Enrico Lacchin

Ricerca Operativa

Appunti

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \; z = c^T x$$

OPPURE max

$$\text{s.t.} \begin{cases} A_1 x \geq b_1 \\ A_2 x \leq b_2 \\ \Delta x = e \\ x' \geq 0 \\ x'' \text{ libere} \end{cases}$$

$A_1 x \geq b_1$, $A_2 x \leq b_2$ ← VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA

$\Delta x = e$ ← VINCOLI DI UGUAGLIANZA

$x' \geq 0$ ← ALCUNE VARIABILI NON-NEGATIVE

x'' libere ← ALCUNE VARIABILI LIBERE

Materia: Ricerca Operativa
Docente: Lorenzo Castelli

Indice

1 21/09/2021 - Concetti introduttivi

1.1 Ottimizzazione dei problemi

1.1.1 Definizione

Un problema ottimizzato è definito specificando:

- Un insieme E: Elementi che vengono chiamati "soluzione"

- Un sotto insieme $F \subset E$
- Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ denominata come funzione oggetto che dev'essere minimizzata o massimizzata (a seconda del problema)

1.2 Convessità

1.2.1 Definizione

Una funzione $f(x)$ di una variabile è una funzione convessa se, per ogni coppia x' e x'' di valori (con $x' < x''$) si ha

$$f[\lambda x'' + (1 - \lambda)x'] \leq \lambda f(x'') + (1 - \lambda)f(x')$$

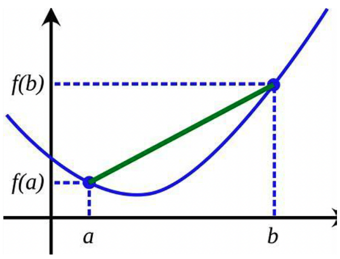
per ogni valore di λ tale che $0 < \lambda < 1$

- Una funzione è *strettamente convessa* se si può sostituire $\leq$ con $<$

- Una funzione è *concava* se la condizione sopra citata vale quando si sostituisce $\leq$ con $\geq$

- Una funzione è *strettamente concava* se si può sostituire $\geq$ con $>$

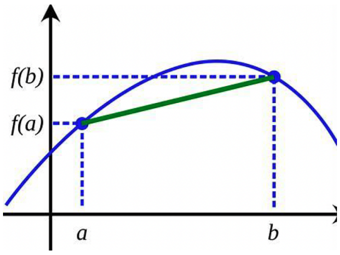
1.2.2 Funzione convessa



La funzione $f(x)$ è convessa se per ogni coppia di punti del grafico $f(x)$ il segmento che li congiunge sta interamente al di sopra del grafico di $f(x)$ o coincide con esso.

Una funzione strettamente convessa è anche convessa, ma una funzione convessa non è strettamente convessa se la sua derivata seconda è uguale a zero per alcuni valori di x.

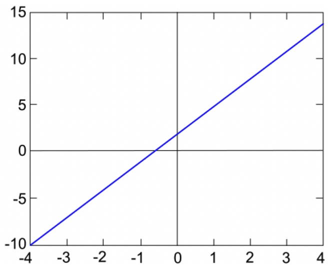
1.2.3 Funzione concava



La funzione $f(x)$ è concava se per ogni coppia di punti del grafico $f(x)$ il segmento che li congiunge sta interamente al di sotto del grafico di $f(x)$ o coincide con esso.

Una funzione strettamente concava è anche concava, ma una funzione concava non è strettamente concava se la sua derivata seconda è uguale a zero per alcuni valori di x.

1.2.4 Funzione Lineare



Una funzione lineare è una funzione che è sia concava che convessa.

1.2.5 Test di convessità

Sia $f(x)$ una funzione di una sola variabile che ammette derivata seconda per tutti i possibili valori di x. Allora $f(x)$ è:

- *Convessa* se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$ per ogni possibile valore di x

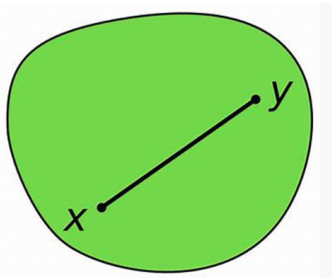
- *Strettamente convessa* se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ per ogni possibile valore di x

- *Concava* se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0$ per ogni possibile valore di x
- *Strettamente concava* se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$ per ogni possibile valore di x

1.3 Insiemi convessi

1.3.1 Definizione

Un insieme convesso è un insieme di punti tale che, per ogni coppia di punti dell'insieme, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme.



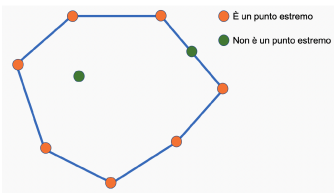
1.3.2 Intersezione di insiemi convessi

L'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.

1.4 Punto estremo

1.4.1 Definizione

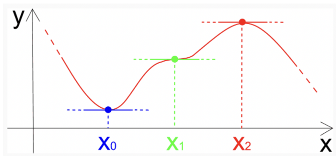
Un punto estremo di un insieme convesso è punto dell'insieme che non appartiene ad alcun segmento congiungente altri due punti distinti dell'insieme



N.B: Non tutti gli insiemi convessi hanno punti estremi

1.5 Ottimizzazione non vincolata

Si consideri una funzione di una sola variabile e derivabile.
Condizione necessarie affinché una particolare soluzione $x = x*$ sia un minimo o un massimo è che $\frac{df(x)}{dx} = 0 \; in \; x = x_*$



Per avere maggiori informazioni sui punti critici x_0 (punto di minimo), x_1 (punto di flesso) e x_2 (punto di massimo) è necessario esaminare la derivata seconda

N.B.: Se la funzione non è derivabile in tutto il dominio la proprietà sopra enunciata non vale

1.6 Minimi e massimi locali

Se $\frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0 \; in \; x = x*$ allora $x*$è almeno un minimo locale (cioè $f(x*) \leq f(x)$ per ogni x sufficientemente vicino a $x*$. In altre parole, $x*$ è un minimo se $f(x)$ è strettamente convessa in un intorno di $x*$.
Analogamente, una condizione sufficiente affinché $x*$ sia un massimo locale (supponendo che soddisfi la condizione necessaria) è che $f(x)$ sia strettamente concava in un intorno di $x*$ (cioè la derivata seconda è negativa in $x*$). Se la derivata seconda è nulla è necessario esaminare le derivate di ordine superiore (in questo caso il punto potrebbe anche essere un punto di flesso).

1.7 Minimi e massimi globali

Per determinare un minimo globale (cioè una soluzione $x*$ tale che $f(x*) \leq f(x), \; \forall x$) è necessario confrontare i minimi locali e identificare quello per il quale si ha il più piccolo valore di $f(x)$. Se questo valore è minore di $f(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (o agli estremi del suo dominio, se essa è definita in un intervallo limitato), allora questo punto è un minimo globale.
Il massimo globale è determinato in modo analogo.

1.7.1 Minimi globali per funzioni convesse

Se $f(x)$ è una funzione convessa, allora una qualunque soluzione $x*$ tale che $\frac{df(x)}{dx} = 0 \; in \; x = x*$ è automaticamente un minimo globale. In altre parole questa condizione è non solo necessaria ma anche sufficiente per un minimo globale di una funzione convessa. Questa soluzione non deve necessariamente essere unica perché la funzione potrebbe

rimanere costante in un certo intervallo nel quale la sua derivata è nulla.
D'altra parte se $f(x)$ è strettamente convessa allora questa soluzione deve essere l'unico minimo globale.

1.7.2 Massimi globali per funzioni concave

Analogamente se $f(x)$ è una funzione concava, allora la condizione $\frac{df(x)}{dx} = 0 \; in \; x = x*$ è sia necessaria che sufficiente affinché $x*$ sia un massimo globale.

Se la funzione non è strettamente concava o strettamente convessa ci possono essere infinite soluzioni ottime, rispettivamente massimi e minimi globali.

2 23/09/2021 - Esempi di modelli

2.1 La compilation ideale - Problema dello zaino

Si vuole realizzare una compilation ideale avendo disposizione dei file musicali e un CD-ROM dalla capacità di 800 MB. l'indice di gradimento (in una scala da 1 a 10) e l'ingombro in MB di ogni file sono riportati nella tabella seguente.

Canzone	Gradimento	Ingombro
Light my fire	8	210
Fame	7	190
I will survive	8,5	235
Imagine	9	250
Let it be	7,5	200
I feel good	8	220

Si vuole decidere quali file inserire nel CD in modo tale da massimizzare il gradimento complessivo senza eccedere la capacità del CD.

Formulazione : Il problema può essere modellato per mezzo di variabili decisionali binarie associate a ogni file musicale in modo tale che assumono valore uno se il file in questione e inserito nel CD valore zero in caso contrario. Indicato con g_i il gradimento della canzone i-esima, con w_i il suo ingombro e con C la capacità del CD il problema può essere formulato per mezzo del seguente problema PLI:

$$\begin{aligned} max\ z = \ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \\ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq C \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

dove $n = 6$ è il numero di file musicali. L'unico vincolo del problema consiste nel fatto che l'ingombro dei file inseriti non deve eccedere la capacità del CD.

Soluzione del problema: EXCEL

2.2 I treni combinati

Una compagnia ferroviaria deve decidere quanti treni combinati realizzare potendo scegliere tra due diversi modelli DeLuxe e FarWest. La composizione dei due treni è schematizzata nella tabella seguente.

Tipo di Vagone	DeLuxe	Far West	Disponibilità
Merci	1	3	12
WLit	1	0	9
Ristorante	1	0	10
II Classe	2	3	21
I Classe	1	2	10
Motrice	1	1	9
Guadagno	3000€	8000€	

Si vuole massimizzare il guadagno totale

Poiché dobbiamo decidere quanti treni di ciascun tipo realizzare il problema può essere formulato per mezzo di due variabili decisionali x_1 e x_2 che rappresentano rispettivamente il numero di treni Deluxe e il numero di treni Far West da realizzare: ovviamente tali variabili dovranno risultare intere e non negative.

$$
\begin{aligned}
max\ z = \quad & 3x_1 + 8x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \\
& x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& x_1 \leq 9 \\
& x_1 \leq 10 \\
& x_1 + x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0,\ interi
\end{aligned}
$$

Soluzione del problema: EXCEL - PDF

3 27/09/2021 - Introduzione alla programmazione lineare

3.1 Problema di programmazione lineare

Un problema di programmazione lineare (LP) è un'ottimizzazione di un problema tale che

$$z = max\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

oppure

$$z = min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

dove

- La funzione obiettivo $c(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare. Perciò $c(x) = cx$ dove c è un vettore in $\mathbb{R}^n$
- L'insieme X delle soluzioni ammissibili è definito da vincoli lineari tali che $h(x) = \gamma$ e/o $h(x) \leq \gamma$, dove $h(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione linare e γ uno scalare in $\mathbb{R}$

3.1.1 Formulazione

Un problema di programmazione lineare può essere formulato come

$$\begin{aligned} max\ z \quad &= c^T x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} max\ Z \quad &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ &x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Notazione:

- m: numero di righe della matrice A
- n: dimensione del vettore x e numero di colonne della matrice A
- c: vettore della funzione obiettivo
- A: matrice
- b: vettore dei termini noti
- x: vettore delle variabili decisionali
- $X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$: insieme delle soluzioni ammissibili.

3.1.2 Proprietà

Proporzionalità : La funzione obiettivo e ogni vincolo devono essere lineari con rispetto a ciascuna variabile decisionale. In altre parole, la misura dell'efficacia e l'uso della risorsa devono essere proporzionati al livello di ogni attività svolta individualmente, cioè se $x_j \neq 0$ e $x_1 = x_2 = \cdots = x_{j-1} = x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$ deve essere $Z = c_j x_j$ e $a_{ij} x_j \leq b_i, \ \forall i, \forall j$
Pertanto devono sempre valere le seguenti proprietà:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} = c_j \ \forall j \qquad \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \geq a_{ij} \ \forall i \forall j$$

cioè, la misura marginale dell'efficacia e l'uso marginale di ciascuna risorsa deve essere costante su tutto il range di variazione dei livelli di ciascuna attività.

Fixed Charge : Un caso in cui non è possibile applicare il LP è quando abbiamo una tariffa fissa. Questo accade ogni volta che c'è una tariffa di preparazione o un costo di installazione associato a un'attività.
Cioè, se x è il livello di una certa attività e la funzione obiettivo è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ K + cx & x > 0 \end{cases}$$

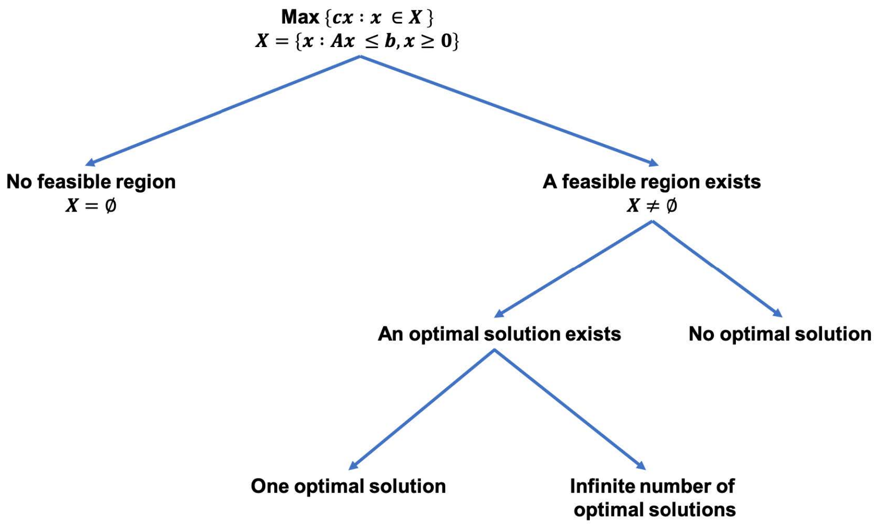
La proprietà di proporzionalità è violata.

Addittività : Non devono esserci interazioni tra le varie attività, cioè la misura totale dell'efficacia derivata dal risultato congiunto delle attività deve essere pari alla somma delle quantità risultanti da ogni attività svolta individualmente.
In pratica, se $c_1x_1, c_2x_2, \ldots, c_nx_n$ è la misura dell'efficacia per le attività $1, 2, \ldots, n$ condotte individualmente, deve succedere che $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ (dove Z è la misura totale dell'efficacia).
Analogamente vale per l'utilizzo totale delle risorse.

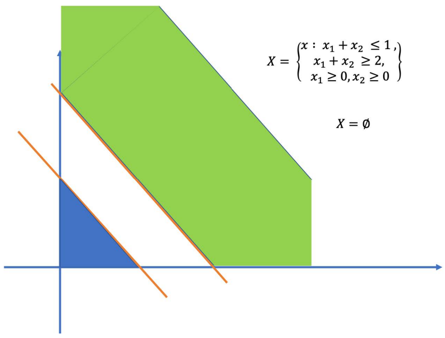
Divisibilità (o Continuità) : Il valore di x_j sono numeri reali $\to x \in \mathbb{R}^n$
Va notato che questo non ha sempre senso, cioè, a volte la soluzione che stiamo cercando deve essere intera. Però, in tal caso, se la regione ammissibile non è vuota, possiamo sempre trovare un vettore x che rispetta i vincoli anche senza essere intero.
Escludiamo sempre il caso di valori complessi.

Certezza : Tutti i coefficienti del problema sono numeri reali costanti noti a priori. Non c'è niente di stocastico, niente di casuale.

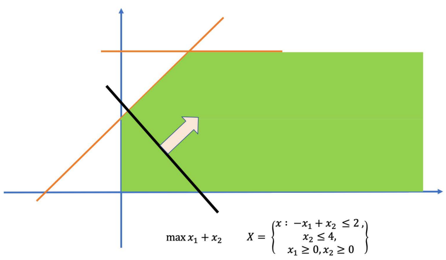
3.2 Possibili uscite di un problema LP



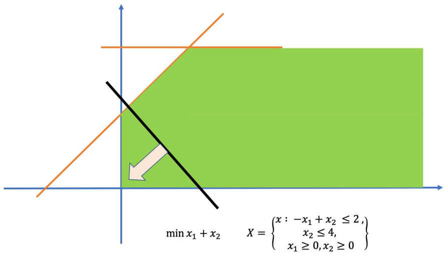
3.2.1 Nessuna regione ammissibile



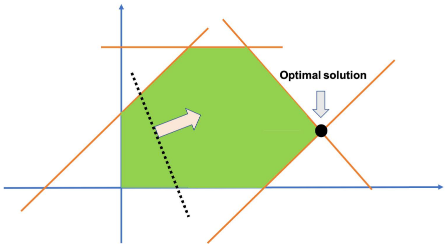
3.2.2 Nessuna soluzione ottima



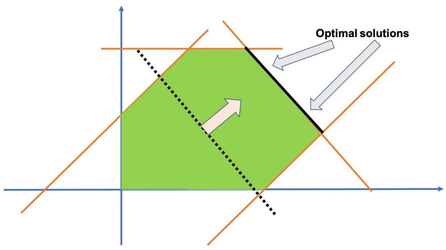
3.2.3 Soluzione ottima



3.2.4 Unica soluzione ottima



3.2.5 Infinite soluzioni ottime



3.3 Definizioni

Iperpiano : Chiamiamo iperpiano l'insieme $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ dove $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$. Le regioni $X^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ e $X^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\}$ sono detti semispazi delimitati dal supporto dell'iperpiano H.

Poliedro : Chiamiamo poliedro (convesso) l'intersezione di un numero finito di semi-spazi e iperpiani.

Politopo : Chiamiamo politopo un poliedro limitato P, cioè esiste una costante $M > 0$ tale che $\|x\| \leq M \quad \forall x \in P$

Lemma : La regione ammissibile di un problema LP è un poliedro convesso.

Vertice : I punti estremi di un polierdo convesso.

3.4 Teorema chiave

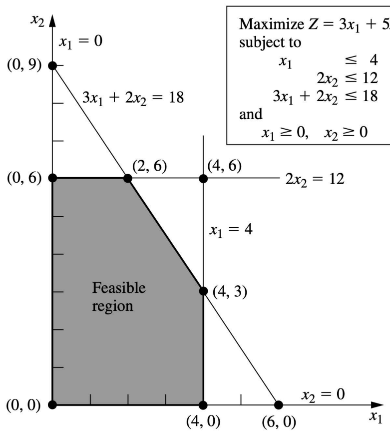
Dato un problema lineare

$$\begin{aligned} max\ z \ &= cx \\ &Ax = b \ \ (b \geq 0) \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Se $X \neq \emptyset$ e ha una soluzione ottima e finita, allora esiste un vertice di X che è una soluzione ottima.
La dimostrazione si basa sul fatto che X è un poliedro e quindi è un insieme convesso.

4 30/09/2021 - L'algoritmo del simplesso (fondamenti)

4.1 Soluzione d'angolo



Un confine di vincolo è una linea che forma il confine di ciò che è consentito dal vincolo corrispondente.
I punti di intersezione sono le soluzioni dei vertici del problema. I cinque che si trovano agli angoli della regione ammissibile - $(0,0),(0,6),(2,6),(4,3)$ e $(4,0)$ - sono le soluzioni ammissibili ai vertici (soluzioni CPF). Le altre tre - $(0,9),(4,6)$ e $(6,0)$ - sono chiamate soluzioni irrealizzabili.
In questo esempio, ogni soluzione del punto d'angolo si trova all'intersezione di due limiti di vincolo. Per un problema LP con n variabili decisionali, ciascuna delle sue soluzioni del punto d'angolo si trovano all'intersezione di n limiti di vincolo.

4.2 Soluzioni CPF adiacenti

Alcune coppie delle soluzioni CPF nell'esempio condividono un vincolo confine, e altre coppie no. Sarà importante distinguere tra questi casi utilizzando le seguenti definizioni generali.
Definizione: Per qualsiasi problema LP con n variabili decisionali, due soluzioni CPF sono adiacenti tra loro se condividono $n-1$ limiti di vincolo. Le due soluzioni CPF adiacenti sono collegate da un segmento di linea che giace su questi stessi confini di vincoli condivisi. Tale segmento di linea è detto bordo (spigolo) della regione ammissibile.
Poiché $n = 2$ nell'esempio, due delle sue soluzioni CPF sono adiacenti se ne condividono un limite di vincolo; per esempio, $(0,0)$ e $(0,6)$ sono adiacenti perché condividono il limite di vincolo $x_1 = 0$. La regione ammissibile ha cinque bordi, costituiti da i cinque segmenti di linea che formano il confine di questa regione. Nota che due bordi emanano

da ciascuna soluzione CPF. Quindi, ogni soluzione CPF ha due soluzioni CPF adiacenti (ciascuna giacente all'altra estremità di uno dei due bordi), come enumerato di seguito

Soluzione CPF	Soluzione CPF adiacente
$(0,0)$	$(0,6)$ e $(4,0)$
$(0,6)$	$(2,6)$ e $(0,0)$
$(2,6)$	$(4,3)$ e $(0,6)$
$(4,3)$	$(2,6)$ e $(4,0)$
$(4,0)$	$(0,0)$ e $(4,3)$

4.3 Proprietà 1 - La soluzione ottima è su un vertice

1. Se esiste esattamente una soluzione ottima, allora deve essere una soluzione CPF.
2. Se ci sono più soluzioni ottime (e una regione ammissibile limitata), allora almeno due devono essere soluzioni CPF adiacenti

Dimostrazione (1): Per assurdo, assumendo che esista esattamente una soluzione ottima e che non sia una soluzione CPF.
Ricordiamo la definizione di soluzione CPF (una soluzione ammissibile che non giace su nessun segmento di linea che collega altre due soluzioni ammissibili). Poiché abbiamo assunto che la soluzione ottima x non è una soluzione CPF, questo implica che devono esserci altre due soluzioni fattibili come che il segmento di linea che li collega contenga la soluzione ottima. Facciamo che i vettori x' e x'' denotino queste altre due soluzioni ammissibili e indichiamo con Z_1 e Z_2 il loro rispettivo valore della funzione obiettivo. Come ogni altro punto sul segmento di linea che collega

$$x^* = \alpha x'' + (1-\alpha)x'$$

Per qualche valore di α tale che $0 < \alpha < 1$ otteniamo

$$Z^* = \alpha Z_2 + (1-\alpha)Z_1$$

Poiché i pesi α e $1-\alpha$ si sommano a 1, le uniche possibilità di come Z^*, Z_1 e Z_2 vengono confrontate sono:

- $Z^* = Z_1 = Z_2$
- $Z_1 < Z^* < Z_2$
- $Z_1 > Z^* > Z_2$

La prima possibilità implica che x' e x'' siano anche loro soluzione ottima che contraddice l'ipotesi che esiste esattamente una soluzione ottima. Entrambe le ultime possibilità contraddicono l'assunto che x^* (non una soluzione CPF) è ottima. La conclusione che ne risulta è che è impossibile avere un singola soluzione ottima che non è una soluzione CPF.

Dimostrazione (2): Quello che succede quando risolvi graficamente è che il la linea della funzione obiettivo continua a sollevarsi finché non contiene il segmento di linea collegando le due soluzioni CPF.
La stessa cosa accadrebbe in dimensioni superiori tranne che l'iperpiano della funzione obiettivo continuerebbe a sollevarsi fino a contenere il segmento/i che collega due (o più) soluzioni CPF adiacenti.
Di conseguenza, tutte le soluzioni ottime possono essere ottenute come medie ponderate delle soluzioni CPF ottimali.

4.4 Proprietà 2 - Un numero finito di vertici

C'è solo un numero finito di soluzioni CPF.
Dimostrazione: Ogni soluzione CPF è la soluzione simultanea di un sistema di n equazioni con $m+n$ equazioni di confine. Il numero delle diverse combinazioni delle equazioni $m+n$ prese n alla volta è

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

che è un numero finito.
L'enumerazione esauriente potrebbe non essere possibile: un problema di programmazione lineare piuttosto piccolo con solo $m = 50$ e $n = 50$ avrebbero $\frac{100!}{(50!)2} \simeq 10^{29}$ sistemi di equazioni da risolvere!
Al contrario, il metodo del simplesso dovrebbe esaminare solo circa 100 soluzioni CPF per un problema di queste dimensioni.

4.5 Proprietà 3 - La regione ammissibile è convessa

Se una soluzione CPF non ha soluzioni CPF adiacenti che sono migliori (come misurato da Z), allora non ci sono soluzioni CPF migliori da nessuna parte. Pertanto, una tale soluzione CPF è garantita come una soluzione ottima (dalla Proprietà 1), assumendo solo che il problema possiede almeno una soluzione ottima (garantita se il problema possiede soluzioni ammissibili e una regione ammissibile limitata).

4.6 Test di ottimalità

Considera qualsiasi problema di programmazione lineare che ne possieda almeno una soluzione ottima. Se una soluzione CPF non ha soluzioni CPF adiacenti che sono meglio (come misurato da Z), allora deve essere una soluzione ottima.

Quindi, nell'esempio, $(2, 6)$ deve essere ottimo semplicemente perché il suo $Z = 36$ è maggiore di $Z = 30$ per $(0, 6)$ e $Z = 27$ per $(4, 3)$. Questo test di ottimalità è il quello utilizzato dal metodo del simplesso per determinare quando una soluzione ottima è stata raggiunta.

4.7 L'algoritmo del simplesso

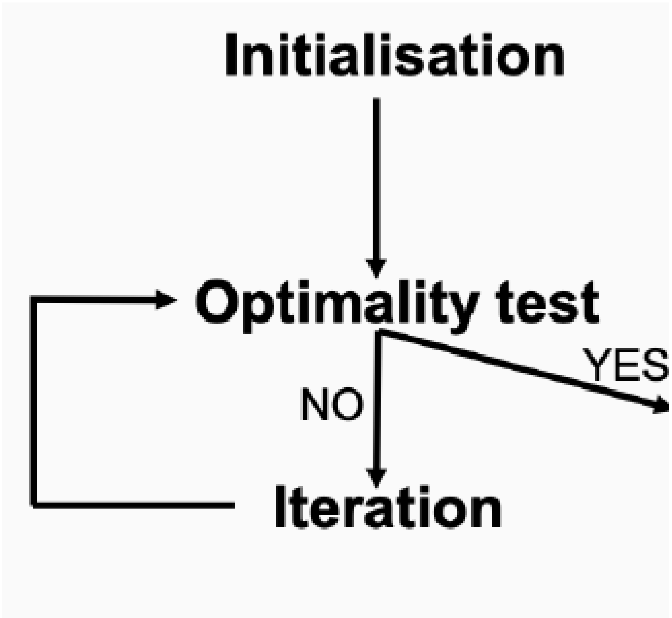
- **Inizializzazione**: Sceglie $(0,0)$ come soluzione CPF iniziale da esaminare (Questo è conveniente perché non necessita calcoli per determinare la soluzione CPF)
- **Test di ottimalità**: Conclude che $(0,0)$ non è la soluzione ottima (soluzioni CPF adiacenti sono migliori)
- **Prima iterazione**: Si muove su una soluzione CPF migliore, $(0,6)$ seguendo tre steps:
  1. Considerando i due bordi della regione ammissibile che emanano da $(0,0)$, sceglie di muoversi lungo il bordo che porta verso l'alto l'asse x_2. (con una funzione obiettivo di $Z = 3x_1 + 5x_2$, salendo l'asse x_2 aumenta Z a una velocità maggiore rispetto allo spostamento lungo l'asse x_1).
  2. Si ferma al primo nuovo limite di vincolo: $2x_2 = 12$. (spostandosi più avanti nella direzione scelta nella fase 1 lascia la regione ammissibile; ad es. muoversi verso il secondo vincolo gli fa colpire il punto $(0,9)$, che è una soluzione irrealizzabile).
  3. Risolve per l'intersezione dei primi due vincoli che incontra: $(0,6)$. (le equazioni per questi limiti di vincolo, $x_1 = 0$ e $2x_2 = 12$, producono immediatamente questa soluzione).
- **Test di ottimalità**: Conclude che $(0,6)$ non è la soluzione ottima (una soluzione CPF adiacenti è migliore)
- **Seconda iterazione**: Si muove su una soluzione CPF migliore, $(2,6)$ seguendo tre steps:
  1. Considerando i due bordi della regione ammissibile che emanano da $(0,6)$, sceglie di muoversi lungo il bordo che porta verso destra (muovendosi in questa direzione incrementa Z, mentre se si volesse tornare indietro lungo l'asse x_2 la funzione Z diminuirebbe).
  2. Si ferma al primo nuovo limite di vincolo: $3x_1 + 2x_2 = 18$. (spostandosi più avanti nella direzione scelta nella fase 1 lascia la regione ammissibile)
  3. Risolve per l'intersezione dei primi due vincoli che incontra: $(2,6)$. (le equazioni per questi limiti di vincolo, $3x_1 + 2x_2 = 18$ e $2x_2 = 12$, producono immediatamente questa soluzione).
- **Test di ottimalità**: Conclude che $(2,6)$ è la soluzione ottima, quindi si ferma (nessuna soluzione CPF adiacente è migliore)

4.8 Concetto 1 - Relazione tra soluzione otttima e soluzione CPF

Il metodo del simplesso si concentra esclusivamente sulle soluzioni CPF. Per ogni problema con almeno una soluzione ottima, trovarne una richiede solo trovare la migliore soluzione CPF.

Poiché il numero di soluzioni ammissibili è generalmente infinito, riducendo il numero di soluzioni che devono essere esaminate a un numero piccolo finito (solo tre nel nostro esempio) è un'enorme semplificazione.

4.9 Concetto 2 - Il flusso del metodo del simplesso



Quando l'esempio è stato risolto, questo diagramma di flusso è stato seguito attraverso due iterazioni fino a quando trovata la soluzione ottima.

4.10 Concetto 3 - Come iniziare

Quando possibile, l'inizializzazione del metodo del simplesso sceglie l'origine (variabili di decisione uguali a zero) per essere la soluzione CPF iniziale. Quando ci sono anche molte variabili decisionali per trovare graficamente una soluzione CPF iniziale, questa scelta elimina la necessità di utilizzare procedure algebriche per trovare e risolvere una soluzione CPF iniziale.

Scegliere l'origine comunemente è possibile quando tutte le variabili decisionali hanno vincoli di non negatività, perché l'intersezione di questi limiti restituisce l'origine come soluzione del punto d'angolo. Questa soluzione è quindi una soluzione CPF a meno che è irrealizzabile perché viola uno o più vincoli. Se è irrealizzabile, sono necessarie procedure speciali per trovare la soluzione CPF iniziale.

4.11 Concetto 4 - La scelta di una soluzione CPF migliore ad ogni iterazione

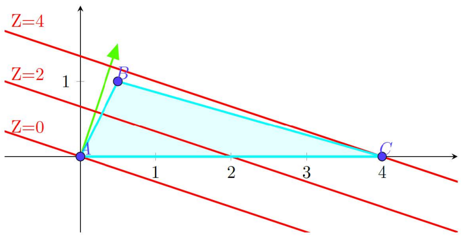
Data una soluzione CPF, è molto più veloce dal punto di vista computazionale da raccogliere informazioni sulle soluzioni CPF adiacenti rispetto ad altre soluzioni CPF. Pertanto, ogni volta che il metodo del simplesso esegue un'iterazione per spostarsi dall'attuale soluzione CPF a una migliore, sceglie sempre una soluzione CPF adiacente a quella attuale. Nessun'altra soluzione CPF viene considerata. Di conseguenza, l'intero percorso che viene eseguito per raggiungere un'eventuale soluzione ottima è lungo i bordi della regione ammissibile.

4.12 Concetto 5 - Quale soluzione CPF adiacente scegliere ad ogni iterazione

Dopo aver identificato la soluzione CPF corrente, il metodo del simplesso esamina ciascuno dei bordi della regione ammissibile che si collegano a questa CPF e identifica il tasso di miglioramento in Z che si otterrebbe spostandosi lungo il bordo. Tra i bordi con un tasso di miglioramento positivo in Z, sceglie quindi di spostarsi lungo quello con il tasso di miglioramento maggiore in Z. L'iterazione è completata risolvendo prima per la soluzione CPF adiacente all'altra estremità di questo bordo e quindi rietichettando questa soluzione CPF adiacente come l'attuale soluzione CPF per il test di ottimalità e (se necessario) l'iterazione successiva.

Alla prima iterazione dell'esempio, lo spostamento da $(0,0)$ lungo il bordo sull'asse x_1 darebbe un tasso di miglioramento in Z di 3 (Z aumenta di 3 per unità di aumento di x_1), mentre lo spostamento lungo il bordo sull'asse x_2 darebbe un tasso di miglioramento in Z di 5 (Z aumenta di 5 per unità di aumento di x_2), quindi si decide di spostarsi lungo quest'ultimo bordo. Alla seconda iterazione, l'unico arco proveniente da $(0,6)$ che produrrebbe un tasso di miglioramento positivo in Z è il bordo che porta a $(2,6)$, quindi si decide di spostati poi lungo questo bordo.

In questo caso non è una buona idea spostarsi lungo il bordo con la maggiore velocità di miglioramento in Z. Infatti $Z = x_1 + 3x_2$. Se ci spostiamo lungo il bordo sull'asse x_2 abbiamo bisogno di due iterazioni ($A \to B \to C$), mentre se ci muoviamo lungo l'asse x_1 abbiamo solo bisogno di un'iterazione ($A \to C$).



4.13 Concetto 6 - Come il test dell'ottimalità è svolto efficentemente

Un tasso di miglioramento positivo in Z implica che la soluzione CPF adiacente è migliore rispetto all'attuale soluzione CPF, mentre un tasso di miglioramento negativo in Z implica che la soluzione CPF adiacente è peggiore. Pertanto, il test di ottimalità consiste semplicemente di verificare se uno qualsiasi degli spigoli fornisce un tasso di miglioramento positivo in Z. Se nessuno da una soluzione migliore, allora l'attuale soluzione CPF è ottima.

Nell'esempio, spostandosi lungo uno dei due lati da $(2, 6)$ diminuisce Z. Poiché vogliamo massimizza Z, questo fatto porta immediatamente alla conclusione che $(2, 6)$ è la soluzione ottima.

4.14 Variazione di Z

CPF $(2, 6)$ è il punto di intersezione tra $2x_2 = 12$ e $3x_1 + 2x_2 = 18$. Quest'ultimo limite può anche essere scritto come $x_1 = 6 - \frac{2}{3}x_2$. Quindi, quando $Z = 3x_1 + 5x_2$ si muove lungo il vincolo abbiamo che $Z = 3 \cdot (6 - \frac{2}{3}x_2) + 5x_2$.
In $x_2 = 6,\ Z = 36$. Quindi se $x_2 < 6,\ Z$ diminuisce e di conseguenza non è la via da prendere. Dal momento che anche in movimento lungo $x_2 = 6$ non permette di incrementare Z, ne consegue che $(2, 6)$ è la soluzione ottima.
Analogamente, se andiamo a considerare $x_2 = 9 - \frac{3}{2}x_1$ otteniamo $Z = 45 - \frac{9}{2}x_1$. In $x_1 = 2,\ Z = 36$ e questo valore decresce se x_1 aumenta.

5 04/10/2021- Soluzioni di base

Un qualunque problema di programmazione lineare può essere formulato in forma standard $maxz = cz \quad Ax = b \quad (b \geq 0) \quad x \geq 0$ Si supponga che $rank(A) = m$. Poiché $m < n$, eventualmente riordinando le colonne, si può porre $A = [B|N]$ dove

- B è una matrice non singolare $m \times n$ detta matrice delle colonne in base
- N è una matrice $m \times (n - m)$ detta matrice delle colonne fuori base

La matrice B è composta da m colonne di A linearmente indipendenti che formano una base nello spazio vettoriale ad m dimensioni delle colonne di A.
In corrispondenza di una scelta di B ed N si può partizionare anche il vettore delle x:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \begin{array}{l} m \; componenti \\ n - m \; componenti \end{array}$$

- x_B è detto vettore delle variabili in base (vettore di base)
- x_N è detto vettore delle variabili in fuori base

Il sistema di equazioni lineari $Ax = b$ si può riscrivere come:
$[B|N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_b = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$
Per ogni base B ogni soluzione del sistema $Ax = b$ corrisponde a determinare il valore per m variabili x_B avendo fissato arbitrariamente il valore per le restanti $n - m$ variabili. Una scelta particolare importante è porre $x_V = 0$, da cui si ottiene la corrispondente soluzione di base $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$
Se $B^{-1}b \geq 0$ si ottiene una soluzione di base ammissibile (BFS) per il sistema $Ax = B, \; x \geq 0$.

5.1 Vertici e BFS

Teorema: Dato un problema $Ax = b, \; x \geq 0$, una soluzione x è un vertice del poliedro $P(A, b)$ se e solo se x è una BFS
Dim. Un punto di un poliedro è un vertice (punto estremo) se e solo se soddisfa all'uguaglianza n vincoli linearmente indipendenti, quindi basta dimostrare che ogni BFS soddisfa n vincoli linearmente indipendenti tra $Ax = b, \; x \geq 0$. Per definizione ogni BFS soddisfa all'uguaglianza $(n - m)$ vincoli $x \geq 0$ e gli m vincoli di $Ax = b$. I vincoli stringenti sono linearmente indipendenti poiché la matrice dei loro coefficienti è certamente non singolare essendo nella forma

$$\begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

5.2 Problema

Sia dato il problema:

$$
\begin{aligned}
max\ z = \quad & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& -x_1 + x_2 \leq 0 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Non è in forma standard, ma espresso solo in termini delle variabili strutturali (cioè quelle che hanno un immediata corrispondenza fisica col sistema reale che viene modellato).
Lo si trasforma in forma standard introducendo le variabili di slack x_3, x_4, x_5

$$
\begin{aligned}
max\ z = \quad & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
& 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}
$$

Limite superiore delle possibili basi $\frac{5!}{3!2!} = 10$, ma non tutte le basi corrispondono ad una soluzione ammissibile BFS, nell'esempio solo 6 basi sono ammissibili.
Siccome i vertici sono 4, vi saranno BFS degeneri.

BFS :

$$
x_B^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_3^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
B_3^{-1} b = B_3^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow p_3
$$

$$
x_B^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2 \qquad x_B^{(4)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow p_4
$$

$$
x_B^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_B^{(5)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_B^{(6)} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1
$$

Base non ammissibile :

$$x_B^{(7)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_3^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 8 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_7^{-1} b = B_7^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{8} \\ \frac{21}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Analogamente sono basi non ammissibili

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

5.3 Variabili di surplus

Se in un problema di PL ci sono dei vincoli di maggiore o uguale, per trasformare il problema in forma standard si introducono delle variabili di surplus con segno opposto, ad esempio,

$$-3x_1 + 2x_2 \geq 5 \Longleftrightarrow -3x_1 + 2x_2 - x_6 = 5$$

5.4 Soluzione PL

Esplicitando la funzione obiettivo:

$$z = cx = [c_B c_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B x_B + c_N x_N$$

e sostituendo l'espressione delle variabili di base $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ si ottiene $z = c_B B^{-1} b - (c_B B^{-1} N - c_N) x_N$
Il valore dell'obiettivo corrispondente alla base B è quindi

$$z(B) = c_B B^{-1} b$$

6 07/10/2021

6.1 Esercizio 1

$$
\begin{aligned}
max\ z = \ & 2x_1 + x_2 \\
& x_2 \leq 10 \\
& 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\
& x_1 + x_2 \leq 18 \\
& 3x_1 + x_2 \leq 44 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$A = (0, 10) \rightarrow z_A = 10$
$B = (5, 10) \rightarrow z_B = 20$
$C = (10, 8) \rightarrow z_C = 28$
$D = (13, 5) \rightarrow z_D = 31$
$E = (\frac{44}{3}, 0) \rightarrow z_E = \frac{88}{3} \sim 29, \bar{3}$

$\implies D$ è la soluzione ottima

6.2 Esercizio 2

$$
\begin{aligned}
max\ z = \ & 5x_1 + 7x_2 \\
& 2x_1 - x_2 \leq -1 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq -1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\implies$ La regione ammissibile è vuota

6.3 Esercizio 3

Dimostrare che la regione ammissibile è illimitata.

$$
\begin{gathered}
-x_1 + 3x_2 \leq 30 \\
-3x_1 + x_2 \leq 30 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

Se volessi massimizzare la funzione obiettivo $max\ z = 2x_1 + x_2$ ci sono soluzioni ottime? NO
Se invece volessi massimizzare $max\ z = x_1 - x_2$? Non c'è Se faccio il $min\ z = x_1 - x_2$? Ho una soluzione ottima in $P = (0, 10)$

6.4 Esercizio 4

$$
\begin{aligned}
min\ z = \quad & 40x_1 + 50x_2 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 30 \\
& x_1 + x_2 \geq 12 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 20 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$A = (0, 20) \rightarrow z_A = 1000$
$B = (\frac{15}{2}, 5) \rightarrow z_B = 550$
$C = (15, 0) \rightarrow z_C = 600$

$\Longrightarrow B$ è la soluzione ottima

Come cambia la soluzione ottima se la funzione obiettivo diventa $min\ z_1 = 40x_1 + 70x_2$?
$A = (0, 20) \rightarrow z_A = 1400$
$B = (\frac{15}{2}, 5) \rightarrow z_B = 650$
$C = (15, 0) \rightarrow z_C = 600$

$\Longrightarrow C$ diventa la soluzione ottima

Come cambia la soluzione ottima se il terzo vincolo diventa $2x_1 + x_2 \geq 15$? La soluzione ottima diventa l'intersezione dei primi due vincoli.

6.5 Esercizio 5

$$
\begin{aligned}
max\ z = \quad & 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 180 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 270 \\
& x_1 + 3x_2 + x_4 + 3x_5 \leq 180 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Mi diventa:

$$
\begin{aligned}
max\ z = \quad & 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + s_1 = 180 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + s_2 = 270 \\
& x_1 + 3x_2 + x_4 + 3x_5 + s_3 = 180 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

La matrice A mi diventa:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 180 \\ 270 \\ 180 \end{bmatrix}
$$

Nella soluzione ottima le variabili in base sono $x_3, x_1, x_5 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$

6.6 Esercizio 6

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 4500x_1 + 4500x_2 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & 5000x_1 + 4000x_2 \leq 6000 \\ & 400x_1 + 500x_2 \leq 600 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Mi diventa:

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 4500x_1 + 4500x_2 \\ & x_1 + s_1 = 1 \\ & x_2 + s_2 = 1 \\ & 5x_1 + 4x_2 + s_3 = 6 \\ & 4x_1 + 5x_2 + s_4 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

7 12/10/2021 - Il metodo del simplesso in forma matriciale

L'insieme dei vincoli e della funzione obiettivo possono essere scritti come un sistema lineare rispetto al quale si può supporre di aver individuato una base B ammissibile

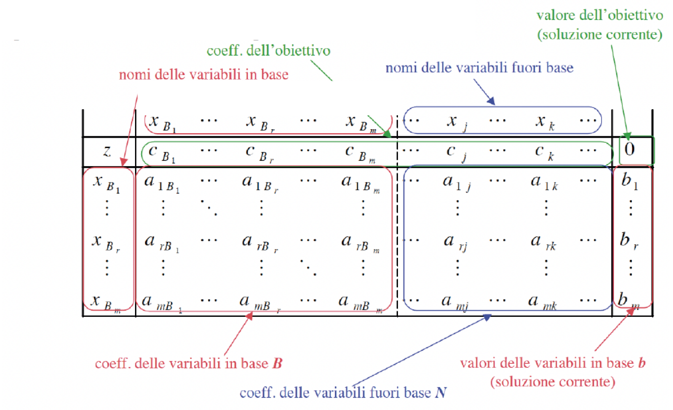
$$\begin{bmatrix} 1 & -c^T \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -c_B^T & -c_N^T \\ 0 & B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

La quasi (manca la prima colonna) matrice estesa di questo sistema composto dalle righe dei vincoli e dalla riga della funzione obiettivo è detta Tableau

$$\begin{bmatrix} -c^T & 0 \\ A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_B^T & -c_N^T & 0 \\ B & N & b \end{bmatrix}$$

7.1 Tableau

Tableau Iniziale: prima della relativizzazione rispetto alla base B scelta



7.1.1 Tableau del problema $max\ z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Non è in forma standard, ma espresso solo in termini delle variabili strutturali (cioè quelle che hanno un immediata corrispondenza fisica col sistema reale che viene modellato). Lo si trasforma in forma standard introducendo le variabili di slack x_3, x_4, x_5

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Il tableau iniziale a colonne riordinate (sia noto che le colonne 3,4 e 1 formino una base iniziale ammissibile)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	-2	-1	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	5
x_4	-1	1	0	1	0	0
x_5	6	2	0	0	1	21

$\Longrightarrow$

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	0	0	-2	0	-1	0
x_3	1	0	1	0	1	5
x_4	0	1	-1	0	1	0
x_1	0	0	6	1	2	21
		B			N	b

Soluzione PL : Esplicitando la funzione obiettivo:

$$z = cx = [c_B c_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B x_B + c_N x_N \quad (1)$$

e sostituendo in (1) l'espressione delle variabili di base:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad (2)$$

si ottiene:

$$z = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N)x_N \quad (3)$$

il valore dell'obiettivo corrispondente alla base B è quindi $z(B) = c_B B^{-1}b$

Le relazioni (2) e (3) esprimono rispettivamente i vincoli e la funzione obiettivo in funzione delle variabili fuori base.

Raccogliendo le $m + 1$ equazioni di (2) e (3) in forma matriciale si ottiene

$$\begin{bmatrix} z \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B B^{-1}b \\ B^{-1}b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_B B^{-1}N - c_N \\ B^{-1}N \end{bmatrix} x_N$$

Il tableau corrispondente risulta essere

$$\begin{bmatrix} 0 & c_B B^{-1}N - c_N & c_B B^{-1}b \\ I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{bmatrix}$$

matrice pivoting tableau

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

B^{-1}

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	0	0	-2	0	-1	0
x_3	1	0	1	0	1	5
x_4	0	1	-1	0	1	0
x_1	0	0	6	1	2	21

=

=

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	0	0	0	1/3	$-1/3$	7
x_3	1	0	0	$-1/6$	2/3	3/2
x_4	0	1	0	1/6	4/3	7/2
x_1	0	0	1	1/6	1/3	7/2

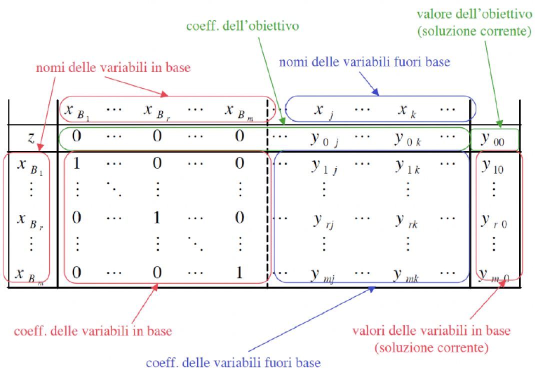
Al fine di una scrittura più compatta sia S l'insieme degli indici delle variabili in base, le colonne di B, e R l'insieme degli indici delle variabili fuori base, le colonne di N, e si ponga

$$y_0 = \begin{bmatrix} c_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ \vdots \\ y_{m0} \end{bmatrix} \qquad y_j = \begin{bmatrix} c_B B^{-1} A_j - c_j \\ B^{-1} A_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0j} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix} \quad \forall j \in R$$

dove A_j e c_j sono rispettivamente la colonna N ed il coefficiente di c che moltiplicano la $j-ma$ variabili fuori base.
La componente $j-ma$ della BFS e l'obiettivo si possono quindi scrivere come

$$z = y_{00} - \sum_{j \in R} y_{0j} x_j$$

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R} y_{ij} x_j$$



S={3,4,1}
R={5,2}

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	0	0	0	1/3	−1/3	7
x_3	1	0	0	−1/6	2/3	3/2
x_4	0	1	0	1/6	4/3	7/2
x_1	0	0	1	1/6	1/3	7/2
				$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_0$

$z = y_{00} - \Sigma_{j \in R}\, y_{0j} x_j = 7 - 1/3\, x_5 + 1/3\, x_2$

e.g., $x_4 = y_{40} - \Sigma_{j \in R}\, y_{4j} x_j = 7/2 - 1/6\, x_5 - 4/3\, x_2$

7.2 Verifica ottimalità soluzione corrente

L'obiettivo

$$z = y_{00} - \sum_{j \in R} y_{0j} x_j$$

data la corrente BFS vale $z(B) = y_{00}$.
Se esiste un coefficiente $y_{0k} < 0$ ($k \in R$), facendo diventare positiva la variabile fuori base x_k attualmente nulla, l'obiettivo aumenta di valore

$$z = y_{00} - y_{0k}X_k > y_{00} = z(B)$$

allora, compatibilmente col rispetto dei vincoli, conviene aumentare il più possibile il valore della variabile x_k.

7.3 Rispetto ammissibilità

Il vincolo generico associato all'elemento in base $i-esimo$

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j\in R} y_{ij}x_j \geq 0$$

è rispettato dalla BFS corrente poiché $y_{i0} \geq 0$ e $x_j = 0$ per $j \in R$.
Tale vincolo rispetto alla variabile fuori base che si vuole incrementare diventa

$$x_{Bi} = y_{i0} - y_{ik}x_k \geq 0$$

- Se il coefficiente y_{ik} è non positivo, x_k può incrementare a piacere senza violare la non negatività di x_{Bi}
- Se il coefficiente y_{ik} è positivo, x_k, per rispettare la non negatività può di x_{Bi}, può incrementare solo fino al valore $\frac{y_{i0}}{y_{ik}}$

Il massimo valore che x_k può assumere è quindi

$$x_k \leftarrow min\left\{\frac{y_{i0}}{y_{ik}} : k \in R, y_{ik} > 0\right\}$$

7.3.1 Soluzione PL (esempio)

Data la soluzione corrente

$$z = 7 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_2$$

il coefficiente di x_2 è positivo, quindi conviene rendere il più positivo possible x_2, compatibilmente con i vincoli

$$x_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x_5 - \frac{2}{3}x_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x_2 \geq 0$$
$$x_4 = \frac{7}{2} + \frac{1}{6}x_5 - \frac{4}{3}x_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{7}{2} - \frac{4}{3}x_2 \geq 0$$
$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{7}{2} - \frac{1}{3}x_2 \geq 0$$

Il valore massimo assumibile da x_2 è

$$x_2 \leftarrow min\left\{\frac{9}{4}, \frac{21}{8}, \frac{21}{2}\right\} = \frac{9}{4}$$

pivot entrante

		x_3	x_4	x_1	x_5	x_2		
	z	0	0	0	1/3	−1/3	7	
uscente	x_3	1	0	0	−1/6	2/3	3/2	$3/2 \cdot 3/2 = 9/4 (= 2{,}25)$
	x_4	0	1	0	1/6	4/3	7/2	$7/2 \cdot 3/4 = 21/8 (= 2{,}62)$
	x_1	0	0	1	1/6	1/3	7/2	$7/2 \cdot 3 = 21/2 (= 10{,}5)$

7.4 Cambio base

Sia y_{rk} il valore per cui si ottiene il $min\left\{\frac{y_{i0}}{y_{ik}} : k \in R, y_{ik} > 0\right\}$.
Tale valore è detto *pivot*.
Se x_k assume il massimo valore ammissibile allora i valori delle componenti di x, in particolare quelle in base che quindi dipendono da x_k, variano nel modo seguente

$$x_k \leftarrow \frac{y_{r0}}{y_{rk}}$$
$$x_j \leftarrow 0, \ \forall j \in R \setminus \{k\}$$
$$x_{Bi} \leftarrow y_{i0} - y_{ik}\left(\frac{y_{r0}}{y_{rk}}\right), \ \forall i \in S$$

e quindi

$$x_{Br} \leftarrow 0$$

Per potere iterare il ragionamento conviene esprimere le soluzioni del sistema $Ax = b$, in funzione delle variabili che dopo l'aggiornamento hanno certamente valore nullo. Le equazioni associate alla componente $i - ma$ della BFS e l'obiettivo si dovranno quindi riscrivere come:

$$z = y_{00} - \frac{y_{0k}y_{r0}}{y_{rk}} - \sum_{j \in R\setminus\{k\}} \left(y_{0j} - \frac{y_{0k}y_{rj}}{y_{rk}}\right) x_j + \frac{y_{0k}}{y_{rk}} x_{Br}$$

$$x_{Bi} = y_{i0} - \frac{y_{ik}y_{r0}}{y_{rk}} - \sum_{j \in R\setminus\{k\}} \left(y_{ij} - \frac{y_{ik}y_{rj}}{y_{rk}}\right) x_j + \frac{y_{jk}}{y_{rk}} x_{Br} \quad \forall i \in S \setminus \{r\}$$

$$x_k = \frac{y_{r0}}{y_{rk}} - \sum_{j \in R\setminus\{k\}} \left(\frac{y_{rj}}{y_{rk}} x_j + \frac{1}{y_{rk}} x_{Br}\right)$$

ovvero si è cambiata la base

$$S \leftarrow S \cup \{k\} \setminus \{r\}$$
$$R \leftarrow R \cup \{r\} \setminus \{k\}$$

7.4.1 Soluzione PL (esempio)

nuovo valore obiettivo

nuova base

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	1/2	0	0	1/4	0	31/4
x_2	3/2	0	0	−1/4	1	9/4
x_4	−2	1	0	1/2	0	1/2
x_1	−1/2	0	1	1/4	0	11/4

7.5 Iterazione

Si ridefiniscono i vettori y_j e y_0
Si verifica l'ottimalità o meno della base

- Se esistono coefficienti $y_{0k} < 0$ e $y_{rk} > 0$ si itera ponendo attenzione al cycling se $y_{rk} = 0$
- Se esistono dei coefficienti $y_{0k} < 0$, ma non esiste alcun $y_{rk} > 0$, il problema è illimitato
- Se non esiste alcun coefficiente $y_{0k} < 0$ la soluzione corrente in base è ottima

7.5.1 Soluzione PL (esempio)

coeff. non negativi

valore ottimo obiettivo

base ottima

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	1/2	0	0	1/4	0	31/4
x_2	3/2	0	0	−1/4	1	9/4
x_4	−2	1	0	1/2	0	1/2
x_1	−1/2	0	1	1/4	0	11/4

7.6 Condizioni di ottimalità

Dato un problema di PL in forma standard una soluzione di base x^* relativa alla base B, è ottima se si verificano le seguenti condizioni:

1. $B^{-1}b = y_0 \geq 0$ ammissibilità
2. $c_B B^{-1} A_j - c_j \leq 0 \Rightarrow y_{0j} \geq 0 \; \forall j$ non migliorabilità

In realtà la condizione (2) può essere praticamente verificata per le sole variabili fuori base, infatti le variabili in base hanno per costruzione costi ridotti sempre nulli e quindi soddisfano certamente la condizione data. La (2) quindi diventa

$$c_B B^{-1} N_j - c_j \leq 0 \Rightarrow y_{0j} \geq 0 \; \forall j \in R$$

8 14/10/2021

8.1 Problema

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 3x_1 + 5x_2 \\ & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

É equivalente a:

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 3x_1 + 5x_2 \\ & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & 2x_2 + x_4 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 \leq 18 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau Iniziale
Scrivo $3x_1 + 5x_2$ in negativo perché considero $z - 3x_1 - 5x_2 = 0$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
R_0		-3	-5	0	0	0	0
R_1	x_3	1	0	1	0	0	4
R_2	x_4	0	2	0	1	0	12
R_3	x_5	3	2	0	0	1	18

Se ponessi $x_1 = x_2 = 0$ trovo che $x_3 = 4,\ x_4 = 12,\ x_5 = 18$ ma *Non è la soluzione ottima perché ho due x negative*

- $x_3 = 4 - x_1$
- $x_4 = 12 - 2x_2$
- $x_5 = 18 - 3x_1 - 2x_2$

Faccio entrare in base x_2 ($x_1 = 0$):

- $x_3 = 4$
- $x_4 = 12 - 2x_2$
- $x_5 = 18 - 2x_2$

in $x_2 = 6$ trovo che x_4 si annulla.
Dopo le operazioni

- $R_2 = \frac{1}{2}R_2$

- $R_0 = R_0 + 5R_2$
- $R_3 = R_3 - 2R_2$

il Tableau diventa:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
R_0		-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
R_1	x_3	1	0	1	0	0	4
R_2	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
R_3	x_5	3	0	0	-1	1	6

- $x_1 + x_3 = 4$
- $x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 6$
- $3x_1 - x_4 + x_5 = 6$

Faccio entrare in base x_1 ($x_4 = 0$):

- $x_3 = 4 - x_1$
- $x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_4$
- $x_5 = 6 - 3x_1 + x_4$

in $x_1 = 2$ trovo che x_5 si annulla.
Dopo le operazioni

- $R_3 = \frac{1}{3}R_3$
- $R_0 = R_0 + 3R_3$
- $R_1 = R_1 - R_3$

il Tableau diventa:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
R_0		0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
R_1	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
R_2	x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
R_3	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

$\Longrightarrow$ Siamo alla soluzione ottima, perché tutte le variabili sono non negative e soprattutto non che qualora aumentassi una variabile la funzione obiettivo diminuisce.

Soluzione del problema: EXCEL - PDF

9 18/10/2021 - Algoritmo del simplesso

1. **Inizializzazione**: Determinare una soluzione di base ammissibile.
2. **Verifica dell'ottimalità**: Se $y_0 \geq 0 \ \forall j \in \mathbb{R}$, la soluzione corrente è ottima e l'algoritmo termina, altrimenti andare al passo 3.
3. **Scelta della variabile entrante in base**: Scegliere una variabile fuori base x_k tale che $y_{0k} < 0$ ed andare al passo 4.
4. **Scelta della variabile uscente dalla base**: Scegliere una variabile x_{Br} tale che $\frac{y_{i0}}{y_{ir}} = min\left\{\frac{y_{i0}}{y_{ik}} : j \in R, y_{ik} > 0\right\}$. Se $y_{ik} < 0 \ \forall i$, la soluzione del problema è illimitata, e l'algoritmo termina. Altrimenti si va al passo 5.
5. **Pivoting**: Risolvere i vincoli di uguaglianza esprimendo le nuove variabili in base x_k e $x_{Bi} \ \forall i \neq k$, in funzione delle nuove variabili fuori base x_{Bi} e $x_j \ \forall j \in R \setminus \{k\}$. La nuova BFS si ottiene ponendo le nuove variabili fuori base a zero. Andare al passo 2.

Nell'algoritmo del simplesso si distingue una *fase I*, che consiste nel passo di inizializzazione in cui avviene individuata una prima BFS, e una *fase II*, che consiste nel determinare la BFS ottima e partire dalla prima BFS.
La fase II è stata già illustrata, la fase I viene illustrata in seguito.
La verifica se il problema è illimitato può anche venire fatta durante la fase II controllando tutte le colonne associate a costi ridotti positivi (e quindi coefficienti nel tableau negativi), se le colonne sono numerose questa verifica può essere onerosa.

9.0.1 Fase I - Individuazione dell prima BFS

In alcuni casi una prima base ammissibile è immediata. Si supponga infatti che il problema sia formulato come

$$\begin{aligned} max\ z = \ & cx \\ & Hx \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con $b \geq 0$, allora la sua trasformazione in forma standard introduce delle variabili di slack s le cui corrispondenti colonne formano la prima base ammissbile

$$\begin{aligned} max\ z = \ & cx \\ & Hx + Is = b \\ & x \geq 0, s \geq 0 \end{aligned}$$

Riordinando le colonne si ottiene

$$A = [I|N] \qquad B = I \qquad N = H$$

dove chiaramente

$$rank(A) = m \qquad B^{-1}b \geq 0$$

9.1 Forma Canonica

Def: Qualora un problema di PL in forma standard ha la matrice A che si può esprimere come

$$A = [I|H],\ B = I\ e\ N = H$$

allora il problema è detto essere espresso in forma canonica.

Non è immediato esprimere un problema di PL in forma canonica in presenza di disuguaglianze di verso opposto, infatti le variabili di surplus hanno coefficienti negativi, o in presenza di vincoli di uguaglianza.

9.2 Esempio

Formulazione iniziale

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 4x_1 + x_2 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Formulazione standard

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 4x_1 + x_2 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Questa formulazione standard non è UNA forma canonica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9.3 Fase I

Se il problema è nella forma standard, ottenuto solo da vincoli di tipo = e $\geq$, si introducono m variabili artificiali u e si formula il problema di fase I.

$$\begin{aligned} max\ z = \ & cx \\ & Hx \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow\ Fase\ I \quad \begin{aligned} min\ w = \ & 1u \\ & Ax + Iu = b \\ & x \geq 0, u \geq 0 \end{aligned}$$

Per il problema di fase I è immediato determinare una base iniziale ammissibile.
Il problema di fase I ammette una soluzione ottima w^* non negativa per costruzione

- Se $w^* > 0$ allora il problema fase I non ha soluzioni ammissibili x, u t.c. $u = 0$ e quindi non esiste x t.c. $Ax + I0 = b \rightarrow Ax = b$, da cui il sistema $Ax = b$ non è compatibile e il problema di PL non ha soluzioni ammissibili
- Se $w^* = 0$ allora la componente della soluzione ottima x^*, u^* è $u = 0$ e quindi x^* è $Ax^* + I0 = b \rightarrow Ax^* = b$. Poiché x^* ha al più m componenti non nulle essa può essere presa come prima BFS del problema originale.

9.3.1 Esempio - Fase I

$$\begin{array}{llll} max\ z = & 4x_1 + x_2 & min\ w = & u_1 + u_2 \Rightarrow max\ w = -u_1 - u_2 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 & & 3x_1 + x_2 + u_1 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \ \Rightarrow & & 4x_1 + 3x_2 + u_2 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 & & x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Data la presenza di una variabile di slack, bastano solo due variabili artificiali (u_1, u_2). u_1, u_2, x_4 è la base iniziale

		x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	
R_0		0	0	0	0	1	1	0
R_1	u_1	3	1	0	0	1	0	3
R_2	u_2	4	3	-1	0	0	1	6
R_3	x_4	1	2	0	1	0	0	4

Dopo le operazioni

- $R_0 = R_0 - R_1 - R_2$

il Tableau diventa:

		x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	
R_0		-7	-4	0	0	0	0	-9
R_1	u_1	3	1	0	0	1	0	3
R_2	u_2	4	3	-1	0	0	1	6
R_3	x_4	1	2	0	1	0	0	4

Dopo un pò di passaggi il tableau finale sarà:

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	
	0	0	0	0	1	1	-9
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	0	-1	1

10 19/10/2021 - Dualità

10.1 Un problema di produzione

Un marchio produce n differenti beni usando m differenti materiali grezzi.

- Sia $b_i = 1, \dots, m$ la quantità disponibile dell'$i - esimo$ materiale
- Il $j - esimo$ bene, $j = 1, \dots, n$ richiede a_{ij} unità del materiale $i - esimo$ e si traduce in un ricavo c_j per unità prodotta.

L'impresa deve affrontare il problema di decidere quanto produrre di ciascun bene al fine di massimizzare i suoi ricavi totali.
La scelta della variabile di decisione è semplice. Sia $x_j,\ j = 1, \dots, n$ essere il quantità del $j - esimo$ bene da produrre.
Formulazione primale

$$\begin{aligned} max\ z = \ & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Variabili decisionali: La quantità di beni prodotta $x_j \in \mathbb{R}$ per $1, \dots, n$. Assumiamo queste variabili continue.
Funzione obiettivo: Massimizzare il profitto di

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Vincoli: Per ogni materiale grezzo la somma del materiale usato per la produzione non deve superare il materiale disponibile

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad for\ i = 1, \dots, m$$

Per ogni bene, la quantità è sempre non negativa

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n$$

10.1.1 Esempio

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 15x_1 + 10x_2 \\ R_p \quad & x_1 + x_2 \leq 2000 \\ R_q \quad & x_1 - 0.5x_2 \leq 1000 \\ R_r \quad & 2x_1 + x_2 \leq 3000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Notare che R_q può essere anche ottenuto come sottoprodotto del secondo bene.

10.1.2 Commenti sul problema primale

Nell'affrontare un problema di produzione, prima ancora di decidere cosa produrre per ottenere il massimo profitto, ci si dovrebbe chiedere se è meglio produrre o se viceversa non conviene vendere (o utilizzare diversamente) le risorse disponibili.
La domanda da porsi è la seguente: *Qual è il prezzo minimo al quale tutte le risorse disponibili dovrebbe essere vendute piuttosto che prodotte?*
La risposta a questa domanda la troviamo nel problema duale

10.2 Il duale di un problema di produzione

Nell'ipotesi di linearità, il profitto complessivo che può essere ottenuto dalla vendita delle risorse è pari alla somma di i profitti che si ottengono vendendo le singole risorse, questi ultimi sono pari al prezzo unitario di vendita moltiplicato per quantità di risorse disponibili.
un prodotto P_1 dà un profitto di 15 e consuma un'unità di R_p, un'unità di R_q e 2 unità di R_r. Pertanto, per rendere conveniente la vendita le risorse (o almeno rimanere alla pari) invece di produrre, la vendita complessiva di un'unità di R_p, una unità di R_q e 2 unità di R_r deve fornire un guadagno non inferiore a 15.
I prezzi di vendita delle risorse devono essere non negativi.

10.3 Variabili duali e funzione obiettivo

Variabili decisionali
Il prezzo unitario di ciascuna risorsa
Queste sono variabili continue

$$\pi_i \in \mathbb{R},\ for\ i = p, q, r$$

Funzione obiettivo
Il profitto ottenuto vendendo tutte le risorse disponibili

$$2000\pi_p + 1000\pi_q + 3000\pi_r$$

10.4 Vincoli duali

Per ogni bene il guadagno ottenuto dalla vendita delle risorse necessario per produrlo non deve essere inferiore al profitto ottenibile dalla vendita del bene stesso.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_j \geq c_j\ per\ j = 1, 2$$

Il prezzo di vendita delle risorse deve essere non negativo

$$\pi_i \geq 0,\ per\ i = p, q, r$$

10.5 Formulazione del duale

$$\begin{array}{rrl}
Profitto & min\ q = & 2000\pi_p + 1000\pi_q + 3000\pi_r \\
Prodotto\ 1 & & \pi_p + \pi_q + 2\pi_r \geq 15 \\
Prodotto\ 2 & & \pi_p - 0.5\pi_q + \pi_r \geq 10 \\
 & & \pi_p, \pi_q, \pi_r \geq 0
\end{array}$$

Quindi in termini generali

$$\begin{aligned} min\ q = \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \pi_j \geq c_j \ per\ j = 1, \dots, n \\ & \pi_i \geq 0,\ per\ i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

In forma matriciale

$$\begin{aligned} min\ q = \quad & b^T \pi \\ & A^T \pi \geq c \\ & \pi \geq 0 \end{aligned}$$

10.5.1 Commenti sul problema duale

È intuitivamente evidente che

- Ogni soluzione praticabile per il duale permette di realizzare un profitto non inferiore al massimo profitto ottenuto risolvendo il problema primario (cioè, produrre). Quindi è conveniente vendere (o nel peggiore dei casi non perdi) se trovi qualcuno disposto a comprare tutto le risorse e pagarle insieme in modo da soddisfare i doppi vincoli;
- La soluzione ottima del duale non può essere inferiore alla soluzione ottima del primale (altrimenti ci sarebbero i prezzi che, pur soddisfacendo i vincoli, renderebbe la produzione ancora conveniente).

10.6 Problema primale e problema duale

Ad ogni problema LP (primale) è associato un problema duale

Problema primale (P)

$$\begin{aligned} max\ z = \quad & c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0, \end{aligned}$$

n variabili e m vincoli

Problema duale (D)

$$\begin{aligned} min\ w = \quad & b_1 \pi_1 + \cdots + b_m \pi_m \\ & a_{11} \pi_1 + \cdots + a_{m1} \pi_m \geq c_1 \\ & \vdots \\ & a_{1n} \pi_1 + \cdots + a_{mn} \pi_m \geq c_n \\ & \pi_1, \dots, \pi_m \geq 0, \end{aligned}$$

m variabili e n vincoli

Proprietà: Il problema D ha tante variabili quanti sono i vincoli in P e tanti vincoli in quanto ci sono variabili in P.

10.6.1 Forma matriciale

In forma matriciale, vediamo che i vettori b e c scambiano le loro posizioni e il viene trasposta la matrice dei coefficienti A.

Problema primale (P)

$$\begin{aligned} max\ z = \ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Problema duale (D)

$$\begin{aligned} min\ q = \ & b^T \pi \\ & A^T \pi \geq c \\ & \pi \geq 0 \\ & \pi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

10.6.2 Commenti

La dualità nasce non solo da giustificazioni economiche, ma anche dall'applicazione di condizioni di Kuhn-Tucker a problemi di LP o da rilassamento Lagrangiano.11 La dualità è importante perché:

- Il problema duale corrisponde a una diversa visione dello stesso problema (per cui va sempre ricercata un'interpretazione economica della formulazione ottenuta);
- Su di esso si basano algoritmi, come il Duale Simplesso e l'algoritmo Primale-Duale, alternativo al Simplesso (Primale), che sono utili per certi classi di problemi;
- In alcuni casi può essere conveniente risolvere D invece di P (può essere meglio risolvere il problema con meno vincoli)

10.6.3 Esempio

Problema primale (P)

$$\begin{aligned} max\ z = \ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4 \\ \pi_1 \quad & 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 35 \\ \pi_2 \quad & x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 28 \\ \pi_3 \quad & 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 \geq 15 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2\ libera,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema duale (D)

$$\begin{aligned} min\ w = \ & 35\pi_1 + 28\pi_2 + 15\pi_3 \\ x_1 \quad & 4\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3 \geq 2 \\ x_2 \quad & 3\pi_1 + 5\pi_2 + 7\pi_3 = 3 \\ x_3 \quad & -\pi_1 + 6\pi_2 - 2\pi_3 \leq -1 \\ x_4 \quad & 2\pi_1 + 10\pi_2 + 4\pi_3 \geq 7 \\ & \pi_1 \geq 0,\ \pi_2\ libera,\ \pi_3 \leq 0 \end{aligned}$$

10.7 Teorema della dualità debole

Se x è una soluzione ammissibile del problema primale è anche una soluzione ammissibile del problema duale allora

$$c^T x \leq b^t \pi$$

Prova infatti,

$$c^T x \leq (A^T \pi)^T x = \pi^T Ax \leq \pi^T b = b^t \pi$$

10.7.1 Corollario

(a) Se il valore ottimo nel primale è $+\infty$, allora il problema duale deve essere irrealizzabile

(b) Se il valore ottimo nel duale è $-\infty$, allora il problema primale deve essere irrealizzabile

Dim.: Supponiamo che il valore ottimo nel problema primale sia $+\infty$ e che il problema duale ha soluzione ammissibile . Per dualità debole, soddisfa $b^T\pi \geq c^Tx$ per ogni primale ammissibile x. Prendendo il massimo su tutto fattibile x, concludiamo $b^T\pi \geq +\infty$. Questo è impossibile e mostra che il duale non può avere una soluzione praticabile, stabilendo così la parte (a). La parte (b) segue in maniera simmetrica.

10.7.2 Corollario

Siano x e π soluzioni ammissibili rispettivamente del primale e del duale, e supponiamo che $c^Tx = b^T$. Allora x e π sono soluzioni ottime di rispettivamente primale e duale.

Dim.: Siano x e come nell'enunciato del corollario. Per ogni soluzione ammissibile y del primale, il teorema della dualità debole dà $c^Tx = b^T\pi \geq c^Ty$, che dimostra che x è ottimo. La dimostrazione dell'ottimalità di π è simile.

10.8 Teorema della dualità forte

Se un problema di programmazione lineare ha una soluzione ottima, allora ce l'ha anche il duale, e i rispettivi valori ottimali sono uguali

In altre parole, se x^* è una soluzione ottima finita anche per il primale, il duale ha una soluzione ottima finita ed è sempre vero che

$$c^Tx^* = b^T\pi^*$$

10.9 Relazione tra Primale e Duale

Ricordiamo che in un problema di programmazione lineare, esattamente uno dei seguenti tre le possibilità si verificheranno

(a) C'è una soluzione ottima

(b) Il problema è "illimitato", cioè il valore ottimo è $+\infty$ (per la massimizzazione problemi) o $-\infty$ (per problemi di minimizzazione)

(c) Il problema è irrealizzabile

Questo porta a nove possibili combinazioni per il primario e il duale:

	Ottimo finito	Illimitato	Irrealizzabile
Ottimo finito	Possibile	Impossibile	Impossibile
Illimitato	Impossibile	Impossibile	Possibile
Irrealizzabile	Impossibile	Possibile	Possibile

10.9.1 Complementary slackness

Siano x e π soluzione ammissibile del problema primale e duale, rispettivamente. I vettori x sono soluzioni ottime per i due rispettivi problemi se e solo se

$$\pi_i(b_i - a_i^T x) = 0 \ \ \forall i$$

$$(\pi^T A_j - c_j)x_j = 0 \ \ \forall j$$

dove A_j è la $j - esima$ colonna e a_i è l'$i - esima$ riga della matrice A.

Dim.: se (x, π) sono ottimi I vincoli dei problemi impongono che $\pi^T b \geq \pi^T Ax \geq c^T x$. Poiché x e π sono ottimi $\pi^T b = c^T x$, quindi $\pi^T x = \pi^T Ax$ e quindi $\pi(b^T - Ax) = 0$. Analogamente, segue che $(\pi^T A - c^T)x = 0$. Infine, poiché $\pi \geq 0$, $b^T - Ax \geq 0$, $\pi^T A - c^T \geq 0$, $x \geq 0$, ne segue che ogni termine dello scalare i prodotti devono essere uguali a zero, cioè $\pi_i(a_i^T x - b_i) = 0 \ \ \forall i$ e $(c_j - \pi^T A_j)x_j = 0 \ \ \forall j$.
Se le equazioni tengono, scrivendo le equazioni in forma compatta e per la coppia (x, π) tale che

$$\pi(b^T - Ax) = 0 \Rightarrow \pi b^T = \pi Ax$$

e

$$(\pi^T A - c^T)x = 0 \Rightarrow \pi Ax = c^T x$$

poiché $\pi^T b = \pi^T Ax = c^T x$, allora (x, π) è ottimo.

10.9.2 Commenti

Il teorema del gioco complementare può essere riformulato affermando che se un vincolo primario non è rigoroso (cioè è $<$) allora la variabile duale associata deve essere nulla, viceversa se la variabile duale non è nulla, il vincolo primario associato deve essere rigoroso (cioè, $=$).
Può succedere che il vincolo sia rigoroso e la variabile duale relativa sia nulla.

11 21/10/2021

11.1 Un problema rilassato

Consideriamo la forma standard dei problemi

$$\begin{aligned} min\ z\ &= c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Che andremo a chiamare problema principale o primale, assumiamo che esista una $x*$ soluzione ottima. Andiamo a introdurre un problema rilassato nel quale il vincolo $Ax = b$ viene sostituito con $p^T(b-Ax)$, dove p è un vettore con le stesse dimensioni di b. A questo punto affrontiamo il problema

$$\begin{aligned} min\ z\ &= c^T x + p^T(b - Ax) \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Sia $g(p)$ il valore ottimo per il problema rilassato, in funzione di vettore p. Il problema rilassato consente più opzioni di quelle presenti nel problema primale, e ci aspettiamo che $g(p)$ non sia maggiore rispetto al valore ottimo di $c^T x*$. Infatti,

$$g(p) = min[c^T x + p^T(b - Ax)] \leq c^T x * + p^T(b - Ax*) = c^T x*$$

Dove l'ultima equazione segue dal fatto che $x*$ è una soluzione ammissibile del problema primale e soddisfa $Ax* = b$.Quindi, ogni vettore p porta a un limite inferiore $g(p)$ per il valore ottimo di $c^T x*$.

11.2 Un limite stretto

Il problema $max\ g(p)$ (soggetto a nessun vincolo) può essere interpretato come una ricerca del limite inferiore più stretto possibile di questo tipo, ed è noto come problema duale. Usando la definizione di $g(p)$, abbiamo

$$g(p) = min[c^T x + p^T(b - Ax)] = p^T b + min(c^T - p^T A)x$$

Notiamo che

$$min(c^T - p^T A)x = \begin{cases} 0 & se\ c^T - p^T A \geq 0 \\ -\infty & altrimenti \end{cases}$$

Se massimizziamo $g(p)$ dobbiamo considerare solo quei valori di p per cui $g(p)$ non è uguale a $-\infty$. Di conseguenza possiamo concludere che il problema duale è uguale a

$$\begin{aligned} max\ z\ &= p^T b \\ &p^T A \leq c^T \end{aligned}$$

11.3 Il problema duale

Nell'esempio, abbiamo iniziato con i vincoli di uguaglianza $Ax = b$ e abbiamo finito senza vincoli sul segno del vettore p. Se il problema principale avesse avuto invece vincoli di disuguaglianza della forma $Ax \geq b$, potrebbero essere sostituiti da, $Ax - s = sb,\ s \geq 0$. I vincoli di uguaglianza possono essere scritti nella forma

$$[A| - I]\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b$$

Che porta i vincoli del duale

$$p^T[a| - I] \leq [c^T|0^T]$$

o equivalentemente

$$p^T A \leq c^T,\ p \geq 0$$

Se il vettore x è libero piuttosto che vincolato dal segno, usiamo

$$min(c^T - p^T A)x = \begin{cases} 0 & se\ c^T - p^T A \geq 0 \\ -\infty & altrimenti \end{cases}$$

per finire con i vincoli $p^T A = c^T$ nel problema duale. Queste considerazioni motivano le relazioni tra primale-duale.

Primale	massimizzo	minimizzo	Duale
Vincoli	$\leq b_i$ $\geq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 *libera*	Variabili
Variabili	≥ 0 ≤ 0 *libera*	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	Vincoli

11.4 Analisi Sensitività

Lo scopo principale dell'analisi di sensitività è identificare il parametri sensibili (cioè quelli che non possono essere modificati senza modificare il valore della soluzione ottimale). I parametri sensibili sono i parametri che devono essere valutati con particolare attenzione per ridurre al minimo il rischio di ottenere una soluzione ottimale errata. I parametri che vado a studiare sono a_{ij}, b_i, c_j per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$

11.5 Disponibilità delle risorse

I problemi di programmazione lineare spesso possono essere interpretati come allocazione di risorse alle attività.
Quando i vincoli sono in forma $\geq$, abbiamo interpretato il b_i (i membri di destra) come i valori delle rispettive risorse messe a disposizione per il attività in esame.

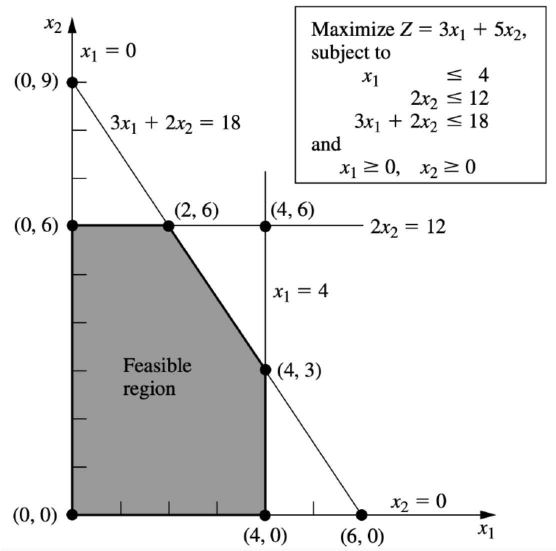
n molti casi, i valori b_i utilizzati nel modello iniziale possono effettivamente rappresentare la decisione iniziale provvisoria della direzione su quante risorse saranno fornite dall'organizzazione alle attività prese in considerazione.
Da questa prospettiva più ampia, alcuni dei valori b_i possono essere aumentati in modello rivisitato, ma solo se si può presentare un caso estremamente vantaggioso per l'organizzazione.

11.6 Prezzo ombra

Definizione: Il prezzo ombra per la risorsa i (indicato da y_i^*) misura il valore marginale di questa risorsa, cioè il tasso al quale la funzione obiettivo z potrebbe essere aumentata (leggermente) aumentando la quantità di questa risorsa (b_i) messa a disposizione.

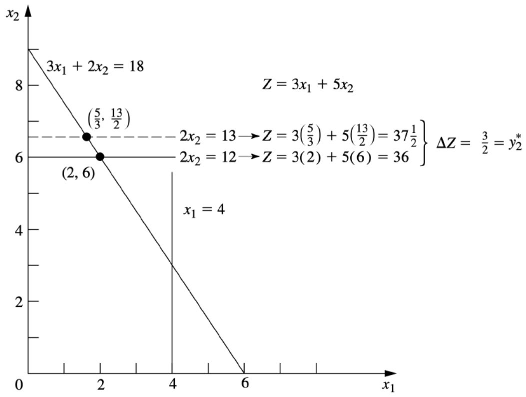
Nel caso di un vincolo funzionale in forma $=$ o $\geq$, il suo prezzo ombra è nuovamente definito come la velocità con cui z potrebbe essere aumentato aumentando (leggermente) il valore di b_i, anche se l'interpretazione di b_i ora sarebbe normalmente qualcosa di diverso dalla quantità di una risorsa messa a disposizione.

11.6.1 Esempio



In questo esempio vediamo $\begin{array}{l} b_1 = 4 \\ b_2 = 12 \\ b_3 = 18 \end{array}$

Cosa succederebbe se incrementassimo di 1 b_2 e la portassimo quindi a un valore $b_2 = 13$?



Il grafico ci mostra che il prezzo ombra è $y_2^* = \frac{3}{2}$ per la seconda risorsa. I due pallini neri sono le due soluzioni ottimali al variare del vincolo. Mettendo queste due soluzioni nella funzione obiettivo si nota che esse varia, per l'appunto di $y_2^* = \frac{3}{2}$. Abbiamo dimostrato che $y_2^* = \frac{3}{2}$ è il valore secondo il quale la funzione obiettivo z incrementa se vado a incrementare il valore di b_2. Tuttavia, dimostra anche il comune fenomeno che questa interpretazione vale solo per un piccolo aumento di b_2. Una volta che b_2 è aumentato oltre 18, la soluzione ottima rimane a $(0, 9)$ con nessun ulteriore aumento della funzione obiettivo z.
In altre parole, $z = 45$ per ogni b_2 tale che $b_2 \geq 18$ perché il vincolo $2x_2 = b_2$ diventa ridondante.

Notiamo che $y_1^* = 0$ perché il vincolo sulla risorsa 1, $x_1 \leq 4$, non è vincolante per la soluzione ottima $(2, 6)$, c'è un surplus di questa risorsa. Di conseguenza, aumentando b_1 oltre a 4 non si può ottenere una nuova soluzione ottima con valore maggiore della funzione obiettivo.
Al contrario, i vincoli sulle risorse 2 e 3, $2x_2 \leq 12$ e $3x_1+2x_2 \leq 18$, sono vincoli vincolanti (vincoli che valgono con uguaglianza alla soluzione ottimale). Perché l'offerta limitata di queste risorse ($b_2 = 12$, $b_3 = 18$) vincola z dall'essere ulteriormente aumentata, hanno prezzi ombra positivi. Possiamo facilmente dimostrare che $y_3^* = 1$.
Gli economisti si riferiscono a tali risorse come beni scarsi, mentre le risorse disponibili in eccedenza (come la risorsa 1) sono beni gratuiti (risorse con a prezzo ombra zero).

11.7 Problema primale e duale

Problema primale

$$\begin{aligned} \mathit{max}\ z \quad &= 3x_1 + 5x_2 \\ &x_1 \leq 4 \\ &2x_2 \leq 12 \\ &3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema duale

$$\begin{aligned} \mathit{min}\ w \quad &= 4\pi_1 + 12\pi_2 + 18\pi_3 \\ &\pi_1 + 3\pi_3 \geq 3 \\ &2\pi_2 + 2\pi_3 \geq 5 \\ &\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0 \end{aligned}$$

La soluzione ottima è

$$x_1^* = 2,\ x_2^* = 6,\ z^* = 36$$

Dalla dualità forte sappiamo che $w^* = 36$. Come possiamo trovare le variabili ottimali?

Le variabili di slack complementari sono:

$$\begin{aligned} \pi_i^*(b_i - a_i^T x^*) = 0 \quad \forall i \\ (\pi^{T*} A_j - c_j)x_j^* = 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

Che nel nostro caso diventa

$$\begin{aligned} \pi_1^*(4 - x_1*) = 0 \\ \pi_2^*(12 - 2x_2^*) = 0 \\ \pi_3^*(18 - 3x_1^* - 2x_2^*) = 0 \\ (\pi_1^* + 3\pi_3^* - 3)x_1^* = 0 \\ (2\pi_2^* + 2\pi_3^* - 5)x_2^* = 0 \end{aligned}$$

Se $x_1^* = 2,\ x_2^* = 6$ allora

$$\begin{aligned} 2 \times \pi_1^* = 0 \\ 0 \times \pi_2^* = 0 \\ 0 \times \pi_3^* = 0 \\ 2 \times (\pi_1^* + 3\pi_3^* - 3) = 0 \\ 6 \times (2\pi_2^* + 2\pi_3^* - 5) = 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} \pi_1^* = 0 \\ (\pi_1^* + 3\pi_3^* - 3) = 0 \\ (2\pi_2^* + 2\pi_3^* - 5) = 0 \end{aligned}$$

che è

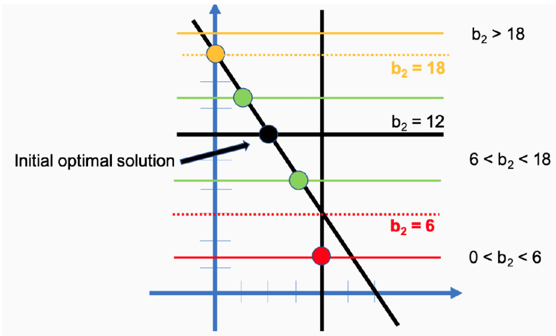
$$\begin{aligned} \pi_1^* = 0 \\ \pi_3^* = 1 \\ \pi_2^* = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

In fatti, $w^* = 4 \times 0 + 12 \times \frac{3}{2} + 18 \times 1 = 36$. In aggiunta notiamo che $y_1^* = \pi_i^*$ per $i = 1, 2, 3$. Le variabili ottimali del duale sono uguali al prezzo ombra.

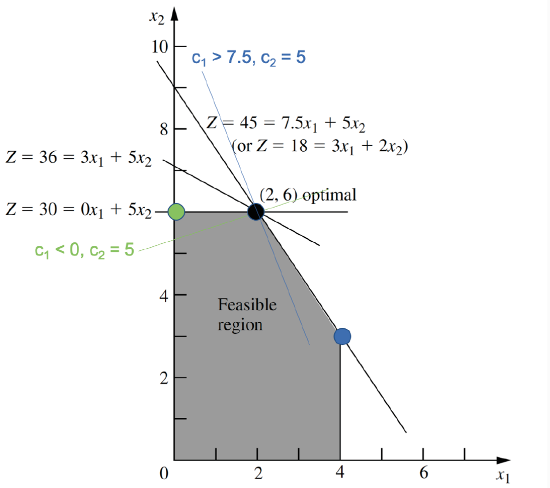
11.8 Variabili duale e Prezzo ombra

Abbiamo mostrato che ogni variabile duale ottima rappresenta la "velocità" con cui la funzione obiettivo z varia al variare del corrispondente valore di destra.
Se si varia un membro destro, il valore delle variabili duali ottimali rimane costante fintanto che la soluzione ottima giace sull'intersezione della stessa limiti di vincolo.
Nel nostro esempio

- Se $b_2 > 18$ la soluzione ottima è sempre $(0, 9)$. La variabile duale ottimale è $(0, 0, \frac{5}{2})$
- Se b_2 varia nell'intervallo $6 < b_2 < 18$ la soluzione ottima giace sull'intersezione tra $2x_2 = b_2$ e $3x_1 + 2x_2 = 18$ e le variabili della soluzione ottima duale sono $(0, \frac{3}{2}, 1)$
- Se $0 < b_2 < 6$ la soluzione ottima giace sui vincoli $2x_2 = b_2$ e $x_1 = 4$. Le soluzioni delle variabili duali sono $(3, \frac{5}{2}, 0)$
- Se, invece, $b_2 = 6$ o $b_2 = 18$ la soluzione si dice degenere.



11.9 Variazione dei coefficienti della funzione obiettivo



Il grafico dimostra l'analisi della sensibilità di c_1 e c_2 per il nostro problema. Partendo dalla linea della funzione obiettivo (dove $c_1 = 3,\ c_2 = 5$, e la soluzione ottima è $(2, 6)$). Le altre due linee nere mostrano gli estremi nei quali la funzione può variare e far si che la soluzione ottima rimanga $(2, 6)$. Quindi

- Con $c_2 = 5$ il range di estensione per c_1 è $0 \leq c_1 \leq 7,5$
- Con $c_1 = 3$ il range di estensione per c_2 è $c_2 \leq 2$

12 26/10/2021 - Teoria dei giochi (strategie pure)

12.1 Teoria dei giochi

Fino a questo momento abbiamo analizzato prevalentemente problemi in cui il decisore era unico. Mostriamo ora casi in cui si abbiano più decisori che agiscono sullo stesso sistema ma con interesse fra loro non coincidenti, cioè in situazioni di conflitto. Il risultato di ogni decisore viene a dipendere dalle sue scelte ma anche da quelli degli altri decisori, il che è appunto ciò che accade in situazioni di conflitto.
Il primo tentativo sistematico di studiare questi problemi è stato condotto dal matematico Von Neumann negli anni che precedettero la seconda guerra mondiale e ha dato vita ad una fortunata branca della matematica applicata nota con il nome di teoria dei giochi.

12.1.1 Terminologia

In un gioco ciascuno dei decisori che vengono normalmente chiamati *giocatori* ha una funzione obiettivo (che può essere un costo o un beneficio) detta spesso funzione di payoff.
Esistono giochi anche con n giocatori ognuno dei quali fa le sue scelte conoscendo completamente o solo in parte (informazione incompleta) le caratteristiche del problema.
Un gioco è detto deterministico se in esso non interviene il caso.
Il risultato del gioco deterministico, cioè il valore delle varie funzioni di payoff $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ per tutti gli n giocatori, è perfettamente noto una volta che siano note le scelte dei vari giocatori.
Se ogni giocatore ha a disposizione un numero infinito di scelte il gioco si dice continuo per distinguerlo dal caso, detto discreto, in cui le variabili hanno numero finito di possibili conclusioni.
A seconda del tipo di saturazione si possono avere

- Casi di conflitto puro
- Casi in cui è possibile la cooperazione tra i giocatori
- Casi in cui alcuni giocatori possono coalizzarsi con altri

12.2 Giochi a somma nulla

Definizione: Se la somma delle funzioni di payoff è uguale a 0 diremo che si tratta di un gioco a somma nulla.
Se invece è diversa da 0 diremo che il gioco è a somma non nulla.

Esiste una sostanziale differenza tra questi due casi: nel secondo infatti accade che si abbiamo soluzioni vantaggiose per tutti gli n giocatori, purché questi cooperino, mentre nel primo caso ciò è escluso: qualcuno vince qualcuno perde.

12.2.1 Due giocatori

Nel caso particolare di due giocatori se risulta

$$f_1 + f_2 = 0$$

e quindi $f_1 = -f_2$ si dice che il gioco è a due persone a somma nulla. In questo caso non è possibile né la cooperazione né la coalizione fra i due giocatori perché ciò che un giocatore vince viene perso dall'altro.

12.2.2 Un gioco stupido

Lucy e Linus giocano. Ciascuno di loro compie l'azione di mostrare contemporaneamente all'altro uno o due dita: Linus paga a Lucy tanti centesimi quant'è la somma delle dita. Si tratta di un gioco con scarse probabilità di successo poiché nessuna persona sana di mente accetterebbe il ruolo di Linus.
Le coppe di strategie possibili sono quattro e precisamente, indicando la prima scelta di Lucy e poi quella di Linus:

- 1 dito - 1 dito
- 1 dito - 2 dita
- 2 dita - 1 dito
- 2 dita - 2 dita

Il gioco si esaurisce con una coppia di mosse dei due giocatori dopodiché si può stabilire il risultato.
Le vincite di Lucy (che poi sono le perdite di Linus) si possono esprimere mediante una matrice 2×2 molto semplice

		Linus	
		$1d$	$2d$
Lucy	$1d$	2	3
	$2d$	3	4

Possibili scelte In ogni partita se Lucy sceglie la strategia $1d$ (cioè mostra un dito) il minimo che vince è 2, se sceglie $2d$ (cioè mostra due dita) il minimo che vince è 3. Per ogni strategia di Lucy esiste un valore minimo della sua vincita indipendentemente dalle scelte di Linus. Il massimo di questi minimi è detto max-min che significa appunto massimo dei minimi (delle vincite). Nel nostro esempio è 3 e Lucy lo ottiene giocando 2d.
Dal punto di vista di Linus, se egli sceglie di giocare $1d$ può perdere al massimo 3. Se sceglie di giocare $2d$ può perdere al massimo 4. Il minimo di questi massimi è quindi 3 e Linus lo tiene giocando $1d$: questo valore viene detto min-max, cioè il minimo dei massimi (delle perdite).

In conclusione, a Lucy conviene sempre giocare $2d$, mentre a Linus converrà sempre giocare $1d$: a entrambi conviene fare la scelta corrispondente alla mossa che dà il max-min o il min-max rispettivamente, per tutte le partite future.
La casella che corrisponde alle due strategie dà come risultato +3 per Lucy e -3 per Linus: nessuno dei due ha interesse a modificare la sua scelta durante le varie partite del gioco perché peggiorerebbe il suo risultato. Questa casella rappresenta quindi un punto di equilibrio per il gioco.

		Linus	
		$1d$	$2d$
Lucy	$1d$	2	3
	$2d$	3	4

12.3 Definizioni

12.3.1 Gioco

Un gioco è un insieme di partite fatte seguendo un sistema di regole; una partita è un insieme di azioni dette mosse fatte secondo le regole, che si conclude con un risultato per ciascuno dei partecipanti, detti giocatori.

Le regole devono essere non ambigue e non contraddittorie e devono permettere di precisare lo stato iniziale e quello finale del gioco. Ogni gioco è quindi analizzabile in linea di principio con un sistema in grado di evolversi nel tempo, compiendo una serie di transizioni definite dalle regole del gioco.

12.3.2 Strategia

Una strategia è costituita da uno o più principi di scelta in base ai quali il giocatore decide l'insieme delle azioni secondo cui sviluppare il gioco.

Una strategia deve essere in grado di determinare le scelte di tutte le situazioni che possono presentarsi. Quindi una strategia è l'insieme dei principi che determinano le mosse durante il gioco.

12.3.3 Strategie pure e miste

Se una strategia adotta a priori la decisione di fare sempre la stessa scelta per tutte le partite, essa viene detta pura; se la scelta viene fatta di volta in volta in base allo sviluppo del gioco o qualche altro criterio, si parla di strategia mista.

12.4 Matrice del gioco

Per giochi a due persone a somma nulla, se sono di tipo discreto, essi sono completamente descritti assegnando una sola matrice che è detta matrice del gioco.

A ogni coppia di strategie è possibile associare una funzione di beneficio (cioè una vincita) o di costo (cioè una perdita) che dipende dalle scelte dei due giocatori: di solito si preferisce usare solo la funzione di beneficio del primo giocatore (che è anche la funzione di costo del secondo), indicando in essa con segno "-" i benefici negativi (cioè i costi) per lui.
Dato un gioco di tipo discreto con due giocatori A e B, a somma nulla, se il giocatore A dispone di m scelte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ e il giocatore B di n scelte $b_1, b_2, \ldots, b_n$ il gioco si dice $n \times m$ dalle dimensioni della matrice del gioco che lo rappresenta.
La matrice è descritta dal punto di vista di A. Se ci riferissimo a B dovremmo cambiare segno a tutti gli elementi della matrice. D'ora in poi chiameremo tali elementi con c_{ij} per $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.
Il gioco è completamente descritto dalla seguente matrice delle vincite di A

	b_1	b_2	$\cdots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}

12.4.1 Scelta di A

A gioca cercando di vincere il più possibile, ma sa che B cerca di minimizzare le perdite. Quindi A determina riga per riga la sua vincita nel caso peggiore, cioè determina il valore minimo di ogni riga. Sia vi la vincita peggiore nella riga $i - esima$, cioè

$$v_i = \min_{j=1,\ldots,n} c_{ij} \quad per\ i = 1, \ldots, m$$

Siccome A vuole vincere il massimo possibile qualunque cosa faccia B, egli sceglie una strategia (cioè la riga) che gli dà il massimo valore di v_i, cioè la vincita massima del caso peggiore. In definitiva secondo questa logica possiamo definire le vincite di A nel modo seguente:

$$v^\circ = \max_{i=1,\ldots,m} v_i = \max_{i=1,\ldots,m} \left(\min_{j=1,\ldots,n} c_{ij} \right)$$

Il valore v° viene chiamato valore inferiore del gioco o valore di max-min per A: con questa strategia egli non può vincere meno di v°

12.4.2 Scelta di B

B gioca cercando di perdere il meno possibile. Quindi B determina colonna per colonna la sua perdita maggiore, cioè determina il valore massimo di ogni colonna. Sia w_j la perdita maggiore nella colonna $j - esima$, cioè

$$w_j = \max_{i=1,\ldots,m} c_{ij} \quad per\ j = 1, \ldots, n$$

Siccome B vuole perdere il meno possibile qualunque cosa faccia A, egli sceglie una strategia (cioè la colonna) che gli dà il minimo valore di w_j, cioè la perdita minima del caso peggiore. Si possono quindi definire le perdite di B nel modo seguente:

$$w^\circ = \underset{j=1,\dots,n}{min} w_j = \underset{j=1,\dots,n}{min} (\underset{i=1,\dots,m}{max} c_{ij})$$

Il valore w° viene chiamato valore superiore del gioco o valore di min-max per B: con questa strategia egli non può perdere più do w°.

12.5 max-min e min-max

Si ha un gioco a somma nulla 3×4 cui associata la seguente matrice delle vincite

$A \backslash B$	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	-3	6	2
a_2	-1	-5	-6	8
a_3	3	4	3	1

$v_i = min_{j=1,\dots,4} c_{ij}$ per $i = 1,2,3$ si ha $v_1 = -3$, $v_2 = -6$, $v_3 = 1$. Quindi $v^\circ = max_{i=1,2,3} v_i = max\{-3,-6,1\} = 1$, cioè la scelta a_3.

$w_j = max_{i=1,2,3} c_{ij}$ per $j = 1,2,3,4$ si ha che $w_1 = 3$, $w_2 = 4$, $w_3 = 6$, $w_4 = 8$. Quindi $w^\circ = min_{j=1,\dots,4} w_j = min\{3,4,6,8\} = 3$, cioè la scelta b_1. Si osservi che $v^\circ \neq w^\circ$

12.6 Punto di sella

Può succedere che $v^\circ = w^\circ$ e cioè che il valore inferiore e il valore superiore coincidono. Quando ciò accade siamo in presenza di un punto di sella.
Valore ottimo: Si dice punto di sella di una matrice a due dimensioni l'elemento della matrice (se esiste) che è contemporaneamente il minimo della sua riga e il massimo della sua colonna. Lo indichiamo con $\ll \circ \gg$ e lo chiamiamo valore ottimo del gioco.

12.7 Equilibrio di Nash

Definizione: Un punto di equilibrio o punto di Nash è una coppia di strategia che determinano una soluzione nella quale nessuno dei due giocatori ha interesse a spostarsi se non lo fa anche il suo avversario.

Se un gioco possiede un punto di sella le strategie di A e di B che lo determinano sono dette strategie ottime e la soluzione (cioè il punto di sella) è un punto di equilibrio. La coppia di strategie che determinano un punto di equilibrio costituiscono la soluzione ottima del gioco. In altre parole se esiste un punto di equilibrio è conveniente giocare sempre la coppia di strategie pure che lo realizzano. I punti di equilibrio rappresentano infatti situazioni di stabilità nel senso che, una volta che i due giocatori hanno deciso di giocare le strategie di equilibrio, nessuno dei due è più interessato a muoversi.

12.7.1 Esempio 1

Consideriamo il gioco con la seguente matrice

	b_1	b_2	b_3
a_1	2	1	4
a_2	2	0	1

Si osserva che nessun elemento della prima riga è inferiore a quello corrispondente della seconda riga. Si dice quindi che la prima riga è dominante allora il primo giocatore sceglie certamente la prima riga, e $v^\circ = 1$.
Analogamente si osserva che la seconda colonna domina le altre due (ha tutti i coefficienti più piccoli di quelli corrispondenti sulle altre colonne) e quindi consente la minor perdita. Il secondo giocatore sceglie certamente la seconda colonna, e $w^\circ = 1$.
c_{12} è il minimo della sua riga e il massimo della sua colonna. É un punto di equilibrio di Nash.

$$c_{12} = \underset{i}{max} \; \underset{j}{min} \; c_{ij} = \underset{j}{min} \; \underset{i}{max} \; c_{ij} = 0$$

12.7.2 Esempio 2

	b_1	b_2	b_3	min
a_1	-3	-2	6	-3
a_2	2	0	2	0
a_3	5	-2	-4	-4
max	5	0	6	

Non c'è nessuna riga o colonna dominante.
c_{22} è il minimo della sua riga e il massimo della sua colonna. É un punto di equilibrio di Nash.

$$c_{12} = \underset{i}{max} \; \underset{j}{min} \; c_{ij} = \underset{j}{min} \; \underset{i}{max} \; c_{ij} = 0$$

12.7.3 Esempio 3

	b_1	b_2	b_3	min
a_1	0	-2	2	-2
a_2	5	4	-3	-3
a_3	2	3	-4	-4
max	5	4	2	

Si osserva che $v^\circ = max_i min_j c_{ij} = -2$ mentre $w^\circ = min_j max_i c_{ij} = 2$, quindi $v^\circ \neq w^\circ$. Infatti $v^\circ = c_{12}$, mentre $w^\circ = c_{31}$. Gioco instabile o ciclico.
Si supponga che ogni giocatore sappia che l'altro gioca in maniera razionale (minor perdita). Se quindi B si aspetta che A scelga a_1, B sceglierà b_2. Ma sospettando ciò A gioca a_2 e quindi B giocherà b_3, ma allora A sceglie a_1 e si ritorna al punto di partenza.

12.8 Il dilemma del prigioniero

Due malfattori, accusati di aver commesso una serie di delitti, vengono catturati e rinchiusi in due celle separate, senza alcuna possibilità di comunicazione.
Entrambi sanno che le prove contro di loro non sono conclusive e conoscono bene il sistema giudiziario del loro paese, che tiene in grande considerazione la confessione dell'imputato.
Ogni prigioniero ha due alternative: non confessare (N) oppure confessare (C).
Se entrambi non confessano (N,N) sanno che potranno venire accusati solo di qualche reato minore e ognuno dovrà scontare un anno di prigione. Se entrambi confessano (C,C) verranno condannati a 8 anni di prigione dal momento che il giudice commina una pena inferiore al massimo previsto (10 anni). Se invece un prigioniero non confessa e l'altro sì, il primo riceverà il massimo della pena (10 anni) mentre colui che ha tradito il compagno se la caverà con mezzo anno di prigione.
Il gioco presenta pertanto la seguente tabella di perdite

	N	C
N	$1,1$	$10,\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{2},10$	$8,8$

È interessante notare che l'unico punto di equilibrio del gioco e la coppia di strategie (C,C) che dà risultati peggiori per entrambi giocatori rispetto la coppia (N,N) che non è un punto di equilibrio.
Infatti ogni prigioniero preso singolarmente, nella situazione (N,N), ha interesse a confessare dal momento che ciò migliora la sua posizione qualsiasi sia la scelta dell'altro su cui egli non può influire.
Il caso (N,N), che consente complessivamente il risultato migliore, si ha solo se ciascuno è disposto a sacrificare qualcosa rispetto la propria situazione ottimale (mezzo anno di prigione) e se ha fiducia nel fatto che lo farà anche un altro, cioè i due giocatori devono cooperare.

13 28/10/2021

13.1 Teoria dei giochi - Strategia Mista

Definizione: Una strategia mista è una distribuzione di probabilità delle strategie pure.

$$\sum_i p_i = 1 \qquad \sum_j p_j = 1$$

Esempio 1:

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	−3	6	2
a_2	−1	−5	−6	8
a_3	3	4	3	1

$p_1 = 0,5$
$p_2 = 0,1$
$p_3 = 0,4$

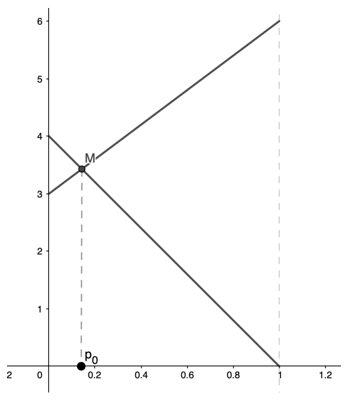
$p = [0,5 \;\; 0,1 \;\; 0,4]$ $\qquad E[f(b)] = [2,1 \;\; 0,4 \;\; 3,6 \;\; 2,2]$
$\pi = [0,2 \;\; 0,3 \;\; 0,4 \;\; 0,1]$ $\qquad E[f] = 2,1 \cdot 0,2 - 0,4 \cdot', 4 + 3,6 \cdot 0,4 + 2,2 \cdot 0,1 = 1,96$

Esempio 2:

		π_1 b_1	π_2 b_2
p_1	a_1	6	0
p_2	a_2	3	4

$\pi_2 = 1 - \pi_1$
$p_2 = 1 - p_1$

$v' = 6p_1 + 3p_2 = 3 + 3p_1$
$v'' = 0p_1 + 4p_2 = 4 - 4p_1$

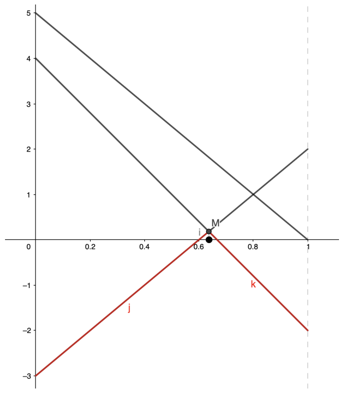


$$3 + 3p_1 = 4 + 4p_1$$
$$7p_1 = 1 \;\; p_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{6}{7}$$
$$v^o = 3 + \frac{3}{7} = \frac{24}{7}$$

Esempio 3:

	π_1	π_2	π_3
p_1	0	−2	2
p_2	5	4	−3

$$v' = 0p_1 + 5(1 - p_1) = 5 - 5p_1$$
$$v'' = -2p_1 + 4(1 - p_1) = 4 - 6_p1$$
$$v''' = 2p_1 - 3(1 - p_1) = -3 + 5p_1$$



$$4 - 6p_1 = -3 + 5p_1$$
$$11p_1 = 7 \quad p_1 = \frac{7}{11} \Rightarrow p_2 = \frac{4}{11}$$
$$v^o = 4 - \frac{42}{11} = \frac{2}{11}$$

$$E[c_{ij}] = \sum_i p_i \sum_j \pi_j c_{ij} = \sum_i \sum_j p_i \pi_j c_{ij}$$

Dato che $\sum_j = \pi_j = 1$ la minima vincita attesa sarà $min_j \sum_i p_i c_{ij} = v \Rightarrow$ lo risolvo come un problema di programmazione lineare cercando il $max\ v$

$$\begin{array}{lll} max\ v & & \\ & \sum_i p_i = 1 & m' + 1 \quad \text{variabili} \\ & \sum_i p_i c_{ij} \geq v \quad \forall j & m'' + 1 \quad \text{vincoli} \\ & p_i \geq 0 \quad v\ libera & \end{array}$$

Riscritto in forma $max\ z = c^T x$

$$\begin{array}{lll} max\ v & & \\ & v - \sum_i p_i c_{ij} \leq 0 \quad \forall j & \pi_j \\ & \sum_i p_i = 1 & w \\ & p_i \geq 0 \quad v\ libera & \end{array}$$

Scrivo il duale: ricordo che se $\begin{array}{ll} max & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$ allora il duale sarà $\begin{array}{ll} min & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$:

$$
\begin{array}{lll}
max \ v & & \\
& v - p_1 c_{11} - p_2 c_{21} - p_3 c_{31} \leq 0 & \pi_1 \\
& v - p_1 c_{12} - p_2 c_{22} - p_3 c_{32} \leq 0 & \pi_2 \\
& v - p_1 c_{13} - p_2 c_{23} - p_3 c_{33} \leq 0 & \pi_3 \\
& v - p_1 c_{14} - p_2 c_{24} - p_3 c_{34} \leq 0 & \pi_4 \\
& p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 & w \\
& p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

Viene fuori che il duale è:

$$
\begin{array}{ll}
min \ w & \\
& -\sum_j \pi_j c_{ij} + w \leq 0 \\
& \pi_j \geq 0
\end{array}
$$

La soluzione sarà che $w = max_i \sum_j \pi_j c_{ij}$

14 08/11/2021 - Risolvere problemi di programmazione intera

14.1 Come risolvere un problema di programmazione intera?

Enumerazione: Tutte le soluzioni possibili sono identificate e la migliore è raccolta. Potrebbe non essere praticabile. Ad esempio, per risolvere il Travelling Salesman Problem in un grafo completo con n nodi ci sono $(n-1)!$ fattibili. Quindi,

n	$n!$
10	3.6×10^6
100	9.33×10^{157}
1000	4.02×10^{2567}

Sono richieste idee migliori

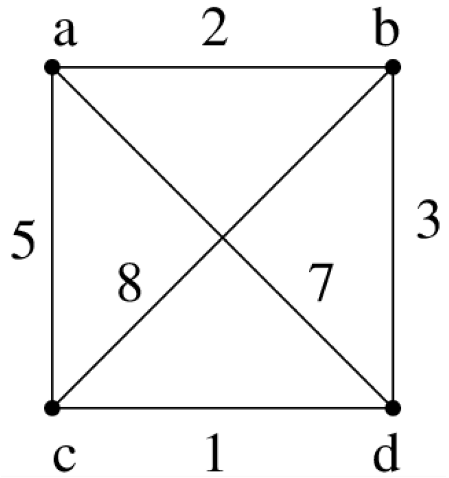
14.2 Il problema del mercante viaggiatore

Ci viene dato un insieme di nodi $V = \{1, \dots, n\}$ (es. le città) e un insieme di archi A
Gli archi rappresentano coppie ordinate di città dove ci può essere un collegamento diretto.
Per $(i, j) \in A$ è il passaggio diretto dalla città i alla città j
Gli obiettivi del TSP sono:

- Visitare tutte le città esattamente 1 volta, per poi tornare alla città di partenza
- Impiegare il minor tempo di viaggio possibile

Un tour che visita tutti i nodi esattamente una volta si chiama Hamiltonian tour. Il TSP viene identificato come Hamiltonian tour di costo minimo.

14.2.1 Un TSP facile



Tre possibili Tour:

- A-B-D-C-A - Costo: 11
- A-D-B-C-A - Costo: 23
- A-D-C-B-A - Costo: 18

14.2.2 Formulazione

Variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \text{ segue immediatamente } i \text{ nel tour} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi $x \in \{0,1\}^{|A|}$ **Funzione obiettivo:**

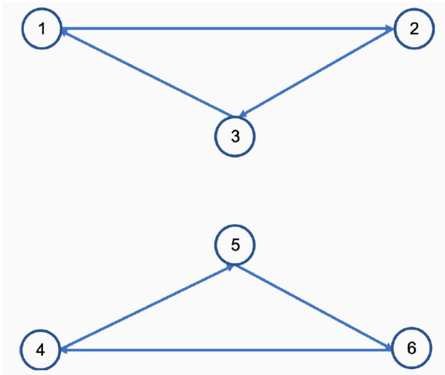
$$min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

Formulazione dei vincoli Ogni città viene inserita e lasciata una sola volta

$$\sum_{i:(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad per\ j \in V$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} = 1 \quad per\ i \in V$$

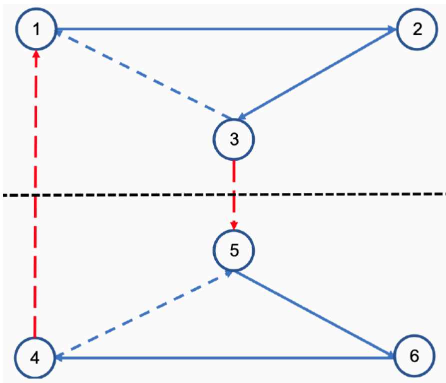
Ma comunque i due vincoli appena citati non sono comunque abbastanza per definire i tour, dato che sono soddisfatti anche dai sotto-tour.



Eliminazione dei sotto-tour In ogni tour ci deve essere un arco che va da $\{1,2,3\}$ a $\{4,5,6\}$ e un arco che va da $\{4,5,6\}$ a $\{1,2,3\}$. In generale, per ogni $U \subset V$ con $2 \leq |U| \leq |V|-2$, i vincoli

$$\sum_{\{(i,j)\in A: i\in U, j\in V\setminus U} x_{ij} \geq 1$$

sono soddisfatti da tutti i tour, ma ogni sotto-tour ne viola almeno uno loro.



Un metodo alternativo per eliminare i sotto-tour è quelli di introdurre il vincolo

$$\sum_{\{(i,j)\in A: i\in U, j\in U} x_{ij} \leq |U|-1 \; \forall U \subset V : 2 \leq |U| \leq |V|-2$$

Ma anche in questo abbiamo bisogno di un vincolo per ogni $U \subset V$ tale che $2 \leq |U| \leq |V|-2$.

In entrambi i casi il numero di vincoli è quasi $2^{|V|}$!

$$\frac{1}{2}\left[\binom{|V|}{2} + \binom{|V|}{3} + \cdots + \binom{|V|}{|V|-2}\right]$$

Formulazione finale

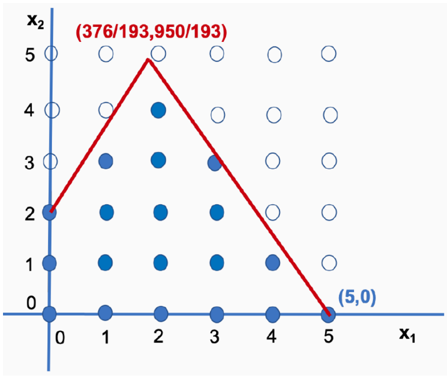
$$\begin{array}{lll}
min\ z = & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
& \sum_{i:(i,j)\in A} x_{ij} = 1 & per\ j \in V \\
& \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = 1 & per\ i \in V \\
& \sum_{\{(i,j)\in A: i\in U, j\in V\setminus U} x_{ij} \geq 1 & \forall U \subset V : 2 \leq |U| \leq |V|-2 \\
& \color{blue}{Oppure} & \\
& \sum_{\{(i,j)\in A: i\in U, j\in U} x_{ij} \leq |U|-1 & \forall U \subset V : 2 \leq |U| \leq |V|-2 \\
& x \in \{0,1\}^{|A|} &
\end{array}$$

14.3 Come risolvere un problema intero?

Ignorando i vincoli di integralità delle variabili. Consideriamo il problema che segue:

$$\begin{array}{ll}
max\ z = & 1,00x_1 + 0,64x_2 \\
& 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\
& 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{N}
\end{array}$$

La soluzione ottima intera è $(5,0)$
La soluzione ottima senza considerare le variabili di integrità dei vincoli è $\left(\frac{376}{193}, \frac{950}{193}\right) = (1.948, 4.922)$



Ignorando i vincoli di integralità delle variabili. Perché non arrotondare per eccesso e/o per difetto la soluzione lineare?

- La parte intera superiore $(2,5)$ non è ammissibile (Il primo vincolo viene violato)
- La parte intera inferiore $(1,4)$ non è ammissibile (Il secondo vincolo viene violato)
- La scelta mista $(1,5)$ non è ammissibile (Il secondo vincolo è violato)
- La scelta mista $(2,4)$ è ammissibile ma non ottima, infatti notiamo che $z(2,4) = 4.56$ e $z(5,0) = 5$

Inoltre, nessun arrotondamento fornisce i valori $(5,0)$. In conclusione, la soluzione lineare sembra essere inutile per trovare la soluzione intera.

14.4 Ottimalità

Dato un problema intero:

$$z = max\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\}$$

come posso provare che un dato punto x^* è ottimo?
Dobbiamo rispondere a questa domanda perché abbiamo visto che la soluzione dell'enumerazione potrebbe non essere possibile, mentre ignorando le variabili i vincoli di integralità potrebbero non fornire informazioni utili.
Quindi abbiamo bisogno di trovare degli algoritmi per risolvere un problema intero.

14.5 Limiti

L'approccio più comune per risolvere un problema intero è quello di trovare delle sequenze di limiti finché non sono "abbastanza chiusi". Definisco quindi
Limite superiore (Upper Bound): Se z è la soluzione ottima di un problema intero, un limite superiore è un valore $\overline{z}$ tale che $\overline{z} \geq z$.
Limite inferiore (Lower Bound): Se z è la soluzione ottima di un problema intero, un limite inferiore è un valore $\underline{z}$ tale che $\underline{z} \leq z$.
Idealmente vogliamo trovare quei $\overline{z}$ e $\underline{z}$ tali che $\underline{z} = z = \overline{z}$

Da un punto di vista più pratico, ogni algoritmo andrà a cercare una sequenza decrescente di limiti superiori

$$\overline{z_1} > \overline{z_2} > \cdots > \overline{z_s} \geq z$$

e una sequenza crescente di limiti inferiori

$$\underline{z_1} < \underline{z_2} < \cdots < \underline{z_t} \leq z$$

e si stoppa quando

$$\overline{z_s} - \underline{z_t} \leq \epsilon$$

dove ϵ è un valore non negativo appropriato.

14.5.1 Limite inferiore

Def.: Ogni soluzione ammissibile $\hat{x} \in X$ fornisce un limite inferiore (o primale) $\underline{z} = c(\hat{x}) \leq z$
Per il problema

$$\begin{aligned} max\ z = \quad & 1,00x_1 + 0,64x_2 \\ & 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

vediamo, arrotondando la soluzione ottima, che $\hat{x} = (2, 4)$ è una soluzione ammissibile tale $\underline{z} = c(\hat{x}) = 4.56 \leq z$

14.5.2 Limite superiore

I limiti superiori dei risultati potrebbero essere meno ovvi.
L'idea più comune è quella di sostituire un problema intero "difficile" con un problema di ottimizzazione più semplice, il cui valore ottimo è almeno grande quanto z.
Il problema più semplice può essere ottenuto per "rilassamento", cioè, da

- Allargando l'insieme delle soluzioni ammissibili in modo da ottimizzare su un insieme più grande
- Sostituendo la funzione obiettivo max con una funzione che abbia lo stesso o un valore maggiore ovunque.

14.6 Rilassamento

Definizione: Un problema (rilassato) $z^R = max\{f(x) : x \in T \subseteq \mathbb{R}^n\}$ è il rilassamento di un problema intero $z = max\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\}$ se:

i. $X \subseteq T$

ii. $f(x) \geq c(x)$ per tutte le $x \in X$

Proposizione, se RP è il rilassamento di IP, $z^R \geq z$: Se x^* è una soluzione ottima del problema intero, $x^* \in X \subseteq T$ e $z = c(x^*) \leq f(x^*)$. $x^* \in T, f(x^*)$ è un limite inferiore su z^R, quindi $z \leq f(x^*) \leq z^R$.
Quindi z^R è un limite superiore.

14.7 Rilassamento lineare

Definizione: Per un programma intero $max\{cx : c \in X = P \cap \mathbb{Z}^n\}$ con una formulazione $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$, il problema lineare rilassato è il problema lineare $z^{LP} = max\{cx : x \in P\}$

Poiché $X = P \cap \mathbb{Z}^n \subseteq P$ e la funzione obiettivo sono invariati, questo è chiaramente un rilassamento.

14.7.1 Esempio

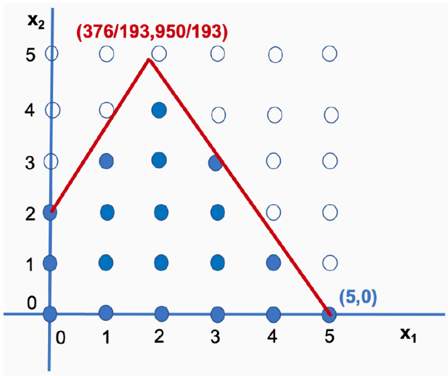
Problema intero originale

$$\begin{aligned} z = max \quad & 1,00x_1 + 0,64x_2 \\ & 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Rilassamento lineare

$$\begin{aligned} z^{LP} = max \quad & 1,00x_1 + 0,64x_2 \\ & 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- La soluzione ottima intera è $(5,0)$ e $z = 5$
- La soluzione ottima del rilassamento lineare è $\left(\frac{376}{193}, \frac{950}{193}\right)$ e $z^{LP} = \frac{984}{193} = 5,098$



Per il problema intero

$$
\begin{aligned}
z = max \quad & 1,00x_1 + 0,64x_2 \\
& 50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\
& 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Sappiamo che il limite inferiore è $\underline{z} = 4,560$ e il limite superiore è $\overline{z} = 5,098$. La soluzione ottima z si trova quindi all'interno di

$$
\underline{z} = 4,560 \leq z \leq 5,098 = \overline{z}
$$

Infatti, $z = 5$.
Le informazioni che otteniamo ignorando le variabili i vincoli di integralità possono essere davvero molto utili.

15 09/11/2021 - Problemi ben posti

15.1 Impostare il contesto

Un punto di partenza naturale nella risoluzione di programmi interi lineari

$$(IP) \quad max\{cx : Ax \leq b, x \in Z^n\}$$

con dati integrali (A, b) è chiedersi quando si sarà così fortunati che il rilassamento della programmazione lineare

$$(LP) \quad max\{cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$$

avrà una soluzione ottima integrale.

15.2 Unimodularità totale

Def.: Una matrice A è totalmente unimodulare (TU) se ogni sotto matrice quadrata di A ha determinante $+1$, -1 o 0
Osservazione: Se A è TU, $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$
Matrici non TU

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A_1| = 2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A_2| = 2$$

Matrice TU

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A_3| = 0$$

15.3 Proposizione 1

Una matrice A è TU se e solo se

- La matrice trasposta A^T è TU
- La matrice $[A|I]$ è TU

15.4 Proposizione 2 - Condizione sufficiente

Una matrice è TU se

i. $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$

ii. Ogni colonna contiene al massimo due coefficienti diversi da zero, cioè $\sum_i |a_{ij}| \leq 2$

iii. Esiste una partizione (M_1, M_2) delle M righe tale che ciascuna colonna j contenente due coefficienti diversi da zero soddisfa

$$\sum_{i \in M_1} a_{ij} - \sum_{i \in M_2} a_{ij} = 0$$

La condizione (iii) significa che se i non ha zeri nella riga i e k, e se $a_{ij} = -a_{kj}$, allora $\{i, k\} \in M_1$ o $\{i, k\} \in M_2$, mentre se $a_{ij} = a_{kj}$, $i \in M_1$ e $k \in M_2$ o viceversa.

15.5 Proposizione 3

Il problema di programmazione lineare $max\{cx : Ax \leq b, \ x \in R^n_+\}$ ha una soluzione ottima intera per tutti i vettori interi b per i quali ha valore ottimo finito se e solo se A è totalmente unimodulare.

15.6 Minimum cost network flow

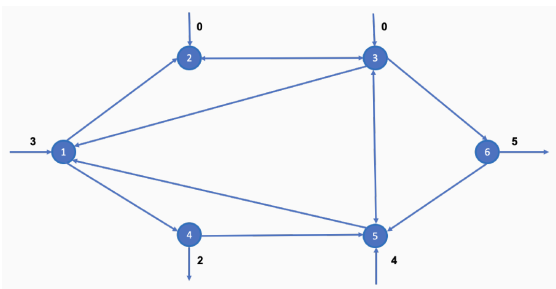
Dato un grafo $D = (V, A)$ con capacità d'arco h_{ij} per ogni $(i, j) \in A$, richiede b_i (afflussi positivi o deflussi negativi) ad ogni nodo $i \in V$, e il costo del flusso unitario c_{ij} per tutti $(i, j) \in A$. Il problema del flusso di rete di costo minimo è trovare un flusso fattibile che soddisfi tutte le esigenze al minimo costo. Questo ha il formulazione

$$min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{k \in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k \in V^-(i)} x_{ki} = b_i \ per \ i \in V \qquad (2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} \ per \ (i, j) \in A \qquad (3)$$

dove x_{ij} denota il flusso in arco $(i, j), V^+(i) = \{k : (i, k) \in A\}$ e $V^-(i) = \{k : (k, 1) \in A\}$



x_{12}	x_{14}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{35}	x_{36}	x_{45}	x_{51}	x_{53}	x_{65}		
1	1	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	=	3
-1	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	=	0
0	0	-1	1	1	1	1	0	0	-1	0	=	0
0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	=	-2
0	0	0	0	0	-1	0	-1	1	1	-1	=	4
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	=	-5

I vincoli aggiuntivi sono i vincoli di capacità $0 \leq x_{ij} \leq h_{ij}$

15.7 Proposizione 4

La matrice dei vincoli A derivante da un flusso di rete di un problema di costo minimo è totalmente unimodulare.

Dim.: La matrice A è della forma $\begin{pmatrix} C \\ I \end{pmatrix}$ dove C viene da vincoli di conservazione del flusso e I dai vincoli di capacità. Quindi basta mostrare che C è TU. Le condizioni sufficienti affinché la Proposizione 2 sia soddisfatta sono $M_1 = M$ e $M_2 = \emptyset$.

15.8 Risultato chiave - Corollario

In un problema di flusso di rete di costo minimo, se le richieste $\{b_i\}$ e le capacità $\{h_{ij}\}$ sono integrali

- Ogni punto estremo è integrale
- I vincoli (2) e (3) descrivono l'inviluppo convesso dei flussi integrali ammissibili.

Questo corollario significa che il rilassamento lineare del problema del flusso di rete di costo minimo fornisce sempre una soluzione intera fornita che tutte le capacità $\{h_{ij}\}$ e le richieste $\{b_i\}$ sono integrali.

15.9 Flussi speciali a costo minimo

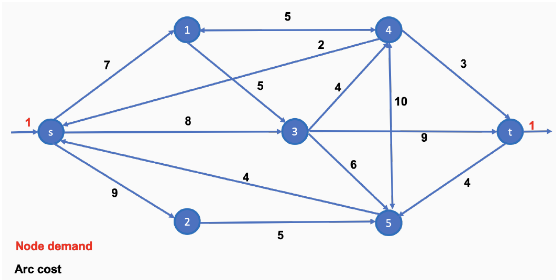
15.9.1 Il problema del percorso più breve

Dato un grafo $D = (V, A)$, due nodi distinti $s, t \in V$, e gli archi non negativi costano c_{ij} per $(i, j) \in A$, trova un costo minimo sul percorso $s - t$.

Se poniamo $b_s = 1$ e $b_t = -1$, solo un'unità di flusso può spostarsi da s a t, e il problema è trovare la successione degli archi a costo minimo che questa unità attraverserà. Un arco $(i, j) \in A$ se e solo se $h_{ij} > 0$. Poiché assumiamo solo valori interi, $(i, j) \in A$ se e solo se $h_{ij} \geq 1$. Poiché nella rete scorre esattamente un'unità, non è necessario includere esplicitamente i vincoli di capacità.

Le variabili decisionali sono tali che $x_{ij} = 1$ se $arc(i, j)$ è al minimo costo (più breve) il percorso $s - t$. Per l'unimodularità totale, una soluzione ottima è sempre intera. Pertanto, possiamo scrivere $x_{ij} \geq 0$.

Esempio



$$\begin{array}{rll} z = & min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\ & \sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} = 1 & per\ i = s \\ & \sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} = 1 & per\ i \in V \setminus \{s,t\} \\ & \sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} = -1 & per\ i = t \\ & x_{ij} \geq 0 & per\ (i,j) \in A \end{array}$$

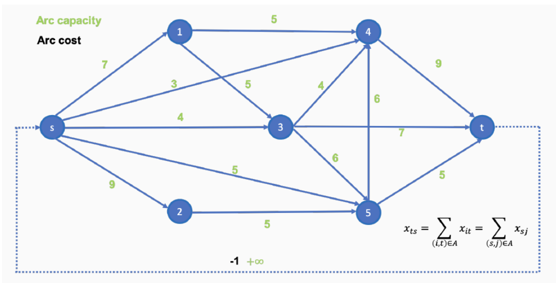
15.9.2 Il problema del percorso più lungo

Dato un grafo $D = (V, A)$, due nodi distinti $s, t \in V$, e capacità non negative h_{ij} per $(i, j) \in A$, trovare un flusso massimo sul percorso da s a t.

Sommando un arco all'indietro da t a s, il problema di flusso massimo $s - t$ può essere formulato come

$$\begin{array}{rll} z = & max x_{ts} & \\ & \sum_{k\in V^+(i)} x_{ik} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{ki} = 0 & per\ i \in V \\ & 0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} & per\ (i,j) \in A \end{array}$$

Per l'unimodularità totale, una soluzione ottima è fornita intera che tutte le capacità h_{ij} sono integrali.



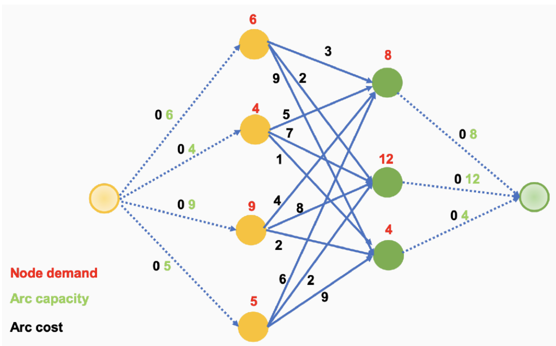
15.9.3 Problema di trasporto

Siano m fornitori e n consumatori. l'$i-esimo$ fornitore può fornire a_i unità di un certo bene e il $j-esimo$ consumatore domanda b_j unità. Se c_{ij} è il costo per trasportare un'unità di bene dall'$i-esimo$ fornitore al $j-esimo$ consumatore, il problema è trasportare la merce dal fornitori ai consumatori al minimo costo.

Può essere formulato come un problema di flusso di costo minimo su un grafo bipartito $D = (V_1 \cup V_2, A)$ dove $V_1 = \{1, \dots, m\}$ è l'insieme delle sorgenti, $V_2 = \{1, \dots, n\}$ è l'insieme delle destinazioni, e $A = \{(i, j) : \ i \in V_1, \ j \in V2\}$. Senza perdita di generalità, assumiamo che ci sia un arco da ciascun nodo di offerta a ciascun nodo di domanda. Il costo di spedizione unitario da $i \in V_1$ a $j \in V_2$ è c_{ij} . Se non c'è un arco da i a j, prendiamo c_{ij} molto grande. Il nodo $i \in V_1$ ha un'alimentazione positiva a_i e $j \in V_2$ ha a domanda positiva b_j. Il flusso in uscita da una sorgente è necessario per uguagliare la sua offerta e il flusso delle destinazioni deve essere uguale alla sua domanda.
Quindi una condizione necessaria per la fattibilità è

$$\sum_{i \in V_1} a_i = \sum_{j \in V_2} b_j$$

$$\begin{array}{lll} z = & min \sum_{i \in V_1} \sum_{i \in V_2} c_{ij} x_{ij} & \\ & \sum_{j \in V_2} x_{ij} = a_i & per\ i \in V_1 \\ & \sum_{i \in V_1} x_{ij} = b_j & per\ j \in V_2 \\ & x_{ij} \geq 0 & per\ (i,j) \in A \end{array}$$

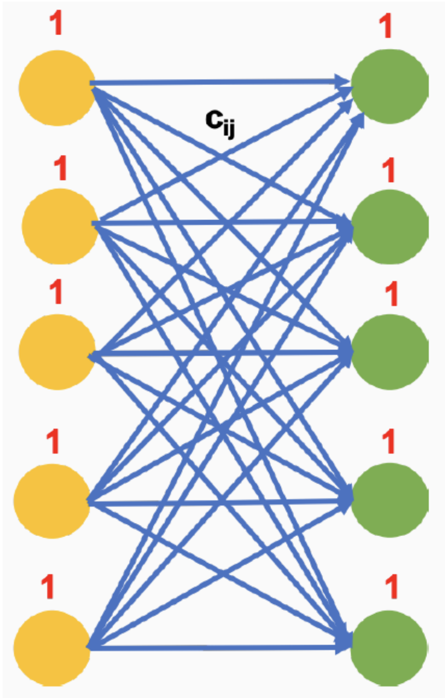


15.9.4 Problema dell'assegnazione

É un caso speciale del problema del trasporto, dove il numero dei fornitori è uguale al numero dei consumatori, ogni fornitore ha l'offerta unitaria e ogni consumatore ha la domanda unitaria.

Quando $a_i = b_j = 1$ per tutti gli i e j e $m = n$, abbiamo il problema dell'assegnazione

$$\begin{array}{lll} z = & min \sum_{i\in V_1} \sum_{i\in V_2} c_{ij}x_{ij} & \\ & \sum_{j\in V_2} x_{ij} = 1 & per\ i \in V_1 \\ & \sum_{i\in V_1} x_{ij} = 1 & per\ j \in V_2 \\ & 0 \le x_{ij} \le 1 & per\ (i,j) \in A \end{array}$$



Supponiamo che ci siano n persone e m lavori, dove $n \ge m$. Ogni lavoro deve essere fatto esattamente da una persona; inoltre, ogni persona può fare, al massimo, un lavoro. Il costo della persona j che fa il lavoro i è c_{ij} . Il problema è assegnare le persone ai lavori in modo da ridurre al minimo il costo totale di completando tutti i lavori. Per formulare questo problema, che è noto come problema di assegnazione, introduciamo $0-1$ variabili x_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ corrispondente all'$ij-esimo$ evento di assegnare la persona j al lavoro i.
Poiché esattamente una persona deve svolgere il lavoro i, abbiamo dei vincoli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ per\ i = 1, \ldots, m \qquad (4)$$

Poiché ogni persona non può svolgere più di un lavoro, abbiamo anche dei vincoli

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 \ \ per\ j = 1, \ldots, n \qquad (5)$$

È ora facile verificare che se $x \in \{0,1\}^{mn}$ soddisfa (4) e (5), si ottiene un soluzione praticabile del problema di assegnazione. La funzione obiettivo è

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} x_{ij}$$

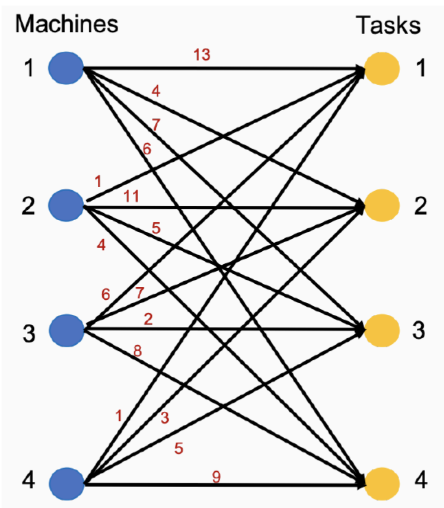
Esempio : Un'azienda ha a disposizione 4 macchine per l'assegnazione di 4 attività. Qualunque macchina può essere assegnata a qualsiasi attività e ogni attività richiede elaborazione da parte di una macchina. Il tempo necessario per configurare ciascuna macchina per l'elaborazione di ciascuna attività è riportata nella tabella sottostante.

	A1	A2	A3	A4
M1	13	4	7	6
M2	1	11	5	4
M3	6	7	2	8
M4	1	3	5	9

L'azienda vuole ridurre al minimo il tempo totale di installazione necessario per l'elaborazione di tutte e quattro le attività.
Se pensiamo ai tempi di setup come costi e definiamo

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la macchina } i \text{ è assegnata al processo } j \\ 0 & \text{se la macchina } i \text{ non è assegnata al processo } j \end{cases}$$

dove $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3, 4$, allora si vede facilmente che cosa abbiamo un problema con 4 sorgenti (che rappresentano le macchine), 4 destinazioni (che rappresentano i compiti), una singola unità di fornitura da ciascuno sorgente (che rappresenta la disponibilità di una macchina) e una singola unità della domanda ad ogni destinazione (che rappresenta il requisito di elaborazione di un compito). Questa particolare classe di problemi è chiamata problemi di assegnamento.



$$
\begin{aligned}
min \quad & 13x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + \\
& x_{21} + 11x_{22} + 5x_{23} + 4x_{24} + \\
& 6x_{31} + 7x_{32} + 2x_{33} + 8x_{34} + \\
& x_{41} + 3x_{42} + 5x_{43} + 9x_{44}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{41} = 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1
\end{aligned}
$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \ per \ i = 1, \ldots, 4, \ j = 1, \ldots, 4$$

16 25/11/2021 - Condizioni KKT

1. $\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_i^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0 \quad \forall j$
2. $v_j \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_i^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] = 0 \quad \forall j$
3. $\lambda_i \left[g_i(x) - b_i \right] = 0 \quad \forall i$
4. $g_i(x) - b_i \leq 0 \quad \forall i$
5. $x_j \geq 0$
6. $\lambda_i \geq 0$

16.1 Esercizio 1 - Facile

$$\begin{aligned} max\ f(x) = \quad & log(x_1 + 1) + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.
   1. $\frac{1}{x_1+1} - 2\lambda \leq 0$
   2. $1 - \lambda \leq 0$
2.
   1. $x_1 \left(\frac{1}{x_1+1} - 2\lambda \right) = 0$
   2. $x_2(1 - \lambda) = 0$
3. $\lambda(2x_1 + x_2 - 3) = 0$
4. $2x_1 + x_2 - 3 \leq 0$
5. $x_1,\ x_2 \geq 0$
6. $\lambda \geq 0$

Dalla 1.2 so che $\lambda \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1+1} - 2\lambda \neq 0$

$$\begin{array}{rlll} (2.1) & & & \Rightarrow\ x_1 = 0 \\ (3) & \Rightarrow & 2x_1 + x_2 - 3 = 0 & \Rightarrow x_2 = 3 \\ (2.2) & \Rightarrow & x_2(1 - \lambda) = 0 & \Rightarrow \lambda = 1 \end{array}$$

16.2 Esercizio 2 - Medio

$$\begin{aligned} max\ f(x) = \ & x_1 + 2x_2 - x_2^3 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. 1 $1 - \lambda \leq 0$
   2 $2 - 3x_2^2 - \lambda \leq 1$
2. 1 $x_1(1 - \lambda) = 0$
   2 $x_2(2 - 3x_2^2 - \lambda) = 0$
3. $\lambda(x_1 + x_2 - 1) = 0$
4. $x_1 + x_2 - 1 \leq 0$
5. $x_1,\ x_2 \geq 0$
6. $\lambda \geq 0$

Dalla 1.1 so che $\lambda \geq 0$ quindi per la 3 $x_1 + x_2 = 1$
Suddivido l'esercizio in due casi:

- Sia $x_1 > 0$.
  Dalla 2.1 ottengo $\lambda = 1$
  Dalla 1.2 trovo che $3x_2^2 \geq 1 \Rightarrow x_2 \geq +\sqrt{\frac{1}{3}}$
  Per trovare il valore di x_1 utilizzo la 2.2 e trovo che $x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$
- Sia $x_1 = 0$.
  Ottengo che $x_2 = 1$ e dalla 2.2 che $\lambda = -1$ il che non è ammissibile

16.3 Esercizio 3 - Difficile

$$\begin{aligned} max\ f(x) = \ & 20x_1 + 10x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. 1 $20 - \lambda_1 2x_1 - \lambda_2 \leq 0$
   2 $10 - \lambda_1 2x_2 - \lambda_2 \leq 0$
2. 1 $x_1(20 - \lambda_1 2x_1 - \lambda_2) = 0$
   2 $x_2(10 - \lambda_1 2x_1 - \lambda_2) = 0$
3. 1 $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$

2 $\lambda_2(x_1 + 2x_2 - 2) = 0$

4. 1 $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$

   2 $x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0$

5. $x_1,\ x_2 \geq 0$

6. $\lambda \geq 0$

Per trovare la risoluzione di questo esercizio devo andare ad analizzare diversi casi:

- Sia $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
  Dalla 1.1 ottengo $20 \leq 0$ che è impossibile, quindi scarto questa opzione

- Sia $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$.
  Dalla 3.1 ottengo $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow 4 - 8x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_{12} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{10} = 1\ o\ \frac{3}{5}$
  Dalla 3.2 ottengo $x_1 + 2x_2 = 2 \rightarrow x_1 = 2 - x_2$

  Se $x_2 = 1$
  $\Rightarrow\ x_1 = 0$
  $(2.2) \Rightarrow\ 20 - \lambda_1 2x_2 - \lambda_2 = 0$
  $(2.1) \rightarrow\ \lambda_2 \geq 20 \Rightarrow\ \lambda_1 = 5 - \lambda_2$ è impossibile perche ≤ 0

  Se $x_2 = \frac{3}{5}$
  $\Rightarrow\ x_1 = \frac{4}{5}$
  $(2.1) \Rightarrow\ 20 - \frac{8}{5}\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
  $(2.2) \Rightarrow\ 10 - \frac{6}{5}\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow\ \lambda_2 = 10 - \frac{6}{5}\lambda_1$
  Ne consegue che: $\lambda_1 = 10 - \frac{8}{5}\lambda_1 + \frac{6}{5}\lambda_1 \Rightarrow -\frac{2}{5}\lambda_1 = -10 \rightarrow\ \lambda_1 = 25$
  Notiamo che $\lambda_2 < 0$ che non è ammissibile, quindi scarto anche questa opzione.

- Sia $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$
  Dalla 1.1 ottengo $20 - 2\lambda_1 x_1 \leq 0 \Rightarrow\ 2\lambda_1 x_1 \geq 20 \Rightarrow x_1 \geq \frac{10}{\lambda_1}$
  Dalla 1.2 ottengo $10 - 2\lambda_1 x_2 \leq 0 \Rightarrow\ 2\lambda_1 x_2 \geq 10 \Rightarrow x_2 \geq \frac{5}{\lambda_1}$
  Dalla 3.1 ottengo $\frac{100}{\lambda_1^2} + \frac{25}{\lambda_1^2} = 1 \Rightarrow \lambda_1^2 = 125 = 5\sqrt{5}$ e andando a sostituire trovo che i valori di x_1 e x_2 sono $x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$
  In conclusione noto che verificano tutti i vincoli e quindi non ammissibili.

- Sia $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$
  Dalla 1.2 trovo $10 - 2\lambda_1 x_2 - 2\lambda_2 \leq 0 \Rightarrow \lambda_2 \geq 5$
  Dalla 1.1 ottengo $\lambda_2 \geq 20$
  Dalla 3.2 so che $x_1 + 2x_2 = 2$
  Dalla 2.2 trovo che $x_2 = 0$ e di conseguenza dalla 3.2 ho che $x_1 = 2$
  Dalla 2.1 trovo $\lambda_2 = 20$
  Anche in questo caso tutte le variabili sono positive ma il vincolo 4.1 non è verificato. Quindi non è ammissibile.

17 29/11/2021 - Funzioni quadratiche

$$\begin{aligned} max\ f(x) = \quad & c^Tx + \tfrac{1}{2}x^TQx \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Mi basta trovare una soluzione ammissibile del problema

$$\begin{aligned} & QxA^Tu - y = 0 \\ & Ax + g = b \\ & x^Ty + u^Tv = 0 \\ & x,\ y,\ u,\ v \geq 0 \end{aligned}$$

17.1 Esercizio 1

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = \quad & 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Sappiamo che

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 30 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} 15 \\ 30 \end{vmatrix}$$

per trovare Q so che $-\frac{1}{2}x^TQx = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_1x_2$. Quindi

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}q_{11}x_1^2 = -2x_1^2 \Rightarrow q_{11} = 4 \\ -\frac{1}{2}x_1x_2q_{12} \cdot 2 = 4x_1x_2 \Rightarrow q_{12} = q_{21} = -4 \\ -\frac{1}{2}x_2^2q_{22} = -4x_2^2 \Rightarrow q_{22} = 8 \end{cases}$$

Ora so che

$$Q = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x_1^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & -2x_2^2 \end{vmatrix}$$

Vado a impostare il problema da risolvere

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}u - \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 \\ 30 \end{vmatrix} \\ & \begin{vmatrix} 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}v = 30 \\ & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} + uv = 0 \\ & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ u,\ v \geq 0 \end{aligned}$$

A questo punto andiamo a impostare il simplesso modificato

$$\begin{aligned} & 4x_11 - 4x_2 + u - y_1 = 15 \\ & -4x_1 + 8x_2 + 2u - y_2 = 30 \\ & x_1 + 2x_2 = 30 \\ & x_1y_1 + x_2y_2 + uv = 0 \\ & x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ u,\ v \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} min\ z = \quad & z_1 + z_2 \\ & 4x_1 - 4x_2 + u - y_1 + z_1 = 15 \\ & -4x_1 + 8x_2 + 2u - y_2 + z_2 = 30 \\ & x_1 + 2x_2 + v = 30 \\ & x_1y_1 + x_2y_2 + uv = 0 \end{aligned}$$

17.2 Esercizio 2

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = \quad & 20x_1 + 50x_2 + 18x_1x_2 - 20x_1^2 - 5x_2^2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 18 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Sappiamo che

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 6 \\ 18 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} 20 \\ 50 \end{vmatrix} \quad Q = \begin{vmatrix} 40 & -18 \\ -18 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x_1^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & -2x_2^2 \end{vmatrix}$$

vado a impostare il problema da risolvere

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 40 & -18 \\ -18 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 50 \end{vmatrix} \\ & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 18 \end{vmatrix} \\ & x^T y + u^T v = 0 \end{aligned}$$

A questo punto andiamo a impostare il simplesso modificato

$$\begin{aligned} & 40x_1 - 18x_2 + u_1 + u_2 - y_1 = 20 \\ & -18x_1 + 10x_2 + u_1 + 4u_2 - y_2 = 50 \\ & x_1 + x_2 + v_1 = 6 \\ & x_1 + 4x_2 + v_2 = 18 \\ & x_1y_1 + x_2y_2 + u_1v_1 + u_2v_2 = 0 x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ u,\ v \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} min\ z = \quad & z_1 + z_2 \\ & 40x_1 - 18x_2 + u_1 + u_2 - y_1 + z_1 = 20 \\ & -18x_1 + 10x_2 + u_1 + 4u_2 - y_2 + z_2 = 50 \\ & x_1 + x_2 + v_1 = 6 \\ & x_1 + 4x_2 + v_2 = 18 \\ & x_1y_1 + x_2y_2 + u_1v_1 + u_2v_2 = 0 \end{aligned}$$