Il metodo del simplesso in forma matriciale

Ricerca Operativa [035IN]

Lorenzo Castelli

12 Ottobre 2021

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Tableau

L'insieme dei vincoli e della funzione obiettivo possono essere scritti come un sistema lineare rispetto al quale si può supporre di aver individuato una base $\mathbf{B}$ ammissibile

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}_B^T & -\mathbf{c}_N^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

La quasi (manca la prima colonna) matrice estesa di questo sistema, composto dalle righe dei vincoli e dalla riga della funzione obiettivo, è detta tableau

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{c}^T & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_B^T & -\mathbf{c}_N^T & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Tableau iniziale

prima della relativizzazione rispetto alla base ***B*** scelta

valore dell'obiettivo (soluzione corrente)

coeff. dell'obiettivo

nomi delle variabili in base

nomi delle variabili fuori base

$$
\begin{array}{c|ccccc:cccccc|c}
 & x_{B_1} & \cdots & x_{B_r} & \cdots & x_{B_m} & \cdots & x_j & \cdots & x_k & \cdots & & \\
\hline
z & c_{B_1} & \cdots & c_{B_r} & \cdots & c_{B_m} & \cdots & c_j & \cdots & c_k & \cdots & & 0 \\
\hline
x_{B_1} & a_{1B_1} & \cdots & a_{1B_r} & \cdots & a_{1B_m} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & & b_1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
x_{B_r} & a_{rB_1} & \cdots & a_{rB_r} & \cdots & a_{rB_m} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rk} & \cdots & & b_r \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
x_{B_m} & a_{mB_1} & \cdots & a_{mB_r} & \cdots & a_{mB_m} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mk} & \cdots & & b_m \\
\hline
\end{array}
$$

coeff. delle variabili in base ***B***

valori delle variabili in base ***b*** (soluzione corrente)

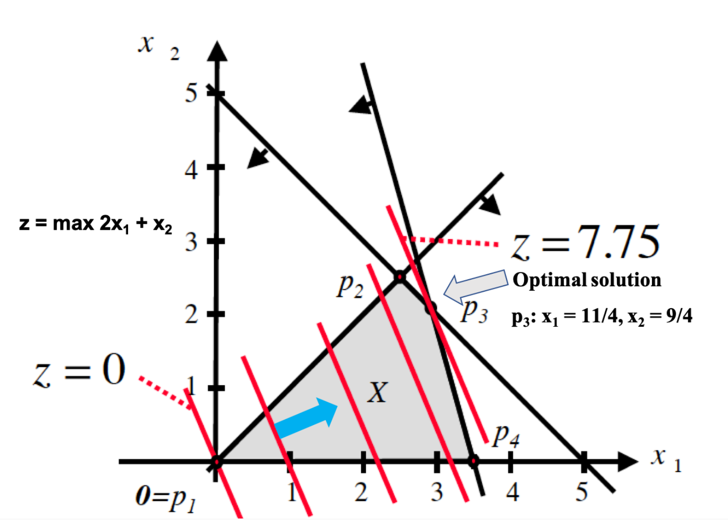
coeff. delle variabili fuori base ***N***

Sia dato il problema

$$
\begin{aligned}
\max z = & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& -x_1 + x_2 \leq 0 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Non è in forma standard, ma espresso solo in termini delle variabili strutturali (cioè quelle che hanno un immediata corrispondenza fisica col sistema reale che viene modellato)

Rappresentazione grafica - Esempio



Problema LP - esempio

Lo si trasforma in forma standard introducendo le variabli di slack x_3, x_4, x_5

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 5 \\ -x_1 + x_2 + \quad x_4 \quad &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + \qquad x_5 &= 21 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Tableau

tableau iniziale a colonne riordinate

(sia noto che le colonne 3, 4 e 1 formino una base iniziale ammissibile)*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	-2	-1	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	5
x_4	-1	1	0	1	0	0
x_5	6	2	0	0	1	21

$\Rightarrow$

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	0	0	-2	0	-1	0
x_3	1	0	1	0	1	5
x_4	0	1	-1	0	1	0
x_1	0	0	6	1	2	21
		$\boldsymbol{B}$		$\boldsymbol{N}$		$\boldsymbol{b}$

Esplicitando la funzione obiettivo:

$$z = \mathbf{c}\mathbf{x} = [\mathbf{c}_B \mathbf{c}_N] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{array} \right] = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N \tag{1}$$

e sostituendo in (1) l'espressione delle variabili di base:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N} \tag{2}$$

si ottiene:

$$z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N\right) \mathbf{x}_N \tag{3}$$

Il valore dell'obiettivo corrispondente alla base $\mathbf{B}$ è quindi $z(\mathbf{B}) = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Le relazioni (2) e (3) esprimono rispettivamente i vincoli e la funzione obiettivo in funzione delle variabli fuori base.

Raccogliendo le $m+1$ equazioni di (2) e (3) in forma matriciale si ottiene

$$\left[\begin{array}{c} z \\ \mathbf{x}_B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \end{array}\right] \mathbf{x_N} \tag{4}$$

Il corrispondente tableau risulta essere

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right]$$

matrice pivoting tableau

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}
\begin{array}{c|ccc:cc|c}
 & x_3 & x_4 & x_1 & x_5 & x_2 & \\ \hline
z & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ \hline
x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\
x_4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
x_1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 21 \\ \hline
\end{array}
=
$$

B^{-1}

$$
=
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_3 & x_4 & x_1 & x_5 & x_2 & \\ \hline
z & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 7 \\ \hline
x_3 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & 2/3 & 3/2 \\
x_4 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & 4/3 & 7/2 \\
x_1 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/3 & 7/2 \\ \hline
\end{array}
$$

Al fine di una scrittura più compatta sia S l'insieme degli indici delle variabili in base, le colonne di $\mathbf{B}$, e R l'insieme degli indici delle variabili fuori base, le colonne di N, e si ponga

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ \vdots \\ y_{mo} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{.j} - c_j \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{.j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0j} \\ y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix} \quad \forall j \in R$$

dove $\mathbf{A}_{.j}$ e c_j sono rispettivamente la colonna di $\mathbf{N}$ ed il coefficiente di $\mathbf{c}$ che moltiplicano la $j-$ma variabile fuori base.

La componente $j-$ma della BFS e l'obiettivo si possono quindi riscrivere come

$$z = y_{00} - \sum_{j \in R} y_{0j} x_j$$

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R} y_{ij} x_j$$

Tableau

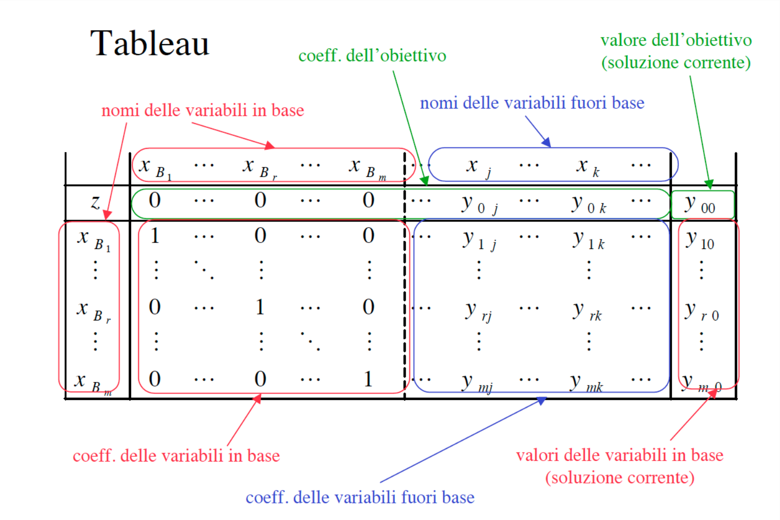


Tableau
coeff. dell’obiettivo
valore dell’obiettivo
(soluzione corrente)
nomi delle variabili in base
nomi delle variabili fuori base
coeff. delle variabili in base
coeff. delle variabili fuori base
valori delle variabili in base
(soluzione corrente)

Soluzione PL (esempio)

$S=\{3,4,1\}$
$R=\{5,2\}$

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	0	0	0	1/3	−1/3	7
x_3	1	0	0	−1/6	2/3	3/2
x_4	0	1	0	1/6	4/3	7/2
x_1	0	0	1	1/6	1/3	7/2
				$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_0$

$$z = y_{00} - \Sigma_{j\in R}\, y_{0j}\, x_j = 7 - 1/3\, x_5 + 1/3\, x_2$$

e.g., $$x_4 = y_{40} - \Sigma_{j\in R}\, y_{4j}\, x_j = 7/2 - 1/6\, x_5 - 4/3\, x_2$$

Verifica ottimalità soluzione corrente

L'obiettivo

$$z = y_{00} - \sum_{j \in R} y_{0j} x_j$$

data la corrente BFS vale $z(\mathbf{B}) = y_{00}$.

Se esiste un coefficiente $y_{0k} < 0 \, (k \in R)$, facendo diventare positiva la variabile fuori base x_k attualmente nulla, l'obiettivo aumenta di valore

$$z = y_{00} - y_{0k} x_k > y_{00} = z(\mathbf{B})$$

allora, compatibilmente col rispetto dei vincoli, conviene aumentare il più possibile il valore della variabile x_k.

Rispetto ammissibilità

Il vincolo generico associato all'elemento in base $i-$esimo

$$x_{Bi} = y_{i0} - \sum_{j \in R} y_{ij} x_j \geq 0$$

è rispettato dalla BFS corrente poiché $y_{i0} \geq 0$ e $x_j = 0$ per $j \in R$.

Tale vincolo rispetto alla variabile fuori base che si vuole incrementare diventa

$$x_{Bi} = y_{i0} - y_{ik} x_k \geq 0$$

- se il coefficiente y_{ik} è non positivo, x_k può incrementare a piacere senza violare la non negatività di x_{Bi},
- se il coefficiente y_{ik} è positivo, x_k, per rispettare la non negatività di x_{Bi}, può incrementare solo fino al valore y_{i0}/y_{ik},

Il massimo valore che x_k può assumere è quindi

$$x_k \leftarrow \min\{y_{i0}/y_{ik} : k \in R, y_{ik} > 0\}$$

Soluzione PL (esempio)

Data la soluzione corrente

$$z = 7 - 1/3x_5 + 1/3x_2$$

il coefficiente di x_2 è positivo, quindi conviene rendere il più positivo possible x_2, compatibilmente con i vincoli

$$x_3 = 3/2 + 1/6x_5 - 2/3x_2 \geq 0 \Rightarrow 3/2 - 2/3x_2 \geq 0$$
$$x_4 = 7/2 - 1/6x_5 - 4/3x_2 \geq 0 \Rightarrow 7/2 - 4/3x_2 \geq 0$$
$$x_1 = 7/2 - 1/6x_5 - 1/3x_2 \geq 0 \Rightarrow 7/2 - 1/3x_2 \geq 0$$

Il valore massimo assumibile da x_2

$$x_2 \leftarrow \min\{9/4, 21/8, 21/2\} = 9/4$$

Tableau

Soluzione PL (esempio)

pivot entrante

		x_3	x_4	x_1	x_5	$\boxed{x_2}$		
	z	0	0	0	$1/3$	$-1/3$	7	
uscente	$\boxed{x_3}$	1	0	0	$-1/6$	$\boxed{2/3}$	$3/2$	$3/2 \cdot 3/2 = 9/4 (= 2{,}25)$
	x_4	0	1	0	$1/6$	$4/3$	$7/2$	$7/2 \cdot 3/4 = 21/8 (= 2{,}62)$
	x_1	0	0	1	$1/6$	$1/3$	$7/2$	$7/2 \cdot 3 = 21/2 (= 10{,}5)$

Sia y_{rk} il valore per cui si ottiene il $\min\{y_{i0}/y_{ik} : k \in R, y_{ik} > 0\}$.

Tale valore è detto pivot.

Se x_k assume il massimo valore ammissibile allora i valori delle componenti di $\mathbf{x}$, in particolare quelle in base che quindi dipendono da x_k, variano nel modo seguente,

$$x_k \leftarrow y_{r0}/y_{rk}$$
$$x_j \leftarrow 0, \forall j \in R - \{k\}$$
$$x_{Bi} \leftarrow y_{i0} - y_{ik}(y_{r0}/y_{rk}), \forall i \in S$$

e quindi

$$x_{Br} \leftarrow 0$$

Per potere iterare il ragionamento conviene esprimere le soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, in funzione delle variabili che dopo l'aggiornamento hanno certamente valore nullo. Le equazioni associate alla componente $i-$ma della BFS e l'obiettivo si dovranno quindi riscrivere come:

$$z = y_{00} - y_{0k}y_{r0}/y_{rk} - \sum_{j\in R-\{k\}} (y_{0j} - y_{0k}y_{rj}/y_{rk})x_j + y_{0k}/y_{rk}x_{Br}$$

$$x_{Bi} = y_{i0} - y_{jk}y_{r0}/y_{rk} - \sum_{j\in R-\{k\}} (y_{ij} - y_{ik}y_{rj}/y_{rk})x_j + y_{jk}/y_{rk}x_{Br} \quad \forall i \in S - \{r\}$$

$$x_k = y_{r0}/y_{rk} - \sum_{j\in R-\{k\}} (y_{rj}/y_{rk}x_j + 1/y_{rk}x_{Br})$$

ovvero si è cambiata la base

$$S \leftarrow S \cup \{k\} - \{r\}$$
$$R \leftarrow R \cup \{r\} - \{k\}$$

Soluzione PL (esempio)

nuovo
valore
obiettivo

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	$1/2$	0	0	$1/4$	0	$\boxed{31/4}$
x_2	$3/2$	0	0	$-1/4$	1	$9/4$
x_4	-2	1	0	$1/2$	0	$1/2$
x_1	$-1/2$	0	1	$1/4$	0	$11/4$

nuova base

Iterazione

- Si ridefiniscono i vettori $\mathbf{y}_j$ e $\mathbf{y}_0$
- si verifica l'ottimalità o meno della base,
  - se esistono dei coefficienti $y_{0k} < 0$ e $y_{rk} > 0$ si itera, ponendo attenzione al cycling se $y_{rk} = 0$
  - se esistono dei coefficienti $y_{0k} < 0$, ma non esiste alcun $y_{rk} > 0$, il problema è illimitato
  - se non esiste alcun coefficiente $y_{0k} < 0$ la soluzione correntemente in base è ottima

Soluzione PL (esempio)

coeff. non negativi

valore ottimo obiettivo

base ottima

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	$1/2$	0	0	$1/4$	0	$31/4$
x_2	$3/2$	0	0	$-1/4$	1	$9/4$
x_4	-2	1	0	$1/2$	0	$1/2$
x_1	$-1/2$	0	1	$1/4$	0	$11/4$

Condizioni di ottimalità

Dato un problema di PL in forma standard una soluzione di base $\mathbf{x}^*$, relativa alla base $\mathbf{B}$, è ottima se si verificano le seguenti condizioni:

1)	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{y}_0 \geq 0$	ammissibilità
2)	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{.j} - c_j \leq 0 \Rightarrow y_{0j} \geq 0 \quad \forall j$	non migliorabilità

In realtà la condizione 2) può essere praticamente verificata per le sole variabili fuori base, infatti le variabili in base hanno per costruzione costi ridotti sempre nulli e quindi soddisfano certamente la condizione data. La 2) quindi diventa

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_{.j} - c_j \leq 0 \Rightarrow y_{0j} \geq 0 \quad \forall j \in R$$

Thank you for your attention