Teoria dei giochi - Strategie pure

Ricerca Operativa [035IN]

Lorenzo Castelli

26 Ottobre 2021

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Fino a questo momento abbiamo analizzato prevalentemente problemi in cui il decisore era unico.
- Mostriamo ora casi in cui si abbiano più decisori che agiscono sullo stesso sistema ma con interessi fra loro non coincidenti, cioè in situazioni di conflitto.
- Il risultato di ogni decisore viene a dipendere dalle sue scelte ma anche da quelli degli altri decisori, il che è appunto ciò che accade in situazioni di conflitto.
- il primo tentativo sistematico di studiare questi problemi è stato condotto dal matematico Von Neumann negli anni che precedettero la seconda guerra mondiale e ha dato vita ad una fortunata branca della matematica applicata nota con il nome di teoria dei giochi.

Terminologia

- In un gioco ciascuno dei decisori che vengono normalmente chiamati giocatori ha una funzione obiettivo (che può essere un costo o un beneficio) detto spessa funzione di payoff.
- Esistono giochi anche con n giocatori ognuno dei quali fa le sue scelte conoscendo completamente o solo in parte (informazione incompleta) le caratteristiche del problema.
- Un gioco è detto deterministico se in esso non interviene il caso.
- Il risultato di un gioco deterministico, cioè il valore delle varie funzioni di payoff $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ per tutti gli n giocatori, è perfettamente noto una volta che siano note le scelte dei vari giocatori.

- Se ogni giocatore ha a disposizione un numero infinito di scelte il gioco si dice continuo per distinguerlo dal caso, detto discreto, in cui le variabili hanno numero finito di possibili valori e quindi anche il gioco presenta un numero finito di possibili conclusioni.
- A seconda del tipo di situazione si possono avere
  - Casi di conflitto puro
  - Casi in cui è possibile la cooperazione tra i giocatori
  - Casi in cui alcuni giocatori posso coalizzarsi con altri

Giochi a somma nulla

Definzione

Se la somma delle funzioni di payoff di tutti i giocatori è uguale a 0 diremo che si tratta di un gioco a somma nulla.
Se invece è diversa da 0 diremo che il gioco è a somma non nulla.

Esiste una sostanziale differenza tra questi due casi: nel secondo infatti può accadere che si abbiano soluzioni vantaggiose per tutti gli n giocatori, purché questi cooperino, mentre nel primo caso ciò è escluso: qualcuno vince qualcuno perde.

Due giocatori

Nel caso particolare di due giocatori se risulta

$$f_1 + f_2 = 0$$

e quindi $f_1 = -f_2$ si dice che il gioco è a due persone e a somma nulla. In questo caso non è possibile né la cooperazione né la coalizione fra i due giocatori perché ciò che un giocatore vince viene perso dall'altro.

Un gioco stupido (i)

Lucy e Linus giocano. Ciascuno di loro compie l'azione di mostrare contemporaneamente all'altro uno o due dita: Linus paga a Lucy tanti centesimi quant'è la somma delle dita.

Si tratta di un gioco con scarse probabilità di successo poiché nessuna persona sana di mente accetterebbe il ruolo di Linus.

Le coppie di strategie possibili sono quattro e precisamente, indicando prima la scelta di Lucy e poi quella di Linus:

- 1 dito - 1 dito
- 1 dito - 2 dita
- 2 dita - 1 dito
- 2 dita - 2 dita

Un gioco stupido (ii)

Il gioco si esaurisce con una coppia di mosse dei due giocatori dopodiché si può stabilire il risultato.

Le vincite di Lucy (che poi sono le perdite di Linus) si possono esprimere mediante una matrice 2 × 2 molto semplice (sulle righe sono elencate le mosse di Lucy e sulle colonne quelle di Linus).

		Linus	
		$1d$	$2d$
Lucy	$1d$	2	3
	$2d$	3	4

Possibili scelte

- In ogni partita se Lucy sceglie la strategia $1d$ (cioè mostra un dito) il minimo che vince e 2, se sceglie $2d$ (cioè mostra due dita) il minimo che vince è 3. Per ogni strategia di Lucy esiste un valore minimo della sua vincita indipendentemente dalle scelte di Linus. Il massimo di questi minimi è detto max-min che significa appunto massimo dei minimi (delle vincite). Nel nostro esempio è 3 e Lucy lo ottiene giocando $2d$.
- Dal punto di vista di Linus, se egli sceglie di giocare $1d$ può perdere al massimo 3. Se sceglie di giocare $2d$ può perdere al massimo 4. Il minimo di questi massimi è quindi 3 e Linus lo tiene giocando $1d$: questo valore viene detto min-max, cioè il minimo dei massimi (delle perdite).
- In conclusione, a Lucy conviene sempre giocare $2d$, mentre a Linus converrà sempre giocare $1d$: a entrambi conviene fare la scelta corrispondente alla mossa che dà il max-min o il min-max rispettivamente, per tutte le partite future.
- La casella che corrisponde alle due strategie dà come risultato $+3$ per Lucy e -3 per Linus: nessuno dei due ha interesse a modificare la sua scelta durante le varie partite del gioco perché peggiorerebbe il suo risultato. Questa casella rappresenta quindi un punto di equilibrio per il gioco.

		Linus	
		$1d$	$2d$
Lucy	$1d$	2	3
	$2d$	3	4

Gioco

Un gioco è un insieme di partite fatte seguendo un sistema di regole; una partita è un insieme di azioni dette mosse fatte secondo le regole, che si conclude con un risultato per ciascuno dei partecipanti, detti giocatori.

Le regole devono essere non ambigue e non contraddittorie e devono permettere di precisare lo stato iniziale e quello finale del gioco. Ogni gioco è quindi analizzabile in linea di principio con un sistema in grado di evolversi nel tempo, compiendo una serie di transizioni definite dalle regole del gioco.

Strategia

Una strategia è costituita da uno o più principi di scelta in base ai quali il giocatore decide l'insieme delle azioni secondo cui sviluppare il gioco.

Una strategia deve essere in grado di determinare le scelte di tutte le situazioni che possono presentarsi. Quindi una strategia è l'insieme dei principi che determinano le mosse durante il gioco.

Strategie pure e miste

Se una strategia adotta a priori la decisione di fare sempre la stessa scelta per tutte le partite, essa viene detta pura; se la scelta viene fatta di volta in volta in base allo sviluppo del gioco o qualche altro criterio, si parla di strategia mista.

Per giochi a due persone a somma nulla, se sono di tipo discreto, essi sono completamente descritti assegnando una sola matrice che è detta matrice del gioco.

A ogni coppia di strategie è possibile associare una funzione di beneficio (cioè una vincita) o di costo (cioè una perdita) che dipende dalle scelte dei due giocatori: di solito si preferisce usare solo la funzione di beneficio del primo giocatore (che è anche la funzione di costo del secondo), indicando in essa con segno “ $-$ ” i benefici negativi (cioè i costi) per lui.

Dato un gioco di tipo discreto con due giocatori *A* e *B*, a somma nulla, se il giocatore *A* dispone di m' scelte $a_1, a_2, \dots, a_{m'}$ e il giocatore *B* di m'' scelte $b_1, b_2, \dots, b_{m''}$ il gioco si dice $m' \times m''$ dalle dimensioni della matrice del gioco che lo rappresenta.

La matrice è descritta dal punto di vista di *A*. Se ci riferissimo a *B* dovremmo cambiare segno a tutti gli elementi della matrice. D'ora in poi chiameremo tali elementi con c_{ij}, per $1 \leq i \leq m'$ e $1 \leq j \leq m''$.

	b_1	b_2	$\dots$	$b_{m''}$
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	$c_{1m''}$
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	$c_{2m''}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$a_{m'}$	$c_{m'1}$	$c_{m'2}$	$\dots$	$c_{m'm''}$

Il gioco è completamente descritto dalla seguente matrice delle vincite di *A*.

Scelta di A

A gioca cercando di vincere il più possibile, ma sa che B cerca di minimizzare le perdite. Quindi A determina riga per riga la sua vincita nel caso peggiore, cioè determina il valore minimo di ogni riga. Sia v_i la vincita peggiore nella riga i-esima, cioè

$$v_i = \min_{j=1,\dots,m''} c_{ij} \quad \text{per } i = 1, \dots, m'$$

Siccome A vuole vincere il massimo possibile qualunque cosa faccia B, egli sceglie una strategia (cioè la riga) che gli dà il massimo valore di v_i, cioè la vincita massima del caso peggiore. In definitiva secondo questa logica possiamo definire le vincite di A nel modo seguente:

$$v^\circ = \max_{i=1,\dots,m'} v_i = \max_{i=1,\dots,m'} \left(\min_{j=1,\dots,m''} c_{ij} \right)$$

Il valore v° viene chiamato valore inferiore del gioco o valore di max-min per A: con questa strategia egli non può vincere meno di v°.

Scelta di B

B gioca cercando di perdere il meno possibile. Quindi B determina colonna per colonna la sua perdita maggiore, cioè determina il valore massimo di ogni colonna. Sia w_j la perdita maggiore nella colonna j-esima, cioè

$$w_j = \max_{i=1,\ldots,m'} c_{ij} \quad \text{per } j = 1, \ldots, m''$$

Siccome B vuole perdere il meno possibile qualunque cosa faccia A, egli sceglie una strategia (cioè la colonna) che gli dà il minimo valore di w_j, cioè la perdita minima del caso peggiore. Si possono quindi definire le perdite di B nel modo seguente:

$$w^\circ = \min_{j=1,\ldots,m''} w_j = \min_{j=1,\ldots,m''} \left(\max_{i=1,\ldots,m'} c_{ij} \right)$$

Il valore w° viene chiamato valore superiore del gioco o valore di min-max per B: con questa strategia egli non può perdere più di w°.

Max-min e min-max

Si ha un gioco a somma nulla 3 × 4 cui associata la seguente matrice delle vincite:

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	-3	6	2
a_2	-1	-5	-6	8
a_3	3	4	3	1

$v_i = \min_{j=1,\ldots,4} c_{ij}$ per $i = 1, 2, 3$ si ha che $v_1 = -3$, $v_2 = -6$ e $v_3 = 1$. Quindi $v^\circ = max_{i=1,2,3} v_i = \max\{-3, -6, 1\} = 1$, cioè la scelta a_3.

$w_j = \max_{i=1,2,3} c_{ij}$ per $j = 1, 2, 3, 4$ si ha che $w_1 = 3$, $w_2 = 4$, $w_3 = 6$ e $w_4 = 8$. Quindi $w^\circ = min_{j=1,\ldots,4} w_j = \min\{3, 4, 6, 8\} = 3$, cioè la scelta b_1.

Si osservi che $v^\circ \neq w^\circ$.

Può succedere che $v^\circ = w^\circ$ e cioè che il valore inferiore il valore superiore coincidono. Quando ciò accade siamo presenza di un punto di sella.

Valore ottimo

Si dice punto di sella di una matrice a due dimensioni l'elemento della matrice (se esiste) che è contemporaneamente il minimo della sua riga e il massimo della sua colonna. Lo indichiamo con $\ll^\circ\gg$ e lo chiamiamo valore ottimo del gioco.

Equilibrio di Nash

Se un gioco possiede un punto di sella le strategie di A e di B che lo determinano sono dette strategie ottime e la soluzione (cioè il punto di sella) è un punto di equilibrio.

Punto di equilibrio

Un punto di equilibrio o punto di Nash è una coppia di strategie pure che determinano una soluzione nella quale nessuno dei due giocatori ha interesse a spostarsi se non lo fa anche il suo avversario.

La coppia di strategie che determinano un punto di equilibrio costituiscono la soluzione ottima del gioco.

In altre parole se esiste un punto di equilibrio è conveniente giocare sempre la coppia di strategie pure che lo realizzano.

I punti di equilibrio rappresentano infatti situazioni di stabilità nel senso che, una volta che i due giocatori hanno deciso di giocare le strategie di equilibrio, nessuno dei due è più interessato a muoversi.

John Nash, premio Nobel per l'Economia nel 1994. Un famoso film ne racconta la vita: "A beautiful mind" `https://www.youtube.com/watch?v=EajIlG_OCvw`. Tratto dal libro "Il genio dei numeri, Storia di John Nash, matematico e folle", di Sylvia Nasar, Rizzoli, 1999.

Esempio 1

Consideriamo il gioco con la seguente matrice

	b_1	b_2	b_3
a_1	2	1	4
a_2	2	0	1

Si osserva che nessun elemento della prima riga è inferiore a quello corrispondente della seconda riga. Si dice quindi che la prima riga è dominante allora il primo giocatore sceglie certamente la prima riga, e $v^\circ = 1$.

Analogamnte si osserva che la seconda colonna domina le altre due (ha tutti i coefficienti più piccoli di quelli corrispondenti sulle altre colonne) e quindi consente la minor perdita. Il secondo giocatore sceglie certamente la seconda colonna, e $w^\circ = 1$.

c_{12} è il minimo della sua riga e il massimo della sua colonna. E' un punto di equlibrio di Nash.

$$c_{12} = \max_i \min_j c_{ij} = \min_j \max_i c_{ij} = 1$$

Esempio 2

	b_1	b_2	b_3	min
a_1	-3	-2	6	-3
a_2	2	0	2	0
a_3	5	-2	-4	-4
max	5	0	6	

Non c'è nessuna riga o colonna dominante.

c_{22} è il minimo della sua riga e il massimo della sua colonna. E' un punto di equlibrio di Nash.

$$c_{22} = \max_i \min_j c_{ij} = \min_j \max_i c_{ij} = 0$$

Esempio 3

	b_1	b_2	b_3	min
a_1	0	-2	2	-2
a_2	5	4	-3	-3
a_3	2	3	-4	-4
max	5	4	2	

Si osserva che $v^\circ = \max_i \min_j c_{ij} = -2$ mentre $w^\circ = \min_j \max_i c_{ij} = 2$, quindi $v^\circ \neq w^\circ$. Infatti $v^\circ = c_{12}$, mentre $w^\circ = c_{31}$. Gioco instabile o ciclico.

Si supponga che ogni giocatore sappia che l'altro gioca in maniera razionale (minor perdita). Se quindi B si aspetta che A scelga a_1, B sceglierà b_2. Ma sospettando ciò A gioca a_2 e quindi B giocherà b_3, ma allora A sceglie a_1 e si ritorna al punto di partenza.

Il dilemma del prigioniero

Due malfattori, accusati di aver commesso una serie di delitti, vengono catturati e rinchiusi in due celle separate, senza alcuna possibilità di comunicazione.

Entrambi sanno che le prove contro di loro non sono conclusive e conoscono bene il sistema giudiziario del loro paese, che tiene in grande considerazione la confessione dell'imputato.

Ogni prigioniero ha due alternative: non confessare (N) oppure confessare (C).

Se entrambi non confessano (N,N) sanno che potranno venire accusati solo di qualche reato minore e ognuno dovrà scontare un anno di prigione. Se entrambi confessano (C,C) verranno condannati a 8 anni di prigione dal momento che il giudice commina una pena inferiore al massimo previsto (10 anni). Se invece un prigioniero non confessa e l'altro sì, il primo riceverà il massimo della pena (10 anni) mentre colui che ha tradito il compagno se la caverà con mezzo anno di prigione.

Il gioco presenta pertanto la seguente tabella di perdite

	N	C
N	1,1	10, 1/2
C	1/2,10	8,8

È interessante notare che l'unico punto di equilibrio del gioco e la coppia di strategie (C,C) che dà risultati peggiori per entrambi giocatori rispetto la coppia (N,N) che non è un punto di equilibrio.

Infatti ogni prigioniero preso singolarmente, nella situazione (N,N), ha interesse a confessare dal momento che ciò migliora la sua posizione qualsiasi sia la scelta dell'altro su cui egli non può influire.

Il caso (N,N), che consente complessivamente il risultato migliore, si ha solo se ciascuno è disposto a sacrificare qualcosa rispetto la propria situazione ottimale (mezzo anno di prigione) e se ha fiducia nel fatto che lo farà anche un altro, cioè i due giocatori devono cooperare.

Thank you for your attention