Algoritmo del simplesso - fase I e fase II

Ricerca Operativa [035IN]

Lorenzo Castelli

18 Ottobre 2021

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE

Algoritmo del simplesso

1. **Inizializzazione**. Determinare una soluzione di base ammissibile
2. **Verifica dell'ottimalità**. Se $y_{0j} \geq 0 \, \forall j \in R$, la soluzione corrente è ottima e l'algoritmo termina, altrimenti andare al passo 3.
3. **Scelta della variabile entrante in base**. Scegliere una variabile fuori base x_k tale che $y_{0k} < 0$ ed andare al passo 4.
4. **Scelta della variabile uscente dalla base**. Scegliere una variabile x_{Br} tale che $y_{i0}/y_{ir} = \min\{y_{i0}/y_{ik} : j \in R, y_{ik} > 0\}$. Se $y_{ik} < 0 \ \forall i$, la soluzione del problema è illimitata, e l'algoritmo termina. Altrimenti si va al passo 5.
5. **Pivoting**. Risolvere i vincoli di uguaglianza esprimendo le nuove variabili in base x_k e $x_{Bi} \forall i \neq k$, in funzione delle nuove variabili fuori base x_{Bi} e $x_j \ \forall j \in R - \{k\}$. La nuova BFS si ottiene ponendo le nuove variabili fuori base a zero. Andare al passo 2.

- Nell'algoritmo del simplesso si distingue una **fase I**, che consiste nel passo di inizializzazione in cui viene individuata una prima BFS, e una **fase II**, che consiste nel determinare la BFS ottima a partire dalla prima BFS.
- La fase II è stata già illustrata, la fase I viene illustrata in seguito.
- La verifica se il problema è illimitato può anche venire fatta durante la fase II controllando tutte le colonne associate a costi ridotti positivi (e quindi coefficienti nel tableau negativi), se le colonne sono numerose questa verifica può essere onerosa.

Fase I - Individuazione della prima BFS

In alcuni casi una prima base ammissibile è immediata. Si supponga infatti che il problema sia formulato come

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{cx} \\ \mathbf{Hx} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

con $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, allora la sua trasformazione in forma standard introduce delle variabili di slack $\mathbf{s}$ le cui corrispondenti colonne formano la prima base ammissibile

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{cx} \\ \mathbf{Hx} + \mathbf{Is} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Riordinando le colonne si ottiene

$$\mathbf{A} = [\mathbf{I}|\mathbf{H}], \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{N} = \mathbf{H},$$

dove chiaramente

$$\text{rango}\{\mathbf{A}\} = m \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}.$$

Forma canonica

Definizione

Qualora un problema di PL in forma standard ha le matrice $\mathbf{A}$ che si può esprimere come

$$\mathbf{A} = [\mathbf{I}|\mathbf{H}], \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{N} = \mathbf{H},$$

allora il problema è detto essere espresso in forma canonica

Non è immediato esprimere un problema di PL in forma canonica in presenza di disuguaglianze di verso opposto, infatti le variabili di surplus hanno coefficienti negativi, o in presenza di vincoli di uguaglianza.

Formulazione iniziale

$$\begin{aligned} \min z = 4x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Formulazione standard

$$\begin{aligned} \max z = -4x_1 - x_2 & \\ 3x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Questa formulazione standard NON è una forma canonica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se il problema è nella forma standard, ottenuto solo da vincoli di tipo $=$ e $\geq$, si introducono m variabili artificiali $\mathbf{u}$ e si formula il problema di fase I

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{fase I} \quad \begin{aligned} \min w &= \mathbf{1u} \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{Iu} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Per il problema di fase I è immediato determinare una base iniziale ammissibile.

Il problema di fase I ammette una soluzione ottima w^* non negativa per costruzione,

- se $w^* > 0$ allora il problema fase I non ha soluzioni ammissibili $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ t.c. $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e quindi non esiste $\mathbf{x}$ t.c. $\mathbf{Ax} + \mathbf{I0} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, da cui il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ non è compatibile e il problema di PL non ha soluzioni ammissibili
- se $w^* = 0$ allora la componente della soluzione ottima $\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*$ è t.c. $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{x}^*$ è t.c. $\mathbf{Ax}^* + \mathbf{I0} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$. Poiché $\mathbf{x}^*$ ha al più m componenti non nulle essa può essere presa come prima BFS del problema originale.

Esempio - Fase I

$$
\begin{aligned}
\min w = u_1 + u_2 \qquad & \Rightarrow \max w = -u_1 - u_2 \\
3x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad & + u_1 \qquad\quad = 3 \\
4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad\qquad & \qquad\quad + u_2 = 6 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad & \qquad\qquad\quad = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Data la presenza di una varabile di slack, bastano solo due variabili artificiali (u_1, u_2).

u_1, u_2, x_4 è la base iniziale

si devono annullare
questi coefficienti*

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	
z	0	0	0	0	1	1	0
u_1	3	1	0	0	1	0	3
u_2	4	3	-1	0	0	1	6
x_4	1	2	0	1	0	0	4

base

* **ATTENZIONE**: questo tableau non è espresso rispetto alla base scelta e quindi non può ancora essere eseguito il test di ottimalità.

la BFS corrente non è ottima

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	
z	-7	-4	1	0	0	0	-9
u_1	3	1	0	0		0	3
u_2	4	3	-1	0	0	1	6
x_4	1	2	0	1	0	0	4

tableau finale

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	
z	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$	$-1/5$	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	0	$-4/5$	$3/5$	$6/5$
x_4	0	0	1	1	1	-1	1

con questi valori può essere inizializzato il tableau del problema originale

Esempio - Tableau iniziale problema originario (Fase II)

si devono annullare
questi coefficienti

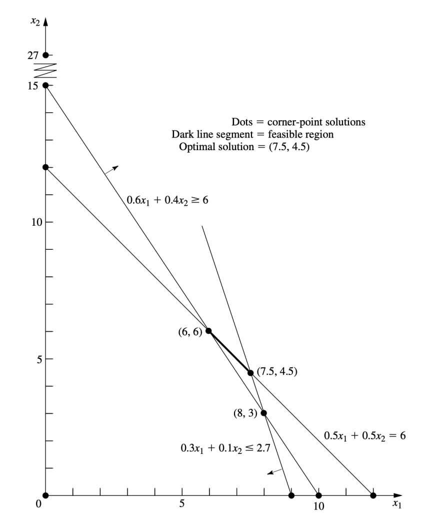
	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	4	1	0	0	0
x_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
x_4	0	0	1	1	1

base

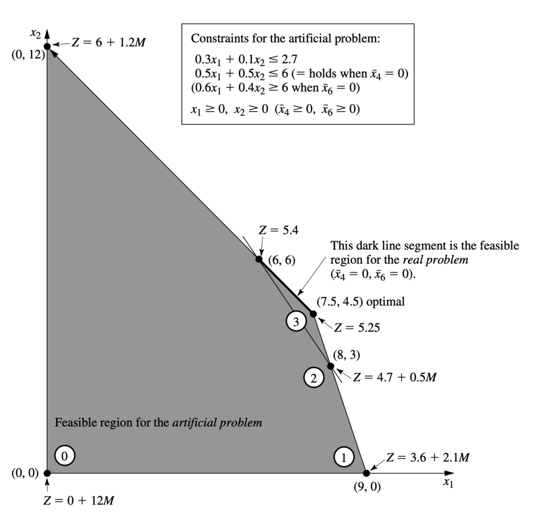
	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	0	$-1/5$	0	$-18/5$
x_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
x_4	0	0	1	1	1

Esempio - Radioterapia

$$
\begin{aligned}
\min z = & 0.4x_1 + 0.5x_2 \\
& 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \\
& 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\
& 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

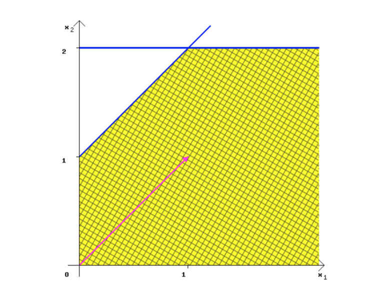

x_2
27
15
10
5
0
5
10
x_1
Dots = corner-point solutions
Dark line segment = feasible region
Optimal solution = (7.5, 4.5)
$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$
(6, 6)
(7.5, 4.5)
(8, 3)
$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$
$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$

Esempio - Radioterapia



Non esiste soluzione ottima

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Non esiste soluzione ottima

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	-1	-1	0	0	0
x_3	-1	1	1	0	1
x_4	0	1	0	1	2

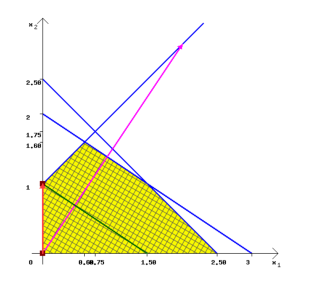
Possono entrare in base sia x_1 che x_2. Scegliendo x_1 si vede che nessuna variabile può uscire dalla base:

$$x_3 = 1 + x_1 - x_2; x_4 = 2 - x_2$$

Quindi la funzione obiettivo può crescere al’infinto: soluzione illimitata.

Si verifichi che si ottiene lo stesso risultato facendo entrare in base x_2

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 2.5$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Infinite soluzioni ottime

Tableau finale quando all'inizio entra in base x_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	1	0	0	6
x_1	1	0	$1/5$	0	$-3/5$	$3/5$
x_2	0	0	$-2/5$	1	$1/5$	$3/10$
x_4	0	1	$1/5$	0	$2/5$	$8/5$

Si osserva che $z = 6 - x_3 + 0 * x_5$

Facendo entrare in base x_5 esce x_4 (quindi ci sposta su un vertice adiacente) ma il valore della funzione obiettivo non cambia.

Si determini il tableau che si ottiene facendo entrare in base x_1. Si troverà che anche in questo caso **un coefficiente della funzione obiettivo associato ad una variabile fuori base è nullo**.

Thank you for your attention