x)}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

E inoltre

$$\begin{aligned} v(x_0) &= u(x_0) * \underbrace{u_1(x_0)}_1 + u'(x_0) * \underbrace{u_2(x_0)}_0 + \dots \\ &\quad + u^{(N-1)}(x_0) * \underbrace{u_N(x_0)}_0 = u(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'(x_0) &= u(x_0) * \underbrace{u'_1(x_0)}_0 + u'(x_0) * \underbrace{u'_2(x_0)}_1 + \dots \\
&\quad + u^{(N-1)}(x_0) * \underbrace{u'_N(x_0)}_0 = u'(x_0) \\
&\quad \vdots \\
v^{(N-1)}(x_0) &= u(x_0) * \underbrace{u_1^{(N-1)}(x_0)}_0 + \dots \\
&\quad + u^{(N-1)}(x_0) * \underbrace{u_N^{(N-1)}(x_0)}_1 \\
&= u^{(N-1)}(x_0)
\end{aligned}$$

E quindi  $v(x)$  è soluzione del problema di Cauchy, ma anche  $u$  è soluzione, e per l'unicità della soluzione di conclude che

$$u = v$$

E quindi

$$u = \text{Span}\{u_1, \dots, u_N\}$$

$$\Rightarrow \text{Dim}(\text{Ker } L) = N \blacksquare$$

Per risolvere (C) quindi serve

- 1) Determinare una base per  $\text{Ker } L$
- 2) Determinare una soluzione particolare di (C)

### RICERCA DELLA SOLUZIONE PARTICOLARE

#### DEF Wronskiano:

Siano  $u_1, \dots, u_N$  funzioni derivabili  $N - 1$  volte

$$u_i: I \rightarrow \mathbb{R}$$

Diremo **Wronskiano** la funzione

$$\begin{aligned}
W(x) &= \\
&= \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_N(x) \\ u'_1(x) & u'_2(x) & \cdots & u'_N(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(N-1)}(x) & u_2^{(N-1)}(x) & \cdots & u_N^{(N-1)}(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### LEMMA DEL WRONSKIANO

Siano  $u_1, \dots, u_N$  soluzioni dell'equazione omogenea  $Lu = 0$ .

Supponiamo che esista un punto  $x_0 \in I$  tale che

$$W(x_0) = 0$$

Allora si ha che

$$W(x) = 0, \forall x \in I$$

[ in dimensione  $N = 1$

$$y' - ay = 0$$

$$u_1(x) \neq 0 \quad \forall x$$

Perchè se fosse  $u_1(x_0) = 0$  allora  $u_1$  sarebbe soluzione del problema

$$\begin{cases} y' - ay = 0 \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

Ma la funzione  $v(x) = 0$  è soluzione, e quindi per unicità si ha che  $u = 0$ . ]

DIM:

Sia  $W(x_0) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \cdots & u_N(x_0) \\ u'_1(x_0) & u'_2(x_0) & \cdots & u'_N(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(N-1)}(x_0) & u_2^{(N-1)}(x_0) & \cdots & u_N^{(N-1)}(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

⇒ le colonne sono linearmente dipendenti, quindi esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} u_1(x_0) \\ u'_1(x_0) \\ \vdots \\ u_1^{(N-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_N \begin{pmatrix} u_N(x_0) \\ u'_N(x_0) \\ \vdots \\ u_N^{(N-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la funzione

$$v(x) = \lambda_1 u_1(x) + \cdots + \lambda_N u_N(x)$$

$v$  è soluzione di

$$(CP) \begin{cases} Lv = 0 \\ v(x_0) = 0 \\ v'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ v^{(N-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Ma anche 0 è soluzione, quindi per l'unicità si conclude che

$$v(x) = 0 \quad \forall x$$

Quindi vale  $\forall x$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u'_1(x) \\ \vdots \\ u_1^{(N-1)}(x) \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_N \begin{pmatrix} u_N(x) \\ u'_N(x) \\ \vdots \\ u_N^{(N-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ma dato che  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  non sono tutti nulli, allora le colonne della matrice Worskiana (in  $x$ ) sono linearmente dipendenti, perciò

$$W(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \blacksquare$$

**METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI**  
per la determinazione di una soluzione particolare di un'equazione differenziale ordinaria lineare completa di ordine  $N$

$$Ly = y^{(N)} - a_{N-1}y^{(N-1)} - \dots - a_0y$$

Considero l'equazione omogenea

$$(H) \quad Ly = 0$$

E la completa

$$(C) \quad Ly = b$$

$$a_i, b \in C(I)$$

Sia  $\{u_1, \dots, u_N\}$  una base di  $\text{Ker } L$ . Sia  $x_0 \in I$ .

Allora, posto

$$K(x, s) =$$

$$= \frac{1}{W(s)} \det \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) & \cdots & u_N(s) \\ u'_1(s) & u'_2(s) & \cdots & u'_N(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(N-2)}(s) & u_2^{(N-2)}(s) & \cdots & u_N^{(N-2)}(s) \\ u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_N(x) \end{pmatrix}$$

Che è detto **nucleo risolvente** dell'equazione.

Posso dividere per  $W(s)$  perchè per il Lemma del Wronskiano si ha che  $W(s) \neq 0 \quad \forall s$ , perchè se fosse nullo in un punto lo sarebbe in ogni punto, e quindi non potremmo avere una base.

Allora

$$y_P(x) = \int_{x_0}^x K(x, s)b(s)ds$$

È una soluzione particolare di  $(C)$ .

[ per  $N = 1$ :

$$K(x, s) = \frac{1}{W(s)}(u_1(x)) = \frac{1}{u_1(s)}u_1(x)$$

E sappiamo che  $u_1(x) = e^{A(x)}$  ⇒

$$\Rightarrow K(x, s) = e^{A(x)-A(s)} ]$$

DIM:  $N = 2$

Per la soluzione dell'equazione omogenea avevamo funzioni del tipo

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$v(x) = \lambda_1(x)u_1(x) + \lambda_2(x)u_2(x)$$

Vogliamo sia soddisfatto

$$v'' = a_1 v' + a_0 v + b$$

Calcoliamo le derivate

$$v'(x) = \lambda'_1 u_1 + \lambda_1 u'_1 + \lambda'_2 u_2 + \lambda_2 u'_2$$

$$\text{Imponiamo } \lambda'_1 u_1 + \lambda'_2 u_2 = 0$$

Cerchiamo  $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$  tali che

$$\lambda'_1(x)u_1 + \lambda'_2(x)u_2 = 0, \forall x \in I$$

E posto  $v(x) = \lambda_1(x)u_1(x) + \lambda_2(x)u_2(x)$  si ha che  $v''(x) = a_1(x)v'(x) + a_0(x)v(x) + b(x)$

Abbiamo trovato che

$$v'(x) = \lambda_1(x)u'_1(x) + \lambda_2(x)u'_2(x)$$

$$v''(x) = \lambda'_1(x)u'_1(x) + \lambda_1(x)u''_1(x) + \lambda'_2(x)u'_2(x) + \lambda_2(x)u''_2(x)$$

Confrontando:

$$\lambda'_1 u'_1 + \lambda_1 u''_1 + \lambda'_2 u'_2 + \lambda_2 u''_2 = a_1 v' + a_0 v + b$$

$$\lambda'_1 u'_1 + \lambda_1 u''_1 + \lambda'_2 u'_2 + \lambda_2 u''_2 - a_1(\lambda_1 u'_1 + \lambda_2 u'_2) - a_0(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = b$$

$$\Rightarrow \lambda'_1 u'_1 + \lambda_1 u''_1 + \lambda'_2 u'_2 + \lambda_2 u''_2 - a_1 \lambda_1 u'_1 - a_1 \lambda_2 u'_2 - a_0 \lambda_1 u_1 - a_0 \lambda_2 u_2 \stackrel{?}{=} b(x)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \underbrace{[u''_1 - a_1 u'_1 - a_0 u_1]}_{L(u_1)=0} + \lambda_2 \underbrace{[u''_2 - a_1 u'_2 - a_0 u_2]}_{L(u_2)=0} + \lambda'_1 u'_1 + \lambda'_2 u'_2 \stackrel{?}{=} b(x) \\ & \Rightarrow \lambda'_1 u'_1 + \lambda'_2 u'_2 \stackrel{?}{=} b(x) \end{aligned}$$

Stiamo cercando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tali che

$$\begin{cases} \lambda'_1(x)u_1(x) + \lambda'_2(x)u_2(x) = 0 \\ \lambda'_1(x)u'_1(x) + \lambda'_2(x)u'_2(x) = b(x) \end{cases} \quad \forall x \in I$$

Abbiamo quindi un sistema di 2 equazioni algebriche nelle variabili  $\lambda'_1(x), \lambda'_2(x)$

Ma matrice associata a questo sistema è

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u'_1(x) & u'_2(x) \end{pmatrix}$$

Posso risolvere il sistema usando il Teorema di Rouché-Capelli.

Le soluzioni si possono rappresentare come

$$\begin{aligned} \lambda'_1(x) &= \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & u_2(x) \\ b(x) & u'_2(x) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u'_1(x) & u'_2(x) \end{pmatrix}} = -\frac{1}{W(x)}u_2(x)b(x) \\ \lambda'_2(x) &= \frac{\det \begin{pmatrix} u_1(x) & 0 \\ u'_1(x) & b(x) \end{pmatrix}}{W(x)} = \frac{1}{W(x)}u_1(x)b(x) \end{aligned}$$

Integriamo le due soluzioni tra  $x_0$  e  $x$

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{W(s)}(-u_2(s)b(s))ds \\ \lambda_2(x) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{W(s)}(u_1(s)b(s))ds \end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} v(x) &= \lambda_1(x)u_1(x) + \lambda_2(x)u_2(x) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{1}{W(s)}b(s)\underbrace{(-u_2(s)u_1(x) + u_1(s)u_2(x))}_{K(x,s)*W(s)}ds \\ K(x,s) &= \frac{\det \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{pmatrix}}{W(s)} \\ \Rightarrow v(x) &= \\ &= \int_{x_0}^x K(x,s)b(s)ds \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\sin x} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Considero l'equazione omogenea e completa

$$(H) \quad y'' + y = 0$$

$$(C) \quad y'' + y = \sin x$$

(H) determiniamo  $\text{Ker } L = \text{span}\{u_1, u_2\}$

Troviamo due funzioni tali che

$$u'' = -u$$

Ossia

$$u_1(x) = \cos x$$

$$u_2(x) = \sin x$$

$$y_P(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x K(x,s) \frac{1}{\sin s} ds$$

$$K(x,s) = K(x,s) = \frac{\det \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{pmatrix}}{W(s)}$$

$$\begin{aligned} W(s) &= \det \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u'_1(s) & u'_2(s) \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K(x,s) &= \det \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} = \\ &= \cos s \sin x - \cos x \sin s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_P &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x (\cos s \sin x - \cos x \sin s) \frac{1}{\sin s} ds = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos s}{\sin s} \sin x - \cos x ds = \\ &= \sin x \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos s}{\sin s} ds - \cos x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \sin x [\log|\sin s|]_{\frac{\pi}{2}}^x - \cos x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow y_P &= \sin x (\log(\sin x)) - \cos x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Tolgo il valore assoluto perché  $\sin x$  è positivo vicino al punto d'interesse  $\frac{\pi}{2}$ .

La generica soluzione di  $(C)$  è  $u + y_P$  con

$$u \in \text{Ker } L = \text{span}\{\cos x, \sin x\}$$

$$u = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \sin x (\log(\sin x)) \\ &\quad - \cos x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_C &= \left\{ \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \sin x (\log(\sin x)) \right. \\ &\quad \left. - \cos x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Si osservi che si può inglobare  $\frac{\pi}{2}$  in  $\lambda_1$

$$\begin{aligned} S_C &= \left\{ \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \sin x (\log(\sin x)) \right. \\ &\quad \left. - x \cos x : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Cerchiamo  $y$  tale che  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Calcoliamo  $y$  in  $\frac{\pi}{2}$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda_2 = 1$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= D[\lambda_1 \cos x + \sin x + \sin x (\log(\sin x)) \\ &\quad - x \cos x] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\lambda_1 \sin x + \cos x + \cos x \log(\sin x) + \sin x \\ &\quad * \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x + x \sin x \end{aligned}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda_1 + \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\pi}{2}$$

La soluzione di  $(CP)$  è

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\pi}{2} \cos x + \sin x + \sin x (\log(\sin x)) \\ &\quad - x \cos x \end{aligned}$$

### PROBLEMA: Determinare una base di $\text{Ker } L$

Lo faremo nel caso più semplice in cui i coefficienti  $a_i$  sono costanti.

### EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE N

$$y^{(N)} = a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y + b(x)$$

$$a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = 0, \dots, N-1$$

$$b \in C(I)$$

Dobbiamo determinare una base di  $\text{Ker } L$ .

Nel caso  $N = 1$ :

$$y' - ay = 0$$

$\{e^{A(x)}\}$  è una base di  $\text{Ker } L$ .

Nel caso  $N = 2$ :

$$y'' - a_1 y' - a_0 y = 0$$

Consideriamo il polinomio caratteristico associato all'equazione

$$\lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 = 0$$

Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra  $\Rightarrow$

$$(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = 0$$

Dove  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  sono zeri del polinomio.

Vorremmo scrivere, se ha significato

$$\left( \frac{d}{dx} - \alpha \right) \left( \frac{d}{dx} - \beta \right)$$

Sarebbe una composta di operatori differenziali

$$\left( \frac{d}{dx} - \beta \right) : C^1(I) \rightarrow C^0(I)$$

$$\left( \frac{d}{dx} - \beta \right) u = u' - \beta u$$

Dovrei fare

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} - \alpha \right) \left[ \left( \frac{d}{dx} - \beta \right) (u) \right] &= \\ &= \left( \frac{d}{dx} - \alpha \right) (u' - \beta u) = \\ &= u'' - \beta u' - \alpha u' - \alpha \beta u = \\ &= u'' - (\alpha + \beta) u' + \alpha \beta u \end{aligned}$$

Che è uguale a

$$y'' - a_1 y' - a_0 y = 0$$

Quindi si ha

$$-a_0 = \alpha \beta$$

$$-a_1 = -\alpha - \beta$$

$$\Rightarrow u'' - (\alpha + \beta) u' + \alpha \beta u = u'' - a_1 u' - a_0 u$$

Considero le equazioni

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)u = 0 \Rightarrow u' - \alpha u = 0 \Rightarrow u(x) = e^{\alpha x}$$

$$\left(\frac{d}{dx} - \beta\right)u = 0 \Rightarrow u' - \beta u = 0 \Rightarrow u(x) = e^{\beta x}$$

L'equazione  $y'' - a_1y' - a_0y = 0$  ha soluzioni

$$u(x) = e^{\alpha x}, \quad u(x) = e^{\beta x}$$

Dove  $\alpha, \beta$  sono zeri del polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_0 = 0$$

La cosa funziona se  $\alpha \neq \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Se invece  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ⇒

$$\Rightarrow \alpha = \sigma + i\eta, \quad \beta = \sigma - i\eta$$

Abbiamo ottenuto come soluzioni

$$u_1(x) = e^{\alpha x}, \quad u_2(x) = e^{\beta x}$$

$$u_1(x) = e^{\sigma x}e^{i\eta x}, \quad u_2(x) = e^{\sigma x}e^{-i\eta x}$$

Per la Formula di Eulero si possono scrivere come

$$u_1(x) = e^{\sigma x}(\cos \eta x + i \sin \eta x)$$

$$u_2(x) = e^{\sigma x}(\cos \eta x - i \sin \eta x)$$

Cerco funzioni a valori reali !

Considero

$$v_1(x) = \frac{1}{2}(u_1(x) + u_2(x)) = e^{\sigma x} \cos \eta x$$

$$v_2(x) = \frac{1}{2i}(u_1(x) - u_2(x)) = e^{\sigma x} \sin \eta x$$

A questo punto  $v_1$  e  $v_2$  sono funzioni a valori reali e sono soluzioni per la linearità dell'operatore, e ho ottenuto la mia base

$$\{v_1, v_2\}$$

Resta da considerare il caso  $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$ : l'operatore diventa il seguente

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) = 0$$

$$u_1(x) = e^{\alpha x}$$

Una seconda soluzione è

$$u_2(x) = xe^{\alpha x}$$

$$u'_2(x) = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}$$

$$u''_2(x) = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}$$

Ricordiamo che l'equazione ora è del tipo

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

Perché il polinomio associato è

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 = (\lambda - \alpha)^2$$

E quindi sostituendo  $u$  a  $y$

$$\begin{aligned} u''_2(x) - 2\alpha u'_2(x) + \alpha^2 u_2(x) &= \\ &= (2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}) - 2\alpha(e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}) \\ &\quad + \alpha^2(x e^{\alpha x}) = \\ &= 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x} - 2\alpha e^{\alpha x} - 2\alpha^2 x e^{\alpha x} \\ &\quad + \alpha^2 x e^{\alpha x} = 0 \forall x \end{aligned}$$

Quindi la base è formata da

$$\{e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}\}$$

Caso generale:

$$y^{(N)} - a_{N-1}y^{(N-1)} - \dots - a_0y = 0$$

Considero il polinomio caratteristico

$$\lambda^n - a_{N-1}\lambda^{N-1} - \dots - a_0$$

Ha  $n$  radici complesse. Per ogni zero  $\alpha$  del polinomio caratteristico si ha

- Se  $\alpha$  è uno zero reale semplice ⇒  $e^{\alpha x}$  è soluzione
- Se  $\alpha$  è zero reale di molteplicità  $k$ , le funzioni  $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}$  sono soluzioni
- Se  $\alpha = \sigma + i\eta$  è zero (e quindi anche  $\sigma - i\eta$ ) con  $\eta \neq 0$ , semplici, allora  $e^{\sigma x} \cos(\eta x)$  e  $e^{\sigma x} \sin(\eta x)$  sono soluzioni
- Se  $\sigma \pm i\eta$  sono zeri con  $\eta \neq 0$  di molteplicità  $k$ , allora sono soluzioni le funzioni

$$\begin{aligned} &e^{\sigma x} \cos(\eta x), e^{\sigma x} \sin(\eta x), \\ &x e^{\sigma x} \cos(\eta x), x e^{\sigma x} \sin(\eta x), \\ &x^2 e^{\sigma x} \cos(\eta x), x^2 e^{\sigma x} \sin(\eta x), \dots, \\ &x^{k-1} e^{\sigma x} \cos(\eta x), x^{k-1} e^{\sigma x} \sin(\eta x) \end{aligned}$$

Si ottengono esattamente  $N$  funzioni linearmente indipendenti

ESEMPIO:

$$y'' + 3y = 2 \cos x$$

$$(H) \quad y'' + 3y = 0$$

$$\lambda^2 + 3 = 0$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{3}$$

$$u_1(x) = \cos(\sqrt{3}x)$$

$$u_2(x) = \sin(\sqrt{3}x)$$

$$\ker L = \{\lambda_1 \cos(\sqrt{3}x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{3}x) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Troviamo una soluzione particolare di (C).

Possiamo usare il metodo di variazione delle costanti

$$u'_1(x) = -\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}x)$$

$$u'_2(x) = \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}x)$$

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}x) & \sin(\sqrt{3}x) \\ -\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}x) & \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}x) \end{pmatrix} = \sqrt{3}$$

$$K(x, s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \det \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}s) & \sin(\sqrt{3}s) \\ \cos(\sqrt{3}x) & \sin(\sqrt{3}x) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos(\sqrt{3}s) \sin(\sqrt{3}x) - \cos(\sqrt{3}x) \sin(\sqrt{3}s))$$

$$y_p(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos(\sqrt{3}s) \sin(\sqrt{3}x) - \cos(\sqrt{3}x) \sin(\sqrt{3}s)) * 2 \cos s ds$$

Molto lungo noioso e complicato... però c'è un modo più semplice. L'equazione è

$$y'' + 3y = 2 \cos x$$

La soluzione particolare, osservando bene, è proprio  $\cos x$  !!

$$y_p = \cos x$$

In effetti, se il termine noto è una funzione del tipo  $\cos x$  o  $\sin x$  si può provare una di queste due come soluzioni dell'equazione. Questo è detto **metodo di somiglianza**.

Prendo l'equazione

$$y'' + 3y = 2 \cos(\sqrt{3}x)$$

Voglio provare con una soluzione di questo genere:

$$y_p(x) = a \cos(\sqrt{3}x) + b \sin(\sqrt{3}x)$$

$$y'_p(x) = -\sqrt{3}a \sin(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}b \cos(\sqrt{3}x)$$

$$y''_p(x) = -3a \cos(\sqrt{3}x) - 3b \sin(\sqrt{3}x)$$

Sostituendo ottengo

$$\begin{aligned} & [-3a \cos(\sqrt{3}x) - 3b \sin(\sqrt{3}x)] \\ & + 3[a \cos(\sqrt{3}x) + b \sin(\sqrt{3}x)] \\ & = 2 \cos(\sqrt{3}x) \end{aligned}$$

Però

$$\begin{aligned} & [-3a \cos(\sqrt{3}x) - 3b \sin(\sqrt{3}x)] \\ & = 3[a \cos(\sqrt{3}x) + b \sin(\sqrt{3}x)] \\ & \Rightarrow 0 = 2 \cos(\sqrt{3}x) \end{aligned}$$

⇒ Non è possibile trovare  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che la funzione

$$y_p(x) = a \cos(\sqrt{3}x) + b \sin(\sqrt{3}x)$$

sia soluzione.

Il problema è che in  $2 \cos(\sqrt{3}x)$  ho la soluzione del problema omogeneo, cioè  $\cos(\sqrt{3}x)$ , cioè sto studiando un problema di **risonanza**. Ossia mi ritrovo ad avere il termine forzante  $2 \cos(\sqrt{3}x)$  che ha la stessa frequenza dell'oscillazione naturale del sistema. Cioè l'equazione omogenea ha soluzioni che hanno una frequenza identica al termine forzante. Quindi NON funziona il metodo.

Devo considerare allora una funzione

$$y_p(x) = x[a \cos(\sqrt{3}x) + b \sin(\sqrt{3}x)]$$

Nel nostro caso la soluzione è

$$y_p(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x)$$

METODO DI SOMIGLIANZA per la determinazione di una soluzione particolare di una equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti di ordine  $N$  nel caso di termini noti di tipo polinomiale/esponenziale/trigonometrico

Consideriamo un'equazione

$$Ly = b$$

$$\text{Sia } b(x) = P(x)e^{\alpha x}$$

$P(x)$  polinomio di grado  $k$ ; supponiamo  $\alpha$  NON sia uno zero del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea  $Ly = 0$ ; allora esiste una soluzione particolare di  $(C)$  del tipo

$$y_P(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

Dove  $Q(x)$  è un polinomio di grado  $\leq k$

Se invece  $\alpha$  è uno zero del polinomio caratteristico, di molteplicità  $m$ , sarà

$$y_P(x) = x^m Q(x)e^{\alpha x}$$

Sia ora

$$b(x) = e^{\sigma x}(P_1(x)\cos(\eta x) + P_2(x)\sin(\eta x))$$

$P_1, P_2$  polinomi di grado  $\leq k$ ,  $\sigma \pm i\eta$  non sono zeri del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea  $Ly = 0$ , allora esiste una soluzione particolare dell'equazione completa del tipo

$$y_P(x) = e^{\sigma x}(Q_1(x)\cos(\eta x) + Q_2(x)\sin(\eta x))$$

$Q_1, Q_2$  polinomi di grado  $\leq k$ .

Se invece  $\sigma \pm i\eta$  sono zeri di molteplicità  $m$  allora avremo

$$y_P(x) = x^m e^{\sigma x}(Q_1(x)\cos(\eta x) + Q_2(x)\sin(\eta x))$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} y'' + 3y = \sin x + \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogena associata è

$$y'' + 3y = 0$$

Una base di  $\ker L$  è  $\{u_1, u_2\}$

$$u_1(x) = \cos(\sqrt{3}x)$$

$$u_2(x) = \sin(\sqrt{3}x)$$

Perché le soluzioni del polinomio caratteristico sono  $\pm i\sqrt{3}$

Per quanto visto sopra, il termine noto è del tipo

$$\sin x + \cos x = e^{0*x}(P_1(x)\cos x + P_2(x)\sin x)$$

$P_i$  polinomi di grado 0.  $P_i \rightsquigarrow a, b$

$$y_P = a \cos x + b \sin x$$

$$y'(x) = -a \sin x + b \cos x$$

$$y''(x) = -a \cos x - b \sin x$$

Costruisco l'equazione  $y'' + 3y = \sin x + \cos x$

$$\Rightarrow -a \cos x - b \sin x + 3a \cos x + 3b \sin x = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow 2a \cos x + 2b \sin x = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$y_P(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

La soluzione generale è quindi data da

$$y(x) = \lambda_1 \cos(\sqrt{3}x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

Per risolvere il problema di Cauchy pongo

$$y(0) = 1$$

$$y(0) = \lambda_1 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

Calcolo la derivata

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\lambda_2 \cos(\sqrt{3}x) - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$y'(0) = \sqrt{3}\lambda_2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

La soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y(x) = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}x) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

ESEMPIO:

$$y'' + 3y = 2 \cos x + x$$

Sappiamo che la soluzione dell'equazione

$$y'' + 3y = 2 \cos x$$

È  $y(x) = \cos x$ , mentre dell'equazione

$$y'' + 3y = x$$

$$\text{È } y(x) = \frac{1}{3}x.$$

Per il principio di sovrapposizione una soluzione particolare dell'equazione iniziale è

$$y_p(x) = \cos x + \frac{1}{3}x$$

### PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Consideriamo (1)  $Ly = b_1$ , (2)  $Ly = b_2$ ,

$$(3) Ly = b_1 + b_2$$

Se  $u_1$  è soluzione di (1) e  $u_2$  è soluzione di (2) allora  $u_1 + u_2$  è soluzione di (3), infatti

$$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = b_1 + b_2$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x + x^2 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Prendiamo l'equazione omogenea

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 1$$

$\lambda = 1$  soluzione doppia.

$$\ker L = \{e^x, xe^x\}$$

Prendiamo prima  $Ly = e^x = e^{1*x}$ , 1 è zero doppio del polinomio caratteristico, quindi la soluzione particolare sarà del tipo

$$y_p(x) = x^2 * ae^x$$

$$y'_p(x) = 2xae^x + x^2ae^x$$

$$y''_P(x) = 2ae^x + 4xae^x + x^2ae^x$$

Sostituisco nell'equazione iniziale

$$y'' - 2y' + y = ae^x[x^2 + 4x + 2] - 2ae^x[x^2 + 2x] + ax^2e^x = e^x$$

$$\Rightarrow a[x^2 + 4x + 2] - 2a[x^2 + 2x] + ax^2 = 1$$

$$\Rightarrow a[x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x + x^2] = 1$$

$$\Rightarrow 2a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$$

Consideriamo ora  $Ly = x^2$ , la soluzione sarà un polinomio di grado  $\leq 2$

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y'_p(x) = 2ax + b$$

$$y''_p(x) = 2a$$

Sostituisco nell'equazione iniziale

$$y'' - 2y' + y = 2a - 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2$$

$$\Rightarrow 2a - 4ax - 2b + ax^2 + bx + c = x^2$$

I coefficienti di  $x^i$  devono coincidere

$$\Rightarrow a = 1$$

$$-4a + b = 0 \Rightarrow b = 4$$

$$2a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 6$$

$$y_p(x) = x^2 + 4x + 6$$

Per il Principio di sovrapposizione, una soluzione particolare dell'equazione iniziale

$$y'' - 2y' + y = e^x + x^2$$

è

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + x^2 + 4x + 6$$

E la base di  $\ker L$  è  $\{e^x, xe^x\}$

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 x e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x^2 + 4x + 6$$

Soddisfo le condizioni iniziali:

$$y(0) = \lambda_1 + 6 = 6$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$y'(x) = \lambda_2 e^x + \lambda_2 x e^x + x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + 2x + 4$$

$$y'(0) = \lambda_2 + 4 = 0$$

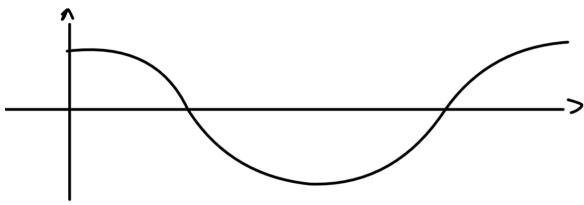
$$\Rightarrow \lambda_2 = -4$$

Concludo trovando la soluzione del problema

$$y(x) = -4xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x^2 + 4x + 6$$

#### ESEMPIO oscillatore armonico:

Caso ideale in assenza di attrito e forze:



$$my'' = -ky$$

$$y = y(t)$$

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

È un ODE lineare a coefficienti costanti del secondo ordine. Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}$$

$$\text{E i suoi zeri sono } \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

La base del nucleo è  $\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Caso smorzato con attrito:

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\text{Gli zeri sono } \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

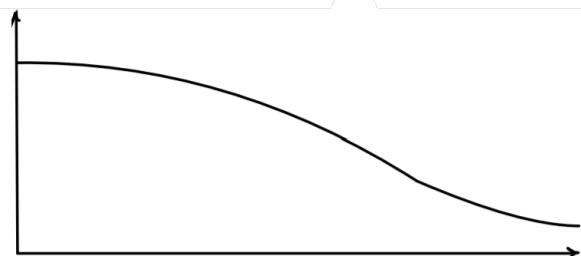
$$\Delta = a^2 - 4b$$

Se  $\Delta > 0$

Le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$$

E la base è del tipo  $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$

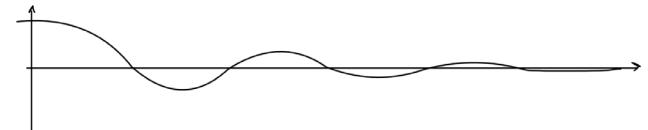


Se  $\Delta < 0$

Le soluzioni sono

$$\frac{-a \pm i\sqrt{\Delta}}{2}$$

E la base è del tipo  $\{e^{-\frac{a}{2}t} \cos(\omega t), e^{-\frac{a}{2}t} \sin(\omega t)\}$



Caso forzato semplice:

$$y'' + \omega^2 y = \varphi(t)$$

Dove  $\varphi(t) = A \cos(\phi t)$

La base del nucleo è  $\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$ ,

$$\omega > 0, \phi > 0$$

$$y_P(t) = a \cos(\phi t) + b \sin(\phi t)$$

$$y'_P(t) = -\phi a \sin(\phi t) + \phi b \cos(\phi t)$$

$$y''_P(t) = -\phi^2 a \cos(\phi t) - \phi^2 b \sin(\phi t)$$

Inserisco nell'equazione iniziale

$$-\phi^2 a \cos(\phi t) - \phi^2 b \sin(\phi t) + \omega^2 a \cos(\phi t) + \omega^2 b \sin(\phi t) = A \cos(\phi t)$$

$$\Rightarrow [(\omega^2 - \phi^2)a - A] \cos(\phi t) + (\omega^2 - \phi^2)b \sin(\phi t) = 0$$

$$\Rightarrow (\omega^2 - \phi^2)a = A$$

$$\Rightarrow (\omega^2 - \phi^2)b = 0$$

Ci sono 2 casi.

Caso  $\omega \neq \phi \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{A}{(\omega^2 - \phi^2)}, \quad b = 0$$

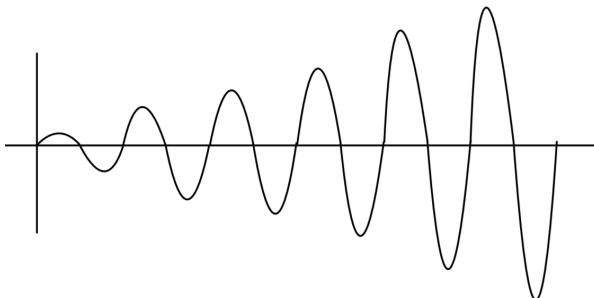
Caso  $\omega = \phi$ ? C'è un fenomeno di risonanza perché siamo in frequenza con l'oscillazione naturale, e non posso prendere quella soluzione particolare, ma devo moltiplicare per  $t$ .

$$y_p(t) = t[a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]$$

$$y'_p(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) - t\omega a \cos(\omega t) + tb\omega \sin(\omega t)$$

$$y''_p(t) = -a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t) - a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t) - t\omega^2 a \cos(\omega t) - t\omega^2 b \sin(\omega t) =$$

$$= -2a\omega \sin(\omega t) + 2b\omega \cos(\omega t) - t\omega^2 a \cos(\omega t) - t\omega^2 b \sin(\omega t)$$



Scriviamo l'equazione

$$y'' + \omega^2 y = A \cos(\omega t)$$

$$-2a\omega \sin(\omega t) + 2b\omega \cos(\omega t)$$

$$- \omega^2 \left[ \underbrace{x(a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t))}_{y_p} \right] + \omega^2 y_p =$$

$S$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow 2b\omega = A \Rightarrow b = \frac{A}{2\omega}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = t \frac{A}{2\omega} \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{A}{2\omega} t \sin(\omega t)$$

Caso forzato-smorzato:

$$y'' + ay' + by = \varphi(t)$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b$$

Gli zeri sono

$$-\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Se  $\Delta < 0$ :

$$-\frac{a}{2} \pm i \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

La base del nucleo è del tipo

$$\left\{ e^{-\frac{a}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}t\right), e^{-\frac{a}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}t\right) \right\}$$

Se  $\varphi(t) = A \cos(\phi t)$ . Il problema si ha se

$$\phi \approx \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

### ALCUNI ESEMPI DI EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE NON LINEARI

$$y'' = f(t, y, y')$$

$$y = y(t)$$

Due casi speciali:

**Caso 1:**  $f$  non dipende esplicitamente da  $y$

$$y'' = f(t, y')$$

ES:

$$y'' = y' \cos(t)$$

Utilizzo un cambio di variabile, poniamo

$$x = y'$$

$$x' = y''$$

$$x' = f(t, x)$$

Che è del primo ordine.

ES: risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y' \cos(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$x = y'$$

$$\begin{cases} x' = x \cos(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{\sin t}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{\sin s} ds$$

**Caso 2:**  $f$  non dipende da  $y'$  e  $t$

$$y'' = f(y)$$

Il "trucco" è moltiplicare per  $y'$

$$y' * y'' = f(y) * y'$$

Integriamo tra  $t_0 \in I$  e  $t$

$$\int_{t_0}^t y'(s)y''(s)ds = \int_{t_0}^t f(y(s))y'(s)ds$$

Soffermiamoci su  $\int_{t_0}^t f(y(s))y'(s)ds$ :

Uso un cambio di variabile

$$z = y(s) \rightarrow dz = y'(s)ds$$

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} f(z)dz = F(y(t)) - F(y(t_0))$$

Dove  $F$  è una primitiva di  $f$ .

Soffermiamoci ora su  $\int_{t_0}^t y'(s)y''(s)ds$ :

Uso un cambio di variabile

$$z = y'(s) \rightarrow dz = y''(s)ds$$

$$\int_{y'(t_0)}^{y'(t)} z dz = \frac{1}{2}y'(t)^2 - \frac{1}{2}y'(t_0)^2$$

E quindi mettendo assieme

$$\frac{1}{2}y'(t)^2 - \frac{1}{2}y'(t_0)^2 = F(y(t)) - F(y(t_0))$$

$$y'(t)^2 = y'(t_0)^2 + 2[F(y(t)) - F(y(t_0))]$$

$$|y'(t)| = \sqrt{y'(t_0)^2 + 2[F(y(t)) - F(y(t_0))]}$$

Se  $y'(t_0) > 0 \rightarrow y'(t) = +\sqrt{\dots}$

Se  $y'(t_0) < 0 \rightarrow y'(t) = -\sqrt{\dots}$

Perché lavoro in un intorno del punto  $t_0$ . Ho ottenuto un'equazione del primo ordine autonoma, quindi a variabili separate.

Se  $y(t)$  è soluzione si ha

$$\frac{1}{2}y'(t)^2 - \frac{1}{2}y'(t_0)^2 = F(y(t)) - F(y(t_0))$$

Cioè

$$\underbrace{\frac{1}{2}y'(t)^2}_{\substack{\text{energia} \\ \text{cinetica}}} - \underbrace{\frac{F(y(t))}{F(y(t_0))}}_{\substack{\text{energia} \\ \text{potenziale}}} = \text{costante}$$

$$\left[ = \frac{1}{2}y'(t_0)^2 - F(y(t_0)) \right]$$

Questa osservazione ci fa notare che l'Energia meccanica è conservata lungo la soluzione.

Considero l'esempio:  $y'' = 3y^2$

$$f(y) = 3y^2$$

$$F(y) = y^3$$

$$\text{Energia} = \frac{1}{2}y'^2 - y^3$$

Considero  $u = y$ ,  $w = y'$

Considero il campo  $g(u, w) = \frac{1}{2}w^2 - u^3$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

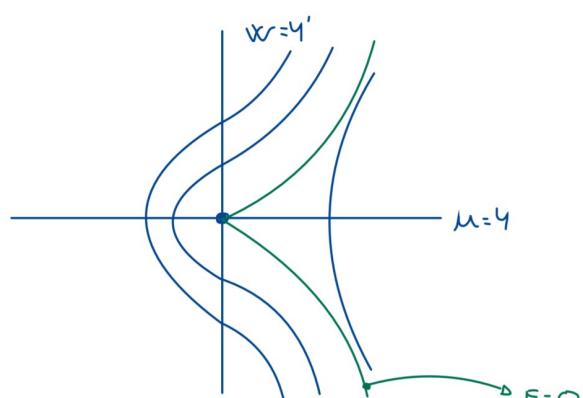
Possiamo costruire le linee di livello

$$g(y(t), y'(t)) = \text{costante}$$

sull'intervallo su cui è definita la soluzione.

Studiamo l'equazione nel piano delle fasi

$$g(u, w) = \text{costante}$$



$$\frac{1}{2}w^2 - u^3 = c$$

Se  $c = 0$

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} w^{\frac{2}{3}}$$

Calcolare le linee di livello del campo  $g$  può aiutare a vedere qual è la soluzione di

$$y'' = 3y^2$$

Se mi posiziono in un punto

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, y'(0) = 1$$

$$\begin{cases} y'' = 3y^2 \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{2} y'^2 - y^3 = \frac{1}{2} * 1 - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = 0$$

Ho trovato che questo punto si trova sulla linea di energia  $E = 0$ .

In questo caso si può anche provare a risolvere l'equazione

$$|y'(t)| = \sqrt{y'(t_0)^2 + 2[F(y(t)) - F(y(t_0))]}$$

$$\begin{cases} y'' = 3y^2 \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$|y'(t)| = \sqrt{1 + 2 \left[y^3 - \frac{1}{2}\right]} = \sqrt{2} y^{\frac{3}{2}}$$

$$y'(0) = 1 > 0$$

$$y' = \sqrt{2} y^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{y'}{y^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\int_0^t \frac{y'}{y^{\frac{3}{2}}} ds = \sqrt{2} t$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{y(t)} z^{-\frac{3}{2}} dz = \left[-2z^{-\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{y(t)} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{y}} + 2 * 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2} t$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{y}} = 2 * 2^{\frac{1}{6}} - \sqrt{2} t$$

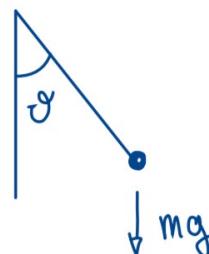
$$\sqrt{y} = \frac{1}{2^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} t} = \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}} - t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{2}{\left(2^{\frac{2}{3}} - t\right)^2}$$

$$t < 2^{\frac{2}{3}}$$

$$y: ]-\infty, 2^{\frac{2}{3}}[ \rightarrow \mathbb{R}$$

ESEMPIO: l'equazione del pendolo



$$\vartheta = \vartheta(t)$$

$\vartheta$  è l'angolo tra il pendolo e l'asse verticale.

$$l\vartheta'' = -g \sin \vartheta$$

Ci interessa studiare l'equazione

$$y'' = -\sin y$$

Per piccole oscillazioni  $\sin y \approx y$

$$y'' = -y$$

Soluzioni  $\{\cos t, \sin t\}$ , però studiamo l'equazione completa

$$y'' = f(y) = -\sin y$$

$$F(y) = \cos y$$

$$\text{Energia} = \frac{1}{2} y'^2 - \cos y = \text{cost}$$



$$\frac{1}{2}w^2 - \cos u = c$$

$$w = \pm\sqrt{2c + \cos u}$$

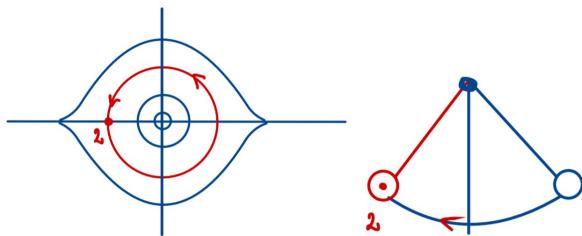
Per cercare gli equilibri, cerchiamo le soluzioni costanti dell'equazione ponendo

$$0 = \sin y$$

$$y = k\pi$$

Se  $k$  è pari

$$E(0,0) = -1$$

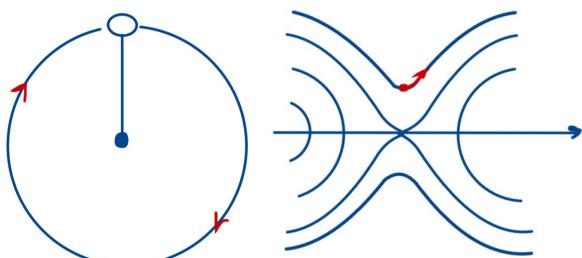


Se sono vicini, l'orbita è chiusa, la soluzione è periodica e limitata. Si ha un equilibrio stabile ma non attrattivo.

Se  $k$  è dispari

$$E(\pi, 0) = 1$$

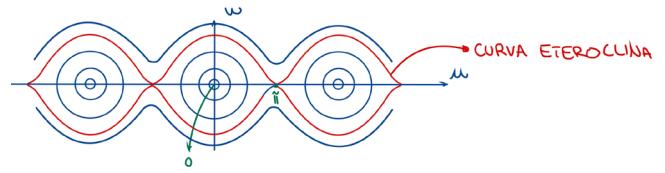
$$E \geq -1$$



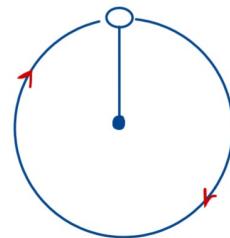
Se sono vicini, l'orbita non è chiusa, l'equilibrio è instabile.

NB: Un equilibrio stabile ha sempre meno energia di uno instabile.

Le curve che quasi toccano l'asse orizzontale che congiungono due equilibri instabili si dicono **eterocline**.



Se mi trovo su un eteroclinia, sto considerando il caso in cui il pendolo va da un angolo  $\pi$  verticale, compie un giro e si riposiziona perfettamente in verticale, ma lo fa in un tempo infinito.



Se provo a risolvere l'equazione

$$\frac{1}{2}y'^2 - \cos y = 1$$

$$y'^2 = 2[1 + \cos y]$$

$$|y'| = y' = \sqrt{2[1 + \cos y]}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{2[1 + \cos y]}} = 1$$

Stiamo lavorando sull'eteroclinia che congiunge  $-\pi$  e  $\pi$ . Sia  $T$  il tempo per percorrere l'orbita

$$\int_0^{T'} \frac{y'}{\sqrt{2[1 + \cos y]}} dt = T$$

$$z = y(t)$$

$$\int_{y(0)}^{y(T)} \frac{1}{\sqrt{2[1 + \cos z]}} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2[1 + \cos z]}} dz$$

Per verificare che sia  $+\infty$  calcolo l'ordine di infinito della funzione

$$\lim_{z \rightarrow \pi} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2[1 + \cos z]}}}_{\text{ord 1}} = +\infty$$

$$\Rightarrow T = +\infty$$

Abbiamo visto come un'equazione

$$y'' = f(y) \rightarrow u = y, w = y'$$

viene studiata nel piano delle fasi. Questo mi permette di ricondurre l'equazione di secondo ordine in un sistema di due equazioni del primo ordine.

Poniamo  $u(t) = y(t), w(t) = y'(t)$ . Allora

$$w'(t) = f(u)$$

$$\begin{cases} u' = w \\ w' = f(u) \end{cases}$$

Che è un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

### SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Vediamo un esempio con 2 equazioni

$$x'(t) = f_1(t, x, y)$$

$$y'(t) = f_2(t, x, y)$$

La soluzione è del tipo  $(x(t), y(t))^T = \gamma(t)$  che è una curva piana.

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(t, x, y) = (f_1(t, x, y), f_2(t, x, y))^T$$

$$\gamma'(t) = f(t, \gamma(t))$$

#### ESEMPIO:

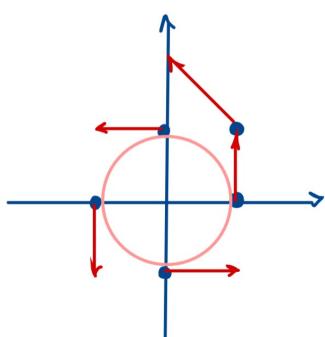
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

$$f(x, y) = (-y, x)^T$$

$f$  è un campo vettoriale. Si può rappresentare con le linee del campo. Associo ad ogni punto un vettore, ad esempio

$$(1, 0)^T \rightarrow (0, 1)^T$$

$$(1, 1)^T \rightarrow (-1, 1)^T$$



$\gamma'(t)$  è il vettore tangente ed è uguale alla funzione  $f(\gamma(t))$ . La soluzione ha come tangentie "frecette", in questo caso abbiamo dei cerchi. Il sistema si può risolvere prendendo

$$x = R \cos t$$

$$y = R \sin t$$

Si può fare anche un'altra cosa, avendo

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Si può moltiplicare in croce le due equazioni

$$x * x' = -y * y'$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} x^2 = -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} y^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \text{cost}$$

DEF: Sistema di  $N$  equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$(*) \begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_N) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_N) \\ \vdots \\ x'_N = f_N(t, x_1, \dots, x_N) \end{cases}$$

Oppure chiamo

$$x = (x_1, \dots, x_N)^T$$

$$f = (f_1, \dots, f_N)^T$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow x' = f(t, x)^T$$

Oppure  $\gamma' = f(t, \gamma)^T$ , perché si parla di curve.

Una soluzione di (\*) è una curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T$$

$\gamma$  derivabile e tale che  $\forall t \in I$

$$(t, x_1(t), \dots, x_N(t))^T \in A$$

$$\& \forall t \in I \Rightarrow \gamma'(t) = f(t, \gamma(t))$$

Caso particolare: sistemi lineari, ossia dove  $f(t, x)$  è lineare in  $x$ , quindi

$$f(t, x) = A(t)x + b(t)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1N}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}(t) & \cdots & a_{NN}(t) \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}$$

OSS:

Un'equazione differenziale ordinaria scalare di ordine  $N$  si può ricondurre ad un sistema di  $N$  equazioni del primo ordine:

$$y^{(N)} = f(t, y, \dots, y^{(N-1)})$$

Poniamo

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y'(t) \\ x_3(t) &= y''(t) \\ &\vdots \\ x_N(t) &= y^{(N-1)}(t) \end{aligned}$$

Scriveremo quindi

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{N-1} = x_N \\ x'_N = f(t, x_1, \dots, x_N) \end{cases}$$

Se  $f$  è lineare allora

$$f(t, x_1, \dots, x_N) = a_{N-1}y^{(N-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y + b(t)$$

E il sistema diventa

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{N-1} = x_N \\ x'_N = a_0x_1 + \cdots + a_{N-1}x_N + b(t) \end{cases}$$

Che si può scrivere come

$$x' = A(t)x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} \end{pmatrix}$$

$A(t)$  è detta **matrice compagna** dell'equazione.

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y + t \end{cases}$$

Risolvo questo sistema trasformandolo in un'equazione scalare del secondo ordine.

Deriviamo una delle due equazioni

$$x'' = x' + y'$$

$$y' = x - y + t$$

Sostituisco nell'equazione

$$x'' = x' + x - y + t$$

Però dobbiamo avere un'equazione soltanto in  $x$  così riscrivo la prima esplicitando  $y$

$$y = x' - x - 1$$

E sostituendo

$$\begin{aligned} x'' &= x' + x - (x' - x - 1) + t = \\ &= 2x + 1 + t \end{aligned}$$

$$x'' - 2x = t + 1$$

Risolvo come un'equazione lineare

$$(H) \quad x'' - 2x = 0$$

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

Base del nucleo  $\{e^{-\sqrt{2}t}, e^{\sqrt{2}t}\}$

Sol particolare  $x(t) = at + b$

$$x'(t) = a, x''(t) = 0$$

Deve verificare

$$x'' - 2x = -2at - 2b = t + 1$$

$$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$-2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$x_p(t) = -\frac{1}{2}(t + 1)$$

$$x(t) = \lambda_1 e^{-\sqrt{2}t} + \lambda_2 e^{\sqrt{2}t} - \frac{1}{2}(t + 1)$$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -\sqrt{2}\lambda_1 e^{-\sqrt{2}t} + \sqrt{2}\lambda_2 e^{\sqrt{2}t} - \frac{1}{2} \\
y(t) &= x'(t) - x(t) - 1 = \\
&= -\sqrt{2}\lambda_1 e^{-\sqrt{2}t} + \sqrt{2}\lambda_2 e^{\sqrt{2}t} - \frac{1}{2} - \lambda_1 e^{-\sqrt{2}t} \\
&\quad + \lambda_2 e^{\sqrt{2}t} - \frac{1}{2}(t+1) - 1 = \\
&= \lambda_1(-\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + \lambda_2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{2}t - 1
\end{aligned}$$

### LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

#### MECCANICA

$$\frac{1}{2}y'(t)^2 - F(y(t)) = \text{cost}$$

Se abbiamo un moto in  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x''(t) = X(x(t), y(t), z(t)) \\ y''(t) = Y(x(t), y(t), z(t)) \\ z''(t) = Z(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

Siamo nel caso  $y''(t) = g(\gamma(t))$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Supponiamo  $g$  sia conservativo.

$$g(x, y, z) = \nabla U(x, y, z)$$

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{\partial}{\partial x} U \\ y''(t) = \frac{\partial}{\partial y} U \\ z''(t) = \frac{\partial}{\partial z} U \end{cases}$$

Nel caso unidimensionale avevamo scritto

$$y'' = f(y)$$

E moltiplicato per  $y'$

$$y'y'' = f(y)y'$$

Ma in questo caso abbiamo

$$\gamma''(t) = \nabla U(\gamma(t))$$

Moltiplichiamo scalarmente per  $\gamma'(t)$

$$\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = \langle \nabla U(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

Integriamo tra  $t_0$  e  $t$

$$\int_{t_0}^t \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle ds = \int_{t_0}^t \langle \nabla U(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} U(\gamma(s)) ds = U(\gamma(t)) - U(\gamma(t_0)) \\
\int_{t_0}^t \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle ds &= \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \|\gamma'(s)\|^2 ds = \\
&= \frac{1}{2} \|\gamma'(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|\gamma'(t_0)\|^2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} \|\gamma'(t)\|^2 - \frac{1}{2} \|\gamma'(t_0)\|^2 \\
&= U(\gamma(t)) - U(\gamma(t_0))
\end{aligned}$$

Cioè

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \|\gamma'(t)\|^2 - U(\gamma(t)) \\
&= \frac{1}{2} \|\gamma'(t_0)\|^2 - U(\gamma(t_0)) \\
&= \text{costante}
\end{aligned}$$

Quindi  $\frac{1}{2} \|\gamma'(t)\|^2 - U(\gamma(t))$  è costante

#### EQUAZIONI DI EULERO

Supponiamo  $y = y(x)$

$$\begin{aligned}
x^N y^{(N)} + a_{N-1} x^{N-1} y^{(N-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y \\
= b(x) \\
a_i \in \mathbb{R}, b \in C(I)
\end{aligned}$$

Supponiamo  $x \neq 0$

Se  $x > 0$  poniamo  $x = e^t, t = \log x$

Se  $x < 0$  poniamo  $x = -e^t, t = \log -x$

( $x > 0$ ) Sia  $u(t) = y(e^t)$

( $x < 0$ ) Sia  $u(t) = y(-e^t)$

$$u'(t) = y'(e^t) * e^t = y'(x) * x$$

$$u''(t) = \underbrace{y''(e^t)e^{2t}}_{y''*x^2} + y'(e^t)e^t$$

#### ESEMPIO:

$$x^3 y''' + y - xy' = \log x$$

$$x > 0$$

$$x = e^t$$

$$u(t) = y(e^t)$$

$$u'(t) = y'(e^t)e^t = y'(x) * x$$

$$u''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t =$$

$$\begin{aligned}
&= y''(x) * x^2 + y'(x) * x = \\
&= y''(x) * x^2 + u'(t) \\
\Rightarrow &y''(x) * x^2 = u''(t) - u'(t) \\
u'''(t) &= y'''(e^t)e^{3t} + y''(e^t)2e^{2t} + y''(e^t)e^{2t} \\
&\quad + y'(e^t)e^t = \\
&= \underbrace{y'''(e^t)e^{3t}}_{u'''(t)} + 3y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t \\
\Rightarrow &y''' * x^3 = u'''(t) - \underbrace{3y''(e^t)e^{2t}}_{y''(x)*x^2} - \underbrace{y'(e^t)e^t}_{y'(x)*x} \\
y''' * x^3 &= u'''(t) - 3\underbrace{y''(x)*x^2}_{u''(t)-u'(t)} - \underbrace{y'(x)*x}_{u'(t)} \\
&= u'''(t) - 3(u''(t) - u'(t)) - u'(t) \\
y''' * x^3 &= u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)
\end{aligned}$$

Quindi tornando all'equazione iniziale

$$\begin{aligned}
&x^3y''' + y - xy' = \\
&= u''' - 3u'' + 2u' + u - u' = t \\
&u''' - 3u'' + u' + u = t \\
&\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \\
&(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0
\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\ker L = \text{span} \left\{ e^t, e^{(1+\sqrt{2})t}, e^{(1-\sqrt{2})t} \right\}$$

$$u_P(t) = at + b$$

$$u' = a, u'' = u''' = 0$$

$$u''' - 3u'' + u' + u = a + at + b = t$$

$$a = 1, 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$u_P(t) = t - 1$$

$$u(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{(1+\sqrt{2})t} + \lambda_3 e^{(1-\sqrt{2})t} + t - 1$$

Per tornare a  $y$  ricordiamo che  $t = \log x$

$$\Rightarrow y(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 x^{1+\sqrt{2}} + \lambda_3 x^{1-\sqrt{2}} + \log x - 1$$

**EQUAZIONI DI LOTKA E VOLTERRA:** Esempio di sistema non lineare

$$x(t) = \text{prede}$$

$$y(t) = \text{predatori}$$

È un modello non lineare

$$x'(t) = a * x(t) - b * x(t)y(t)$$

$$a, b > 0$$

$$y'(t) = -c * y(t) + d * x(t)y(t)$$

$$c, d > 0$$

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$$

Studiamo le equazioni nel piano delle fasi.

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}$$

Equilibri: soluzioni costanti, quindi con derivata nulla

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un equilibrio è quello banale  $(0,0)^T$ , cioè zero pesci.

Altro equilibrio

$$y = \frac{a}{b}, x = \frac{c}{d}$$

$$\left( \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)^T$$

Ciò vuol dire che se all'inizio ho  $\frac{c}{d}$  prede e  $\frac{a}{b}$  predatori, questi rimarranno costanti.

Posizioniamoci ad esempio sulla retta

$$x = \frac{c}{d}$$

Avremo che il campo vale

$$g\left(\frac{c}{d}, y\right) = \begin{pmatrix} \frac{c}{d}(a - by) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la freccia del vettore del campo è orizzontale, rivolta verso sinistra nel caso ci troviamo sopra a  $\frac{a}{b}$  in quanto

$$a - by < 0, \quad \text{se } y > \frac{a}{b}$$

Mentre rivolta verso destra se siamo sotto  $\frac{a}{b}$

$$a - by > 0, \quad \text{se } y < \frac{a}{b}$$

Posizioniamoci ora sulla retta

$$y = \frac{a}{b}$$

Avremo che il campo vale

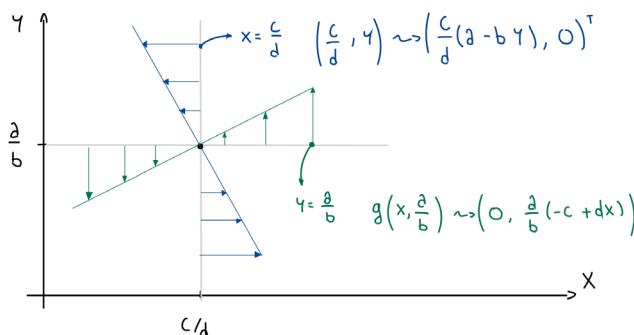
$$g\left(x, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{b}(-c + dx) \end{pmatrix}$$

Quindi la freccia del vettore del campo è verticale, rivolta verso l'alto nel caso ci troviamo a destra di  $\frac{c}{d}$  in quanto

$$-c + dx > 0, \quad \text{se } x > \frac{c}{d}$$

Mentre rivolta verso il basso se siamo a sinistra di  $\frac{c}{d}$

$$-c + dx < 0, \quad \text{se } x < \frac{c}{d}$$



Da questa analisi si può osservare che le soluzioni dovrebbero essere periodiche perché girano attorno al punto  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)^T$ .

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$$

Cosa succede se ho delle condizioni iniziali

$$y(0) = 0, \quad x(0) = x_0 > 0$$

Se  $y(0) = 0$  allora  $x' = ax$  e otteniamo la cresita Malthusiana

$$x(t) = e^{at}$$

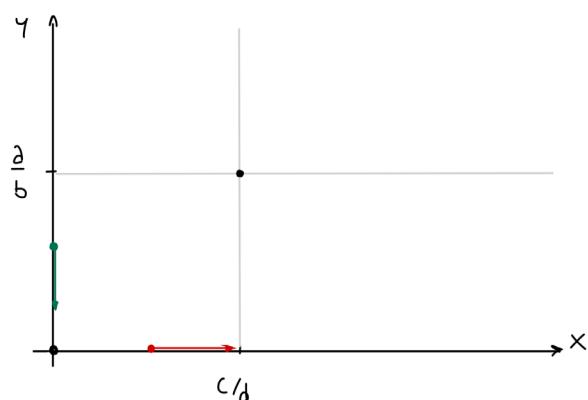
Se invece ho

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0 > 0$$

Allora  $y' = -cy$  e ottengo una decrescita Malthusiana

$$y(t) = e^{-ct}$$

Questo fatto suggerisce che  $(0,0)^T$  è un equilibrio instabile (è una sella).



Ci interessa l'equilibrio nel punto  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)^T$ .

Per vedere cosa succede vicino al punto andiamo a linearizzare il problema.

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}$$

$$Jg(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ -cy + dx & ad \end{pmatrix}$$

$$Jg\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{g}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{bc}{d}\left(y - \frac{a}{b}\right) \\ \frac{ad}{b}\left(x - \frac{c}{d}\right) \end{pmatrix}$$

Studiamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = -\frac{bc}{d}\left(y - \frac{a}{b}\right) \\ y' = \frac{ad}{b}\left(x - \frac{c}{d}\right) \end{cases}$$

Trasliamo nell'origine ponendo

$$u = x - \frac{c}{d}, \quad v = y - \frac{a}{b}$$

$$u' = x', \quad v' = y'$$

$$\begin{cases} u' = -\frac{bc}{d}v \\ v' = \frac{ad}{b}u \end{cases}$$

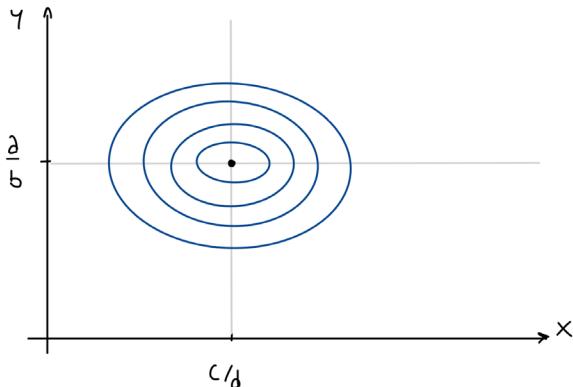
Moltiplico la prima per la seconda invertendo i termini

$$\frac{ad}{b}u * u' = -\frac{bc}{d}v * v'$$

Integrandi

$$\frac{1}{2} \frac{ad}{b}u^2 + \frac{1}{2} \frac{bc}{d}v^2 = \text{costante}$$

La curva  $(u, v)^T$  è un'ellisse.



Si può provare a risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$$

Osservando che  $x' = \frac{dx}{dt}$ ,  $y' = \frac{dy}{dt}$

Ponendo

$$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}$$

$$\frac{a - b * y}{y} dy = \frac{-c + d * x}{x} dx$$

$$\left(\frac{a}{y} - b\right) dy = \left(-\frac{c}{x} + d\right) dx$$

Integrandi

$$a \log y - by = -c \log x + dx + \text{cost}$$

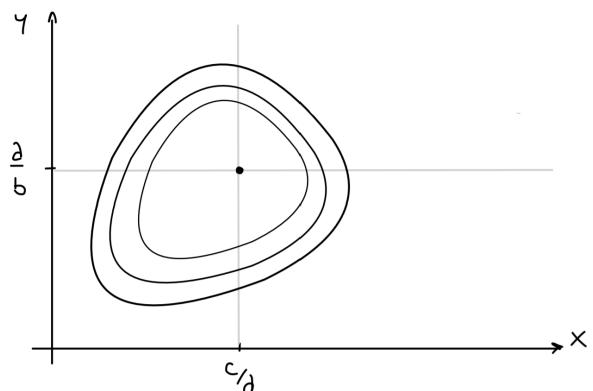
Si conserva la quantità:

$$by - a \log y + dx - c \log x = K$$

$$h(x, y) = by - a \log y + dx - c \log x$$

$$h(x, y) = K$$

Posso costruire le linee di livello, che sono delle curve chiuse:



### TRE LEGGI DI VOLTERRA

1: Le soluzioni del modello sono periodiche

2: Il numero medio di predatori e prede su un ciclo è uguale a quello di equilibrio

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$$

Si può scrivere

$$\frac{x'}{x} = a - by, \quad \frac{y'}{y} = -c + dx$$

Integro,  $T = \text{periodo}$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{x'}{x} ds = \int_{t_0}^{t_0+T} (a - by) ds$$

$$\log\left(\frac{x(t_0 + T)}{x(t_0)}\right) = 0$$

Perché la  $x$  è periodica e quindi

$$x(t_0 + T) = x(t_0)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} (a - by) ds = aT - b \int_{t_0}^{t_0+T} y(s) ds$$

$$\Rightarrow 0 = aT - b \int_{t_0}^{t_0+T} y(s) ds$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T} y(s)ds = \frac{aT}{b}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(s)ds}_{\text{quantità media di predatori in un ciclo}} = \frac{a}{b}$$

Stesso ragionamento vale per

$$\frac{y'}{y} = -c + dx$$

Concludendo che

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(s)ds = \frac{c}{d} \blacksquare$$

3: La conseguenza di un prelievo indiscriminato comporta un aumento di prede (in rapporto ai predatori)

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$$

Supponiamo di fare un prelievo indiscriminato di prede e predatori

$$\begin{cases} x' = x(a - by) - \varepsilon x \\ y' = y(-c + dx) - \varepsilon y \end{cases}$$

E il sistema diventa

$$\begin{cases} x' = \overbrace{(a - \varepsilon)}^{a_1} x - bxy \\ y' = -\underbrace{(c + \varepsilon)}_{c_1} y + dxy \end{cases}$$

Per quanto riguarda le prede

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(s)ds = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{c_1}{d} = \frac{c + \varepsilon}{d} > \frac{c}{d}$$

Mentre per i predatori

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(s)ds = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{a_1}{b} = \frac{a - \varepsilon}{b} < \frac{a}{b}$$