Concetti introduttivi

Ricerca Operativa [035IN]

Lorenzo Castelli

21 Settembre 2021

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

Optimisation problem - definition

An optimisation problem is defined by specifying

- A set E. Its elements are called solutions (or decisions or alternatives).
- A subset $F \subset E$ (feasible set). Its elements are feasible solutions. On the contrary, elements in $E \backslash F$ are named unfeasible. The relationship $x \in F$ is called constraint.
- A function $f : E \to \mathbb{R}$ (objective function) to be minimised or maximised depending on the problem's purpose.

Optimisation problem's aim

Optimal solution

Each element $x^* \in F$ such that $f(x^*) \leq f(y), \forall y \in F$ for a minimisation problem, or $x^* \in F$ such that $f(x^*) \geq f(y), \forall y \in F$ for a maximisation problem is called optimum or optimal solution. The value $v = f(x^*)$ of the objective function in correspondence of the optimal solution is called optimal value.

Problem equivalence

A minimisation problem can be easily transformed into a maximisation one (and vice-versa) by just substituting f with $-f$.

Optimisation problem's formulation

Minimisation

$$v = \min f(x)$$
$$x \in F$$

Maximisation

$$v = \max f(x)$$
$$x \in F$$

Classification of optimisation problems

- Continuous optimisation problems Variables can take all real values ($x \in \mathbb{R}^n$). In addition, we distinguish
  - constrained optimisation if $F \subset \mathbb{R}^n$
  - unconstrained optimisation if $F = \mathbb{R}^n$
- Discrete optimisation problems Variables are constrained to be integer numbers ($x \in \mathbb{Z}^n$). We distinguish
  - integer programming if $F \subseteq \mathbb{Z}^n$
  - binary (or Boolean) programming if $F \subseteq \{0, 1\}^n$
- Mixed optimisation problems. Only some variables are constrained to be integer.

Example 1 - Production planning

A chemical industry manufactures 4 types of fertilisers, Type 1, Type 2, Type 3, and Type 4, whose processing is carried out by two departments of the industry: the production department and the packaging department. In order to obtain ready-to-sell fertiliser, processing in both departments is necessary. The following table shows, for each type of fertiliser, the times (in hours) necessary for processing in each of the departments to have a ton of fertiliser ready for sale.

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
production department	2	1.5	0.5	2.5
packing department	0.5	0.25	0.25	1

After deducting the cost of the raw material, each tonne of fertiliser gives the following profits (prices expressed in euros per tonne)

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
profit	250	230	110	350

Determine the quantities that must be produced weekly of each type of fertiliser in order to maximise the overall profit, knowing that every week, the production department and the packaging department have a maximum working capacity of 100 and 50 hours, respectively.

Example 1 - Solution (1)

Decision variables The most natural choice is to introduce four real variables (x_1, x_2, x_3, x_4) representing the quantity of product of Type 1, Type 2, Type 3, and Type 4, respectively, to produce in one week.

Objective function Each ton of fertiliser contributes to the total profit, which can be expressed as

$$250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4 \tag{1}$$

The objective of the chemical industry is to choose the appropriate values of x_1, x_2, x_3, x_4 to maximise the profit as expressed in (1).

Example 1 - Solution (2)

- Constraints Obviously the production capacity of the factory limits the values that can take variables $x_j, j = 1, \ldots, 4$. In fact there is a maximum working capacity in weekly hours of each Department. In particular, there are at most 100 hours per week for the production department and since each ton of Type 1 fertiliser uses the production department for 2 hours, each ton of Type 2 fertiliser uses the production department for 1.5 hours and so on for the others types of fertilisers you will have to have

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100. \tag{2}$$

By reasoning in the same way for the packaging department we get

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50 \tag{3}$$

Expressions (2) and (3) constitute the constraints of the model.
There is also the need to make explicit constraints due to the fact that variables $x_j, j = 1, \ldots, 4$ representing quantities of product cannot be negative and therefore non-negative constraints must be added: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\max 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4& \\
2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 &\leq 100 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 &\leq 50 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

The feasible set F is

$$\begin{aligned}
F = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 &\leq 100, \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 &\leq 50, \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0\}
\end{aligned}$$

Example 2 - Capital budget

Suppose we have to invest €1000 on the financial market. We also assume that the market offers three different types of investments (A, B, C), each characterised by a purchase price and a net yield, which are summarised in the following table:

	A	B	C
Purchase price	750	200	800
Yield	20	5	10

You want to decide which of the investments to make to maximise the return, knowing that investments A, B, C cannot be carried out in a partial way, i.e., they are not divisible.

Example 2 - Solution

Decision variables The most natural choice is to introduce three binary variables (x_A, x_B, x_C) where

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{if investment } i \text{ is not made} \\ 1 & \text{if investment } i \text{ is made} \end{cases}$$

Objective function The goal is to maximise the total return, i.e,

$$20x_A + 5x_B + 10x_C$$

Constraints The total cost doesn't have to be above €1000, i.e.,

$$750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000$$

Example 2 - Final formulation

$$
\begin{aligned}
&\max 20x_A + 5x_B + 10x_C \\
&\qquad 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000 \\
&\qquad x_i \in \{0,1\}, i = A, B, C
\end{aligned}
$$

The feasible set F is

$$F = \{x \in \{0,1\}^3 \mid 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000\}$$

Convessità

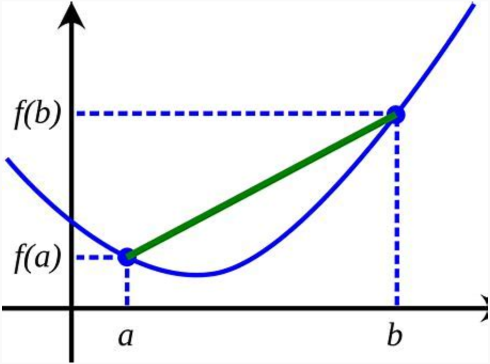
Definition

Una funzione $f(x)$ di una variabile è una funzione convessa se, per ogni coppia $x^{'}$ e $x^{''}$ di valori di x (con $x^{'} < x^{''}$) si ha

$$f[\lambda x^{''} + (1-\lambda)x^{'}] \leq \lambda f(x^{''}) + (1-\lambda) f(x^{'}) \tag{4}$$

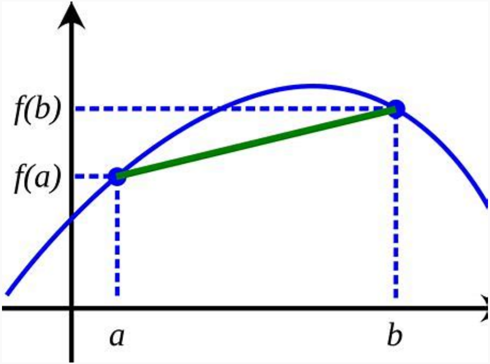
per ogni valore di λ tale che $0 < \lambda < 1$.

- Una funzione è strettamente convessa se si può sostituire $\leq$ con $<$.
- Una funzione è concava se la condizione (4) vale quando si sostituisce $\leq$ con $\geq$.
- Una funzione è strettamente concava se si può sostituire $\geq$ con $>$.



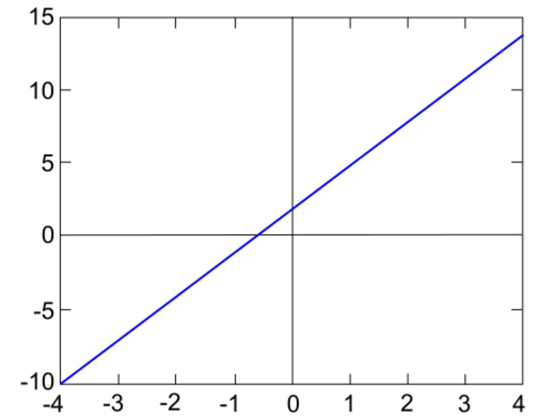
La funzione $f(x)$ è convessa se per ogni coppia di punti del grafico $f(x)$ il segmento che li congiunge sta interamente al di sopra del grafico di $f(x)$ o coincide con esso

Funzione concava



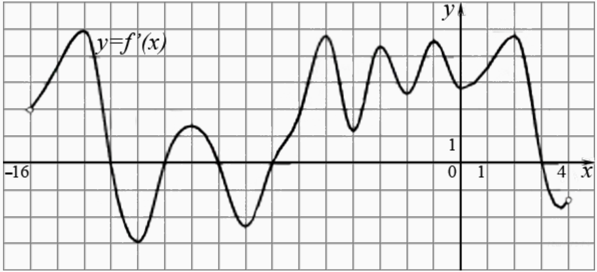
La funzione $f(x)$ è concava se per ogni coppia di punti del grafico $f(x)$ il segmento che li congiunge sta interamente al di sotto del grafico di $f(x)$ o coincide con esso

Funzione lineare



Una funzione lineare è una funzione che è sia concava che convessa.

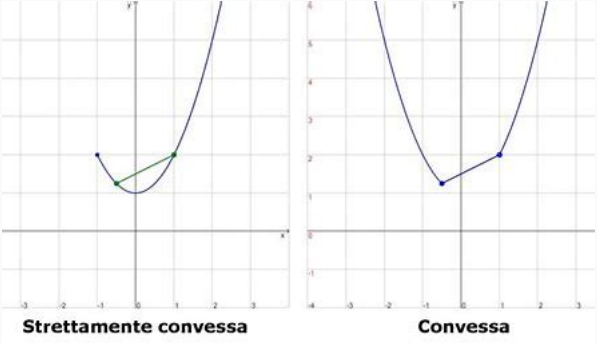
Funzione né concava né convessa



Sia $f(x)$ una funzione di una sola variabile che ammette derivata seconda per tutti i possibili valori di x. Allora $f(x)$ è:

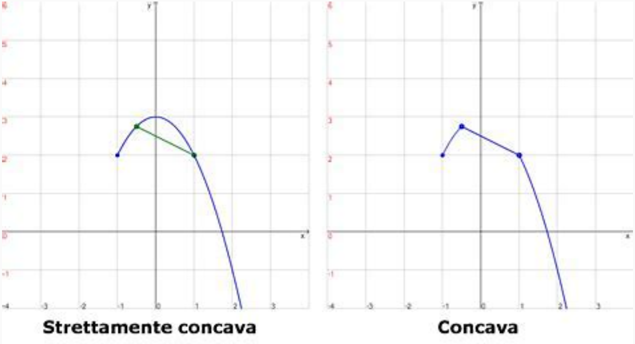
- convessa se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$ per ogni possibile valore di x.
- strettamente convessa se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ per ogni possibile valore di x.
- concava se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0$ per ogni possibile valore di x.
- strettamente concava se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$ per ogni possibile valore di x.

Funzione strettamente convessa



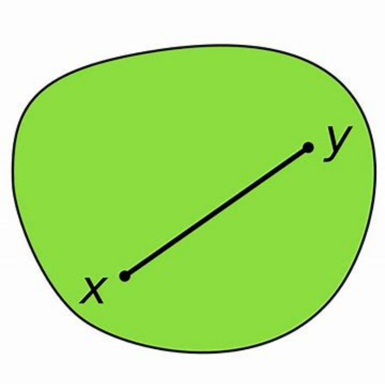
Una funzione strettamente convessa è anche convessa, ma una funzione convessa non è strettamente convessa se la sua derivata seconda è uguale a zero per alcuni valori di x.

Analogamente una funzione strettamente concava è concava, ma non è vero il viceversa.

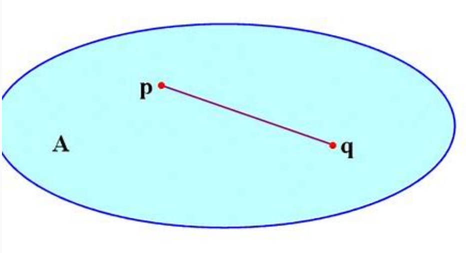


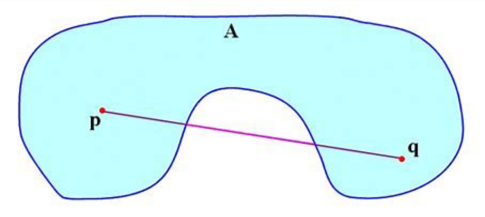
Definition

Un insieme convesso è un insieme di punti tale che, per ogni coppia di punti dell'insieme, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme.

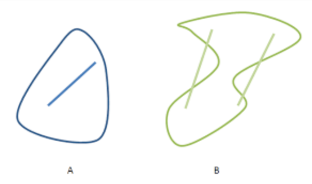


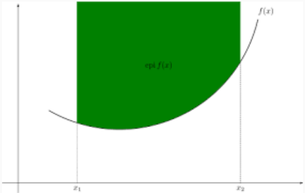
Insiemi convessi e non convessi





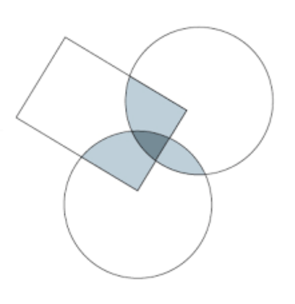
Insiemi convessi e non convessi





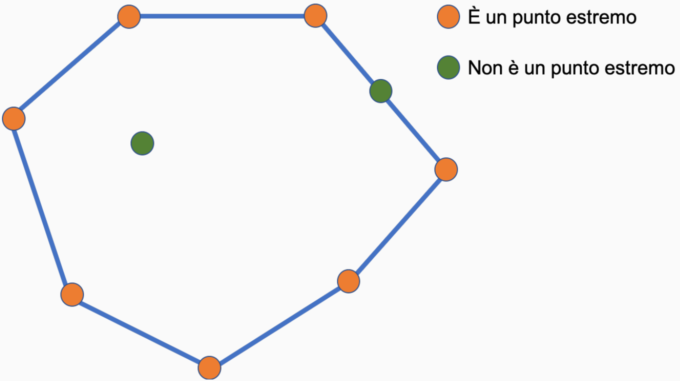
Intersezione di insiemi convessi

L'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso



Definition

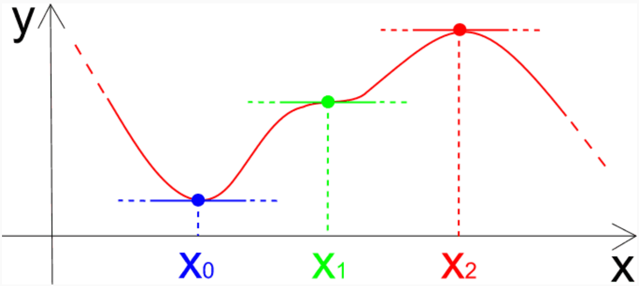
Un punto estremo di un insieme convesso è punto dell'insieme che non appartiene ad alcun segmento congiungente altri due punti distinti dell'insieme



Non tutti gli insiemi convessi hanno punti estremi!

Si consideri una funzione di una sola variabile e derivabile.
Condizione necessaria affinché una particolare soluzione $x = x^*$ sia un minimo o un massimo è che

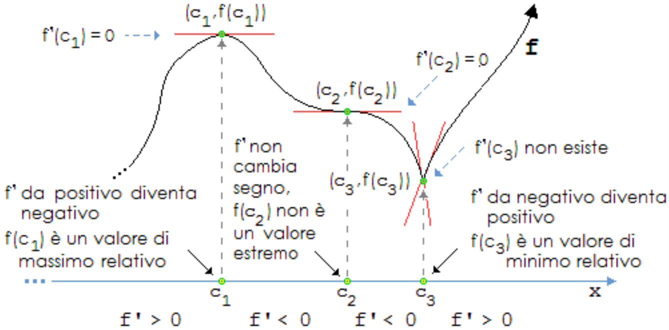
$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ in } x = x^*$$



Per avere maggiori informazioni sui punti critici x_0 (punto di minimo), x_1 (punto di flesso) e x_2 (punto di massimo) è necessario esaminare la derivata seconda.

Funzione non derivabile

Se la funzione non è derivabile in tutto il dominio la proprietà sopra enunciata non vale



Se

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0 \text{ in } x = x^*$$

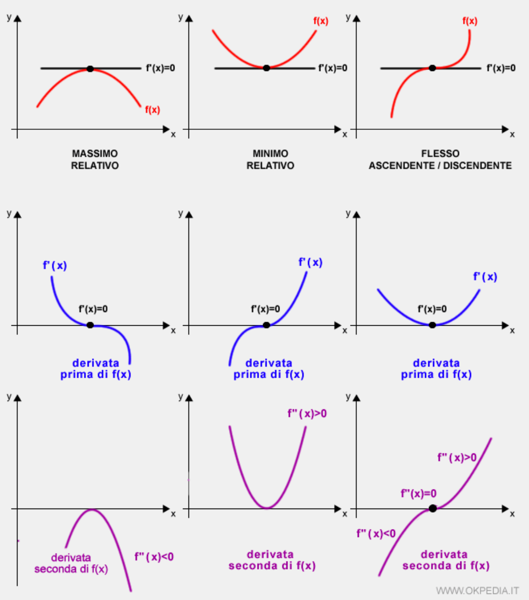
allora x^* è almeno un minimo locale (cioè $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni x sufficientemente vicino a x^*).

In altre parole, x^* è un minimo se $f(x)$ è strettamente convessa in un intorno di x^*.

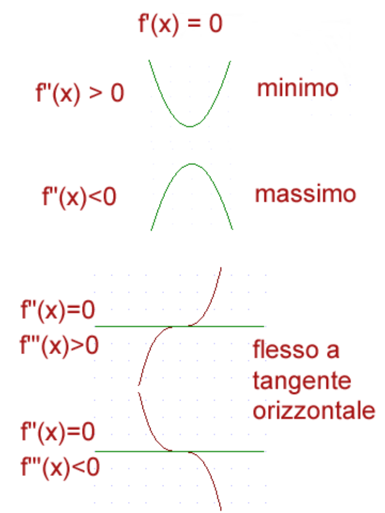
Analogamente, una condizione sufficiente affinché x^* sia un massimo locale (supponendo che soddisfi la condizione necessaria) è che $f(x)$ sia strettamente concava in un intorno di x^* (cioè la derivata seconda è negativa in x^*).

Se la derivata seconda è nulla è necessario esaminare le derivate di ordine superiore (in questo caso il punto potrebbe anche essere un *punto di flesso*).

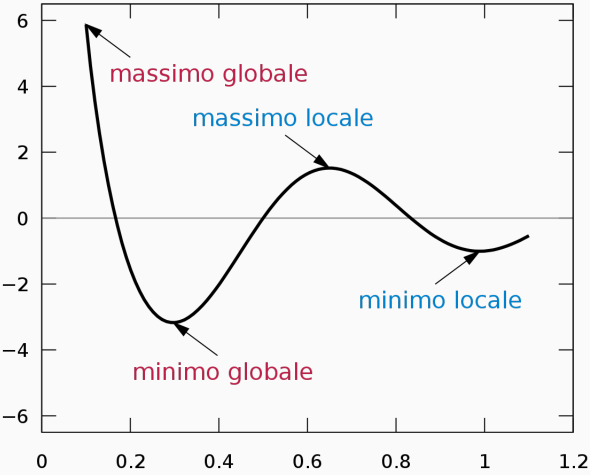
Studio della derivata seconda



Studio della derivata terza



Minimi e massimi



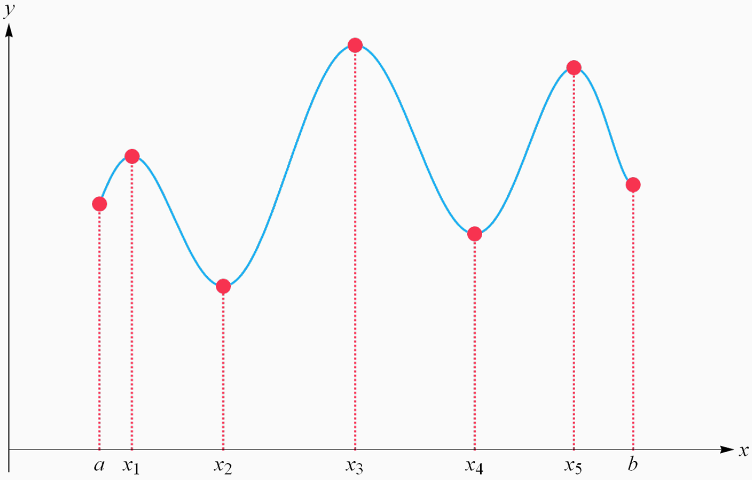
Se il dominio è limitato è necessario controllare gli estremi dell'intervallo.

Per determinare un minimo globale (cioè una soluzione x^* tale che $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni x) è necessario confrontare i minimi locali e identificare quello per il quale si ha il più piccolo valore di $f(x)$.

Se questo valore è minore di $f(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (o agli estremi del suo dominio, se essa è definita in un intervallo limitato), allora questo punto è un minimo globale.

Il massimo globale è determinato in modo analogo.

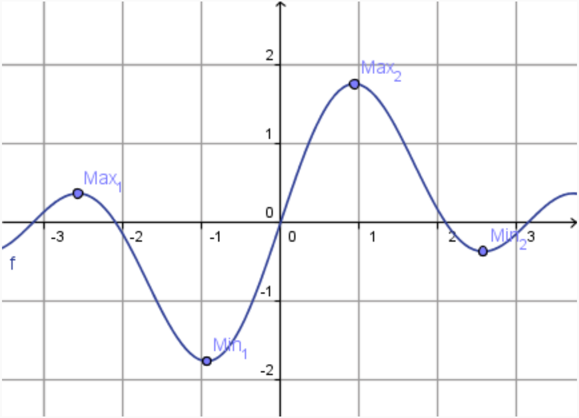
Minimi e massimi globali



Minimo globale in x_2

Massimo globale in x_3

Infiniti minimi e massimi



$$f(x) = \sin x + \sin(2x)$$

Minimi globali per funzioni convesse

Se $f(x)$ è una funzione convessa, allora una qualunque soluzione x^* tale che

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ in } x = x^*$$

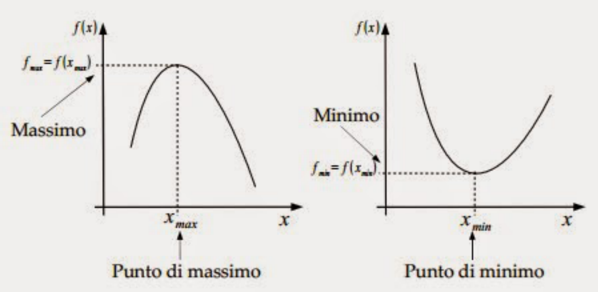
è automaticamente un minimo globale.

In altre parole questa condizione è non solo necessaria ma anche sufficiente per un minimo globale di una funzione convessa.

Questa soluzione non deve necessariamente essere unica perché la funzione potrebbe rimanere costante in un certo intervallo nel quale la sua derivata è nulla.

D'altra parte se $f(x)$ è strettamente convessa allora questa soluzione deve essere l'unico minimo globale.

Massimi globali per funzioni concave



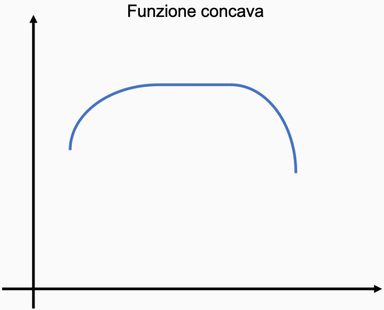
Analogamente se $f(x)$ è una funzione concava, allora la condizione

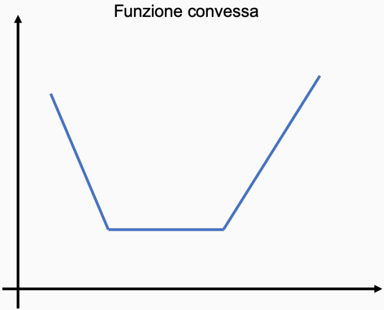
$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ in } x = x^*$$

è sia necessaria che sufficiente affinché x^* sia un massimo globale.

Infinite soluzioni ottime

Se la funzione non è strettamente concava o strettamente convessa ci possono essere infinite soluzioni ottime, rispettivamente massimi e minimi globali.





Thank you for your attention